

**DISEÑO Y SIMULACIÓN DE CONTROLADOR PREDICTIVO
PARA SUSPENSIÓN MACPHERSON ACTIVA**

CARLOS ARTURO GIRALDO GUTIÉRREZ

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
BOGOTÁ D.C

2014

DISEÑO Y SIMULACIÓN DE CONTROL PREDICTIVO PARA SUSPENSIÓN
MACPHERSON ACTIVA
CARLOS ARTURO GIRALDO GUTIÉRREZ

TRABAJO EN INVESTIGACIÓN
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA

DIRECTOR

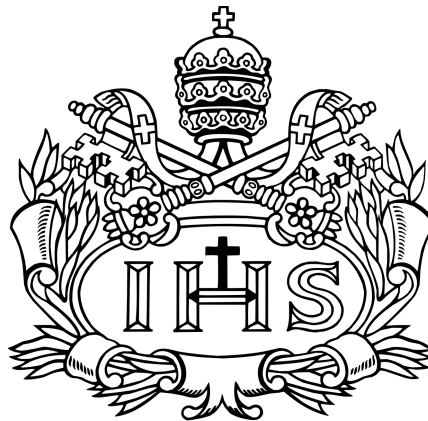
ING. DIEGO ALEJANDRO PATIÑO GUEVARA,. Ph. D.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
BOGOTÁ D.C.
2014

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FACULTAD DE INGENIERÍA

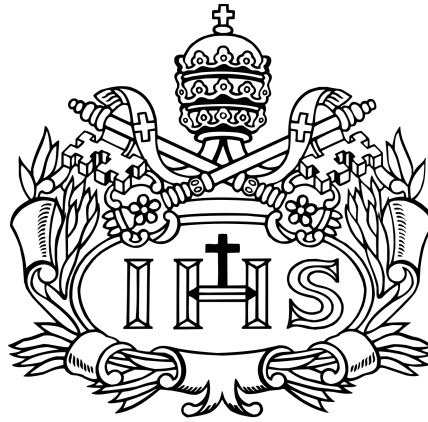
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA



RECTOR MAGNÍFICO
DECANO ACADÉMICO
DECANO DEL MEDIO UNIVERSITARIO
DIRECTOR DE MAESTRÍA
DIRECTOR DE PROYECTO

R.P. JORGE HUMBERTO PELAEZ S.J.
ING. JORGE LUIS SANCHEZ M.Sc
R.P. ANTONIO JOSE SARMIENTO S.J.
ING. CESAR NIÑO Ph.D
ING. DIEGO PATIÑO Ph.D

DISEÑO Y SIMULACIÓN DE CONTROL PREDICTIVO PARA SUSPENSIÓN
MACPHERSON ACTIVA



Carlos A. Giraldo

Departamento de Ingeniería

Pontificia Universidad Javeriana

Tesis presentada para el grado de Master en Ingeniería Electrónica

Mayo 2014

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Contexto	1
1.2. Estado del Arte	3
1.3. Planteamiento del Problema	5
1.4. Objetivos	5
1.4.1. Objetivo General	5
1.4.2. Objetivos Específicos	6
1.5. Contribución y Organización	6
2. Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson	9
2.1. Modelo Planar de la Suspensión	9
2.1.1. Comprobación del Modelo No Lineal	13
2.2. Linealización y Comprobación de Respuesta en Tiempo y Frecuencia	18
2.2.1. Comprobación de Respuesta en Tiempo	19
2.2.2. Comprobación de Respuesta en Frecuencia	23
2.3. Resumen de Modelos	24
3. Estimador de Estados	26
3.1. Diseño del Estimador de Estados con Filtro Kalman	28
3.2. Comportamiento del Filtro Kalman	31
4. Control Predictivo Basado en Modelo - MPC	37
4.1. Diseño de Controlador Predictivo Basado en Modelo	38
4.2. Comportamiento de la Suspensión Macpherson con Control MPC	41
4.2.1. Respuesta Temporal	43
4.2.2. Respuesta en Frecuencia	46
5. Comportamiento de Suspensión Activa con Estimador Kalman y Control Predictivo	47
5.1. Comparación del Comportamiento del Sistema de Control con Estimador de Estados	47
5.2. Comparación de Comportamientos con Control Predictivo y Control por Realimentación de Estados	50

Índice general

6. Controlador Predictivo con Estimador para Suspensión Activa Quanser - Simulación	54
6.1. Diseño del Estimador con Filtro Kalman	56
6.2. Diseño del Controlador Predictivo Basado en Modelo	59
6.3. Suspensión Activa con Control Predictivo y Estimador	62
7. Conclusiones y Recomendaciones Finales	67
8. Anexo A	69
8.1. Modelamiento No lineal de Suspensión Macpherson	69
8.1.1. Ecuaciones Dinámicas de la Suspensión Macpherson	71
9. Anexo B	77
9.1. Modelo de Predicción con Matriz D Diferente de Cero	77
10. Anexo C	81
10.1. Algoritmo de Hildreth	81

Índice de figuras

1.1.1.Suspensiones Independientes Comerciales. a) Macpherson. b) Double Wishbone. c) Multilink.	2
1.2.1.Modelo Convencional de Suspensión	3
1.2.2.(a) Estructura de la suspensión Macpherson ,(b) Modelo planar de la Suspensión Macpherson.	4
2.1.1.Modelo no Lineal de la Suspensión Macpherson.	10
2.1.2.Modelo en Simmechanis de la Suspensión Macpherson.	13
2.1.3.Respuesta de las variables de estado del sistema en simmechanics y del modelo no lineal al escalón en Z_r con una amplitud de $0,05m$	15
2.1.4.Comportamiento del error cuadrático medio del modelo no lineal al incrementar la amplitud del escalón en la superficie de desplazamiento.	16
2.1.5.Respuestas de las variables de estado al escalón en F_a de $1500N$	17
2.1.6.Comportamiento del error cuadrático medio del modelo no lineal al incrementar la amplitud del escalón en la fuerza del actuador.	18
2.2.1.Respuestas de las variables de estado del sistema linealizado y el modelo en simmechanics de la suspensión Macpherson al escalón en Z_r	19
2.2.2.Comportamiento del error cuadrático medio del modelo lineal al incrementar la amplitud del escalón en la superficie de desplazamiento.	20
2.2.3.Respuestas de las variables de estado del sistema linealizado y el modelo en simmechanics de la suspensión Macpherson al escalón en F_a de $1500N$	21
2.2.4.Respuestas de las variables de estado del sistema linealizado y el modelo en simmechanics de la suspensión Macpherson al escalón en F_a de $300N$	22
2.2.5.Comportamiento del error cuadrático medio del modelo lineal al incrementar la amplitud del escalón en la fuerza del actuador.	22
2.2.6.Respuestas en frecuencia del modelo linealizado y del modelo en Simmechanics.	23
3.0.1.Algoritmo Recursivo del Filtro Kalman.	27
3.1.1.Respuestas de Estados al introducirse un estímulo de $1000N$	29
3.2.1.Estados estimados al introducirse un escalón de $0,05m$ en la superficie de desplazamiento.	31
3.2.2.Señal estimada del sensor (Acelerómetro) al introducirse un escalón de $0,05m$ en la superficie de desplazamiento.	32
3.2.3.Estados estimados al introducirse un escalón de fuerza en el actuador de $1000N$	32

Índice de figuras

3.2.4. Señal estimada del sensor (Acelerómetro) al introducirse un escalón de fuerza en el actuador de $1000N$	33
3.2.5. Ampliación de las respuestas del modelo lineal, modelo en simmechanics y estimador Kalman, para perturbación tipo escalón de amplitud $0,05m$	34
3.2.6. Comportamiento del error cuadrático medio de los estados estimados y los estados del modelo lineal con respecto al modelo en simmechanics al incrementar la amplitud del escalón en la superficie de desplazamiento.	35
3.2.7. Comportamiento del error cuadrático medio de los estados estimados y los estados del modelo lineal con respecto al modelo en simmechanics al incrementar la amplitud del escalón en la fuerza del actuador.	35
4.0.1. Idea básica del control predictivo.	37
4.2.1. Comportamiento de la posición del chasis al introducir un escalón en la superficie de desplazamiento de $0,05m$. Comparación de respuestas de sistema controlado con MPC para diferentes parámetros.	42
4.2.2. Respuesta de la suspensión Macpherson al escalón de $0,05m$ en la superficie de desplazamiento.	43
4.2.3. Aceleración vertical (\ddot{Z}_s) del chasis en m/s^2	44
4.2.4. Filtro de ponderación en frecuencias para aceleración vertical en la base del asiento del pasajero definido en en el estándar ISO 2631-1 (1997).	45
4.2.5. Evolución de la función de costo y Señal de control aplicada al sistema.	46
4.2.6. Respuesta en frecuencia de la suspensión Macpherson pasiva y activa.	46
5.1.1. Comportamiento del sistema de control con estimador de estados por filtro Kalman.	48
5.1.2. Respuesta del sistema controlado con medición directa de estados y con estimador.	49
5.1.3. Comportamiento de la función de costo y la señal de control con medición directa de estados y con estimador.	49
5.1.4. Aceleración vertical experimentada con controladores con medida directa de estados y con estimador de estados.	50
5.2.1. Respuestas de los estados de la suspensión Macpherson.	51
5.2.2. Comparación de las aceleraciones en el chasis (\ddot{Z}_s).	52
5.2.3. Respuesta en frecuencia, transmisión de movimiento de perturbaciones en superficie a desplazamiento en chasis.	52
5.2.4. Respuesta en frecuencia, transmisión de movimiento de perturbaciones en superficie a aceleración en el chasis.	53
6.0.1. Modelo de masas suspendidas de la suspensión activa Quanser.	54
6.1.1. Variables de estado del modelo en simmechanic y estimadas por el filtro Kalman.	58
6.1.2. Aceleración suministrada por el sensor y aceleración estimada.	59
6.2.1. Respuestas de estados de suspensión Quanser pasiva y activa con MPC.	61
6.2.2. Fuerza del actuador y función de costo.	61

Índice de figuras

6.2.3. Aceleración del chasis en suspensión pasiva y activa.	62
6.3.1. Respuesta del sistema controlado con medición directa de estados y con estimador.	63
6.3.2. Función de costo y señal de control del sistema.	63
6.3.3. Aceleración del chasis estimada y medida.	64
6.3.4. Respuesta en frecuencia de entrada de perturbación Z_r a desplazamiento del chasis Z_s	65
6.3.5. Respuesta en frecuencia de entrada de perturbación Z_r a aceleración del chasis \dot{Z}_s	65

Índice de cuadros

2.1.1. Definición de variables en el modelamiento matemático de la suspensión Macpherson.	10
2.1.2. Variables de estado definidas en el modelo no lineal.	11
2.1.3. Posiciones de reposo en m de los puntos claves de la suspensión Macpherson.	14
2.1.4. Constantes físicas usadas en los modelos de simmechanics y el modelo no lineal.	14
2.1.5. Características de respuesta temporal al escalón de $0,05m$ en superficie de desplazamiento.	15
2.3.1. Comparación de respuestas temporales de modelos, simmechanics, no lineal y linealizado de la suspensión Macpherson.	25
3.1.1. Desviaciones estándar y varianzas de los estados del modelo lineal con respecto a estados del modelo no lineal (Modelos en Tiempo Continuo).	29
4.2.1. Parámetros del Control Predictivo.	41
4.2.2. Nivel de aceleración ponderada en frecuencia y grado de confort percibido. (ISO 2631-1 (1997))	45
6.0.1. Parámetros de la Suspensión Activa Quanser.	54
6.0.2. Matrices del modelo de medida para filtro Kalman y controlador predictivo basado en modelo.	56
6.2.1. Parámetros del controlador predictivo basado en modelo para la suspensión Quanser.	60

Nota de Advertencia

“La universidad no se hace responsable de los conceptos emitidos por sus alumnos en sus proyectos de grado. Sólo velará porque no se publique nada contrario al dogma y la moral católica y porque los trabajos no contengan ataques o polémicas puramente personales. Antes bien, que se vean en ellos el anhelo de buscar la verdad y justicia”.

Artículo 23 de la Resolución No. 13, del 6 de julio de 1946, por el cual se reglamenta la concerniente Tesis y Exámenes de Grado en la Pontificia Universidad Javeriana.

1 Introducción

1.1. Contexto

Los vehículos de transporte de carga y pasajeros han contribuido en el desarrollo de las sociedades reduciendo el tiempo de desplazamiento entre locaciones distantes, con lo cual se logra un incremento en la producción de las empresas al transportar de forma rápida y segura las materias primas de los productos o el producto terminado. En el caso de transporte de pasajeros se reduce el tiempo de inactividad al momento de viajar, con lo cual se tiene mayor tiempo de producción si se trata de un viaje laboral o de esparcimiento y diversión en el caso de ocio.

Con el avance de la tecnología los vehículos se han hecho más rápidos, por lo cual se han desarrollado diferentes sistemas que incrementan la seguridad de los pasajeros y la carga que se transporta. En el transporte de pasajeros es importante que el viaje sea lo mas seguro y confortable posible, por lo cual se desarrollan diferentes técnicas para mejorar la seguridad y el confort.

El sistema de los vehículos que permite un control en forma directa de la seguridad y confort es la suspensión, la cual tiene como función, aislar las perturbaciones del terreno, mantener un buen agarre entre las ruedas al terreno, soportar el peso estático del vehículo y proveer una buena conducción del vehículo reduciendo las aceleraciones al girar, frenar o acelerar [1].

Las suspensiones pueden ser dependientes o independientes, las dependientes unen dos ruedas por medio de un eje rígido, al cual se acopla a la carrocería por medio de muelles, resortes y amortiguadores. En este tipo de suspensión las perturbaciones en una rueda se transmitirán a la otra a través del eje rígido. Por otro lado las suspensiones independientes acoplan de manera independiente y usando sistemas separados de suspensión cada rueda al vehículo, lo que disminuye las perturbaciones en el vehículo.

Las configuraciones de suspensiones independientes usadas normalmente en los vehículos comerciales son Macpherson, doble winsborn y multilink. La suspensión Macpherson consta de un brazo triangular y un amortiguador sujetos al chasis en forma de triángulo, lo cual genera un desplazamiento angular de la rueda con las variaciones de la superficie de desplazamiento. La suspensión Macpherson es ampliamente utilizada en el mercado debido al bajo costo de su implementación y a los resultados satisfactorios en la estabilidad del

1 Introducción

vehículo. La suspensión doble wishborn, o más conocida como doble triángulo, consta de dos brazos triangulares sujetos al chasis del vehículo, que sostienen y permiten el desplazamiento vertical de la rueda con las variaciones del terreno, con lo cual se garantiza una mejor adherencia de la rueda a la superficie. Esta suspensión es más costosa y se encuentra disponible en vehículos de gama media y alta. La suspensión multilink consta de uniones independientes formadas por los triángulos que sujetan la rueda, por lo cual permite un mejor control de la dinámica de la rueda, esto la hace más compleja y costosa que las anteriores [2]. En la figura 1.1.1, se ilustran los tres tipos de suspensiones mencionadas anteriormente.

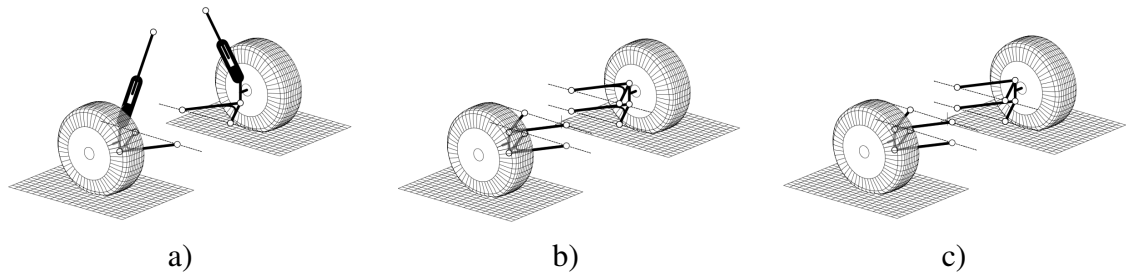


Figura 1.1.1: Suspensiones Independientes Comerciales. a) Macpherson. b) Double Wishbone. c) Multilink.

Fuente: [1]

Las suspensiones independientes se clasifican en tres tipos, suspensión pasiva, suspensión semi-activa y suspensión activa. La suspensión pasiva se encuentra formada principalmente por resortes y amortiguadores dispuestos en una configuración determinada entre las ruedas y el chasis para absorber las vibraciones provenientes de la superficie. En esta suspensión los parámetros que definen la dinámica de cada elemento como el coeficiente de elasticidad y el coeficiente de amortiguación son constantes y se definen en la construcción de los mismos. La suspensión semi-activa consta de los mismos elementos que la suspensión pasiva, pero a diferencia de la suspensión pasiva permite la modificación del coeficiente de amortiguamiento, con lo que es posible realizar un control para disminuir las perturbaciones en la cabina. La suspensión activa cuenta con elementos adicionales (actuadores), que permiten la inyección o disipación de energía en el sistema de suspensión de manera controlada, obteniendo mejores resultados con respecto a las suspensiones pasivas y semi-activas [3].

El estándar ISO 2631-1 (1997) propone diferentes métodos para evaluar el grado de incomodidad del viaje en los vehículos, los cuales a partir de lecturas realizadas por acelerómetros ubicados en diferentes puntos del vehículo, clasifican la incomodidad del viaje percibido por los pasajeros, de esta manera es posible evaluar y comparar el desempeño de las diferentes suspensiones pasivas y activas. Uno de los métodos más utilizados es el

1 Introducción

valor RMS (Root Mean Square) de la aceleración ponderada en frecuencia, el cual se explica detalladamente en el estándar ISO 2631-1 (1997) y ha sido utilizado en trabajos como [4].

1.2. Estado del Arte

Las suspensiones vehiculares independientes activas son modeladas utilizando un sistema de dos grados de libertad denominado modelo convencional, el cual tiene una representación física que usa dos masas unidas mediante un resorte, un amortiguador y un actuador, las dos masas representan la masa suspendida, que en este caso es la masa del chasis del vehículo y la otra, la masa de la rueda. El contacto de la masa de la rueda con la superficie de desplazamiento se modela por medio de un resorte. El modelo convencional se representa gráficamente como se ilustra en la figura 1.2.1. Este modelo ha sido utilizado en trabajos como [5], [6], [7].

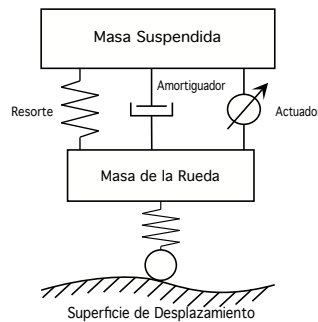


Figura 1.2.1: Modelo Convencional de Suspensión

Haciendo uso del modelo convencional se han desarrollado investigaciones en donde se ha comparado el desempeño de suspensiones activas utilizando diferentes técnicas de control con respecto a la suspensión pasiva, en [8], se diseñaron controladores Robusto H_∞ , LQR y Fuzzy, encontrando que el control H_∞ presenta la menor desviación de la suspensión y el menor tiempo de establecimiento, el controlador LQR presenta un mejor desempeño en términos del movimiento de la masa suspendida (chasis) y su aceleración, por último el controlador Fuzzy requiere menor esfuerzo de control que los anteriores, con lo cual se demostró que cada tipo de control diseñado en las suspensiones activas tiene ventajas y desventajas en comparación con otros diseños propuestos.

Se han diseñado suspensiones activas haciendo uso de la técnica de control predictivo basado en modelo (MPC, Model Predictive Control) y la previsualización información de la superficie de desplazamiento, como en [5], en donde se hace uso del modelo convencional y se obtienen resultados bajo simulación que mejoran significativamente el desempeño de la suspensión con respecto a la suspensión pasiva, proveyendo un desplazamiento con mayor

1 Introducción

confort y movilidad. Adicionalmente en comparación con la técnica de control LQR se obtiene un mejor diseño con el control MPC en presencia de restricciones ya que se satisfacen en el proceso de diseño.

En la figura 1.2.2 se ilustra la estructura mecánica de la suspensión Macpherson y su modelo planar en donde es posible observar que el comportamiento de la suspensión depende de relaciones no lineales de las variables que determinan la posición de cada uno de los elementos que conforman el sistema en un momento determinado.

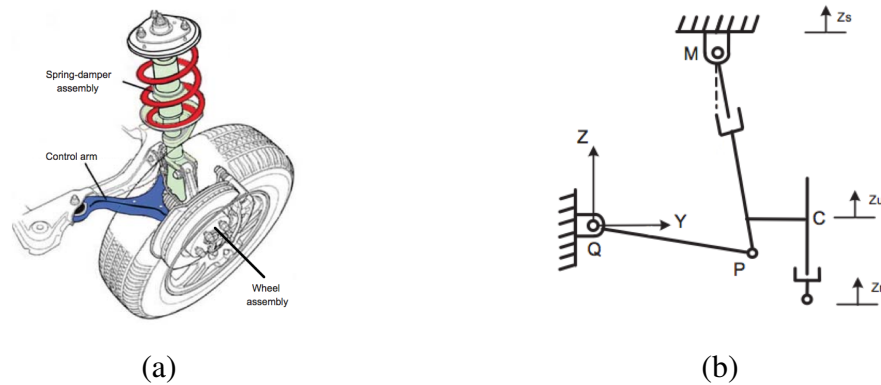


Figura 1.2.2: (a) Estructura de la suspensión Macpherson ,(b) Modelo planar de la Suspensión Macpherson.

Fuente: [9]

En [10] y [11], se se proponen modelos matemáticos no lineales de la suspensión Macpherson, en donde se tienen en cuenta variables como el ángulo de rotación del brazo de control, el momento de inercia de la rueda y el desplazamiento lateral. Los modelos desarrollados permiten observar el comportamiento de variables importantes en la cinemática del vehículo como el ángulo camber (ángulo formado por el plano vertical que atraviesa la rueda y el plano perpendicular a la superficie de desplazamiento) y la distancia entre las ruedas, que son imposibles de obtener en el modelo convencional. Los resultados mediante simulaciones de los modelos matemáticos linealizados son satisfactorios en comparación con los modelos no lineales, permitiendo obtener una buena aproximación del comportamiento cinemático de la suspensión que afecta la maniobrabilidad y estabilidad del vehículo.

Algunas investigaciones han diseñado controles a partir de modelos de suspensión Macpherson linealizados, tal como lo hacen en [12], en donde se diseña una suspensión semi-activa utilizando un control robusto H_{∞} . El comportamiento de la suspensión semi-activa propuesta se compara mediante simulaciones con respecto a la suspensión pasiva, evidenciando mejoras en la cinemática del vehículo.

Las variables como la aceleración y los ángulos formados por la estructura de las suspensiones pueden ser obtenidas con dificultad, debido a esto se han diseñado observadores

de estado para no depender de las medidas directas de estas variables. En [13] proponen un observador de estados utilizando filtros Kalman y un modelo convencional de un cuarto de vehículo. Los observadores de estado han sido utilizados en diferentes diseños de suspensiones activas utilizando diversas estrategias de control, [3] propone un controlador por medio de modos deslizantes (sliding modes) y el uso de un observador de estados a partir del modelo convencional. En este trabajo se obtienen resultados satisfactorios comparando la respuesta del observador y la planta.

1.3. Planteamiento del Problema

El modelo matemático de la suspensión Macpherson es no lineal debido a la disposición geométrica de los elementos que la componen, por lo cual no es adecuado utilizar el modelo convencional para diseñar suspensiones activas sobre la suspensión Macpherson, ya que no se consideran algunas variables presentes en su estructura que influyen significativamente en la maniobrabilidad y estabilidad de los vehículos con este tipo de suspensión.

Los modelos matemáticos disponibles que aproximan la dinámica de la suspensión Macpherson no contemplan suficientes variables, lo cual repercute en el no modelamiento de dinámicas de orden superior, generando incertidumbres en el comportamiento de los sistemas de control diseñados. Adicionalmente algunos modelos no lineales que contemplan gran cantidad de variables no están definidos para algunas posiciones de la suspensión, lo cual dificulta su uso y aplicación en el diseño y simulación de controladores.

La suspensión Macpherson es una suspensión ampliamente utilizada en los vehículos comerciales, debido a su bajo costo y buen desempeño, por lo cual es necesario diseñar sistemas que permitan obtener un mejor desempeño del sistema y aumente la seguridad y confort de pasajeros y carga. Dadas las características de optimización con restricciones establecidas por el control predictivo basado en modelo (MPC), se propone estudiar el comportamiento de la suspensión activa Macpherson con control predictivo.

1.4. Objetivos

Este proyecto tiene los siguientes objetivos general y específicos:

1.4.1. Objetivo General

Diseñar un controlador predictivo basado en modelo para suspensión vehicular Macpherson mediante observador de estados y un modelo de planta no lineal.

1.4.2. Objetivos Específicos

1. Obtener el modelo dinámico no lineal de la suspensión Macpherson a partir de la geometría y las funciones de transferencia de los elementos que la componen incluyendo el actuador.
2. Diseñar el observador de estados para obtener información de las variables de estado que no pueden ser medidas de forma directa o son de adquisición compleja sobre un modelo real.
3. Diseñar el controlador predictivo basado en modelo que minimice la aceleración vertical del chasis teniendo en cuenta las limitaciones en velocidad y respuesta máxima del actuador.
4. Analizar en tiempo y frecuencia el comportamiento del sistema no lineal pasivo, el sistema controlado con realimentación de estados con observador y el sistema con control predictivo basado en modelo con observador.
5. Analizar mediante simulación en MATLAB el desempeño del controlador predictivo en el sistema de suspensión activa Quanser.

1.5. Contribución y Organización

Este trabajo contribuye realizando una nueva propuesta de modelo no lineal de la suspensión Macpherson, teniendo en cuenta variables adicionales que repercuten directamente en la dinámica de la suspensión y que no son tenidos en cuenta en múltiples trabajos previos, adicionalmente expone un modelo matemático que no presenta puntos indeterminados facilitando su uso e implementación en investigaciones futuras. Adicionalmente presenta los resultados obtenidos al simular el sistema de suspensión activa Macpherson mediante simulaciones en MATLAB y Simmechanics, lo cual permite comprobar los resultados del sistema, motivando a la investigación sobre suspensiones activas y el uso de las herramientas usadas y los modelos implementados.

El documento se encuentra organizado en 7 capítulos y su estructura es la siguiente:

Capítulo 1

El Capítulo 1, presenta una introducción a los sistemas de suspensión vehiculares y el estado del arte de las investigaciones realizadas en busca de mejorar estos sistemas. Se presenta la descripción del problema y los objetivos que se desarrollaron.

Capítulo 2

El Capítulo 2, presenta el desarrollo del modelo matemático no lineal obtenido con el apoyo del toolbox de matemática simbólica de MATLAB, los resultados de simulación del sistema no lineal propuesto comparado con los resultados de simulación del modelo implementado en Simmechanics y la linealización del modelo.

Capítulo 3

El Capítulo 3, expone el procedimiento de diseño del observador de estados mediante filtro Kalman y sus resultados simulados sobre el modelo digital de la planta y su simulación y comparación de resultados con el modelo de suspensión Macpherson en Simmechanics.

Capítulo 4

El Capítulo 4, desarrolla el diseño del controlador predictivo basado en modelo - MPC y realiza una propuesta para la realización de esta técnica con modelos lineales en donde sus salidas dependan directamente de las entradas del sistema. Adicionalmente se presentan los resultados de simulaciones en Simmechanics del comportamiento de la suspensión comparando la respuesta del sistema controlado con respecto al sistema de suspensión pasiva.

Capítulo 5

El Capítulo 5, expone los resultados mediante Simulaciones en Simmechanics del sistema controlado usando observador de estados por filtro Kalman y control predictivo basado en modelo, comparandolos con el sistema activo con control por ubicación de polos y el de suspensión pasiva.

Capítulo 6

El Capítulo 6, desarrolla un controlador predictivo para la suspensión lineal activa Quanser, usando un estimador de estados por filtro kalaman. Se comprueban y analizan los resultados obtenidos por simulación en MATLAB, en el domino del tiempo y frecuencia.

Capítulo 7

El Capítulo 7, presenta las conclusiones del trabajo realizado y plantea recomendaciones para trabajos futuros que se realicen sobre esta línea de investigación.

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

2.1. Modelo Planar de la Suspensión

Se han propuesto y desarrollado diferentes modelos matemáticos que describen el comportamiento de la suspensión Macpherson, los cuales parten de relaciones cinemáticas impuestas por el modelo planar establecido y haciendo uso del método de Lagrange determinan las ecuaciones dinámicas de la suspensión. En [14] se desarrolla un modelo matemático en donde se considera la acción del actuador y perturbaciones provenientes de las irregularidades de la superficie de desplazamiento y fuerzas sobre el chasis. Este modelo hace uso de las variables generalizadas Z_s y θ , con lo cual se obtiene un modelo no lineal definido para los puntos de operación normal de la suspensión, sin embargo no tiene en cuenta la fuerza inducida en el desplazamiento lateral y la inercia rotacional de la rueda, adicionalmente se realiza aproximación de las fuerzas generalizadas que reducen su precisión. Este modelo ha sido utilizado en el diseño de suspensiones activas Macpherson como los realizados en [15], [16].

En [10] se propone un modelo no lineal donde se establecen las mismas variables generalizadas que en [14], adicionando al modelamiento las inercias rotacionales del brazo de control y la rueda, sin embargo, no se contempla la fuerza inducida en la rueda por el desplazamiento lateral. Este modelo fue usado en [12] para el diseño de un controlador H_∞ . Una propuesta reciente para el modelo no lineal de la suspensión Macpherson se realiza en [11], en donde consideran las dinámicas de los modelos previos e incluyen la fuerza debida al desplazamiento lateral de la rueda, sin embargo las variables generalizadas establecidas son Z_s y Z_u , lo que implica la necesidad de linealizar varias funciones para obtener las ecuaciones no lineales que determinan la dinámica del sistema. Adicionalmente el modelo no lineal propuesto no se encuentra definido para algunos punto de operación, incluyendo la posición de reposo, lo cual dificulta su uso y aplicación en futuros desarrollos.

El modelo matemático no lineal de la suspensión Macpherson propuesto se fundamenta en los modelos realizados en [10], [11] y [14]. En la figura 2.1.1 se visualiza el modelo planar utilizado en posición de reposo y las variables definidas para su desarrollo. El sistema coordenado de referencia se establece en el punto Q , como se ilustra en la figura 2.1.1. El cuadro 2.1.1 define las variables usadas en el modelamiento matemático.

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

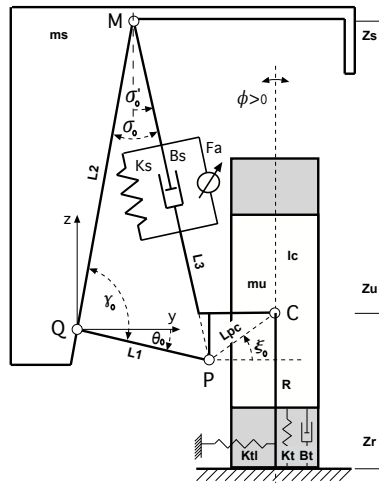


Figura 2.1.1: Modelo no Lineal de la Suspensión Macpherson.

Variable	Unidades	Definición
Q, M, P, C	(m, m)	Puntos claves (y, z) del modelo planar.
L_1	m	Distancia del brazo de control (Entre puntos Q y P).
L_2	m	Distancia entre los puntos Q y M .
L_3	m	Distancia del link de amortiguación (Entre puntos M y P).
L_{pc}	m	Distancia entre los puntos P y C .
R	m	Radio de la Rueda.
θ	rad	Ángulo del brazo de control con respecto a la horizontal.
ϕ	rad	Ángulo de la rueda respecto al eje vertical (Ángulo de Camber).
$\theta_0, \gamma_0, \sigma_0, \sigma'_0, \xi_0$	rad	Ángulos en posición de equilibrio.
m_s	Kg	Masa del chasis.
m_u	Kg	Masa de la Rueda.
I_c	Kg^2/m	Momento de inercia rotacional de la rueda.
K_s	N/m	Constante elástica del resorte en la suspensión.
B_s	Ns/m	Coefficiente de fricción viscosa del amortiguador en la suspensión.
F_a	N	Fuerza del actuador.
K_t	N/m	Constante elástica de la rueda.
B_t	Ns/m	Coefficiente de fricción viscosa de la rueda.
K_{tl}	N/m	Constante elástica del desplazamiento lateral de la rueda.
Z_s	m	Desplazamiento Vertical del Chasis.
Z_u	m	Desplazamiento Vertical de la Rueda.
Z_r	m	Desplazamiento Vertical de las perturbaciones en la vía.

Cuadro 2.1.1: Definición de variables en el modelamiento matemático de la suspensión Macpherson.

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

Mediante la determinación de las ecuaciones que establecen la cinemática de la suspensión Macpherson en torno a su punto de equilibrio y la aplicación del método de Lagrange para las variables generalizadas Z_s y θ , se obtuvo el modelo no lineal de la suspensión Macpherson.

Definiendo las variables de estado del sistema como:

Variable de Estado	Variable
x_1	Z_s
x_2	$\dot{x}_1 = \dot{Z}_s$
x_3	θ
x_4	$\dot{x}_3 = \dot{\theta}$

Cuadro 2.1.2: Variables de estado definidas en el modelo no lineal.

Usando las variables de estado definidas se presenta el modelo no lineal en espacio de estados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, x_3, x_4, Z_r, \dot{Z}_r, F_a) \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= g(x_1, x_2, x_3, x_4, Z_r, \dot{Z}_r, F_a)
 \end{aligned}$$

Donde las funciones f y g son:

$$\begin{aligned}
 f &= [F_4 F_D - F_3 F_A + F_4 F_E - F_4 Q_2 + (-B_t F_A + F_4 F_2) \dot{Z}_s + (B_t F_A - F_4 F_2) \dot{Z}_r \\
 &\quad - (F_2 F_A + F_4 F_C) \dot{\theta} - (F_1 F_A + F_4 F_B) \dot{\theta}^2] / (F_A (m_s + m_u) - F_4^2)
 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

$$\begin{aligned}
 g &= -[(m_s + m_u)(F_D + F_E) - Q_2(m_s + m_u) - F_3 F_4 + (B_t F_4 - F_2(m_s + m_u)) \dot{Z}_r \\
 &\quad + (F_2(m_s + m_u) - B_t F_4) \dot{Z}_s + (F_C(m_s + m_u) - F_2 F_4) \dot{\theta} \\
 &\quad + (F_B(m_s + m_u) - F_1 F_4) \dot{\theta}^2] / (F_B(m_s + m_u) - F_4^2)
 \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Y las funciones auxiliares:

$$F_1 = -m_u(L_1 d' + \frac{L_{cp} L_1 \cos \xi_o}{\cos \sigma_o} (\frac{c'}{L_3} - \frac{3b^2 c'^3}{4L_3^5} + \frac{3bc' d'}{2L_3^3}))$$

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

$$F_2 = B_t(L_1b' - \cos\xi_0e')$$

$$F_3 = -K_t(Z_{co} + Z_r - Z_s - L_1a' - L_{pc}\text{sen}\xi_0 + e'(\frac{\text{sen}\sigma_o}{L_1} - \frac{c'}{L_3}))$$

$$F_4 = m_u(L_1b' - \cos\xi_0e')$$

$$F_A = m_u((L_1b' - \cos\xi_0e')^2 + (L_1a' - \text{sen}\xi_0e') + \frac{I_c e'^2}{L_{cp}^2})$$

$$F_B = -m_u(\frac{L_{cp}L_1}{\cos\sigma_o}(\frac{c'}{L_3} - \frac{3b^2c'^3}{4L_3^5} + \frac{3bc'd'}{2L_3^3})(L_1\cos(\theta + \theta_o - \xi_0) - e') - e'L_1\text{sen}(\theta + \theta_o - \xi_0)) + \frac{I_c e' L_1}{L_{cp}\cos\sigma_o}(\frac{c'}{L_3} - \frac{3b^2c'^3}{4L_3^5} + \frac{3bc'd'}{2L_3^3})$$

$$F_C = B_t(L_1b' - \cos\xi_0e')^2 + \frac{B_s b^2 c'^2}{4L_3^2}$$

$$F_D = -K_t(L_1b' - \cos\xi_0e')(Z_{co} + Z_r - Z_s - L_1a' - L_{cp}\text{sen}\xi_0 + L_{cp}\cos\xi_0\phi) - K_{tl}(\frac{Re'}{L_{cp}} + L_1a' - \text{sen}\xi_0e')(L_1b' - Y_{co} + L_{cp}\cos\xi_0 + (L_{cp}\text{sen}\xi_0 - R)\phi)$$

$$F_E = K_s \frac{bc'(L_{03} - L_3)}{L_3}$$

$$L_3 = (a - bd')^{1/2}$$

$$Q_2 = -F_a L_1 \cos(\frac{L_1 c'}{\cos\sigma_o L_3} - \text{Tan}\sigma_o - \theta + \sigma'_o - \theta_o)$$

$$\begin{aligned} a &= L_1^2 + L_2^2 & b &= -L_1 L_2 & a' &= \text{sen}(\theta + \theta_o) & b' &= \cos(\theta + \theta_o) \\ c' &= \text{sen}(\gamma_o - \theta) & d' &= \cos(\gamma_o - \theta) & e' &= \frac{L_{pc} L_1}{\cos\sigma_o} (\frac{d'}{L_3} - \frac{bc'^2}{2L_3^3}) \end{aligned}$$

En el anexo A se encuentra el procedimiento matemático detallado asistido mediante el uso de las herramientas de matemática simbólica de MATLAB para la obtención de las ecuaciones anteriores. En el CD anexo se encuentra el archivo *NewModelSymb.m* en donde se encuentra la programación en MATLAB para la obtención del modelo no lineal propuesto.

2.1.1. Comprobación del Modelo No Lineal

El modelo no lineal obtenido se comprobó a partir de la comparación de respuestas temporales de las variables de estado ($Z_s, \dot{Z}_s, \theta, \dot{\theta}$) del modelo no lineal y el modelo en simmechanics de MATLAB al introducirse señales tipo escalón en la perturbación de la superficie de desplazamiento (Z_r) y en la fuerza ejercida por el actuador (F_a).

El modelo no lineal propuesto se desarrolló en línea de código y se determinó su respuesta por medio de la función `ode45()` de MATLAB con un tiempo de muestreo de $1ms$. En el CD anexo se encuentran el archivo `NewMacpherson.m` y las funciones usadas por esta para determinar la solución numérica del sistema. El modelo en simmechanics de la suspensión Macpherson se ilustra en la figura 2.1.2. En el CD anexo se encuentra el archivo `Macpherson_simmechanics.slx`. El solver seleccionado para dar solución al sistema en simmechanics fue `ode4()` de paso fijo de $1ms$, con el fin de obtener soluciones con resolución temporal suficiente para capturar las dinámicas de los modelos en simmechanics y el modelo no lineal desarrollado.

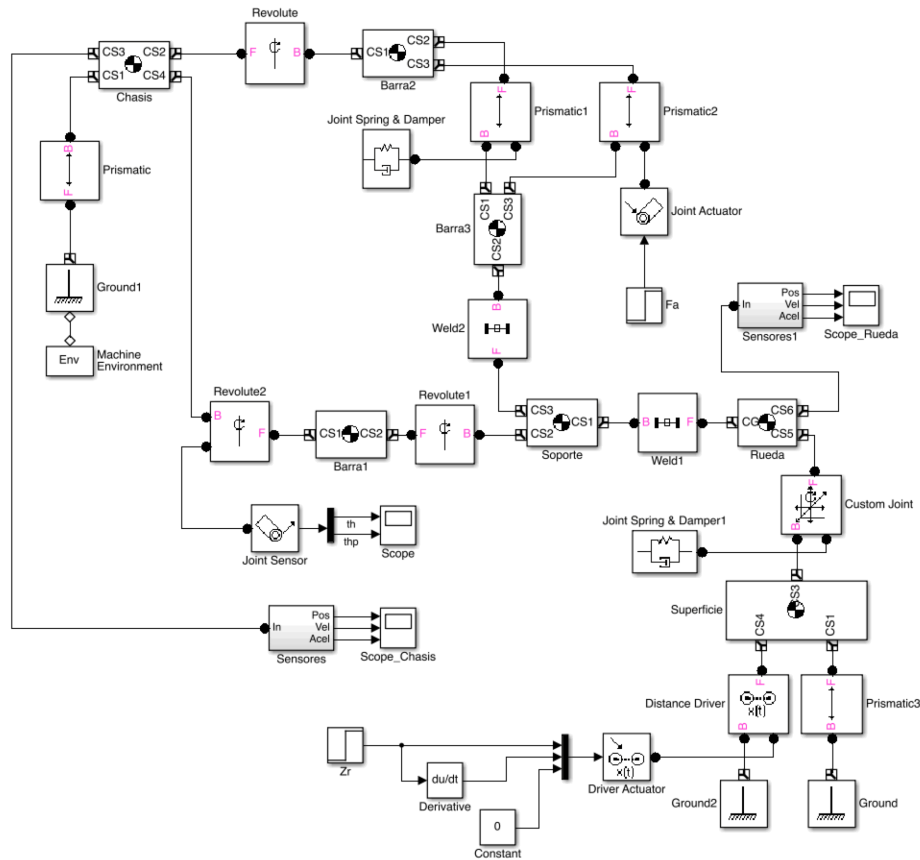


Figura 2.1.2: Modelo en Simmechanics de la Suspensión Macpherson.

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

Los valores de las constantes físicas de la suspensión Macpherson y los valores de las posiciones de equilibrio de los puntos claves Q_0 , M_0 , P_0 y C_0 se tomaron de [11] y se usan en los dos modelos. En el cuadro 2.1.3 se encuentran los valores de las posiciones de reposo de los puntos claves de la suspensión, medidas desde el sistema de referencia ubicado en Q . En el cuadro 2.1.4 se indican los valores numéricos usados en las constantes físicas del modelo.

Punto Clave	Q_0	M_0	P_0	C_0
Posición en Y (m)	$Y_{qo} = 0,0000$	$Y_{mo} = 0,1074$	$Y_{po} = 0,2490$	$Y_{co} = 0,0275$
Posición en Z (m)	$Z_{qo} = 0,0000$	$Z_{mo} = 0,5825$	$Z_{po} = -0,0608$	$Z_{co} = 0,3721$

Cuadro 2.1.3: Posiciones de reposo en m de los puntos claves de la suspensión Macpherson.

Constante Física	Unidades	Valor
m_s	Kg	453
m_u	Kg	71
K_s	N/m	17658
B_s	Ns/m	1950
K_t	N/m	183887
B_t	Ns/m	2500
K_{tl}	N/m	50000
R	m	0,29
I_c	Kg^2/m	0,021

Cuadro 2.1.4: Constantes físicas usadas en los modelos de simmechanics y el modelo no lineal.

La señal de perturbación que se seleccionó es de tipo escalón, con un valor de $0,05m$ de amplitud, la cual fue usada en [11] para comparar el modelo no lineal propuesto con la respuesta simulada en ADAMS (Software de simulación de dinámicas multicuerpo - <http://www.mscsoftware.com/product/adams>) de la suspensión Macpherson.

A continuación en la figura 2.1.3 se ilustran las respuestas de las variables de estado del sistema en simmechanics y del modelo no lineal al introducirse una perturbación Z_r de forma escalón con una amplitud de $0,05m$, a un tiempo de $0,5s$.

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

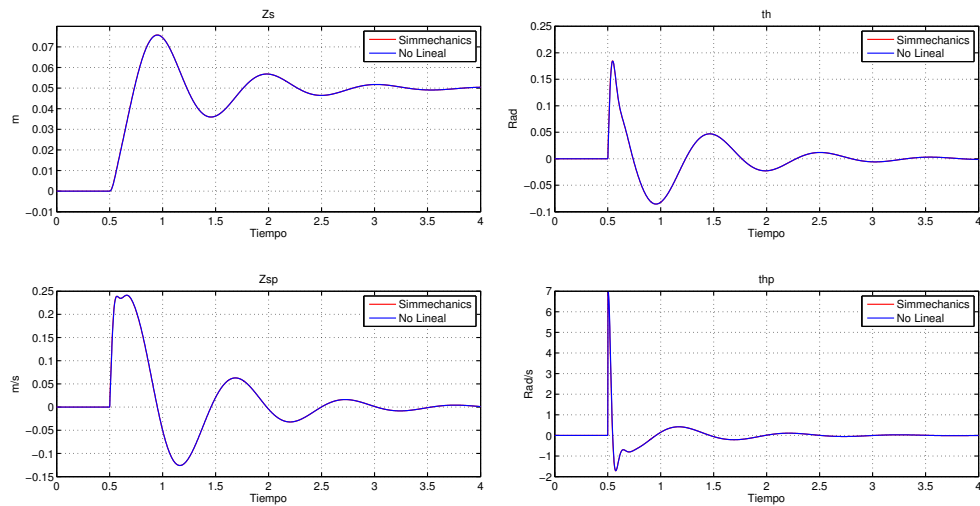


Figura 2.1.3: Respuesta de las variables de estado del sistema en simmechanics y del modelo no lineal al escalón en Z_r con una amplitud de $0,05m$.

Se puede observar que el modelo no lineal desarrollado representa con precisión la dinámica de la suspensión Macpherson desde la entrada de perturbación en la superficie de desplazamiento para todas las variables de estado definidas en el modelo. En el cuadro 2.1.5 se encuentran los datos que caracterizan la respuesta a un escalón de amplitud $0,05m$ en la superficie de desplazamiento para el modelo en ADAMS y el modelo no lineal propuesto en [11], así como los resultados obtenidos con el nuevo modelo no lineal propuesto en este trabajo.

Modelo	ADAMS	No Lineal [11]	No lineal Propuesto
Sobre Paso Máximo (%)	54.4	40.8	51.6
Tiempo a Sobre Paso Máximo (s)	0.45	0.5	0.45
Frecuencia Natural Amortiguada (Rad/s)	5.71	5.87	5.91

Cuadro 2.1.5: Características de respuesta temporal al escalón de $0,05m$ en superficie de desplazamiento.

Es posible observar que el comportamiento del modelo no lineal propuesto presenta una mejora significativa en el comportamiento temporal usando como referencia los resultados de simulación en ADAMS con respecto al modelo no lineal desarrollado en [11], siendo mas preciso en el sobre paso máximo y en el tiempo en el que ocurre, sin embargo la frecuencia natural amortiguada es similar en los dos modelos no lineales.

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

En la figura 2.1.4 se observa el comportamiento del error cuadrático medio de los estados del modelo no lineal propuesto, con respecto al comportamiento de los estados del modelo en simmechanics, al variar la amplitud del escalón de perturbación en la superficie de desplazamiento. La amplitud máxima del escalón en perturbación introducida fue de $0,2m$, la cual genera un desplazamiento y compresión significativa del brazo de control y del link del sistema de amortiguación, sin llevar el modelo a posiciones imposibles en un sistema real. La simulación se realizó por un periodo de tiempo de 4 segundos donde el escalón de perturbación se introdujo a los 0.5 segundos.

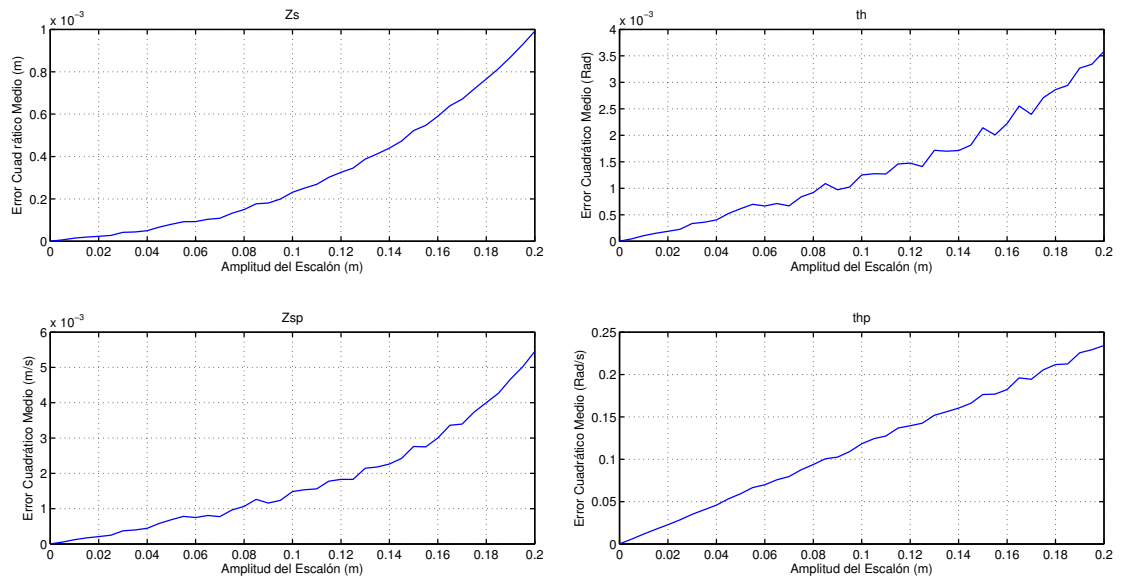


Figura 2.1.4: Comportamiento del error cuadrático medio del modelo no lineal al incrementar la amplitud del escalón en la superficie de desplazamiento.

Observando el comportamiento del error cuadrático medio, se comprueba que el modelo no lineal propuesto incrementa su error a medida que las perturbaciones introducidas llevan al modelo fuera de las consideraciones realizadas para el modelamiento, no obstante, el error se mantiene lo suficientemente bajo al introducirse perturbaciones que no lleven el modelo a posiciones imposibles para un sistema real.

A continuación se ilustran las respuestas de las variables de estado al introducirse un escalón de $1500N$ en la fuerza del actuador.

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

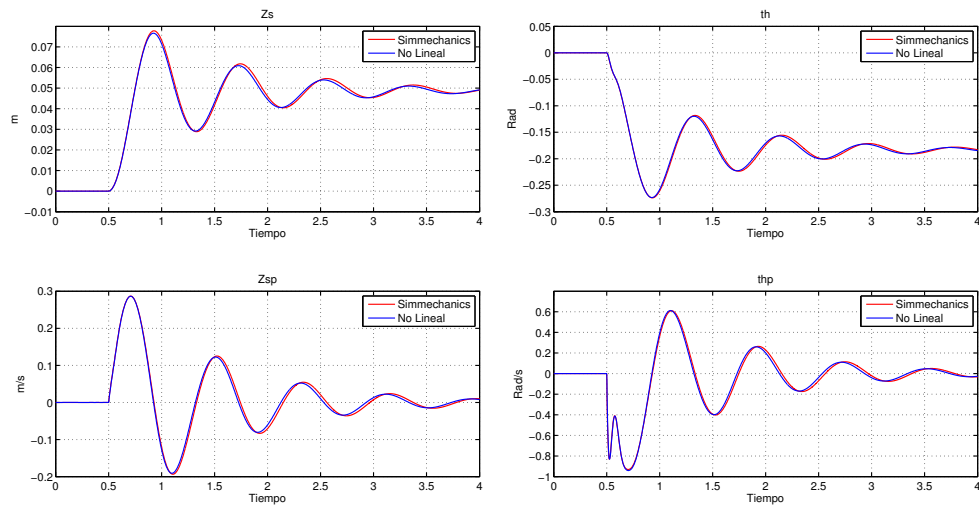


Figura 2.1.5: Respuestas de las variables de estado al escalón en F_a de $1500N$.

Los resultados anteriores evidencian una buena precisión del modelo al representar las dinámicas debidas al actuador, no obstante se aprecia una leve perdida de precisión, la cual se debe a la consideración de variaciones pequeñas en el ángulo ϕ y a las aproximaciones realizadas en la formulación del modelo no lineal. En este caso la magnitud de la fuerza aplicada por el actuador, ocasiona que el ángulo ϕ real tome valores lo suficientemente grandes como para que las aproximaciones realizadas no se cumplan satisfactoriamente.

En la figura 2.1.6 se observa el comportamiento del error cuadrático medio de los estados del modelo no lineal propuesto, con respecto al comportamiento de los estados del modelo en simmechanics, al variar la amplitud del escalón de fuerza en el actuador. La amplitud máxima del escalón de fuerza del actuador fue de $5000N$, la cual genera un desplazamiento y elongación significativa del brazo de control y del link del sistema de amortiguación, sin llevar el modelo a posiciones imposibles en un sistema real. La simulación se realizo por un periodo de tiempo de 4 segundos donde el escalón de perturbación se introdujo a los 0.5 segundos.

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

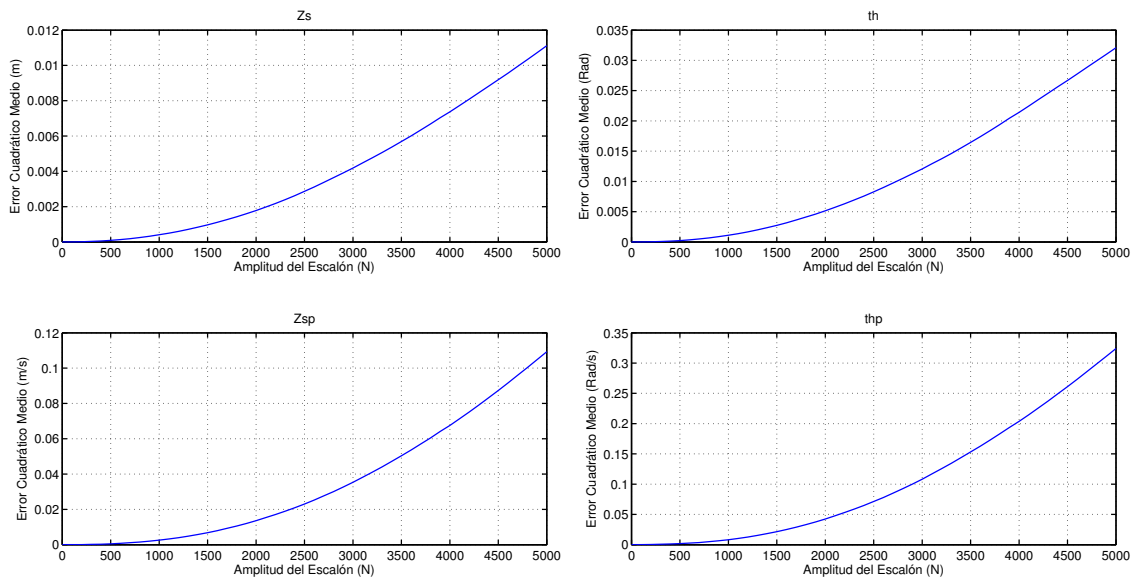


Figura 2.1.6: Comportamiento del error cuadrático medio del modelo no lineal al incrementar la amplitud del escalón en la fuerza del actuador.

Los resultados anteriores evidencian un crecimiento en el error cuadrático medio al incrementarse la magnitud del escalón de fuerza del actuador, sin embargo, el error se mantiene bajo, incluso en puntos de operación donde el actuador lleva el sistema a desplazamientos significativos y cercanos a configuraciones imposibles en un sistema real. Adicionalmente, en el caso de usar un actuador que suministre la fuerza máxima de 5000N para implementar el sistema de control, este valor será introducido por periodos pequeños de tiempo, lo que reduce el error en el modelo.

Expuestos los resultados simulados del modelo no lineal propuesto con respecto al modelo en simmechanics de la suspensión Macpherson, se concluye que el modelo no lineal tiene una excelente precisión, incluso para puntos de operación que alejan el sistema de las consideraciones realizadas en el modelamiento matemático.

2.2. Linealización y Comprobación de Respuesta en Tiempo y Frecuencia

La linealización del modelo se realiza mediante la aplicación de las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables de estado del sistema y la evaluación en el punto de operación deseado. En este caso el punto de equilibrio del sistema es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$, debido a que el modelo matemático se desarrollo a partir de

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

las ecuaciones que determinan las variaciones con respecto a los puntos de equilibrio. Debido a la alta complejidad de las funciones f y g , las derivadas parciales son calculadas y evaluadas mediante las herramientas de matemática simbólica de MATLAB dentro del archivo *NewModelSymb.m*, obteniendo el siguiente modelo lineal en espacio de estados de la suspensión Macpherson.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -11,2768 & -153,3118e-3 & 7,9477 & 777,3457e-3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9,2807e3 & -126,1746 & -2,8071e3 & -56,3970 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1,7942e-3 & 11,2768 & 153,3118e-3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -49,0265e-3 & 9,2807e3 & 126,1746 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.1. Comprobación de Respuesta en Tiempo

Para el análisis del comportamiento temporal del sistema lineal versus el modelo en simmechanics se realizaron simulaciones sobre los sistemas al introducir señales tipo escalón en la superficie de desplazamiento y en la fuerza ejercida por el actuador.

A continuación se ilustran en la figura 2.2.1 las respuestas de las variables de estado al introducir una perturbación tipo escalón de 0.05m de amplitud, en un tiempo de 0,5s en la superficie de desplazamiento.

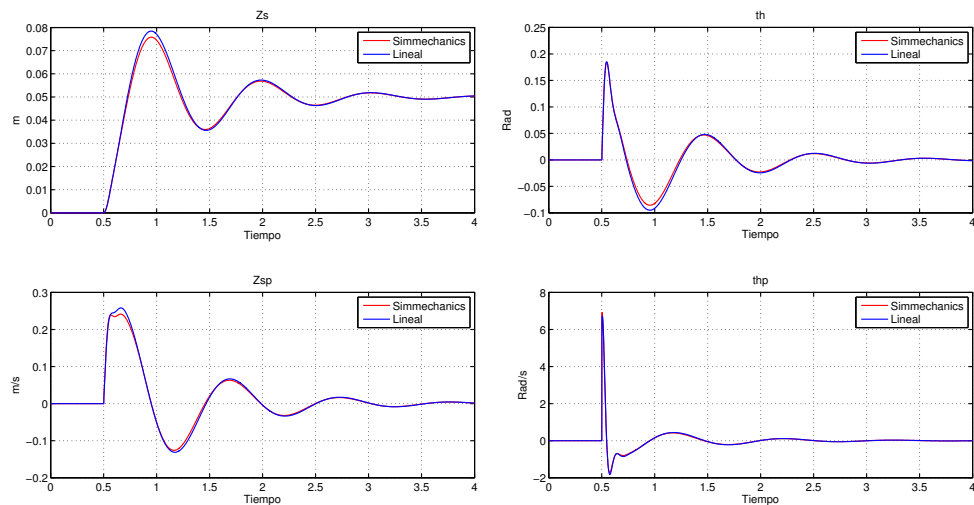


Figura 2.2.1: Respuestas de las variables de estado del sistema linealizado y el modelo en simmechanics de la suspensión Macpherson al escalón en Z_r .

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

Es posible apreciar la similitud de las respuestas obtenidas por los modelos, sin embargo se aprecia una desmejora al seguir las dinámicas más rápidas, con respecto a las respuestas obtenidas con el modelo no lineal.

En la figura 2.2.2 se observa el comportamiento del error cuadrático medio de los estados del modelo lineal propuesto con respecto al comportamiento de los estados del modelo en simmechanics al variar la amplitud del escalón de perturbación en la superficie de desplazamiento. La simulación se realizó por un periodo de tiempo de 4 segundos donde el escalón de perturbación se introdujo a los 0.5 segundos.

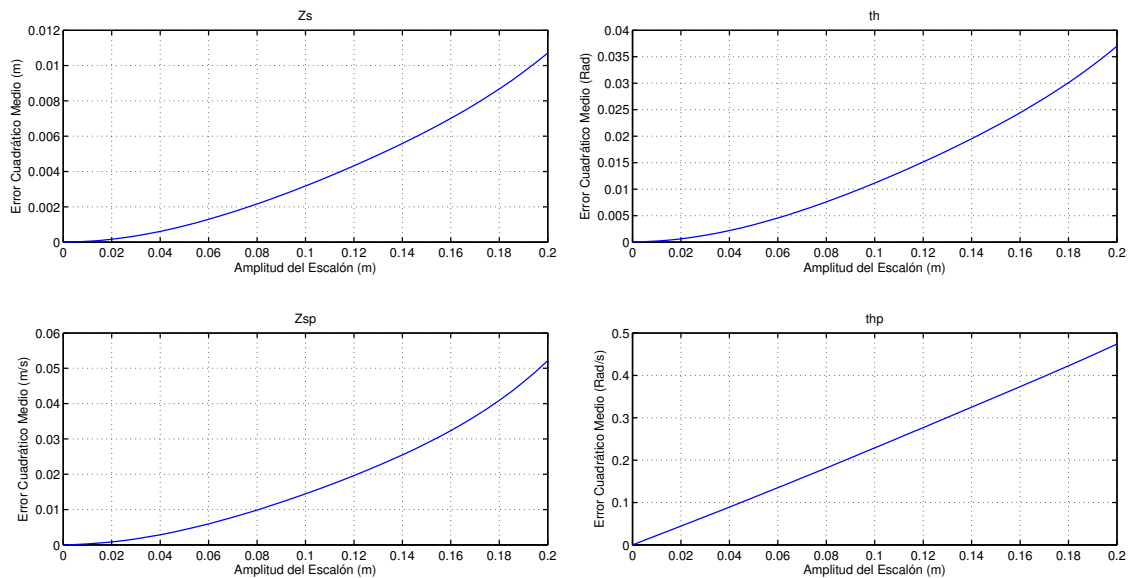


Figura 2.2.2: Comportamiento del error cuadrático medio del modelo lineal al incrementar la amplitud del escalón en la superficie de desplazamiento.

El error cuadrático medio del sistema lineal se incrementa a medida que la amplitud del escalón de perturbación en la superficie se aumenta. Amplitudes grandes en la señal de perturbación llevan el sistema lineal a operar fuera de las cercanías del punto de operación. Es necesario aclarar que en una suspensión de un sistema real es extraño que se presenten perturbaciones de amplitudes tipo escalón superiores a $0,05m$, puesto que el conductor evitará estas irregularidades de la vía o reducirá la velocidad de desplazamiento al sobre pasarlas para evitar daños en la rueda o la suspensión.

En la figura 2.2.3 se ilustran las respuestas de las variables de estado del sistema al introducir un escalón de $1500N$ en la fuerza aplicada por el actuador.

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

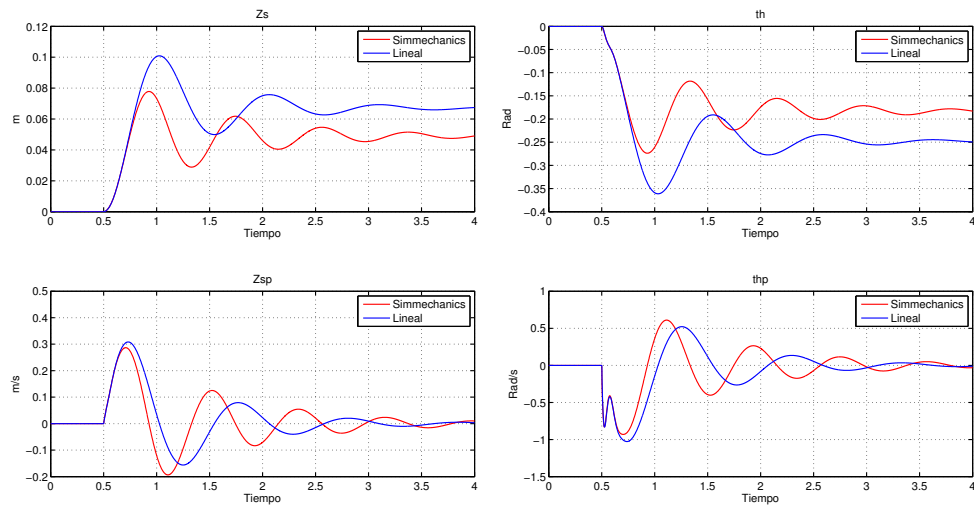


Figura 2.2.3: Respuestas de las variables de estado del sistema linealizado y el modelo en simmechanics de la suspensión Macpherson al escalón en F_a de $1500N$.

La respuesta del sistema lineal difiere significativamente de la respuesta del modelo en simmechanics de la suspensión Macpherson lo cual se debe a que el sistema lineal representa el sistema de manera adecuada en las cercanías del punto de operación establecido y la magnitud de la fuerza aplicada ($1500N$) causa que el sistema se aleje de dicho punto de operación. La fuerza \vec{F}_a se aplica de manera longitudinal entre los puntos M y P del sistema, debido a esto, a medida que varía el ángulo θ también lo hacen las componentes de fuerza que actúan sobre los cuerpos rígidos del chasis y la rueda, en este caso, para grandes magnitudes de la fuerza aplicada el modelo lineal no representa adecuadamente la dinámica del sistema.

A continuación se ilustra en la figura 2.2.4 la respuesta del sistema al introducirse un escalón de fuerza en el actuador de $300N$, en la cual puede apreciarse como al disminuir la magnitud de la fuerza el sistema se distancia en menor proporción del punto de equilibrio, causando que el modelo lineal represente con mayor precisión el sistema de suspensión Macpherson.

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

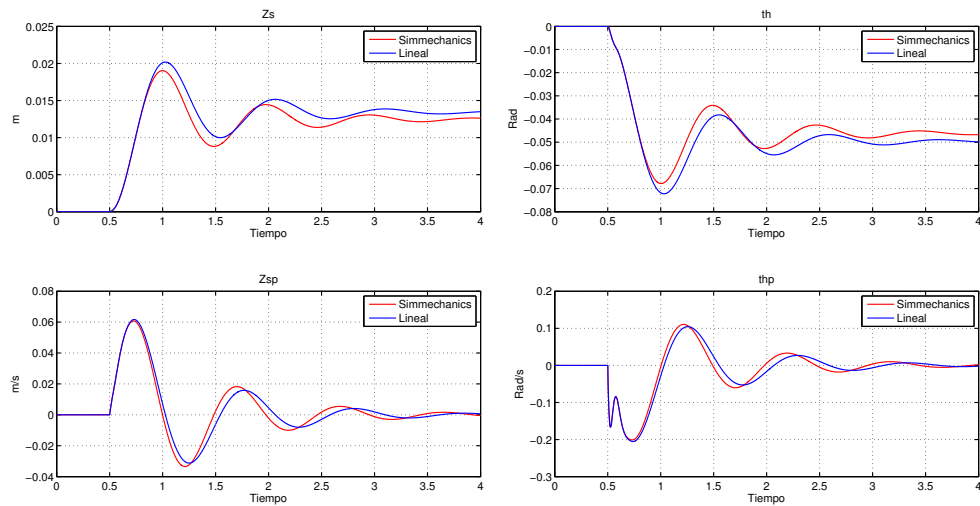


Figura 2.2.4: Respuestas de las variables de estado del sistema linealizado y el modelo en simmechanics de la suspensión Macpherson al escalón en F_a de 300N.

En la figura 2.2.5 se observa el comportamiento del error cuadrático medio de los estados del modelo lineal propuesto con respecto al comportamiento de los estados del modelo en simmechanics al variar la amplitud del escalón fuerza en el actuador. La simulación se realizó por un periodo de tiempo de 4 segundos donde el escalón de perturbación se introdujo a los 0.5 segundos.

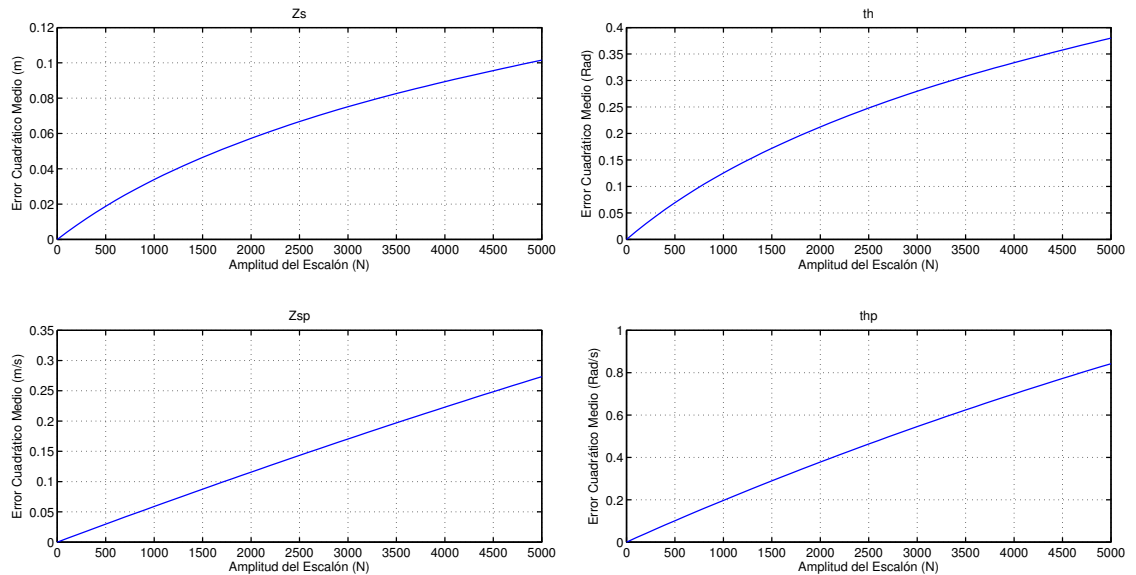


Figura 2.2.5: Comportamiento del error cuadrático medio del modelo lineal al incrementar la amplitud del escalón en la fuerza del actuador.

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

Se observa como a medida que se incrementa la amplitud en el escalón de fuerza aplicada el modelo lineal incrementa rápidamente su error cuadrático medio al alejarse del punto de reposo del sistema. El modelo lineal no es adecuado para representar la suspensión Macpherson cuando la magnitud de la fuerza aplicadas por el actuador es grande. Sin embargo, la necesidad de aplicar una fuerza de control constante de magnitud elevada es poco frecuente, haciendo que el modelo lineal sea una buena opción para representar la suspensión Macpherson, reduciendo significativamente la complejidad en el diseño del controlador y el costo computacional en la implementación con respecto a las técnicas no lineales.

2.2.2. Comprobación de Respuesta en Frecuencia

Con el objetivo de realizar la comparación de la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, se determino mediante la herramienta de Estimación de Respuesta en Frecuencia de Simulink, las respuestas en frecuencia desde las entradas de perturbación de la superficie de desplazamiento Z_r y la de fuerza del actuador F_a con las variables de salida Z_s y θ del modelo Macpherson y las respuestas en frecuencia del modelo lineal en los mismos casos. A continuación se ilustra la comparación de las respuestas en frecuencia.

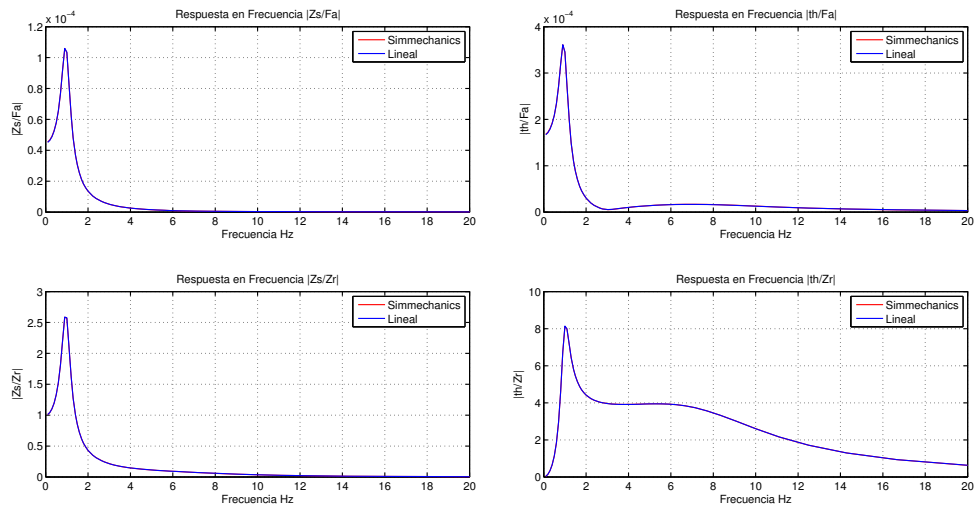


Figura 2.2.6: Respuestas en frecuencia del modelo linealizado y del modelo en Simmechanics.

Observando las respuestas en frecuencia del sistema linealizado y del modelo en simmechanics, las cuales se encuentran sobrepuestas es claro que el modelo lineal representa con precisión la dinámica del sistema, sin embargo es necesario recordar y tener presente que el modelo lineal representa las dinámicas entorno al punto de equilibrio, por lo cual, si existen perturbaciones que lleven la suspensión lejos del punto de equilibrio[14], las respuestas del

sistema lineal diferirán de las respuestas del modelo en simmechanics, tal como se aprecia en las respuestas en el tiempo al introducir una fuerza con magnitud de 1500N.

2.3. Resumen de Modelos

El modelo en simmechanics se estableció como el modelo de respuesta ideal de la suspensión Macpherson, construido siguiendo el modelo planar de la figura 2.1.1 y usando las variables y valores de los cuadros 2.1.1, 2.1.3 y 2.1.4. Las respuestas obtenidas por el modelo en simmechanics son consistentes con las respuestas expuestas en [11], comprobando el adecuado comportamiento del modelo desarrollado.

El modelo no lineal propuesto cuenta con alta precisión para representar las dinámicas de la suspensión Macpherson, comparando las respuestas de los estados con respecto a los datos simulados del modelo en simmechanics, haciendo de este una excelente opción para el desarrollo de aplicaciones de control. El error cuadrático medio de las respuestas en los estados del sistema se incrementa a medida que las amplitudes de los estímulos en fuerza y en perturbación en la superficie de desplazamiento aumentan, no obstante si se compara el orden del error cuadrático en los estados con el orden de las respuestas de los estados, se concluye que el error no es significativo.

El modelo linealizado representa con exactitud y precisión el comportamiento de la suspensión Macpherson al rededor del punto de operación, lo cual ocurre cuando los estímulos en fuerza y perturbación en la vía son de amplitudes bajas. La respuesta en frecuencia evidencia una excelente precisión del modelo lineal para representar la suspensión Macpherson, siempre y cuando no opere alejado del punto de reposo. A medida que los estímulos alejan la suspensión del punto de operación el error del modelo lineal se incrementa, haciendo que el modelo difiera considerablemente con respecto a los valores ideales tomados del modelo en simmechanics.

En el cuadro 2.3.1 se encuentra la comparación de la respuesta temporal de Z_s de los modelos, simmechanics, no lineal y linealizado de la suspensión Macpherson para diferentes amplitudes en los estímulos de entrada tipo escalón.

2 Modelamiento Matemático de la Suspensión Macpherson

Escalón en Z_r de 0,05m de amplitud					
Modelo	Simmechanics	No Lineal	% Error	Linealizado	% Error
Sobre Pico (m)	0,07576	0,07576	0,0	0,07844	3,5
Tiempo de Establecimiento al 2% (s)	2,695	2,686	-0,3	2,698	0,1
Estado Estable (m)	0,05	0,05	0,0	0,05	0,0
Escalón en Z_r de 0,1m de amplitud					
Modelo	Simmechanics	No Lineal	% Error	Linealizado	% Error
Sobre Pico (m)	0,1479	0,1476	-0,2	0,1569	6,0
Tiempo de Establecimiento al 2% (s)	2,686	2,674	-0,4	2,698	0,4
Estado Estable (m)	0,1	0,1	0,0	0,1	0,0
Escalón en Z_r de 0,2m de amplitud					
Modelo	Simmechanics	No Lineal	% Error	Linealizado	% Error
Sobre Pico (m)	0,2916	0,2905	-0,3	0,3138	7,6%
Tiempo de Establecimiento al 2% (s)	2,659	2,642	-0,6	2,698	1,4
Estado Estable (m)	0,2	0,2	0,0	0,2	0,0
Escalón en F_a de 500N de amplitud					
Modelo	Simmechanics	No Lineal	% Error	Linealizado	% Error
Sobre Pico (m)	0,03054	0,03040	-0,4	0,03364	10,1
Tiempo de Establecimiento al 2% (s)	2,562	2,546	-0,6	2,762	7,8
Estado Estable (m)	0,01983	0,01979	-0,2	0,02236	12,7
Escalón en F_a de 1000N de amplitud					
Modelo	Simmechanics	No Lineal	% Error	Linealizado	% Error
Sobre Pico (m)	0,05602	0,05549	-0,9	0,06728	20,0
Tiempo de Establecimiento al 2% (s)	2,858	2,768	-3,1	2,762	-3,3
Estado Estable (m)	0,03579	0,03563	-0,4	0,04472	24,9
Escalón en F_a de 2000N de amplitud					
Modelo	Simmechanics	No Lineal	% Error	Linealizado	% Error
Sobre Pico (m)	0,09684	0,09491	-1,9	0,1346	38,9
Tiempo de Establecimiento al 2% (s)	3,947	3,533	-10,4	2,762	-30,0
Estado Estable (m)	0,06045	0,05992	-0,8	0,08944	47,9

Cuadro 2.3.1: Comparación de respuestas temporales de modelos, simmechanics, no lineal y linealizado de la suspensión Macpherson.

Se aprecia como el modelo no lineal mantiene porcentajes de error bajos con respecto al modelo de simmechanics en las características de respuesta transitoria para las diferentes amplitudes en las señales de entrada. El modelo lineal presenta porcentajes de error bajos cuando se estimula con la señal de perturbación en la superficie de desplazamiento, por otra parte, incrementa rápidamente el error con la señal de estímulo proveniente del actuador del sistema, esto debido a la configuración de la suspensión Macpherson, la cual causa que las fuerzas aplicadas a la rueda y al chasis tengan un comportamiento altamente no lineal.

3 Estimador de Estados

El filtro Kalman es un estimador lineal óptimo recursivo que minimiza el error cuadrático medio entre los estados reales del sistema y los estados estimados, teniendo en cuenta variables estocásticas que representan las incertidumbres en los estados del sistema y en las señales que capturan los sensores.

Partiendo del siguiente modelo de sistema digital:

$$\begin{aligned}x_k &= Fx_{k-1} + Gu_{k-1} + w_{k-1} \\y_k &= Cx_k + Du_k + v_k\end{aligned}\tag{3.0.1}$$

Donde F , G , C y D son las matrices que definen el sistema dinámico digital, y w y v son variables estocásticas con media cero y covarianzas Q y R respectivamente que representan las incertidumbres en el modelo y las medidas.

El filtro Kalman opera en dos etapas denominadas, de predicción y corrección respectivamente. En la etapa de predicción se realiza la estimación a priori de las variables de estado (\hat{x}_k^-) a partir del modelo matemático del sistema, las variables de estado estimadas en el ciclo anterior (\hat{x}_{k-1}^+) y las entradas del sistema del ciclo anterior (u_{k-1}), adicionalmente se realiza la actualización a priori de la matriz de covarianzas del error (P_k^-). En la etapa de corrección se determina la ganancia del filtro Kalman (K) que minimiza el error cuadrático medio entre los estados estimados y los estados reales del sistema, se actualizan los estados estimados (\hat{x}_k^+) a partir de la ganancia del filtro y las medidas adquiridas por los sensores (y_k), y se realiza la actualización de la matriz de covarianzas del error (P_k^+).

En la figura 3.0.1 se ilustra el procedimiento recursivo para implementar el algoritmo del filtro Kalman digital.

3 Estimador de Estados

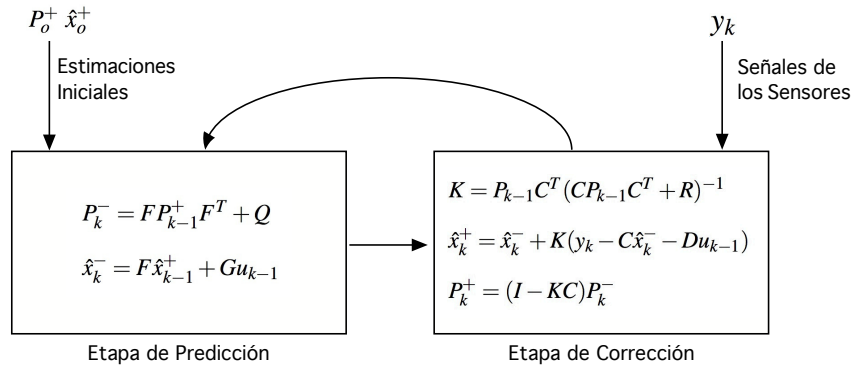


Figura 3.0.1: Algoritmo Recursivo del Filtro Kalman.

En donde \hat{x} indica estados estimados, los superíndices negativos estimación a priori y los superíndices positivos estimación a posteriori o corregida, y P es la matriz de covarianzas del error de estimación de los estados del sistema. Si el lector desea profundizar en la fundamentación teórica del filtro Kalman puede consultar las fuentes [17], [18].

Es importante tener claridad que las matrices Q y R se establecen de acuerdo con las características de las incertidumbres en los estados del sistema y de las mediciones realizadas por los sensores. Normalmente estas matrices se definen por el comportamiento del sistema real que en la mayoría de los casos se trata de un sistema continuo, por lo cual la matriz Q_c y R_c del sistema continuo diferirán de la matriz Q y R del sistema digital debido al proceso de digitalización.

En este trabajo se implementa el filtro Kalman para realizar la estimación de las variables de difícil adquisición como el ángulo θ del brazo de control y su tasa de cambio, a partir de la adquisición de la aceleración vertical del chasis y las señales de fuerza del actuador y perturbación de la superficie que se aplican al sistema. Adicionalmente el estimador reducirá las perturbaciones debidas a ruido en los sensores y a errores de modelamiento, que se encontrarán presentes debido al uso de un modelo linealizado.

El filtro Kalman ha sido utilizado para realizar la estimación de estados en diferentes trabajos, en [19] se usa esta técnica para determinar los estados de una turbina de viento, demostrando mediante simulación que los estados estimados por el filtro Kalman hacen que el control sea de mejor calidad a pesar de las perturbaciones e incertidumbres. En [20] se realiza la implementación y comparación del filtro Kalman lineal y filtro Kalman extendido para determinar los estados de una central térmica no lineal, llegando a la conclusión que el filtro Kalman extendido realiza una mejor estimación de los estados pero requiere mayor costo de computo que el filtro lineal. En este trabajo se usa el filtro Kalman lineal debido a su menor costo computacional comparado con el filtro extendido, ya que esto facilitará su implementación y disminuirá su costo debido al uso de dispositivos de computo con menores prestaciones.

El trabajo realizado en [21] analiza el comportamiento de dos propuestas de filtro Kalman para estimar los estados de una suspensión convencional, donde la diferencia entre las dos es la inclusión de la señal de perturbación en la superficie de desplazamiento, encontrando que la propuesta sin la señal de perturbación no estima de manera adecuada los estados del sistema, por otra parte la inclusión de dicha información en la segunda propuesta hace que los estados se estimen de manera adecuada. En el desarrollo de este trabajo se realizaron las dos propuestas obteniendo resultados similares, por lo cual se incluyó dentro del diseño del filtro Kalman la señal de perturbación en la superficie de desplazamiento.

Las propuestas de diseño e implementación del filtro Kalman disponibles en [17] y [18], no contemplan los sistemas que cuentan con una relación directa de las entradas del sistema con las salidas del mismo, es decir, asumen que la matriz D es nula. En este trabajo se incluyó dentro del algoritmo del filtro Kalman la matriz D y las entradas del sistema correspondientes a el estímulo del actuador y la perturbación en la superficie de desplazamiento, con lo cual se logra una adecuada estimación de las variables del estado del sistema.

3.1. Diseño del Estimador de Estados con Filtro Kalman

El filtro Kalman se diseñó a partir del modelo linealizado y digitalizado con una frecuencia de muestreo de $100Hz$ ($T_s = 10ms$), la cual se definió 5 veces más alta que el ancho de banda del sistema, el cual es inferior a $20Hz$ de acuerdo con las respuestas en frecuencia obtenidas en la comprobación del modelo linealizado. Es recomendable por precisión de modelo digital usar frecuencias de muestreo mucho más altas que el ancho de banda del sistema, sin embargo existen restricciones impuestas por el hardware con que se implementará el filtro Kalman, ya que a frecuencias de muestreo más elevadas los requerimientos en velocidad de procesamiento deben ser mayores, para tener la capacidad de solucionar las ecuaciones del algoritmo en un tiempo no mayor al tiempo de muestreo.

La información tomada del sistema para desarrollar la estimación de estados es la aceleración del chasis (\ddot{Z}_s), la cual puede ser medida con facilidad en un sistema real utilizando un acelerómetro. Adicionalmente se tiene en cuenta para su diseño que se conoce la magnitud y dirección de la fuerza aplicada al sistema (F_a), así como la señal proveniente de las perturbaciones en la superficie de desplazamiento (Z_r).

La Matriz Q de covarianzas de las incertidumbres en los estados se determinó mediante el cálculo de las varianzas de los estados del modelo lineal con respecto al modelo no lineal al introducirse una señal de estímulo que alejara el sistema de su punto de operación. En este caso la señal que lleva el sistema a operar fuera del punto de equilibrio con mayor rapidez es F_a , por lo cual se estableció un estímulo de $1000N$. En la figura 3.1.1 se visualizan las respuestas del sistema linealizado y del modelo en simmechanics.

3 Estimador de Estados

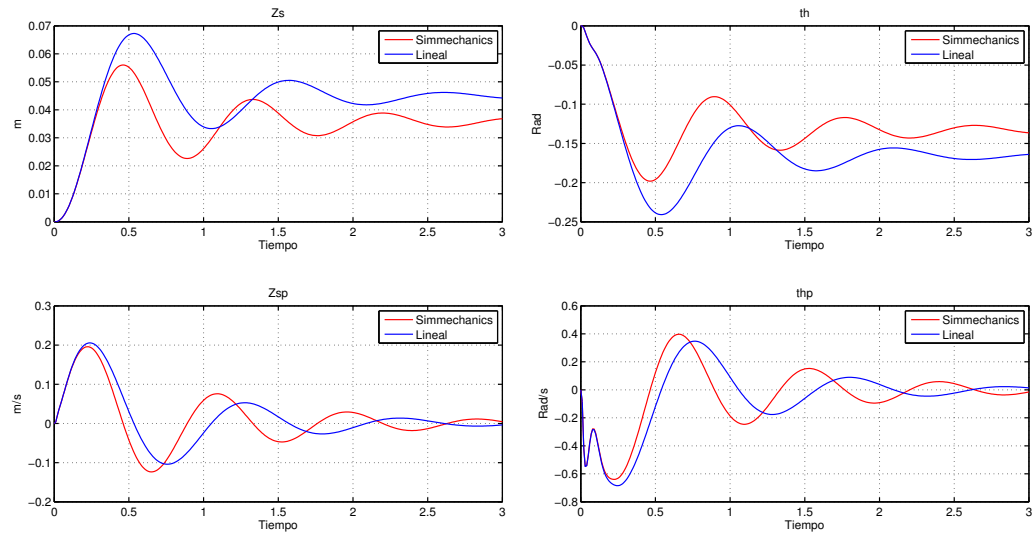


Figura 3.1.1: Respuestas de Estados al introducirse un estímulo de 1000N.

En el cuadro 3.1.1 se muestran los resultados obtenidos al calcular las desviaciones estándar y varianzas de las respuestas del modelo lineal con respecto a las respuestas del modelo no lineal al introducir un escalón de fuerza en el actuador de amplitud 1000N.

Variable de Estado	Desviación Estándar	Varianza
Z_s	$6,8972 \cdot 10^{-3} m$	$47,5714 \cdot 10^{-6} m^2$
\dot{Z}_s	$40,5625 \cdot 10^{-3} m/s$	$1,6453 \cdot 10^{-3} m^2/s^2$
θ	$23,3332 \cdot 10^{-3} rad$	$544,4382 \cdot 10^{-6} rad^2$
$\dot{\theta}$	$134,8686 \cdot 10^{-3} rad/s$	$18,1895 \cdot 10^{-3} rad^2/s^2$

Cuadro 3.1.1: Desviaciones estándar y varianzas de los estados del modelo lineal con respecto a estados del modelo no lineal (Modelos en Tiempo Continuo).

La matriz R que representa las covarianzas de las incertidumbres en los sensores, se determinará a partir de las características de los instrumentos de medida, que en este caso, es un acelerómetro que tiene una desviación estándar igual a $\pm 5mg$, lo que equivale a $\pm 0,049 m/s^2$, este dato se encuentra dentro del rango de los acelerómetros disponibles en el mercado, adicionalmente este valor corresponde al sensor que se encuentra en la suspensión activa Quanser [22], por tanto la señal de ruido que se superpone a la señal del acelerómetro tiene la desviación estándar mencionada.

Los datos mencionados con anterioridad corresponden a los datos obtenidos del sistema continuo, por lo cual es necesario transformarlos para obtener su equivalente en el sistema discreto. La matriz Q se obtiene a partir del método de Van Loan's [17] y la matriz R del

3 Estimador de Estados

sistema discreto es equivalente a la matriz del sistema continuo dividida sobre el tiempo de muestreo, esta demostración se encuentra en [23].

A continuación se muestran los valores numéricos del modelo digital de la suspensión Macpherson de acuerdo a 3.0.1:

Modelo digital lineal de la suspensión Macpherson (Tiempo de muestreo 10ms):

$$F = \begin{bmatrix} 998,3770 \cdot 10^{-3} & 9,9733 \cdot 10^{-3} & 76,2012 \cdot 10^{-6} & 32,7705 \cdot 10^{-6} \\ -416,6003 \cdot 10^{-3} & 992,7132 \cdot 10^{-3} & -12,7249 \cdot 10^{-3} & 5,9608 \cdot 10^{-3} \\ -378,6022 \cdot 10^{-3} & -6,4791 \cdot 10^{-3} & 885,2409 \cdot 10^{-3} & 7,2777 \cdot 10^{-3} \\ -67,4688 & -1,2959 & -20,4806 & 469,7785 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 85,1971 \cdot 10^{-9} & 1,6230 \cdot 10^{-3} & 22,0652 \cdot 10^{-6} \\ 16,5236 \cdot 10^{-6} & 416,6003 \cdot 10^{-3} & 5,6638 \cdot 10^{-3} \\ -2,0695 \cdot 10^{-6} & 378,6022 \cdot 10^{-3} & 5,1472 \cdot 10^{-3} \\ -373,7569 \cdot 10^{-6} & 67,4688 & 917,2638 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$C = [-11,2768 \quad -153,3118 \cdot 10^{-3} \quad 7,9477 \quad 775,3457 \cdot 10^{-3}]$$

$$D = [1,8202 \cdot 10^{-3} \quad 11,2768 \quad 153,3118 \cdot 10^{-3}]$$

Las matrices de covarianzas de incertidumbres en estados Q y en sensores R usadas en el filtro Kalman digital :

$$Q = \begin{bmatrix} 475,8231 \cdot 10^{-9} & 4,6938 \cdot 10^{-9} & -63,3020 \cdot 10^{-9} & -18,0723 \cdot 10^{-6} \\ 4,6938 \cdot 10^{-9} & 16,3885 \cdot 10^{-6} & 25,6524 \cdot 10^{-9} & -6,5628 \cdot 10^{-6} \\ -63,3020 \cdot 10^{-9} & 25,6524 \cdot 10^{-9} & 5,0391 \cdot 10^{-6} & -54,9686 \cdot 10^{-6} \\ -18,0723 \cdot 10^{-6} & -6,5628 \cdot 10^{-6} & -54,9686 \cdot 10^{-6} & 1,8814 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$R = [240 \cdot 10^{-3}]$$

La matriz Q se obtuvo aplicando el algoritmo de Van Loan's a la matriz de covarianzas del sistema continuo, la cual es una matriz diagonal con los valores de varianzas indicados en el cuadro 3.1.1. La matriz R se obtuvo a partir de varianza del sensor (cuadrado de la desviación estándar) dividida en el tiempo de muestreo.

3.2. Comportamiento del Filtro Kalman

Con el objetivo de comprobar el funcionamiento del estimador de estados por filtro Kalman se utilizó el modelo no lineal de la suspensión Macpherson, del cual se tomaron las señales de estímulo del sistema F_a , Z_r y \dot{Z}_r , así como la señal de aceleración vertical del chasis, a la cual se adicionó una señal de ruido gaussiano para simular la incertidumbre de un sensor real. En el CD anexo se encuentran los archivos *Inic_Kalman_simulink.m* y *Macpherson_simmechanics_kalman.slx*, los cuales inician las variables del filtro Kalman y realizan la simulación del modelo de la suspensión Macpherson en simmechanics, permitiendo observar y comprobar el comportamiento del filtro Kalman.

A continuación se ilustran las respuestas del filtro Kalman comparadas con las variables obtenidas del modelo en simmechanics de la suspensión Macpherson, al introducirse señales provenientes de la superficie de desplazamiento y del actuador del sistema. Las señales serán escalones de diferentes amplitudes con el fin de observar el comportamiento del estimador en diferentes puntos de operación del sistema.

En las figuras 3.2.1 y 3.2.2 se visualizan los estados estimados y la señal del sensor estimada al introducirse un escalón en la superficie de desplazamiento con una amplitud de $0,05m$.

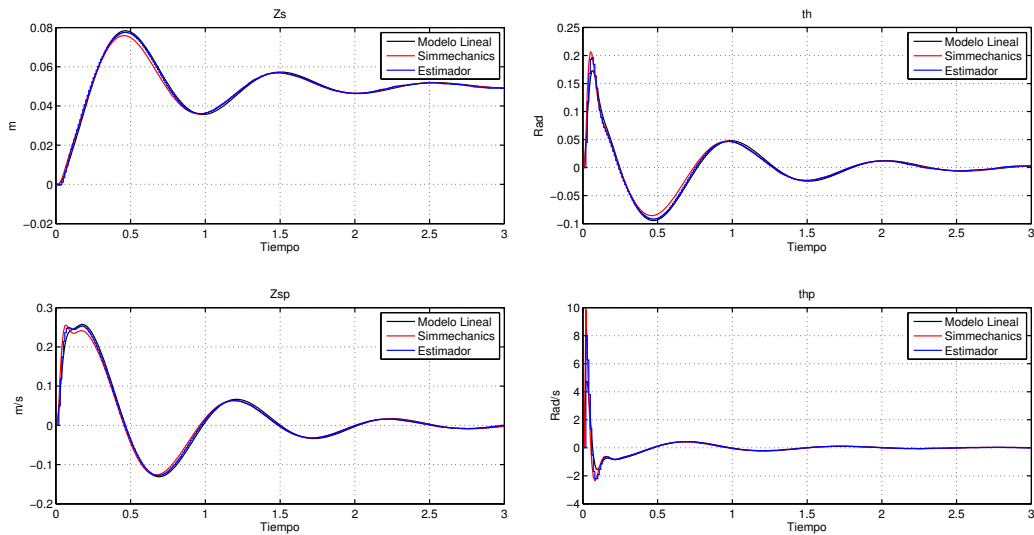


Figura 3.2.1: Estados estimados al introducirse un escalón de $0,05m$ en la superficie de desplazamiento.

3 Estimador de Estados

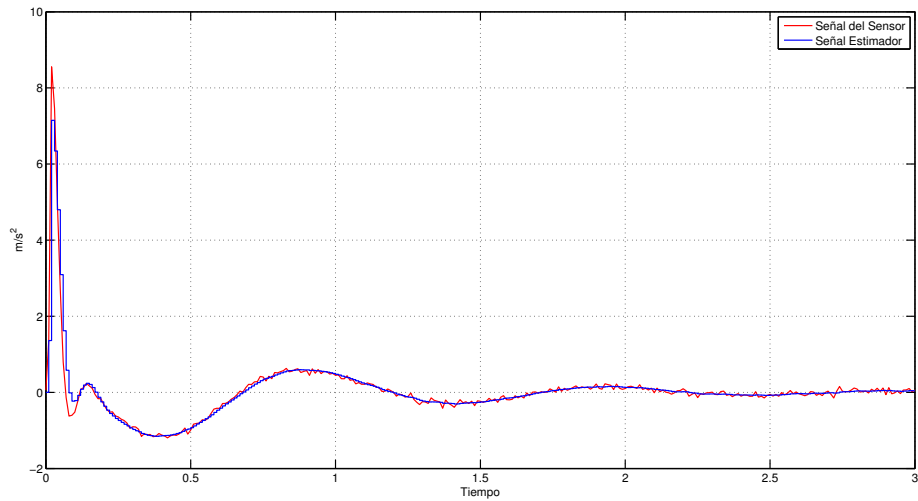


Figura 3.2.2: Señal estimada del sensor (Acelerómetro) al introducirse un escalón de $0,05m$ en la superficie de desplazamiento.

En las figuras 3.2.3 y 3.2.4 se visualizan los estados estimados y la señal del sensor estimada al introducirse un escalón de fuerza en el actuador de una amplitud de $1000N$.

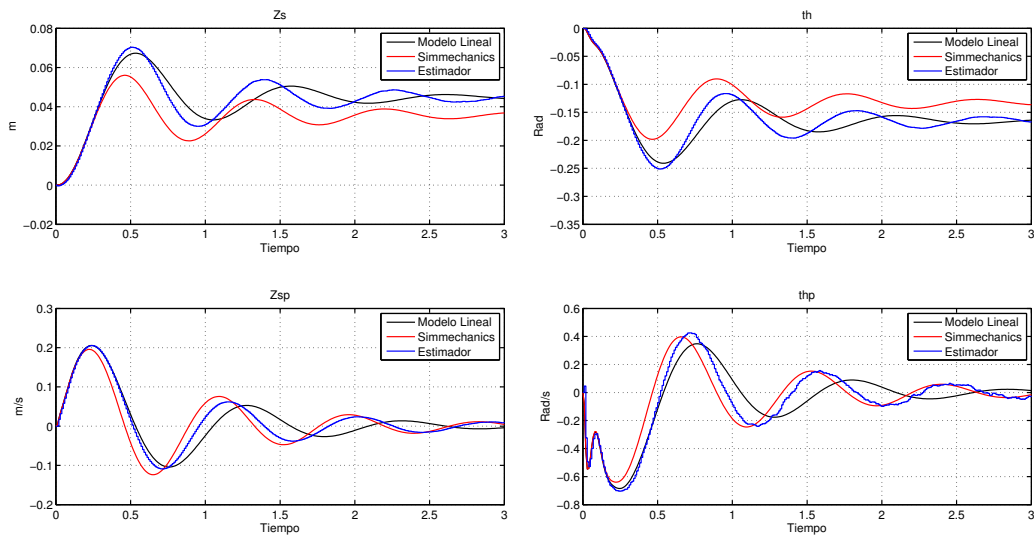


Figura 3.2.3: Estados estimados al introducirse un escalón de fuerza en el actuador de $1000N$.

3 Estimador de Estados

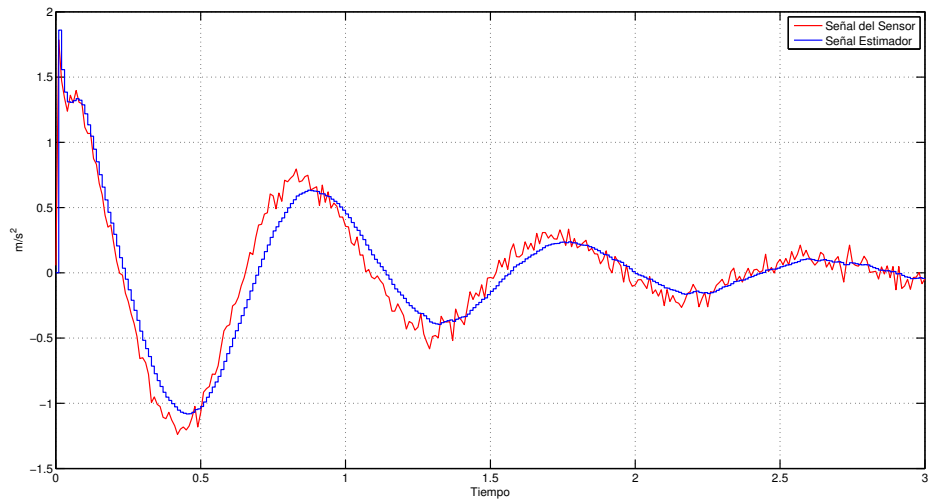


Figura 3.2.4: Señal estimada del sensor (Acelerómetro) al introducirse un escalón de fuerza en el actuador de 1000N.

En las respuestas de la figura 3.2.1, las cuales se encuentran ampliadas en la figura 3.2.5 se observa como el estimador presenta una respuesta que se aproxima a la respuesta del sistema no lineal, corrigiendo las dinámicas no modeladas por el sistema linealizado, adicionalmente en la figura 3.2.2 es posible apreciar como el estimador Kalman reduce significativamente el ruido presente en la señal de medida, lo cual es deseable ya que el controlador predictivo basado en modelo hará uso de esta señal como parte de la función de costo a minimizar.

3 Estimador de Estados

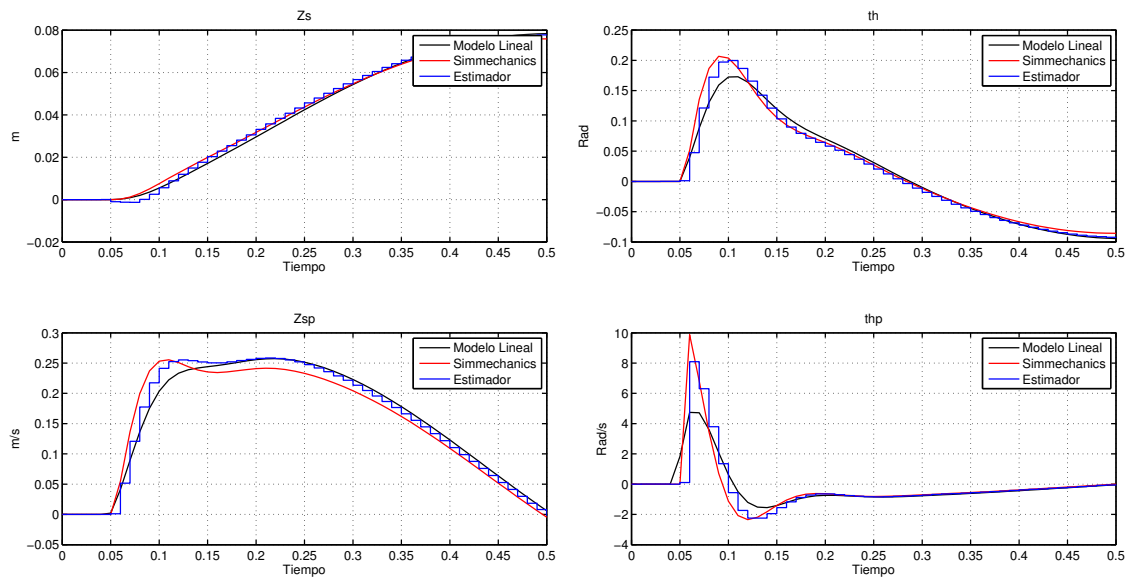


Figura 3.2.5: Ampliación de las respuestas del modelo lineal, modelo en simmechanics y estimador Kalman, para perturbación tipo escalón de amplitud $0,05m$.

En las figuras 3.2.3 y 3.2.4 se observa como la respuesta del estimador de estados por filtro Kalman reduce la diferencia entre los estados del modelo lineal y los estados del modelo no lineal a pesar de encontrarse alejado de la posición estable o de reposo, al rededor de la cual se encuentra definido el modelo linealizado usado en la implemtación del filtro Kalman.

En las siguientes gráficas se ilustra el error cuadrático medio de los estados estimados con el filtro Kalman y los estados simulados del modelo lineal con respecto al modelo en simmechanics, al aumentar la amplitud de las señales de perturbación en la superficie de desplazamiento y de la fuerza aplicada por el actuador.

3 Estimador de Estados

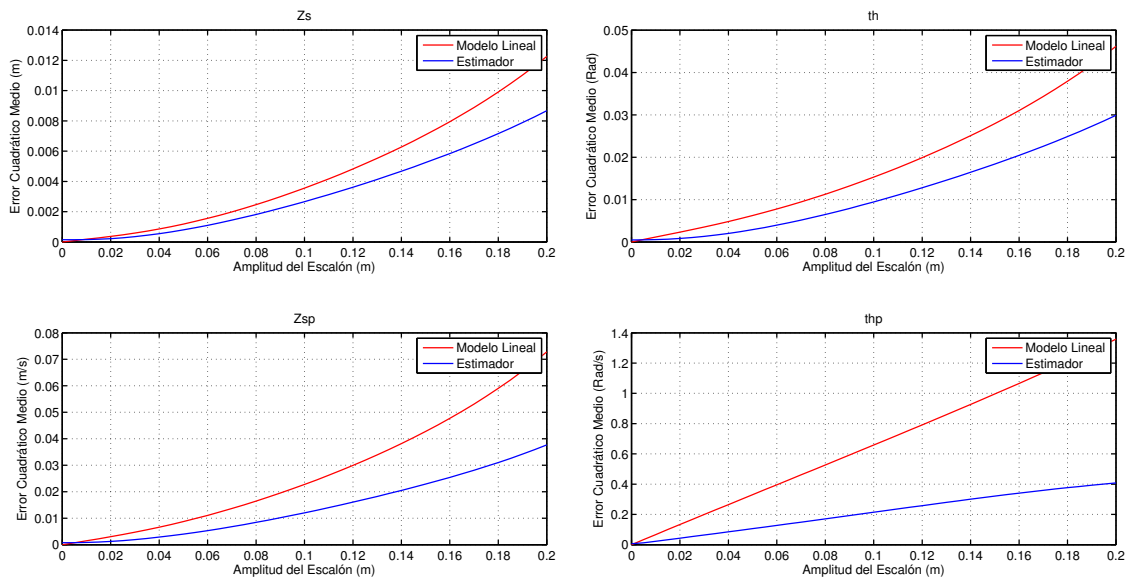


Figura 3.2.6: Comportamiento del error cuadrático medio de los estados estimados y los estados del modelo lineal con respecto al modelo en simmechanics al incrementar la amplitud del escalón en la superficie de desplazamiento.

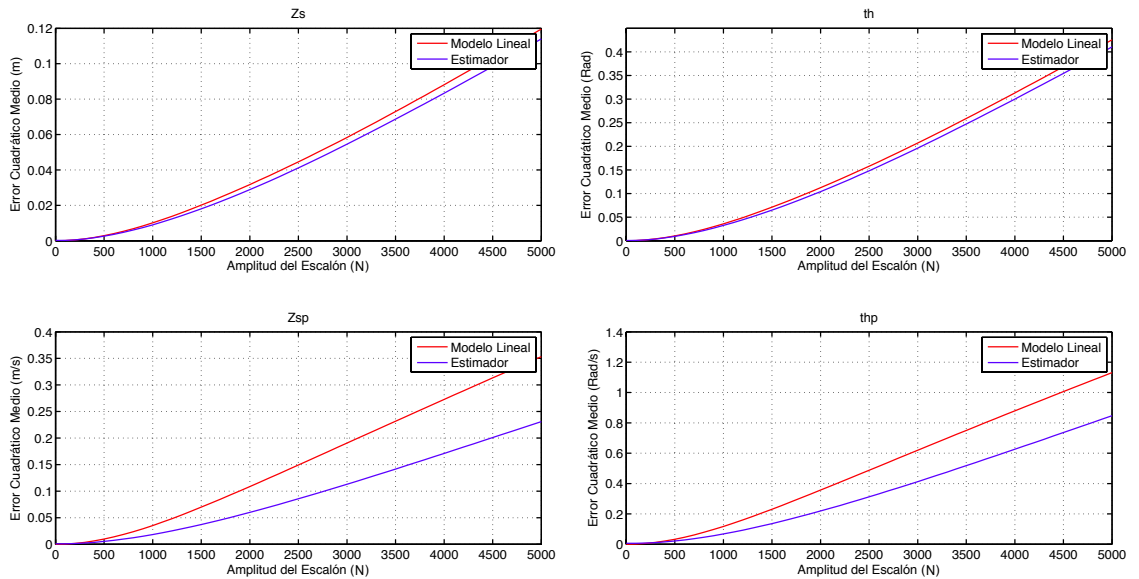


Figura 3.2.7: Comportamiento del error cuadrático medio de los estados estimados y los estados del modelo lineal con respecto al modelo en simmechanics al incrementar la amplitud del escalón en la fuerza del actuador.

3 Estimador de Estados

En las gráficas anteriores se observa como los estados estimados por el filtro Kalman presentan menor error cuadrático medio que los estados del modelo lineal con respecto a los estados del modelo en simmechanics, haciendo evidente la característica del filtro Kalman de reducir el ruido en el modelo proveniente de las incertidumbres en los sensores y en los estados del sistema.

4 Control Predictivo Basado en Modelo - MPC

El control predictivo basado en modelo hace uso de un modelos matemático que describe la dinámica de la planta a controlar para predecir el comportamiento del sistema en un intervalo de tiempo finito, mediante el cual determina la señal de control óptima a aplicar que minimiza una función de costo establecida.

La propuesta de control predictivo realizada en [24] usa el modelo matemático y los estados actuales del sistema para predecir la respuesta futura del sistema en ausencia de la señal de control (respuesta libre) para los siguientes N_p instantes de tiempo, formalmente denominado horizonte de predicción. Mediante la definición de una trayectoria para retornar a la referencia y la respuesta libre, se plantea una función de costo a minimizar, la cual es función de la señal de control e involucra el error cuadrático en el seguimiento de la trayectoria a la referencia y el esfuerzo de control. La función de costo propuesta se minimiza sujeta a las restricciones impuestas para determinar las señales futuras de control para los siguientes N_c instantes de tiempo, lo que se denomina en la literatura horizonte de control. En la figura 4.0.1 se ilustra gráficamente la idea básica del control predictivo y las variables que intervienen:

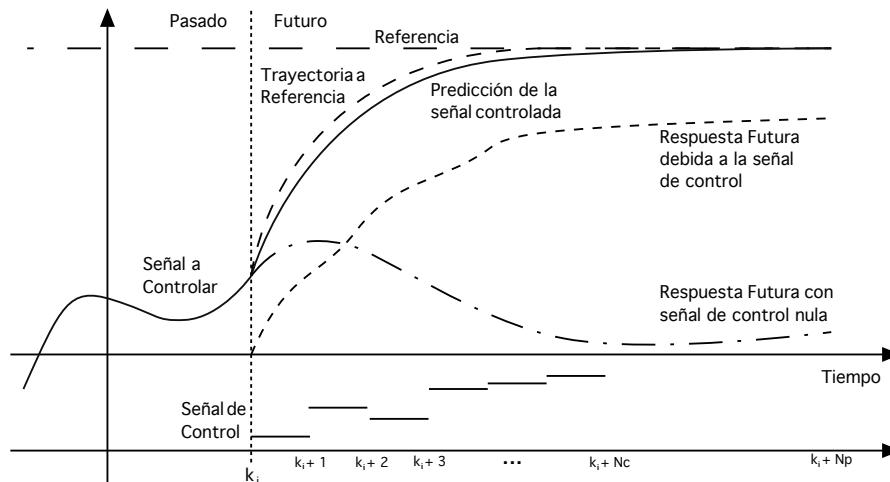


Figura 4.0.1: Idea básica del control predictivo.

Si el lector desea profundizar en las técnicas de control predictivo basado en modelo con

restricciones puede consultar la literatura [24], [25], [26] y [27], en donde se desarrollan diferentes modelos de predicción y control.

La técnica de control predictivo ha sido usada en trabajos como [28], en donde se realiza la validación experimental, comparando el desempeño de los algoritmos Hildreth y qpOASES implementados en un controlador lógico programable (PLC), determinando que es posible su ejecución en línea sobre este tipo de dispositivos, concluyendo adicionalmente que el algoritmo Hildreth es mas rápido pero menos preciso que el qpOASES. Otro de los algoritmos usados para implementar la técnica MPC es el Algorithm-3 el cual es usado en [29] para un sistema de péndulo invertido usando un microcontrolador AVR ATmega32, evidenciando las limitaciones del hardware al implementar esta técnica de control debido al costo computacional requerido. La limitación sobre la implementación en línea depende del algoritmo utilizado, el horizonte de predicción, el horizonte de control, las restricciones impuestas y las características de procesamiento del dispositivo sobre el que se implementa.

4.1. Diseño de Controlador Predictivo Basado en Modelo

Los modelos propuestos encontrados en la literatura asumen que las entradas del sistema no influyen de manera directa sobre las medidas realizadas, por tanto la matriz D de la representación en espacio de estados del sistema es considerada nula. Sin embargo, dependiendo de las salidas requeridas es posible que la matriz D sea diferente de cero, lo que dificulta la aplicación de los modelos de predicción propuestos. En el caso del modelo de la suspensión Macpherson o el modelo de la suspensión convencional de masas suspendidas, si se requiere como parte de la señal a controlar la aceleración del chasis, la matriz D será diferente de cero. En el Anexo B se realiza la propuesta de un modelo de predicción en donde se incluye la matriz D, introduciendo un retardo de una muestra en la señal de salida, lo cual, teniendo en cuenta que las frecuencias de muestreo son superiores al ancho de banda del sistema, se espera que no repercuta de manera significativa en el comportamiento del controlador.

El modelo de predicción propuesto es:

$$Y = Fx(k_i) + \Phi \overline{\Delta F_a} + \Omega_1 \Delta Z_r(k_i) + \Omega_2 \Delta \dot{Z}_r(k_i)$$

Donde:

$$Y = [y(k_i + 1|k_i) \quad y(k_i + 2|k_i) \quad y(k_i + 3|k_i) \quad \cdots \quad y(k_i + N_p|k_i)]^T$$

4 Control Predictivo Basado en Modelo - MPC

$$\overline{\Delta F_a} = [\Delta F_a(k_i) \quad \Delta F_a(k_i+1) \quad \Delta F_a(k_i+2) \quad \cdots \quad \Delta F_a(k_i+N_c-1)]^T$$

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} CB_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CAB_1 & CB_1 & 0 & \cdots & 0 \\ CA^2B_1 & CAB_1 & CB_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B_1 & CA^{N_p-2}B_1 & CA^{N_p-3}B_1 & \cdots & CA^{N_p-N_c}B_1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} CB_2 \\ CAB_2 \\ CA^2B_2 \\ \vdots \\ CA^{N_p-1}B_2 \end{bmatrix} \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} CB_3 \\ CAB_3 \\ CA^2B_3 \\ \vdots \\ CA^{N_p-1}B_3 \end{bmatrix}$$

Siendo A , B y C las matrices que representan el modelo digital extendido propuesto en el Anexo B.

Partiendo del modelo de predicción, se propone el problema de optimización a resolver en cada instante de tiempo k_i para determinar la señal futura del actuador para minimizar una función de costo. En este trabajo se propuso el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min \quad & J = \sum_{j=0}^{N_p-1} q_1 \ddot{Z}_s^2(k_i+j) + q_2 \dot{Z}_s^2(k_i+j) + q_3 \theta^2(k_i+j) \\ \text{s.t.} \quad & |F_a(x_i)| \leq |F_a|_{\max} \\ & x(k_i+1) = Ax(k_i) + B_1 \Delta F_a(k_i) + B_2 \Delta Z_r(k_i) + B_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Donde las variables q_1 , q_2 y q_3 operan como parámetros de sintonización de la acción del control. La función costo incluye la aceleración del chasis \ddot{Z}_s que es la variable que se desea reducir ante la presencia de perturbaciones en la superficie de desplazamiento para incrementar la seguridad y el confort, también considera la velocidad de desplazamiento del chasis \dot{Z}_s , la cual permite controlar el tiempo de estabilización de la suspensión y finalmente, el ángulo del brazo de control θ , el cual garantizará que el sistema realimentado retorne a posición de equilibrio y que la señal de control alcance un valor nulo. Las tres variables se incluyen elevadas al cuadrado, así la función de costo será cero solo si las tres variables y la señal de control son cero.

Las restricción se impone en la magnitud máxima de la fuerza alcanzada, la cual fue seleccionada dentro de los valores encontrados en las investigaciones relacionadas, sin

4 Control Predictivo Basado en Modelo - MPC

embargo esta restricción debe determinarse de acuerdo con las características de respuesta. Es posible definir restricciones en el diferencial máximo de la señal de control, lo cual no se hizo suponiendo que el actuador tiene tiempos de respuesta inferiores a 10ms. La restricción en la señal de control se establece solo para la primera señal de control, teniendo en cuenta que es la señal que será aplicada al sistema y que el definir las restricciones para mas valores futuros de la señal de control aumenta el costo computacional y el tiempo necesario en su ejecución. En [24] se llega a la conclusión que la diferencia en la respuesta del sistema controlado no es significativa si se establecen las restricciones para todos los valores futuros de la señal de control.

Definiendo la salida del modelo lineal digital en espacio de estados de la suspensión Macpherson como $y = [\ddot{Z}_s \quad \dot{Z}_s \quad \theta]^T$, es posible representar la función objetivo del problema de optimización 4.1.1 de acuerdo al modelo de predicción como:

$$J = YQ_eY^T \quad Q_e = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix}_{(3N_p, 3N_p)}$$

$$Y = [\ddot{Z}_s(k_i+1|k_i) \quad \dot{Z}_s(k_i+1|k_i) \quad \theta(k_i+1|k_i) , \ddot{Z}_s(k_i+2|k_i) \quad \dot{Z}_s(k_i+2|k_i) \quad \theta(k_i+2|k_i) , \dots \\ \dots , \ddot{Z}_s(k_i+N_p|k_i) \quad \dot{Z}_s(k_i+N_p|k_i) \quad \theta(k_i+N_p|k_i)]_{(3N_p, 1)}^T$$

Realizando la sustitución de las predicciones de las variables de salida Y , y expresándolo como un problema de programación cuadrática:

$$\begin{aligned} \min \quad & J = \frac{1}{2} \overline{\Delta F_a}^T \Psi \overline{\Delta F_a} + \Gamma^T \overline{\Delta F_a} \\ \text{s.t.} \quad & M \overline{\Delta F_a} \leq \gamma \end{aligned}$$

Donde:

$$\Psi = 2\Phi^T Q_e \Phi$$

$$\Gamma = 2\Phi^T Q_e (F_x(k_i) + \Omega_1 \Delta Z_r(k_i) + \Omega_2 \Delta \dot{Z}_r(k_i))$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(2N_c, N_c)} \quad \gamma = \begin{bmatrix} |F_a|_{max} - F_a(k_i - 1) \\ |F_a|_{max} - F_a(k_i - 1) \\ \vdots \\ |F_a|_{max} - F_a(k_i - 1) \\ |F_a|_{max} + F_a(k_i - 1) \\ |F_a|_{max} + F_a(k_i - 1) \\ \vdots \\ |F_a|_{max} + F_a(k_i - 1) \end{bmatrix}_{(2N_c, 1)}$$

Este problema de programación cuadrática se resuelve por medio del algoritmo Hildreth, el cual se explica en el Anexo C.

4.2. Comportamiento de la Suspensión Macpherson con Control MPC

El análisis del comportamiento de la suspensión Macpherson se realizó mediante la implementación en simulink del algoritmo de control predictivo y el modelo desarrollado en simmechanics de la suspensión, asumiendo que todas las variables de estado son medibles. Se realizan simulaciones para comprobar su respuesta en tiempo y frecuencia, comparando las respuestas de la suspensión activa con respecto a la suspensión pasiva.

En el cuadro 4.2.1 se encuentran los parámetros del controlador predictivo definidos de acuerdo con la respuesta deseada obtenida por simulación, la cual busca reducir rápidamente la aceleración vertical del chasis y el retorno suavemente la suspensión a la posición de equilibrio.

Variable	Valor	Problema de Optimización
N_p	60	$\min \quad J = \sum_{j=0}^{N_p-1} q_1 \ddot{Z}_s^2(k_i + j) + q_2 \dot{Z}_s^2(k_i + j) + q_3 \theta^2(k_i + j)$ $s.t. \quad F_a(x_i) \leq F_a _{max}$ $x(k_i + 1) = Ax(k_i) + B_1 \Delta F_a(k_i) + B_2 \Delta Z_r(k_i) + B_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i)$
N_c	40	
$ F_a _{max}$	2500N	
q_1	0.2	
q_2	3.8	
q_3	1.0	

Cuadro 4.2.1: Parámetros del Control Predictivo.

El procedimiento de sintonización de parámetros para el control predictivo se realizó mediante la respuesta transitoria del sistema, al introducirse un escalón en la superficie de desplazamiento de $0,05m$, a continuación se indica el procedimiento usado para determinar los parámetros del cuadro 4.2.1:

4 Control Predictivo Basado en Modelo - MPC

- Partiendo de un horizonte de predicción lo suficientemente largo, de tal manera que al incrementarse no se modificara la respuesta del sistema y estableciendo un horizonte de control de igual longitud y restricciones en todas las señales de control, se ajustaron los parámetros q_1 , q_2 y q_3 , mediante asignaciones y simulaciones sucesivas, para que la respuesta del sistema no presentara oscilaciones en la posición del chasis al estabilizarse.
- Teniendo como referencia la respuesta obtenida con la configuración anterior se redujo el intervalo de predicción y control, hasta obtener una respuesta sin degradaciones importantes en el comportamiento transitorio del sistema.
- Establecido el horizonte de predicción se limitaron las restricciones de la señal de control a la señal a aplicar en el siguiente instante de tiempo, lo cual reduce el costo computacional al no tener que desarrollar un problema de optimización con múltiples restricciones y no se degrada significativamente la respuesta transitoria.
- Finalmente se redujo el horizonte de control hasta el menor valor, que no afecte considerablemente la respuesta transitoria establecida. Esto reduce el número de operaciones a realizar por el controlador predictivo, lo que reduce el costo computacional.

A continuación se ilustra la respuesta inicial del sistema ($N_p = 500$, $N_c = 500$, $\bar{F}_a \leq 2500$) y la respuesta del sistema sintonizado ($N_p = 30$, $N_c = 20$, $\bar{F}_a(k_i) \leq 2500$) para disminuir el costo computacional.

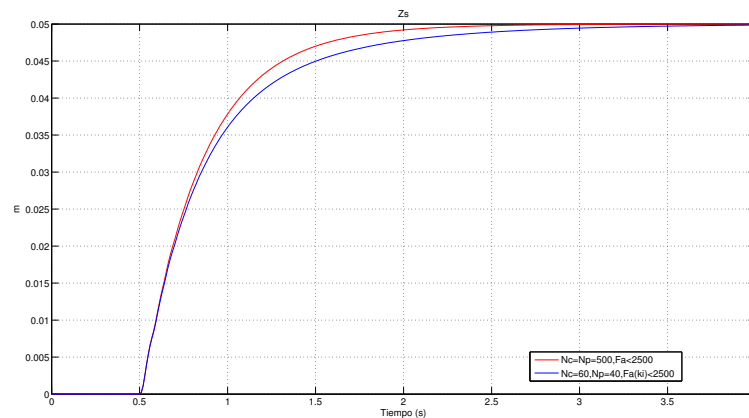


Figura 4.2.1: Comportamiento de la posición del chasis al introducir un escalón en la superficie de desplazamiento de $0,05m$. Comparación de respuestas de sistema controlado con MPC para diferentes parámetros.

4.2.1. Respuesta Temporal

A continuación se muestra en la figura 4.2.2 la respuesta de los sistemas activo y pasivo al introducirse un escalón de $0,05m$ en la superficie de desplazamiento. Las simulaciones fueron realizadas usando el solver `ode4()` de paso fijo, con tiempo de muestreo de $10ms$, el cual se utilizaría en una implementación en hardware, dando tiempo suficiente para que se realicen las operaciones necesarias para el estimador por filtro Kalman y el controlador predictivo basado en modelo. En el CD Anexo se encuentra el archivo *Macpherson_simmechanics_mpc.slx* en donde se implementa en simulink el sistema de control predictivo para la suspensión Macpherson usando el modelo de *simmechanics* y asumiendo medibles todas las variables de estado.

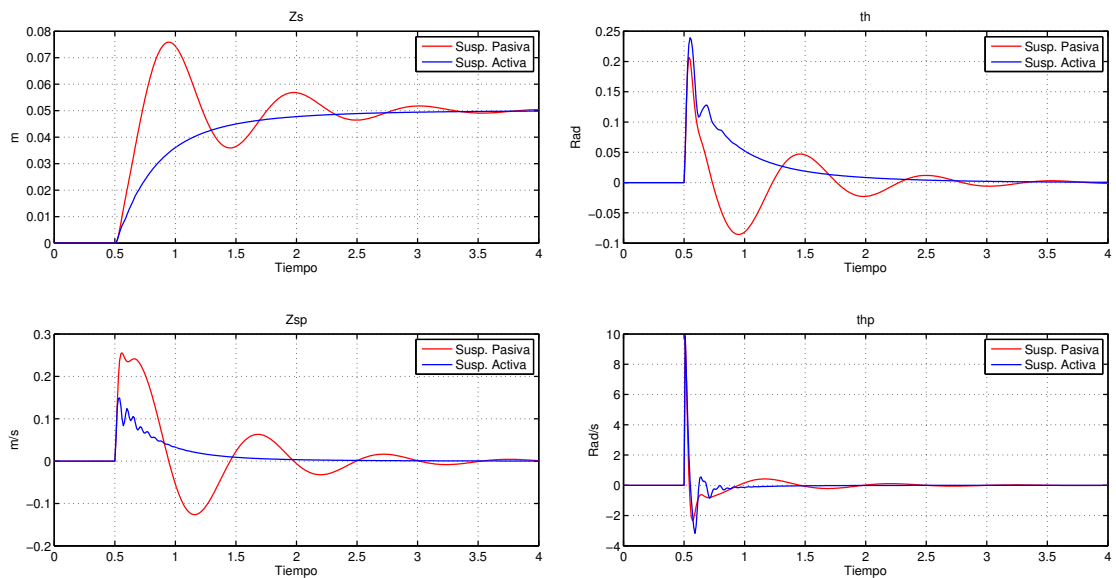


Figura 4.2.2: Respuesta de la suspensión Macpherson al escalón de $0,05m$ en la superficie de desplazamiento.

En la figura 4.2.3 es posible observar el efecto del controlador en la reducción de la aceleración vertical del chasis.

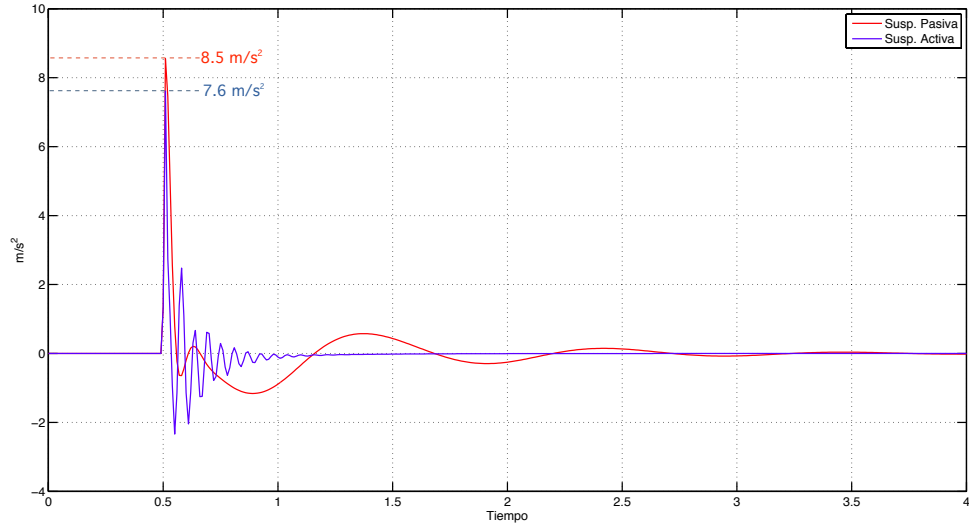


Figura 4.2.3: Aceleración vertical (\ddot{Z}_s) del chasis en m/s^2 .

El estándar ISO 2631-1 (1997) establece mecanismos para determinar el grado de incomodidad de las personas al someterse a aceleraciones en los vehículos. Una de las formas propuestas es a través del cálculo del valor RMS de la aceleración ponderada en frecuencia (a_w), en donde se tienen en cuenta las aceleraciones experimentadas en tres partes del cuerpo. En este trabajo se hará uso del valor RMS de la aceleración ponderada en frecuencia para establecer el grado de incomodidad del viaje, teniendo en cuenta únicamente la componente de aceleración vertical. La ecuación usada para determinar el grado de confort es:

$$a_{wrms}(T) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T a_w^2(t) dt \right)^{1/2}$$

Donde $a_w(t)$ es la aceleración ponderada en frecuencia, la cual se obtiene mediante la aplicación del filtro mostrado en la figura 4.2.4 sobre la aceleración vertical experimentada en la base del asiento del pasajero. El filtro de la figura 4.2.4 se encuentra definido en el estándar ISO 2631-1 (1997).

4 Control Predictivo Basado en Modelo - MPC

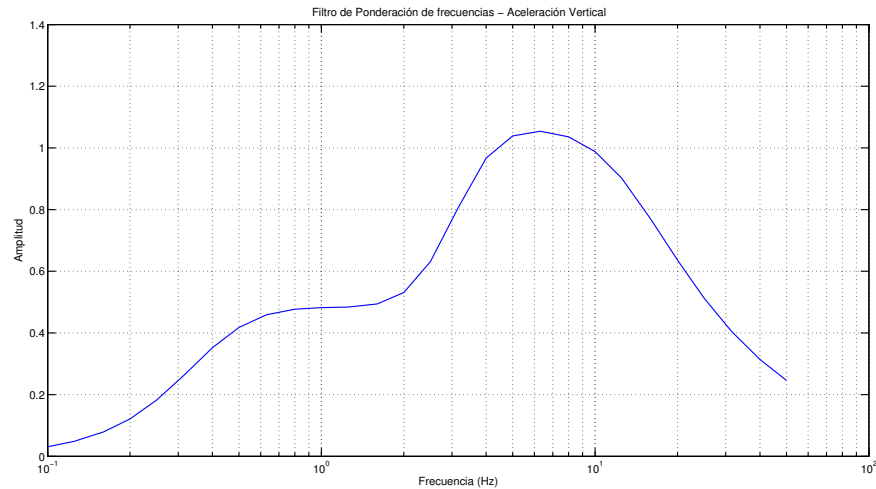


Figura 4.2.4: Filtro de ponderación en frecuencias para aceleración vertical en la base del asiento del pasajero definido en el estándar ISO 2631-1 (1997).

En el cuadro 4.2.2 se indican los niveles de valores RMS de aceleración vertical ponderada en frecuencia y el grado de confort experimentado.

Nivel de Aceleración vertical RMS (m/s^2)	Grado de Confort
(1) Menor a 0.315	No es Incomodo
(2) 0.315 - 0.63	Un Poco Incomodo
(3) 0.5 - 1	Medianamente Incomodo
(4) 0.8 - 1.6	Incomodo
(5) 1.25 - 2.5	Muy Incomodo
(6) Mayor a 2	Extremadamente Incomodo

Cuadro 4.2.2: Nivel de aceleración ponderada en frecuencia y grado de confort percibido. (ISO 2631-1 (1997))

El controlador reduce significativamente la aceleración vertical del chasis, lo cual se evidencia mas claramente al determinar los valores RMS de la aceleración ponderada en frecuencia. Estos corresponden a $0.573 m/s^2$ para la suspensión pasiva y $0.384 m/s^2$ en la suspensión activa, los cuales presentan grados de confort Medianamente Incomodo para la suspensión pasiva y Un Poco Incomodo para la suspensión activa.

La señal de control y la función de costo se ilustran en la figura 4.2.5, es importante resaltar que la señal del actuador no viola la restricción impuesta en la magnitud máxima aplicada de $2500N$, adicionalmente la función de costo se reduce rápidamente a cero.

4 Control Predictivo Basado en Modelo - MPC

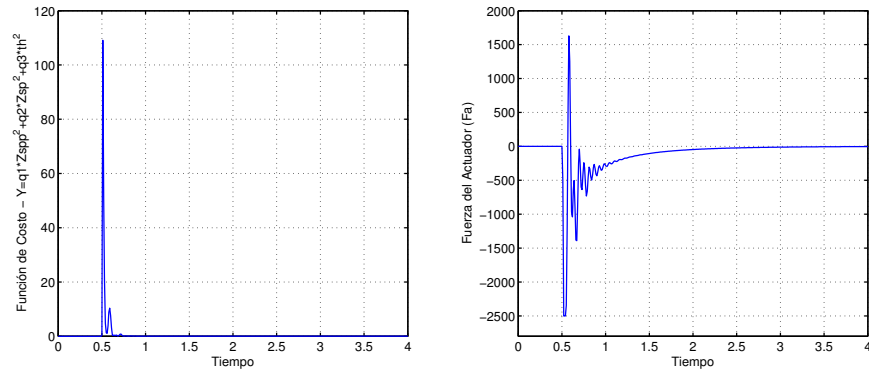


Figura 4.2.5: Evolución de la función de costo y Señal de control aplicada al sistema.

4.2.2. Respuesta en Frecuencia

La respuesta en frecuencia del sistema controlado se obtuvo por medio de la herramienta de *Estimación de Respuesta en Frecuencia* de simulink. En la figura 4.2.6 se aprecia como la suspensión activa con control predictivo reduce notablemente la transmisión del movimiento de las imperfecciones en la superficie de desplazamiento al chasis, presentando un pico máximo en frecuencias cercanas a cero.

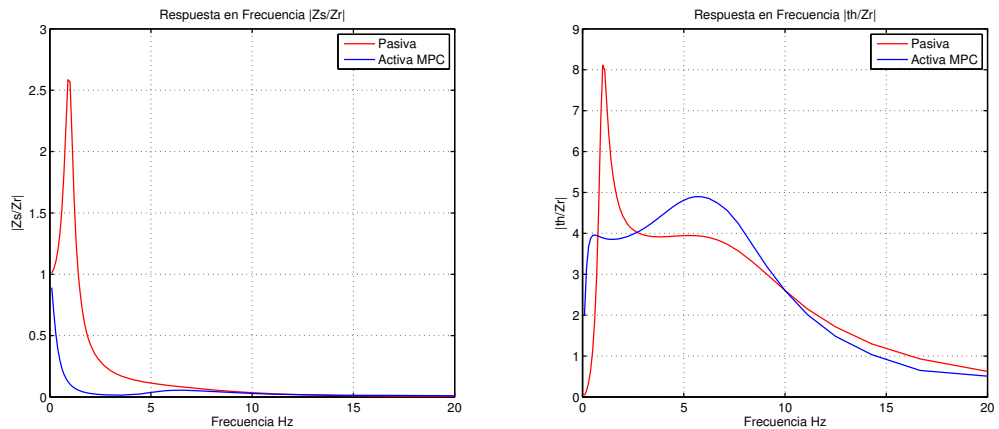


Figura 4.2.6: Respuesta en frecuencia de la suspensión Macpherson pasiva y activa.

5 Comportamiento de Suspensión Activa con Estimador Kalman y Control Predictivo

5.1. Comparación del Comportamiento del Sistema de Control con Estimador de Estados

En esta sección se compararán las respuestas del controlador con estimador de estados contra las respuestas obtenidas por el sistema con medición directa de las variables de estado visto en el capítulo anterior.

Al realizar la integración de los dos sistemas, el estimador de estados por filtro Kalman y el controlador predictivo, se observó que el controlador predictivo es altamente sensible a las perturbaciones y ruidos presentes en los estados estimados por el filtro Kalman, generando oscilaciones en la señal de control y en el sistema. En la figura 5.1.1 se puede observar el comportamiento del sistema al integrar los sistemas de estimación y control e introducir una señal escalón de $0,05m$ en la superficie de desplazamiento.

5 Comportamiento de Suspensión Activa con Estimador Kalman y Control Predictivo

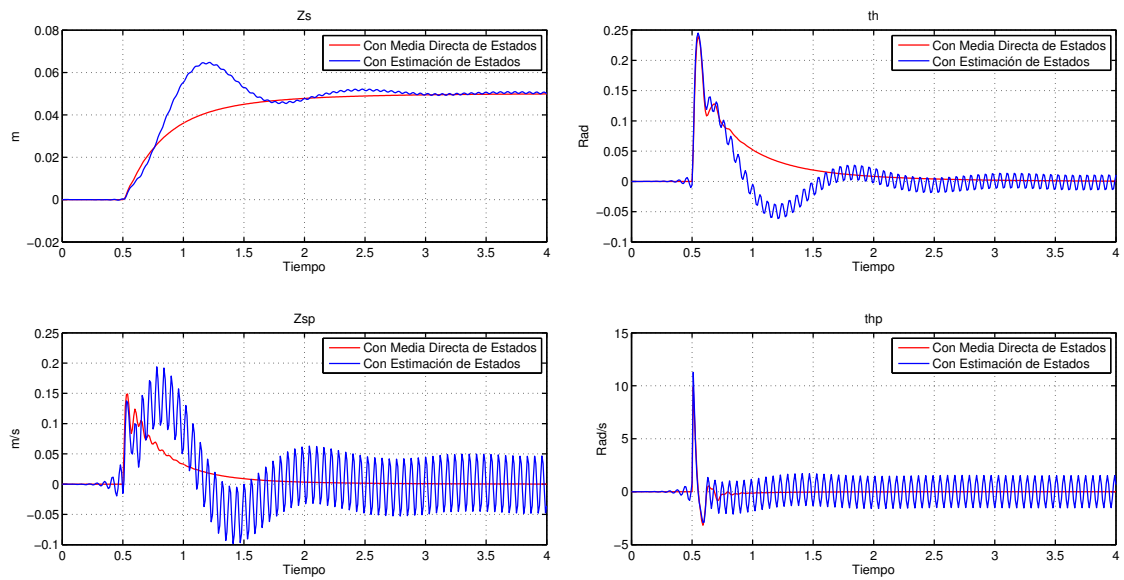


Figura 5.1.1: Comportamiento del sistema de control con estimador de estados por filtro Kalman.

Con el fin de reducir las oscilaciones debidas al ruido proveniente del estimador, se escaló la matriz R del estimador para disminuir su sensibilidad al ruido proveniente de los sensores, disminuyendo la capacidad del filtro Kalman de reducir el error entre los estados reales del sistema y los estados estimados. El comportamiento del sistema de control con estados estimados de ilustra en la figura 5.1.2, evidenciando una degradación en el desempeño del sistema controlado con estimador con respecto al sistema controlado con medición directa de estados. Si embargo, el comportamiento de la función de costo y de la señal de control aplicada al sistema mantienen un grado alto de similitud, como se aprecia en la figura 5.1.3.

5 Comportamiento de Suspensión Activa con Estimador Kalman y Control Predictivo

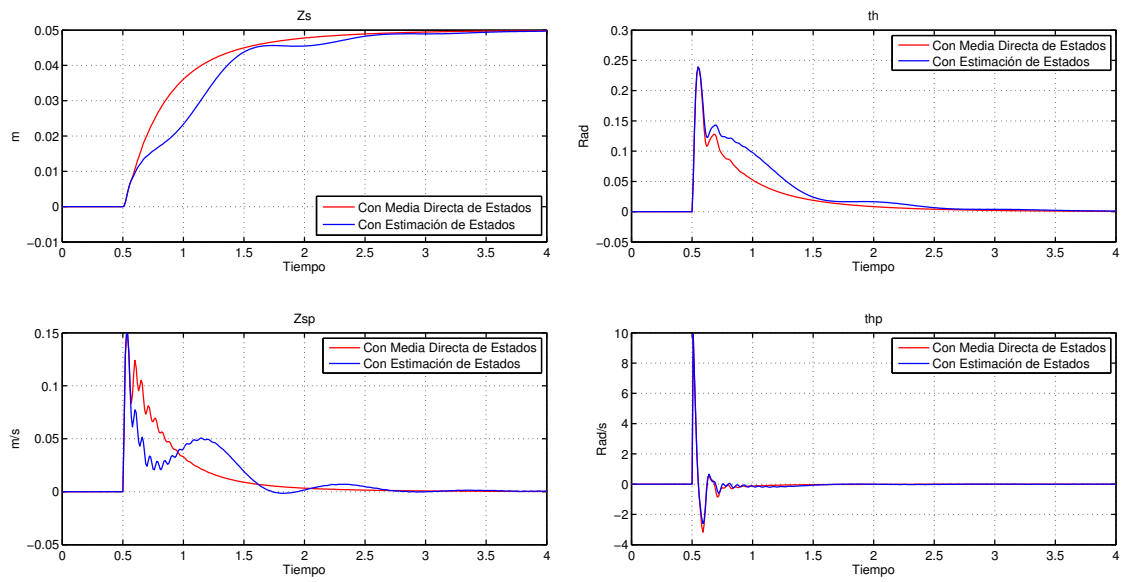


Figura 5.1.2: Respuesta del sistema controlado con medición directa de estados y con estimador.

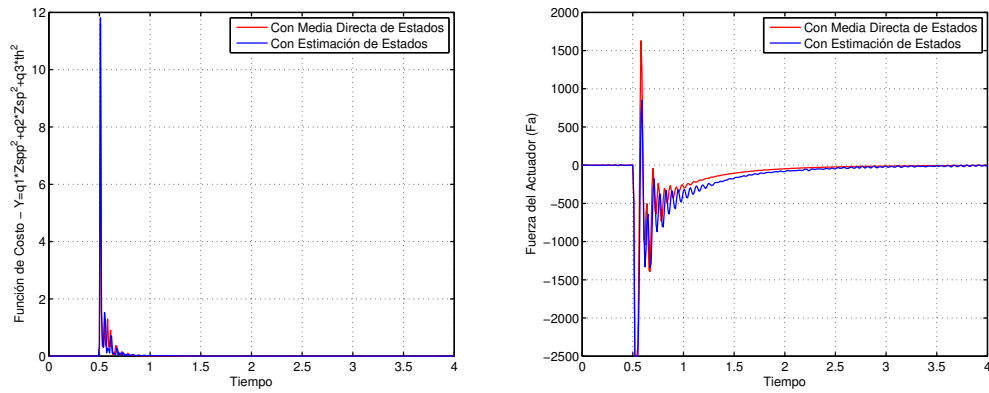


Figura 5.1.3: Comportamiento de la función de costo y la señal de control con medición directa de estados y con estimador.

El cambio en la aceleración vertical del chasis se muestra en la figura 5.1.4, para las cuales sus aceleraciones ponderadas en frecuencia RMS son $0,430 \text{ m/s}^2$ en el sistema con estados estimados y $0,387 \text{ m/s}^2$ en el sistema con medición directa de estados, manteniendo la percepción de confort del pasajero en un poco incomodo.

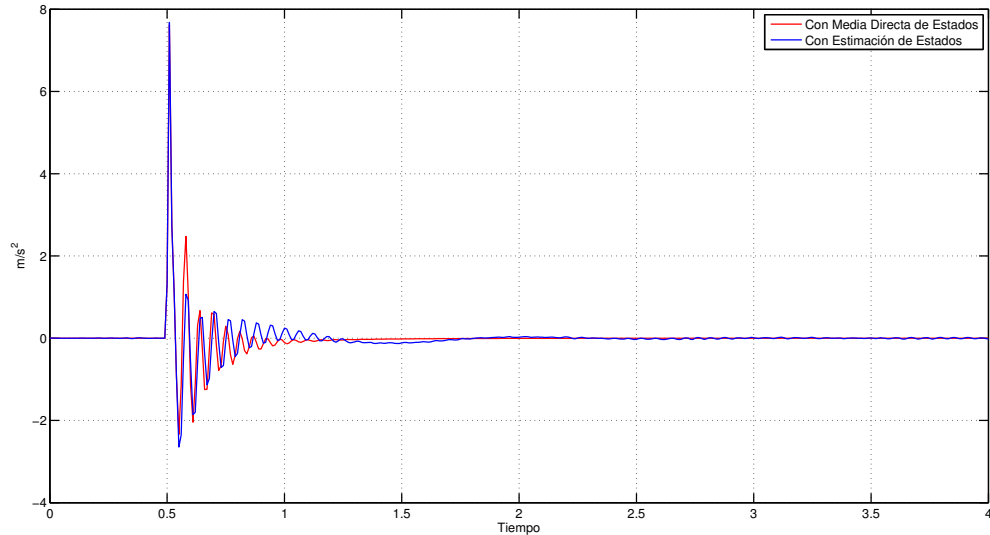


Figura 5.1.4: Aceleración vertical experimentalada con controladores con medida directa de estados y con estimador de estados.

5.2. Comparación de Comportamientos con Control Predictivo y Control por Realimentación de Estados

El controlador por espacio de estados se diseñó para que controlara el ángulo del brazo de control θ , incluyendo un integrador para garantizar un error de estado estable nulo. Se definieron los polos deseados del sistema continuo y se determinaron sus equivalentes al sistema digital. Se estableció un polo dominante con una constante de tiempo de 0,5s y los otros polos se definieron lo suficientemente lejanos como para que sus dinámicas desaparecieran rápidamente. La constante de tiempo de 0,5s se estableció para que las respuestas de los controladores por realimentación de estados y control predictivo basado en modelo fueran similares respondiendo a la perturbación en la superficie de desplazamiento. Los dos modelos hacen uso del estimador de estados con filtro Kalman.

En la gráfica 5.2.1 se ilustran las respuestas de los controladores al escalón de 0,05m en la superficie de desplazamiento.

5 Comportamiento de Suspensión Activa con Estimador Kalman y Control Predictivo

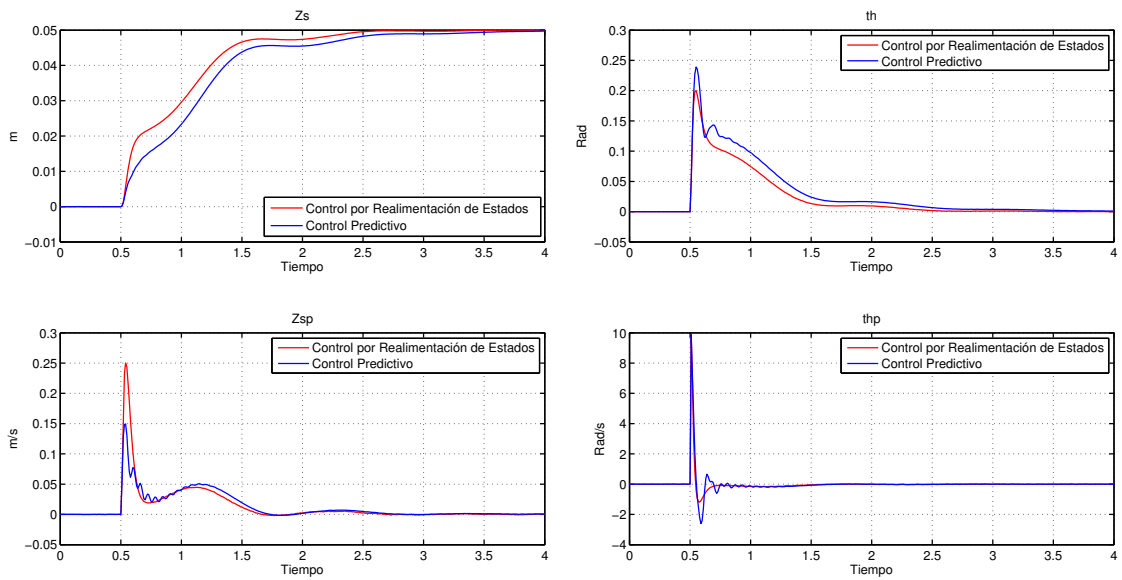


Figura 5.2.1: Respuestas de los estados de la suspensión Macpherson.

Las aceleraciones experimentadas en el chasis se visualizan en la figura 5.2.2. Aun que las respuestas de los estados al escalón son muy similares, es posible por medio de las respuestas en aceleración determinar que controlador obtiene un índice de confort mas elevado, para este caso cual de las dos respuestas en aceleración cuenta con menor valor RMS de aceleración ponderada en frecuencia. La aceleración RMS ponderada en frecuencia de las suspensiones, pasiva, controlada con realimentación de estados y controlada control predictivo son respectivamente $0,573m/s^2$, $0,701m/s^2$ y $0,403m/s^2$, comprobando que la suspensión con control predictivo obtiene un índice de confort superior al obtenido por el control por realimentación de estados. La reducción de la aceleración RMS ponderada en frecuencia obtenida con el control predictivo con respecto al control por realimentación de estados es del 42,5%. Es importante destacar que la suspensión controlada con realimentación de estados obtiene una aceleración RMS ponderada en frecuencia superior que la suspensión pasiva, generando un menor índice de confort.

5 Comportamiento de Suspensión Activa con Estimador Kalman y Control Predictivo

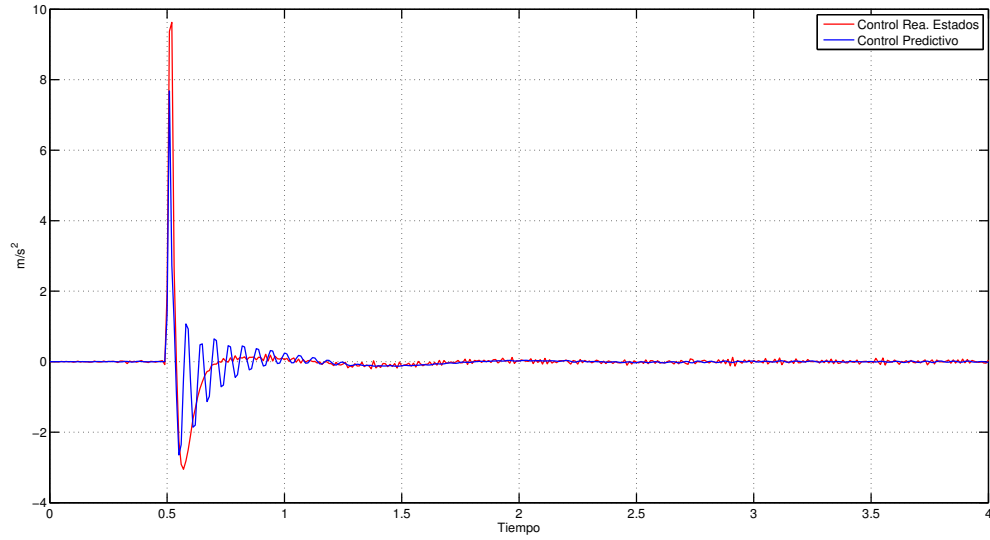


Figura 5.2.2: Comparación de las aceleraciones en el chasis (\ddot{Z}_s).

La respuesta en frecuencia de los dos controladores de la entrada de perturbación a las salidas de desplazamiento del chasis y aceleración del chasis se ilustran en la figura 5.2.3 y 5.2.4.

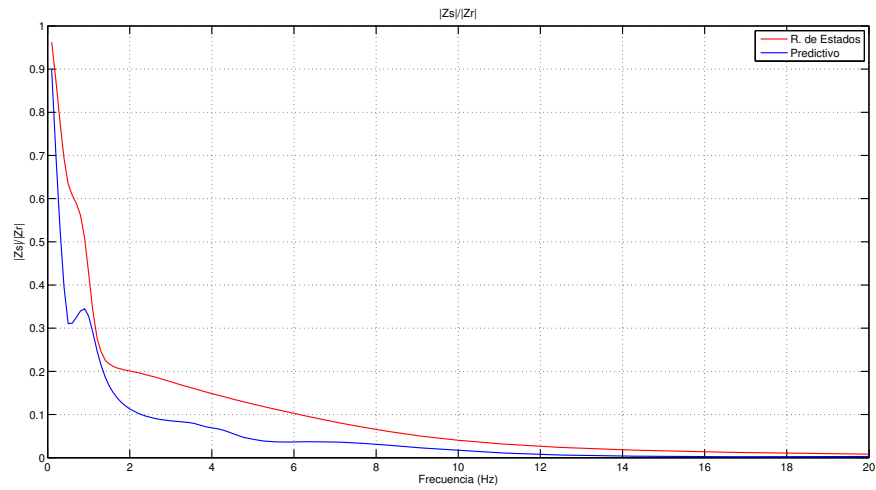


Figura 5.2.3: Respuesta en frecuencia, transmisión de movimiento de perturbaciones en superficie a desplazamiento en chasis.

5 Comportamiento de Suspensión Activa con Estimador Kalman y Control Predictivo

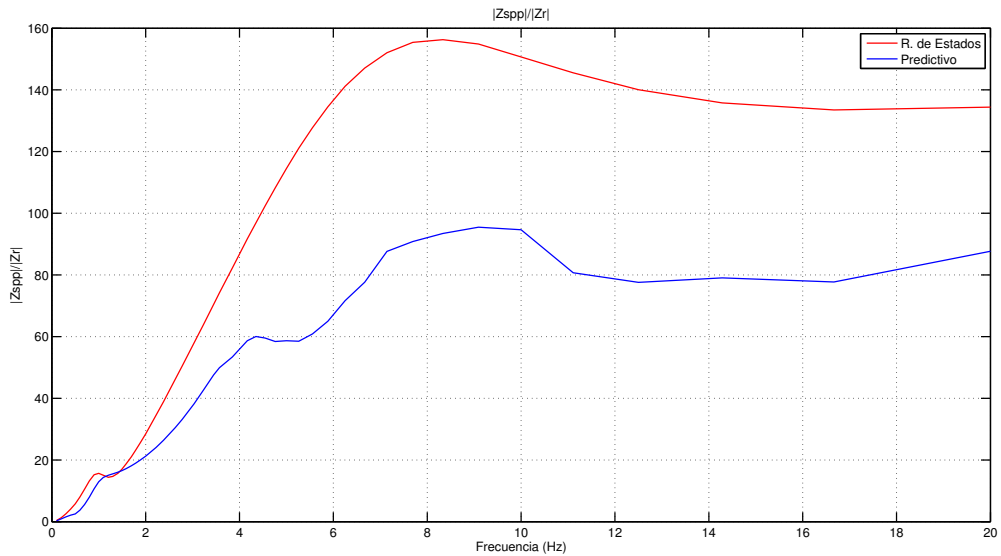


Figura 5.2.4: Respuesta en frecuencia, transmisión de movimiento de perturbaciones en superficie a aceleración en el chasis.

Mediante las respuestas en frecuencia observadas se confirma que el controlador predictivo basado en modelo presenta un desempeño superior al controlador por realimentación de estados, manteniendo siempre una transmisión de las perturbaciones en la superficie de desplazamiento a el desplazamiento y la aceleración del chasis menores para todas las frecuencias simuladas. Adicionalmente como se observó en la respuesta temporal mediante el cálculo de la aceleración RMS ponderada en frecuencia, se evidencia una reducción sustancial al utilizar un controlador predictivo basado en modelo en comparación con el control por realimentación de estados.

El proceso de optimización usado por el controlador predictivo hace que no se generen acciones de control que superen las restricciones impuestas, las cuales normalmente se encuentran relacionadas con las limitaciones físicas del actuador. Por otra parte el controlador por realimentación de estados no cuenta con esta capacidad, de tal forma que si se generan perturbaciones con amplitudes lo suficientemente grandes, el control por realimentación de estados generará una acción de control que supera las restricciones físicas del actuador, saturando el sistema y haciendo que se comporte de maneras no previstas, o en el peor de los casos si no se tienen las protecciones adecuadas generando daños en el sistema controlado.

6 Controlador Predictivo con Estimador para Suspensión Activa Quanser - Simulación

En este capítulo se exponen los resultados en simulación del comportamiento de la suspensión activa Quanser con controlador predictivo basado en modelo. Los parámetros usados para las respectivas simulaciones que se realizaron se tomaron de la información suministrada por el fabricante. En la figura 6.0.1 se ilustra el modelo de dos masas suspendidas usado para representar la suspensión activa.

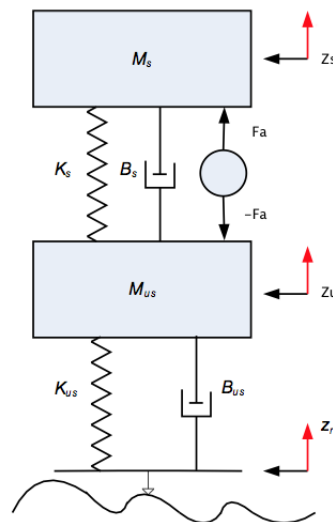


Figura 6.0.1: Modelo de masas suspendidas de la suspensión activa Quanser.
Fuente: [30]

Los valores de las variables que intervienen en el modelo se encuentran en el cuadro 6.0.1.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
M_s	2,45 Kg	K_s	900 N/m	B_s	7,5 Nm/s
M_{us}	1 Kg	K_{us}	2500 N/m	B_{us}	5 Nm/s

Cuadro 6.0.1: Parámetros de la Suspensión Activa Quanser.

Utilizando las ecuaciones de movimiento de Newton en cada una de las masas del modelo o mediante el uso de las ecuaciones de Lagrange se determinan las ecuaciones de movimiento del sistema. Definiendo como variables de estado $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [Z_s, \dot{Z}_s, Z_u, \dot{Z}_u]$ se obtiene el siguiente modelo en espacio de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 F_c + B_2 Z_r + B_3 \dot{Z}_r \\ y &= C_1 x + D_1 F_c + D_2 Z_r + D_3 \dot{Z}_r\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & \frac{K_s}{M_s} & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{M_{us}} & \frac{B_s}{M_{us}} & -\frac{(K_{us} + K_s)}{M_{us}} & -\frac{(B_{us} + B_s)}{M_u} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{B_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}$$

Las matrices del modelo de medida se definen dependiendo de la aplicación en que se use el mismo, en este caso se requieren modelos para el estimador de estados por filtro Kalman y para el control predictivo basado en modelo. Para el filtro Kalman se definen de acuerdo a las medidas que se pueden realizar sobre el modelo real, que en este caso se asumen medibles la aceleración del chasis y la perturbación sobre la superficie de desplazamiento (la velocidad de la perturbación se calcula por software). Para el control predictivo dependen de las variables que se desean controlar y que se encuentren relacionadas en la función de costo establecida. En el cuadro 6.0.2 se encuentran las matrices del modelo de medida utilizadas para el filtro Kalman y para el controlador predictivo basado en modelo, el cual hace uso del modelo de predicción desarrollado en el Anexo B.

Filtro Kalman			
$C = \begin{bmatrix} -\frac{K_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & \frac{K_s}{M_s} & \frac{B_s}{M_s} \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ M_s \end{bmatrix} \quad D_2 = [0] \quad D_3 = [0]$			
Controlador Predictivo			
$C = \begin{bmatrix} -\frac{K_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & \frac{K_s}{M_s} & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ M_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$			
$\min J = \sum_{j=0}^{N_p-1} q_1 \ddot{Z}_s^2(k_i + j) + q_2 \dot{Z}_s^2(k_i + j) + q_3 (Z_s(k_i + j) - Z_u(k_i + j))^2$			
$s.t. \quad F_a(x_i) \leq F_a _{max}$			
$x(k_i + 1) = Ax(k_i) + B_1 \Delta F_a(k_i) + B_2 \Delta Z_r(k_i) + B_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i)$			

Cuadro 6.0.2: Matrices del modelo de medida para filtro Kalman y controlador predictivo basado en modelo.

La implementación del filtro Kalman digital y el controlador predictivo se realizaron utilizando una frecuencia de muestreo de 100Hz ($T_m = 10ms$), la cual establece un periodo de muestreo que es aproximadamente 14 veces mas rápido que la constante de tiempo de las dinámicas mas rápidas del sistema, garantizando una buena representación por parte del modelo digitalizado de las dinámicas del modelo continuo.

El modelo en espacio de estados desarrollado tiene en cuenta únicamente los desplazamientos de las masas medidos desde la posición de reposo. La acción de la gravedad se encuentra considerada dentro de la posición de reposo, solo se tienen en cuenta los desplazamientos producidos por señales externas.

6.1. Diseño del Estimador con Filtro Kalman

El filtro Kalman se diseñó siguiendo la propuesta realizada en el capítulo 3, teniendo en cuenta que se dispone de las medidas de la aceleración del chasis, la fuerza aplicada por el actuador y las perturbaciones provenientes de la superficie de desplazamiento. La matriz de covarianzas correspondientes a las incertidumbres en los estados del modelo continuo se definió diagonal con términos $[0,1 \cdot 10^{-3} \quad 1 \cdot 10^{-3} \quad 0,1 \cdot 10^{-3} \quad 1 \cdot 10^{-3}]$, los cuales representan desviaciones estándar de 0,1mm para las posiciones Z_s y Z_u , y de 1mm/s para las velocidades \dot{Z}_s y \dot{Z}_u , estas se establecen en valores bajos en magnitud partiendo del

6 Controlador Predictivo con Estimador para Suspensión Activa Quanser - Simulación

hecho que los estados del modelo matemático representan con suficiente precisión los estados del sistema de suspensión. La matriz de covarianzas de las incertidumbres del sensor para el modelo continuo se mantuvo en $\pm 0,049 \text{ m/s}^2$, de acuerdo a los datos suministrados en los documentos de especificaciones del sistema de suspensión activa Quanser. Las transformaciones para determinar las matrices de covarianzas del modelo digital se realizaron como se indica en el capítulo 3.

A continuación se muestran los valores numéricos usados en el filtro Kalman:

Modelo digital lineal de la suspensión Macpherson (Tiempo de muestreo 10ms):

$$F = \begin{bmatrix} 982,4364 \cdot 10^{-3} & 9,7943 \cdot 10^{-3} & 15,9944 \cdot 10^{-3} & 198,7354 \cdot 10^{-6} \\ -3,4191 & 953,9424 \cdot 10^{-3} & 2,9222 & 5,9608 \cdot 10^{-3} \\ -41,4292 \cdot 10^{-3} & 486,9018 \cdot 10^{-6} & 841,9185 \cdot 10^{-3} & 8,8825 \cdot 10^{-3} \\ 7,8154 & 106,5575 \cdot 10^{-3} & -30,0217 & 732,3777 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 19,5171 \cdot 10^{-6} & 1,5710 \cdot 10^{-3} & 3,1420 \cdot 10^{-6} \\ 3,7990 \cdot 10^{-3} & 496,8385 \cdot 10^{-3} & 993,6771 \cdot 10^{-6} \\ -46,0325 \cdot 10^{-6} & 116,6522 \cdot 10^{-3} & 233,3044 \cdot 10^{-6} \\ -8,6838 \cdot 10^{-3} & 22,2063 & 44,4125 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$C = [-367,3469 \quad -3,0612 \quad 367,3469 \quad 3,0612]$$

$$D = [408,1633 \cdot 10^{-3} \quad 0 \quad 0]$$

Matrices de covarianzas de incertidumbres en estados Q y sensores R usadas en el filtro Kalman digital:

$$Q = \begin{bmatrix} 99,1496 \cdot 10^{-12} & -124,8483 \cdot 10^{-12} & 1,9197 \cdot 10^{-12} & 401,6594 \cdot 10^{-12} \\ -124,8483 \cdot 10^{-12} & 10,3346 \cdot 10^{-9} & 146,5498 \cdot 10^{-12} & -3,5820 \cdot 10^{-9} \\ 1,9197 \cdot 10^{-12} & 146,5498 \cdot 10^{-12} & 90,0570 \cdot 10^{-12} & -1,4077 \cdot 10^{-9} \\ 401,6594 \cdot 10^{-12} & -3,5820 \cdot 10^{-9} & -1,4077 \cdot 10^{-9} & 42,8076 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix}$$

$$R = [240 \cdot 10^{-3}]$$

La comprobación del comportamiento del filtro Kalman se realizó por medio de la comparación de las respuestas en los estados estimados por el filtro y los estados tomados directamente del modelo de la suspensión de masas suspendidas realizado en simmechanics,

6 Controlador Predictivo con Estimador para Suspensión Activa Quanser - Simulación

al introducirse un escalón de perturbación en la superficie de desplazamiento de amplitud $0,01m$ a los $0,5s$ y adicionando ruido gaussiano de varianza $240 \cdot 10^{-3}$ a la señal de aceleración del chasis. En el CD anexo se encuentra el archivo *susp_conv_simmechanics_Kalman.slx* en el que se implementa el modelo en simmechanics de la suspensión de masas suspendidas y el algoritmo del estimador por filtro Kalman.

En las figuras 6.1.1 y 6.1.2 se observa el comportamiento del estimador de estados con filtro Kalman y las señales de aceleración del chasis suministrada por de sensor y la aceleración estimada por el filtro Kalman.

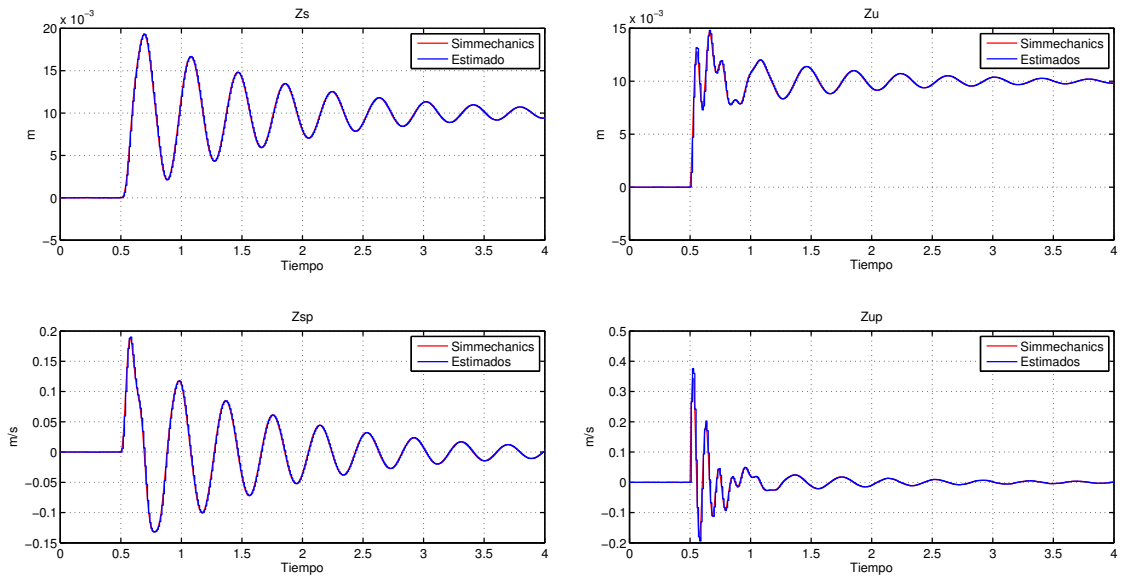


Figura 6.1.1: Variables de estado del modelo en simmechanic y estimadas por el filtro Kalman.

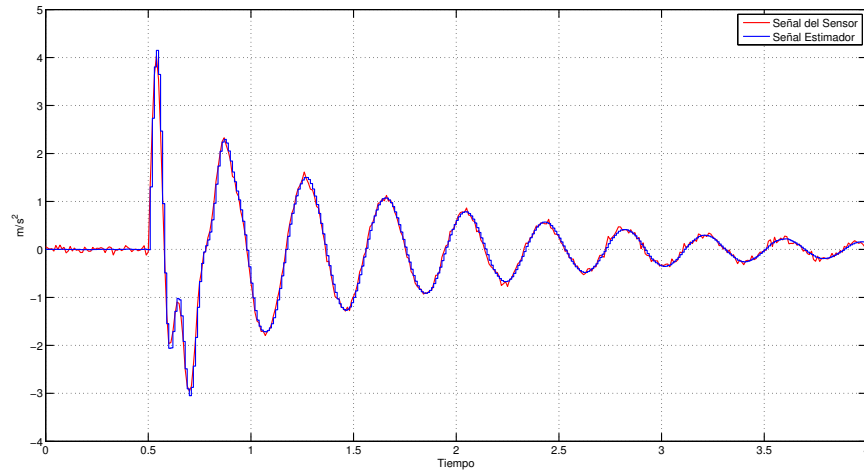


Figura 6.1.2: Aceleración suministrada por el sensor y aceleración estimada.

En este caso a diferencia del trabajo realizado con la suspensión Macpherson, el filtro Kalman suministra una muy precisa estimación de los estados del sistema sin depender de las amplitudes de las señales de entrada al sistema.

6.2. Diseño del Controlador Predictivo Basado en Modelo

El diseño del controlador predictivo basado en modelo se realizó por medio el modelo de predicción utilizado en el capítulo 4 y explicado en el Anexo B. La función objetivo utilizada es la misma que se definió para el controlador de la suspensión Macpherson. El procedimiento para determinar los parámetros del controlador predictivo fue el usado en el capítulo 4. En el cuadro 6.2.1 se indican los parámetros del controlador predictivo basado en modelo. La restricción impuesta por las limitaciones del actuador de Quanser es de $\pm 39,2N$ de fuerza máxima.

6 Controlador Predictivo con Estimador para Suspensión Activa Quanser - Simulación

Variable	Valor	Problema de Optimización
N_p	30	$\min J = \sum_{j=0}^{N_p-1} q_1 \ddot{Z}_s^2(k_i + j) + q_2 \dot{Z}_s^2(k_i + j) + q_3 (Z_s(k_i + j) - Z_u(k_i + j))^2$ $s.t. \quad F_a(x_i) \leq F_a _{max}$ $x(k_i + 1) = Ax(k_i) + B_1 \Delta F_a(k_i) + B_2 \Delta Z_r(k_i) + B_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i)$
N_c	20	
$ F_a _{max}$	35N	
q_1	0.01	
q_2	1	
q_3	30	

Cuadro 6.2.1: Parámetros del controlador predictivo basado en modelo para la suspensión Quanser.

La función de costo seleccionada es fundamental para establecer el comportamiento del controlador predictivo y del sistema controlado, en este caso, el factor q_3 cuenta con mayor peso que la aceleración y la velocidad del sistema, lo cual se debe a que el controlador debe considerar en primer lugar reducir la diferencia de las posiciones de las más suspendidas a cero, logrando llevar el sistema a posición de reposo garantizando una acción de control nula en estado estable. En el caso de seleccionar un factor q_3 relativamente bajo comparado con los valores de q_1 y q_2 el sistema puede minimizar la función de costo a zero, pero con valores de Z_s , Z_u y F_a no nulos.

En la figura 6.2.1 se observa el comportamiento del sistema con controlador predictivo basado en modelo usando los parámetros indicados en el cuadro 6.2.1. En el CD Anexo se encuentra el archivo *susp_conv_simmechanics_mpc.slx* en el que se encuentra el modelo en simmechanics de la suspensión Quanser y la implementación del algoritmo de control predictivo.

6 Controlador Predictivo con Estimador para Suspensión Activa Quanser - Simulación

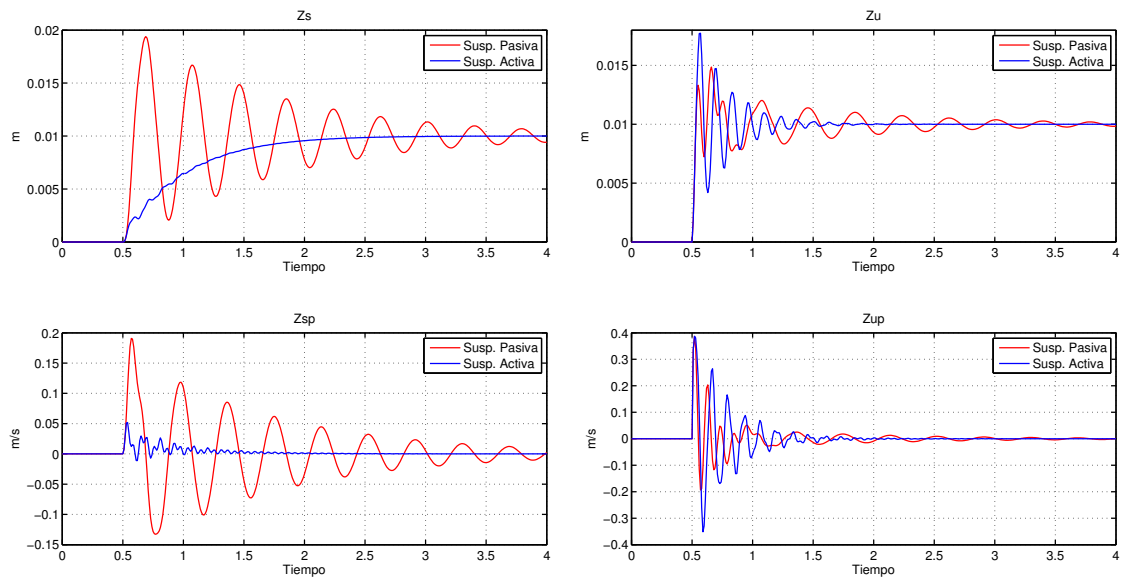


Figura 6.2.1: Respuestas de estados de suspensión Quanser pasiva y activa con MPC.

La acción del controlador predictivo es notable para reducir los cambios súbitos en la posición de la masa del chasis. En la figura 6.2.2 se aprecia el comportamiento de la función de costo establecida y la fuerza aplicada por el actuador, es importante aclarar que el controlador predictivo no requirió operar cerca de las restricciones del sistema.

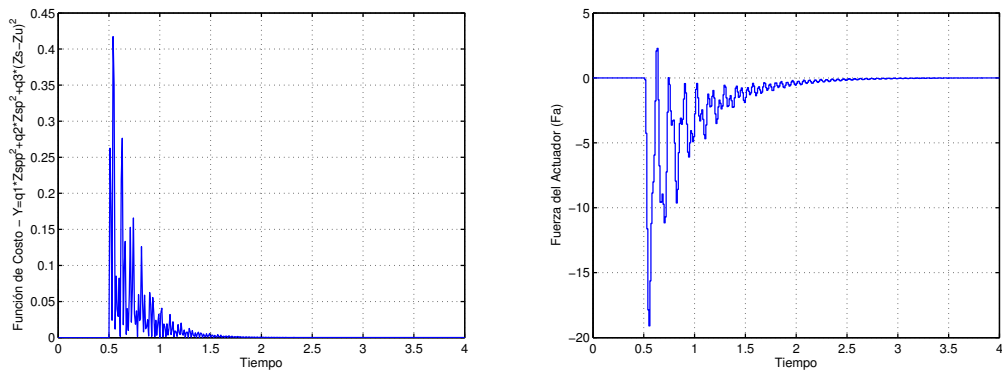


Figura 6.2.2: Fuerza del actuador y función de costo.

En este caso no es posible clasificar el confort del viaje, debido a la diferencia de escalas y las frecuencias de oscilación entre un modelo real y el sistema de suspensión Quanser, sin embargo, el índice utilizado para medir el confort, la aceleración RMS ponderada en frecuencia se reduce significativamente pasando de $0,643m/s^2$ en la suspensión pasiva a

$0,238m/s^2$ en la suspensión activa con control predictivo, una reducción del 62,9%. En la figura 6.2.3 se visualizan las aceleraciones experimentadas en la suspensión pasiva y activa.

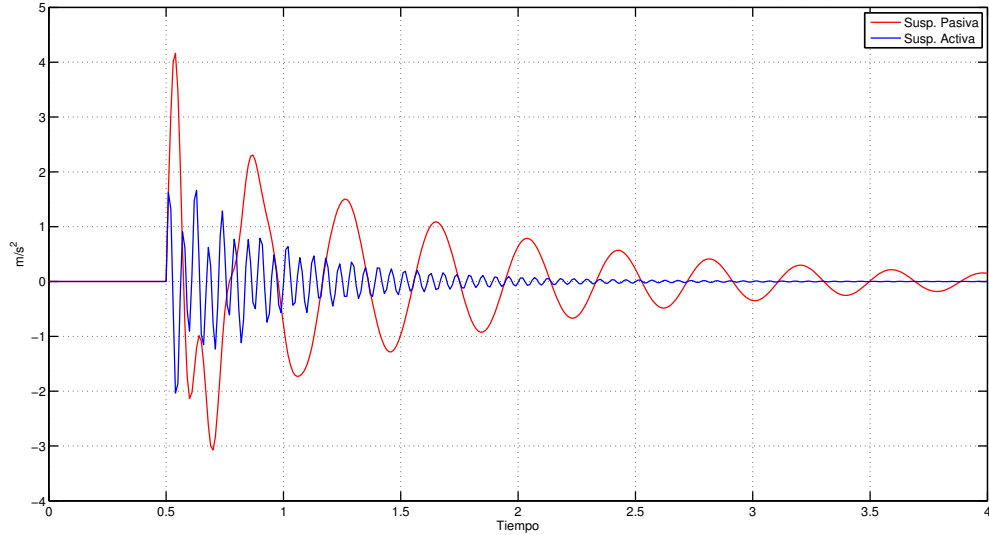


Figura 6.2.3: Aceleración del chasis en suspensión pasiva y activa.

6.3. Suspensión Activa con Control Predictivo y Estimador

A continuación se observa el comportamiento del sistema de suspensión activa Quanser con control predictivo y estimador de estados por filtro Kalman. En la figura 6.3.1 se aprecian los estados medidos y estimados del sistema controlado con estimador de estados. Se observa que el estimador por filtro Kalman realiza una buena estimación de los estados, en este caso debido a la poca diferencia entre el modelo matemático en espacio de estados y el modelo matemático obtenido del sistema. Al tratarse de un modelo lineal la representación en espacio de estados será muy precisa para describir las dinámicas del sistema sin importar las magnitudes de los estímulos que reciba el sistema. En el CD Anexo se encuentra el archivo *susp_conv_simmechanics_mcp_obsv.slx* en donde se implementa el modelo en *simmechanics*, el estimador por filtro Kalman y el controlador predictivo.

6 Controlador Predictivo con Estimador para Suspensión Activa Quanser - Simulación

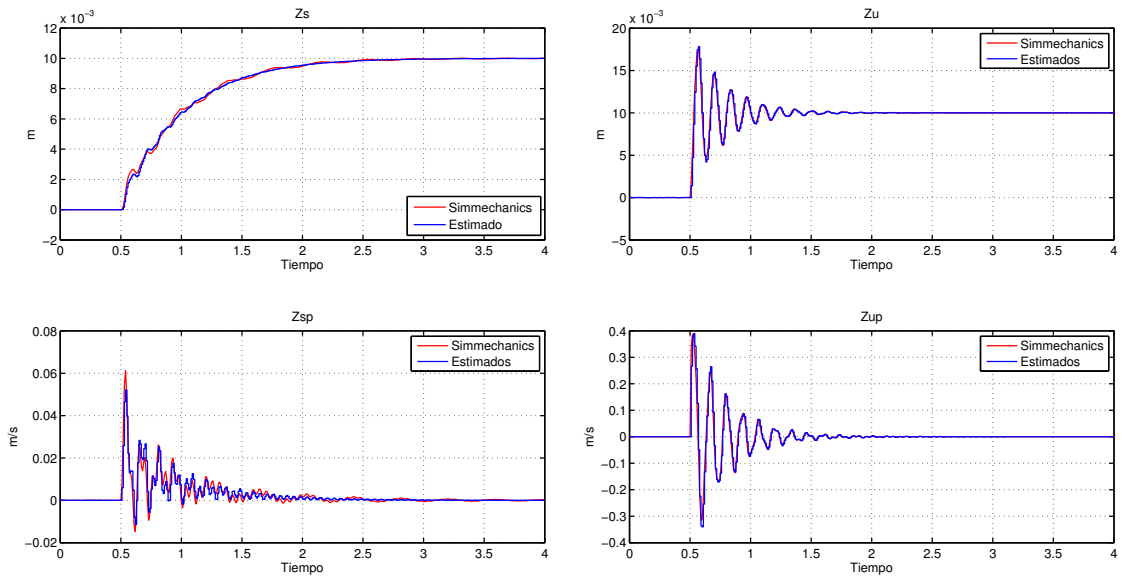


Figura 6.3.1: Respuesta del sistema controlado con medición directa de estados y con estimador.

En la figura 6.3.2 se observa como el controlador minimiza la función objetivo y la señal de control aplicada al sistema, que en este caso debido a la linealidad del sistema las respuestas del sistema controlado usando estimador de estados y del sistema controlado con medidas directas tienen una estrecha similitud.

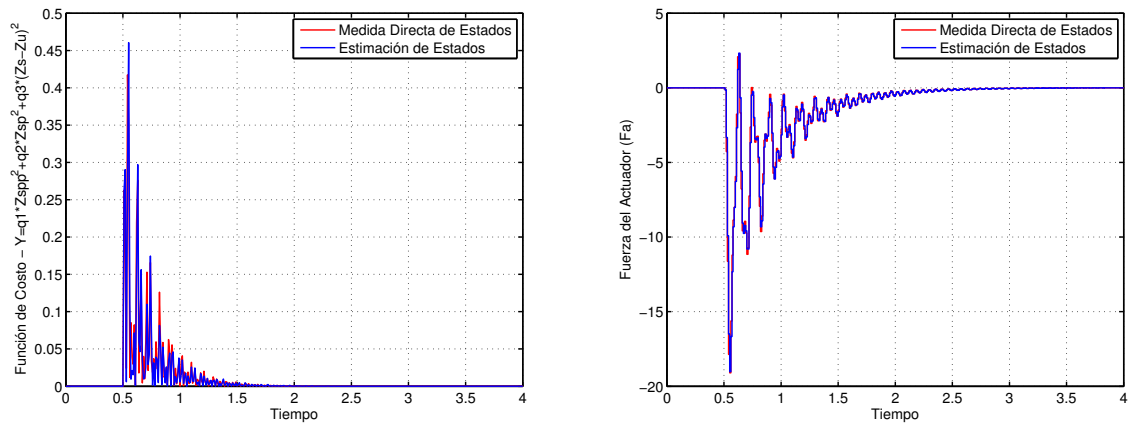


Figura 6.3.2: Función de costo y señal de control del sistema.

La aceleración del chasis medida y estimada se ilustran en la figura 6.3.3, en donde se observa el rechazo del estimador al ruido de la medida.

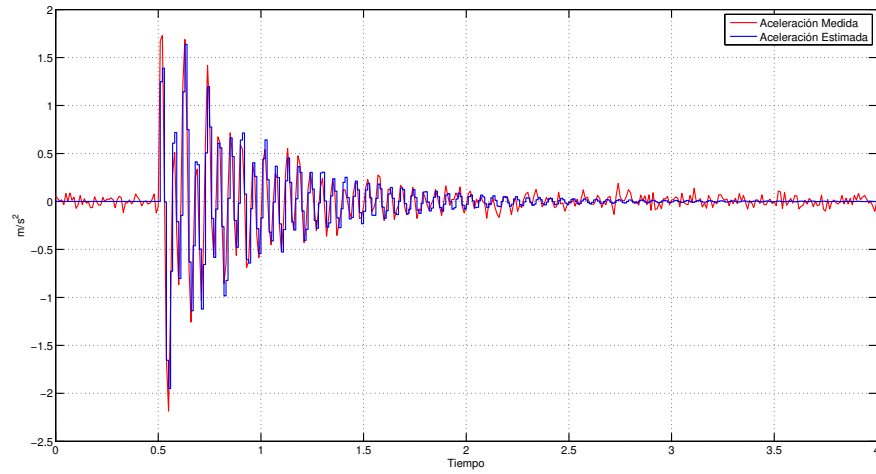


Figura 6.3.3: Aceleración del chasis estimada y medida.

A continuación en la figura 6.3.4 se observa el comportamiento en frecuencia del sistema controlado usando estimador con respecto al sistema en lazo abierto. La suspensión activa con control predictivo y estimador de estados disminuye el el pico máximo de magnitud 8,34 a una frecuencia de $2,63Hz$ a $5,03$ con una frecuencia de $2,24Hz$. El controlador predictivo desmejora la respuesta en frecuencia con respecto a la suspensión pasiva entre las frecuencias de $0,589Hz$ y $2,24Hz$, lo cual se debe esencialmente a las ponderaciones asignadas a la función de costo y en particular al alto valor asignado a q_3 para dar prioridad al retorno a la posición de reposo. En los demás intervalos de frecuencias la suspensión activa transmite menor movimiento al chasis de la superficie de desplazamiento que la suspensión activa.

6 Controlador Predictivo con Estimador para Suspensión Activa Quanser - Simulación

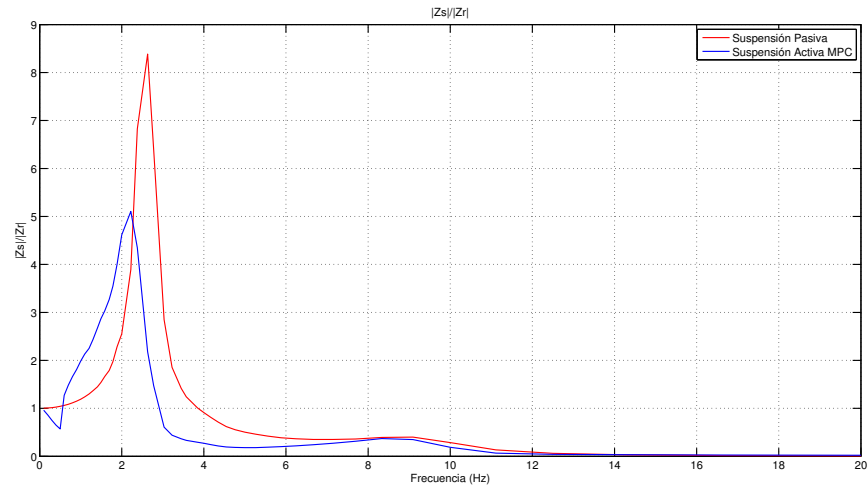


Figura 6.3.4: Respuesta en frecuencia de entrada de perturbación Z_r a desplazamiento del chasis Z_s .

Las magnitudes en aceleración experimentadas en relación a la señal de perturbación y su frecuencia se ilustran en la figura 6.3.5, en donde se observa una disminución en los picos de aceleración experimentada en las frecuencias cercanas a $2,62\text{Hz}$ y a $9,13\text{Hz}$, sin embargo, en el intervalos de frecuencia de $0,588\text{Hz}$ a $2,22\text{Hz}$ y de $12,6\text{Hz}$ en adelante, se evidencia una respuesta con menor aceleración sobre el chasis de la suspensión pasiva.

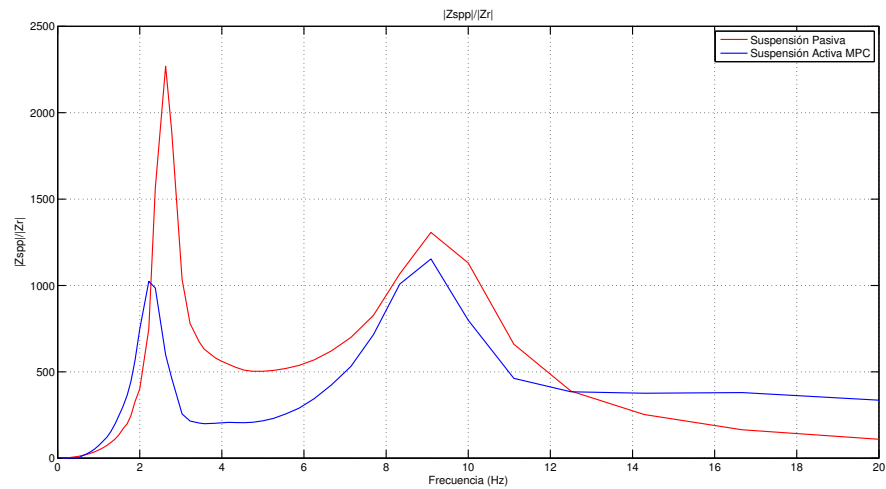


Figura 6.3.5: Respuesta en frecuencia de entrada de perturbación Z_r a aceleración del chasis \dot{Z}_s .

Es importante aclarar que la definición de la función objetivo en el control predictivo, así

6 Controlador Predictivo con Estimador para Suspensión Activa Quanser - Simulación

como los intervalos de control y predicción, determinan el comportamiento del sistema y el costo computacional necesario para su implementación. Actualmente se desarrollan trabajos de investigación que buscan determinar los intervalos de control y predicción que garanticen una respuesta adecuada y estabilidad del sistema en realimnetación.

7 Conclusiones y Recomendaciones Finales

En este trabajo se propone un nuevo modelo matemático no lineal para representar la suspensión Macpherson, el cual considera el ángulo de rotación de la rueda (ángulo de camber), el momento de inercia rotacional, la fuerza lateral sobre la rueda y la geometría no lineal de su configuración. El modelo propuesto representa de manera precisa las dinámicas de la suspensión Macpherson, para un amplio rango de magnitudes de los estímulos de entrada, sin que sea sensible a las aproximaciones realizadas en el modelamiento del sistema. La respuesta en frecuencia del modelo no lineal es prácticamente idéntica a la respuesta obtenida por el modelo en simmechanics, lo que garantiza la precisión del modelo no lineal. Adicionalmente el modelo se encuentra definido para todos los puntos de operación posibles del sistema, lo que facilita su uso y aplicación en futuras investigaciones.

El filtro Kalman lineal presenta buenos resultados al estimar los estados de la suspensión Macpherson, siempre y cuando la suspensión no se aleje demasiado de su punto de operación, aunque el filtro Kalman reduce la diferencia entre los estados reales y los estimados en su fase de corrección, para puntos de operación retirados del punto de equilibrio del sistema, el filtro Kalman no podrá acercarse a los estados reales debido al uso de un modelo lineal que no representa adecuadamente las dinámicas de la suspensión. Una solución a este inconveniente es hacer uso del filtro Kalman extendido que determina para cada punto de operación del sistema un modelo linealizado equivalente. Se recomienda obtener ecuaciones reducidas del modelo no lineal, y de la misma forma las derivadas parciales con respecto las variables de estado, de tal manera que el costo computacional no sea muy elevado al implementar el filtro Kalman extendido.

Se realizó la propuesta de un nuevo modelo de predicción para los controladores predictivos basados en modelo, en donde en el sistema de medida del modelo en espacio de estados, la matriz D que relaciona las salidas directamente con las entradas no es nula. El modelo introduce un retardo de una muestra sobre la predicción de la salida, sin embargo, de acuerdo a los resultados obtenidos se aprecia que no presenta demasiados inconvenientes, lo cual puede ser a causa del uso de un tiempo de muestreo lo suficientemente corto. En este trabajo se contempla que se tiene disponible la medida de la perturbación que actúa sobre la rueda, se recomienda mejorar el sistema mediante la inclusión de datos de previsualización del perfil de la superficie de desplazamiento, lo cual permitiría al control predictivo anticiparse a las

7 Conclusiones y Recomendaciones Finales

perturbaciones futuras, reduciendo el esfuerzo de control necesario. El modelo de predicción desarrollado contempla los datos previsualizados, lo que permite fácilmente su aplicación.

El control predictivo basado en modelo presenta un mejor rendimiento que los controladores por realimentación de estados, evitando que en un amplio rango de frecuencias se reduzca la transmisión de movimiento desde la superficie de desplazamiento y sus perturbaciones hasta el chasis del vehículo, reduciendo la aceleración experimentada por los pasajeros y aumentando el confort en el viaje. El controlador predictivo permite al sistema ajustar el lazo de realimentación de acuerdo al punto de operación del sistema y los estímulos que recibe, por lo cual se adapta a diferentes frecuencias minimizando la función objetivo establecida.

Debido a la formulación del control predictivo basado en modelo un problema de optimización con restricciones, se determinan las futuras acciones de control que minimizan la función objetivo establecida, evitando señales de control que superen las limitaciones físicas del el actuador. La función objetivo seleccionada es fundamental para establecer el comportamiento del controlador predictivo, se recomienda que sea seleccionada una función que sea convexa, para evitar que el controlador predictivo converja a mínimos locales de la función objetivo generando errores de estado estacionario. Se se desea solucionar el problema de optimización con restricciones como un problema de programación cuadrática, es necesario representar la función objetivo en términos de la salida del modelo de predicción y llevarlo a la forma estándar, con el objetivo de usar algoritmos de solución como Hildreth.

Los controladores predictivos basados en modelo presentan alta sensibilidad a las imprecisiones del modelo utilizado, y al ruido presente en los estados medidos o estimados del sistema. Se recomienda realizar un modelamiento preciso del sistema a controlar y en caso que el modelo no lineal necesariamente opere fuera de los puntos de operación del sistema, usar técnicas de estimación como el filtro kalaman extendido y control predictivo basado en modelo no lineal.

Como se observa en la aplicación del control predictivo con estimador por filtro Kalman en el modelo lineal de la suspensión Quanser, se obtiene un buen comportamiento del sistema, lo cual esta directamente relacionado con la integración de técnicas lineales sobre un modelo lineal. El filtro Kalman lineal obtiene una estimación precisa de los estados del sistema lineal sin importar las magnitudes de las señales de estímulo al sistema, así mismo, el controlador predictivo tiene la capacidad de predecir con precisión el comportamiento del sistema, determinando señales de control optimas que al aplicarse al sistema minimizan la función objetivo propuesta.

8 Anexo A

8.1. Modelamiento No lineal de Suspensión Macpherson

El modelo matemático propuesto establece las siguientes restricciones y consideraciones:

- Los puntos ilustrados en la figura 2.1.1 son puntos de equilibrio, por lo cual en el modelamiento no se tendrá en cuenta la acción de la fuerza de gravedad ya que se encuentra compensada por el sistema.
- El chasis (puntos Q y M) solo se desplaza en la dirección vertical (eje z).
- La masa del chasis m_s y de la rueda m_u se encuentran concentradas en los puntos M y C , las otras masas se consideran despreciables.
- El ángulo el ángulo ϕ de la rueda con respecto al eje z (ángulo de camber) tiene pequeñas variaciones.
- Los ángulos se miden de manera positiva en sentido anti horario y negativo en sentido horario.
- Los puntos Q , P y M , cuentan con uniones rotacionales.
- El sistema coordinado de referencia se establece en el punto Q .
- La rueda nunca pierde contacto con la superficie de desplazamiento.

Considerando que las posiciones de reposo de los puntos de la suspensión son Y_{qo} , Z_{qo} , Y_{mo} , Z_{mo} , Y_{po} , Z_{po} , Y_{co} , Z_{co} , y partiendo de la geometría es posible establecer las siguientes relaciones geométricas entre los puntos claves de la suspensión que determinan sus respectivas variaciones respecto a los puntos de equilibrio:

$$\begin{array}{lll} Y_q = 0 & Y_m = 0 & Y_p = L_1 \cos(\theta + \theta_o) - Y_{po} \\ Z_q = Z_s & Z_m = Z_s & Z_p = L_1 \sin(\theta + \theta_o) - Z_{po} + Z_s \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Y_c = L_1 \cos(\theta + \theta_o) + L_{pc} \cos(\phi + \xi_o) - Y_{po} \\ Z_c = L_1 \sin(\theta + \theta_o) + L_{pc} \sin(\phi + \xi_o) - Z_{co} + Z_s \end{array}$$

Adicionalmente es posible obtener las siguientes ecuaciones a partir de las relaciones trigonométricas de los ángulos que conforman el triángulo QPM .

Mediante Ley de Senos:

$$\frac{L_3}{\text{sen}(\gamma_o - \theta)} = \frac{L_1}{\text{sen}(\sigma_o + \phi)}$$

Mediante Ley de Cosenos:

$$L_3 = (L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos(\gamma_o - \theta))^{1/2}$$

Teniendo en cuenta que el ángulo ϕ presenta variaciones pequeñas, es posible linealizar las ecuaciones de Y_c , Z_c y la relación trigonométrica de la ley de senos así:

$$Y_c = L_1\cos(\theta + \theta_o) + L_{pc}\cos\xi_o - L_{pc}\text{sen}\xi_o\phi - Y_{co}$$

$$Z_c = L_1\text{sen}(\theta + \theta_o) + L_{pc}\sin\xi_o + L_{pc}\cos\xi_o\phi - Z_{co} + Z_s$$

$$L_3 = \frac{L_1\text{sen}(\gamma_o - \theta)}{\text{sen}\sigma_o + \cos\sigma_o\phi}$$

Igualando la ecuación linealizada de la ley de senos con la ecuación de la ley de cosenos se obtiene la siguiente ecuación para ϕ :

$$\phi = \frac{L_1\text{sen}(\gamma_o - \theta)}{\cos\sigma_o(a - b\cos(\gamma_o - \theta))^{1/2}} - \text{Tan}\sigma_o$$

Donde:

$$a = L_1^2 + L_2^2 \text{ y } b = 2L_1L_2.$$

Sustituyendo ϕ en las ecuaciones de las variaciones en los puntos Z_m , Y_c , Z_c , se obtienen las ecuaciones que determinan la cinemática de la masa del chasis y de la rueda de la suspensión Macpherson:

$$Z_m = Z_s \tag{8.1.1}$$

$$Y_c = L_1\cos(\theta + \theta_o) + L_{pc}\cos\xi_o - L_{pc}\text{sen}\xi_o\left(\frac{L_1\text{sen}(\gamma_o - \theta)}{\cos\sigma_o(a - b\cos(\gamma_o - \theta))^{1/2}} - \text{Tan}\sigma_o\right) - Y_{co} \tag{8.1.2}$$

$$Z_c = L_1\text{sen}(\theta + \theta_o) + L_{pc}\sin\xi_o + L_{pc}\cos\xi_o\left(\frac{L_1\text{sen}(\gamma_o - \theta)}{\cos\sigma_o(a - b\cos(\gamma_o - \theta))^{1/2}} - \text{Tan}\sigma_o\right) - Z_{co} + Z_s \tag{8.1.3}$$

A continuación se establecen las relaciones cinemáticas necesarias para la determinación de la dinámica del sistema:

El cambio en la longitud ΔL de la distancia entre los puntos M y P , es:

$$\Delta L = L_3 - L_{03} = (a - b \cos(\gamma_o - \theta))^{1/2} - L_{03} \quad (8.1.4)$$

Donde L_{03} es la distancia de M a P en la posición de reposo.

El cambio de la longitud ΔZ_t de la distancia entre los puntos C y la superficie de contacto de la rueda es:

$$\Delta Z_t = (Z_c - Z_r) \cos \phi \approx Z_c - Z_r$$

$$\begin{aligned} \Delta Z_t = & L_1 \sin(\theta + \theta_o) + L_{pc} \sin \xi_o + L_{pc} \cos \xi_o \left(\frac{L_1 \sin(\gamma_o - \theta)}{\cos \sigma_o (a - b \cos(\gamma_o - \theta))^{1/2}} - \tan \sigma_o \right) \\ & - Z_{co} + Z_s - Z_r \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

El desplazamiento en el eje y de la superficie de contacto de la rueda con respecto a la posición vertical de equilibrio es:

$$\Delta Y_{tl} = Y_c + R \sin \phi \approx Y_c + R \phi$$

$$\begin{aligned} \Delta Y_{tl} = & L_1 \cos(\theta + \theta_o) + L_{pc} \cos \xi_o + (R - L_{pc} \sin \xi_o) \left(\frac{L_1 \sin(\gamma_o - \theta)}{\cos \sigma_o (a - b \cos(\gamma_o - \theta))^{1/2}} \right. \\ & \left. - \tan \sigma_o \right) - Y_{co} \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

8.1.1. Ecuaciones Dinámicas de la Suspensión Macpherson

Las ecuaciones dinámicas de la suspensión Macpherson se obtienen usando el método de Lagrange. En este caso se cuenta con dos cuerpos que pueden moverse en las tres direcciones y cuatro ecuaciones de ligadura, las cuales corresponden a:

- Los desplazamientos se realizan sobre el plano $x = 0$.
- El chasis solo permite desplazamiento vertical $Y_m = 0$.

- La ecuación que determina la posición del punto P .
- La ecuación que determina la distancia L_3 entre los puntos M y P .

Por lo cual aplicando la ecuación $3N - n_l = m$, donde N es el número de cuerpos n_l el número de ecuaciones de ligadura y m la cantidad necesaria de variables generalizadas. Se determina que la cantidad de variables generalizadas necesarias son dos, que en este caso corresponden a Z_s y θ .

A continuación se definen las funciones de energía cinética, energía potencial y la función de disipación a partir de las ecuaciones 8.1.1 a 8.1.6:

$$T = \frac{1}{2}m_s\dot{Z}_s^2 + \frac{1}{2}m_u(\dot{Y}_c^2 + \dot{Z}_c^2) + \frac{1}{2}I_c\dot{\phi}^2$$

$$U = \frac{1}{2}K_s(\Delta L)^2 + \frac{1}{2}K_t(\Delta Z_t)^2 + \frac{1}{2}K_{tl}(\Delta Y_{tl})^2$$

$$D = \frac{1}{2}B_s(\dot{\Delta L})^2 + \frac{1}{2}B_t(\dot{\Delta Z}_t)^2$$

Donde I_c es el momento de inercia rotacional de la rueda.

Por definición el lagrangiano del sistema es:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_s\dot{Z}_s^2 + \frac{1}{2}m_u(\dot{Y}_c^2 + \dot{Z}_c^2) + \frac{1}{2}I_c\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}K_s(\Delta L)^2 - \frac{1}{2}K_t(\Delta Z_t)^2 - \frac{1}{2}K_{tl}(\Delta Y_{tl})^2$$

Para determinar las dos ecuaciones que establecen la dinámica del sistema es necesario desarrollar las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Z}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial Z_s} + \frac{\partial D}{\partial \dot{Z}_s} = Q_1 \quad (8.1.7)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = Q_2 \quad (8.1.8)$$

Donde Q_1 y Q_2 son las fuerzas generalizadas del sistema definidas de la siguiente manera:

$$Q_1 = \vec{F}_{m_s} \cdot \frac{\partial \vec{r}_m}{\partial Z_s} + \vec{F}_{m_u} \cdot \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial Z_s}$$

$$Q_2 = \vec{F}_{m_s} \cdot \frac{\partial \vec{r}_m}{\partial \theta} + \vec{F}_{m_u} \cdot \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \theta}$$

Siendo \vec{F}_{m_s} y \vec{F}_{m_u} las fuerzas aplicadas al cuerpo del chasis y al cuerpo de la rueda, y \vec{r}_m y \vec{r}_p los vectores posición medidos desde el origen hasta los puntos en donde se aplican las fuerzas ejercidas por el actuador. Para este caso dado de las fuerzas ejercidas sobre los cuerpos son de magnitud igual pero con direcciones opuestas, se tiene que $\vec{F}_{m_s} = \vec{F}_a$ y $\vec{F}_{m_u} = -\vec{F}_a$. Los vectores \vec{r}_m , \vec{r}_p y la fuerza \vec{F}_a se definen de acuerdo a la geometría de la siguiente manera:

$$\vec{r}_m = Y_{mo}\hat{j} + (Z_{mo} + Z_s)\hat{k}$$

$$\vec{r}_p = L_1\cos(\theta + \theta_o)\hat{j} + (L_1\sin(\theta + \theta_o) + Z_s)\hat{k}$$

$$\vec{F}_a = -F_a\sin(\sigma'_o + \phi)\hat{j} + F_a\cos(\sigma'_o + \phi)\hat{k}$$

Donde \hat{j} y \hat{k} son vectores unitarios en las direcciones de los ejes y y z respectivamente.

Realizando las derivadas parciales y efectuando los productos punto indicados en las ecuaciones de las fuerzas generalizadas Q_1 y Q_2 se obtiene:

$$Q_1 = 0$$

$$Q_2 = -F_aL_1\cos(\phi - \theta + \sigma'_o - \theta_o) = -F_aL_1\cos\left(\frac{L_1\sin(\gamma_o - \theta)}{\cos\sigma_o(a - b\cos(\gamma_o - \theta))^{1/2}} - \tan\sigma_o - \theta + \sigma'_o - \theta_o\right)$$

Utilizando la herramienta de matemática simbólica de MATLAB y la función `diff` (`func`, `var`) se desarrollaron las ecuaciones dinámicas siguiendo el siguiente procedimiento, el cual se fundamenta en la aplicación de la regla de la cadena para múltiples variables:

1. Definición las variables y constantes simbólicas que intervienen en las ecuaciones cinemáticas de las masas (m_s y m_u) de la suspensión Macpherson en función de las variables generalizadas Z_s y θ .
2. Determinación de las funciones derivadas con respecto al tiempo que intervienen en el lagrangiano y la función de disipación:

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\dot{Y}_c = \frac{dY_c}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\dot{Z}_c = \frac{dZ_c}{d\theta}\dot{\theta} + \frac{dZ_c}{dZ_s}\dot{Z}_s$$

$$\dot{\Delta L} = \frac{d\Delta L}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\dot{\Delta Z}_t = \frac{d\Delta Z_t}{d\theta}\dot{\theta} + \frac{d\Delta Z_t}{dZ_s}\dot{Z}_s + \frac{d\Delta Z_t}{dZ_r}\dot{Z}_r$$

Es necesario definir en MATLAB como variables simbólicas $\dot{\theta}$, \ddot{Z}_s y \dot{Z}_r , previo a la definición de las funciones anteriores.

3. Definición de las funciones simbólicas de energía cinética, potencial, disipación y el lagrangiano usando las ecuaciones obtenidas en el punto anterior.
4. Calcular las derivadas de las ecuaciones de lagrange en las ecuaciones que determinan la dinámica de la suspensión para las variables generalizadas Z_s y θ :

Para la variable generalizada Z_s :

$$A = \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}_s}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\dot{Z}_s} \ddot{Z}_s + \frac{dA}{d\dot{\theta}} \ddot{\theta} + \frac{dA}{d\theta} \dot{\theta}$$

$$\frac{dA}{dt} - \frac{\partial L}{\partial Z_s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}_s} = Q_1$$

Para la variable generalizada θ :

$$B = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB}{d\dot{Z}_s} \ddot{Z}_s + \frac{dB}{d\dot{\theta}} \ddot{\theta} + \frac{dB}{d\theta} \dot{\theta}$$

$$\frac{dB}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = Q_2$$

Es necesario definir en MATLAB como variables simbólicas $\ddot{\theta}$, \ddot{Z}_s , previo a la definición de las funciones anteriores.

Las ecuaciones resultantes del procedimiento anterior son:

$$(m_s + m_u)\ddot{Z}_s + F_1\dot{\theta}^2 + F_2\dot{\theta} + F_3 - B_t\dot{Z}_r + B_t\dot{Z}_s + F_4\ddot{\theta} = Q_1 \quad (8.1.9)$$

$$F_4\ddot{Z}_s + F_A\ddot{\theta} + F_2\dot{Z}_s + F_B\dot{\theta}^2 + F_C\dot{\theta} + F_D - F_2\dot{Z}_r + F_E = Q_2 \quad (8.1.10)$$

Donde F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , F_A , F_B , F_C , F_D y F_E se definen soportadas en ecuaciones establecidas previamente y las siguientes ecuaciones auxiliares:

8 Anexo A

$$\begin{aligned}
 a &= L_1^2 + L_2^2 & b &= -L_1L_2 & a' &= \text{sen}(\theta + \theta_o) & b' &= \text{cos}(\theta + \theta_o) \\
 c' &= \text{sen}(\gamma_o - \theta) & d' &= \text{cos}(\gamma_o - \theta) & e' &= \frac{L_{pc}L_1}{\text{cos}\sigma_o} \left(\frac{d'}{L_3} - \frac{bc'^2}{2L_3^3} \right)
 \end{aligned}$$

$$F_1 = -m_u(L_1a' + \frac{L_{cp}L_1\text{cos}\xi_o}{\text{cos}\sigma_o} \left(\frac{c'}{L_3} - \frac{3b^2c'^3}{4L_3^5} + \frac{3bc'd'}{2L_3^3} \right))$$

$$F_2 = B_t(L_1b' - \text{cos}\xi_oe')$$

$$F_3 = -K_t(Z_{co} + Z_r - Z_s - L_1a' - L_{pc}\text{sen}\xi_o + e' \left(\frac{\text{sen}\sigma_o}{L_1} - \frac{c'}{L_3} \right))$$

$$F_4 = m_u(L_1b' - \text{cos}\xi_oe')$$

$$F_A = m_u((L_1b' - \text{cos}\xi_oe')^2 + (L_1a' - \text{sen}\xi_oe') + \frac{I_c e'^2}{L_{cp}^2})$$

$$\begin{aligned}
 F_B &= -m_u \left(\frac{L_{cp}L_1}{\text{cos}\sigma_o} \left(\frac{c'}{L_3} - \frac{3b^2c'^3}{4L_3^5} + \frac{3bc'd'}{2L_3^3} \right) (L_1\text{cos}(\theta + \theta_o - \xi_o) - e') - e'L_1\text{sen}(\theta + \theta_o - \xi_o) \right) + \\
 &\frac{I_c e' L_1}{L_{cp}\text{cos}\sigma_o} \left(\frac{c'}{L_3} - \frac{3b^2c'^3}{4L_3^5} + \frac{3bc'd'}{2L_3^3} \right)
 \end{aligned}$$

$$F_C = B_t(L_1b' - \text{cos}\xi_oe')^2 + \frac{B_s b^2 c'^2}{4L_3^2}$$

$$F_D = -K_t(L_1b' - \text{cos}\xi_oe')(Z_{co} + Z_r - Z_s - L_1a' - L_{cp}\text{sen}\xi_o + L_{cp}\text{cos}\xi_o\phi) - K_{tl} \left(\frac{Re'}{L_{cp}} + L_1a' - \text{sen}\xi_oe' \right) (L_1b' - Y_{co} + L_{cp}\text{cos}\xi_o + (L_{cp}\text{sen}\xi_o - R)\phi)$$

$$F_E = K_s \frac{bc'(L_{03} - L_3)}{L_3}$$

$$L_3 = (a - bd')^{1/2}$$

$$Q_2 = -F_a L_1 \text{cos} \left(\frac{L_1 c'}{\text{cos}\sigma_o L_3} - \text{Tan}\sigma_o - \theta + \sigma'_o - \theta_o \right)$$

Estableciendo como variables de estado $x_1 = Z_s, x_2 = \dot{Z}_s, x_3 = \theta$ y $x_4 = \dot{\theta}$ es posible despejado de 8.1.9 y 8.1.10 obtener el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales en representación de espacio de estados:

8 Anexo A

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, x_3, x_4, Z_r, \dot{Z}_r, F_a) \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= g(x_1, x_2, x_3, x_4, Z_r, \dot{Z}_r, F_a)
 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 f &= [F_4 F_D - F_3 F_A + F_4 F_E - F_4 Q_2 + (-B_t F_A + F_4 F_2) \dot{Z}_s + (B_t F_A - F_4 F_2) \dot{Z}_r \\
 &\quad - (F_2 F_A + F_4 F_C) \dot{\theta} - (F_1 F_A + F_4 F_B) \dot{\theta}^2] / (F_A (m_s + m_u) - F_4^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g &= -[(m_s + m_u)(F_D + F_E) - Q_2(m_s + m_u) - F_3 F_4 + (B_t F_4 - F_2(m_s + m_u)) \dot{Z}_r \\
 &\quad + (F_2(m_s + m_u) - B_t F_4) \dot{Z}_s + (F_C(m_s + m_u) - F_2 F_4) \dot{\theta} \\
 &\quad + (F_B(m_s + m_u) - F_1 F_4) \dot{\theta}^2] / (F_B(m_s + m_u) - F_4^2)
 \end{aligned}$$

9 Anexo B

9.1. Modelo de Predicción con Matriz D Diferente de Cero

A continuación se realiza una nueva propuesta al modelo de predicción desarrollado en [24] considerando no nula la matriz D.

Partiendo del siguiente modelo en espacio de estados, el cual representa el modelo lineal digital de la suspensión Macpherson al incluir como salida la aceleración del chasis o la aceleración del ángulo del brazo de control:

$$\begin{aligned}x_m(k+1) &= A_m x(k) + B_m F_a(k) + B'_m Z_r(k) + B''_m \dot{Z}_r(k) \\y_m(k) &= C_m x(k) + D_m F_a(k) + D'_m Z_r(k) + D''_m \dot{Z}_r(k)\end{aligned}$$

Donde las entradas del sistema son la fuerza del actuador F_a , el desplazamiento de la superficie Z_r y su tasa de cambio \dot{Z}_r y el subíndice m indica que es del modelo del sistema.

Partiendo de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\Delta x_m(k) &= x_m(k) - x_m(k-1) \\ \Delta F_a(k) &= F_a(k) - F_a(k-1) \\ \Delta Z_r(k) &= Z_r(k) - Z_r(k-1) \\ \Delta \dot{Z}_r(k) &= \dot{Z}_r(k) - \dot{Z}_r(k-1)\end{aligned}$$

Se obtiene la diferencia entre el estado futuro y el estado actual y la diferencia de la salida actual y la salida anterior:

$$\begin{aligned}x_m(k+1) - x_m(k) &= A_m x(k) + B_m F_a(k) + B'_m Z_r(k) + B''_m \dot{Z}_r(k) - [A_m x(k-1) \\ &\quad + B_m F_a(k-1) + B'_m Z_r(k-1) + B''_m \dot{Z}_r(k-1)] \\ \Delta x_m(k+1) &= A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta F_a(k) + B'_m \Delta Z_r(k) + B''_m \Delta \dot{Z}_r(k)\end{aligned}\tag{9.1.1}$$

$$\begin{aligned}
 y_m(k) - y_m(k-1) &= C_m x(k) + D_m F_a(k) + D'_m Z_r(k) + D''_m \dot{Z}_r(k) - [C_m x(k) \\
 &\quad + D_m F_a(k) + D'_m Z_r(k) + D''_m \dot{Z}_r(k)] \\
 y_m(k) - y_m(k-1) &= C_m \Delta x_m(k) + D_m F_a(x) + D'_m \Delta Z_r(k) + D''_m \Delta \dot{Z}_r(k) \\
 y_m(k) &= C_m \Delta x_m(k) + D_m F_a(x) + D'_m \Delta Z_r(k) + D''_m \Delta \dot{Z}_r(k) + y_m(k-1)
 \end{aligned} \tag{9.1.2}$$

Definiendo como nuevas variables de estado:

$$x(k) = \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y_m(k-1) \end{bmatrix}$$

Y usando las ecuaciones 9.1.1, 9.1.2 se establece un nuevo modelo de espacio de estados a utilizar en el modelo de predicción:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y_m(k) \end{bmatrix}}_{x(k+1)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_m & 0_s \\ C_m & I \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y_m(k-1) \end{bmatrix}}_{x(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_m \\ D_m \end{bmatrix}}_{B_1} \Delta F_a(k) \\
 &\quad + \underbrace{\begin{bmatrix} B'_m \\ D'_m \end{bmatrix}}_{B_2} \Delta Z_r(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} B''_m \\ D''_m \end{bmatrix}}_{B_3} \Delta \dot{Z}_r(k) \\
 \underbrace{y_m(k-1)}_{y(k)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0_s & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y_m(k-1) \end{bmatrix}}_{x(k)}
 \end{aligned}$$

Partiendo de este modelo de obtienen las predicciones de los estados y las variables de salida a controlar:

$$\begin{aligned}
 x(k_i + 1 | k_i) &= Ax(k_i) + B_1 \Delta F_a(k_i) + B_2 \Delta Z_r(k_i) + B_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i) \\
 x(k_i + 2 | k_i) &= Ax(k_i + 1 | k_i) + B_1 \Delta F_a(k_i + 1) + B_2 \Delta Z_r(k_i + 1) + B_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i + 1) \\
 &= A[Ax(k_i) + B_1 \Delta F_a(k_i) + B_2 \Delta Z_r(k_i) + B_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i)] + B_1 \Delta F_a(k_i + 1) \\
 &\quad + B_2 \Delta Z_r(k_i + 1) + B_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i + 1) \\
 &= A^2 x(k_i) + AB_1 \Delta F_a(k_i) + AB_2 \Delta Z_r(k_i) + AB_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i) + B_1 \Delta F_a(k_i + 1) \\
 &\quad + B_2 \Delta Z_r(k_i + 1) + B_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i + 1) \\
 &\quad \vdots \\
 x(k_i + N_p | k_i) &= A^{N_p} x(k_i) + A^{N_p-1} B_1 \Delta F_a(k_i) + A^{N_p-1} B_2 \Delta Z_r(k_i) + A^{N_p-1} B_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i) \\
 &\quad + A^{N_p-2} B_1 \Delta F_a(k_i + 1) + A^{N_p-2} B_2 \Delta Z_r(k_i + 1) + A^{N_p-2} B_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i + 1) \\
 &\quad + \dots + A^{N_p-N_c} B_1 \Delta F_a(k_i + N_c - 1) + A^{N_p-N_c} B_2 \Delta Z_r(k_i + N_c - 1) \\
 &\quad + A^{N_p-N_c} B_3 \Delta \dot{Z}_r(k_i + N_c - 1)
 \end{aligned}$$

Con las ecuaciones anteriores que predicen el comportamiento de las variables de estado a partir de los valores actuales de los estados y la señal de control se obtiene la predicción de la señal a controlar:

$$\begin{aligned}
 y(k_i + 1|k_i) &= CAx(k_i) + CB_1\Delta F_a(k_i) + CB_2\Delta Z_r(k_i) + CB_3\Delta \dot{Z}_r(k_i) \\
 y(k_i + 2|k_i) &= CA^2x(k_i) + CAB_1\Delta F_a(k_i) + CAB_2\Delta Z_r(k_i) + CAB_3\Delta \dot{Z}_r(k_i) + CB_1\Delta F_a(k_i + 1) \\
 &= +CB_2\Delta Z_r(k_i + 1) + CB_3\Delta \dot{Z}_r(k_i + 1) \\
 &\vdots \\
 y(k_i + N_p|k_i) &= CA^{N_p}x(k_i) + CA^{N_p-1}B_1\Delta F_a(k_i) + CA^{N_p-1}B_2\Delta Z_r(k_i) + CA^{N_p-1}B_3\Delta \dot{Z}_r(k_i) \\
 &\quad + CA^{N_p-2}B_1\Delta F_a(k_i + 1) + CA^{N_p-2}B_2\Delta Z_r(k_i + 1) + CA^{N_p-2}B_3\Delta \dot{Z}_r(k_i - 1) \\
 &\quad + \dots + CA^{N_p-N_c}B_1\Delta F_a(k_i + N_c - 1) + CA^{N_p-N_c}B_2\Delta Z_r(k_i + N_c - 1) \\
 &\quad + CA^{N_p-N_c}B_3\Delta \dot{Z}_r(k_i + N_c - 1)
 \end{aligned}$$

Las anteriores ecuaciones se pueden representar de manera matricial de la siguiente manera:

$$Y = Fx(k_i) + \Phi\overline{\Delta F_a} + \Omega_1\overline{\Delta Z_r} + \Omega_2\overline{\Delta \dot{Z}_r}$$

Donde:

$$Y = [y(k_i + 1|k_i) \quad y(k_i + 2|k_i) \quad y(k_i + 3|k_i) \quad \dots \quad y(k_i + N_p|k_i)]^T$$

$$\overline{\Delta F_a} = [\Delta F_a(k_i) \quad \Delta F_a(k_i + 1) \quad \Delta F_a(k_i + 2) \quad \dots \quad \Delta F_a(k_i + N_c - 1)]^T$$

$$\overline{\Delta Z_r} = [\Delta Z_r(k_i) \quad \Delta Z_r(k_i + 1) \quad \Delta Z_r(k_i + 2) \quad \dots \quad \Delta Z_r(k_i + N_c - 1)]^T$$

$$\overline{\Delta \dot{Z}_r} = [\Delta \dot{Z}_r(k_i) \quad \Delta \dot{Z}_r(k_i + 1) \quad \Delta \dot{Z}_r(k_i + 2) \quad \dots \quad \Delta \dot{Z}_r(k_i + N_c - 1)]^T$$

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} CB_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB_1 & CB_1 & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B_1 & CAB_1 & CB_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B_1 & CA^{N_p-2}B_1 & CA^{N_p-3}B_1 & \dots & CA^{N_p-N_c}B_1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} CB_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB_2 & CB_2 & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B_2 & CAB_2 & CB_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B_2 & CA^{N_p-2}B_2 & CA^{N_p-3}B_2 & \dots & CA^{N_p-N_c}B_2 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} CB_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CAB_3 & CB_3 & 0 & \cdots & 0 \\ CA^2B_3 & CAB_3 & CB_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ CA^{N_p-1}B_3 & CA^{N_p-2}B_3 & CA^{N_p-3}B_3 & \cdots & CA^{N_p-N_c}B_3 \end{bmatrix}$$

El modelo de predicción anterior permite obtener el comportamiento futuro del sistema utilizando datos de previsualización del perfil de la superficie de desplazamiento $\overline{\Delta Z_r}$ y $\overline{\Delta \dot{Z}_r}$, técnica que ha sido usada [5], [31] y [32], obteniendo un mejor rendimiento del controlador predictivo reflejado en un mayor confort en el desplazamiento, debido a la anticipación de la respuesta del control a las perturbaciones en la vía. Esta técnica requiere mayor costo computacional y el acondicionamiento de sensores e implementación de algoritmos que permitan anticipar el perfil de la vía. El modelo usado en este trabajo asume que es posible medir solo el dato en el tiempo actual mas no futuros de la superficie de desplazamiento. Teniendo en cuenta lo anterior, se asume que las perturbaciones no se encuentran presentes en los instantes futuros de tiempo, por tanto para disminuir el costo computacional los vectores de perturbaciones se transforman en valores escalares y se definen nuevamente las matrices Ω_1 y Ω_2 :

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} CB_2 \\ CAB_2 \\ CA^2B_2 \\ \vdots \\ CA^{N_p-1}B_2 \end{bmatrix} \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} CB_3 \\ CAB_3 \\ CA^2B_3 \\ \vdots \\ CA^{N_p-1}B_3 \end{bmatrix}$$

10 Anexo C

10.1. Algoritmo de Hildreth

El algoritmo de Hildreth es un método de solución de problemas de optimización con restricciones, que hace uso del problema de optimización dual y el conjunto activo para solucionar el problema de optimización primal.

Se desea utilizar el algoritmo de Hildreth para resolver el problema de optimización primal:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2}x^T E x + F^T x \\ \text{s.t.} \quad & Mx \leq \gamma \end{aligned} \quad (10.1.1)$$

El algoritmo se fundamenta en la solución del problema dual, definido mediante multiplicadores de Lagrange así:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \geq 0} \quad & \min_x \quad \frac{1}{2}x^T E x + x^T F + \lambda^T (Mx - \gamma) \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

El problema de minimización dentro de la ecuación 10.1.2 es un problema de optimización sin restricciones el cual tiene la siguiente solución:

$$x = -E^{-1}(F + M^T \lambda) \quad (10.1.3)$$

Sustituyendo la respuesta anterior en el problema de optimización 10.1.2 el problema de optimización se transforma en:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \geq 0} \quad & -\frac{1}{2}\lambda^T H \lambda - \lambda^T K - \frac{1}{2}F^T E^{-1} F \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

Donde:

$$\begin{aligned} H &= ME^{-1}M^T \\ K &= \gamma + ME^{-1}F \end{aligned} \quad (10.1.5)$$

Que se representa de manera equivalente como:

$$\min_{\lambda \geq 0} \quad \frac{1}{2}\lambda^T H \lambda + \lambda^T K + \frac{1}{2}F^T E^{-1}F \quad (10.1.6)$$

El cual es mas fácil de solucionar, debido a que las restricciones son mas simples en el problema dual que definidas en el primal. Solucionado el problema dual se obtiene la solución del primal mediante la ecuación 10.1.3.

El algoritmo de Hildreth's es un método de solución de conjunto activo que soluciona el problema dual 10.1.6, siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Se determina la solución del problema de optimización primal 10.1.1 sin restricciones:

$$x^* = -E^{-1}F$$

Se procede al paso 2.

2. Si los valores de x^* satisfacen las restricciones $Mx^* \geq \gamma$ el algoritmo retorna el vector optimo x^* y termina, de lo contrario es necesario resolver el problema dual, determinando los multiplicadores de Lagrange de forma iterativa. Se procede al paso 3.

3. Se determinan las matrices H y K del problema dual utilizando las ecuaciones 10.1.5. Se inicializan los valores de λ^* en ceros y se procede al paso 4.

4. Se actualizan de manera secuencial todos multiplicador de Lagrange siguiendo la siguiente regla:

$$w_i^{m+1} = -\frac{1}{h_{ii}}(k_i + \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij}\lambda_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^n h_{ij}\lambda_j^m)$$

$$\lambda_i^{m+1} = \max(0, w_i^{m+1})$$

Donde i es el número del multiplicador de Lagrange a actualizar, h_{ij} es el elemento i, j de la matriz H , y k_i es el elemento i del vector K . Es importante aclarar que la ecuación w_i^{m+1} , involucra los multiplicadores de Lagrange que se han actualizado y los valores de los elementos no actualizados de la iteración anterior. Actualizados todos los multiplicadores de Lagrange se procede al paso 5.

5. Si el error de los multiplicadores de Lagrange obtenidos en la iteración actual con respecto a los obtenidos en la iteración anterior es inferior a una tolerancia ϵ ,

$$(\lambda_k^* - \lambda_{k-1}^*)(\lambda_k^* - \lambda_{k-1}^*)^T < \epsilon$$

o se cumplen el número máximo de iteraciones establecidas, se calcula la solución del problema de optimización primal,

$$x^* = -H^{-1}F - H^{-1}M^T\lambda^*$$

retorna el vector óptimo x^* y termina. Si el error no esta por debajo de la tolerancia ϵ y el número máximo de iteraciones del mismo no se han alcanzado se regresa al punto 4.

Bibliografía

- [1] R. Rajamani, *Vehicle Dynamics and Control*. Springer, 2006.
- [2] R. N. Jazar, *Vehicle Dynamics - Theory and Application*. Springer, 2008.
- [3] E. Akbari, M. Farsadi, I. Z. Mat Darus, and R. Ghelichi, “Observer design for active suspension system using sliding mode control,” *IEEE*, p. 6, 2010.
- [4] M. Fahezal, Y. Sam, S. Sudin, K. Penk, and M. Khairi, “Modeling and control of a nonlinear active suspension using multi-body dynamics system software,” *Jurnal teknologi*, Jan. 2014.
- [5] R. Mehra, J. Amin, K. Hedrick, and C. Osorio, “Active suspension using preview information and model predictive control,” pp. 860–865, Oct. 1997.
- [6] R. Darus and N. I. Enzai, “Modeling and control active suspension system for a quarter car model,” *International Conference on Science and Social Research (CSSR 2010)*, Dec. 2010.
- [7] C. McGinn and D. Geraghty, “Modelling an active suspension controller for a road vehicle,” in *Signals and Systems Conference (ISSC 2010), IET Irish*, pp. 24–29, 2010.
- [8] M. Kaleemullah, W. Faris, and F. Hasbullah, “Design of robust h inf, fuzzy and LQR controller for active suspension of a quarter car model,” in *2011 4th International Conference On Mechatronics (ICOM)*, pp. 1–6, 2011.
- [9] J. Hurel, A. Mandow, and A. Garcia, “Nonlinear two-dimensional modeling of a McPherson suspension for kinematics and dynamics simulation,” *The 12th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control*, Mar. 2012.
- [10] M. Fallah, R. Bhat, and W. Xie, “New nonlinear model of macpherson suspension system for ride control applications,” in *American Control Conference*, pp. 3921–3926, 2008.
- [11] J. Hurel, A. Mandow, and A. Garcia, “Kinematic and dynamic analysis of the McPherson suspension with a planar quarter-car model,” *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, vol. 51, no. 9, pp. 1422–1437, 2013.

Bibliografía

- [12] M. S. Fallah, R. B. Bhat, and W. F. Xie, “Optimized control of semiactive suspension systems using H_{∞} robust control theory and current signal estimation,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2011.
- [13] V. Sankaranarayanan, M. Engin Emekli, B. A. Guvenc, L. Guuven, E. S. Oztuork, S. S. Ersolmaz, I. E. Eyol, and M. Sinal, “Observer based semi-active suspension control applied to a light commercial vehicle,” *IEEE*, 2007.
- [14] S. H. Keum, S. J. Dong, and C. S. Hyun, “A new modeling of the macpherson suspension system and its optimal pole-placement control,” *Proceedings of the 7th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pp. 559–579, June 1999.
- [15] H. Sohn, K. Hong, and J. Hedrick, “Semi-active control of the macpherson suspension system: hardware in the loop simulations.,” in *Control Applications, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on*, pp. 982–987, 2000.
- [16] B. Amat, S. Yahaya, and H. Norhazimi, “Nonlinear active suspension system with bacstepping control strategy,” *IEEE*, 2007.
- [17] M. S. Grewal and A. P. Andrews, *Kalman Filtering: Theory an Practice Using MATLAB*. Wiley, third edition ed., 2008.
- [18] D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman, H_{∞} and Nonlinear Approaches*. Wiley, 2006.
- [19] H. Zhihong, Z. Yuan, and X. Chang, “State estimation for wind turbine system based on kalman filter,” 2008.
- [20] A. Nair, T. K. Radhakrishnan, K. Srinivasan, and S. Rominus, “Kalman filter based state estimation of a thermal power plant,” 2011.
- [21] K. S. Haider, H. K. Ijaz, and R. Inamur, “Kalman filter based state estimation for linearized twin rotor system,” 2011.
- [22] Quanser, “Active suspension system - user manual.”
- [23] D. Alazard, “Introduction to kalman filtering,” 2005.
- [24] L. Wang, *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. Springer, 2009.
- [25] J. Maciejowski, *Predictive Control with Constraints*. Pearson, 1 ed., 2000.
- [26] R. Haber, R. Bars, and U. Schmitz, *Predictive Control in Process Engineering*. Wiley-VCH, 2011.

Bibliografía

- [27] E. F. Camacho and C. Bordons, *Model Predictive Control*. Springer, 1999.
- [28] B. Huyck, L. Callebaut, F. Logist, H. J. Ferreau, and M. Diehl, “Implementation and experimental validation of classic MPC on programmable logic controllers,” (Barcelona), July 2012.
- [29] C. Ekaputri and A. Syaichu-Rohman, “Implementation model predictive control (MPC) algorithm-3 for inverted pendulum,” 2012.
- [30] Quanser, “Active suspension LQG control using QUARC.”
- [31] C. Gohrle, A. Wagner, A. Schindler, and O. Sawodny, “Active suspension controller using MPC based on a full-car model with preview information,” June 2012.
- [32] C. Gohrle, A. Schindler, A. Wagner, and O. Sawodny, “Design and vehicle implementation of preview active suspension controllers,” *TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, May 2014.