

ANEXO 3
BIBLIOTECA ALFONSO BORRERO CABAL, S.J.
DESCRIPCIÓN DE LA TESIS DOCTORAL O DEL TRABAJO DE GRADO
FORMULARIO

TÍTULO COMPLETO DE LA TESIS DOCTORAL O TRABAJO DE GRADO			
ASPECTOS COMPUTACIONALES DE LAS FUNCIONES SIMÉTRICAS CUÁNTICAS			
SUBTÍTULO, SI LO TIENE			
AUTOR O AUTORES			
Apellidos Completos		Nombres Completos	
Castellanos Medina		Jesica Nataly	
Cely Beltrán		Javier Dario	
DIRECTOR (ES) TESIS DOCTORAL O DEL TRABAJO DE GRADO			
Apellidos Completos		Nombres Completos	
Pariguan Martinez		Eddy Josefina	
FACULTAD			
Ciencias			
PROGRAMA ACADÉMICO			
Tipo de programa (seleccione con "x")			
Pregrado	Especialización	Maestría	Doctorado
x			
Nombre del programa académico			
Matemáticas			
Nombres y apellidos del director del programa académico			
Vladimir Moreno Gutierrez			
TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE:			
Matemático			
PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o tener una mención especial):			
Mención de honor			
CIUDAD	AÑO DE PRESENTACIÓN DE LA TESIS O DEL TRABAJO DE GRADO		NÚMERO DE PÁGINAS
Bogotá	2011		65
TIPO DE ILUSTRACIONES (seleccione con "x")			
Dibujos	Pinturas	Tablas, gráficos y diagramas	Planos
		x	Mapas
			Fotografías
			Partituras
SOFTWARE REQUERIDO O ESPECIALIZADO PARA LA LECTURA DEL DOCUMENTO			
<p>Nota: En caso de que el software (programa especializado requerido) no se encuentre licenciado por la Universidad a través de la Biblioteca (previa consulta al estudiante), el texto de la Tesis o Trabajo de Grado quedará solamente en formato PDF.</p>			

MATERIAL ACOMPAÑANTE					
TIPO	DURACIÓN (minutos)	CANTIDAD	FORMATO		
			CD	DVD	Otro ¿Cuál?
Vídeo					
Audio					
Multimedia					
Producción electrónica					
Otro Cuál?					
DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVE EN ESPAÑOL E INGLÉS					
Son los términos que definen los temas que identifican el contenido. (En caso de duda para designar estos descriptores, se recomienda consultar con la Sección de Desarrollo de Colecciones de la Biblioteca Alfonso Borrero Cabal S.J en el correo biblioteca@javeriana.edu.co , donde se les orientará).					
ESPAÑOL			INGLÉS		
Variedades de Poisson			Poisson manifolds		
Álgebra de Weyl			Weyl algebra		
Deformación por cuantización			Deformation quantization		
Funciones simétricas cuánticas			Quantum symmetric funtions		
RESUMEN DEL CONTENIDO EN ESPAÑOL E INGLÉS					
(Máximo 250 palabras - 1530 caracteres)					
<p>El presente trabajo es basado en el trabajo desarrollado por el matemático Maxim Kontsevich, quién desarrolló una fórmula para la deformación por cuantización de sistemas físicos clásicos, como las variedades de Poisson, por medio de un producto estrella.</p> <p>En el capítulo 1 se enuncian algunos conceptos algebraicos y geométricos como lo son el concepto de variedad diferenciable y álgebra de Lie.</p> <p>En el capítulo 2 se introduce el concepto de funciones simétricas cuánticas y la acción de un grupo sobre un conjunto.</p> <p>Para el capítulo 3 se define el concepto de deformación por cuantización por medio de un producto estrella asociativo y seguido a esto se da el concepto de álgebra de Weyl junto con las fórmulas correspondientes para el producto de m elementos en la enésima potencia simétrica del álgebra de Weyl.</p> <p>Por último en el capítulo cuatro se presentan los algoritmos obtenidos por medio de la programación en Maple para el producto de m elementos en la enésima potencia simétrica del álgebra de Weyl.</p> <p>This thesis work is based on a work developed by Maxim Konsevich who obtained a formula for the deformation quantization of classic physic systems such as Poisson manifolds through a star product.</p> <p>In chapter 1 some algebraic and geometric concepts are introduced such as the concept of differentiable manifolds and Lie algebras.</p> <p>In chapter 2 the concept of symmetric functions and the action of a group over a set are introduced as well.</p> <p>For chapter 3 the concept of deformation quantization is defined through a associative star product and as well as the concept of Weyl algebra along with the corresponding formulas for the product of m elements in the nth symmetric power of the Weyl algebra.</p> <p>For chapter 4 the algorithms for the product of m terms in the nth symmetric power of the Weyl algebra, which were obtained by programming in the software Maple, are introduced.</p>					



Pontificia Universidad Javeriana.

Facultad de Ciencias.

Departamento de Matemáticas.

**ASPECTOS COMPUTACIONALES DE LAS FUNCIONES
SIMÉTRICAS CUÁNTICAS.**

Jessica Castellanos Medina

Javier D. Cely Beltrán

Directora: Eddy Pariguan

Bogotá Colombia

Junio de 2011

Índice general

Introducción	6
Objetivos	11
Reseña Histórica	12
1. Preliminares	18
2. Funciones Simétricas Clásicas	27
2.1. Acciones de Grupos sobre Conjuntos	27
2.2. Álgebra de Funciones Simétricas	29
3. Deformación por Cuantización	32
3.0.1. Algebra de Weyl	36
3.0.2. Funciones Simétricas Cuánticas	38
4. Aspectos Computacionales	44
4.1. Álgebra de Weyl	44
4.1.1. Función factdecreciente	45
4.1.2. Función Combinatoria	45
4.1.3. Función Identity	46
4.1.4. Interfaz Gráfica de Usuario	46
4.2. Coeficientes Normales	47
4.2.1. Librerías	47
4.2.2. Función particiones	47

4.2.3.	Función Permutaciones	48
4.2.4.	Función Norma	48
4.2.5.	Función sumi	49
4.2.6.	Función Combinar	50
4.2.7.	Función P2	50
4.3.	Funcionabilidad	51
4.3.1.	Función menor	51
4.3.2.	Función ffalling	51
4.4.	Función pmonomio	52
4.4.1.	Interfaz Gráfica de Usuario	52
4.5.	Funciones simétricas cuánticas	53
4.5.1.	Librerías	53
4.5.2.	Función construir	54
4.5.3.	Función simplificar	54
4.5.4.	Función iguales	55
4.5.5.	Función auxiliarcoef	55
4.5.6.	Función auxiliar	56
4.5.7.	Función coinvariantesquitar	56
4.5.8.	Función matri	57
4.5.9.	Función agrupar	57
4.5.10.	Función eliminar	57
4.5.11.	Función coeficientes	58
4.5.12.	Función factorizacion	58
4.5.13.	Función pmonomio	59
4.6.	Funcionabilidad	59
4.6.1.	Función sacar	60
4.6.2.	Función sacar2	60
4.6.3.	Función sacar3	60

4.6.4. Función coinvariantes	61
4.6.5. Función main	61
Conclusiones	63
Bibliografía	64

Agradecimientos

Antes que nada queremos agradecer a Dios quien nos ha dado vida, fuerza y la constancia para poder culminar este trabajo. A su vez agradecemos a Rafael Díaz y Fernando Novoa quienes siempre han estado prestos a colaborarnos con la paciencia suficiente para guiarnos. A Eddy Pariguan quien dirigió este trabajo de investigación y nos brindó el apoyo necesario para poder sacarlo adelante; el aporte académico de estas tres personas ha sido fundamental para nuestra formación profesional.

También agradecemos a nuestras familias, las cuales nos han brindado su total y completo respaldo durante todo este tiempo, al igual que un apoyo incondicional e indispensable.

Introducción

Este trabajo de tesis es el resultado de una serie de análisis sobre la deformación por cuantización del álgebra de Weyl a partir de un artículo desarrollado por Díaz y Pariguan [4].

Nos basaremos en el trabajo desarrollado por Maxim Kontsevich [18], medallista fields, quien desarrolló una fórmula para la deformación por cuantización de sistemas físicos clásicos, como las variedades de Poisson, por medio de un producto estrella. La fórmula para el producto estrella presentada por Kontsevich es bastante complicada de interpretar, sin embargo, gracias a la existencia de dos ejemplos aplicados, la interpretación de dicha fórmula resulta más fácil de entender.

Éste trabajo girará en torno a uno de estos dos ejemplos, el cual plantea, que dado un corchete α constante no degenerado, se puede concluir que el álgebra cuántica de funciones polinomiales sobre \mathbb{R}^{2n} es isomorfa a n copias del álgebra de Weyl. Con base en este ejemplo, pretendemos encontrar fórmulas explícitas aplicadas, apoyándonos en la herramienta matemática Maple, la cual nos permitirá encontrar resultados reales de la deformación por cuantización del álgebra de Weyl.

La deformación por cuantización básicamente busca dar una interpretación moderna de sistemas físicos clásicos, mediante la deformación de la estructura algebraica conmutativa, la cual da paso a una estructura matemática no conmutativa.

El primer problema que se presenta es cómo representar las funciones suaves sobre el orbifold de Poisson \mathbb{R}^{2n}/S_n . La representación de tales funciones era bastante complicada, pero tras una serie de estudios se concluyó que el conjunto de las funciones suaves sobre

dicho orbifold de Poisson \mathbb{R}^{2n}/S_n , es isomorfo a $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})^{S_n}$.

Teorema 1. *Para cualquier $A : [m] \times [m] \longrightarrow \mathbb{N}^2$, la siguiente identidad*

$$(n!)^{m-1} \prod_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^n X_j^{A_{ij}} \right) = \sum_{\sigma, k, p} \left(\prod_{i,j} \binom{b_j^\sigma}{p^j} (|(a_\sigma^j)_{>i}| - |p_{>i}^j|)_{p_i^j} \right) \overline{\prod_{j=1}^n X_j^{|A_j^\sigma| - (k_i, k_j)} \hbar^{|k|}}$$

donde $\sigma \in \{id\} \times S_n^{m-1}$, $k \in \mathbb{N}^n$, $(i, j) \in [m-1] \times [n]$, y $p = p_i^j \in (\mathbb{N}^{m-1})^n$, se cumple en $Sym^n(W)$.

El Teorema 1 describe la regla del producto para m elementos en $Sym^n(W)$, donde W representa el álgebra de Weyl (Ver Subsección 3.0.1). Aunque la representación de estas funciones es bastante explícita, su cálculo es igualmente dispendioso, por lo que el obtener resultados del producto estrella de dichas funciones es bastante limitado. Es allí donde este trabajo cobra especial importancia, pues por medio de la programación en Maple fue posible hacer cuentas extremadamente largas, en muy poco tiempo, lo cual representa un resultado muy novedoso y práctico por cuanto no existen cálculos referentes a dicho producto estrella de funciones simétricas monomiales.

Toda la investigación hecha en este trabajo alrededor de las funciones simétricas monomiales se ha dividido en cuatro capítulos, de los cuales, se dará un esquema breve en el desarrollo de la presente introducción.

En el Capítulo 1 se enunciarán algunos conceptos algebraicos y geométricos que tienen como objetivo contextualizar la investigación hecha, además de motivar y preparar otros conceptos que serán abordados en los siguientes capítulos. En este capítulo se encontrará la definición formal de variedad diferenciable, introduciendo el concepto de carta y de atlas de una variedad. Seguido a esto se definirá un álgebra de Lie y posteriormente, se introducirá el concepto de variedad de Poisson, como una variedad diferenciable dotada de un corchete, el cual es un corchete de Lie que también cumple con la identidad de Leibnitz, llamado corchete de Poisson.

Para el Capítulo 2 se introduce el concepto de funciones simétricas clásicas que son pieza clave en el desarrollo de presente trabajo. Se parte de conceptos algebraicos básicos como la acción de un grupo sobre un conjunto, la definición de órbita y grupo de isotropía. Luego de enunciar las definiciones anteriormente mencionadas, continuaremos con el concepto de polinomios simétricos y con base en esto aclararemos que todos estos polinomios son a su vez funciones simétricas, trabajando sobre un cuerpo K de característica 0.

En el Capítulo 3 se introduce el concepto de deformación por cuantización por medio de un producto estrella asociativo e igualmente se hará mención del producto estrella desarrollado por Kontsevich y del ejemplo anteriormente mencionado, el cual brinda una presentación explícita del producto estrella de Kontsevich, que es bastante difícil de entender. Seguido a esto se dará el concepto del álgebra de Weyl y con base en algunos teoremas de [4] que brindan una representación explícita de la funciones presentes en el álgebra de Weyl. Luego se proporcionarán ciertas especificaciones para el producto de funciones simétricas cuánticas monomiales y por último, se establecerá una fórmula mucho más clara de dicho producto. Como pieza clave y fundamental de este trabajo, se hará mención de algunos ejemplos aplicados importantes obtenidos de la programación en Maple, los cuales son resultados novedosos sobre el producto estrella de funciones simétricas monomiales del álgebra de Weyl.

En el Capítulo 4 se muestran los aspectos computacionales desarrollados con el fin crear un software que permita trabajar y visualizar los resultados mostrados a lo largo del trabajo. El programa sobre el cual se desarrollaron los algoritmos fue Maple.

Los algoritmos realizados principalmente son tres y cada uno realiza una labor específica dependiendo de las necesidades requeridas. A su vez, los algoritmos se desarrollaron de manera secuencial debido a que cada uno dependía del otro. Por ejemplo, el primer algoritmo calcula el producto estrella en el álgebra de Weyl dado por la Definición 4.1. Posteriormente, usando el algoritmo anteriormente mencionado, fue posible desarrollar

un segundo algoritmo que calcula los coeficientes normales, dados por la expresión (30). Luego, procedimos a realizar la generalización para calcular las expresiones dadas por el Teorema 1 apoyándonos en los dos algoritmos previamente mencionados. En este último algoritmo encontramos varios inconvenientes referentes a la programación y a la capacidad física de los computadores. Dentro de los problemas de programación encontramos que la fórmula, matemáticamente no tiene una secuencia repetitiva que se conserve para el caso de $m = k$ y $n = k$, por lo tanto debimos limitarnos a solucionar el problema para los casos $m = 3$ y $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$. Existe una idea para resolver dicho inconveniente que consiste en ejecutar una función recursiva, sin embargo, esto genera un segundo problema y es la capacidad física de los computadores. Este tipo de funciones, aunque a veces son óptimas, hacen uso de una gran cantidad de recursos físicos tales como memoria y capacidad de procesamiento. Las funciones que resuelven los problemas matemáticos para el primer algoritmo son: Combinar y facdecreciente. Para el segundo algoritmo son: Particiones, permutaciones, norma, sumi, combinar y p2. Para el tercer algoritmo son: factorización y coinvariantes. El resto de las funciones fueron usadas para solucionar todas las demás anteriormente mencionadas con el fin de reducir la complejidad y abarcar cada problema específicamente.

Por último, dentro de este capítulo también se dan a conocer programas creados con el objetivo de dar a mostrar una interfaz gráfica, que tiene como fin facilitar el manejo del programa, la lectura de los parámetros de entrada y la impresión del resultado al usuario.

Esperamos que este trabajo de grado contribuya en al entendimiento y el desarrollo de ejemplos prácticos del producto estrella de funciones simétricas monomiales en el álgebra de Weyl, con el fin dar una aplicación práctica en el campo de la física o la matemática además de proyectarse como una fuente de consulta académica.

Este trabajo de grado ha sido parcialmente financiado por el proyecto de investigación ID 3207 titulado "Aspectos Computacionales de las Funciones Simétricas Cuánticas",

dirigido por la Dra. Eddy Pariguan.

Objetivos

General

- Obtener ejemplos para la deformación por cuantización del orbifold de Poisson \mathbb{R}^{2n}/S_n , utilizando el software Maple.

Específicos

Obtener ejemplos explícitos para las expresiones dadas por:

- Coordenadas Normales.

Las coordenadas normales $N(A, k)$ de $\prod_{i=1}^n X^{A_i} \in W$ son definidas a través de la identidad

$$\prod_{i=1}^n X^{A_i} = \sum_{k=0}^{\min} N(A, k) x^{|a|-k} y^{|b|-k} \hbar^k,$$

para $0 \leq k \leq \min = \min(|a|, |b|)$. Para $k \geq \min$, igualamos $N(A, k)$ a 0.

- Regla del producto para m elementos en $Sym^n(W)$.

Para cualquier $A : [m] \times [m] \rightarrow \mathbb{N}^2$, la siguiente identidad

$$(n!)^{m-1} \prod_{i=1}^m \left(\overline{\prod_{j=1}^n X_j^{A_{ij}}} \right) = \sum_{\sigma, k, p} \left(\prod_{i,j} \binom{b_j^\sigma}{p^j} (|(a_\sigma^j)_{>i}| - |p_{>i}^j|)_{p_i^j} \right) \overline{\prod_{j=1}^n X_j^{|A_j^\sigma| - (k_i, k_j)} \hbar^{|k|}},$$

donde $\sigma \in \{id\} \times S_n^{m-1}$, $k \in \mathbb{N}^n$, $(i, j) \in [m-1] \times [n]$, y $p = p_i^j \in (\mathbb{N}^{m-1})^n$, se cumple en $Sym^n(W)$.

Reseña histórica

La deformación por cuantización nació como un intento de interpretar la cuantización de un sistema clásico asociativo como una deformación del álgebra de observables clásicos en la dirección del soporte de Poisson. Esta idea estaba detrás de la mente de muchos físicos, entre ellos Weyl y Wigner, como lo demuestra la evolución histórica que dio lugar a la deformación por cuantización.

La deformación por cuantización fue propuesta aproximadamente 32 años atrás en un trabajo desarrollado por Bayen, Mosh Flato, Christian Fronsdal, Lichnerowicz y Sternheimer [2] cómo una alternativa a la correspondencia usual

Sistema Clásico \leftrightarrow Sistema Cuántico

Variedades Simplécticas \leftrightarrow Espacios de Hilbert

La idea es que las álgebras de observables en mecánica cuántica son cercanas al álgebra conmutativa de funciones sobre variedades también llamados espacios de fase. En otras palabras, las álgebras cuánticas de observables son deformaciones de álgebras conmutativas.

La transición de estructuras conmutativas a no conmutativas es una frontera básica entre la física y las matemáticas. La llegada de la mecánica cuántica [10] es por su puesto un ejemplo importante, pero en la actualidad se está volviendo claro que la aparición tres décadas atrás, de la deformación por cuantización, seguido por numerosos desarrollos y

cambios, ha tenido un mayor factor en la tendencia actual.

El pasado epistemológico puede ser remontado a la deformación filosófica la cual Moshé Flato [13] desarrolló a principios de los 70's, motivado por profundas ideas físicas y desarrollos matemáticos. Desde ese tiempo, inspirando a muchos, él constantemente ha perseguido y promovido consecuencias físicas y matemáticas de dicha idea en muchas direcciones de las cuales, deformación por cuantización es la más ampliamente reconocida. Michael Atiyah dijo recientemente después de Oscar Wilde que las matemáticas y la física son dos comunidades separadas pero con un lenguaje común. Atiyah agregó que las dos comunidades tendían a comunicarse muy bien hasta comienzos del siglo 20, pero luego se volvieron muy independientes. Sin embargo, en la década pasada, a pesar del continuo crecimiento del efecto torre de babel en la ciencia, algunas formas de comunicación fueron desarrolladas con un fenómeno opuesto, lo que puede parecer un efectividad irrazonable de la física en las matemáticas, incluyendo campos abstractos tales como la geometría algebraica. Ahora, si recordamos que las matemáticas surgieron como una abstracción en nuestro entendimiento del mundo físico ninguna efectividad debería ser irrazonable. Aquí veremos que la deformación por cuantización es un ejemplo perfecto de ambos.

Los experimentos fenomenológicos parecen causar una paradoja y contradicen teorías aceptadas. Eventualmente una nueva constante aparece y el formalismo es modificado. Entonces las estructuras adjuntas (simetrías, observables, estados, etc.) deforman la estructura inicial. A saber, tenemos una nueva estructura la cual en el límite, cuando el nuevo parámetro tiende a cero, coincide con el formalismo previo. La única pregunta es, en que categoría debemos buscar deformaciones?. Usualmente la física es bastante conservativa y si se comienza por ejemplo con la categoría de álgebras de Lie, se tiende a deformar en la misma categoría, pero hay algunos ejemplos importantes de generalizaciones de este principio (grupos cuánticos son deformaciones de álgebras de Hopf).

El descubrimiento de una tierra no plana puede ser el primer ejemplo de este fenómeno. Aún mas cercano, la paradoja proveniente del experimento de Michelson y Morley (1887) [20] fue resuelto en (1905) por Einstein con la teoría especial de relatividad [12]: allí el grupo geométrico simétrico Galileano de la mecánica Newtoniana es deformado al grupo de Poincaré, siendo la nueva constante fundamental C^{-1} donde C es la velocidad de la luz en el vacío. Alrededor del mismo tiempo la teoría de las superficies de Riemann puede ser considerada como uno de los primeros ejemplos matemáticos de deformaciones, aun si las deformaciones se convirtieran sistemáticamente estudiadas en la literatura matemática solo a finales de los 50's con el profundo trabajo de Kodaira [17] en deformaciones de estructuras analíticas complejas. Ahora, cuando se tiene una acción sobre una estructura geométrica, es natural que se ensaye y se linealice induciendo de esto una acción sobre un álgebra de funciones sobre dicha estructura. Esto es lo que implícitamente Gerstenhaber hizo en 1963 [15] con su definición y a través del estudio de deformaciones de anillos y álgebras. Esto es en el sentido de Gerstenhaber que el grupo Galileano es deformado por el grupo de Poincaré; esta operación es la inversa de la noción de grupo de contracción inducida 10 años atrás, empíricamente, por Inönü y Wingner [16]. Este hecho desencadenó un fuerte interés por la teoría de deformaciones en Francia junto con un número de físicos teóricos incluyendo a Flato quien acababa de llegar de la escuela de Racah y sabía también la efectividad de la simetría en problemas físicos.

En 1900 como un último recurso para explicar la radiación de cuerpo negro, Planck propone la hipótesis cuántica [22]: la energía de la luz no es emitida continuamente, pero en cuántums proporcionalmente a su frecuencia. El escribió \hbar para la constante de proporcionalidad la cual lleva su nombre. Esta situación paradójica tuvo un comienzo de una base teórica cuando, nuevamente en 1905, Einstein vino con la teoría del efecto fotoeléctrico. Alrededor de 1920 el príncipe Louis de Broglie fue presentado al efecto fotoeléctrico [24] junto con las relaciones Planck-Einstein y la teoría de la relatividad en el laboratorio de su hermano mayor, Maurice Duc de Broglie. Esto lo condujo en 1926, [9] al descubrim-

iento de las ondas de dualidad y partículas, las cuales el describió en su tesis publicada en 1924 [8] a la que el llamo Mecánica ondulatoria. Físicos Alemanes y Austriacos, en particular, Hermann Weyl, Werner Heisenberg y Eerwin Schrodinger, transformaron esto en la mecánica cuántica que nosotros conocemos donde las observaciones son operaciones en los espacios de Hilbert de funciones de ondas.

Intuitivamente, la mecánica clásica es el límite donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ tiende a cero en la mecánica cuántica. Pero como puede esto estar realizado cuando en mecánica clásica los observables son funciones sobre espacios vectoriales y no operadores? La deformación filosófica promovida por Plato mostro el camino: primero tenía que buscar deformaciones de álgebras de funciones sobre variedades de Poisson dotado con el soporte de Poisson y realizada en forma autónoma, mecánica cuántica allí. Esto requiere, como un preliminar, un estudio detallado de los espacios de cohomología correspondientes. Como primer paso en 1974, las cocadenas fueron asumidas 1-diferenciables [14](dados por operadores bidiferenciales de orden (1,1)). Esto fué una pequeña aproximación de la solución la cuál inspiró a Vey quien fué capaz en 1975 [25], por medio de variedades simplécticas desapareciendo el tercer número de Betti, para probar la existencia de tales deformaciones diferenciables haciendo eso, el redescubrio una formula para el corchete deformado, el corchete de Poisson del seno, que el no sabía que Moyal lo habia obtenido en un contexto totalmente diferente en 1949 [21]. El obstáculo técnico, una solución de la cual, en un contexto algebraico, pudo ultimamente ser remontada a un resultado oculto en un paper de 1962, fué resuelto y la deformación por cuantización pudo ser desarrollada en 1976-1978. La cuantización es una deformación del producto asociativo y conmutativo de observables clásicos manejados por el corchete de Poisson, conocido como un producto estrella.

En un contexto en el cual entonces parecia no tener relación con la teoría de deformación, los operadores pseudodiferenciables fueron también introducidos a finales de los 50's y se convirtieron en un tema polémico en matemáticas interesante gracias a la publicación

en 1963 de los primeros teoremas indexados por Atiyah y Singer [1], los cuales expresaban una definición analítica de índice en terminos topológicos. La composición de simbolos pseudodiferenciables, un ingrediente importante en la prueba, es un ejemplo no trivial de un producto estrella, pero este hecho fue visto solo años después de que la deformación por cuantización fuera introducida.

Ha habido varias generalizaciones de los teoremas originales incluyendo versiones algebraicas desarrolladas en particular por Connes en el contexto de la geometría no conmutativa, una continuación natural de sus trabajos importantes de los 70's en álgebras de operadores que fueron motivadas por problemas físicos. Esto fue desarrollado poco después de la aparición de la deformación por cuantización usando cíclicos en lugar de la simple cohomología de Hochschild. Si se añade un producto estrella la noción de traza, la cual en este caso proviene de la integración sobre variedades sobre las cuales las funciones son definidas se pueden obtener productos estrellas cerrados, clasificado por la cohomología cíclica que provee otros ejemplos de álgebras cayendo en el marco de la geometría no conmutativa. Ahora el isomorfismo de Gelfand provee una realización de un álgebra conmutativa como un álgebra de funciones sobre una variedad esto quiere decir su espectro.

Grupos de álgebras de Lie simples y álgebras son rígidos para la noción Gerstenhaber de deformación pero si se va a la categoría de álgebras de Hopf, ellas pueden ser deformadas. Esto es lo que Drinfeld notó con una noción a la cual el otorgó el espectacular nombre de grupo cuántico, considerando productos estrella deformando el producto en un álgebra de Hopf de funciones sobre grupos de Lie teniendo una estructura de Poisson compatible.

En la actualidad Maxim Kontsevich ha venido trabajando desde 1995 en el Institut des Hautes Études Scientifiques (Francia) en el uso sistemático de deformaciones de estructuras algebraicas conocidas y en la introducción de nuevas tales como las "categorías

trianguladas” las cuales se han convertido relevantes en muchas areas tales como el procesamiento de imagenes. Junto con Kontsevich, Alain Connes, el fundador de la geometría conmutativa y Y. Soibelman, de Kansas State University, Estados Unidos, han trabajado en resultados importantes sobre deformaciones de álgebras sobre Operads, la conjetura de Deligne, deformación por cuantización en variedades de Poisson y variedades complejas. También Nikolai Neumaier y Stefan Waldmann, de Albert Ludwigs University of Freiburg, Alemania, se encuentran trabajando en deformación por cuantización de estructuras de Poisson asociadas a algebroides de Lie.

Capítulo 1

Preliminares

Para poder abordar el tema principal de estudio del presente trabajo, las funciones simétricas cuánticas, es necesario enunciar algunos conceptos algebraicos y geométricos importantes, los cuales se definen en este capítulo.

Definición 2. Una M -variedad es un espacio topológico Hausdorff localmente homeomorfo a \mathbb{R}^m , es decir, todo punto $a \in M$, posee un entorno homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^m .

Definición 3. Una carta para una M -variedad, es un par (κ, U) donde U es un abierto de M y $\kappa : U \rightarrow \kappa(U) \subset \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo, $\kappa \in C^\infty$.

Dado un elemento $p \in M$, una carta en p es un par (κ, U) en M talque $p \in U$, $\kappa(p) \in \mathbb{R}^m$.

Definición 4. Una colección de cartas cuyo dominio cubre M es llamado un atlas A para M

$$A = \{((U_i), \kappa_i)_{i \in N} \text{ tal que } \bigcup_i (U_i) = M\}.$$

Lema 5. Si A es un atlas sobre M , entonces A esta contenido en un único atlas maximal A' de M .

Definición 6. Una variedad C^∞ , variedad diferenciable o variedad suave, es un par (M, A) , donde M es una variedad y A es un atlas maximal.

A continuación se introducirán algunos conceptos básicos de álgebras de Lie los cuales servirán de soporte teórico para la definición de las variedades de Poisson, además de proporcionar algunas bases para el desarrollo del ejemplo del dual del álgebra de Lie, visto como un ejemplo de una variedad de Poisson no simpléctica, el cual será abordado en la parte final del presente capítulo.

Definición 7. *Un espacio vectorial V sobre un cuerpo K , con una operación $V \times V \longrightarrow V$, denotada $(x, y) \longmapsto [x, y]$ y llamada corchete o conmutador de x e y , es llamada un álgebra de Lie sobre F si los siguientes axiomas se satisfacen:*

1. *La operación corchete es bilineal.*
2. *$[x, x] = 0$, para todo $x \in V$.*
3. *$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.*

*El axioma 3. es llamado la **identidad de Jacobi**. Nóte que 1. y 2. aplicados a $[x+y, x+y]$, implica anticomutatividad o antisimetría: $2' \cdot [x, y] = -[y, x]$. Luego, se define el corchete de Lie como la aplicación*

$$\begin{aligned} [,] : V \times V &\longrightarrow V \\ (a, b) &\longmapsto [a, b] \end{aligned}$$

que satisface 1., 2'. y 3.

Ejemplo 8. *Si A es un álgebra asociativa, entonces A es un álgebra de Lie con corchete*

$$[a, b] = ab - ba, \text{ para todo } a, b \in A.$$

En lo que sigue se definirá una variedad de Poisson y se enunciarán sus propiedades con algunos ejemplos importantes. Además se asumirá K como un cuerpo de característica cero.

Definición 9. Un álgebra conmutativa A sobre un cuerpo K es llamada un álgebra de Poisson si esta equipada con una operación bilineal $\{ , \} : A \otimes A \longrightarrow A$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

1. A es un álgebra de Lie con el corchete $\{ , \}$.
2. La regla de Leibniz se satisface, i.e. para cualesquiera $a, b, c \in A$, tenemos

$$\{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b.$$

También, si estas condiciones se satisfacen, la operación $\{ , \}$ es llamada corchete de Poisson.

Definición 10. Sea M una variedad suave. Se dice que M es una variedad de Poisson suave si el álgebra $A = C^\infty(M)$ esta equipada con un corchete de Poisson.

Ejemplo 11. \mathbb{R}^2 es una variedad de Poisson con

$$\begin{aligned} \{ , \} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \otimes C^\infty(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2) \\ (f, g) &\longmapsto \{f, g\} \end{aligned}$$

donde el corchete se define como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Es necesario verificar que el corchete dado es un corchete de Lie. Dadas $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ cualesquiera se verifica:

- *Bilinealidad:*

$$\begin{aligned}
\{f + \lambda g, h\} &= \frac{\partial}{\partial x}(f + \lambda g) \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda g) \frac{\partial h}{\partial x} \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \right] \frac{\partial h}{\partial y} - \left[\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right] \frac{\partial h}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \\
&= \{f, h\} + \lambda \{g, h\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{f, g + \lambda h\} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}(g + \lambda h) - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}(g + \lambda h) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \left[\frac{\partial g}{\partial y} + \lambda \frac{\partial h}{\partial y} \right] - \frac{\partial f}{\partial y} \left[\frac{\partial g}{\partial x} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x} \right] \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \\
&= \{f, g\} + \lambda \{f, h\}.
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
\{f, f\} &= 0 \\
\{f, f\} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

■ $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$, *entonces*

$$\begin{aligned}
&\left\{ f, \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right\} + \left\{ g, \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + \left\{ h, \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right\} = \\
&\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \\
& \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \\
& \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \\
& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - \\
& \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

Despues de verificar que el corchete es un corchete de Lie, se debe probar que la regla de Leibnitz se satisface.

$$\begin{aligned}
\{fg, h\} &= f\{g, h\} + \{f, h\}g \\
\{fg, h\} &= \frac{\partial}{\partial x}(fg) \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(fg) \frac{\partial h}{\partial x} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} g + f \frac{\partial g}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \\
&= f \left(\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\
&= f\{g, h\} + \{f, h\}g.
\end{aligned}$$

El ejemplo que se expondrá a continuación es de especial relevancia, debido a que entorno a este se desarrollaran los resultados principales de la deformación por cuantización del álgebra de Weyl, pieza fundamental en la obtención de los principales resultados en la programación en Maple.

Ejemplo 12. \mathbb{R}^{2n} es una variedad de Poisson con corchete dado por:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

■ *Bilinealidad:*

$$\begin{aligned}
 \{f, g + \lambda h\} &= \{f, g\} + \lambda\{f, h\} \\
 \{f, g + \lambda h\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} (g + \lambda h) - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (g + \lambda h) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + \lambda \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \\
 &= \{f, g\} + \lambda\{f, h\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{f + \lambda g, h\} &= \{f, h\} + \lambda\{g, h\} \\
 \{f + \lambda g, h\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f + \lambda g) \frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial y_i} (f + \lambda g) \frac{\partial h}{\partial x_i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \\
 &= \{f, h\} + \lambda\{g, h\}.
 \end{aligned}$$

■ *Debemos verificar,*

$$\{f, f\} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \{f, f\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial y_i} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

■ *Identidad de Jacobi*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \text{ entonces}$$

- *Propiedad de Leibnitz*

$$\begin{aligned}
\{fg, h\} &= f\{g, h\} + \{f, h\}g \\
\{fg, h\} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial(fg)}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial y_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} g - f \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \\
&= f \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) g \\
&= f\{g, h\} + \{f, h\}g.
\end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, apoyándose en el dual del álgebra de Lie V^* , se puede definir un ejemplo bastante importante de variedades de Poisson, el cual, es una variedad de Poisson no simpléctica.

- Dual de un álgebra de Lie.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{R} (o \mathbb{C}). Una estructura lineal de Poisson sobre V es una estructura de Poisson sobre V para la cual, el corchete de Poisson de dos funciones lineales es nuevamente una función lineal. En este caso, retringiendonos a funciones lineales, la operación $(f, g) \mapsto \{f, g\}$ da paso a una operación $[\cdot, \cdot] : V^* \times V^* \longrightarrow V^*$, la cual es una estructura de álgebra de Lie sobre V^* , donde V^* es el espacio lineal dual de V .

Recíprocamente, cualquier estructura de álgebra de Lie sobre V^* determina una estructura de Poisson lineal sobre V . De hecho, considerese un álgebra de Lie de dimensión finita $(V, [\cdot, \cdot])$. Para cualquier función lineal $f : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donde

$\bar{f} \in (V^*)^*$ y $(V^*)^* \simeq V$. Si f y g son dos funciones lineales sobre V^* , entonces escribimos $\{f, g\}(\alpha) = \langle \alpha, [\bar{f}, \bar{g}] \rangle$ para todo α en V^* . Si se escoge una base lineal $\{e_1, \dots, e_n\}$ con $[e_i, e_j] = \sum c_{ij}^k e_k$, entonces se tiene una base para el dual $\{x_1, \dots, x_n\}$ que cumple $\{x_i, x_j\} = \sum c_{ij}^k x_k$ donde x_l es una función tal que $\bar{x}_l = e_l$. Con base en lo anterior, a partir de la estructura de álgebra de Lie en el dual de la misma, se obtiene una estructura de Poisson sobre V^* . Esta estructura de Poisson puede ser

definida intrinsecamente por la fórmula

$$\{f, g\}(\alpha) = \langle \alpha, [df(\alpha), dg(\alpha)] \rangle = \alpha([df(\alpha), dg(\alpha)])$$

donde el corchete $[,]$ representa el corchete de Lie. Las funciones $df(\alpha)$ y $dg(\alpha)$ son elementos de $(V^*)^*$ los cuales son elementos de V por el isomorfismo existente entre V y $(V^*)^*$.

Capítulo 2

Funciones Simétricas Clásicas

Luego de enunciar el concepto de una variedad de Poisson en el capítulo anterior, es importante presentar otra serie de definiciones referentes a acciones de grupos sobre conjuntos y polinomios simétricos, las cuales ayudarán a entender e interpretar los resultados obtenidos de los algoritmos programados en Maple, que giran en torno a la deformación por cuantización del orbifold de Poisson \mathbb{R}^{2n}/S_n .

2.1. Acciones de Grupos sobre Conjuntos

Podemos definir la acción de un grupo sobre un conjunto donde G es un grupo finito, infinito o de Lie.

Definición 13. *Podemos definir la acción de un grupo G sobre un conjunto S como una aplicación de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \cdot : G \times S &\rightarrow S \\ (g, s) &\mapsto g \cdot s \end{aligned}$$

la cual satisface las siguientes propiedades:

1. $g_1 \cdot (g_2 \cdot s) = (g_1 g_2) \cdot s$ para $g_1, g_2 \in G, s \in S$.
2. $e \cdot s = s$, para $s \in S$.

Cuando tal acción es dada, se dice que G actúa en el conjunto S .

Basados en la definición anterior de la acción de un grupo G sobre un conjunto S , se enunciarán dos resultados básicos importantes de la teoría de grupos, los cuales son el concepto de órbita y el concepto de grupo de isotropía o estabilizador.

Definición 14. Sea un grupo G que actúa sobre un conjunto S

$$\begin{aligned} \cdot : G \times S &\rightarrow S \\ (g, s) &\mapsto g \cdot s. \end{aligned}$$

Dado $s \in S$, consideramos

$$\bar{s} = \{g \cdot s : g \in G\}$$

como la órbita de $s \in S$.

Definición 15. Sea $x \in S$. El conjunto

$$G_s = \{g \in G : g \cdot s = s\}$$

es un subgrupo de G , llamado grupo de isotropía de $s \in S$ o estabilizador de s en G .

Ejemplo 16. El grupo S_n actúa sobre \mathbb{R}^n .

Sea S_n actuando sobre \mathbb{R}^n por permutación de coordenadas: para $\sigma \in S_n$ y $\mathbf{v} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, sea $\sigma \cdot \mathbf{v} = (c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(n)})$. Para $\alpha \in S_n$ estableciendo $d_i = c_{\sigma(i)}$, entonces $\sigma \cdot \mathbf{v} = (d_1, \dots, d_n)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\sigma \cdot \mathbf{v}) &= (d_{\alpha(1)}, \dots, d_{\alpha(n)}) \\ &= (c_{\sigma(\alpha(1))}, \dots, c_{\sigma(\alpha(n))}) \\ &= (c_{(\sigma\alpha)(1)}, \dots, c_{(\sigma\alpha)(n)}) \\ &= (\sigma\alpha) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

y el orden de la multiplicación se invierte. Luego, el hecho que la acción de S_n sobre \mathbb{R}^n no es una acción del todo. Para corregir este inconveniente, es necesario redefinir

$\sigma \cdot \mathbf{v} = (c_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, c_{\sigma^{-1}(n)})$. Entonces;

$$\begin{aligned}
\sigma \cdot (\alpha \cdot \mathbf{v}) &= \sigma \cdot (\alpha \cdot (c_1, \dots, c_n)) \\
&= \alpha \cdot (c_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, c_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&= (c_{\alpha^{-1}(\sigma^{-1}(1))}, \dots, c_{\alpha^{-1}(\sigma^{-1}(n))}) \\
&= (c_{(\alpha^{-1}\sigma^{-1})(1)}, \dots, c_{(\alpha^{-1}\sigma^{-1})(n)}) \\
&= (c_{(\sigma\alpha)^{-1}(1)}, \dots, c_{(\sigma\alpha)^{-1}(n)}) \\
&= (\sigma\alpha) \cdot (c_1, \dots, c_n) \\
&= (\sigma\alpha) \cdot (\mathbf{v})
\end{aligned}$$

obteniendo así una acción genuina de S_n sobre \mathbb{R}^n .

Ejemplo 17. S_n actúa sobre $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Sea $\sigma \in S_n, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ donde $f(\mathbf{v}) = (f(c_1), \dots, f(c_n))$, se establece

$\sigma f(\mathbf{v}) = f(\sigma^{-1}\mathbf{v}) = f(c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(n)})$. Para $\alpha \in S_n$ se calcula $\alpha \cdot (\sigma \cdot f(\mathbf{v}))$

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\sigma \cdot f(\mathbf{v})) &= \sigma \cdot f(\alpha^{-1} \cdot (c_1, \dots, c_n)) \\
&= \sigma \cdot (f(c_{\alpha(1)}, \dots, c_{\alpha(n)})) \\
&= f(\sigma^{-1} \cdot (c_{\alpha(1)}, \dots, c_{\alpha(n)})) \\
&= f(c_{\sigma(\alpha(1))}, \dots, c_{\sigma(\alpha(n))}) \\
&= f(c_{(\sigma\alpha)(1)}, \dots, c_{(\sigma\alpha)(n)}) \\
&= f((\alpha\sigma)^{-1} \cdot (c_1, \dots, c_n)) \\
&= (\alpha\sigma) \cdot f(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

2.2. Álgebra de Funciones Simétricas

Los resultados logrados en este trabajo se obtuvieron trabajando sobre las funciones simétricas cuánticas, específicamente, en las funciones simétricas monomiales. Por este motivo, es necesario introducir el concepto de funciones simétricas y sus clases, para

así poder contextualizar un poco más el campo donde se ha trabajado. Se comenzará con una notación referente a particiones, las cuales son sucesiones decrecientes finitas λ de números naturales $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 0$. Los enteros $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ son las particiones. La longitud $l(\lambda)$ designa el número de particiones distintas de cero, y el peso $|\lambda|$ designa la suma de partes. Podemos dotar el conjunto de particiones con un orden parcial natural definido por la relación de inclusión por los diagramas de Ferrer [7]. Esto es de mayor utilidad, sin embargo, para usar el orden parcial dado por el dominio, según el cual $\lambda \geq \mu$ si las dos particiones tienen el mismo peso y para todos los enteros i , la desigualdad

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$$

se satisface.

Antes de enunciar la definición formal de los polinomios simétricos o funciones simétricas sobre un cuerpo K con característica 0, es pertinente aclarar lo siguiente.

En la teoría clásica de invariantes es común denotar por R^G al subespacio homogéneo de los polinomios G -invariantes compuesto de polinomios $f(\mathbf{x})$ tales que

$$\gamma \cdot f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \text{ para todo } \gamma \text{ en } G.$$

Con base en lo anterior, los polinomios S_n -invariantes corresponden a los polinomios simétricos, los cuales son polinomios $f(\mathbf{x})$ tales que, para cada permutación $\sigma \in S_n$ del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ se tiene

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

El conjunto de polinomios simétricos es denotado por $R_d^{S_n}$ donde $R = \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ y d es la dimensión de R^{S_n} , que corresponde al número de particiones de d de a lo sumo n partes. Una base lineal de $R_d^{S_n}$ esta dada por los siguientes polinomios simétricos.

Definición 18. (*Polinomios simétricos monomiales*)

Se escribe $m_\lambda = m_\lambda(\mathbf{x})$ para la suma de todos los monomios \mathbf{x}^a para los cuales, a varía en el conjunto de reordenamientos en el vector de longitud n $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$ donde $m_\lambda = 0$ si $l(\lambda) > n$.

Por ejemplo

$$m_{211}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2.$$

Un segundo conjunto clásico de polinomios simétricos es el conjunto de los polinomios simétricos homogéneos los que se definen a continuación como.

Definición 19. *Un polinomio simétrico homogéneo es el polinomio consistente de la suma de todos los monomios h_d de un grado dado donde*

$$h_d = h_d(\mathbf{x}) = \sum_{|a|=d} \mathbf{x}^a$$

o de una forma mas general,

$$h_d = \sum_{\lambda \vdash d} m_\lambda$$

la cual da una expresión de h_d en términos de la base de funciones simétricas monomiales.

También se puede expresar h_d por medio de su función generatriz

$$H(\zeta) := \sum_{d \geq 0} h_d \zeta^d = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i \zeta}$$

donde es necesario que $h_0 = 1$.

Definición 20. *(Funciones simétricas elementales)*

Cuando $\lambda = (1^n)$, m_λ es el k -ésimo polinomio simétrico elemental e_k :

$$e_k = m_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

Para $k = 0$ se define e_0 como 1. La función e_k tiene la función generatriz

$$E(\zeta) = \sum_{k \geq 0} e_k \zeta^k = \prod_{i=1}^n (1 + x_i \zeta).$$

Capítulo 3

Deformación por Cuantización

En este Capítulo se enunciarán los principales resultados de la deformación por cuantización, utilizados para obtener los resultados más importantes de los algoritmos logrados por la programación en Maple. Dichos resultados están básicamente apoyados en la deformación por cuantización de \mathbb{R}^{2n}/S_n objeto matemático isomorfo al algebra de Weyl $W = \mathbb{C}\langle x, y \rangle[[\hbar]]/\langle yx - xy - \hbar \rangle$, algebra donde se encuentran las funciones simétricas cuánticas, motivación principal de estudio de este trabajo.

Definición 21. Sea O una orbivariiedad global, es decir $O = M/G$ donde G es un grupo infinito. Decimos que O es una orbivariiedad de Poisson si $C^\infty(M)^G$ es un álgebra de Poisson. Escribimos $C^\infty(M/G)$ para denotar $C^\infty(M)^G$

Definición 22. Sea una variedad de Poisson $(M, \{, \})$. Una deformación formal (deformación por cuantización) del álgebra de funciones suaves sobre M es un producto estrella asociativo

$$\star : C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes_{\mathbb{R}[[\hbar]]} C^\infty(M)[[\hbar]] \longrightarrow C^\infty(M)[[\hbar]] \text{ tal que}$$

- a. $f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(f, g)\hbar^n$, donde $B_n(-, -)$ son operadores bi-diferenciales.
- b. $f \star g = fg + \frac{1}{2}\{f, g\}\hbar + O(\hbar^2)$, donde $O(\hbar^2)$ representa términos de orden \hbar^2 .

Definición 23. Dado un grupo finito K actuando sobre $(C^\infty(M), \star)$ por automorfismos, se llama al álgebra $(C^\infty(M)[[\hbar]], \star)_K \cong (C^\infty(M)[[\hbar]], \star)^K$ el álgebra de funciones K -simétricas cuánticas sobre M .

En [18] un \star -producto canónico ha sido construido para cualquier variedad de Poisson. Para una variedad (\mathbb{R}^m, α) con bivector de Poisson α , el \star -producto está dado por la fórmula

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Gamma \in G_n} w_\Gamma B_{\Gamma, \alpha}(f, g),$$

donde G_n es una colección de grafos admisibles donde cada uno de los cuales tiene n aristas y w_Γ son constantes (independientes de la variedad de Poisson).

El ejemplo más simple de una deformación por cuantización es el producto \star de Moyal que se introduce en 1940 en [21]. Moyal obtiene una deformación por cuantización para $(C^\infty(\mathbb{R}^d), \{ , \})$ con bivector de Poisson dado por

$$\alpha = \sum_{i,j} \alpha^{ij} \partial_i \wedge \partial_j, \quad \alpha^{ij} = -\alpha^{ji} \in \mathbb{R}$$

donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ es la derivada parcial en la dirección de la coordenada $x_i, i = 1, \dots, d$. La fórmula para el producto de Moyal es la siguiente

$$\begin{aligned} f \star g &= fg + \hbar \sum_{i,j} \alpha^{ij} \partial_i(f) \partial_j(g) + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{i,j,k,l} \alpha^{ij} \alpha^{kl} \partial_i \partial_k(f) \partial_j \partial_l(g) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n} \prod_{k=1}^n \alpha^{i_k j_k} \left(\prod_{k=1}^n \partial_{i_k} \right) (f) \left(\prod_{k=1}^n \partial_{j_k} \right) (g). \end{aligned}$$

Con la finalidad de construir un producto estrella canónico \star sobre una variedad de Poisson, Kontsevich [18] introduce una clase especial de grafos G_n etiquetados y orientados de la siguiente manera. Para describir terminos proporcionales a \hbar^n para cualquier entero $n \geq 0$, se introducirá una clase especial de grafos orientados marcados G_n .

Definición 24. *Un grafo(orientado) Γ es un par (V_Γ, E_Γ) de dos conjuntos finitos tales que E_Γ es un subconjunto de $V_\Gamma \times V_\Gamma$.*

Los elementos de V_Γ son vertices de Γ , los elementos de E_Γ son aristas de Γ . Si $e = (v_1, v_2) \in E_\Gamma \subset V_\Gamma \times V_\Gamma$ es una arista entonces se dice que e comienza en v_1 y termina en v_2 .

En la definici3n usual de grafos se admiten grafos infinitos y tambien grafos con multiples aristas. Aca no se tendr3n en cuenta tales estructuras y se usar3 una terminolog3a simplificada.

Se dice que un grafo marcado Γ perteneces a G_n si

1. Γ tiene $n + 2$ vertices y $2n$ aristas,
2. el conjunto de vertices V_Γ es $\{1, \dots, n\} \sqcup \{L, R\}$, donde L, R son solo dos simbolos(May3sculas que significan Left y Right),
3. las aristas de Γ son marcadas por los s3mbolos $e_1^1, e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^1, e_n^2$,
4. para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ las aristas marcadas por e_k^1 y e_k^2 comienzan en el v3rtice k,
5. para cualquier $v \in V_\Gamma$ el par ordenado (v, v) no es una arista de Γ .

El conjunto G_n es finito, tiene $(n(n+1))^n$ elementos para $n \geq 1$ y un elemento para $n = 0$.

A continuaci3n se mostrar3 un ejemplo para $n = 3$ donde la lista de aristas es

$$(e_1^1, e_1^2, e_2^1, e_2^2, e_3^1, e_3^2) = ((1, L), (1, R), (2, R), (2, 3), (3, L), (3, R)).$$

En la figura de Γ se escriben indices independientes $1 \leq i_1, \dots, i_6 \leq d$ para las aristas en lugar de nombrarlas como e_\star^* . El operador $B_{\Gamma, \alpha}$ correspondiente a este grafo es

$$(f, g) \mapsto \sum_{i_1, \dots, i_6} \alpha^{i_1 i_2} \alpha^{i_3 i_4} \partial_{i_4} (\alpha^{i_5 i_6}) \partial_{i_1} \partial_{i_5} (f) \partial_{i_2} \partial_{i_3} \partial_{i_6} (g).$$

El Teorema 25 muestra como el grupo de automorfismos de $(C^\infty(M)[[\hbar]], \star)$ surge de una forma natural.

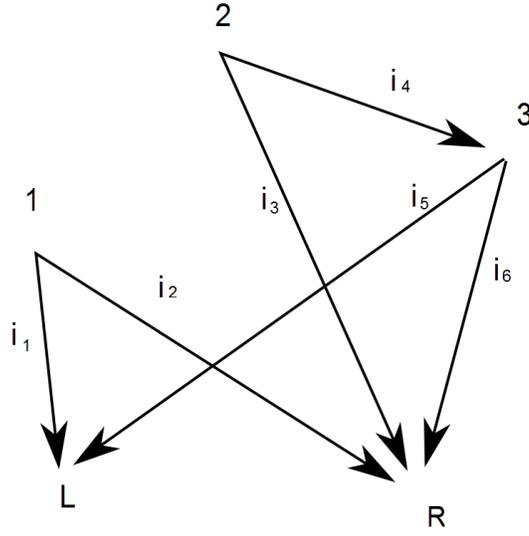


Figura 3.1: Ejemplo $\Gamma \in G_3$.

Teorema 25. *Supongase que una estructura de Poisson $\{-, -\}$ es dada sobre \mathbb{R}^m y un grupo $K \subset S_n$ tales que $\{-, -\}$ es K -equivariante. Entonces K actua sobre $(C^\infty(\mathbb{R}^m)[[\hbar]], \star)$ por automorfismos.*

Corolario 26. *Bajo las condiciones anteriores, la regla del producto sobre $(C^\infty((\mathbb{R}^m)^n)[[\hbar]], \star)_K$ es dado por*

$$\bar{f} \star \bar{g} = \sum_{\sigma \in K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \left(\sum_{\Gamma} w_{\Gamma} \overline{B_{\Gamma, \alpha}(f, g \circ \sigma^{-1})} \right)$$

para todo $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)^n[[\hbar]]$

Definición 27. *Dada una variedad de Poisson $(\mathbb{R}^m, \{, \})$ y un subgrupo $K \subset S_n$, el álgebra de funciones simétricas cuánticas sobre $(\mathbb{R}^m)^n$ se define como $(C^\infty(\mathbb{R}^m)^n[[\hbar]], \star)_K \cong (C^\infty(\mathbb{R}^m)^n[[\hbar]], \star)^K$.*

Note que si (\mathbb{R}^m, α) es una variedad de Poisson entonces $(\mathbb{R}^m)^n$ es una variedad de

Poisson de una forma natural. Más aún, la estructura de Poisson sobre $(\mathbb{R}^m)^n$ es S_n -equivariante y por lo tanto K -equivariante para todo subgrupo K de S_n .

3.0.1. Álgebra de Weyl

El \star -producto de Kontsevich dado por la fórmula $f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Gamma \in G_n} w_{\Gamma} B_{\Gamma, \alpha}(f, g)$ es notoriamente difícil de calcular. Sin embargo, existen dos ejemplos en los cuales una definición explícita del producto estrella esta disponible.

- a. Si α es un corchete constante no degenerado sobre \mathbb{R}^{2n} , entonces el álgebra cuántica de funciones polinomiales sobre \mathbb{R}^{2n} , i.e., $(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{2n}][[\hbar]], \star)$ es isomorfo a $W \otimes_{\mathbb{C}[[\hbar]]} \dots \otimes_{\mathbb{C}[[\hbar]]} W$, donde W es el álgebra de Weyl, [4].
- b. Si α es un corchete de Poisson Lineal en \mathbb{R}^n , entonces (\mathbb{R}^n, α) es isomorfo a la variedad de Poisson V^* para algún álgebra de Lie V . En este caso el álgebra cuántica de funciones polinomiales sobre V^* , es decir, $(\mathbb{C}[V^*][[\hbar]], \star)$ es isomorfo al álgebra envolvente universal $U_{\hbar}(V)$ de V , [6].

Es pertinente aclarar que solo el primer ejemplo es el que será considerado para el desarrollo de este trabajo.

El álgebra $\mathbb{C}\langle x, y \rangle[[\hbar]]/\langle yx - xy - \hbar \rangle$ es llamada el álgebra de Weyl, la cual es isomorfa a la deformación por cuantización canónica de $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$ si se consideran sólo las funciones polinomiales sobre \mathbb{R}^2 .

Antes de introducir la regla general de multiplicación, es necesario definir el álgebra de coinvariantes, definición que se dará a continuación.

Definición 28. *Dada un álgebra A y un grupo G que actúa sobre dicha álgebra, se define como*

$$A_G = A/\langle a - g \cdot a : a \in A, g \in G \rangle$$

al álgebra de coinvariantes, donde a su vez, en A_G se satisface la relación

$$\bar{a}\bar{b} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{a(g \cdot b)}.$$

El álgebra de coinvariantes A_G es una subálgebra de A y además, A_G es isomorfa al álgebra de invariantes, A^G .

Regla General de Multiplicación

Para cada S_n considere el functor $Sym^n : k - alg \rightarrow k - alg$ desde la categoría de k -álgebras asociativas en si misma definida sobre objetos como sigue: si A es una k -álgebra, entonces $Sym^n(A)$ denota el álgebra cuyo espacio vectorial es

$$Sym^n(A) = (A^{\otimes n}) / \langle a_1 \otimes \cdots \otimes a_n - a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)} : a_i \in A, \sigma \in S_n \rangle$$

El siguiente teorema da una regla general para el producto de m elementos en $Sym^n(A)$.

Teorema 29. *Para cualquier $a_{ij} \in A$ la siguiente identidad se cumple en $Sym^n(A)$*

$$(n!)^{m-1} \prod_{i=1}^m \left(\overline{\bigotimes_{j=1}^n a_{i,j}} \right) = \sum_{\sigma \in \{id\} \times (S_n)^{m-1}} \overline{\bigotimes_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^m a_{i\sigma_i^{-1}(j)} \right)}$$

Para la siguiente definición, es pertinente establecer cierta notación, para así poder comprender la fórmula presente en dicha definición. Primero es necesario ordenar las letras de álgebra de Weyl como sigue: $x < y < \hbar$. Asumiendo que $A_i = (a_i, b_i) \in \mathbb{N}^2$ para $i \in [n] = \{1, \dots, n\}$ es dada, se establece $A = (A_1, \dots, A_n) \in (\mathbb{N}^2)^n$, $X^{A_i} = x^{a_i} y^{b_i}$ y sea $|\cdot| : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ como las funciones tales que $|x| := \sum_{i=1}^n x_i$ para todo $x \in \mathbb{N}^n$.

Dado $x \in \mathbb{N}^n$ e $i \in \mathbb{N}$, se denota por $x_{<i}$ el vector $(x_1, \dots, x_{i-1}) \in \mathbb{N}^{i-1}$, por $x_{\leq i}$ el vector $(x_1, \dots, x_i) \in \mathbb{N}^i$ y por $x_{>}$ el vector $(x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$. Se escribe $a \vdash n$ si $a \in \mathbb{N}^k$ para algún k y $|a| = n$.

Definición 30. *Las coordenadas normales $N(A, k)$ de $\prod_{i=1}^n X^{A_i} \in W$ son definidas a través de la identidad*

$$\prod_{i=1}^n X^{A_i} = \sum_{k=0}^{\min} N(A, k) x^{|a|-k} y^{|b|-k} \hbar^k,$$

para $0 \leq k \leq \min = \min(|a|, |b|)$. Para $k \geq \min$, igualamos $N(A, k)$ a 0.

Teorema 31. Sean A, k como en la Definición 30, la siguiente identidad se cumple.

$$N(A, k) = \sum_{p \vdash k} \binom{b}{p} \prod_{i=1}^{n-1} (|a_{>i}| - |p_{>i}|)_{p_i}, \text{ donde } p \in \mathbb{N}^{n-1}.$$

El Ejemplo 32 muestra algunos resultados importantes y novedosos, objetivo principal de este trabajo para los objetos $\prod_{i=1}^n X^{A_i}$ dados en la Definición 30. Dichos resultados se lograron gracias a la programación de varias rutinas en la herramienta matemática Maple.

Ejemplo 32.

1. Si $A = (A_1, A_2, A_3)$ donde $A_1 = (1, 1) = A_2 = A_3$ entonces

$$xyxyxy = x^3y^3 + 3x^2y^2\hbar + xy\hbar^2.$$

2. Si $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ donde $A_1 = (4, 9), A_2 = (6, 7), A_3 = (2, 5), A_4 = (1, 1)$

entonces se tiene la siguiente identidad.

$$\begin{aligned} x^4y^9x^6y^7x^2y^5x^1y^1 &= x^{13}y^{22} + 107x^{12}y^{21}\hbar + 4660x^{11}y^{20}\hbar^2 + 107520x^{10}y^{19}\hbar^3 + \\ &1433880x^9y^{18}\hbar^4 + 11319840x^8y^{17}\hbar^5 + 52073280x^7y^{16}\hbar^6 + 131846400x^6y^{15}\hbar^7 + \\ &162086400x^5y^{14}\hbar^8 + 70761600x^4y^{13}\hbar^9. \end{aligned}$$

3. Si $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ donde $A_1 = (2, 8), A_2 = (3, 3), A_3 = (5, 1), A_4 = (6, 2),$

$A_5 = (7, 8)$ entonces se tiene la siguiente identidad.

$$\begin{aligned} x^2y^8x^3y^3x^5y^1x^6y^2x^7y^8 &= x^{23}y^{22} + 249x^{22}y^{21}\hbar + 27225x^{21}y^{20}\hbar^2 + 1726950x^{20}y^{19}\hbar^3 + \\ &70746750x^{19}y^{18}\hbar^4 + 1972052820x^{18}y^{17}\hbar^5 + 38395920780x^{17}y^{16}\hbar^6 + \\ &527663354400x^{16}y^{15}\hbar^7 + 5112071546400x^{15}y^{14}\hbar^8 + 34496787124800x^{14}y^{13}\hbar^9 + \\ &158257009310400x^{13}y^{12}\hbar^{10} + 473709710073600x^{12}y^{11}\hbar^{11} + \\ &863539893216000x^{11}y^{10}\hbar^{12} + 844430723136000x^{10}y^9\hbar^{13} + 327245510592000x^9y^8\hbar^{14}. \end{aligned}$$

3.0.2. Funciones Simétricas Cuánticas

Una de las principales incógnitas para trabajar la deformación por cuantización de \mathbb{R}^{2n}/S_n , no era tan solo saber como representar las funciones suaves sobre dicho objeto,

sino también encontrar una fórmula explícita para la regla del producto de dichas funciones. A continuación se enuncian los resultados que dan respuesta a dicho problema el cual fue resuelto por Díaz y Pariguan en [4].

El Teorema 33 brinda una fórmula explícita para el producto de m elementos de la n -ésima potencia simétrica de el álgebra de Weyl. Fije una matriz $A : [m] \times [n] \longrightarrow \mathbb{N}^2$, $(A_{ij}) = ((a_{ij}), (b_{ij}))$. Dada $\sigma \in S_n^m$ y $j \in [n]$, A_j^σ denota el vector $(A_{1\sigma_i^{-1}(j)}, \dots, A_{m\sigma_m^{-1}(j)}) \in (\mathbb{N}^2)^n$ y $X_j^{A_{ij}} = x_j^{a_{ij}} y_j^{b_{ij}}$ para $j \in [n]$. Sea $|A_j^\sigma| = (|a_j^\sigma|, |b_j^\sigma|)$ donde $|a_j^\sigma| = \sum_{i=1}^m a_{i\sigma_i^{-1}(j)}$ y $|b_j^\sigma| = \sum_{i=1}^m b_{i\sigma_i^{-1}(j)}$.

Teorema 33. *Para cualquier $A : [m] \times [n] \longrightarrow \mathbb{N}^2$, la siguiente identidad*

$$(n!)^{m-1} \prod_{i=1}^m \left(\overline{\prod_{j=1}^n X_j^{A_{ij}}} \right) = \sum_{\sigma, k, p} \left(\prod_{i,j} \binom{b_j^\sigma}{p_i^j} (|(a_j^\sigma)_{>i}| - |p_{>i}^j|)_{p_i^j} \right) \overline{\prod_{j=1}^n X_j^{|A_j^\sigma| - (k, k)} \hbar^{|k|}},$$

donde $\sigma \in \{id\} \times S_n^{m-1}$, $k \in \mathbb{N}^n$, $(i, j) \in [m-1] \times [n]$, y $p = p_i^j \in (\mathbb{N}^{m-1})^n$, se cumple en $Sym^n(W)$.

Demostración. Usando el Teorema 29 y el Teorema 31

$$\begin{aligned} (n!)^{m-1} \prod_{i=1}^m \left(\overline{\prod_{j=1}^n X_j^{A_{ij}}} \right) &= \sum_{\sigma \in \{id\} \times S_n^{m-1}} \overline{\prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^m X_j^{A_{i\sigma_i^{-1}(j)}} \right)} \\ &= \sum_{\sigma \in \{id\} \times S_n^{m-1}} \overline{\prod_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^{\min_j} N(A_j^\sigma) X_j^{|A_j^\sigma| - (k, k)} \hbar^{|k|} \right)} \\ &= \sum_{\sigma, k} \left(\prod_{j=1}^n N(A_j^\sigma, k_j) \right) \overline{\prod_{j=1}^n X_j^{|A_j^\sigma| - (k, k)} \hbar^{|k|}} \\ &= \sum_{\sigma, k, p} \left(\prod_{i,j} \binom{b_j^\sigma}{p_i^j} (|(a_j^\sigma)_{>i}| - |p_{>i}^j|)_{p_i^j} \right) \overline{\prod_{j=1}^n X_j^{|A_j^\sigma| - (k, k)} \hbar^{|k|}}, \end{aligned}$$

donde $\min_j = \min(|a_j^\sigma|, |b_j^\sigma|)$. □

El Ejemplo 34 que muestra resultados del algoritmo "Funciones Simétricas Cuánticas" definido en 4.3, realiza los calculos específicos para $m = 3, n = 2, 3, 4, 5$. En el Capítulo 4,

se encuentra la documentación especificando lo realizado en dicho algoritmo.

En los ejemplos dados a continuación, los polinomios que aparecen son siempre coinvariantes, es decir, clases de equivalencia. Sin embargo por comodidad omitiremos las barras.

Ejemplo 34. *Las siguientes identidades se satisfacen en $Sym^n(W)$.*

1. En $Sym^2(W)$, para

$$\overline{4(x_1y_1x_2y_2)} \overline{(x_1y_1x_2y_2)} \overline{(x_1y_1x_2y_2)}$$

el resultado es:

$$4x_1^3y_1^3x_2^3y_2^3 + 24x_1^3y_1^3x_2^2y_2^2\hbar + (8x_1^3y_1^3x_2y_2 + 36x_1^2y_1^2x_2^2y_2^2)\hbar^2 + 24x_1^2y_1^2x_2y_2\hbar^3 + 4x_1y_1x_2y_2\hbar^4.$$

2. En $Sym^2(W)$, para

$$\overline{4(x_1^1y_1^5x_2^2y_2^6)} \overline{(x_1^1y_1^9x_2^3y_2^{10})} \overline{(x_1^3y_1^1x_2^1y_2^6)}$$

el resultado es:

$$\begin{aligned} & 8x_1^8y_1^{17}x_2^3y_2^{20} + 8x_1^7y_1^{16}x_2^4y_2^{21} + 8x_1^6y_1^{22}x_2^5y_2^{15} + 8x_1^6y_1^{16}x_2^5y_2^{21} + (152x_1^8y_1^{17}x_2^2y_2^{19} + 696x_1^7y_1^{16}x_2^3y_2^{20} \\ & + 376x_1^6y_1^{22}x_2^4y_2^{14} + 240x_1^6y_1^{16}x_2^4y_2^{20} + 480x_1^6y_1^{15}x_2^4y_2^{21} + 680x_1^5y_1^{21}x_2^5y_2^{15})\hbar + (520x_1^8y_1^{17}x_2y_2^{18} + \\ & 10704x_1^7y_1^{16}x_2^2y_2^{19} + 5928x_1^6y_1^{22}x_2^3y_2^{13} + 2160x_1^6y_1^{16}x_2^3y_2^{19} + 23040x_1^6y_1^{15}x_2^3y_2^{20} \\ & + 19840x_1^5y_1^{21}x_2^4y_2^{14} + 15120x_1^5y_1^{15}x_2^4y_2^{20} + 10560x_1^5y_1^{14}x_2^4y_2^{21})\hbar^2 + (34320x_1^7y_1^{16}x_2y_2^{18} + \\ & 36192x_1^6y_1^{22}x_2^2y_2^{12} + 6720x_1^6y_1^{16}x_2^2y_2^{18} + 286560x_1^6y_1^{15}x_2^2y_2^{19} + 249600x_1^5y_1^{21}x_2^3y_2^{13} + \\ & 121200x_1^5y_1^{15}x_2^3y_2^{19} + 370560x_1^5y_1^{14}x_2^3y_2^{20} + 106560x_1^4y_1^{21}x_2^4y_2^{13} + 347040x_1^4y_1^{20}x_2^4y_2^{14})\hbar^3 + \\ & (68640x_1^6y_1^{22}x_2y_2^{11} + 5760x_1^6y_1^{16}x_2y_2^{17} + 842400x_1^6y_1^{15}x_2y_2^{18} + 1335360x_1^5y_1^{21}x_2^2y_2^{12} \\ & + 355200x_1^5y_1^{15}x_2^2y_2^{18} + 3714240x_1^5y_1^{14}x_2^2y_2^{19} + 504000x_1^4y_1^{21}x_2^3y_2^{12} + 3575520x_1^4y_1^{20}x_2^3y_2^{13} + \\ & 2424000x_1^4y_1^{14}x_2^3y_2^{19} + 3061440x_1^4y_1^{13}x_2^3y_2^{20})\hbar^4 + (2333760x_1^5y_1^{21}x_2y_2^1 + 293760x_1^5y_1^{15}x_2y_2^{17} + \\ & 9672000x_1^5y_1^{14}x_2y_2^{18} + 1013760x_1^4y_1^{21}x_2^2y_2^{11} + 16174080x_1^4y_1^{20}x_2^2y_2^{12} + 6513600x_1^4y_1^{14}x_2^2y_2^{18} + \\ & 24600960x_1^4y_1^{13}x_2^2y_2^{19} + 12605760x_1^3y_1^{20}x_2^3y_2^{12} + 21153600x_1^3y_1^{19}x_2^3y_2^{13})\hbar^5 + (633600x_1^4y_1^{21}x_2y_2^{10} \\ & + 24710400x_1^4y_1^{20}x_2y_2^{11} + 5080320x_1^4y_1^{14}x_2y_2^{17} + 53539200x_1^4y_1^{13}x_2y_2^{18} + 22936320x_1^3y_1^{20}x_2^2y_2^{11} + \\ & 78249600x_1^3y_1^{19}x_2^2y_2^{12} + 49608000x_1^3y_1^{13}x_2^2y_2^{18} + 80749440x_1^3y_1^{12}x_2^2y_2^{19})\hbar^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (13305600x_1^3y_1^{20}x_2y_2^{10} + 94723200x_1^3y_1^{19}x_2y_2^{11} + 34594560x_1^3y_1^{13}x_2y_2^{17} + \\
& 131414400x_1^3y_1^{12}x_2y_2^{18} + 116455680x_1^2y_1^{19}x_2^2y_2^{11} + 144518400x_1^2y_1^{18}x_2^2y_2^{12})\hbar^7 + \\
& (53222400x_1^2y_1^{19}x_2y_2^{10} + 107078400x_1^2y_1^{18}x_2y_2^{11} + 75479040x_1^2y_1^{12}x_2y_2^{17} + \\
& 107078400x_1^2y_1^{11}x_2y_2^{18})\hbar^8.
\end{aligned}$$

3. Para $Sym^3(W)$, para

$$36\overline{(x_1y_1x_2y_2x_3y_3)} \overline{(x_1y_1x_2y_2x_3y_3)} \overline{(x_1y_1x_2y_2x_3y_3)}}$$

el resultado es:

$$\begin{aligned}
& 36x_1^3x_2^3x_3^3y_1^3y_2^3y_3^3 + 324x_1^3x_2^3x_3^2y_1^3y_2^3y_3^2\hbar + (108x_1^3x_2^3x_3y_1^3y_2^3y_3 + 972x_1^3x_2^2x_3^2y_1^3y_2^2y_3^2)\hbar^2 + \\
& (648x_1^3x_2^2x_3y_1^3y_2^2y_3 + 972x_1^2x_2^2x_3^2y_1^2y_2^2y_3^2)\hbar^3 + (108x_1^3x_2x_3y_1^3y_2y_3 + 972x_1^2x_2^2x_3y_1^2y_2^2y_3)\hbar^4 + \\
& 324x_1^2x_2x_3y_1^2y_2y_3\hbar^5 + 36x_1x_2x_3y_1y_2y_3\hbar^6.
\end{aligned}$$

4. Para $Sym^3(W)$, para

$$36\overline{(x_1y_1^2x_2y_2x_3y_3)} \overline{(x_1y_1x_2^2y_2x_3y_3^2)} \overline{(x_1y_1x_2^2y_2x_3y_3^2)}}$$

el resultado es:

$$\begin{aligned}
& 216x_1^5y_1^4x_2^3y_2^5x_3^3y_3^3 + 216x_1^5y_1^4x_2^3y_2^4x_3^3y_3^4 + 216x_1^5y_1^3x_2^3y_2^6x_3^3y_3^3 + 648x_1^5y_1^3x_2^3y_2^5x_3^3y_3^4 + \\
& 432x_1^4y_1^5x_2^4y_2^4x_3^3y_3^3 + 432x_1^4y_1^5x_2^4y_2^3x_3^3y_3^4 + 648x_1^4y_1^4x_2^4y_2^4x_3^3y_3^4 + 864x_1^4y_1^4x_2^4y_2^3x_3^3y_3^5 + \\
& 216x_1^4y_1^3x_2^4y_2^3x_3^3y_3^6 + (648x_1^5y_1^4x_2^3y_2^5x_3^3y_3^2 + 1512x_1^5y_1^4x_2^3y_2^4x_3^3y_3^3 + 864x_1^5y_1^4x_2^3y_2^3x_3^3y_3^4 + \\
& 648x_1^5y_1^3x_2^3y_2^6x_3^3y_3^2 + 2592x_1^5y_1^3x_2^3y_2^5x_3^3y_3^3 + 3240x_1^5y_1^3x_2^3y_2^4x_3^3y_3^4 + 1296x_1^5y_1^3x_2^3y_2^3x_3^3y_3^5 + \\
& 1296x_1^4y_1^5x_2^4y_2^4x_3^3y_3^2 + 1512x_1^4y_1^5x_2^4y_2^3x_3^3y_3^3 + 1944x_1^4y_1^5x_2^3y_2^4x_3^3y_3^2 + 2376x_1^4y_1^5x_2^3y_2^3x_3^3y_3^3 + \\
& 2592x_1^4y_1^4x_2^4y_2^4x_3^3y_3^3 + 4104x_1^4y_1^4x_2^4y_2^3x_3^3y_3^4 + 3888x_1^4y_1^4x_2^3y_2^5x_3^3y_3^2 + 11664x_1^4y_1^4x_2^3y_2^4x_3^3y_3^3 + \\
& 1296x_1^4y_1^3x_2^4y_2^3x_3^3y_3^5 + 1944x_1^4y_1^3x_2^3y_2^6x_3^3y_3^2 + 7776x_1^4y_1^3x_2^3y_2^5x_3^3y_3^3 + 5832x_1^4y_1^3x_2^3y_2^4x_3^3y_3^4 + \\
& 1296x_1^4y_1^2x_2^3y_2^6x_3^3y_3^3 + 3888x_1^4y_1^2x_2^3y_2^5x_3^3y_3^4)\hbar + (1296x_1^3y_1^6x_2^3y_2^3x_3^3y_3 + 4320x_1^3y_1^6x_2^3y_2^2x_3^3y_3^2 + \\
& 3888x_1^3y_1^5x_2^3y_2^4x_3^3y_3 + 30024x_1^3y_1^5x_2^3y_2^3x_3^3y_3^2 + 21384x_1^3y_1^4x_2^3y_2^4x_3^3y_3^2 + 42768x_1^3y_1^4x_2^3y_2^3x_3^3y_3^3 + \\
& 216x_1^5y_1^4x_2^3y_2^5x_3y_3 + 648x_1^5y_1^4x_2^3y_2^4x_3y_3^2 + 432x_1^5y_1^4x_2^3y_2^3x_3y_3^3 + 2592x_1^5y_1^4x_2^2y_2^4x_3^2y_3^2 + \\
& 38664x_1^4y_1^4x_2^3y_2^3x_3^2y_3^3 + 2592x_1^5y_1^4x_2^2y_2^3x_3^2y_3^3 + 216x_1^5y_1^3x_2^3y_2^6x_3y_3 + 1512x_1^5y_1^3x_2^3y_2^5x_3y_3^2 + \\
& 2592x_1^5y_1^3x_2^2y_2^4x_3y_3^3 + 1296x_1^5y_1^3x_2^2y_2^3x_3y_3^4 + 3888x_1^5y_1^3x_2^2y_2^5x_3^2y_3^2 + 432x_1^4y_1^5x_2^4y_2^4x_3y_3 + \\
& 648x_1^4y_1^5x_2^4y_2^3x_3y_3^2 + 1296x_1^4y_1^5x_2^3y_2^4x_3^2y_3 + 9720x_1^4y_1^5x_2^3y_2^3x_3^2y_3^2 + 6912x_1^4y_1^5x_2^3y_2^2x_3^2y_3^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1512x_1^4y_1^4x_2^4y_2^4x_3y_3^2 + 3024x_1^4y_1^4x_2^4y_2^3x_3y_3^3 + 2592x_1^4y_1^4x_2^3y_2^5x_3^2y_3 + 21384x_1^4y_1^4x_2^3y_2^4x_3^2y_3^2 + \\
& 12528x_1^5y_1^3x_2^2y_2^4x_3^2y_3^3 + 7776x_1^4y_1^2x_2^3y_2^3x_3^2y_3^5 + 18576x_1^4y_1^4x_2^3y_2^2x_3^2y_3^4 + 1296x_1^4y_1^3x_2^4y_2^3x_3y_3^4 + \\
& 1296x_1^4y_1^3x_2^3y_2^6x_3^2y_3 + 14256x_1^4y_1^3x_2^3y_2^5x_3^2y_3^2 + 34992x_1^4y_1^3x_2^3y_2^4x_3^2y_3^3 + 34344x_1^4y_1^3x_2^3y_2^3x_3^2y_3^4 + \\
& 11664x_1^4y_1^3x_2^3y_2^2x_3^2y_3^5 + 3888x_1^4y_1^2x_2^3y_2^6x_3^2y_3^2 + 15552x_1^4y_1^2x_2^3y_2^5x_3^2y_3^3 + 19440x_1^4y_1^2x_2^3y_2^4x_3^2y_3^4 \hbar^2 + \\
& (9072x_1^4y_1^2x_2^3y_2^5x_3y_3^2 + 15552x_1^4y_1^2x_2^3y_2^4x_3y_3^3 + 7776x_1^4y_1^2x_2^3y_2^3x_3y_3^4 + 23328x_1^4y_1^2x_2^2y_2^5x_3^2y_3^2 + \\
& 75168x_1^4y_1^2x_2^2y_2^4x_3^2y_3^3 + 5616x_1^3y_1^6x_2^3y_2^2x_3^2y_3 + 3888x_1^3y_1^6x_2^3y_2x_3^2y_3^2 + 18576x_1^3y_1^5x_2^3y_2^3x_3^2y_3 + \\
& 3888x_1^5y_1^3x_2^2y_2^2x_3y_3^4 + 864x_1^5y_1^4x_2^2y_2^4x_3y_3 + 2160x_1^5y_1^4x_2^2y_2^3x_3y_3^2 + 1296x_1^5y_1^4x_2^2y_2^2x_3y_3^3 + \\
& 1296x_1^5y_1^3x_2^2y_2^5x_3y_3 + 6912x_1^5y_1^3x_2^2y_2^4x_3y_3^2 + 9504x_1^5y_1^3x_2^2y_2^3x_3y_3^3 + 2808x_1^4y_1^5x_2^3y_2^3x_3y_3 + \\
& 3024x_1^4y_1^5x_2^3y_2^2x_3y_3^2 + 25920x_1^3y_1^2x_2^3y_2^2x_3^2y_3^5 + 50112x_1^4y_1^3x_2^2y_2^3x_3^2y_3^3 + 1296x_1^4y_1^2x_2^3y_2^6x_3y_3 + \\
& 49248x_1^3y_1^5x_2^3y_2^2x_3^2y_3^2 + 15552x_1^3y_1^5x_2^3y_2x_3^2y_3^3 + 12960x_1^3y_1^4x_2^3y_2^4x_3^2y_3 + 134568x_1^3y_1^4x_2^3y_2^3x_3^2y_3^2 + \\
& 123984x_1^3y_1^4x_2^3y_2^2x_3^2y_3^3 + 19440x_1^3y_1^4x_2^3y_2x_3^2y_3^4 + 125496x_1^3y_1^3x_2^3y_2^3x_3^2y_3^3 + 134784x_1^3y_1^3x_2^3y_2^2x_3^2y_3^4 + \\
& 60048x_1^4y_1^3x_2^2y_2^4x_3^2y_3^2 + 4752x_1^4y_1^5x_2^2y_2^3x_3^2y_3 + 7776x_1^4y_1^5x_2^2y_2^2x_3^2y_3^2 + 5832x_1^4y_1^4x_2^3y_2^4x_3y_3 + \\
& 20736x_1^4y_1^4x_2^3y_2^3x_3y_3^2 + 13824x_1^4y_1^4x_2^3y_2^2x_3y_3^3 + 12528x_1^4y_1^4x_2^2y_2^4x_3^2y_3 + 61776x_1^4y_1^4x_2^2y_2^3x_3^2y_3^2 + \\
& 3888x_1^4y_1^3x_2^3y_2^5x_3y_3 + 14688x_1^4y_1^3x_2^3y_2^4x_3y_3^2 + 22032x_1^4y_1^3x_2^3y_2^3x_3y_3^3 + 11664x_1^4y_1^3x_2^3y_2^2x_3y_3^4 + \\
& 7776x_1^4y_1^3x_2^2y_2^5x_3^2y_3 + 7776x_1^3y_1^3x_2^3y_2x_3^2y_3^5 \hbar^3 + (74304x_1^3y_1^4x_2^2y_2^3x_3^2y_3 + 51840x_1^3y_1^4x_2^3y_2^2x_3y_3^2 + \\
& 15552x_1^3y_1^4x_2^3y_2x_3y_3^3 + 90288x_1^3y_1^4x_2^2y_2^2x_3^2y_3^2 + 61992x_1^3y_1^3x_2^3y_2^3x_3y_3^2 + 34560x_1^4y_1^3x_2^2y_2^2x_3y_3^3 + \\
& 7776x_1^4y_1^3x_2^2y_2x_3y_3^4 + 7776x_1^4y_1^2x_2^2y_2^5x_3y_3 + 41472x_1^4y_1^2x_2^2y_2^4x_3y_3^2 + 57024x_1^4y_1^2x_2^2y_2^3x_3y_3^3 + \\
& 23328x_1^4y_1^2x_2^2y_2^2x_3y_3^4 + 1296x_1^3y_1^6x_2^3y_2x_3y_3 + 1728x_1^3y_1^6x_2^2y_2x_3^2y_3 + 12528x_1^3y_1^5x_2^2y_2^2x_3y_3 + \\
& 9072x_1^3y_1^5x_2^3y_2x_3y_3^2 + 28512x_1^3y_1^5x_2^2y_2^2x_3^2y_3 + 33480x_1^3y_1^4x_2^3y_2^3x_3y_3 + 167616x_1^3y_1^2x_2^2y_2^3x_3^2y_3^3 + \\
& 89424x_1^3y_1^3x_2^3y_2^2x_3y_3^3 + 7776x_1^3y_1^3x_2^3y_2x_3y_3^4 + 84240x_1^3y_1^3x_2^2y_2^4x_3^2y_3 + 350784x_1^3y_1^3x_2^2y_2^3x_3^2y_3^2 + \\
& 25920x_1^3y_1^2x_2^3y_2^2x_3y_3^4 + 33696x_1^3y_1^2x_2^2y_2^5x_3^2y_3 + 209952x_1^3y_1^2x_2^2y_2^4x_3^2y_3^2 + 40608x_1^4y_1^3x_2^2y_2^3x_3y_3^2 + \\
& 9504x_1^4y_1^4x_2^2y_2x_3y_3^3 + 15984x_1^4y_1^3x_2^2y_2^4x_3y_3 + 432x_1^5y_1^4x_2y_2^3x_3y_3 + 432x_1^5y_1^4x_2y_2^2x_3y_3^2 + \\
& 1296x_1^5y_1^3x_2y_2^4x_3y_3 + 4752x_1^5y_1^3x_2y_2^3x_3y_3^2 + 3888x_1^4y_1^5x_2^2y_2^2x_3y_3 + 2160x_1^4y_1^5x_2^2y_2x_3y_3^2 + \\
& 15552x_1^4y_1^4x_2^2y_2^3x_3y_3 + 30672x_1^4y_1^4x_2^2y_2^2x_3y_3^2 + 23328x_1^3y_1^4x_2^2y_2^5x_3^2y_3^2 + 75168x_1^3y_1^4x_2^2y_2^4x_3^2y_3^3 \hbar^4 + \\
& (432x_1^4y_1^5x_2y_2x_3y_3 + 7344x_1^4y_1^4x_2y_2^2x_3y_3 + 8640x_1^4y_1^3x_2y_2^3x_3y_3 + 7776x_1^4y_1^3x_2y_2^2x_3y_3^2 + \\
& 7776x_1^4y_1^2x_2y_2^4x_3y_3 + 28512x_1^4y_1^2x_2y_2^3x_3y_3^2 + 6912x_1^3y_1^5x_2^2y_2x_3y_3 + 39744x_1^3y_1^4x_2^2y_2^2x_3y_3 + \\
& 31104x_1^3y_1^4x_2^2y_2x_3y_3^2 + 80784x_1^3y_1^3x_2^2y_2^3x_3y_3 + 157680x_1^3y_1^3x_2^2y_2^2x_3y_3^2 + 57024x_1^3y_1^3x_2^2y_2x_3y_3^3 + \\
& 51840x_1^3y_1^2x_2^2y_2^4x_3y_3 + 133920x_1^3y_1^2x_2^2y_2^3x_3y_3^2 + 124416x_1^3y_1^2x_2^2y_2^2x_3y_3^3 + 33696x_1^3y_1^2x_2^2y_2x_3y_3^4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 7776x_1^3y_1x_2^2y_2^5x_3y_3 + 41472x_1^3y_1x_2^2y_2^4x_3y_3^2 + 57024x_1^3y_1x_2^2y_2^3x_3y_3^3 + 23328x_1^3y_1x_2^2y_2^2x_3y_3^4 + \\
& 10368x_1^2y_1^5x_2^2y_2x_3^2y_3 + 121824x_1^2y_1^4x_2^2y_2^2x_3^2y_3 + 96768x_1^2y_1^3x_2^2y_2^3x_3^2y_3 + 206496x_1^2y_1^3x_2^2y_2^2x_3^2y_3^2) \hbar^5 + \\
& (3888x_1^3y_1^4x_2y_2x_3y_3 + 34128x_1^3y_1^3x_2y_2^2x_3y_3 + 28512x_1^3y_1^2x_2y_2^3x_3y_3 + 25056x_1^3y_1^2x_2y_2^2x_3y_3^2 + \\
& 7776x_1^3y_1x_2y_2^4x_3y_3 + 28512x_1^3y_1x_2y_2^3x_3y_3^2 + 28512x_1^2y_1^4x_2y_2x_3y_3 + 82080x_1^2y_1^3x_2y_2^2x_3y_3 + \\
& 76032x_1^2y_1^3x_2^2y_2x_3y_3^2 + 79488x_1^2y_1^2x_2^2y_2^2x_3y_3^2 + 72576x_1^2y_1^2x_2^2y_2x_3y_3^3 + 10368x_1^2y_1x_2^2y_2x_3y_3^4) \hbar^6 + \\
& (6912x_1^2y_1^3x_2y_2x_3y_3 + 27648x_1^2y_1^2x_2y_2^2x_3y_3 + 15552x_1^2y_1x_2y_2^3x_3y_3 + 13824x_1^2y_1x_2y_2^2x_3y_3^2) \hbar^7 + \\
& 1728x_1y_1^2x_2y_2x_3y_3 \hbar^8.
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Aspectos Computacionales

Este capítulo tiene como objetivo principal presentar los algoritmos realizados durante este trabajo y su respectiva documentación. Cada uno de los algoritmos se desarrolló utilizando el software Maple el cual, consideramos es la herramienta más adecuada, que combina la matemática y la programación.

4.1. Álgebra de Weyl

El algoritmo que se presenta en esta sección, se programó con base en la expresión (4.1), la cual fue tomada de [4].

El álgebra de Weyl se define como:

$$W = \mathbb{C}\langle x, y \rangle[[\hbar]] / \langle yx - xy - \hbar \rangle.$$

En esta álgebra, se satisface la siguiente relación

$$y^b x^a = \sum_{k=0}^{\min} \binom{b}{k} (a)_k x^{a-k} y^{b-k} \hbar^k \quad (4.1)$$

donde $\min = \min(a, b)$. Para tal fin, es necesario documentar una a una las funciones usadas para la obtención de dicho algoritmo. Comenzaremos documentando la función factdecreciente, presentada a continuación.

4.1.1. Función factdecreciente

Esta función calcula el factorial decreciente dado por la fórmula:

$$(n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

- Parámetros de entrada: Recibe dos números enteros.
- Funcionalidad: Calcula el factorial del primer número entero, luego el segundo parámetro nos indica cuantos términos del factorial calculado, vamos a tomar.
- Valor de retorno: Un entero producto de la multiplicación de la cantidad de términos solicitada.

Ejemplo 35. Para calcular $(5)_4$, debemos llamar la función de la siguiente forma:

Llamado a la función: `factdecreciente(5,4)`;

Resultado: 120.

4.1.2. Función Combinatoria

Esta función calcula el número combinatorio dado por la fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ para } k \leq n, n, k \in \mathbb{N}.$$

- Parámetros de entrada: Recibe dos números enteros.
- Funcionalidad: Calcula la combinatoria de dos números.
- Valor de retorno: Un número entero producto del cálculo combinatorio.

Ejemplo 36. Para calcular $\binom{5}{3}$, se debe llamar la función de la siguiente manera:

Llamado a la función: `combinatoria(5,3)`;

Resultado: 10.

4.1.3. Función Identity

Esta función calcula el producto dado por la expresión (4.1).

- Parámetros de entrada: Recibe dos números enteros.
- Funcionalidad: Calcula el producto estrella de un monomio, usando las funciones factdecreciente y combinatoria.
- Valor de retorno: Polinomio resultante.

Ejemplo 37. Para calcular y^3x^2 , debemos acceder a la función de la siguiente manera:

Llamado a la función: *Identity* (3,2);

Resultado: $x^3y^2 + 6x^2yh + 6xh^2$.

4.1.4. Interfaz Gráfica de Usuario

A continuación presentaremos un ejemplo que hace referencia a la interfaz gráfica. Cuando ejecutamos el algoritmo, aparece la siguiente ventana, en la cual digitamos el exponente de x y y , después presionando el botón “calcule el polinomio” obtenemos el resultado del producto.

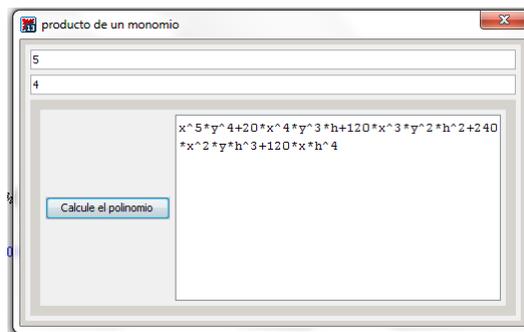


Figura 4.1: Interfaz de Usuario

4.2. Coeficientes Normales

Nuestro segundo algoritmo fue programado con el fin de calcular las coordenadas normales definidas por medio de la expresión (4.2).

$$\prod_{i=1}^n X^{A_i} = \sum_{k=0}^{\min} N(A, k) x^{|a|-k} y^{|b|-k} \hbar^k, \quad (4.2)$$

donde $N(A, k)$ esta dado por:

$$N(A, k) = \sum_{p \vdash k} \prod_{i=1}^{n-1} (|a_{>i}| - |p_{>i}|)_{p_i}, \text{ donde } p \in \mathbb{N}^{n-1}.$$

4.2.1. Librerías

Para el desarrollo del algoritmo que estamos presentando en esta sección, se requirió el uso de tres librerías del software Maple: LinearÁlgebra, ListTools, Combinat.

4.2.2. Función particiones

Esta función calcula las particiones de n en k bloques dadas por la siguiente definición:

Definición 38. Sea $n \in \mathbb{N}$, $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ es una partición de n , con tamaño k si $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ y $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$.

- Parámetros de entrada: Recibe dos números enteros.
- Funcionalidad: Esta función calcula las particiones del primer parámetro y el segundo parámetro nos indica el tamaño de la lista en la que insertamos cada partición.
- Valor de retorno: Una lista de listas, con números enteros que representan las particiones de un número dado.

Ejemplo 39. Si se desea calcular las particiones de 4 en 5 bloques, es necesario acceder a la función de la siguiente forma:

Llamado a la función: *particiones(4, 5)*;

Resultado: $[[1, 1, 1, 1, 0], [2, 1, 1, 0, 0], [2, 2, 0, 0, 0], [3, 1, 0, 0, 0], [4, 0, 0, 0, 0]]$.

4.2.3. Función Permutaciones

Esta función calcula todas las permutaciones de n en k bloques, la cual está dada por la Definición 40:

Definición 40. Sea $n \in \mathbb{N}$, (n_1, n_2, \dots, n_k) es una partición de n , con tamaño k si $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

- Parámetros de entrada: Recibe dos números enteros.
- Funcionalidad: Esta función realiza todas las posibles permutaciones de las particiones calculadas por la función anterior y las almacena en vectores de tamaño de tamaño k . Si es necesario, la función almacena ceros en algunas posiciones.
- Valor de retorno: Una lista de listas, con números enteros que representan las permutaciones de un número dado.

Ejemplo 41. Si se desea calcular todas las posibles permutaciones de 2 en bloques de 4, es necesario acceder a la función de la siguiente manera:

Llamado a la función: *permutaciones(2, 4)*;

Resultado:

$[[1, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0], [0, 1, 0, 1], [0, 0, 1, 1], [2, 0, 0, 0], [0, 2, 0, 0], [0, 0, 2, 0], [0, 0, 0, 2]]$.

4.2.4. Función Norma

Esta función calcula la norma de un vector dada por la fórmula:

$$a \in \mathbb{N}^n, a = [a_1, \dots, a_n], \text{ definimos } |a| = \sum_{i=1}^n a_i.$$

- Parámetros de entrada: Recibe un vector de números.
- Funcionalidad: Esta función recorre todo el vector, realizando a su vez, la suma de sus componentes.
- Valor de retorno: Es un número entero el cual es resultado de la suma de los elementos del vector de entrada.

Ejemplo 42. Si se desea calcular la norma del vector $[2, 3, 4, 5]$, es necesario acceder a la función de la siguiente manera.

Llamado a la función: $\text{norma}([2, 3, 4, 5]);$

Resultado: 14.

4.2.5. Función sumi

La función que se presenta a continuación, calcula la norma de un vector dado por la fórmula:

$$a \in \mathbb{N}^n, a = (a_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \text{ definimos } |a_{\geq k}| = \sum_{i=k}^n a_i.$$

- Parámetros de entrada: Recibe un vector de números y un número entero.
- Funcionalidad: Esta función itera el vector desde la posición que nos da el segundo parámetro y desde allí, suma los elementos hasta llegar al final del mismo.
- Valor de retorno: Es un número entero resultado de la suma de los elementos del vector de entrada.

Ejemplo 43. Si se desea calcular la norma del vector $[4, 5, 3, 6]$ desde la posición 2, es necesario acceder a la función de la siguiente manera:

Llamado a la función: $\text{sumi}([4, 5, 3, 6], 2);$

Resultado: 9.

4.2.6. Función Combinar

Esta función calcula producto combinatorio de dos vectores dado por la fórmula:

$$a = (a_1, \dots, a_n) \text{ y } b = (b_1, \dots, b_n), \binom{a}{b} = \binom{a_1}{b_1} \cdots \binom{a_n}{b_n}.$$

- Parámetros de entrada: Recibe dos vectores de números enteros.
- Funcionalidad: Esta función realiza el binomio entre cada posición de los vectores.
- Valor de retorno: Es un número entero resultado de la multiplicación de todos los binomios correspondientes a cada posición del vector.

Ejemplo 44. Si se desea calcular $\binom{5}{3} \binom{5}{3}$, es necesario acceder a la función de la siguiente forma:

Llamado a la función: `combinar([5, 5], [3, 3]);`

Resultado: 100.

4.2.7. Función P2

En este algoritmo hacemos uso de las coordenadas normales en el álgebra de Weyl. Con la fin de obtener un algoritmo más general para la expresión (4.1) mencionada anteriormente, procedemos a programar la regla del producto para $n = 2$, dada por $y^m x^n y^s x^t$.

- Parámetros de entrada: Recibe cuatro números enteros.
- Funcionalidad: Realiza el producto usando el primer algoritmo y luego multiplica el polinomio resultante y lo expande a su mayor expresión.
- Valor de retorno: Un polinomio.

Ejemplo 45. Si se desea calcular $y^1 x^3 y^5 x^1$, es necesario acceder a la función de la siguiente manera:

Llamado a la función: `p2(1, 3, 5, 1);`

Resultado: $x^4 y^6 + 15x^3 y^5 \hbar + 60x^2 y^4 \hbar^2 + 60xy^3 \hbar^3$.

4.3. Funcionabilidad

Las siguientes dos funciones `menor`, `ffalling`, resuelven problemas computacionales, las cuales ayudan a la optimización del algoritmo y por ende, reducen la complejidad de los mismos.

4.3.1. Función `menor`

- Parámetros de entrada: Recibe dos vectores de números enteros.
- Funcionalidad: Compara uno a uno los elementos entre los dos vectores. Si todos los números del primer vector son mayores uno a uno al segundo vector, entonces retorna un 0, de lo contrario retorna 1.
- Valor de retorno: Un número.

Ejemplo 46. Si se desea saber si el vector $[2, 3, 4]$ es menor que el vector $[1, 2, 3]$, es necesario acceder a la función de la siguiente forma:

Llamado a la función: `menor([2, 3, 4], [1, 2, 3]);`

Resultado: 0.

4.3.2. Función `ffalling`

- Parámetros de entrada: Recibe dos vectores de números enteros.
- Funcionalidad: Realiza la multiplicación de los factoriales de los dos vectores usando la función factorial decreciente y la función `sumi`.
- Valor de retorno: Un número.

Ejemplo 47. Si se desea calcular el producto de los vectores $[1, 2, 3]$, $[4, 5, 6]$, es necesario acceder a la función de la siguiente manera:

Llamado a la función: `ffalling([1, 2, 3], [4, 5, 6]);`

Resultado: 0.

4.4. Función pmonomio

Esta función tiene como fin calcular las coordenadas normales las cuales estan dadas por la expresión (4.2).

- Parámetros de entrada: Recibe dos vectores con los exponentes de la variable x_i y y_i respectivamente y un número entero .
- Funcionalidad: Esta función realiza el producto estrella de monomios donde i es el número entero que recibe como parámetro.
- Valor de retorno: Un polinomio.

Ejemplo 48. Si se desea calcular el producto de $y^3x^2y^3x^3$, es necesario acceder a la función de la siguiente forma: Llamado a la función: $pmonomio([2, 3], [3, 3], 2)$;

Resultado: $x_2^5y_2^6 + 9x_2^4y_2^5\hbar + 18x_2^3y_2^4\hbar^2 + 6x_2^2y_2^3\hbar^3$.

4.4.1. Interfaz Gráfica de Usuario

A continuación presentaremos un ejemplo de la interfaz gráfica para el usuario. Cuando ejecutamos el algoritmo aparecerá una ventana como la que se muestra a continuación, en la cual digitamos los exponentes de las variables x y y . Luego, presionando el boton “Calcule el producto”, se calcula el polinomio obtenido como resultado del producto de los monomios correspondientes a los exponentes ingresados.

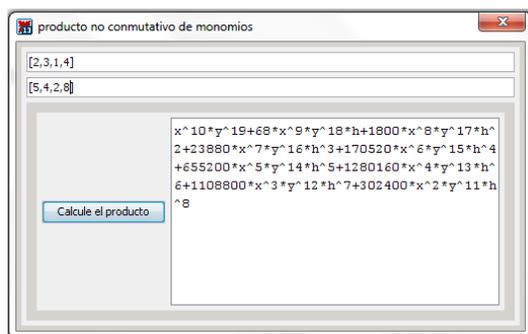


Figura 4.2: Interfaz de Usuario

4.5. Funciones simétricas cuánticas

Este algoritmo presenta la regla del producto para m objetos en $Sym^n(W)$. Este resultado esta presente en [4]. Ver Teorema 33 para mas detalles. La regla para el producto estrella de monomios está dada por:

$$(n!)^{m-1} \prod_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^n X_j^{A_{ij}} \right) = \sum_{\sigma, k, p} \left(\prod_{i,j} \binom{b_j^\sigma}{p_i^j} (|(a_\sigma^j)_{>i}| - |p_{>i}^j|)_{p_i^j} \right) \overline{\prod_{j=1}^n X_j^{|A_j^\sigma| - (k_i, k_j)} \hbar^{|k|}}. \quad (4.3)$$

Nuestro algoritmo principal funciona para el caso $m = 3$ y $n = 3$ debido a que para el caso general $m = k$ y $n = k$, se presentan algunos inconvenientes dado que el algoritmo en general no presenta una secuencia repetitiva que se conserve. Como una posible solución a dichos inconvenientes, es realizar una función recursiva, la cual requeriría bastante tiempo, debido a su complejidad de programación. Además, para la generalización de nuestro algoritmo, son necesarios recursos computacionales avanzados en aspectos físicos tales como memoria y procesador los cuales son requeridos para el amplio número de procesos.

4.5.1. Librerías

En este algoritmo requerimos el uso de tres librerías de la herramienta Maple: ArrayTools, LinearÁlgebra, ListTools,Combinat.

Funcionabilidad: Las funciones construir, simplificar, iguales, auxiliar, auxiliarcoef, coinvariantesquitar, matri, agrupar, eliminar y coeficientes, se programaron con el de facilitar el cálculo de la expresión dada en la Definición 4.3. Dichas funciones son usadas en la función factorización.

4.5.2. Función construir

- Parámetros de entrada: Recibe una lista de matrices las cuales contienen los exponentes de los 3 monomios y un vector de coeficientes.
- Funcionalidad: Esta función construye el monomio resultante con base a los exponentes y coeficientes recibidos como parámetro.
- Valor de retorno: Un polinomio.

Ejemplo 49. Si se desea construir el polinomio $2x_1^{14}y_1^{19}x_2^6y_2^{22}x_3^5y_3^{15} + 2x_1^8y_1^{17}x_2^3y_2^{20}x_3^{14}y_3^{19}$, es necesario llamar la función de la siguiente forma:

Llamado a la función: $\text{construir} \left(\left(\begin{bmatrix} 14 & 6 & 5 \\ 19 & 22 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 3 & 14 \\ 17 & 20 & 19 \end{bmatrix} \right), [2, 2] \right);$

Resultado: $2x_1^{14}y_1^{19}x_2^6y_2^{22}x_3^5y_3^{15} + 2x_1^8y_1^{17}x_2^3y_2^{20}x_3^{14}y_3^{19}$.

4.5.3. Función simplificar

- Parámetros de entrada: Recibe una lista de matrices las cuales contienen los exponentes de los 3 monomios y un vector de coeficientes.
- Funcionalidad: Esta función construye el polinomio usando la función construir, pero previamente eliminando las matrices que tienen entradas en 0 y por ende suprimiendo el polinomio compuesto por dichas entradas.
- Valor de retorno: El polinomio construido sin los polinomios nulos.

Ejemplo 50. Si se desea simplificar el polinomio $2x_1^{14}y_1^{19}x_2^6y_2^{22}x_3^5y_3^{15} + 2x_1^8y_1^{17}x_2^3y_2^{20}x_3^{14}y_3^{19}$, es necesario acceder a la función de la siguiente manera.

Llamado a la función: $\text{simplificar}\left(\left[\begin{bmatrix} 14 & 6 & 5 \\ 19 & 22 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 3 & 14 \\ 17 & 20 & 19 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right], [2, 2]\right);$

Resultado: $2x_1^{14}y_1^{19}x_2^6y_2^{22}x_3^5y_3^{15} + 2x_1^8y_1^{17}x_2^3y_2^{20}x_3^{14}y_3^{19}$.

4.5.4. Función iguales

- Parámetros de entrada: Recibe dos matrices del mismo tamaño y dos números enteros.
- Funcionalidad: Compara posición a posición las dos matrices para identificar si son iguales.
- Valor de retorno: retorna 1 si las dos matrices son iguales y 0 si son diferentes.

Ejemplo 51. Llamado a la función: $\text{iguales}\left(\left[\begin{bmatrix} 14 & 6 & 5 \\ 19 & 22 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 5 & 14 \\ 17 & 20 & 19 \end{bmatrix}\right], 3, 3\right);$

Resultado: 0.

4.5.5. Función auxiliarcoef

- Parámetros de entrada: Recibe una matriz, una lista de matrices, tres números enteros y un vector de números.
- Funcionalidad: Esta función revisa si alguna matriz esta dentro de los coinvariantes de otra y si lo está, suma sus coeficientes.
- Valor de retorno: Un vector de enteros en los cuales incluye la suma de coeficientes.

Ejemplo 52. Llamado a la función:

$\text{auxiliarcoef}\left(\begin{bmatrix} 14 & 6 & 5 \\ 19 & 22 & 15 \end{bmatrix}, \left[\begin{bmatrix} 14 & 6 & 5 \\ 19 & 22 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 5 & 14 \\ 22 & 15 & 19 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 & 6 & 5 \\ 19 & 22 & 15 \end{bmatrix}\right], 1, 3, 3, [1, 1, 3]\right);$

Resultado: [4, 1].

4.5.6. Función auxiliar

- Parámetros de entrada: Recibe una matriz, una lista de matrices, tres números enteros.
- Funcionalidad: Esta función revisa si alguna matriz de la lista es coinvariante de la matriz recibida por parámetro. Si existe, entonces deja solamente un representante de esta clase.
- Valor de retorno: Una lista de matrices sin los coinvariantes de la matriz recibida como parámetro.

Ejemplo 53. *Llamado a la función:*

$$\text{auxiliar} \left(\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 15 \end{bmatrix}, \left[\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 14 \\ 4 & 4 & 19 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 15 \end{bmatrix} \right], 1, 3, 3, [1, 2, 1] \right);$$

$$\text{Resultado: } \left[\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 14 \\ 4 & 4 & 19 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 15 \end{bmatrix} \right].$$

4.5.7. Función coinvariantesquitar

- Parámetros de entrada: Recibe una lista de matrices, una lista de coeficientes y de números enteros.
- Funcionalidad: Esta función usando las funciones `auxiliarcoef` y `auxiliar` elimina todos los coinvariantes que existen en la lista de matrices que llega como parámetro.
- Valor de retorno: Usando la función `construir` y `simplificar` retorna un polinomio resultante de las eliminaciones de los coinvariantes.

Ejemplo 54. *Llamado a la función: coinvariantesquitar*

$$\left(\left[\begin{bmatrix} 14 & 6 & 5 \\ 19 & 22 & 15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 5 & 14 \\ 22 & 15 & 19 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 & 11 & 3 \\ 13 & 23 & 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 & 6 & 5 \\ 19 & 22 & 15 \end{bmatrix} \right], [1, 2, 4, 6], 3, 3 \right);$$

$$\text{Resultado: } x_1^4 y_1^{19} x_2^6 y_2^{22} x_3^5 y_3^{15} + 2x_1^6 y_1^{22} x_2^5 y_2^{15} x_3^{14} y_3^{19} + 4x_1^{11} y_1^{13} x_2^{11} y_2^{23} x_3^3 y_3^{20} + 6x_1^{14} y_1^{19} x_2^8 y_2^{17} x_3^3 y_3^{20}.$$

4.5.8. Función *matri*

- Parámetros de entrada: Recibe una lista de listas.
- Funcionalidad: Convierte cada sublista en una matriz.
- Valor de retorno: Un lista de matrices.

Ejemplo 55. *Llamado a la función: `matri`([4, 5, 4, 3, 8, 9]);*

Resultado:
$$\left[\begin{array}{ccc} 4 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 9 \end{array} \right].$$

4.5.9. Función *agrupar*

- Parámetros de entrada: Recibe un número, y una lista de listas de enteros.
- Funcionalidad: Si dentro de la lista se presenta que las listas tengan el tamaño de la misma, menos una posición en 0 y una posición diferente de 0, entonces la función agrupa todas las listas sin 0's.
- Valor de retorno: Una lista de listas.

Ejemplo 56. *Llamado a la función:*

agrupar

(6, [[1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 1]]);

Resultado:
$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

4.5.10. Función *eliminar*

- Parámetros de entrada: Recibe una lista de polinomios.
- Funcionalidad: Crea una matriz con los exponentes de cada polinomio.
- Valor de retorno: Una lista de matrices.

Ejemplo 57. Llamado a la función:

$eliminar([30x_1^{14}y_1^{19}x_2^4y_2^{20}x_3^6y_3^{16}, 95x_1^6y_1^{15}x_2^8y_2^{17}x_3^{10}y_3^{23}, 93x_1^6y_1^{16}x_2^6y_2^{22}x_3^{12}y_3^{17}]);$

$$Resultado: \left[\begin{bmatrix} 14 & 4 & 6 \\ 19 & 20 & 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 15 & 17 & 23 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 16 & 22 & 17 \end{bmatrix} \right].$$

4.5.11. Función coeficientes

- Parámetros de entrada: Recibe una lista de polinomios.
- Funcionalidad: Recorre la lista que recibe y va sacando los coeficientes de cada monomio y lo almacena en una lista.
- Valor de retorno: Una lista de listas de coeficientes.

Ejemplo 58. Llamado a la función: $Coeficientes([x_1^6y_1^4x_2^4y_2^2 + x_1^5y_1^3x_2^5y_2^3 + x_1^3y_1^4x_2^5y_2^4 + x_1^4y_1^5x_2^4y_2^3, 15x_1^3y_1^4x_2^4y_2^3 + 4x_1^4y_1^5x_2^3y_2^2 + 4x_1^4y_1^2x_2^5y_2^3 + 9x_1^5y_1^3x_2^4y_2^2 + 2x_1^6y_1^4x_2^3y_2 + 6x_1^2y_1^3x_2^5y_2^4]);$

Resultado: $[[1, 1, 1, 1], [15, 4, 4, 9, 2, 6]].$

4.5.12. Función factorizacion

El objetivo de esta función es agrupar los terminos semejantes de una expresión con respecto a \hbar y eliminar los coinvariantes de los términos semejantes.

- Parámetros de entrada: Recibe un polinomio y dos números enteros.
- Funcionalidad: Realiza la factorizacion de \hbar del polinomio recibido, usando las funciones eliminar y coinvariantesquitar para así obtener un polinomio sin coinvariantes.
- Valor de retorno: Un polinomio.

Ejemplo 59. Llamado a la función:

$factorizacion(216x_1^3y_1^3x_2^3y_2^3x_3^3y_3^3 + 648x_1^3y_1^3x_2^3y_2^3x_3^2y_3^2\hbar + 216x_1^3y_1^3x_2^3y_2^3x_3y_3\hbar^2 + 648x_1^3y_1^3x_2^2y_2^2\hbar$

$$x_3^3 y_3^3 + 1944 x_1^3 y_1^3 x_2^2 y_2^2 x_3^2 y_3^2 \hbar^2 + 648 x_1^3 y_1^3 x_2^2 y_2^2 x_3 y_3 \hbar^3 + 216 x_1^3 y_1^3 x_2 y_2 x_3^3 y_3^3 \hbar^2 + 648 x_1^3 y_1^3 x_2 y_2 x_3^2 y_3^2 \hbar^3 + 216 x_1^3 y_1^3 x_2 y_2 x_3 y_3 \hbar^4 + 648 x_1^2 y_1^2 x_2^3 y_2^3 x_3^3 y_3^3 \hbar, 3, 3).$$

$$\text{Resultado: } 432 x_1^3 y_1^3 x_2^3 y_2^3 x_3^3 y_3^3 + 216 x_1^3 y_1^3 x_2^3 y_2^3 x_3 y_3 \hbar + 1944 x_1^3 y_1^3 x_2^2 y_2^2 x_3^2 y_3^2 \hbar + 216 x_1^3 y_1^3 x_2 y_2 x_3^3 y_3^3 \hbar + 648 x_1^3 y_1^3 x_2^2 y_2^2 x_3 y_3 \hbar^2 + 648 x_1^3 y_1^3 x_2 y_2 x_3^2 y_3^2 \hbar^2 + 216 x_1^3 y_1^3 x_2 y_2 x_3 y_3 \hbar^3.$$

4.5.13. Función pmonomio

En esta función se hace referencia al algoritmo “Coeficientes normales”, debido a que dentro de la solución del tercer algoritmo, es útil por optimización y reutilización de código.

- Parámetros de entrada: Recibe dos vectores con los exponentes de la variable x_i y y_i respectivamente y un número entero .
- Funcionalidad: Esta función calcula el producto estrella de monomios donde i es el número entero que recibe como parámetro.
- Valor de retorno: Un polinomio.

Ejemplo 60. Llamado a la función: $pmonomio([2, 3, 4], [4, 5, 6], 3)$

$$\text{Resultado: } x_3^9 y_3^{15} + 48 x_3^8 y_3^{14} \hbar + 852 x_3^7 y_3^{13} \hbar^2 + 7080 x_3^6 y_3^{12} \hbar^3 + 28800 x_3^5 y_3^{11} \hbar^4 + 54720 x_3^4 y_3^{10} \hbar^5 + 41760 x_3^3 y_3^9 \hbar^6 + 8640 x_3^2 y_3^8 \hbar^7.$$

4.6. Funcionabilidad

Las funciones sacar, sacar2, sacar3 son utilizadas para resolver un problema computacional, el cuál consiste en convertir los parámetros recibidos por el usuario, a un lenguaje algorítmico.

4.6.1. Función sacar

- Parámetros de entrada: Dos números enteros y tres matrices.
- Funcionalidad: Construye un vector con los exponentes de x_1 y y_1 .
- Valor de retorno: Una lista de dos posiciones.

Ejemplo 61. Llamado a la función: $\text{sacar}\left(3, 2, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}\right)$;
Resultado: $[[1, 1, 3], [5, 9, 1]]$.

4.6.2. Función sacar2

- Parámetros de entrada: Dos números enteros y tres matrices.
- Funcionalidad: Construye un vector con los exponentes de x_2 y y_2 .
- Valor de retorno: Una lista de dos posiciones.

Ejemplo 62. Llamado a la función: $\text{sacar2}\left(3, 2, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}\right)$;
Resultado: $[[2, 3, 1], [6, 10, 6]]$.

4.6.3. Función sacar3

- Parámetros de entrada: Dos números enteros y tres matrices.
- Funcionalidad: Construye un vector con los exponentes de x_3 y y_3 .
- Valor de retorno: Una lista de dos posiciones.

Ejemplo 63. Llamado a la función: $\text{sacar3}\left(3, 2, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}\right)$;
Resultado: $[[3, 5, 6], [7, 5, 7]]$.

4.6.4. Función coinvariantes

Dado $(n!)^{m-1} \prod_{i=1}^m \left(\overline{\prod_{j=1}^n X_j^{A_{ij}}} \right)$, este algoritmo calcula $\overline{\prod_{j=1}^n X_j^{A_{ij}}}$, explicado en la Definición 28.

Por ejemplo:

$$\overline{x_1^3 y_1^4 x_2^5 y_2^6} = \{x_1^3 y_1^4 x_2^5 y_2^6, x_1^3 y_1^4 x_2^5 y_2^6, x_1^5 y_1^6 x_2^3 y_2^4\}.$$

- Parámetros de entrada: Una matriz y dos números enteros.
- Funcionalidad: Calcula los coinvariantes, realizando las diferentes permutaciones por filas.
- Valor de retorno: Una lista de matrices.

Ejemplo 64. Si se desea calcular los coinvariantes de $x_1^3 y_1^4 x_2^5 y_2^8 x_3^3 y_3^6$, es necesario acceder a la función de la siguiente forma.

Llamado a la función: $\text{coinvariantes} \left(\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}, 3, 3 \right)$;

Resultado:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \right].$$

4.6.5. Función main

Este algoritmo produce la expresión (4.3), para $m = n = 3$.

- Parámetros de entrada: Dos números enteros y una lista de matrices.
- Funcionalidad: Usando las funciones anteriores realiza la multiplicación entre todos los coinvariantes de cada posición de la lista de matrices.
- Valor de retorno: El polinomio resultante de todas las operaciones.

Ejemplo 65. Llamado a la función: $\text{main}\left(\left(\left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right]\right)\right)$;

Resultado: $2x_1^3y_1^3x_2^3y_2^3x_3^3y_3^3 + 3x_1^3y_1^3x_2^3y_2^3x_3y_3\hbar + 27x_1^3y_1^3x_2^2y_2^2x_3^2y_3^2\hbar +$
 $18x_1^3y_1^3x_2^2y_2^2x_3y_3\hbar^2 + 27x_1^2y_1^2x_2^2y_2^2x_3^2y_3^2\hbar^2 + 3x_1^3y_1^3x_2y_2x_3y_3\hbar^3 +$
 $27x_1^2y_1^2x_2^2y_2^2x_3y_3\hbar^3 + 9x_1^2y_1^2x_2y_2x_3y_3\hbar^4 + x_1y_1x_2y_2x_3y_3\hbar^5$

Conclusiones

Una vez finalizado este trabajo de tesis, obtuvimos las siguientes conclusiones:

- Dentro de los resultados esperados se pudieron realizar ejemplos para $m = 3$ y $n = 2, 3, 4, 5$. Para ello, fue necesario programar las fórmulas "Álgebra de Weyl", (4.1) y las "Coordenadas Normales", (4.2). De acuerdo a lo anteriormente mencionado, los algoritmos programados fueron base para la programación de las "Funciones Simétricas Cuánticas", (4.5).
- Es preciso realizar algunas mejoras al código de programación para lograr que los algoritmos obtenidos sean más eficientes, todo con el fin de aprovechar al máximo recursos disponibles como funciones ya implementadas por el software Maple.
- Debido a la cantidad de cuentas involucradas en el tercer algoritmo, para el caso general, los ejemplos logrados se vieron un poco restringidos. Para poder lograr ejemplos más complejos, es necesario contar con recursos físicos mas amplios como computadores con mas velocidad y capacidad de procesamiento.

Bibliografía

- [1] Atiyah, M. F.; Singer, I. M. *The index of elliptic operators on compact manifolds.* Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963) 422–433. 57.50 Bandelloni, Giuseppe(I-GENOE-IP); Lazzarini, Serge(NL-AMST-TP).
- [2] Bayen, F.; Flato, M.; Fronsdal, C.; Lichnerowicz, A.; Sternheimer, D. *Deformation theory and quantization. II. Physical applications.* Ann. Physics **111** (1978), no. 1, 111–151.
- [3] Bergeron, François *Algebraic combinatorics and coinvariant spaces.* CMS Treatises in Mathematics. Canadian Mathematical Society, Ottawa, ON; A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2009. viii+221 pp. ISBN: 978-1-56881-324-0.
- [4] Díaz, Rafael; Pariguán, Eddy, *Quantum symmetric functions.* Comm. Algebra **33** (2005), no. 6, 1947–1978.
- [5] Díaz, Rafael; Pariguán, Eddy, *Super quantum and non-commutative species.* Afr. Diaspora J. Math. (N.S.) **8** (2009), no. 1, 90–130.
- [6] Díaz, Rafael; Pariguán, Eddy, *Symmetric quantum Weyl algebras.* Ann. Math. Blaise Pascal **11** (2004), no. 2, 187–203.
- [7] Laurent Manivel, *Symmetric Functions, Schubert Polynomials and Degeneracy Loci.* Bull. Amer. Math. Soc. **3** (1998), Chapter one, 7–15.

- [8] Louis-Victor de Broglie. *Recherches sur la théorie des quanta (Researches on the quantum theory)*, Thesis Paris, (1924).
- [9] Louis-Victor de Broglie. *Ondes et mouvements (Waves and motions)*, Gauthier-Villars, Paris, (1926).
- [10] Dirac, P. A. M. (*Printsipy kvantovo mekhaniki*). (Russian) (The principles of quantum mechanics) Translated from the 4th English ed. by Yu. N. Demkov and G. F. Drukarev; edited and with a preface by V. A. Fok. Gosudarstv. Izdat. Fis.-Mat. Lit., Moscow (1960) 434 pp.
- [11] Drinfeld, V. G. *Quantum groups*. (Russian) Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 155 (1986), *Differentsialnaya Geometriya, Gruppy Li i Mekh.* VIII, 18–49, 193; translation in J. Soviet Math. 41 (1988), no. 2, 898–915.
- [12] Einstein, Albert. *Relativity: The Special and General Theory* (1920).
- [13] M. Flato, *Deformation view of physical theories*, *Czechoslovak J. Phys.* B32 (1982) 472-475, Conférence Moshé Flato (1999), Math. Phys. Stud. 22, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (2000), 31-41.
- [14] M. Flato, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. *Deformations 1-Différentiables d'algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér.A **279** (1974), 877-881; *Compositio Math.* 31 (1975), 47-82.
- [15] Gerstenhaber, Murray *The cohomology structure of an associative ring*. Ann. of Math. (2) **78** 1963 267-288.
- [16] Inonu, E.; Wigner, E. P. *On the contraction of groups and their representations*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **39**, (1953). 510-524.
- [17] Kodaira-Spencer, *Deformation of complex structures and Lagrangian field theory*. (English summary) J. Math. Phys. **39** (1998), no. 7, 3619–3642.

- [18] Kontsevich, Maxim *Deformation quantization of Poisson manifolds*. Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157-216.
- [19] Kontsevich, Maxim(F-IHES) *Deformation quantization of Poisson manifolds*. (English summary) Lett. Math. Phys. 66 (2003), no. 3, 157–216.
- [20] A. A. Michelson and E.W. Morley, Philos. Mag. S.5, 24 (151), 449-463 (1887).
- [21] J.E. Moyal. *Quantum mechanics as a statistical theory*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **45** (1949), 99-124.
- [22] M. Planck. *Planck's law and the light quantum hypothesis*, volume 15, no 1 (1994) 3-7.
- [23] Omori, Hideki; Maeda, Yoshiaki; Yoshioka, Akira. *Deformation quantization of Poisson algebras*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **68** (1992), no. 5, 97–100.
- [24] Raymond A. Serway. *Physics for Scientists and Engineers*, volume 3 (1990) 1150.
- [25] Vey, Jacques *Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique*. (French) Comment. Math. Helv. **50** (1975), no. 4, 421–454.