Paradoja de Banach-Tarski y teoría de grupos

Pontificia Universidad
JAVERIANA
Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Autor: David Leonardo Ariza Sánchez.

Director: Mario Andrés Velásquez Méndez.

Trabajo de grado presentado para optar por el título de Matemático.

Índice general

Agradecimientos

En primera instancia, me gustaría agradecer a mi familia, por todo el apoyo brindado a lo largo de estos cinco años de carrera, porque no solo me dieron la oportunidad de estudiar en una excelente universidad, sino que siempre estuvieron pendientes de mí proceso y confiados en que podría culminarlo de la mejor manera.

En segundo lugar, agradecer a mis profesores Mario Velásquez y Leonardo Chacón, el primero, fue quién siempre estuvo presto a esclarecer para mi todas las dudas, no solo de este trabajo, sino a lo largo de toda la carrera y el segundo, por dedicar el tiempo a leer y corregir pacientemente el presente trabajo.

Resumen

El propósito de este trabajo de grado será dar una introducción a la teoría de grupos amenables. En el primer capítulo se estudiará la paradoja de Banach-Tarski, que más adelante se volvería en el ejemplo pionero de lo que un grupo amenable no debe permitir. En el segundo capítulo, se recreará la prueba de Tarski que da una primera definición de grupo amenable, junto con algunas propiedades clausurativas. Para el tercer capítulo se usarán herramientas de ánalisis funcional para dar una nueva caracterización de grupos amenables y poder dar algunos ejemplos concretos.

Finalmente, en el cuarto capítulo se dará una definición en términos de las $\mathcal{C}^*-$algebras, importantes para estudiar las algebras de Von-Neumann.

Contexto Histórico

En 1934 los matemáticos Stefan Banach y Alfred Tarski, habiéndose basado en trabajos previos hechos por:

1. Giuseppe Vitali, quién prueba que no todos los subconjuntos de la recta real admiten una noción de medida o tamaño.

2. Felix Hausdorff, quién en 1914 demuestra que, salvo un conjunto numerable, es posible duplicar la esfera $3-$dimensional.

Publican un artículo (ver [1]) en el que exponen un resultado contraintuitivo y paradójico, el cuál, en su versión más simple, asegura que podemos tomar una bola sólida $3-$dimensional, diseccionarla, rotar o mover las partes de tal manera que al reensamblarlas obtendremos 2 esferas idénticas a la original.

Este aparente absurdo, ahora bien conocido como **la paradoja de Banach-Tarski**, nos muestra ciertos problemas que puede traer el asumir el **axioma de elección**, como es la existencia de ciertos conjuntos para los cuales no se puede definir una medida bien comportada, entiéndase esta como una en la que los conjuntos no cambien de tamaño por solo moverlos. Para probar esto, Banach y Tarski definen en el artículo la noción de G**-paradojicidad**; que más adelante, Tarski estudiaría a fondo (ver [4] ó [7] capítulo 11), llegando así al siguiente teorema:

G no admite una descomopsición G paradójica sí y solo sí G admite una medida finitamente aditiva, G-invariante y de medida total 1.

Sin embargo, sería John Von Neumann, en 1929, el primero en nombrar estos grupos bajo el nombre **messbar** (cuya traducción es medible); posteriormente, en la década de 1950, Mahlon Marsh Day traduce está palabra como **amenable**.

Von Neumann caracterizaría los grupos **amenables** en términos de la existencia de una medida finitamente aditiva, G-invariante y de medida total 1; probaría, entre otras cosas, que los grupos abelianos eran amenables y, debido a la importancia del grupo libre en 2 generadores F_2 en la prueba de la paradoja de Banach-Tarski, conjeturaría lo siguiente:

Un grupo G es amenable sí y solo sí no contiene un subgrupo isomorfo a F_2.

Está presunción, conocida como *La conjetura de Von Neumann* o *El problema de Day*, fue refutada en 1980 por Alexander Yu. Olshanskii [3], quién, demostró la existencia de un grupo G infinito con la siguiente propiedad: para todo H subgrupo propio de G tal que $H \neq \{e_G\}$, se tiene que H es cíclico de orden un primo p fijo. Este grupo, ahora conocido como *El grupo monstruo de Tarski*, sirvió también para contestar otra duda de gran interés en la teoría de grupos conocida como *El problema de Burnside*.

Con la definición de Von Neumann de amenabilidad, también se pudo probar que la propiedad de ser amenable era estable por:

1. Tomar subgrupos.

2. Tomar cocientes por un subgrupo normal.

3. Tomar uniones dirigidas de grupos amenables.

Como se dijo anteriormente, sería Mahlon Marsh Day quién los nombraría como grupos **amenables**, además, introduciría la definición de **amenabilidad** mediante medias, gracias al isomorfismo entre el conjunto de medidas regulares y el espacio de funcionales lineales acotados $(\ell^\infty(G))^*$, que se obtiene gracias al Teorema de representación de Riesz (ver la **Proposición 9.4.7** de [8]).

Gracias a los aportes de M.M Day, se pudo utilizar herramientas de ánalisis funcional y ánalisis armónico en el estudio de grupos **amenables** y se probaría, entre otras cosas, lo siguiente:

Sí G es un grupo, N un subgrupo normal de G tal que N y G/N son **amenables**, entonces G es **amenable**.

Una vez se tuvo la certeza de que la propiedad de ser **amenable** era estable por las 4 operaciones de grupos antes mencionadas, se definirían:

- EG la clase de grupos **elementalmente amenables**, es decir, la clase más pequeña de grupos que contiene todos los grupos abelianos y finitos, además de ser cerrada tomando subgrupos, cocientes, extensiones y uniones dirigidas.

- AG la clase de grupos **amenables**

- NF la clase de grupos que **no contienen un subgrupo libre de orden 2**.

Y más aún, se preguntarían sí las contenencias

$$EG \subset AG \subset NF$$

serían estrictas o no.

Con la conjetura de Von Neumann resuelta, es claro que $AG \neq NF$; sin embargo, para probar que $EG \neq AG$, fue necesario que el matemático Rostislav Grigorchuk definiera un grupo que hoy en día se conoce como: *El (primer) grupo de Grigorchuk* en 1985.

Otros matemáticos importantes en el desarrollo de la teoría de grupos amenables fueron Hans Reiter y Andrzej Hulanicki, el primero porque logra caracterizarlos usando el álgebra de $\ell^1(G)$ y el segundo porque (usando el resultado de Reiter), logra conectarlos con la teoría de representaciones vía la noción de **contencia débil**. Esto permite enunciar la **amenabilidad** de un grupo mediante $\mathcal{C}^*$-algebras:

$$G \textit{ es amenable sí sy solo sí } \mathcal{C}^*_{red}(G) \cong \mathcal{C}^*(G).$$

Finalmente, vale la pena resaltar que la noción de **amenabilidad** tiene aplicaciones en estadística, geometría diferencial y álgebra de operadores, para ver estas al detalle, revisar los capítulos 4, 7, 1 y 2 de [5] respectivamente.

Introducciόm

En este trabajo se explica la noción de amenabilidad y varias definiciones equivalentes; para ello, en el primer capítulo, se expone la paradoja de Banach-Tarski:

La esfera $\mathbb{S}^2$ es $SO_3(\mathbb{R})$-paradójica.

como el primer ejemplo motívico de la definición de grupos **amenables**

Para ello, se introducen las nociones de G-equidescomposabilidad y G-paradojicidad de un grupo, así como se muestran varios ejemplos de grupos paradójicos, el más importante, el grupo libre en 2 generadores F_2. Posteriormente, habiendo mostrado que la propiedad de G-paradojicidad es transitiva del grupo a un conjunto sobre el cuál este actúe libremente, se procederá de probar que el grupo de rotaciones $SO_3(\mathbb{R})$ contiene un subgrupo isomorfo a F_2.

En el segundo capítulo, se enuncia y demuestra el siguiente teorema de Tarski:

Suponga G actuando en X y $E \subset X$, entonces existe una medida finitamente aditiva, G-invariante $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ con $\mu(E) = 1$ si y solo si E no es finitamente G-paradójico.

Una vez se tiene este resultado, se procede a definir grupos **amenables** y se muestra su equivalencia con el hecho de no ser G-paradójico.

Se finaliza el capítulo mostrando que la clase de grupos **amenables** es cerrada por: tomar subgrupos, cocientes por un normal y uniones dirigidas.

En el tercer capítulo, se definen medias sobre el espacio de funciones acotadas sobre un grupo $\ell^\infty(G)$ y se da una nueva definición de **amenabilidad** en términos de estas:

G es amenable sí y solo sí existe un funcional $m : \ell^\infty(G) \to \mathbb{C}$ tal que:

1. *$m(1) = 1$.*

2. *$m(\varphi) \geqslant 0$ para todo $\varphi \in \ell^\infty(Z)$ tal que $\varphi \geqslant 0$.*

3. *$m(g\varphi) = m(\varphi)$ con $g\varphi(x) = \varphi(g^{-1}x)$, para todo $x \in G$.*

Una vez se tiene está definición equivalente, se procede a mostrar que la clase de grupos **amenables** es también cerrada por extensiones de un cociente **amenable** por un subgrupo **amenable**.

En el capítulo 4, se busca dar una definición de **amenabilidad** en términos de las $\mathcal{C}^*$-algebras; para ello, se explican las nociones de:

1. vectores casi invariantes.

2. relación de contenencia débil entre dos representaciones unitarias π y ρ de un grupo G, denotada por $\pi \prec \rho$.

Con todo esto, se presenta una nueva definición de **amenabilidad**:

*G es **amenable** sí y solo sí $\pi \prec \lambda_G$ para toda π representación unitaria de G, con λ_G la representación regular.*

Y finalmente, usando este último resultado se prueba que:

G es amenable sí sy solo sí $\mathcal{C}^*_{red}(G) \cong \mathcal{C}^*(G)$.

Capítulo 1

Equidescomposabilidad y la paradoja de Banach-Tarski

El propósito de este capítulo será entender la paradoja de Banach-Tarski, ejemplo esencial para comprender la necesidad de definir grupos amenables.

En la primera sección introducimos la noción de $G-$equidescomposabilidad, propuesta por Banach y Tarski [1], de aquí derivaremos la definición de $G-$paradojicidad, mostramos algunas propiedades y ejemplos, el más significativo, el del grupo libre en 2 generadores.

En la segunda sección, probaremos que no todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ admiten una noción de medida, usando un par de matrices ahora conocidas como **matrices de Sato**, propuestas por Kenzi Sato en [2] y que generan un grupo libre de orden 2, probaremos la mencionada paradoja.

1.1. Disección de conjuntos

Definición 1.1.1. *(G-equidescomponible) Dado $(G,\cdot)$ un grupo actuando sobre un espacio X. Sean $A, B \subset X$, entonces:*

1. *Decimos que $A \sim_n B$ si existen particiones finitas $\{A_i\}_{i=1}^n$, $\{B_i\}_{i=1}^n$ de los conjuntos A y B respectivamente, junto con elementos $\{g_i\}_{i=1}^n \subset G$ tales que $g_i(A_i) = B_i$.*

   Similarmente se define contablemente G-equidescomponible.

   Cuando solo se específique el grupo se escribirá $\sim_G$ y sí el grupo es claro del contexto simplemente $\sim$.

2. *A se dice finitamente $G-$paradójico si existe una partición $\{A_1, A_2\}$ de A tal que $A_1 \sim_n A$ y $A_2 \sim_m A$ para algun par de naturales n, m.(Para hablar de G-contablemente paradójico, A_1, A_2 deben ser contablemente G-equidescomponible con A).*

Diremos que un grupo G es paradójico sí al actuar sobre si mismo por traslación a izquierda es G-paradójico.

Ejemplo 1.1.2. *Sí $\mathbb{R}$ actuá sobre si mismo por traslación, entonces $[0,2]$ es finitamente $\mathbb{R}$-equidescomponible con $[10,11) \cup [21,22]$.*

Definición 1.1.3. *Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X, entonces la acción se dice transitiva sí para todo par de elementos $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$.*

Ejemplo 1.1.4. *Si G actua transitivamente sobre X, entonces para cualquier par de subconjuntos finitos $A, B \subset X$ se tiene $A \sim_n B$ si y solo si tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Sean $A, B \subset X$ subconjuntos finitos de cardinalidad n, entonces tome la descomposición $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, analogo para B, como la acción es transitiva, para cada $a \in A$ existe $g \in G$ tal que $ga = b$ para cada $b \in B$, luego $A \sim_n B$

Consideré $A, B \subset X$ subconjuntos finitos de cardinalidades r, s respectivamente, y por hipótesis $A \sim_n B$ (para que todo tenga sentido, $n \leqslant \text{mín}(r, s)$), usando la descomposición de A y B se tendría la existencia de $\{g_i\}_{i=1}^n \subset G$ tales que $g_i(A_i) = B_i$, sí ocurriera el caso que $r > s$, por principio del palomar existiria $i_0 \in [n]$ tal que $|A_{i_0}| < |B_{i_0}|$ y $g_{i_0}(A_{i_0}) = B_{i_0}$, lo cual supone una contradicción. $\square$

Ejemplo 1.1.5. *Un grupo libre F de rango 2 es $F-$paradójico, con F actuando sobre si mismo por multiplicación a izquierda.*

Demostración. Sean $a, b \in F$ los generadores de F y sea $W(x)$ es conjunto de palabras reducidas que comienzan por x, entonces $F = \{1_F\} \sqcup W(a) \sqcup W(a^{-1}) \sqcup W(b) \sqcup W(b^{-1})$, más aún:

1. Si $x \in W(a^{-1})$ es de la forma $x = a^{-1}a^{-1}\rho$ con ρ una palabra reducida, entonces $ax \in W(a^{-1})$ (en particular $a^{-1} \in W(a^{-1})$ implica $1_F \in aW(a^{-1})$)

2. Si $x \in W(a^{-1})$ es de la forma $x = a^{-1}b\rho$ con ρ palabra reducida, entonces $ax \in W(b)$.

Por lo tanto $F = W(a) \sqcup aW(a^{-1})$. Similarmente $F = W(b) \sqcup bW(b^{-1})$ $\square$

Proposición 1.1.6. *La $G-$equidescomposabilidad, tanto finita como contable, define una relación de equivalencia.*

Demostración. Recordemos que una relación de equivalencia cumple:

1. Reflexividad: Basta con tomar e_G la identidad del grupo.

2. Simetría: Por la descomposicion de A y B, existen $g_i \in G$ tal que $A_i = g_i(B_i)$; considere pues los g_i^{-1} que llevan cada A_i en los B_i.

3. Transitividad: Para el caso finito, asuma que $A \sim_n B$ y $B \sim_m C$, entonces:

   existen $\{A_i\}_{i=1}^n \subset A$, $\{B_i\}_{i=1}^n \subset B$, $\{D_j\}_{j=1}^m \subset B$, $\{C_j\}_{j=1}^m \subset C$ asociados a las

   particiones y $\{g_i\}_{i=1}^n, \{h_j\}_{j=1}^m \subset G$ tales que $g_i(A_i) = B_i,\ h_j(D_j) = C_j$.
   Consideramos ahora la familia $\{B_i \cap D_j\}$ para $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$ y vemos que cumple con las propiedades de una partición:

   a) Tome $i_0, i_1 \in \{1, ..., n\}$ y $j_0, j_1 \in \{1, ..., m\}$ entonces $(B_{i_0} \cap D_{j_0}) \cap (B_{i_1} \cap D_{j_1}) = \varnothing$.
   b) Dado $x \in B$, de la definición de partición, es claro que $x \in B_i$ y $x \in D_j$.

   Sea $\{g_i^{-1}(B_i \cap D_j)\}_{i,j}$ una familia de subconjuntos de A, entonces esta familia atestigua que A es G-equidescomponible con C bajo la acción del conjunto $\{h_j g_i\}_{i,j}$ para $i\{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$.

□

Proposición 1.1.7. *Suponga G actuando en X y sean $E, \widehat{E} \subset X$ tales que $E \sim_G \widehat{E}$. Sí E es $G-$paradójico, entonces también lo será $\widehat{E}$.*

Demostración. Sean $E_1, E_2 \subset E$ atestiguando la $G-$paradojicidad de E, entonces dado que $E \sim_G \widehat{E}$, existen $\widehat{E}_1, \widehat{E}_2 \subset \widehat{E}$ tales que $E_1 \sim_G \widehat{E}_1$ y $E_2 \sim_G \widehat{E}_2$, usando la transitividad de la $G-$equidescomposabilidad, se obtiene el resultado. □

Teorema 1.1.8. *(Banach-Schroder-Bernstein) Suponga que G actúa sobre un conjunto X y sean $A, B \subset X$. Si $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A \sim_G B$*

Demostración. Primeramente vemos que:

1. Si $A \sim B$, entonces existe una biyeccción $g : A \to B$ tal que $C \sim g(C)$ cuando $C \subset A$

2. Si $A_1 \cap A_2 = \varnothing = B_1 \cap B_2$ y si $A_s \sim B_s$ para $s = 1, 2$ entonces $\bigcup A_s \sim \bigcup B_s$

Sean $f : A \to B_1$ y $g : B \to A_1$ con $B_1 \subset B$ y $A_1 \subset A$, cuya existencia esta garantizada por el inciso (1) y la hipótesis, respectivamente.

Sea $C_0 = A \backslash A_1$ y defina recursivamente $C_{n+1} = g^{-1} f(C_n)$. Considere $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Observamos que $g(A \backslash C) = B \backslash f(C)$: si $x \in A \backslash C$ es tal que $g(x)$ este definido, entonces $x \in A$ y $x \notin C$ o equivalentemente $x \notin C_{n+1}$ para algun $n + 1 \in \mathbb{N}$, por construcción $x \notin g^{-1} f(C_n)$, luego no existe $y \in f(C_n)$ tal que $g(x) = y$, de aqui se concluye que $g(x) \in B \backslash f(C)$; como g es biyeccion, tenemos que $A \backslash C \sim B \backslash f(C)$, pero por propiedad (1) nuevamente, $C \sim f(C)$ y finalmente usando (2), concluimos que $A = (A \backslash C) \cup C \sim (B \backslash f(C)) \cup f(C) = B$. □

Proposición 1.1.9. *Sí G es paradójico y actúa en X libremente, entonces X es $G-$paradójico.*

Demostración. Suponga $A_i, B_j \subset G$ y $g_i, h_j \in G$ atestiguando que G es paradójico, usando el **Axioma de elección**, obtenemos un conjunto $M \subset X$ tal que $|M \cap (G \cdot x)| = 1$ para todo $x \in X$.

Se procederá a probar ahora que $\{g(M) : g \in G\}$ es una partición de X:

- Sea $x \in X$, entonces $x \in G \cdot x$, además por hipótesis, existe un único $y_x \in M \cap (G \cdot x)$, entonces existe $g_y \in G$ tal que $g_y \cdot x = y_x$, por lo tanto $x \in g_y(M)$ y dado que x fue arbitrario, entonces se concluye que $\bigcup_{g \in G} g(M) = X$.

- Suponga que existen $g, h \in G$ distintos y tales que $g(M) \cap h(M) \neq \varnothing$, entonces existen $x, y \in M$ tales que $g \cdot x = h \cdot y$, equivalentemente $x = g^{-1}h \cdot y$, entonces $x \in (G \cdot y) \cap M$, es decir $x = y$, como G actúa sobre X con estabilizador trivial, entonces $g = h$, i.e $g(M) \cap h(M) = \varnothing$ para todo $g, h \in G$ distintos.

Sean $A_i^* = \bigcup_{g \in A_i} g(M)$ y $B_j^* = \bigcup_{g \in B_j} g(M)$ con $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\}$, note que:

1. $X = \bigcup g_i(A_i^*)$: Sea $x \in X$, entonces $x \in g_y(M)$, como G es paradójico, existe algún $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $g_y = g_k a_k$ para algún $a_k \in A_k$, luego $x \in g_k(A_k^*)$.

2. Obtenemos un resultado similar para los B_j^*.

Por lo tanto X es G-paradójico. □

Observación 1.1.10. *En adelante, dado un conjunto X, denotaremos al conjunto $\{A : A \subset X\}$ por 2^X.*

Definición 1.1.11. *Una función $\nu : 2^X \to \mathbb{R}$ tal que:*

1. *$\nu(E) \geqslant 0$ para todo $E \subset X$.*

2. *$\nu(\varnothing) = 0$.*

3. *$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$ para todo par $A, B \subset X$ tales que $A \cap B = \varnothing$.*

es llamada una medida finitamente aditiva para X. Sí G actua en X, diremos que ν es $G-$invariante a izquierda si $\nu(gA) = \nu(A)$ para todo $A \subset X$.

Definición 1.1.12. *Sea $E \subset X$, se dice $G-$despreciable si $\mu(E) = 0$ cuando μ sea una medida finitamente aditiva, $G-$invariante en 2^X con $\mu(E) < \infty$.*

Proposición 1.1.13. *Si E es finitamente $G-$paradójico, entonces E es $G-$despreciable.*

Demostración. Suponga μ una medida finitamente aditiva, G-invariante en 2^X y que $\mu(E) < \infty$, dado que E es G-paradójico, existen $E_1, E_2 \subset G$ y n, m naturales tales que $E \sim_n E_1$ y $E \sim_m E_2$, de la definición de finitamente $G-$equidescomponible, tenemos la existencia de familias de conjuntos $\{E_i\}_{i=1}^n, \{E_{1,i}\}_{i=1}^n, \{E_j\}_{j=1}^m$ y $\{E_{2,j}\}_{j=1}^m$ junto con un conjunto de elementos $\{\{g_i\}_{i=1}^n, \{h_j\}_{j=1}^m\}$ en G tales que $E_i = g_i(E_{1,i})$ y $E_j = h_j(E_{2,j})$, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\mu(E) = \mu(E_1 + E_2) &= \mu(\bigcup_{i=1}^n E_{1,i}) + \mu(\bigcup_{j=1}^m E_{2,j}) \\
&= \sum_{i=1}^n \mu(E_{1,i}) + \sum_{j=1}^m \mu(E_{2,j}) \\
&= \sum_{i=1}^n \mu(g_i E_{1,i}) + \sum_{j=1}^m \mu(g_j E_{2,j}) \\
&= \sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \sum_{j=1}^m \mu(E_j) \\
&= 2\mu(E).
\end{aligned}
$$

Como $\mu(E) < \infty$, conluimos que $\mu(E) = 0$.

□

1.2. Paradoja de Banach-Tarski

Definimos la esfera $3-$dimensional como $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Denotamos por $SO_3(\mathbb{R})$ el subgrupo de matrices 3×3 con determinante igual a 1. El grupo $SO_3(\mathbb{R})$ actuá naturalmente en $\mathbb{R}^3$ mediante multiplicación:

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}.
$$

Sean: $\sigma = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, y $\tau = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ las rotaciones de Sato, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.2.1. *Las 2 rotaciones de Sato son independientes, luego, si $n \geqslant 1$, $SO_n(\mathbb{Q})$ tiene un subgrupo libre de rango 2.*

Demostración. Sea $F = \langle \sigma, \tau \rangle$ con identidad e_F, queremos ver que no hay palabra reducida en $\sigma^{+1}_{-1}, \tau^{+1}_{-1}$ igual a la identidad, aparte de la trivial.

Defina pues: $M_\sigma = 7\sigma, M_\tau = 7\tau, M_\sigma^{-1} = 7\sigma^{-1}, M_\tau^{-1} = 7\tau^{-1}$ y asuma, por contradiccion que tal palabra existe:
$w = M_\sigma^{k_n} M_\tau^{k_{n-1}} ... M_\tau^{k_2} M_\sigma^{k_1}$ con $k_1 \geqslant 0$, $k_n \in \mathbb{Z}$, asimismo, defina:

- $V_\sigma = \{(3,1,2),(5,4,1),(6,2,4)\}$
- $V_\sigma^{-1} = \{(3,2,6),(5,1,3),(6,4,5)\}$
- $V_\tau = \{(3,5,1),(5,6,4),(6,3,2)\}$
- $V_\tau^{-1} = \{(1,5,4),(2,3,1),(4,6,2)\}$

Nótese que $M_\sigma(1,0,0) = (6,2,-3) \equiv (6,2,4)(\mod 7)$; mas generalmente:

1. $\forall v \in V_\sigma \cup V_\tau \cup V_\tau^{-1},\ \sigma v \in V_\sigma \pmod 7$
2. $\forall v \in V_\sigma^{-1} \cup V_\tau \cup V_\tau^{-1},\ \sigma^{-1} v \in V_\sigma^{-1} \pmod 7$
3. $\forall v \in V_\tau \cup V_\sigma \cup V_\sigma^{-1},\ \tau v \in V_\tau \pmod 7$
4. $\forall v \in V_\tau^{-1} \cup V_\sigma \cup V_\sigma^{-1},\ \tau^{-1} v \in V_\tau^{-1} \pmod 7$

Dado que $M_\sigma(1,0,0) \equiv (6,2,4) \pmod 7 \in V_\sigma$, por la propiedad 1, $M_\sigma^{k_1}(6,2,4) \in V_\sigma$, por hipótesis, $k_s \neq 0, \forall s : 1 < s < n$, luego $M_\tau^{k_2}(M_\sigma^{k_1} M_\sigma(1,0,0)) \in V_\tau \cup V_\tau^{-1}$ dependiendo del signo de k_2 usamos las propiedades (3) ó (4).

Similarmente $M_\sigma^{k_3} M_\tau^{k_2} M_\sigma^{k_1} M_\sigma(1,0,0) \in V_\sigma \cup V_\sigma^{-1}$ inductivamente llegamos a que $w(1,0,0) \in V_\sigma \cup V_\sigma^{-1} \cup V_\tau \cup V_\tau^{-1}$, por lo tanto $w(1,0,0) \neq (1,0,0) = e_F(1,0,0)$.

□

Teorema 1.2.2. *(Paradoja de Hausdorff) Existe $D \subset \mathbb{S}^2$ contable tal que $\mathbb{S}^2 \backslash D$ es $SO_3(\mathbb{R})-$paradójico.*

Demostración. Sea F igual que en el teorema anterior, entonces toda rotación de este grupo deja fijos dos puntos (los ejes de rotación), ahora bien, considere D como la unión de los puntos fijos por alguna rotación en F, como F es contable, entonces D es contable, faltaría ver que $\mathbb{S}^2 \backslash D$ es $SO_3(\mathbb{R})-$paradójico.

Para probar esto, note que: si $p \in \mathbb{S}^2 \backslash D$ y $g \in F$, entonces $g(p) \in \mathbb{S}^2 \backslash D$, caso contrario, si $h \in F$ fijara $g(p)$, entonces $p \in \mathbb{S}^2 \backslash D$ sería un punto fijo de $g^{-1}hg \in F$, lo cual es una contradicción, luego F actúa sobre $\mathbb{S}^2 \backslash D$ libremente. Usando la **Proposición 1.1.9** se obtiene el resultado.

□

Teorema 1.2.3. *Sí $D \subset \mathbb{S}^2$ es un subconjunto contable, entonces $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^2 \backslash D$ son $SO_3(\mathbb{R})-$equidescomponibles.*

Demostración. Buscamos ρ rotación de $\mathbb{S}^2$ tal que $\rho^i(D) \cap \rho^j(D) = \varnothing$ para todo par $i, j \in \mathbb{N} : i \neq j$; con esto bastaría puesto que:

- $\mathbb{S}^2 = \hat{D} \cup (\mathbb{S}^2 \backslash \hat{D}) \sim \rho(\hat{D}) \cup (\mathbb{S}^2 \backslash \hat{D}) = \mathbb{S}^2 \backslash D$ con $\hat{D} = \bigcup\{\rho^n(D) : n = 0, 1, 2, ...\}$

Sea l una línea que pase por el origen y no toque al conjunto contable D, sea A_P el conjunto de ángulos θ tales que para algún $n > 0$ y un $P \in D$, $\rho(P) \in D$, donde ρ es la rotación alrededor de l por $n\theta$ radianes, por lo tanto A_P también es contable.

Considere $A = \bigcup_{P \in D} A_p$, como A es contable, existirá $\theta \notin A$ y ρ su correspondiente rotación alrededor de l entonces $\rho(D) \cap D = \varnothing$ sí $n > 0$ y de aquí se sigue que sí $0 \leqslant m < n$, entonces $\rho^m(D) \cap \rho^n(D) = \varnothing$ pues sabemos que $\rho^{n-m}(D) \cap D = \varnothing$.

□

Corolario 1.2.4. *(Paradoja de Banach-Tarski)La esfera $\mathbb{S}^2$ es $SO_3(\mathbb{R})$-paradójica.*

Demostración. Por **Teorema 1.2.3**, la esfera es $SO_3(\mathbb{R})-$equidescomponible con $\mathbb{S}^2 \backslash D$, luego, gracias a la **Proposición 1.1.7**, nos basta con que $\mathbb{S}^2 \backslash D$ es $SO_3(\mathbb{R})-$paradójico, pero esto se tiene gracias al **Teorema 11**. □

Capítulo 2

Grupos amenables

En la primera sección, siguiendo el capítulo 11 de [7], se enunciará y demostrará el Teorema de Tarski, del cuál nace una primera definición de grupos amenables, posteriormente, se mostrarán algunas operaciones de grupo bajo la cuál esta clase es cerrada.

2.1. Teorema de Tarski: Una primera caracterización de grupos amenables

Sea $(T, +, 0)$ un semigrupo conmutativo con identidad 0 y elemento distinguido ε, entonces el semigrupo admite un orden parcial dado por la siguiente condición: dados $\alpha, \beta \in T$ decimos que $\alpha \leqslant \beta$ si existe $\delta \in T$ tal que $\alpha + \delta = \beta$.

Lema 2.1.1. *Si $T_0 \subset T$ es finito, tal que $\varepsilon \in T_0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(n+1)\varepsilon \nleqslant n\varepsilon$, entonces existe $\rho : T_0 \to [0, \infty]$ tal que:*

a) $\rho(\varepsilon) = 1$

b) Sí $\{\phi_i\}_{i=1}^m, \{\theta_j\}_{j=1}^n \subset T_0$ satisfacen que $\sum_{i=1}^{m} \phi_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} \theta_j$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(\phi_i) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \rho(\theta_j)$$

Demostración. Inducción sobre el tamaño de T_0.

- *Caso Base* $|T_0| = 1$: como $\varepsilon \in T_0$, entonces $T_0 = \{\varepsilon\}$ y la función $\rho : T_0 \to [0, \infty]$ dada por $\rho(\varepsilon) = 1$ cumple trivialmente la condición (a), mientras que la condición (b) se reduce a probar que, sí $m\varepsilon \leqslant n\varepsilon$, entonces $m \leqslant n$ (está implicación es cierta, caso contrario, $m\varepsilon \leqslant n\varepsilon$ y $m > n$ implicaría que $m \geqslant n+1$ y por lo tanto $(n+1)\varepsilon \leqslant m\varepsilon \leqslant n\varepsilon$, de aquí es fácil ver que los extremos de está desigualdad incumplen con una de las hipótesis.

- *Paso inductivo* $|T_0| > 1$: considere $\alpha \in T_0 \backslash \{\varepsilon\}$, use la hipótesis inductiva para obtener una función ν en $T_0 \backslash \{\alpha\}$ que satisfaga la afirmación.

  Defina $\rho : T_0 \longrightarrow [0, \infty]$ por:

$$\rho(x) = \begin{cases} \nu(x) & \text{sí } x \in T_0 \backslash \{\alpha\} \\ \text{ínf}(A) & \text{e.o.c} \end{cases}$$

  dónde:

  $A := \left\{ \frac{\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l)}{r} : r \in \mathbb{N}, \{\beta_k\}_{k=1}^{p}, \{\gamma_l\}_{l=1}^{q} \subset T_0 \backslash \{\alpha\}, \sum_{l=1}^{q} \gamma_l + r\alpha \leqslant \sum_{k=1}^{p} \beta_k \right\}.$

  Habiendo definido ρ, procederemos a probar que:

a) $\rho(\varepsilon) = 1$, pues $\varepsilon \in T_0 \backslash \{\alpha\}$.

b) Tome $\{\phi_i\}_{i=1}^{m}, \{\theta_j\}_{j=1}^{n} \subset T_0 \backslash \{\alpha\}$ y $s, t \in \mathbb{N}$ tales que: $\sum_{i=1}^{m} \phi_i + s\alpha \leqslant \sum_{j=1}^{n} \theta_j + t\alpha$, entonces habrán 3 casos:

   1. $s = t = 0$: como $\rho\restriction_{T_0 \backslash \{\alpha\}} \equiv \nu$, por hipótesis inductiva terminamos.

   2. $s = 0$ y $t > 0$: queremos probar que $\sum_{i=1}^{m} \phi_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} \theta_j + t\alpha$ implica que:
      $\sum_{i=1}^{m} \rho(\phi_i) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \rho(\theta_j) + t\rho(\alpha)$ sii $\omega = \frac{1}{t}\big(\sum_{i=1}^{m} \nu(\phi_i) - \sum_{j=1}^{n} \nu(\theta_j)\big) \leqslant \rho(\alpha)$.
      Como $\rho(\alpha) = \text{ínf}(A)$ nos bastará con ver $\omega \leqslant \frac{1}{r}\big(\sum_{s=1}^{p} \nu(\beta_s) - \sum_{k=1}^{q} \nu(\gamma_k)\big) \in A$.
      Note que:
      $\sum_{i=1}^{m} \phi_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} \theta_j + t\alpha$, entonces $\sum_{i=1}^{m} r\phi_i + \sum_{k=1}^{q} t\gamma_k \leqslant \sum_{j=1}^{n} r\theta_j + \sum_{k=1}^{q} t\gamma_k + tr\alpha$.
      Por otro lado:
      $\sum_{k=1}^{q} \gamma_k + r\alpha \leqslant \sum_{s=1}^{p} \beta_s$, entonces $\sum_{j=1}^{n} r\theta_j + \sum_{k=1}^{q} t\gamma_k + rt\alpha \leqslant \sum_{s=1}^{p} t\beta_s + \sum_{j=1}^{n} r\theta_j$.

      Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{m} r\phi_i + \sum_{k=1}^{q} t\gamma_k \leqslant \sum_{s=1}^{p} t\beta_s + \sum_{j=1}^{n} r\theta_j$$

      aplicando hipótesis inductiva:

$$\sum_{i=1}^{m} r\nu(\phi_i) + \sum_{k=1}^{q} t\nu(\gamma_k) \leqslant \sum_{s=1}^{p} t\nu(\beta_s) + \sum_{j=1}^{n} r\nu(\theta_j)$$

3. $s > 0$ y $t > 0$: queremos probar que $\sum_{i=1}^{m} \phi_i + s\alpha \leqslant \sum_{j=1}^{n} \theta_j + t\alpha$ implica que:

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(\phi_i) + s\rho(\alpha) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \rho(\theta_j) + t\rho(\alpha)$$

para ello, será suficiente con mostrar que $\sum_{i=1}^{m} \phi_i + s\alpha \leqslant \sum_{j=1}^{n} \theta_j + t\alpha$ implica que:

$$s\rho(\alpha) + \sum_{i=1}^{m} \nu(\phi_i) \leqslant tz + \sum_{j=1}^{n} \nu(\theta_j) \text{ con } z \in A.$$

Sean pues $\{\gamma_l\}_{l=1}^{q}, \{\beta_k\}_{k=1}^{p} \subset T_0 \backslash \{\alpha\}$ y $r > 0$ definiendo a z, entonces notamos lo siguiente:

3.1) $\sum_{i=1}^{m} \phi_i + s\alpha \leqslant \sum_{j=1}^{n} \theta_j + t\alpha$ implica que $\sum_{i=1}^{m} r\phi_i + rs\alpha \leqslant \sum_{j=1}^{n} r\theta_j + rt\alpha$.

3.2) $\sum_{l=1}^{q} \gamma_l + r\alpha \leqslant \sum_{k=1}^{p} \beta_k$ implica que $\sum_{l=1}^{q} t\gamma_l + tr\alpha \leqslant \sum_{k=1}^{p} t\beta_k$.

3.3) De los dos anteriores numerales tenemos la cadena de desigualdades:

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} r\phi_i + rs\alpha\Big) + \sum_{l=1}^{q} t\gamma_l \leqslant \sum_{j=1}^{n} r\theta_j + \Big(rt\alpha + \sum_{l=1}^{q} t\gamma_l\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{n} r\theta_j + \sum_{k=1}^{p} t\beta_k.$$

Tomando los dos extremos y aplicando ρ llegamos a que:

$$\sum_{i=1}^{m} r\nu(\phi_i) + rs\rho(\alpha) + \sum_{l=1}^{q} t\nu(\gamma_l) \leqslant \sum_{j=1}^{n} r\nu(\theta_j) + \sum_{k=1}^{p} t\nu(\beta_k).$$

Despejando $s\rho(\alpha)$:

$$s\rho(\alpha) \leqslant \frac{1}{r}\Big(\sum_{j=1}^{n} r\nu(\theta_j) + \sum_{k=1}^{p} t\nu(\beta_k) - \sum_{i=1}^{m} r\nu(\phi_i) - \sum_{l=1}^{q} t\nu(\gamma_l)\Big).$$

Sumando $\sum_{i=1}^{m} \nu(\phi_i)$ a ambos lados:

$$s\rho(\alpha) + \sum_{i=1}^{m} \nu(\phi_i) \leqslant tz + \sum_{j=1}^{n} \nu(\theta_j).$$

Finalmente, tomando el ínfimo sobre los $z \in A$, concluimos que:

$$s\rho(\alpha) + \sum_{i=1}^{m} \nu(\phi_i) \leqslant t\rho(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} \nu(\theta_j).$$

$\square$

Teorema 2.1.2. *Sea* $(T, +, 0, \varepsilon)$ *un semigrupo conmutativo con identidad* 0 *y un elemento distinguido* ε*, entonces son equivalentes:*

1. *Para todo* $n \in \mathbb{N}, (n+1)\varepsilon \nleqslant n\varepsilon$
2. *Existe* $\mu : T \to [0, \infty]$ *medida tal que* $\mu(\epsilon) = 1$ *y* $\mu(\alpha + \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta), \forall \alpha, \beta \in T$

Demostración. (*2 implica 1*): Por contradiccion: sí existe μ que satisface (2), entonces $\mu(\alpha) \leqslant \mu(\beta)$ si $\alpha \leqslant \beta$ (pues $\alpha \leqslant \beta$ si existe $\delta \in T$ tal que $\alpha + \delta = \beta \implies \mu(\beta) = \mu(\alpha) + \mu(\delta) \geqslant \mu(\alpha)$).

Además note que $\mu(n\varepsilon) = n$, entonces $(n+1)\varepsilon \leqslant n\varepsilon$ implicaría que:
$n + 1 = \mu((n+1)\varepsilon) \leqslant \mu(n\varepsilon) = n$, lo cuál es una contradicción.

(*1 implica 2*): Sea $M(T_0) = \{f \in [0, \infty]^T : f(\varepsilon) = 1, f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta) \text{ para } \alpha, \beta, \alpha+\beta \in T_0\}$,

por el **Lema 2.1.1**, $M(T_0) \neq \varnothing$, adicionalmente, sabemos que $[0, \infty]^T$ es compacto gracias al Teorema de Tychonoff; pero por otro lado, sabemos que X un espacio topológico es compacto sí y solo sí para todo F colección de cerrados en X, se tiene la **propiedad de intersección finita**.

Para usar la anterior observación, notaremos que $M(T_0)$ es cerrado:
Sea $f \in M(T_0)^c$, entonces $f(\varepsilon) \neq 1$ ó $f(\alpha + \beta) \neq f(\alpha) + f(\beta)$ para $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in T_0$.

Como $M(T_0)^c \subset [0, \infty]^T = \{(r_\theta)_{\theta \in T} : r_\theta \in [0, \infty]\}$, entonces podemos identificar $f \equiv (r_\theta)_{\theta \in T} = f(\theta)$ en la θ-ésima entrada y consecuentemente, $f(\theta_i) = \pi_i(f(\theta)_{\theta \in T})$.

Sí $f \in M(T_0)^c$ es tal que $f(\varepsilon) = r \neq 1$, como $\mathbb{R}$ es Hausdorff, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $1 \notin (r-\delta, r+\delta)$ entonces $\pi_\epsilon^{-1}(r-\delta, r+\delta) \subset M(T_0)^c$. Asimismo, si $f \in M(T_0)^c$ es tal que $f(\gamma+t) \neq f(\gamma)+f(t)$ para alguna terna $\gamma, t, \gamma+t \in T_0$ considere $H_{\gamma,t} : [0, \infty]^T \to [0, \infty]$ dada por: $H_{\gamma,t}((r_\theta)_{\theta \in T}) = \pi_{\gamma+t}((r_\theta)_{\theta \in T}) - [\pi_\gamma((r_\theta)_{\theta \in T}) + \pi_t((r_\theta)_{\theta \in T})]$; por hipótesis, $f(\gamma + t) - [f(\gamma) + f(t)] = p \neq 0$, entonces existe $c > 0$ tal que $0 \notin (p - c, p + c)$ y por lo tanto $f \in H_{\gamma,t}^{-1}(p - c, p + c) \subset M(T_0)^c$. Concluimos finalmente que $M(T_0)$ es cerrado.

Note que $M(\bigcup_{i=1}^n T_i) \subset \bigcap_{i=1}^n M(T_i)$, luego $\{M(T_0) : T_0 \subset T \text{ finito y } \varepsilon \in T_0\}$ es una familia que cumple la **Propiedad de intersección finita**, i.e., existe $\mu \in \bigcap_{T_0 \subset T} M(T_0)$, lo cuál finaliza la demostración.

$\square$

Definición 2.1.3. *Definimos* $S_{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : f$ *es biyectiva*$\}$ *como el grupo de permutaciones de* $\mathbb{N}$.

Suponga G un grupo y G actuando en X, defina una **acción extendida** como sigue: sea $X^* = X \times \mathbb{N}$ y $G^* = G \times \mathbb{S}_{\mathbb{N}}$ y defina G^* actuando en X^* por:

$$(g, \pi) \cdot (x, n) = (g(x), \pi(n)).$$

Sí $A \subset X^*$, entonces aquellos $n \in \mathbb{N}$ tales que A **tiene al menos** 1 elemento con segunda coordenada n son llamados los niveles de A.

Definición 2.1.4. *Sean* G, X, G^*, X^* *como en la definición anterior:*

- *Un subconjunto* $A \subset X^*$ *es llamado acotado si tiene solamente finitos niveles.*

  La clase de equivalencia con respecto a la G^**-**equidescomposabilidad** de un conjunto acotado* $A \subset X^*$ *es llamado **el tipo de** A y se denota por* $[A]$.

  El conjunto de tipos se denota por S.

- *Para* $[A], [B] \in S$, *defina* $[A] + [B] = [A \cup B^+]$, *con:* $B^+ = \{(b, m+k) : (b, m) \in B\}$, *donde* k *es tal que los niveles de* A *y* B^+ *son disjuntos.*

Proposición 2.1.5. *La operación + dada arriba está bien definida, es conmutativa y asociativa, por tanto* $(S, +)$ *es un semigrupo conmutativo. Lo llamaremos **semigrupo de tipo**.*

Demostración. Sean $[A], [B] \in S$, entonces:

1. La operación + esta bien definida: tome $A_1, B_1 \in [A], [B]$ respectivamente, luego:

   1.1) $A \sim A_1$.

   1.2) $B \sim B_1$.

   1.3) $B^+ \sim B_1^+$.

   Entonces $A \cup B^+ \sim A_1 \cup B_1^+$.

   Es decir: $[A] + [B] = [A \cup B^+] = [A_1 \cup B_1^+] = [A_1] + [B_1]$.

2. La operación + es conmutativa y asociativa: es inmediato de (1.2) .

$\square$

Observación 2.1.6. *Note que* $[\varnothing] = e$ *sirve como identidad del grupo y sí* $E \subset X$, *denotamos* $[E] := [E \times \{0\}]$.

Dado un semigrupo conmutativo con unidad, hay un orden natural dado por: $\alpha \leqslant \beta$ sí y solo sí existe γ en el semigrupo tal que $\alpha + \gamma = \beta$. Note que $[A] \leqslant [B]$ sí y solo sí $A \leqslant B$, i.e., A es G^*-equidescomponible con un subconjunto de B.

Teorema 2.1.7. *(Ley de cancelación débil) Sí para $\alpha, \beta \in S$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que: $n\alpha \leqslant n\beta$ entonces $\alpha \leqslant \beta$.*

Demostración. $n\alpha \leqslant n\beta$ sí y solo sí $\sum_{i=1}^{n} \alpha \leqslant \sum_{i=1}^{n} \beta$, entonces existen $A, B \subset X^*$ tales que $\alpha = A$ y $\beta = B$, reescribimos $n\alpha \leqslant n\beta$ como $\sum_{i=1}^{n}[A] \leqslant \sum_{i=1}^{n}[B]$, ahora bien,

$[A] + [A] = [A \cup A^{(1)}]$ donde $A^{(1)}$ es un levantamiento de A.

Inductivamente $\sum_{i=1}^{n}[A] = \left[\bigcup_{i=0}^{n} A^{(i)}\right]$, análogamente con β, por lo tanto llegamos a que $\left[\bigcup_{i=0}^{n} A^{(i)}\right] \leqslant \left[\bigcup_{i=0}^{n} B^{(i)}\right]$ sii $\bigcup_{i=0}^{n} A^{(i)} \leqslant \bigcup_{i=0}^{n} B^{(i)}$, tome $E = \bigcup_{i=0}^{n} A^{(i)}$ y $F = \bigcup_{i=0}^{n} B^{(i)}$,

entonces E es G^*-equidescomponible con un subconjunto de F.

Sea $\chi : E \longrightarrow E^+ \subset F$ la función que atestigua que $E \sim E^+$ y similarmente $\phi_i : A^{(0)} \longrightarrow A^{(i)}$, $\psi_i : B^{(0)} \longrightarrow B^{(i)}$ (estas existen pues $[A^{(0)}] = [A^{(1)}] = \cdots = [A^{(n-1)}]$) y igualmente para los $B^{(i)}$.

Para cada $a \in A^{(0)}$, sea $\bar{a} = \{a, \phi_1(a), ..., \phi_{n-1}(a)\}$ y para $b \in B^{(0)}$, sea $\bar{b} = \{b, \psi_1(b), ..., \psi_{n-1}(b)\}$, entonces se puede ver que $\bar{A} = \{\bar{a} : a \in A^{(0)}\}$ forma una partición de E debido a que:

- Sí tomamos $a_0 \in E$, entonces $a_0 \in A^{(i_0)}$ para un único $i_0 \in \{0, ..., n-1\}$, como $A \sim A_{i_0}$ bajo ϕ_{i_0}, entonces si consideramos $x \in \phi_{i_0}^{-1}(a_0)$, tenemos que $a_0 \in \bar{x} \subset \bigcup_{\bar{a} \in \bar{A}} \bar{a}$.

- Sí $\bar{\gamma}, \bar{\eta} \in \bar{A}$ tales que $\bar{\gamma} \neq \bar{\eta}$ implica que $\bar{\gamma} \cap \bar{\eta} = \varnothing$: Sí existiera $x \in \bar{\gamma} \cap \bar{\eta}$, existirían $r, s \in \{0, ..., n-1\}$ tales que $x = \phi_r(\gamma)$ y $x = \phi_s(\eta)$, entonces $x \in A^{(s)} \cap A^{(r)}$, lo cuál es una contradicción pues $\{A^{(i)}\}_{i=0}^{n-1}$ es una partición de E.

Ahora formamos un **grafo bipartito** haciendo el primer conjunto de vértices $\bar{A}$ y el segundo $\bar{B}$ y defina las aristas por $\bar{a} \bullet\!\!-\!\!\bullet \bar{b}$ sí $(\chi \circ \phi_i)(a) \in \bar{b}$; entonces este grafo es n-regular en la primera parte y de máximo grado n en la segunda parte, mas aún, satisface la condición del matrimonio (ver el **Teorema A.1.2**) en la primera parte, ya que, sí $Y \subset \bar{A}$ es tal que $|Y| = k$ y sí se considera Z el conjunto de vecindades de vértices de Y; entonces el número de aristas que van de Y a Z es nk, pero si $|Z| < k$, entonces el número de aristas que salen de Z hacia Y sería menor a kn, lo cuál es una contradicción.

Por el Teorema de **Hall-Rado-Hall**, obtenemos un apareamiento M para el grafo que cubre a A, para cada vértice $\bar{a}$, hay una única arista $\bar{a} \bullet\!\!-\!\!\bullet \bar{b}$ y existe en virtud de $(\chi \circ \phi_i)(a) = \psi_j(b)$.

Consideré ahora $C_{i,j} = \{a \in A^{(0)} : \bar{a} \bullet\!\!-\!\!\bullet \bar{b} \in M \text{ y } (\chi \circ \phi_i)(a) = \psi_j(b)\}$ y $D_{i,j} = \{b \in B^{(0)} : \bar{a} \bullet\!\!-\!\!\bullet \bar{b} \in M \text{ y } (\chi \circ \phi_i)(a) = \psi_j(b)\}$.

Entonces $\psi_j^{-1} \circ \chi \circ \phi_i$ mapea $C_{i,j}$ en $D_{i,j}$ y es una G^*- congruencia dado que ψ_j, χ y ϕ_i lo son. Como $\{C_{i,j}\}$ particiona $A^{(0)}$, esto muestra que $A^{(0)} \sim \bigcup D_{i,j} \subset B^{(0)}$.

□

Corolario 2.1.8. *(Ley de Cancelación) Sí para $\alpha, \beta \in S$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que: $n\alpha = n\beta$ entonces $\alpha = \beta$.*

Corolario 2.1.9. *Sí $\alpha \in S$ y $n \in \mathbb{N}$ satisfacen que $(n+1)\alpha \leqslant n\alpha$, entonces $2\alpha = \alpha$.*

Demostración. Sustituya la desigualdad hipótetica en sí misma:

$$n\alpha \geqslant (n+1)\alpha = n\alpha + \alpha \geqslant (n+1)\alpha + \alpha = n\alpha + 2\alpha.$$

Eventualmente llegaremos a $n\alpha \geqslant n\alpha + n\alpha = 2n\alpha$, como claramente $n\alpha \leqslant 2n\alpha$, entonces tenemos que $n\alpha = 2n\alpha$ y por la *ley de cancelación* concluimos que $\alpha = 2\alpha$.

□

Teorema 2.1.10. *(Teorema de Tarski) Suponga G actuando en X y $E \subset X$, entonces existe una medida finitamente aditiva, G-invariante $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ con $\mu(E) = 1$ si y solo si E no es finitamente G-paradójico.*

Demostración. Asuma que existe una medida $\mu : 2^X \longrightarrow [0, \infty]$ finitamente aditiva, G-invariante con $\mu(E) = 1$ y por contradicción asuma que E es G-paradójico, por **Proposición 1.1.13** E es G-despreciable, pero esto implica que $\mu(E) = 0$.

Para probar la otra dirección, asuma que E no es G-paradójico y sea S el semigrupo de tipos de la acción de G en X, entonces $2\varepsilon \neq \epsilon$ donde $\varepsilon = E \times \{0\}$, entonces por el contrarrecíproco del **Corolario 2.1.9** $(n+1)\varepsilon \nleqslant n\varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por **Teorema 2.1.2** existe ν medida en S tal que $\mu(\varepsilon) = 1$, definiendo $\mu(A) := \nu(A \times \{0\})$ obtenemos la medida G-invariante en 2^X. □

Al conjunto de medidas de probabilidad finitamente aditivas lo notaremos por $\mathtt{PM}(E)$.

2.2. Grupos amenables y operaciones que los preservan I

Tomando en el **Teorema 2.1.10** $X = E = G$, llegamos a la siguiente definición:

Definición 2.2.1. *Un grupo G se dice **amenable** sí existe una medida finitamente aditiva, $G-$invariante a izquierda $\mu : 2^G \to [0, \infty)$ tal que $\mu(G) = 1$.*

Observación 2.2.2. *Gracias al **Teorema 2.1.10**, tenemos que G es **amenable** sí y solo sí G **no es** G-paradójico.*

A continuación se expondrán algunas propiedades de los grupos ***amenables***.

Teorema 2.2.3. *1. Todo grupo finito es **amenable**.*

2. *Un subgrupo de un grupo **amenable** es **amenable**.*

3. *Sí N es un subgrupo normal de G, con G **amenable**, entonces G/N es **amenable**.*

4. *Sí G es la unión directa de un sistema dirigido de grupos **amenables**, $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$, entonces G es **amenable**.*

5. *Todo grupo abeliano es **amenable**.*

Demostración. 1. Sí $|G| = n < \infty$, defina $\mu(A) := \frac{|A|}{n}$ para todo $A \subset G$.

2. Sea μ una medida en G y H un subgrupo de G. Sea M un conjunto de representantes para la colección de cosets a derecha de H en G. Defina ν en 2^H por:

   $\nu(A) = \mu(\bigcup\{gA : g \in M\})$, entonces vemos que:

   - Sí $A, B \subset H$ y $A \cap B = \varnothing$, considere $g_1, g_2 \in M$, entonces $Ag_1 \cap Bg_2 = \varnothing$, caso contrario, existe $a \in A$ tal que $ag_1 \in Bg_2$.
     - Sí $g_1 = g_2$, entonces $a \in B$, lo cuál es una contradicción.
     - Sí $g_1 \neq g_2$ entonces $ag_1 \in Bg_2 \subset Hg_2$, por lo tanto $Hg_1 \cap Hg_2 \neq \varnothing$ lo cuál es una contradicción con la definición de M.

     De lo anterior concluimos que $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.
   - Sí $A \subset G$ y $r \in G$, entonces:
     $\nu(rA) = \mu(\bigcup\{(rA)g : g \in M\}) = \mu\big(r(\bigcup\{Ag : g \in M\})\big) = \nu(A)$ pues μ es $G-$invariante a izquierda.

3. Sí μ es una medida para G, defina $\nu : (G/N) \to [0,1]$ mediante $\nu(A) = \mu(\bigcup A)$, las propiedades de ν se verifican igual que en (2).

4. Sea $G = \bigcup\{G_\alpha : \alpha \in I\}$, con G_α grupo **amenable**, μ_α la respectiva medida tal que para cada $\alpha, \beta \in I$, existe $\gamma \in I$ tal que G_α y G_β son subgrupos de G_γ.

   Considere el espacio topológico $[0,1]^{2^G}$, que es compacto gracias al Teorema de Tychonoff. Para $\alpha \in I$, defina:

   $M_\alpha = \{\mu : 2^G \to [0,1] : \mu(G) = 1, \mu(gA) = \mu(A) \text{ y } \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)\}$ para todo par $A, B \subset G$ disjuntos y todo $g \in G_\alpha$.

   Entonces cada M_α es no vacío pues al menos está μ definida por $\mu(A) = \mu_\alpha(A \cap G_\alpha)$.

   De manera análoga a la prueba del **Teorema 2.1.2**, se puede ver que M_α es un subconjunto cerrado de $[0,1]^{2^G}$. Dado que $M_\gamma \subset M_\alpha \cap M_\beta$ cuando $G_\alpha, G_\beta \subset G_\gamma$, la colección $\{M_\alpha : \alpha \in I\}$ posee la **propiedad de intersección finita**, es decir que existe $\mu \in \bigcap\{M_\alpha : \alpha \in I\}$ y tal μ atestigua que G es **amenable**.

5. Sea G un grupo abeliano y considere $\{H \leqslant G : H \text{ es finitamente generado}\}$. Bajo el orden de inclusión, este conjunto define un sistema dirigido y más aún, G es la unión directa de este sistema. Ciertamente, sí tomamos $\alpha \in G$, entonces $\alpha \in \langle \alpha \rangle$, el subgrupo cíclico de 1 generador. Luego, por (4), será suficiente probar el resultado para grupos abelianos finitamente generados.

   Sí $H = \langle a_1 \rangle$, tome $\varepsilon > 0$ arbitrario. Escoja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{N} \leqslant \varepsilon$ y defina

   $\mu_\varepsilon : 2^H \to [0,1]$ por:

$$\mu_\varepsilon(A) = \frac{|\{i : 1 \leqslant i \leqslant N, a_1^i \in A\}|}{N}$$

   Entonces:

   a) $\mu_\varepsilon(H) = 1$ es inmediato.

   b) Sí $A, B \subset H$ tales que $A \cap B = \varnothing$, entonces $\mu_\varepsilon(A \cup B) = \mu_\varepsilon(A) \cup \mu_\varepsilon(B)$.

   c) Sea $A \subset H$, defina:

$$\bar{A} = \{i : 1 \leqslant i \leqslant N, a_1^i \in A\} \text{ y } a_1\bar{A} = \{j : 1 \leqslant j \leqslant N, a_1^j \in a_1A\}.$$

   Sí $N \in \bar{A}$, entonces $a_1^{N+1} \in a_1A$, pero como en $a_1\bar{A}$ solo consideramos las potencias menores o iguales que N, tendríamos que $(N+1) \notin a_1\bar{A}$.

   Reescriba el conjunto $\overline{a_1A}$ como $\{j : 1 \leqslant j \leqslant N, a_1^{j-1} \in A\}$; sí $1 \in \bar{A}$, entonces $a_1 \in A$ y $a_1 \notin a_1A$, caso contrario, $j = 0$ estaría en $\overline{a_1A}$.

   Por lo tanto, $0 \leqslant \big|\ |\bar{A}| - |\overline{a_1A}|\ \big| \leqslant 2$ y de aquí es fácil concluir que:

$$|\mu_\varepsilon(a_1A) - \mu_\varepsilon(A)| \leqslant \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

   Para cada $\varepsilon > 0$, defina $M_\varepsilon = \{\varrho : 2^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R} : \ |\varrho(aA) - \varrho(A)| < \varepsilon\}$, entonces la construcción de arriba nos muestra que $M_\varepsilon \neq \varnothing$.

   Adicionalmente, tenemos que M_ε es cerrado para todo $\varepsilon > 0$ por un razonamiento similar al **Teorema 2.1.2**.

   La familia de conjuntos $\{M_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ cumple con la propiedad de intersección finita pues:

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_{\varepsilon_i} = M_{\min \varepsilon_i}.$$

   Gracias al Teorema de Tychonoff, encontramos $\mu \in \bigcap\limits_{\varepsilon>0} M_\varepsilon$ tal que H es **amenable**.

Para el caso general, sea $H = \langle a_1, ..., a_m \rangle$ y defina:

$$\mu_\varepsilon(A) = \frac{|\{(i_1, ..., i_m) : 1 \leqslant i_1, ..., i_m \leqslant N \text{ y } a_1^{i_1} ... a_m^{i_m} \in A\}|}{N^m}$$

entonces, similarmente a como se probó antes, tenemos que:

a) $\mu_\varepsilon(H) = 1$.

b) $\mu_\varepsilon(A \cup B) = \mu_\varepsilon(A) \cup \mu_\varepsilon(B)$ sí $A \cap B = \varnothing$.

c) Sea $a_k \in H$ un generador, $A \subset H$ y defina $\bar{A}, a_k\bar{A}$ de manera similar al caso anterior, entonces:

- Sí $(i_1, ..., i_{k-1}, N, ..., i_m) \in \bar{A}$, entonces $(i_1, ..., i_{k-1}, N+1, ..., i_m) \notin a_k\bar{A}$.
- Sí $(i_1, ..., i_{k-1}, 1, ..., i_m) \in \bar{A}$, entonces $(i_1, ..., i_{k-1}, 1, ..., i_m) \notin a_k\bar{A}$.

Por lo tanto:

$$|\mu_\varepsilon(a_k A) - \mu_\varepsilon(A)| = \frac{2N^{m-1}}{N^m} = \frac{2}{N} \leqslant \varepsilon.$$

Por un razonamiento de compacidad similar al anterior, termina la prueba.

$\square$

Capítulo 3

Grupos amenables vía medias

Finalizando el capítulo anterior, se definieron **grupos amenables** como aquellos grupos G que admitían una medida de probabilidad finitamente aditiva, G-invariante.

Gracias al teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani, podemos conectar la teoría de la medida con el análisis funcional, lo que a su vez nos permitirá dar una nueva definición de **amenabilidad** junto con más ejemplos explícitos.

3.1. Relación entre medias y medidas

Definición 3.1.1. *Sea Z un conjunto, considere el espacio vectorial $\ell^\infty(Z)$ de todas las funciones acotadas $x : Z \to \mathbb{C}$, entonces este conjunto es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$ dada por: $\|x\|_\infty := \sup_{a \in Z} |x(a)|$.*

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene que $\lambda \in \ell^\infty(Z)$ como la función constante.

Definición 3.1.2. *Una media en Z es un mapa lineal $m : \ell^\infty(Z) \to \mathbb{C}$ tal que:*

1. $m(1) = 1$.
2. $m(\varphi) \geqslant 0$ *para todo* $\varphi \in \ell^\infty(Z)$ *tal que* $\varphi \geqslant 0$.

Proposición 3.1.3. *Sea $m : \ell^\infty(Z) \to \mathbb{C}$ una media, entonces $\|m\| = 1$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \ell^\infty(Z)$ función a valor real, defina $\psi := \|\varphi\|_\infty \cdot 1 - \varphi$, entonces $\varphi \geqslant 0$ y por hipótesis $m(\psi) \geqslant 0$, reescribiendo tenemos que: $m(\varphi) \leqslant \|\varphi\|_\infty$, reemplazando ϕ por $-\phi$ obtenemos $-m(\varphi) \leqslant \|\varphi\|_\infty \implies |m(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|_\infty$.

Tome ahora $\varphi \in \ell^\infty(Z)$ arbitrario, sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $m(\lambda\varphi) = |m(\varphi)|$(tome $\lambda = \overline{m(\varphi)}$).

Como $\ell^\infty(Z)$ es cerrado bajo conjugación, existen $\varphi_1, \varphi_2 \in E$ tales que $\lambda\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ (recordar que sí $z \in \mathbb{C}$, entonces $z = \frac{z+\bar{z}}{2} + i\frac{z-\bar{z}}{2}$), como $0 \leqslant m(\lambda\varphi) = m(\varphi_1 + i\varphi_2)$ por lo tanto $m(\varphi_2) = 0$ y concluimos que: $|m(\varphi)| = m(\lambda\varphi) = m(\varphi_1) \leqslant \|\varphi_1\|_\infty \leqslant \|\lambda\varphi\|_\infty$.

$\square$

Al conjunto de todas las medias sobre Z lo denotaremos por $\mathtt{M}(Z)$.

A continuación se mostrará que existe una biyección natural entre $\mathtt{PM}(Z)$ y $\mathtt{M}(Z)$, la cuál nos permitirá usar herramientas clásicas de análisis funcional y nos llevará a la segunda definición de **amenabilidad**.

Para ello, se seguirá el siguiente razonamiento: dado $A \subset Z$, denotamos por χ_A a la función característica de A.

Sea $m \in \mathtt{M}(Z)$, defina el mapa $\widehat{m} : 2^Z \to \mathbb{R}$ por: $\widehat{m}(A) = m(\chi_A)$, nótese lo siguiente:

- $\widehat{m}(Z) = m(\chi_Z) = m(1) = 1$.
- Sí $A, B \subset Z$ disjuntos, entonces $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ y se sigue que: $\widehat{m}(A \cup B) = m(\chi_{A\cup B}) = m(\chi_A) + m(\chi_B) = \widehat{m}(A) + \widehat{m}(B)$.

Teorema 3.1.4. *El mapa $\Phi : \mathtt{M}(Z) \to \mathtt{PM}(Z)$ definido por $\Phi(m) = \widehat{m}$ es biyectivo.*

Para probar esto se usarán unos cuántos lemas.

Sea $\mathscr{E}(Z) = Span(\chi_A : A \subset Z)$, luego tenemos el siguiente lema:

Lema 3.1.5. *El subespacio vectorial $\mathscr{E}(E)$ es denso en $\ell^\infty(Z)$.*

Demostración. Lema 4.1.9 de [6]. □

Sea $\mu \in \mathtt{PM}(Z)$ y para cada $x \in \mathscr{E}(Z)$, defina $\hat{\mu}(x) = \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \mu(x^{-1}(\lambda))\lambda$.

Lema 3.1.6. *Sea $x \in \mathscr{E}(Z)$. Suponga que hay una partición finita $(A_i)_{i\in I}$ de Z tal que la restricción de x a A_i es constante e igual a α_i para cada $i \in I$, entonces:*
$\widehat{\mu}(x) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)\alpha_i$.

Demostración. Dado que μ es finitamente aditiva:

$$\sum_{i\in I} \mu(A_i)\alpha_i = \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \Big(\sum_{\alpha_i=\lambda} \mu(A_i)\Big)\lambda = \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \mu(x^{-1}(\lambda))\lambda = \widehat{\mu}(x).$$

□

Lema 3.1.7. *El mapa $\widehat{\mu} : \mathscr{E}(Z) \to \mathbb{C}$ es lineal y continuo.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathscr{E}(Z)$ y $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, denote por V, W el conjunto de valores tomados por x y y respectivamente. Los subconjuntos de la forma $x^{-1}(\alpha) \cap y^{-1}(\beta)$, con $(\alpha, \beta) \in V \times W$, definen una partición finita de Z. Aplicando el **Lema 3.1.6**, tenemos que:

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(\xi x + \eta y) &= \sum_{(\alpha,\beta)\in V\times W} \mu(x^{-1}(\alpha) \cap y^{-1}(\beta))(\xi\alpha + \eta\beta) \\ &= \xi\Big(\sum_{(\alpha,\beta)\in V\times W} \mu(x^{-1}(\alpha) \cap y^{-1}(\beta))\alpha\Big) + \eta\Big(\sum_{(\alpha,\beta)\in V\times W} \mu(x^{-1}(\alpha) \cap y^{-1}(\beta))\beta\Big)\end{aligned}$$

$= \xi\widehat{\mu}(x) + \eta\widehat{\mu}(y)$. Por lo tanto $\widehat{\mu}$ es lineal.

Ahora bien, note que:

$$|\widehat{\mu}(x)| = |\sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \mu(x^{-1}(\lambda))\lambda| \leqslant \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \mu(x^{-1}(\lambda))|\lambda| \leqslant \sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \mu(x^{-1}(\lambda))\|x\|_\infty = \|x\|_\infty,$$

donde la última igualdad se tiene del hecho que: $\sum_{\lambda\in\mathbb{C}} \mu(x^{-1}(\lambda)) = \mu(Z) = 1$.

Así concluimos que $\widehat{\mu}$ es continua. □

Lema 3.1.8. *Sea X un espacio vectorial normado y Y un subespacio vectorial denso de X. Suponga que $\varphi : Y \to \mathbb{C}$ es un mapa lineal y continuo, entonces existe una extensión lineal y continua $\widehat{\varphi} : X \to \mathbb{C}$.*

Demostración. Lema 4.1.12 de [6]. □

Demostración. (**Teorema 3.1.4**): Sea $\mu \in \mathtt{PM}(Z)$, por los **Lemas 3.1.5**, **3.1.7** y **3.1.8**, el mapa $\widehat{\mu} : \mathscr{E}(Z) \to \mathbb{R}$ puede extenderse a un mapa lineal continuo $\bar{\mu} : \ell^\infty(Z) \to \mathbb{C}$, de donde se tiene que:

- $\bar{\mu}(1) = \widehat{\mu}(1) = \mu(Z) = 1$.
- Sí $y \in \mathscr{E}(Z)$ y $y \geqslant 0$, entonces $\bar{\mu}(y) = \hat{\mu}(y) \geqslant 0$. Usando la densidad de $\mathscr{E}(Z)$ en $\ell^\infty(Z)$, se concluye que para todo $x \in \ell^\infty(Z)$ tal que $x \geqslant 0$, $\bar{\mu}(x) \geqslant 0$.

Por tanto $\bar{\mu} \in \mathtt{M}(Z)$.

Para todo subconjunto $A \subset Z$, se tiene que $\bar{\mu}(\chi_A) = \widehat{\mu}(\chi_A) = \mu(A)$, luego $\Phi(\bar{\mu}) = \mu$ y esto nos da la sobreyectividad de Φ.

Para probar la inyectividad, tome $m_1, m_2 \in \mathtt{M}(Z)$ tales que $\Phi(m_1) = \Phi(m_2)$, luego $m_1(\chi_A) = m_2(\chi_A)$ para todo $A \subset E$, por linealidad, $m_1 = m_2$ en $\mathscr{E}(Z)$ y por densidad obtenemos el resultado en $\ell^\infty(Z)$. □

Al conjunto $(\ell^\infty(Z))^*$ dotado con la topología derivada de la norma operador $\|\cdot\|$ se le conoce como la *topología fuerte*. Por otro lado, definimos la *topología débil* * en $(\ell^\infty(Z))^*$ como la topología más pequeña tal que el mapa evaluación $\psi_x : (\ell^\infty(Z))^* \to \mathbb{R}$, $\psi_x(u) = u(x)$, es continuo para todo $x \in \ell^\infty(Z)$.

De la **Definición 3.1.2** tenemos que $\mathtt{M}(Z) \subset \{u \in (\ell^\infty(Z))^* : \|u\| = 1\}$.

Teorema 3.1.9. *El conjunto $\mathtt{M}(Z)$ es un subconjunto compacto y convexo de $(\ell^\infty(Z))^*$ respecto a la topología débil $*$.*

Demostración. 1. $\mathtt{M}(Z)$ es convexo: sean $m_1, m_2 \in \mathtt{M}(Z)$ y $t \in [0, 1]$, es claro que $(tm_1 + (1-t)m_2)(1) = 1$ y además si tomamos $x \in \ell^\infty(Z)$ tal que $x \geqslant 0$ entonces $(tm_1 + (1-t)m_2)(x) \geqslant 0$ pues estamos sumando términos mayores o iguales que 0, de lo cuál se concluye que $\mathtt{M}(Z)$ es convexo.

2. $\mathtt{M}(Z)$ es compacto: probaremos que $\mathtt{M}(Z)$ es cerrado en la topología débil $*$ y como está contenido en la bola unitaria de $\ell^\infty(Z)$, que es compacta gracias al teorema de Banach-Alaoglu, (ver el **Teorema B.1.3**), concluiremos que $\mathtt{M}(Z)$ es compacto.

   Tome $(m_i)_{i\in I}$ una red en $\mathtt{M}(Z)$ que converge a $u \in (\ell^\infty(Z))^*$, entonces, para todo $i \in I$ tenemos que $\psi_1(m_i) = m_i(1) = 1$ y $\psi_x(m_i) = m_i(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \ell^\infty(Z)$ tal que $x \geqslant 0$. Usando la continuidad de las evaluaciones y tomado límites obtenemos que $\psi_1(u) = u(1) = 1$ y $\psi_x(u) = u(x) \geqslant 0$, por lo tanto $u \in \mathtt{M}(Z)$ y se sigue que $\mathtt{M}(Z)$ es cerrado.

□

3.2. Relación entre medias y medidas sobre grupos

En está sección, se explorarán las propiedades adicionales de $\mathtt{PM}(Z)$ y $\mathtt{M}(Z)$ cuando el conjunto sobre el cuál se construyen es un grupo.

Sea G un grupo, entonces G define una acción natural a izquierda sobre $\mathtt{PM}(G)$ y $\mathtt{M}(G)$ como sigue:

1. Sea $\mu \in \mathtt{PM}(G)$ y $g \in G$, definimos $g\mu : 2^G \to [0,1]$ por $g\mu(A) = \mu(g^{-1}A)$ para todo $A \subset G$.

2. Sea $x \in \ell^\infty(G)$ y $g \in G$, definimos $gx : G \to \mathbb{R}$ por $gx(h) = x(g^{-1}h)$ para todo $h \in G$.

3. Sea $u \in (\ell^\infty(G))^*$ y $g \in G$, por dualidad podemos definir $gu : \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$ por $gu(x) = u(g^{-1}x)$ para todo $x \in \ell^\infty(G)$.

   Decimos que u es invariante a izquierda sí $gu(x) = u(x)$ para todo $x \in \ell^\infty(G)$ y $g \in G$.

Observe que $\|gx\|_\infty = \sup\limits_{h\in G} |gx(h)| = \sup\limits_{h\in G} |x(g^{-1}h)| = \sup\limits_{h\in G} |x(h)| = \|x\|_\infty$.

De lo anterior obtenemos que la acción de G en $\ell^\infty(G)$ define una isometría y consecuentemente una función continua en $\ell^\infty(G)$ para todo $g \in G$.

Proposición 3.2.1. *La acción a izquierda de G en $\mathtt{M}(G)$ es afín y continua con respecto a la topología débi $*$ en $\mathtt{M}(G)$.*

Demostración. Es claro que la acción a izquierda de G en $(\ell^\infty(G))^*$ es lineal. Por otro lado, si se fija un $g \in G$, entonces el mapa $u \mapsto gu$ es continuo en $(\ell^\infty(G))^*$ dado que, el mapa $u \mapsto gu(x)$ es el mapa evaluación en el punto $g^{-1}x$, que es continuo por la definición de la topología débil $*$. Como $\mathtt{M}(G)$ es un subconjunto convexo de $(\ell^\infty(G))^*$ (gracias al **Teorema 3.1.9**), se concluye que la restricción de la acción a $\mathtt{M}(G)$ es afín y continua. □

Proposición 3.2.2. *Sea $g \in G$ y $A \subset G$, entonces $g\chi_A = \chi_{gA}$*

Demostración. Sea $h \in G$, entonces $g\chi_A(h) = \chi_A(g^{-1}h) = 1$ sí y solo sí $g^{-1}h \in A$, equivalentemente $h \in gA$, por lo tanto $\chi_{gA}(h) = 1$, de donde concluimos que $g\chi_A = \chi_{gA}$. $\square$

Recordamos ahora la biyección $\Phi : \mathtt{M}(G) \to \mathtt{PM}(G)$ definida por $\Phi(m) = \widehat{m}$, con $\widehat{m}(A) = m(\chi_A)$.

Teorema 3.2.3. *Sea $g \in G$ y $m \in \mathtt{M}(G)$, entonces $\widehat{gm} = g\widehat{m}$.*

Demostración. Sea $A \subset G$, usando la **Proposición 3.2.2** vemos que:
$\widehat{gm}(A) = gm(\chi_A) = m(g^{-1}\chi_A) = m(\chi_{g^{-1}A}) = \widehat{m}(g^{-1}A) = g\widehat{m}(A)$. $\square$

Proposición 3.2.4. *Sea $m \in \mathtt{M}(G)$, entonces m es invariante a izquierda (abrev. **lim**) sí y solo sí la respectiva medida de probabilidad finitamente aditiva $\widehat{m}$ es invariante a izquierda.*

Demostración. Se sigue del **Teorema 3.2.3**. $\square$

Teorema 3.2.5. *Sea G un grupo, entonces G es **amenable** sí y solo sí existe una **lim**.*

Proposición 3.2.6. *Sea G un grupo. Suponga que existe una $(m_i)_{i\in I}$ en $\mathtt{M}(G)$ tal que, para todo $g \in G$, la red $(gm_i - m_i)_{i\in I}$ converge a 0 en $(\ell^\infty(G))^*$ con la topología débil $*$. Entonces G es **amenable**.*

Demostración. Dado que $\mathtt{M}(G)$ es compacto en la topología débil $*$ por el **Teorema 3.1.9**, se puede asumir que la red (m_i) converge a una media $m \in \mathtt{M}(G)$. Sea $g \in G$, dado que la acción a izquierda de G en $\mathtt{M}(G)$ es continua por la **Proposición 3.2.2**, se tiene que, para todo $x \in \ell^\infty(G)$ la red $(gm_i - m_i)(x)$ converge a 0. tomando límites, se tiene la igualdad $gm(x) = m(x)$. Por lo tanto $gm = m$, lo que muestra que m es invariante a izquierda, por lo tanto G es **amenable**. $\square$

Observación 3.2.7. *Sea $g \in G$, denote por δ_g el mapa definido por $\delta_g(f) = f(g)$ para $f \in \mathcal{C}_c(G)$. De la definición de convolución es fácil ver que: $(\delta_g * \phi)(x) = \phi(g^{-1}x)$, por lo tanto $\delta_g * \phi = g\phi \in \ell^\infty(G)$ y podemos escribir la condición de **amenabilidad** como sigue:*

Definición 3.2.8. *Sea G un grupo, entonces G es **amenable** sí y solo sí existe una media en $\ell^\infty(G)$ tal que $m(\delta_g * \phi) = m(\phi)$.*

Definición 3.2.9. *Sea $\mathcal{P}(G) = \{f \in \ell^1(G) : f \geqslant 0, \|f\|_1 = 1\}$, entonces m se dice una **media invariante a izquierda topológica** (abreviado **t-lim**) sí m es una media tal que $m(f * \phi) = m(\phi)$ para $\phi \in \ell^\infty(G), f \in \mathcal{P}(G)$.*

Lema 3.2.10. *Sea G un grupo, entonces toda **t-lim** es **lim**.*

Demostración. Sea m una **t-lim**, tome $\phi \in \ell^\infty(G), g \in G$ y fije $f \in \mathcal{P}(G)$, entonces: $m(\delta_g * \phi) = m(f * \delta_g * \phi) = m((f * \delta_g) * \phi) = m(\phi)$.

(El hecho de que $f * \delta_g \in \mathcal{P}(G)$ se sigue del **Corolario B.2.5**) $\square$

Lema 3.2.11. *Sea G un grupo y $m \in UCB(G)^*$(ver la **Definición B.2.4**) una **lim**, entonces m es una **t-lim**.*

Demostración. Sean $\phi \in UCB(G)$, $f \in \ell^1(G)$, como m es una **lim**, vemos que:

$$m(\delta_g * (f * \phi)) = m((f * \phi)). \tag{3.1}$$

Para cada $\phi \in UCB(G)$, el funcional $f \mapsto m(f * \phi)$ es continuo (dado que es la composición de una convolución con m, las cuales son continuas), por lo tanto, existe $\psi \in \ell^\infty$ tal que: $m(f * \phi) = \sum_{x \in G} f(x)\psi(x)$. Por la ecuación (3.1) tenemos que:

$$\sum_{x\in G} f(x)\psi(x) = \sum_{x\in G} (\delta_g * f)(x)\psi(x) = \sum_{x\in G} f(g^{-1}x)\psi(x) = \sum_{u\in G} f(u)\psi(gu),$$

luego $\psi = \delta_{g^{-1}} * \psi$, de donde concluimos que existe $C(\phi)$ constante tal que:

$$m(f * \phi) = C(\phi) \sum_{x\in G} f(x).$$

Si $f \in \mathcal{P}(G)$, entonces $m(f * \phi) = C(\phi)$.

Consideré ahora $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ una aproximación acotada de la identidad para $\ell^1(G)$ contenida en $\mathcal{P}(G)$, (ver la **Definición B.2.13**), entonces: $m(f * \phi) = \lim_\alpha m(f * e_\alpha * \phi) = C(\phi) = \lim_\alpha m(e_\alpha * \phi) = m(\phi)$. □

Teorema 3.2.12. *Sea G un grupo, entonces son equivalentes:*

1. *G es **amenable**.*
2. *Existe una **t-lim** en $\ell^\infty(G)$.*
3. *(Propiedad de Reiter) Para todo $Q \subset G$ compacto y todo $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathcal{P}(G)$ tal que:*

$$\sup_{x\in Q} \left\| x^{-1}f - f \right\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

4. *(Condición de Følner) Para todo subconjunto finito $E \subset G$ y $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto finito $F \subset G$ tal que:*

$$|gF \triangle F| \leqslant \varepsilon |F|.$$

Demostración. (1 implica 2) Sea G un grupo **amenable**, entonces existe m una **lim** para $\ell^\infty(G)$, como $UCB(G)$ es un subespacio de $\ell^\infty(G)$, entonces m es una **lim** para $UCB(G)$.

Sea $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ una aproximación acotada de la identidad para $\ell^1(G)$ contenida en $\mathcal{P}(G)$ y defina: $\widetilde{m} : \ell^\infty(G) \to \mathbb{C}$ por: $\widetilde{m}(\phi) = \lim_\alpha m(e_\alpha * \phi * e_\alpha)$, entonces:

- $\widetilde{m}(1) = 1$:

  note que $(1 * e_\alpha)(g) = \sum_{x\in G} 1(x)e_\alpha(x^{-1}g) = \sum_{x\in G} e_\alpha(x^{-1}g) = \|e_\alpha\|_1 = 1.$

  Repitiendo este razonamiento concluimos que: $\widetilde{m}(1) = \lim_\alpha m(e_\alpha * 1 * e_\alpha) = 1$.

- $\|\widetilde{m}\| = 1$:

  por definición, $\|\widetilde{m}\| = \sup_{\|\phi\|_\infty = 1} |\widetilde{m}(\phi)| = \sup_{\|\phi\|_\infty = 1} |\lim_\alpha m(e_\alpha * \phi * e_\alpha)|.$

  Ahora basta con ver que: $|m(e_\alpha * \phi * e_\alpha)| \leqslant \|m\|\|e_\alpha\|_1\|\phi\|_\infty\|e_\alpha\|_1$.

- $\widetilde{m}(f * \phi) = \widetilde{m}(\phi)$ para $f \in \mathcal{P}(G)$ y $\phi \in \ell^\infty(G)$:

  Tome $f \in \mathcal{P}(G)$ y $\phi \in l^\infty(G)$, entonces:

  $\widetilde{m}(f * \phi) = \lim_\alpha m(e_\alpha * (f * \phi) * e_\alpha)$

  $$\begin{aligned}\widetilde{m}(f * \phi) = \lim_\alpha m(e_\alpha * (f * \phi) * e_\alpha) &= \lim_\alpha m(f * (e_\alpha * \phi * e_\alpha)) \\ &= \lim_\alpha m(e_\alpha * \phi * e_\alpha) \qquad \text{(pues } m \text{ es una } \textbf{t-lim}) \\ &= \widetilde{m}(\phi).\end{aligned}$$

De esta manera demostramos que $\widetilde{m}$ es una **t-lim** para $\ell^\infty(G)$.

(2 implica 3) Sea m una **t-lim** en $\ell^\infty(G)$; como $\mathcal{P}(G)$ es débilmente $*$ denso en el conjunto de todas las medias de $\ell^\infty(G)$, existe una red $(f_i)_i \subset \mathcal{P}(G)$ que converge a m en la topología débil $*$. Más aún, como m es una **t-lim**, para todo $f \in \mathcal{P}(G)$ tenemos que:

$$\lim_i (f * f_i - f_i) = 0. \tag{3.2}$$

Esto debido a que:

$$\begin{aligned}\langle f * f_i, \varphi\rangle = \sum_{x\in G}(f * f_i)(x)\varphi(x) &= \sum_{x\in G}\Big(\sum_{y\in G} f(xy)f_i(y^{-1})\Big)\varphi(x) \\ &= \sum_{y\in G}\Big(\sum_{x\in G} f(xy)\varphi(x)\Big)f_i(y^{-1}) \qquad (\text{ dado que } \|f\|_1 = 1) \\ &= \sum_{y\in G}\Big(\sum_{x\in G} \check{f}(y^{-1}x^{-1})\varphi(x)\Big)f_i(y^{-1}) \quad (\text{ tome } \check{f}(z) = f(z^{-1})) \\ &= \sum_{y\in G}\Big(\sum_{x\in G} \check{f}(u)\varphi(u^{-1}y^{-1})\Big)f_i(y^{-1}) \\ &= \sum_{y\in G}(\check{f} * \varphi)(y^{-1})f_i(y^{-1}) \\ &= \langle f_i, \check{f} * \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \lim_i \langle f * f_i - f_i, \varphi \rangle = \lim_i \langle f * f_i, \varphi \rangle - \langle f_i, \varphi \rangle &= \lim_i \langle f_i, \check{f} * \varphi \rangle - \langle f_i, \varphi \rangle \\ &= m(\check{f} * \varphi) - m(\varphi) \\ &= 0 \qquad \text{(pues } m \text{ es una } \textbf{t-lim}\text{)} \end{aligned}$$

Defina $E = \prod_{f \in \mathcal{P}(G)} \ell^1(G)$, entonces E es localmente convexo y la topología débil en E está dada por el producto de topologías debiles.

Sea $\Sigma \subset E$ definido por: $\Sigma = \{(f * g - g)_{f \in \mathcal{P}(G)} : g \in \mathcal{P}(G)\}$. Note que Σ es convexo ya que, si tomamos $f, g_1, g_2 \in \mathcal{P}(G)$ y $t \in [0,1]$, tenemos la igualdad:

$$t(f * g_1 - g_1) + (1-t)(f * g_2 - g_2) = f * (tg_1 + (1-t)g_2) - (tg_1 + (1-t)g_2)$$

Más aún, gracias a (3.2) su clausura en la topología débil $*$ contiene al 0.

Entonces existe una red $(g_j)_j \subset \mathcal{P}(G)$ tal que para todo $f \in \mathcal{P}(G)$:

$$\lim_j \|f * g_j - g_j\|_1 = 0$$

Inclusive, si escojemos $f \in K \subset l^1(G)$ compacto y $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces existen $\xi_1, ..., \xi_n$ tales que: $\|f - \xi_k\| \leqslant \varepsilon$ para algún $k \in \{1, ..., n\}$.

Escoja j_0 tal que: $\|\xi_l * g_j - g_j\| \leqslant \varepsilon$ para todo $l \in \{1, ..., n\}$ y $j \geqslant j_0$.

Entonces para todo $j \geqslant j_0$ y $f \in K$ obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \|f * g_j - g_j\|_1 &= \|(f * g_j - \xi_k * g_j) + (\xi_k * g_j - g_j)\|_1 \\ &\leqslant \|f * g_j - \xi_k * g_j\|_1 + \|\xi_k * g_j - g_j\|_1 \\ &\leqslant \|g_j\|_1 \|f - \xi_k\|_1 + \|\xi_k * g_j - g_j\|_1 \leqslant 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Debido a que $g_j \in \mathcal{P}(G)$ y considerando k tal que $\|f - \xi_k\|_1 \leqslant \varepsilon$.

Escoja $Q \subset G$ compacto tal que $e \in Q$ y $\varepsilon > 0$. Fije $f \in \mathcal{P}(G)$, como el mapa $G \to \ell^1(G)$ dado por $x \mapsto x^{-1}f$ es continuo (**Corolario B.2.7**), entonces el conjunto $\{x^{-1}f : x \in Q\}$ es un compacto en $\ell^1(G)$, por consiguiente, existe j tal que:

$$\left\|x^{-1}f * g_j - g_j\right\|_1 \leqslant \varepsilon \text{ para todo } x \in Q.$$

Considere $g = f * g_j$ y tome $x \in Q$ arbritrario, entonces $g \in \mathcal{P}(G)$ y se tiene que:

$$\left\|x^{-1}g - g\right\|_1 = \left\|(x^{-1}g - g_j) + (g_j - g)\right\|_1 \leqslant \left\|x^{-1}f * g_j - g_j\right\|_1 + \|f * g_j - g_j\|_1 \leqslant 2\varepsilon$$

(3 implica 4): Sea $Q \subset G$ una vecindad compacta de e_G, $\varepsilon > 0$ y $K = Q^2$. Por hipótesis, sabemos que existe $f \in \mathcal{P}(G)$ tal que:

$$\sup_{x\in K}\left\|x^{-1}f-f\right\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon|Q|}{2|K|}$$

Aplicando el **Lema B.2.8** a f y $x^{-1}f$ tenemos que:

$$\left\|x^{-1}f-f\right\|_1 = \int_0^\infty |xF(f,r)\triangle F(f,r)|\,dr \text{ para todo } x \in G.$$

Por lo tanto, para todo $x \in K$ se tiene que:

$$\int_0^\infty |F(f,r)|\left(\sum_{x\in K}\frac{|xF(f,r)\triangle F(f,r)|}{|F(f,r)|}\right)dr = \sum_{x\in K}\left\|x^{-1}f-f\right\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon|Q|}{2}.$$

Ahora presentaremos una serie de hechos que nos permitirán concluir que $xA\cap A \neq \varnothing$:

1. Dado que $\displaystyle\int_0^\infty |F(f,r)|\,dr = \|f\|_1 = 1$, existe algún r tal que $0 < |F(f,r)| < \infty$ y

   $$\sum_{x\in K}\frac{|xF(f,r)\triangle F(f,r)|}{|F(f,r)|} \leqslant \frac{\varepsilon|Q|}{2},$$

   en caso contrario: $\displaystyle |F(f,r)|\sum_{x\in K}\frac{|xF(f,r)\triangle F(f,r)|}{|F(f,r)|} > |F(f,r)|\frac{\varepsilon|Q|}{2}$

   Puesto que la función $|F(f,r)|$ es positiva para todo r.

   Integrando a ambos lados tendríamos que:

   $$\int_0^\infty |F(f,r)|\left(\sum_{x\in K}\frac{|xF(f,r)\triangle F(f,r)|}{|F(f,r)|}\right)dr > \|f\|_1\frac{\varepsilon|Q|}{2}.$$

   Lo cuál supone una contradicción con lo antes demostrado.

2. Para el conjunto $A = \left\{x \in K : \dfrac{|xF(f,r)\triangle F(f,r)|}{|F(f,r)|} \leqslant \varepsilon\right\}$ se tiene que $|K\backslash A| < \dfrac{|Q|}{2}$.

   Caso contrario:

   $$\sum_{x\in K}\frac{|xF(f,r)\triangle F(f,r)|}{|F(f,r)|} \geqslant \sum_{x\in K\backslash A}\frac{|xF(f,r)\triangle F(f,r)|}{|F(f,r)|} > \varepsilon|K\backslash A| > \frac{\varepsilon|Q|}{2}$$

   lo cuál es, nuevamente, una contradicción.

3. $Q \subset AA^{-1}$

Sea $x \in Q$, note que $Q = e_G Q \subset Q^2 = K$ pues Q es vecindad compacta de e_G.
Entonces $|xK \cap K| \geqslant |xQ \cap K| = |xQ| = |Q|$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}|Q| \leqslant |xK \cap K| &= |x(A \cup (K \backslash A)) \cap (A \cup (K \backslash A))| \\ &\leqslant |xA \cap A| + |K \backslash A| + |x(K \backslash A)| \\ &= |xA \cap A| + 2|K \backslash A| < |xA \cap A| + |Q|.\end{aligned}$$

Por lo tanto $|xA \cap A| > 0$, es decir, existen $a, y \in A$ tales que: $ax = y$, entonces $x = ya^{-1}$.

Ahora, sean $x_1, x_2 \in A$, entonces se tiene que:

$$x_1 x_2^{-1} F(f,r) \triangle F(f,r) \subset (x_1 x_2^{-1} F(f,r) \triangle x_1 F(f,r)) \cup (x_1 F(f,r) \triangle F(f,r))$$

y ciertamente esto implica que:

$$\begin{aligned}|x_1 x_2^{-1} F(f,r) \triangle F(f,r)| &\leqslant |(x_1 x_2^{-1} F(f,r) \triangle x_1 F(f,r))| + |(x_1 F(f,r) \triangle F(f,r))| \\ &= |(x_2^{-1} F(f,r) \triangle F(f,r))| + |(x_1 F(f,r) \triangle F(f,r))| \leqslant 2\varepsilon |F(f,r)|.\end{aligned}$$

Con lo cuál habremos acabado la prueba.

(4 implica 1): Sea $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subconjuntos finitos de G, entonces por la *Condición de Folner*, existen F_n conjuntos finitos tales que:

$$|gF_n \triangle F_n| \leqslant \frac{|F_n|}{n} \quad \text{para todo} \quad g \in E_n,$$

denote $f_n = \dfrac{\chi_{F_n}}{|F_n|}$, entonces tenemos que $f_n \in \mathcal{P}(G)$ y $\|gf_n - f_n\|_1 = \dfrac{|gF_n \triangle F_n|}{|F_n|}$

Sea m un punto de acumulación para $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en la topología débil $*$, entonces m es una **lim** en $l^\infty(G)$. □

3.3. Grupos amenables y operaciones que los preservan II

En esta sección, utilizaremos algunos de los resultados ya obtenidos para ampliar la clase de **grupos amenables** y poder dar ejemplos más concretos.

Teorema 3.3.1. *Sí, dos grupos G y H son isomorfos, con G **amenable**, entonces H también es **amenable**.*

Demostración. Sea $\theta : G \to H$ el isomorfismo entre los grupos y m_G la media invariante a izquierda para G. Defina ahora $\theta^* : \ell^\infty(H) \to \ell^\infty(G)$ por: $\theta^*\phi = \phi \circ \theta$, note que está bien definida pues: $\|\theta^*\phi\|_\infty = \sup\limits_{g\in G} |(\theta^*\phi)(g)| = \sup\limits_{g\in G} |(\phi(\theta(g))| = \sup\limits_{h\in H} |\phi(h)| = \|\phi\|_\infty$ dado que θ es un isomorfismo.

Defina entonces $m_H : \ell^\infty(H) \to \mathbb{R}$ como $m_H(\phi) = m_G(\theta^*\phi)$, entonces vemos que:

1. $m_H(1) = m_G(\theta^*1) = 1$.

2. $m_H(y) \geqslant 0$ cuando $y \geqslant 0$: sea $y \in \ell^\infty(H)$ tal que $y \geqslant 0$, entonces $\theta^*y \geqslant 0$, por lo tanto $0 \leqslant m_G(\theta^*y) = m_H(y)$.

3. $m_H(h\phi) = m_H(\phi)$ para todo $h \in H$: sea $h \in H$, entonces para todo $x \in G$: $\theta^*h\phi(x) = (h\phi \circ \theta)(x) = h\phi(\theta(x)) = \phi(h^{-1}\theta(x))$, dado que θ es isomorfismo, existe $a \in G$ tal que $\theta(a) = h^{-1}$ por consiguiente $\phi(h^{-1}\theta(x)) = \phi(\theta(a)\theta(x)) = \phi(\theta(ax)) = (\phi\circ\theta)(ax) = \theta^*\phi(ax) = a^{-1}\theta^*\phi(x)$, finalmente: $m_H(h\phi) = m_G(a^{-1}\theta^*\phi) = m_G(\theta^*\phi) = m_H(\phi)$.

□

Teorema 3.3.2. *Sí N es un subgrupo normal de G, y tanto N como G/N son **amenables**, entonces G es **amenable**.*

Demostración. Sean ν_1, ν_2 y m_{ν_1}, m_{ν_2} las medidas y medias invariantes para N y G/N respectivamente. Para cada $A \subset G$, defina $f_A : G \to \mathbb{C}$ por $f_A(g) = \nu_1(N \cap g^{-1}A)$.

Sean $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1N = g_2N$, entonces $g_2^{-1}g_1 = h \in N$, luego:
$f_A(g_2) = \nu_1(N \cap g_2^{-1}A) = \nu_1(N \cap hg_1^{-1}A) = \nu_1(h(N \cap g_1^{-1}A)) = \nu_1(N \cap g_1^{-1}A) = f_A(g_1)$.

De lo anterior concluimos que f_A induce una función $\hat{f}_A$ acotada con dominio en G/N. Se procede a definir $\mu(A) = m_{\nu_2}(\hat{f}_A)$ y se probará que cumple con los requisitos de una medida $G-$invariante y finitamente aditiva en 2^G:

1. Dado que $f_G = \chi_G = 1$, entonces $\mu(G) = 1$.

2. Sean $A, B \subset G$ tales que $A \cap B = \varnothing$, entonces $g^{-1}A \cap g^{-1}B = \varnothing$ para todo $g \in G$, por lo tanto:

   $f_{A\cup B}(g) = \nu_1(N \cap g^{-1}(A \cup B)) = \nu_1(N \cap (g^{-1}A \cup g^{-1}B)) = f_A(g) + f_B(g)$, de donde se sigue que $\hat{f}_{A\cup B}(gN) = \hat{f}_A(gN) + \hat{f}_B(gN)$, lo que finalmente nos permite concluir que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

3. Sea $g \in G$, entonces $f_{gA}(g_0) = \nu_1(N \cap g_0^{-1}gA) = f_A(g^{-1}g_0) = gf_A(g_0)$, usando la invarianza a izquierda de m_{ν_2} tenemos por resultado que $\mu(gA) = \mu(A)$.

□

Corolario 3.3.3. *Suponga que G_1 y G_2 son grupos **amenables**, entonces el grupo $G = G_1 \times G_2$ es **amenable**.*

Demostración. El conjunto $H = \{(g_1, e_{G_2}) : g_1 \in G_1\}$ es un subgrupo normal de G isomorfo a G_1 con cociente isomorfo a G_2. □

Teorema 3.3.4. *Sea $0 \to H \to G \to K \to 0$ una sucesión exacta corta de grupos contables, sí H, K son grupos **amenables**, entonces G es **amenable**.*

Demostración. Por el **Teorema 3.3.1** y la **Observación A.2.6**, tenemos que $Ker(g)$ y $G/Ker(g)$ son dóciles, dado que $Ker(g)$ es normal en G, usando el **Teorema 3.3.2**, finalizamos la demostración. □

Teorema 3.3.5. *Todo grupo soluble es **amenable**.*

Demostración. Sea G un grupo soluble y $\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_n = G$ la respectiva cadena finita de G.

Note que:

1. H_0 es abeliano, por lo tanto **amenable** gracias al **Teorema 2.2.3**.
2. H_0 es normal en H_1.
3. H_1/H_0 es abeliano por definición de grupo soluble y nuevamente **amenable** gracias al **Teorema 2.2.3**.
4. Debido al **Teorema 3.3.2** tenemos que H_1 es **amenable**.

Gracias a la finitud de la cadena, podemos repetir este proceso un número finito de veces hasta llegar al final de la sucesión, entonces concluiremos que G es **amenable**. □

Ejemplo 3.3.6. *El grupo de Lamplighter es **amenable**.*

Demostración. Ver el **Corolario A.2.17**. □

Ejemplo 3.3.7. *Todo grupo nilpotente es soluble.*

Demostración. Ver la **Proposición A.2.10**. □

Ejemplo 3.3.8. *El grupo $SL_2(\mathbb{Z})$ no es amenable.*

Demostración. Para probar esto, se considerarán las siguientes matrices $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

con $k \geqslant 2$, junto con el grupo Γ generado por estas y se mostrará que:

1. Sí $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\} : |x| < |y|\}$ y $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\} : |y| < |x|\}$, entonces $A^n \Omega_1 \subset \Omega_2$ y $B^m \Omega_2 \subset \Omega_1$ para todo par $n, m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$:

   a) Sea $(x,y) \in \Omega_1$ y $n_1 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, entonces $\begin{pmatrix} 1 & kn_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + kn_1 y \\ y \end{pmatrix}$, dado que

      $|x| < |y|$, entonces $|kn_1 y + x| > |kn_1 y - y| = |y||kn_1 - 1| > |y|$, por lo tanto $A^{n_1}\Omega_1 \subset \Omega_2$.

   b) Sea $(x,y) \in \Omega_2$ y $n_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ kn_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ kn_2 x + y \end{pmatrix}$, dado que $|y| < |x|$

      entonces $|kn_2 x + y| > |kn_2 x - x| = |x||kn_2 - 1| > |x|$, por lo tanto $B^{n_2}\Omega_2 \subset \Omega_1$.

2. Fije $\omega \in \Omega_1$. Entonces $A^{i_1} B^{i_2} \cdot ... \cdot B^{i_{n-1}} A^{i_n} \omega \neq \omega$, con $i_1, ..., i_n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$:

   Es fácil deducir de (1) que:

$$\begin{aligned} & A^{i_n}\omega \in \Omega_2 \\ & B^{i_{n-1}}(A^{i_n}\omega) \in \Omega_1 \\ & \vdots \\ & A^{i_1}(B^{i_2} \cdot ... \cdot B^{i_{n-1}} A^{i_n}\omega) \in \Omega_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3. Usando el lema del ping-pong, tendremos que Γ es un grupo libre de rango 2, usando la **Observación 2.2.2** y el **Teorema 3.3.1**, concluimos que $SL_2(\mathbb{Z})$ no es amenable.

□

Ejemplo 3.3.9. *Sea X un conjunto infinito. Entonces el grupo de simetrías $Sym(X)$ no es amenable*

Demostración. Sea X un conjunto infinito, entonces X contiene un conjunto que se encuentra en correspondencia biyectiva con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (esto pues X tiene 2 opciones, o es infinito contable, en cuyo caso el mismo es biyectivo con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o es infinito no contable, en cuyo caso contiene un subconjunto propio, que es biyectivo con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

Dado que $SL_2(\mathbb{Z}) \subset Sym(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$, gracias al ejemplo anterior, concluimos que $Sym(X)$ no es amenable.

□

Sin embargo, el subgrupo $Sym_0(X) = \{\pi \in Sym(X) : \pi(x) \neq x$ solamente para finitos $x\}$, es un grupo **dócil** infinito gracias al **Teorema 2.2.3**.

Capítulo 4

La propiedad de contenencia débil y la amenabilidad de un grupo

4.1. Vectores casi invariantes

Una representación π tiene un **vector casi invariante** sí existe una sucesión de vectores unitarios ξ_i tales que:

$$\|\pi(g)\xi_i - \xi_i\| \to 0 \text{ para todo } g \in G.$$

Teorema 4.1.1. *Un grupo G es* ***amenable*** *sí y solo sí la representación regular a izquierda admite un vector casi invariante.*

Demostración. Asuma G un grupo amenable y sea F_i una sucesión de Følner

aproximando un conjunto generador S. Defina $\xi_i = \dfrac{\chi_{F_i}}{\sqrt{|F_i|}}$, entonces:

$$\begin{aligned}\|\lambda_G(g)\xi_i - \xi_i\|_2 &= \sum_{x\in G} |\lambda_G(g)\xi_i(x) - \xi_i(x)|^2 \\ &= \frac{1}{|F_i|}\sum_{x\in G} |\chi^2_{F_i}(g^{-1}x) - 2\chi_{F_i}(g^{-1}x)\chi_{F_i}(x) + \chi^2_{F_i}(x)|.\end{aligned}$$

Ahora notamos que:

$$|\chi^2_{F_i}(g^{-1}x) - 2\chi_{F_i}(g^{-1}x)\chi_{F_i}(x) + \chi^2_{F_i}(x)| = \begin{cases} 0 & \text{sí } x \in gF_i \cap F_i \\ 1 & \text{sí } x \in gF_i \backslash F_i \\ 1 & \text{sí } x \in F_i \backslash gF_i \end{cases}$$

De donde es fácil concluir que: $\|\lambda_G(g)\xi_i - \xi_i\|_2 = \dfrac{|gF_i \triangle F_i|}{|F_i|} < \varepsilon$, es decir, λ_G admite un vector casi invariante.

Para probar el recíproco, considere $\xi_i \in \ell^2(G)$ un vector casi invariante. Defina $f_i = \xi_i^2$, entonces $f_i \in \ell^1(G)$ y además:

$$\begin{aligned}
\left\|g^{-1}f_i - f_i\right\|_1 &= \sum_{x\in G} |g^{-1}\xi_i^2(x) - \xi_i^2(x)| \\
&= \sum_{x\in G} |\xi_i^2(g^{-1}x) - \xi_i^2(x)| \\
&= \sum_{x\in G} |\xi_i(g^{-1}x) - \xi_i(x)| \cdot |\xi_i(g^{-1}x) + \xi_i(x)| \\
&\leqslant \Big(\sum_{x\in G} |\xi_i(g^{-1}x) - \xi_i(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{x\in G} |\xi_i(g^{-1}x) + \xi_i(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \text{(por Cauchy-Schwarz)} \\
&\leqslant 2\|\xi_i\|_2 \Big(\sum_{x\in G} |\xi_i(g^{-1}x) - \xi_i(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\|\xi_i\|_2 \Big(\sum_{x\in G} |\lambda_G(g)\xi_i(x) - \xi_i(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\|\xi_i\|_2 \|\lambda_G(g)\xi_i(x) - \xi_i(x)\|_2 \to 0
\end{aligned}$$

por definición de vector casi invariante.

□

4.2. Contenencia débil

Definición 4.2.1. *Sean $(\pi, \mathcal{H})$ y $(\rho, \mathcal{K})$ dos representaciones unitarias del grupo G, decimos que π está* ***débilmente contenida*** *en ρ sí toda función de tipo positivo asociada a π se puede aproximar uniformemente en compactos de G por sumas finitas de funciones de tipo positivo asociadas a ρ; es decir, para todo $\xi \in \mathcal{H}$, $Q \subset G$ compacto y $\varepsilon > 0$, existen $\eta_1, ..., \eta_n \in \mathcal{K}$ tales que para todo $x \in Q$: $\left|\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \rho(x)\eta_i, \eta_i\rangle\right| < \varepsilon$. En tal caso escribimos $\pi \prec \rho$.*

Sí $\pi \prec \rho$ y $\rho \prec \pi$, decimos que π y ρ son ***débilmente equivalentes*** *y escribimos $\pi \sim \rho$.*

Lema 4.2.2. *Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de un grupo G. Entonces $\pi \sim m\pi$ para $m \in \mathbb{N}$ positivo.*

Demostración. ($\pi \prec m\pi$): Es fácil de calcular.

($m\pi \prec \pi$): Sean:

- $\xi = (\xi_r)_{r=1}^m \in m\mathcal{H}$.

- $Q \subset G$ un subconjunto compacto.
- $\varepsilon > 0$.

Tomando $\eta_r = \xi_r \in \mathcal{H}$, tenemos que, para todo $x \in Q$:

$$|\langle m\pi(x)\xi, \xi\rangle - \sum_{r=1}^{m}\langle \pi(x)\eta_r, \eta_r\rangle| = |\sum_{r=1}^{m}\langle \pi(x)\xi_r, \xi_r\rangle - \sum_{r=1}^{m}\langle \pi(x)\eta_r, \eta_r\rangle| = 0 < \varepsilon$$

Entonces $m\pi \prec \pi$. Por lo tanto $m\pi \sim \pi$. □

Proposición 4.2.3. *Sean* $(\pi, \mathcal{H})$, $(\rho, \mathcal{K})$ *y* $(\pi_i, \mathcal{H}_i)_{i\in I}$ *representaciones unitarias de un grupo* G, *entonces se tiene que:*

1. $\pi \prec \rho$ *sí y solo sí para todo par de números cardinales* $m, n > 0$ *se tiene que* $m\pi \prec n\rho$.
2. $\bigoplus_i \pi_i \prec \rho$ *sí y solo sí* $\pi_i \prec \rho$ *para todo* $i \in I$.

Demostración. 1. Una implicación es clara, para la otra dirección, considere $m, n > 0$ números cardinales arbitrarios, entonces existen conjuntos I, J tales que $n = |I|$ y $m = |J|$.

Dados M, N números naturales positivos, entonces gracias al **Lema 4.2.2** se tiene que:

$$M\pi \prec \pi \prec \rho \prec N\rho \tag{4.1}$$

Sean:

- $\xi = (\xi_i)_{i=1}^{m} \in m\mathcal{H}$ y $\varepsilon > 0$.
- $Q \subset G$ subconjunto compacto.

Entonces existe $M \in \mathbb{N}$ finito y positivo tal que:

$$|\sum_{i>M}\langle \pi(x)\xi_i, \xi_i\rangle| < \varepsilon,$$

dado que $M\pi \prec \rho$ gracias a (4.1), entonces existen $\eta_1, ..., \eta_R \in \mathcal{K}$ tales que:

$$|\sum_{i=1}^{m}\langle \pi(x)\xi_i, \xi_i\rangle - \sum_{k=1}^{R}\langle \rho(x)\eta_k, \eta_k\rangle| < \varepsilon,$$

por lo tanto:

$$|\sum_{i\in I}\langle \pi(x)\xi_i, \xi_i\rangle - \sum_{j\in J}\sum_{k=1}^{R}\langle \rho(x)\eta_k, \eta_k\rangle| \leqslant C_1 + C_2 \text{ con:}$$

$$C_1 = |\sum_{i=1}^{M} \langle \pi(x)\xi_i, \xi_i \rangle - \sum_{k=1}^{R} \langle \rho(x)\eta_k, \eta_k \rangle|$$

y

$$C_2 = |\sum_{i \in I \setminus \{1,\ldots,M\}} \langle \pi(x)\xi_i, \xi_i \rangle - \sum_{j \in J \setminus \{1\}} \sum_{k=1}^{R} \langle \rho(x)\eta_k, \eta_k \rangle|$$

2. Por definición de contenencia débil, tenemos que:

   para todo $\bigoplus_{i\in I} \xi_i \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$, para todo $Q \subset G$ compacto y para todo $\varepsilon > 0$, existen $\eta_1, ..., \eta_n \in \mathcal{K}$ tales que, para todo $x \in Q$ se tiene que:

$$|\langle \oplus \pi_i(x)\xi_i, \oplus \xi_i \rangle - \sum_{s=1}^{n} \langle \rho(x)\eta_s, \eta_s \rangle| < \varepsilon$$

   que es equivalente a:

$$|\sum_{i\in I} \langle \pi_i(x)\xi_i, \xi_i \rangle - \sum_{s=1}^{n} \langle \rho(x)\eta_s, \eta_s \rangle| < \varepsilon$$

   para i_0 fijo, considere el vector $\oplus_{i\in I}\xi = \xi_{i_0} \oplus (\oplus_{i\neq i_0} 0)$, entonces tenemos que:

$$|\langle \pi_{i_0}(x)\xi_{i_0}, \xi_{i_0} \rangle - \sum_{s=1}^{n} \langle \rho(x)\eta_s, \eta_s \rangle| < \varepsilon.$$

   Luego $\pi_{i_0} \prec \rho$; como i_0 fue arbitrario, concluimos que $\pi_i \prec \rho$ para todo $i \in I$.

   Para probar el recíproco, consideramos un conjunto de $\{\pi_i\}_{i\in I}$ de representaciones unitarias tales que $\pi_i \prec \rho$ para todo $i \in I$, entonces $\oplus_{i\in I}\pi \prec n\rho$, con $n = |I|$. Gracias a (1) tenemos que $n\rho \prec \rho$, por lo tanto $\oplus_{i\in I}\pi_i \prec \rho$.

□

Proposición 4.2.4. *Sean $(\pi_1, \mathcal{H}_1), (\pi_2, \mathcal{H}_2), (\rho_1, \mathcal{K}_1), (\rho_2, \mathcal{K}_2)$ representaciones unitarias de G tales que $\pi_1 \prec \rho_1$ y $\pi_2 \prec \rho_2$. Entonces $\pi_1 \otimes \pi_2 \prec \rho_1 \otimes \rho_2$.*

Demostración. Sean: $Q \subset G$ compacto, $\xi_1 \otimes \xi_2 \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ y $\varepsilon > 0$, entonces de la definición de contenencia débil, sabemos que existen $\{\eta_s\}_{s=1}^{M} \subset \mathcal{H}_1$ y $\{\eta_r\}_{r=1}^{N} \subset \mathcal{H}_2$ tales que, para todo $x \in Q$ se tiene que:

$$|\langle \pi_1(x)\xi_1, \xi_1 \rangle - \sum_{s=1}^{M} \langle \rho_1(x)\eta_s, \eta_s \rangle| < \varepsilon$$

y

$$|\langle \pi_2(x)\xi_2, \xi_2\rangle - \sum_{r=1}^{N}\langle \rho_2(x)\eta_r, \eta_r\rangle| < \varepsilon$$

tomando $\{\eta_s \otimes \eta_r\}_{(s,r)=(1,1)}^{(M,N)} \subset \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
R_0 &= |\langle (\pi_1 \otimes \pi_2)(x)\xi_1 \otimes \xi_2, \xi_1 \otimes \xi_2\rangle - \sum_{s=1}^{M}\sum_{r=1}^{N}\langle (\rho_1 \otimes \rho_2)(x)\eta_s \otimes \eta_r, \eta_s \otimes \eta_r\rangle| \\
&= |\langle \pi_1(x)\xi_1, \xi_1\rangle\langle \pi_2(x)\xi_2, \xi_2\rangle - \sum_{s=1}^{M}\langle \rho_1(x)\eta_s, \eta_s\rangle \sum_{r=1}^{N}\langle \rho_2(x)\eta_r, \eta_r\rangle| \\
&\leqslant |\langle \pi_1(x)\xi_1, \xi_1|R_1 + \Big|\sum_{r=1}^{N}\langle \rho_2(x)\eta_r, \eta_r\rangle\Big|R_2, \text{ con:}
\end{aligned}$$

- $R_1 = |\langle \pi_1(x)\xi_1, \xi_1\rangle - \sum_{s=1}^{M}\langle \rho_1(x)\eta_s, \eta_s\rangle|$
- $R_2 = |\langle \pi_2(x)\xi_2, \xi_2\rangle - \sum_{r=1}^{N}\langle \rho_2(x)\eta_r, \eta_r\rangle|$

entonces: $R_0 < \varepsilon\Big(|\langle \pi_1(x)\xi_1, \xi_1| + \Big|\sum_{r=1}^{N}\langle \rho_2(x)\eta_r, \eta_r\rangle\Big|\Big)$, es decir, $\pi_1 \otimes \pi_2 \prec \rho_1 \otimes \rho_2$. □

Teorema 4.2.5. *Sea G un grupo, entonces son equivalentes:*

1. $1_G \prec \lambda_G$
2. $\pi \prec \lambda_G$ *para toda π representación unitaria de G.*
3. *G es **amenable**.*

Demostración. (1 implica 2): Sí $1_G \prec \lambda_G$, entonces $\pi = 1_G \otimes \pi \prec \lambda_G \otimes \pi$, como $\lambda_G \otimes \pi$ es un múltiplo de λ_G, (gracias al **Ejemplo C.2.4**), se sigue el resultado.

(2 implica 1): Es claro dado que 1_G es una representación unitaria.

(1 implica 3): Sean $Q \subset G$ un compacto y $\varepsilon > 0$, entonces por **Teorema 4.1.1** existe $f_{Q,\varepsilon} \in \ell^2(G)$ con $\|f_{Q,\varepsilon}\|_2 = 1$ tal que:

$$\sup_{x\in Q}\|\lambda_G(x)f_{Q,\varepsilon} - f_{Q,\varepsilon}\|_2 < \varepsilon$$

sea $g_{Q,\varepsilon} = |f_{Q,\varepsilon}|^2$, entonces $g_{Q,\varepsilon} \in \mathcal{P}(G)$ y por desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\left\|x^{-1}g_{Q,\varepsilon} - g_{Q,\varepsilon}\right\|_1 = \left\|x^{-1}|f_{Q,\varepsilon}|^2 - |f_{Q,\varepsilon}|^2\right\|_1 &= \left\|(x^{-1}f_{Q,\varepsilon} - f_{Q,\varepsilon})(x^{-1}f_{Q,\varepsilon} + f_{Q,\varepsilon})\right\|_1 \\ &\leqslant \|\lambda_G(x)f_{Q,\varepsilon} + f_{Q,\varepsilon}\|_2\|\lambda_G(x)f_{Q,\varepsilon} - f_{Q,\varepsilon}\|_2 \\ &\leqslant 2\|\lambda_G(x)f_{Q,\varepsilon} - f_{Q,\varepsilon}\|_2 \\ &< 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Para todo $x \in Q$. Por lo tanto G cumple la condición de Reiter.

(3) $\Longrightarrow$ (1): Asuma que se tiene la condión de Reiter. Sean $Q \subset G$ compacto y $\varepsilon > 0$, sea $f \in \mathcal{P}(G)$ tal que:

$$\sup_{x \in Q} \left\|x^{-1}f - f\right\|_1 < \varepsilon$$

tome $g = \sqrt{f}$, se sigue que $g \in \ell^2(G)$ y $\|g\|_2 = 1$. Más aún, dado que $|a-b|^2 < |a^2-b^2|$ para todo par a, b de números reales positivos, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\|\lambda_G(x)g - g\|_2^2 = \sum_{y \in G} |\lambda_G(x)g(y) - g(y)|^2 < \sum_{y \in G} |\lambda_G(x)g(y)^2 - g(y)^2| &= \left\|x^{-1}f - f\right\|_1 \\ &< \varepsilon \qquad \square\end{aligned}$$

4.3. Una caracterización en términos de las $\mathcal{C}^*$-algebras

Sea G un grupo con la topología discreta, $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de G, entonces podemos considerar el $*$-álgebra homomorfismo $\ell^1(G) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ denotado por $\widetilde{\pi}$ y definido mediante la fómula:

$$\widetilde{\pi}(f) = \sum_{x \in G} f(x)\pi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

es decir:

$$\langle \widetilde{\pi}(f)\xi, \eta \rangle = \sum_{x \in G} f(x)\langle \pi(x)\xi, \eta \rangle \in \mathbb{C}, \text{ con } \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

Ejemplo 4.3.1. *Dada $(\lambda_G, \ell^2(G))$ la representación regular de G, $f \in \ell^1(G)$ y $\xi \in \ell^2(G)$, entonces $\widetilde{\lambda}_G(f)\xi \in \ell^2(G)$ y más aún:*

$$\widetilde{\lambda}_G(f)\xi(y) = \Big(\sum_{x \in G} f(x)\lambda_G(x)\Big)\xi(y) = \sum_{x \in G} f(x)\xi(x^{-1}y) = (f * \xi)(y).$$

Por lo tanto $\widetilde{\lambda}_G(f)\xi = f * \xi$.

Defina ahora la representación universal π_{univ} de G como la suma directa de todas las representaciones cíclica unitarias de G. Entonces existe $\widetilde{\pi}_{univ} : \ell^1(G) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_{univ})$ y definimos la norma maximal de $f \in \ell^1(G)$ por:

$$\|f\|_{\text{máx}} = \|\widetilde{\pi}_{univ}(f)\|.$$

Lo cuál nos permite concluir que:

Lema 4.3.2. *Sea $f \in \ell^1(G)$, entonces:* $\left\|\widetilde{\lambda}_G(f)\right\| \leqslant \|f\|_{máx} \leqslant \|f\|_1$.

Demostración. Aplique el **Lema C.1.8**. □

Definición 4.3.3. *La completación de $\ell^1(G)$ con respecto a la norma $f \mapsto \|f\|_{máx}$ es una $\mathcal{C}^*$-álgebra llamada $\mathcal{C}^*$-álgebra maximal de G y denotada por $\mathcal{C}^*(G)$.*

Definición 4.3.4. *La completación de $\ell^1(G)$ con respecto a la norma $f \mapsto \|\lambda_G(f)\|$ es una $\mathcal{C}^*$-álgebra llamada $\mathcal{C}^*$-álgebra reducida de G y denotada por $\mathcal{C}^*_{red}(G)$.*

Observación 4.3.5. *Gracias a la* ***proposición C.1.12****, tenemos que $\lambda_G \prec \pi_{univ}$, entonces existe un mapa sobreyectivo $\mathcal{H}_{univ} \to \ell^2(G)$ dado por la proyección sobre aquellas componentes cíclicas de $\ell^2(G)$ que también están presentes en la descomposición de $\mathcal{H}_{univ}$.*

Esto se puede trasladar a un $*-$álgebra epimorfismo $\mathcal{C}^*(G) \to \mathcal{C}^*_{red}(G)$.

Teorema 4.3.6. *Sean π, ρ representaciones unitarias de G, entonces son equivalentes:*

1. $\pi \prec \rho$.
2. $\|\widetilde{\pi}(f)\| \leqslant \|\widetilde{\rho}(f)\|$ *para todo* $f \in l^1(G)$.

Demostración. (1 implica 2) Dado un $\xi \in \mathcal{H}$ y $f \in l^1(G)$ fijos, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\pi}(f)\xi\|^2 &= \langle \widetilde{\pi}(f)\xi, \widetilde{\pi}(f)\xi \rangle \\
&= \sum_{x \in G} f(x) \langle \pi(x)\xi, \widetilde{\pi}(f)\xi \rangle \\
&= \sum_{x \in G} f(x) \overline{\langle \widetilde{\pi}(f)\xi, \pi(x)\xi \rangle} \\
&= \sum_{x \in G} f(x) \overline{\Big(\sum_{y \in G} f(y) \langle \pi(y)\xi, \pi(x)\xi \rangle \Big)} \\
&= \sum_{x \in G} f(x) \Big(\sum_{y \in G} \overline{f(y) \langle \pi(y)\xi, \pi(x)\xi \rangle} \Big) \\
&= \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(x) \overline{f(y)} \langle \pi(x)\xi, \pi(y)\xi \rangle \\
&= \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(x) \overline{f(y)} \langle \pi(y^{-1}x)\xi, \xi \rangle
\end{aligned}$$

para $\|\widetilde{\rho}(f)\xi\|^2$ obtenemos una identidad similar.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $Q \subset G$ compacto tal que:

$$\sum_{x \in G \setminus Q} |f(x)| < \varepsilon.$$

Como $Q \subset Q \cup Q^{-1}$, entonces tenemos que:

$$\sum_{x \in G \setminus (Q \cup Q^{-1})} |f(x)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que Q es simétrico.

Para la pareja (ε, Q) y $\xi \in \mathcal{H}$, existen $\eta_1, ..., \eta_n \in \mathcal{K}$ tales que, para todo $y^{-1}x \in Q$

$$|\langle \pi(y^{-1}x)\xi, \xi \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \rho(y^{-1}x)\eta_i, \eta_i \rangle| < \varepsilon.$$

Usando el hecho de que, sí $|A - B| < \varepsilon$ entonces $|A| < |B| + \varepsilon$, tenemos que:

$$|\langle \pi(y^{-1}x)\xi, \xi \rangle| < \varepsilon + |\sum_{i=1}^{n} \langle \rho(y^{-1}x)\eta_i, \eta_i \rangle|,$$

lo cuál implica que:

$$\sum_{(x,y) \in Q \times Q} f(x)\overline{f(y)} |\langle \pi(y^{-1}x)\xi, \xi \rangle| < \sum_{(x,y) \in Q \times Q} f(x)\overline{f(y)} \Big(|\sum_{i=1}^{n} \langle \rho(y^{-1}x)\eta_i, \eta_i \rangle| \Big) + \varepsilon \|f\|_1^2.$$

Ahora notamos lo siguiente:

$G \times G = [(G \setminus Q) \times (G \setminus Q)] \cup (Q \times Q) \cup [(G \setminus Q) \times Q] \cup [Q \times (G \setminus Q)]$.

De dónde se concluye que:

1. $\displaystyle\sum_{(x,y) \in (G \setminus Q) \times (G \setminus Q)} f(x)\overline{f(y)} < \varepsilon^2.$

2. $\displaystyle\sum_{(x,y) \in [Q \times (G \setminus Q)]} f(x)\overline{f(y)} < \varepsilon \|f\|_1.$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $e_G \in Q$, entonces obtenemos que:

$$|\ \|\xi\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \|\eta_i\|^2\ | < \varepsilon,$$

por un razonamiento igual al antes hecho, concluimos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \|\eta_i\|^2 < \|\xi\|^2 + \varepsilon.$$

De todo lo anteriormente hecho, es claro que;

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\pi}(f)\xi\|^2 &< \sum_{(x,y)\in Q\times Q} f(x)\overline{f(y)}\Big(|\sum_{i=1}^{n}\langle\rho(y^{-1}x)\eta_i,\eta_i\rangle|\Big) + \varepsilon\|f\|_1^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\|f\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{(x,y)\in Q\times Q} f(x)\overline{f(y)}|\langle\rho(y^{-1}x)\eta_i,\eta_i\rangle| + \varepsilon\|f\|_1^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\|f\|_1.\end{aligned}$$

Para i fijo sabemos que

$$\sum_{(x,y)\in Q\times Q} f(x)\overline{f(y)}|\langle\rho(y^{-1}x)\eta_i,\eta_i\rangle| < \|\widetilde{\rho}(f)\|^2\|\eta_i\|^2$$

(pues para cualquier vector $\eta \in \mathcal{K}$ tenemos que $\|\widetilde{\rho}(f)\eta\|^2 = r^2\|\widetilde{\rho}(f)\hat{\eta}\|^2$ con $r = \|\eta\|$). Lo que nos lleva a la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\pi}(f)\xi\|^2 &< \|\widetilde{\rho}(f)\|^2\sum_{i=1}^{n}\|\eta_i\|^2 + \varepsilon\|f\|_1^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\|f\|_1 \\ &< \|\widetilde{\rho}(f)\|^2\big(\|\xi\|^2 + \varepsilon\big) + \varepsilon\|f\|_1^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\|f\|_1\end{aligned}$$

finalmente, tomamos el supremo sobre los $\xi \in \mathcal{H}$ de norma 1 y concluimos que:

$$\|\widetilde{\pi}(f)\| \leqslant \|\widetilde{\rho}(f)\| \text{ para todo } f \in l^1(G).$$

(2 implica 1) Sea $Q \subset G$ un subconjunto finito y $\varepsilon > 0$, tome $x \in Q$ y $\xi \in \mathcal{H}$, entonces:

1. $\left\|\widetilde{\pi}(\chi_{\{e_G,x\}})\xi\right\|^2 = 2 + \langle\pi(x)\xi,\xi\rangle + \overline{\langle\pi(x)\xi,\xi\rangle}.$
2. $\left\|\widetilde{\pi}(\chi_{\{e_G,x\}})\xi\right\|^2 \leqslant \left\|\widetilde{\pi}(\chi_{\{e_G,x\}})\right\|^2 \leqslant \left\|\widetilde{\rho}(\chi_{\{e_G,x\}})\right\|^2.$
3. Por definición de supremo, existe $\eta = \eta(\varepsilon, x) \in \mathcal{K}$ tal que:

$$\left\|\widetilde{\rho}(\chi_{\{e_G,x\}})\right\|^2 - \frac{\sqrt{2}}{2|Q|}\varepsilon \leqslant \left\|\widetilde{\rho}(\chi_{\{e_G,x\}})\eta\right\|^2.$$

Por lo anterior tenemos que:

$$\left\|\widetilde{\pi}(\chi_{\{e_G,x\}})\xi\right\|^2 - \frac{\sqrt{2}}{2|Q|} \leqslant \left\|\widetilde{\rho}(\chi_{\{e_G,x\}})\eta\right\|^2$$

es decir:

$$\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle + \overline{\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle} \leqslant \langle \rho(x)\eta, \eta\rangle + \overline{\langle \rho(x)\eta, \eta\rangle} + \frac{\sqrt{2}}{2|Q|}\varepsilon.$$

Defina ahora $h : G \to \mathbb{C}$ por:

$$h(z) = \begin{cases} 1 & \text{sí } z = e_G \\ i & \text{sí } z = x \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces:

$$\|\widetilde{\pi}(h)\xi\|^2 = 2 + i\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle + \bar{i}\langle \xi, \pi(x)\xi\rangle = 2 + i\big(\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle - \overline{\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle}\big).$$

Por un razonamiento análogo al anterior concluimos que:

$$i\big(\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle - \overline{\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle}\big) \leqslant i\big(\langle \rho(x)\eta, \eta\rangle - \overline{\langle \rho(x)\eta, \eta\rangle}\big) + \frac{\sqrt{2}}{2|Q|}\varepsilon,$$

como $|Q| = n$, para cada $\xi \in \mathcal{H}$ de norma 1, existen $\eta_1, ..., \eta_n$ tales que:

$$\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle + \overline{\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle} \leqslant \sum_{s=1}^{n}\left(\langle \rho(x)\eta_s, \eta_s\rangle + \overline{\langle \rho(x)\eta_s, \eta_s\rangle}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon$$

y

$$i\big(\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle + \overline{\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle}\big) \leqslant i\sum_{s=1}^{n}\left(\langle \rho(x)\eta_s, \eta_s\rangle + \overline{\langle \rho(x)\eta_s, \eta_s\rangle}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon.$$

Si escribimos $\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle - \sum_{s=1}^{n}\left(\langle \rho(x)\eta_s, \eta_s\rangle\right) = a + ib$, entonces tenemos que:

$$|\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle - \sum_{s=1}^{n}\langle \rho(x)\eta_s, \eta_s\rangle| = a^2 + b^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

$\square$

Gracias al **Teorema 4.3.6**, $\|f\|_{\text{máx}} = \|\lambda_G(f)\|$ sí y solo sí $\lambda_G \prec \pi_{univ}$ y $\pi_{univ} \prec \lambda_G$, por **Teorema 4.2.3**, esto implica que $\pi \prec \lambda_G$ para toda π representación unitaria cíclica, luego existe un $*$-álgebra epimorfismo $\mathcal{C}^*_{red}(G) \to \mathcal{C}^*(G)$. Juntado esto con la **Observación 4.3.5** y la caracterización de **amenabilidad**, llegamos a una nueva definición de grupo amenable:

Teorema 4.3.7. *Sea G un grupo con la topología discreta, entonces son equivalentes:*

1. *G es **amenable**.*
2. *$\mathcal{C}^*(G) \cong \mathcal{C}^*_{red}(G)$.*

Apéndice A

Algebra Abstracta

A.1. Teoría de grafos

Definición A.1.1. *Definimos un grafo como una pareja* $H = (E, V)$ *con* V *el conjunto de vértices y* E *las líneas que los conectan(denotamos una línea del grafo por* $u \bullet\!\!-\!\!\bullet v$ *para* $u, v \in V$*), asimismo :*

1. *Dado* $v \in V$*, al conjunto* $N_H(v) = \{u \in V : u \bullet\!\!-\!\!\bullet v \in E\}$ *se le llama vecindad de* v*.*

2. *El grado de un vértice es el número de aristas incidentes al vértice.*

3. *Un grafo es regular si cada vértice tiene el mismo grado.*

4. *Un grafo* H *se dice bipartito si su conjunto de vértices puede dividirse en 2 subconjuntos disjuntos e independientes* U, V *tal que cada arista del grafo conecta un vértice en* U *con un vértice en* V*.*

5. *Un apareamiento en un grafo es un conjunto de aristas disjuntas.*

6. *Dado* N *un apareamiento y* v *un vértice, decimos que* v *es saturado por* N *sí existe una arista de* N *incidente a* v*.*

7. *Sea* H *un grafo bipartito finito con partes* U, V*, decimos que* U *tiene un apareamiento saturado sí existe un apareamiento que cubre cada vértice de* U*.*

Teorema A.1.2. *(Teorema de Hall-Rado-Hall) Dado* H *un grafo bipartito con partes* U, V*, entonces* U *tiene un apareamiento saturado sí y solo sí para todo* $W \subset U$ *se tiene que:* $|W| \leqslant |N_H(W)|$*.*

Demostración. Teorema C.2 de [7] $\square$

La condición sobre los subconjuntos de U del *Teorema de Hall* es llamada también **condición del matrimonio**.

A.2. Teoría de grupos

A.2.1. Nociones básicas

Definición A.2.1. *Dados dos grupos H, G, decimos que $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos sí $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo $a, b \in G$. Además:*

- *Sí f es inyectiva, entonces f se llama* ***monomorfismo****.*
- *Sí f es sobreyectiva, entonces f se llama* ***epimorfismo****.*
- *Sí f es biyectiva, entonces f se llama* ***isomorfismo*** *y escribimos $G \cong H$.*

Definición A.2.2. *Dado $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos, definimos el* ***kernel*** *de f como: $Ker(f) = \{a \in G : f(a) = e_H\}$, con e_H la identidad de H. Asimismo definimos la* ***imagen*** *de f como: $Im(f) = f(G)$.*

Teorema A.2.3. *(Primer teorema del isomorfismo) Sí $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos, entonces f induce un isomorfismo $G/Ker(f) \cong Im(f)$.*

Teorema A.2.4. *(Segundo teorema del isomorfismo) Sea G un grupo y K, N subgrupos de G, con N normal en G, entonces $K/(N \cap K) \cong NK/N$.*

Definición A.2.5. *Dada una sucesión finita de grupos y homomorfismos*

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n$$

decimos que es ***exacta*** *sí $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$.*

En particular, una sucesión de la forma

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

es llamada ***exacta corta****.*

Observación A.2.6. *Note que en una sucesión exacta corta, gracias al* ***Teorema A.2.3****, tenemos que H es isomorfo a $Ker(g)$, que es normal en G y por un razonamiento similar K es isomorfo a G/H.*

A.2.2. Grupos solubles

Definición A.2.7. *Sea G un grupo, $h, k \in G$ y H, K subgrupos de G, entonces definimos:*

1. *$[h, k] = hkh^{-1}k^{-1}$ el conmutador de h y k.*
2. *$[H, K]$ el subgrupo generado por los conmutadores $[h, k]$, con $h \in H$ y $k \in K$.*

3. *$D(G) = [G, G]$ el subgrupo derivado o subgrupo conmutador de G.*

4. *La serie derivada de un grupo G es la sucesión $(D^i(G))_{i\geqslant 0}$ definida por: $D^0(G) = G$ y $D^{i+1}(G) = D(D^i(G))$.*

5. *La serie central descendiente de un grupo G es la sucesión $(C^i(G))_{i\geqslant 0}$ definida por: $C^0(G) = G$ y $C^{i+1}(G) = [C^i(G), G]$.*

De la **Definición A.2.7**, tenemos que la serie derivada se ve como sigue:

$$G = D^0(G) \supset D^1(G) \supset D^2(G) \supset \cdots$$

con $D^{i+1}(G)$ normal en $D^i(G)$ y $D^i(G)/D^{i+1}(G)$ abeliano para todo $i \geqslant 0$.

A los grupos cuya serie derivada es finita, se les prestará especial atención.

Definición A.2.8. *Sea G un grupo, entonces G se dice **soluble** sí existe un entero positivo k tal que $D^k(G) = \{1_G\}$. Al entero positivo k más pequeño tal que $D^k(G) = \{1_G\}$ se le llama el **grado de solubilidad** de G.*

Definición A.2.9. *Sea G un grupo, entonces G se dice **nilpotente** sí existe un entero positivo K tal que $C^k = \{1_G\}$. Al entero positivo k más pequeño tal que $C^k(G) = \{1_G\}$ se le llama el **grado de nilpotencia** de G.*

Proposición A.2.10. *Todo grupo nilpotente es soluble.*

Observación A.2.11. *A los grupos solubles de grado 2 se les llamará grupos **metabelianos**.*

Teorema A.2.12. *Un grupo G se dice soluble sí y solo sí existe una sucesión finita*

$$\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset ... \subset H_n = G$$

de subgrupos de G tales que H_i es normal en H_{i+1} y H_{i+1}/H_i es abeliano para todo $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Demostración. Para probar una implicación, si se define $H_i = D^{k-i}(G)$, se habrá terminado.

Para el recíproco, asuma que existe una sucesión finita de subgrupos de G tales que

$$\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_k = G$$

tales que H_i es normal en H_{i+1} y H_{i+1}/H_i es abeliano para $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

Dado que G/H_{k-1} es abeliano, entonces $abH_{k-1} = baH_{k-1}$ para $a, b \in G$, y esto pasa si y solo sí $ab(ba)^{-1} \in H_{k-1}$, de donde se tiene que $D(G) \subset H_{k-1}$.

Similarmente, H_{k-1}/H_{k-2} abeliano implica que $xyH_{k-2} = yxH_{k-2}$ para $x, y \in H_{k-1}$, por lo tanto $xy(yx)^{-1} \in H_{k-2}$, es decir, $D(H_{k-1}) \subset H_{k-2}$, pero por el paso anterior, tenemos que: $D^2(G) \subset D(H_{k-1}) \subset H_{k-2}$. Inductivamente (gracias a la finitud de la sucesión), tendremos que: $D^k(G) = \{e_G\}$, de donde se concluye que G es soluble. $\square$

A.2.3. Producto Directo y Semidirecto

Dada $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos, defina el siguiente conjunto:

$$\bigoplus_{i\in I} G_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} \text{ tales que } f(i) \neq e_{G_i} \text{ para finitos } i \in I\}.$$

Es fácil ver que sí $f, g \in \bigoplus_{i\in I} G_i$, entonces $fg \in \bigoplus_{i\in I} G_i$ es la función $i \mapsto f(i)g(i)$ para todo $i \in I$. Asimismo se puede ver que está operación adimite un inverso para cada elemento y posee una identidad.

De lo anterior podemos definir lo siguiente:

Definición A.2.13. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos, al conjunto $\bigoplus_{i\in I} G_i$ con la operación componente a componente anteriormente descrita se le llama* ***suma directa*** *de los grupos G_i.*

Sean G, H grupos y $\theta : H \to Aut(G)$ un homomorfismo. Sea $G \rtimes_\theta H$ el conjunto $G \times H$ con la siguiente operación:

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1[\theta(h_1)(g_2)], h_1h_2).$$

Entonces tenemos lo siguiente:

1. El elemento (e_G, e_H) sirve como identidad para la operación de $G \rtimes_\theta H$.
2. Dado $(g, h) \in G \rtimes_\theta H$, es fácil ver que el elemento $(\theta(h^{-1})(g^{-1}), h^{-1})$ es su respectivo inverso en $G \rtimes_\theta H$.
3. Dados $g_1, g_2, g_3 \in G$ y $h_1, h_2, h_3 \in H$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}(g_1, h_1)\Big((g_2, h_2)(g_3, h_3)\Big) &= (g_1, h_1)(g_2[\theta(h_2)(g_3)], h_2h_3)\\ &= (g_1[\theta(h_1)(g_2[\theta(h_2)(g_3)])], h_1h_2h_3)\\ &= (g_1[\theta(h_1)(g_2[\theta(h_2)(g_3)])], (h_1h_2)h_3)\\ &= (g_1[\theta(h_1)g_2]\theta(h_1h_2)g_3, (h_1h_2)h_3)\\ &= \Big((g_1, h_1)(g_2, h_2)\Big)(g_3, h_3).\end{aligned}$$

Por lo tanto $G \rtimes_\theta H$ es un grupo.

Definición A.2.14. *Sean G, H grupos y $\theta : H \to Aut(G)$ un homomorfismo, llamamos al grupo $G \rtimes_\theta H$ el* ***producto semidirecto de*** *G y H.*

Con lo anteriormente expuesto, podermos estudiar un interesante ejemplo:

Definición A.2.15. *Al grupo $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$, con $\theta : \mathbb{Z} \to \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dado por $\theta(n)((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (a_i)_{i+n\in\mathbb{Z}}$ lo llamamos* ***grupo de lamplighter*** *y lo denotamos por L_2.*

Sea $a \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, entonces $a = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ con $a_i = 1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ solamente para finitos $i \in \mathbb{Z}$, entonces a está en correspondecia con el subconjunto $A \subset \mathbb{Z}$ definido por: $A = \{i \in \mathbb{Z} : a_i = 1\}$. Note que sí $b \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ es otro elemento con subconjunto correspondiente B, entonces ab estará en correspondencia con el conjunto $A\triangle B$ dado que:

- Sí $i \in A \cap B$, entonces $a_ib_i = 1 + 1 = 0$ en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
- Sí $i \in A\backslash B$, entonces $a_ib_i = 1 + 0 = 1$ en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

De lo anteriormente expuesto, es claro que todo elemento en L_2 se puede ver de la forma $[S, r]$ para $S \subset \mathbb{Z}$ finito y $n \in \mathbb{Z}$. Sí $[T, m]$ es otro elemento en L_2, entonces

$$[S, n] \cdot [T, m] = [S\triangle(\theta(n)T), n + m] = [(S\triangle(T + n), n + m].$$

Así pues, podemos identificar la identidad de L_2 por $[\varnothing, 0]$.

Lema A.2.16. *El grupo de lamplighter L_2 puede ser generado por 2 elementos, uno de orden 2 y otro de orden infinito.*

Demostración. Sean $t = [\varnothing, 1]$ y $a = [\{0\}, 0]$ elementos en L_2, entonces tenemos que:

$$ta = [\varnothing, 1] \cdot [\{0\}, 0] = [\varnothing\triangle\{1 + 0\}, 1 + 0] = [\{1\}, 1].$$

Y más generalmente

$$t^n a = [\varnothing, n] \cdot [\{0\}, 0] = [\{n\}, n]$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, luego:

$$t^n at^{-n} = [\{n\}, 0]$$

de dónde concluimos que, dado $[\{n_1, ..., n_m\}, k] \in L_2$ arbitrario, se tiene que:

$$[\{n_1, ..., n_m\}, k] = [\{n_1, ..., n_m\}, 0] \cdot [\varnothing, k] = (t^{n_1}at^{-n_1}) \cdot ... \cdot (t^{n_m}at^{-n_m})t^k.$$

Por lo tanto el conjunto $\{a, t\}$ es un conjunto generador del grupo de lamplighter. $\square$

Corolario A.2.17. *El grupo L_2 es soluble.*

Demostración. Sean $t, a \in L_2$ como en el lema anterior y $n \in \mathbb{Z}$, entonces:

- $at^nat^{-n} = [\{0\}, 0] \cdot [\{n\}, 0] = [\{0\}\triangle\{n\}, 0] = [\{0, n\}, 0]$.
- $t^nat^{-n}a = [\{n\}, 0] \cdot [\{0\}, 0] = [\{0\}\triangle\{n\}, 0] = [\{0, n\}, 0]$.

Por lo tanto $[t, a] = [a, t]$, es decir, el conmutador $[L_2, L_2]$ es abeliano, por lo tanto L_2 es soluble de orden 2.

$\square$

A.3. El lema del ping-pong

La siguiente formulación del ping-pong lema se toma de [14].

Teorema A.3.1. *Sea $G = \langle a, b \rangle$ un grupo generado por dos elementos tales que a y b tienen orden infinito y ponga a actuar a G sobre un conjunto X. Suponga que existen $X_1, X_2 \subset X$ disjuntos, no vacíos y tales que, para todo $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$:*

$$a^n \cdot X_1 \subset X_2 \text{ y } b^n \cdot X_2 \subset X_1,$$

entonces G es libremente generado por $\{a, b\}$

Apéndice B

Análisis

B.1. Análisis Funcional

Los espacios vectoriales aquí considerados tendrán coeficientes en $\mathbb{C}$.

B.1.1. Espacios vectoriales topológicos

Definición B.1.1. *Sea X un espacio vectorial normado, decimos que X:*

1. *Es un* ***espacio de Banach*** *sí toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto en X.*

2. *Es un* ***álgebra de Banach*** *sí:*

   a) *X es un espacio de Banach.*

   b) *Existe una aplicación $\cdot : X \times X \to X$ (llamada producto) tal que:*

      - *Es asociativa.*
      - *Es distributiva respecto a la suma de vectores.*
      - $\alpha(u \cdot v) = (\alpha u) \cdot v = u(\alpha v)$.
      - $\|u \cdot v\| \leqslant \|u\|\|v\|$.

      Para todo $u, v \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

3. *Es una* ***$*$-álgebra de Banach*** *sí:*

   a) *X es un álgebra de Banach.*

   b) *Existe una aplicación $* : X \to X$ (llamada involución) tal que:*

      - $(u+v)^* = u^* + v^*$.
      - $(u \cdot v)^* = v^* \cdot u^*$.
      - $(u^*)^* = u$.

Para todo $u, v \in X$.

*4. Es una C^*-**álgebra** sí:*

a*) X es una $*$-álgebra.*

b*) $\|u \cdot u^*\| = \|u\|^2$ para todo $u \in X$.*

B.1.2. Topologías en el dual de un espacio topológico

Sea X un espacio vectorial normado, decimos que un funcional lineal $u : X \to \mathbb{C}$ es continuo sí: $\|u\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} |u(x)| < \infty$. A este número se le conoce como la norma operador de u. Al conjunto de todos los funcionales lineales continuos lo llamamos el dual topológico de X y no denotamos por X^*.

Para cada $x \in X$, sea $\psi_x : X^* \to \mathbb{C}$ el mapa evaluación $\psi_x(u) = u(x)$.

Con lo anteriormente expuesto podemos definir lo siguiente:

Definición B.1.2. *Sea X un espacio vectorial normado y X^* su dual topológico, podemos dotar a este último con las siguientes dos topologías*

1. *La **topología fuerte** es aquella inducida por la norma operador $\|\cdot\|_{op}$.*
2. *La **topología débil-*** es la miníma topología en la cuál los mapas evaluación son sontinuos.*

Una vez definimos estás topologías, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema B.1.3 (Banach-Alaoglu)**.** *Sea X un espacio vectorial normado y denote $\|\cdot\|$ la norma operador en X^*. Entonces la bola unitaria $B(X^*) = \{u \in X^* : \|u\|_{op} \leqslant 1\}$ es compacta en la topología débil $*$.*

B.2. Teoría de la medida

A lo largo de este apéndice, dado $1 \leqslant p < \infty$, definimos:

$$\ell^p(G) = \{f : G \to \mathbb{C} \text{ tal que} \sum_{x \in G} |f(x)|^p < \infty\}.$$

B.2.1. Grupos topológicos

Sea G un grupo topológico, entonces decimos que G es localmente compacto sí:

1. G es un espacio de Hausdorff

2. G es un espacio topológico localmente compacto, es decir, para todo $x \in G$, existe U_x vecindad abierta de x tal que $\overline{U}_x$ es compacto.

Ejemplo B.2.1. *Dado un grupo arbitrario G, si se le dota de la topología discreta, entonces G será localmente compacto.*

Proposición B.2.2. *Sea G un grupo topológico, tome $e_G \in G$ la identidad del grupo y $a \in G$ un elemento arbitrario, entonces:*

- *Las funciones $x \mapsto ax$, $x \mapsto xa$ y $x \mapsto x^{-1}$ son homeomorfismos de G en G.*
- *Sí $\mathcal{U}$ es una base para la familia de vecindades de e_G, entonces $\{aU : U \in \mathcal{U}\}$ y $\{Ua : U \in \mathcal{U}\}$ son bases de la familia de vecindades de a.*

Proposición B.2.3. *Sea G un grupo topológico, e_G la identidad de G, y U una vecindad abierta de e_G, entonces:*

- *Existe una vecindad abierta V de e_G tal que $VV \subset U$.*
- *Existe una vecindad simétrica de e_G que está contenida en U.*

Demostración. Véase la **Proposición 9.1.3** de [8]. □

Definición B.2.4. *Sea G un grupo localmente compacto, entonces, denotamos por:*

1. *$\mathcal{C}_c(G)$ al conjunto de funciones $f : G \to \mathbb{C}$ tales que tienen soporte compacto.*
2. *$UCB(G)$ al conjunto de funciones $f : G \to \mathbb{C}$ uniformemente continuas y acotadas.*

Es fácil ver que $UCB(G) \subset \mathcal{C}_c(G) \subset \ell^\infty(G)$.

Proposición B.2.5. *Sea G un grupo con la topología discreta, entonces cada función en $\mathcal{C}_c(G)$ es uniformemente continua a izquierda y uniformemente continua a derecha.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}_c(G)$ y $K = supp(f)$. Tome $\varepsilon > 0$ arbitrario. Para cada $x \in K$, escoja U_x vecindad abierta de e_G tal que $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ cuando $y \in xU_x$, luego V_x vecindad abierta de e_G tal que $V_xV_x \subset U_x$ (por **Proposiciones B.2.2** y **B.2.3**).

La familia $\{xV_x\}_{x \in K}$ es una cobertura abierta de K y por compacidad del mismo, existen finitos $\{x_1, ..., x_n\}$ tales que $\{x_iV_{x_i}\}_{i=1}^n$ cubre a K. Nuevamente gracias a la **Proposición B.2.3**, podemos considerar V una vecindad abierta y simétrica de e_G tal que $V \subset \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Sean $x, y \in G$ tales que $y \in xV$, entonces habrán 3 casos:

1. Sí $x, y \notin K$, entonces $f(x) = f(y) = 0$ y por tanto $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ trivialmente.
2. Sí $x \in K$ y $y \in xV$, entonces existe un i tal que $x \in x_iV_{x_i}$ y asimismo tal que $x, y \in x_iU_i$ (esto pues $x \in x_iV_{x_i} \subset x_iU_i$ y $y \in xV \subset x_iV_{x_i}V_{x_i} \subset x_iU_i$).

   Por la suposición inicial, esto implica que $|f(x)-f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y que $|f(x_i)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, usando desigualdad triangular tenemos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

3. Sí $y \in K$ y $y \in xV$, notamos que está última condición es equivalente a:

   $x \in yV^{-1} = yV$(esta última igualdad gracias a la simetría de V).

   Cambiando los roles de x, y en (2), será fácil ver que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Por lo tanto f es uniformemente continua a izquierda. □

Corolario B.2.6. *Sea G un grupo con la topología discreta y $f \in \mathcal{C}_c(G)$, entonces la aplicación $a \mapsto af$ es un mapa continuo de G en $\mathcal{C}_c(G)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, $x, y \in G$. Dado que el mapa $z \mapsto |f(x^{-1}z) - f(y^{-1}z)|$ es continuo y tiene soporte compacto K, existe $z_0 \in K$ tal que:

$$\|xf - yf\|_\infty = \sup_{z \in G} |xf(z) - yf(z)| = |xf(z_0) - yf(z_0)|.$$

Usando la **Proposición B.2.5** vemos que, para ε, existe $U \subset G$ vecindad abierta de e_G tal que:

$$y^{-1} \in x^{-1}U \text{ implica que } |f(x^{-1}) - f(y^{-1})| < \varepsilon.$$

Por la **Proposición B.2.2**, el conjunto $W = z_0 U z_0^{-1}$ es abierto y además:

$$\text{sí } y^{-1}z_0 \in x^{-1}z_0 W \text{ entonces } |f(x^{-1}z_0) - f(y^{-1}z_0)| < \varepsilon,$$

es decir, $\|xf - yf\|_\infty < \varepsilon$. Por lo tanto, la aplicación $a \mapsto af$ es continua en norma. □

Dado que $\mathcal{C}_c(G)$ es denso en $\ell^p(G)$ para $p \in [1, \infty)$, obtenemos lo siguiente:

Corolario B.2.7. *Sea G un grupo con la topología discreta y $f \in \ell^p(G)$, entonces la aplicación $a \mapsto af$ es un mapa continuo de G en $\ell^p(G)$.*

Finalizaremos está sección probando un lema que relaciona la norma de una función con la medida de cierto conjunto.

Lema B.2.8. *Sea G un grupo con la topología discreta y $h, g \in \ell^1(G)$ funciones no negativas. Para cada $r \geqslant 0$. Sean $F(h, r) = \{t \in G : h(t) \geqslant r\}$ y $F(g, r) = \{t \in G : g(t) \geqslant r\}$, entonces:*

$$\|h - g\|_1 = \int_0^\infty |F(h, r) \triangle F(g, r)|\, dr$$

Demostración. Dadas $h, g \in \ell^1(G)$ funciones no negativas, entonces:

$$|\chi_{F(h,r)}(t) - \chi_{F(g,r)}(t)| = \begin{cases} 0, & \text{sí } g(t) > r \text{ y } h(t) > r. \\ 1, & \text{sí } g(t) > r \text{ y } h(t) \leqslant r. \\ 1, & \text{sí } g(t) \leqslant r \text{ y } h(t) > r. \end{cases}$$

De aquí concluimos que: $|h(t) - g(t)| = \displaystyle\int_0^\infty |\chi_{F(h,r)}(t) - \chi_{F(g,r)}(t)|\, dr$ dado que:

sí $t_0 \in G$, entonces $|\chi_{F(h,r)}(t_0) - \chi_{F(g,r)}(t_0)| = 1$ sí y solo sí $g(t_0) \leqslant r \leqslant h(t_0)$ ó $h(t_0) \leqslant r \leqslant g(t_0)$.

luego habrán 2 casos:

- Sí $g(t_0) < h(t_0)$, se tiene que $\displaystyle\int_0^\infty |\chi_{F(h,r)}(t_0) - \chi_{F(g,r)}(t_0)|\, dr = \mu([g(t_0), h(t_0)]) = h(t_0) - g(t_0)$.
- Sí $h(t_0) < g(t_0)$, entonces $\displaystyle\int_0^\infty |\chi_{F(h,r)}(t_0) - \chi_{F(g,r)}(t_0)|\, dr = g(t_0) - h(t_0)$.

Por lo tanto $|h(t_0) - g(t_0)| = \displaystyle\int_0^\infty |\chi_{F(h,r)}(t_0) - \chi_{F(g,r)}(t_0)|\, dr$.

Sumando sobre todos los elementos del grupo obtenemos que:

$$\begin{aligned} \|h - g\|_1 = \sum_{t \in G} |h(t) - g(t)| &= \sum_{t \in G} \int_0^\infty |\chi_{F(h,r)}(t) - \chi_{F(g,r)}(t)|\, dr \\ &= \int_0^\infty \sum_{t \in G} |\chi_{F(h,r)}(t) - \chi_{F(g,r)}(t)|\, dr \\ &= \int_0^\infty F(h,r) \triangle F(h,r) dr \end{aligned}$$

□

B.2.2. Álgebra de $\ell^1(G)$

Definición B.2.9. *Sean $f, g \in \ell^1(G)$, entonces definimos $f * g : G \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente fórmula:*

$$f * g(x) = \sum_{x \in G} f(y) g(xy^{-1}) \text{ para todo } x \in G.$$

Proposición B.2.10. *Sea G un grupo con la topología discreta y $f, g \in \ell^1(G)$, entonces $f * g \in \ell^1(G)$ y satisface que $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Demostración. Ver sección (9.4) de [8]. □

Proposición B.2.11. *Sea G un grupo con la topología discreta. Entonces $\ell^1(G)$ con la convolución como multiplicación, es un álgebra de Banach. Más aún, sí definimos el mapa $* : \ell^1(G) \to \ell^1(G)$ por: $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$, entonces $\ell^1(G)$ es una *-álgebra.*

Proposición B.2.12. *Sea G un grupo dotado con la topología discreta, entonces existe una red de funciones no negativas $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{C}_c(G)$, con A un conjunto dirigido, tales que:*

1. $\displaystyle\sum_{x \in G} e_\alpha(x) = 1.$

2. $\displaystyle\lim_\alpha \|e_\alpha * f - f\|_1 = 0$ *para toda función $f \in \ell^1(G)$.*

Demostración. Lo probaremos primero para el caso en que G tenga una base contable; para ello consideraremos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de vecindades abiertas de e_G tal que toda vecindad abierta de e_G contiene algún U_n. Para cada n, sea e_n una función no negativa en $\mathcal{C}_c(G)$ que es cero fuera de U_n y tal que $\displaystyle\sum_{x \in G} e_n(x) = 1$.

Dado $x \in G$ y $f \in \mathcal{C}_c(G)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|(f * e_n - f)(x)| &= |\sum_{y \in G} f(xy^{-1}) e_n(y) - f(x)| \\
&= |\sum_{y \in G} f(xy^{-1}) e_n(y) - \sum_{y \in G} e_n(y) f(x)| \\
&\leqslant \sum_{y \in G} e_n(y) |f(xy^{-1}) - f(x)| \\
&\leqslant \sum_{y \in U_n} e_n(y) |f(xy^{-1}) - f(x)|
\end{aligned}$$

como G es localmente compacto, existe W una vecindad abierta de e_G y K un subconjunto compacto de G tal que $e_G \in W \subset K$, sin pérdida de generalidad, asuma que $U_n \subset W$, entonces la clausura $\bar{U}_n \subset K$ es un subconjunto compacto de G; continuando con la cadena de desigualdades, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|(f * e_n - f)(x)| &\leqslant \sup_{y \in \bar{U}_n} |f(xy^{-1}) - f(x)| \sum_{y \in G} e_n(y) \quad \text{(el supremo existe ya que } f \in \mathcal{C}_c(G)) \\
&= \sup_{y \in \bar{U}_n} |f(xy^{-1}) - f(x)|
\end{aligned}$$

entonces $|(f * e_n - f)(x)| \to 0$ cuando $n \to \infty$ en virtud de que $\{\bar{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de vecindades compactas de e_G, entonces $\bar{U}_n \to \{e_G\}$; dado que $\mathcal{C}_c(G)$ es denso en $\ell^1(G)$, se sigue el resultado.

Ahora bien, en caso de que G no tenga una base contable, Sea el conjunto dirigido A que consiste de la colección de vecindades abiertas de e_G ordenadas por el orden parcial $U \leqslant V$ sí $V \subset U$, procediendo de manera similar al caso anterior, obtenemos el resultado. $\square$

Definición B.2.13. *A la red de funciones* $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *de la* ***Proposición B.2.12*** *se le llama* ***aproximación acotada de la identidad****.*

Observación B.2.14. $\ell^1(G)$ *no es necesariamente una* C^**-álgebra, para verlo, considere el siguiente ejemplo:*

Tome $G = \mathbb{Z}$ y $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ dada por:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{sí } n = 0. \\ -1 & \text{sí } n = 1 \text{ ó } n = 2. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces: $(x^* * x)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x^*(m)x(n-m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{x}(-m)x(n-m)$

$$= x(1)x(n+1) + x(2)x(n+2) + x(0)x(n).$$

De dónde concluimos que:

$$(x^* * x)(n) = \begin{cases} 3 & \text{sí } n = 0. \\ -1 & \text{sí } n = 2 \text{ ó } n = -2. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto $\|x^* * x\|_1 = 5 \neq 9 = \|x\|_1^2$.

Apéndice C

Representaciones unitarias

C.1. Introducción

Dado $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, decimos que un operador $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es unitario sí $UU^* = U^*U = Id$, al conjunto de operadores unitarios con la operación de producto lo llamamos el grupo unitario de $\mathcal{H}$ y lo denotamos por $U(\mathcal{H})$.

Definición C.1.1. *Una* ***representación unitaria*** *de un grupo topológico G en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un homomorfismo de grupos $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ tal que el mapa $G \to \mathcal{H}$ dado por $g \mapsto \pi(g)\xi$ es continuo para todo $\xi \in \mathcal{H}$. A la representación se le denotará por $(\pi, \mathcal{H})$.*

Ejemplo C.1.2. *Dada una función $f : G \to \mathbb{C}$ y $a \in G$, definimos la traslación a izquierda $af : G \to \mathbb{C}$ por: $af(x) = f(ax)$ para todo $x \in G$. Dado $g \in G$, definimos el operador $\lambda_G(g) : \ell^2(G) \to \ell^2(G)$ dado por: $\lambda_G(g)\xi(x) = g^{-1}\xi(x) = \xi(g^{-1}x)$; entonces tenemos que:*

1. *$\lambda_G(g)$ es un operador unitario para todo $g \in G$: sean $\xi, \eta \in \ell^2(G)$, por definición del producto interno:*
$$\begin{aligned}\langle \lambda_G(g)\xi, \lambda_G(g)\eta \rangle &= \sum_{x\in G} \lambda_G(g)\xi(x)\lambda_G(g)\eta(x) \\ &= \sum_{x\in G} \xi(g^{-1}x)\eta(g^{-1}x) = \langle \xi, \eta \rangle.\end{aligned}$$
2. *$\lambda_G(gh) = \lambda_G(h)\lambda_G(g)$ para todo par $g, h \in G$: sea $\xi \in l^2(G)$, entonces:*
$$\lambda_G(gh)\xi(x) = \xi((gh)^{-1}x) = \xi(h^{-1}g^{-1}x) = \lambda_G(h)\lambda_G(g)\xi(x).$$
3. *El mapa $G \to \ell^2(G)$ dado por $g \mapsto \lambda_G(g)\xi$ es continuo para todo $\xi \in \ell^2(G)$.*

Definición C.1.3. *Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de G y $\mathcal{K}$ un subespacio cerrado y $G-$invariante de $\mathcal{H}$. Denote, para todo $g \in G$, $\pi^{\mathcal{K}}(g) : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ la restricción de $\pi(g)$ a $\mathcal{K}$; entonces obtenemos una representación unitaria para $\mathcal{K}$.*

Definición C.1.4. *Sea* $(\mathcal{H}_i, \langle\cdot,\cdot\rangle)_{i\in I}$ *una familia de espacios de Hilbert. La suma directa de los espacios* $\mathcal{H}_i$*, denotada por* $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$ *es el espacio de Hilbert de todas las familias* $(\xi_i)_i$ *con* $\xi_i \in \mathcal{H}_i$ *tales que* $\sum_{i\in I}\langle\xi_i,\xi_i\rangle_i < \infty$ *con producto interno dado por:*

$$\langle(\xi_i)_i, (\eta_i)_i\rangle = \sum_i \langle\xi_i, \eta_i\rangle_i.$$

Proposición C.1.5. *Sea* $(\pi, \mathcal{H})$ *una representación unitaria de* G *y* $\mathcal{K}$ *un subespacio cerrado y* $G-$*invariante de* $\mathcal{H}$*. Entonces* $\mathcal{K}^\perp$*, el complemento ortogonal de* $\mathcal{K}$ *en* $\mathcal{H}$ *es* $G-$*invariante.*

Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de G y $\mathcal{K}$ un subespacio cerrado y $G-$invariante, entonces $\pi(g) = \pi^{\mathcal{K}}(g) \bigoplus \pi^{\mathcal{K}^\perp}(g)$

Demostración. Sean $\xi \in \mathcal{K}^\perp, \eta \in \mathcal{K}$ y $g \in G$, entonces: $\langle\pi(g)\xi, \eta\rangle = \langle\xi, \pi(g)^*\eta\rangle = \langle\xi, \pi(g^{-1})\eta\rangle = 0$ pues $\mathcal{K}$ es $G-$invariante. □

Definición C.1.6. *Sea* G *un grupo topológico, un* ***kernel de tipo positivo*** *en* G *es una función continua* $\Phi : G \times G \to \mathbb{C}$ *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, cualesquiera elementos* $x_1, ..., x_n \in G$ *y cualesquiera* $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ *se tiene que:* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i\bar{c}_j\Phi(x_i, x_j) \geqslant 0.$

En particular, dada $\varphi : G \to \mathbb{C}$*, decimos que es de* ***tipo positivo*** *sí* $\Phi : G \times G \to \mathbb{C}$ *dada por* $\Phi(x, y) = \varphi(x^{-1}y)$ *es un kernel de tipo positivo.*

Proposición C.1.7. *Sea* Φ *un kernel de tipo positivo en* X*. Entonces para todo* $x, y \in X$ *se tiene que:*

1. $\Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$.
2. $|\Phi(x, y)|^2 \leqslant \Phi(x, x)\Phi(y, y)$.

Demostración.

1. Para $n = 2$, tomando $x_1 = x, x_2 = y$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ complejos de norma 1, entonces tenemos que:

   a) $\Phi(x_i, x_i) \geqslant 0$ para $i = 1, 2$.

   b) $\gamma = \Phi(x, x) + \Phi(y, y) + c_1\bar{c}_2\Phi(x, y) + c_2\bar{c}_1\Phi(y, x) \geqslant 0$.

   Entonces $\gamma - \bar{\gamma} = c_1\bar{c}_2(\Phi(x, y) - \overline{\Phi(y, x)}) + c_2\bar{c}_1(\Phi(y, x) - \overline{\Phi(x, y)}) = 0$, de donde se concluye que $\Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$.

2. Para $n = 2$, tomando $x_1 = x, x_2 = y$ tenemos que la matriz

$$\begin{pmatrix} \Phi(x, x) & \Phi(x, y) \\ \Phi(y, x) & \Phi(y, y) \end{pmatrix}$$

   es Hermitiana positiva, por lo tanto, todos sus autovalores y consecuentemente, su determinante es positivo, en otras palabras:

$$\Phi(x,x)\Phi(y,y) - \Phi(y,x)\Phi(x,y) \geqslant 0.$$

Usando el primer inciso, habremos terminado.

$\square$

Corolario C.1.8. *Sea ϕ una función de tipo positivo para G, entonces $|\phi(g)| \leqslant \phi(e)$ para todo $g \in G$.*

Lema C.1.9. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $f : G \to \mathcal{H}$ una función continua. Defina Φ por $\Phi(x,y) = \langle f(x), f(y)\rangle$, entonces Φ es un kernel de tipo positivo.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, y cualesquiera $x_1, ..., x_n \in G$, $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i\bar{c_j}\Phi(x_i,x_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i\bar{c_j}\langle f(x_i), f(x_j)\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i), c_j f(x_j)\Big\rangle \geqslant 0.$$ $\square$

Proposición C.1.10. *Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de G y $\xi \in \mathcal{H}$, entonces la función $g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \xi\rangle$ es de tipó positivo.*

Demostración. Tome $f(g) = \pi(g)\xi$ en **Lema C.1.9**, entonces $\Phi(g,h) = \langle \pi(g)\xi, \pi(h)\xi\rangle$ es de tipo positivo, pero, reescribiendo un poco: $\Phi(g,h) = \langle \pi(g)\xi, \pi(h)\xi\rangle = \langle \pi(h)^*\pi(g)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(h^{-1})\pi(g)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(h^{-1}g)\xi, \xi\rangle \geqslant 0.$ $\square$

A las funciones $\langle \pi(\cdot)\xi, \xi\rangle$ se les llamará funciones de tipo positivo **asociadas** a π.

Definición C.1.11. *Una representación $(\pi, \mathcal{H})$ de G es **cíclica** sí existe un vector $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $Span(\pi(G)\xi)$ es denso en $\mathcal{H}$. En este caso, ξ se dice un **vector cíclico** para π.*

Proposición C.1.12. *Sea $(\pi, \mathcal{H})$ una representación unitaria de G. Entonces $\mathcal{H}$ se puede descomponer en una suma directa $\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}_i$ de subespacios cerrados, $G-$invariantes y ortogonales 2 a 2 tales que $\pi\restriction_{\mathcal{H}_i}$ es representación cíclica para todo i.*

Demostración. Sea X la colección de todas las familias $(\mathcal{H}_i)_i$ de subespacios cerrados, $G-$invariantes y mutuamente ortogonales $\mathcal{H}_i$ de $\mathcal{H}$, tales que $\pi\restriction_{\mathcal{H}_i}$ es cíclica. Dote a X con el orden de inclusión. Por Lema de Zorn, X contiene una familia maximal $(\mathcal{H}_i)_i$. Entonces $\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}_i$; caso contrario, existe $\xi \neq 0$ vector ortogonal a todos los subespacios $\mathcal{H}_i$.

Sea $\mathcal{K} = \overline{span(\pi(G)\xi)}$, entonces $\mathcal{K} \perp \mathcal{H}_i$ para todo i. Luego la familia $\{(\mathcal{H}_i)_i, \mathcal{K}\} \in X$ y contiene estrictamente a $(\mathcal{H}_i)_i$, lo cuál supone una contradicción. $\square$

Teorema C.1.13. *Sea φ una función de tipo positivo de G, entonces existe una tripla $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$ que consta de:*

1. *π_φ una representación unitaria cíclica.*
2. *$\mathcal{H}_\varphi$ el espacio de Hilbert correspondiente a π_φ.*
3. *ξ_φ un vector cíclico en $\mathcal{H}_\varphi$ tal que: $\varphi(g) = \langle \pi_\varphi(g)\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle$ para todo $g \in G$.*

C.2. Representaciones inducidas

Dado un grupo G, $(\sigma, \mathcal{K})$ una representación de un subgrupo H de G, definimos $F = \{f : G \to \mathcal{K}|\ f(xh) = \sigma(h^{-1})f(x)$ para todo $h \in H, g \in G\}$.

Dados $\xi, \eta \in F$, dotamos a F de un producto interno como sigue:

Sabemos que $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert, por lo tanto $\xi(xh), \eta(xh) \in \mathcal{K}$ y consecuentemente su producto interno está definido; más aún:

$$\langle \xi(xh), \eta(xh) \rangle = \langle \sigma(h^{-1})\xi(x), \sigma(h^{-1})\eta(x) \rangle = \langle \xi(x), \eta(x) \rangle$$

donde la última igualdad se tiene del hecho de que $(\sigma, \mathcal{K})$ es una representación unitaria para H.

Por lo tanto el mapa $x \mapsto \langle \xi(x), \eta(x) \rangle$ es constante en los cocientes a derecha de G módulo H y por ende se puede ver como una función en G/H.

Ahora bien, definimos el producto interno en F como:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{xH \in G/H} \langle \xi(xH), \eta(xH) \rangle$$

y consideramos ahora $\mathcal{F}$, el espacio de Hilbert resultante de la completación de F.

Para cada $g \in G$, definimos un operador $\pi(g)$ sobre F como: $\pi(g)\xi(x) = \xi(g^{-1}x)$, entonces se tiene la siguiente igualdad:

$$\langle \pi(g)\xi_1, \pi(g)\xi_2 \rangle = \sum_{xH \in G/H} \langle \xi_1(g^{-1}xH), \xi_2(g^{-1}xH) \rangle = \sum_{(gu)H \in G/H} \langle \xi_1(uH), \xi_2(uH) \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle,$$

entonces π se extiende a una representación unitaria en $\mathcal{F}$.

Definición C.2.1. *Sea G un grupo con la topología discreta, entonces la pareja $(\pi, \mathcal{F})$, nos define una representación unitaria para G, llamada representación unitaria de G* ***inducida*** *por ρ y denotada por $\pi = Ind_H^G \sigma$.*

Teorema C.2.2. *Sea $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ una representación unitaria de G y $(\sigma, \mathcal{K}_\sigma)$ una representación unitaria de H. La representación $\pi \otimes Ind_H^G \sigma$ es equivalente a $Ind_H^G((\pi \restriction H) \otimes \sigma)$.*

Los siguientes ejemplos serán de mucha utilidad en el **Capítulo 4**.

Ejemplo C.2.3. *Considere $H = \{e_G\}$, $(1_H, \mathbb{C})$ la representación trivial de un subgrupo H, entonces, igual que antes consideramos:*

1. *$F = \{f : G \to \mathbb{C} | f(xh) = 1_G(h^{-1})f(x)\} = \{f : G \to \mathbb{C}\}$ dado que $H = \{e_G\}$ y 1_H es la representación trivial.*

2. *$\mathcal{F}$ el espacio de Hilbert resultante de la completación de F.*

3. $\pi : G \to U(\mathcal{F})$ *dada por:* $\pi(g)\xi(x) = \xi(g^{-1}x)$.

De aquí es claro que $\mathcal{F} = \ell^2(G)$ *y* $Ind_H^G(1_G) = \lambda_G$*, por lo tanto, la inducción de la representación trivial es la representación regular.*

Ejemplo C.2.4. *Por el* ***Teorema C.2.2*** *y el* ***Ejemplo C.2.3*** *tomando* $H = \{e_G\}$ *y* $\sigma = 1_H$*, entonces* $\pi \otimes \lambda_G = \pi \otimes Ind_{\{e_G\}}^G(1_{\{e_G\}})$*, que es equivalente a* $Ind_{\{e_G\}}^G((\pi\restriction\{e_G\}) \otimes 1_{\{e_G\}})$.

Ahora bien, si hacemos nuevamente la construcción de $(\mathcal{F}, Ind_{\{e_G\}}^G((\pi\restriction\{e_G\}) \otimes 1_{\{e_G\}}))$,

notamos que $\mathcal{F}$ *es la completación de Hilbert del espacio* F *de funciones* $f : G \to \mathcal{H}_\pi \otimes \mathbb{C} \cong \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} \mathbb{C}$ *para* $\mathcal{S}$ *un conjunto de generadores para* $\mathcal{H}_\pi$.

Por lo tanto $\pi \otimes \lambda_G$ *es equivalente a* $(dim\mathcal{H}_\pi)\lambda_G$.

Bibliografía

[1] Stefan Banach and Alfred Tarski, *Sur la descomposition des emsembles de points en parties res*, *Fund.Math*, 1924.

[2] Sato Kenzi, *A free group acting without fixed points on the rational sphere*, *Fund.Math*, 1995.

[3] Olshanskii Alexander Yu., *On the question of the existence of an invariant mean on a group*, Vol. 35, *Russian Mathematical Surveys*, 1980.

[4] Tarski Alfred, *Algebraische Fassung des Massproblems*, Vol. 31, *Fund.Math*, 1938.

[5] Alan Paterson, *Amenability*, *American Mathematical Society*, 1984.

[6] T. Ceccherini-Silberstein and M. Coornaert, *Cellular Automata and Groups*, *Springer*, 2010.

[7] Stan Wagon and Tomkowicz Grzegorz, *The Banach Tarski Paradox*, *Cambridge UNIVERSITY PRESS*, 1985/2016.

[8] Donald Cohn, *Measure Theory*, *Birkhauser*, 2013.

[9] Kate Juschenko, *Amenability of discrete groups by examples*, 2016, `https://metaphor.ethz.ch/x/2017/hs/401-3370-67L/sc/Juschenko.pdf`.

[10] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette, *Kazhdan's Property (T)*, *CAMBRIDGE*, 2008.

[11] Alejandra Garrido, *An introduction to amenable groups*, 2013, `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~garrido/amenable.pdf`.

[12] Terence Tao, *245B, notes 2: Amenability, the ping-pong lemma, and the Banach-Tarski paradox (optional)*, 08/01/2009, `https://terrytao.wordpress.com/2009/01/08/245b-notes-2-amenability-the-ping-pong-lemma-and-the-banach-tarski-paradox-optional/`.

[13] T. Tao, *Some notes on amenability*, 14/04/2009, `https://terrytao.wordpress.com/2009/04/14/some-notes-on-amenability/`.

[14] Mary Cook, *The Ping-Pong Lemma*, 29/04/2016, `https://math.la.asu.edu/~paupert/CookPingPongLemma.pdf`.