Pontificia Universidad Javeriana

# ¿Analítico o sintético?
## Un debate sobre la naturaleza del juicio aritmético

María Paula Parra Ballesteros

Marzo de 2015

María Paula Parra Ballesteros
Estudiante de la Facultad de Filosofía

# ¿Analítico o sintético?
## Un debate sobre la naturaleza del juicio aritmético

Trabajo para optar al título de:
Filósofa

Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Filosofía
Bogotá, 2 de Marzo de 2015

Bogotá, 27 de febrero de 2015

Profesor Diego Pineda
Director de Departamento (E)
Facultad de Filosofía

Respetado Profesor Pineda:

Reciba un cordial saludo. Por medio de la presente tengo el gusto de presentarle el trabajo de grado *¿Analítico o sintético? Un debate sobre la naturaleza del juicio aritmético* que la estudiante María Paula Parra Ballesteros ha elaborado bajo mi dirección como requisito parcial para optar al título de Filósofa.

María Paula ha realizado un trabajo serio, responsable y respetuoso en torno al difícil tema de la filosofía de la aritmética. En él repasa el debate suscitado por la obra de Gottlob Frege respecto de la concepción sintética del juicio aritmético, y expone la alternativa de que dicha naturaleza sea más bien analítica.

El resultado del trabajo de María Paula es un texto reflexivo y bien documentado, que muestra claramente unas competencias filosóficas bien desarrolladas en torno a una iniciativa bien trabajada. Por estas razones considero que el trabajo satisface cabalmente las condiciones impuestas por la Facultad para estos casos. En este sentido, lo pongo a su consideración para que le sea asignado un evaluador y, si es el caso, se cite a su defensa.

Miguel Ángel Pérez Jiménez
Director del trabajo

Se reciben tres ejemplares
27 de febrero de 2015

# Contenido


**Agradecimientos** **5**

**Abreviaturas** **6**

**Introducción** **8**

**Capítulo primero**
**Sintético *a priori*: la naturaleza del juicio aritmético según Kant** 14
1. La clasificación kantiana de los juicios 14
2. El papel de la intuición en la formación de juicios sintéticos *a priori* 30

**Capítulo segundo**
**Problemas de la concepción sintética *a priori* de los juicios aritméticos** 37
1. Problemas referentes a la clasificación kantiana de los juicios 37
2. Problemas referentes a la definición kantiana de intuición 51

Anexo de imágenes 63

**Capítulo tercero**
**La concepción analítica de la aritmética según Frege** 64
1. Un nuevo análisis de los juicios aritméticos 64
2. Juicios aritméticos que no requieren de la intuición 79

**Apéndice** 90
**Frege y la concepción empirista de la aritmética de Mill** 90

**Consideraciones finales** 99

**Bibliografía**
Obras de Frege 103
Obras de Kant 104
Otras obras clásicas 104
Obras de apoyo 105

# Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi madre y a mi padre, quienes me permitieron estudiar el pregrado en filosofía.

A mis tías abuelas y a mi abuela, quienes, sin tener la menor idea de lo que hacía, estuvieron de manera incondicional.

A Miguel Ángel Pérez, director de este trabajo, quien me enseñó que la disciplina y la rigurosidad se deben valorar más que los pequeños momentos de brillantez; a él, además, le agradezco la paciencia que tuvo para dirigirme y las discusiones enriquecedoras.

Por último, quiero agradecerle a todos aquellos amigos, compañeros y profesores, que en muchos momentos me animaron a continuar con el trabajo y me enseñaron a confiar en mis ideas.

Seguramente si alguna de estas personas hubiese faltado en mi vida no hubiera tenido el ánimo y la templanza que se necesita para terminar un trabajo que, en mi opinión, para llevarse a cabo no sólo requiere de capacidades intelectuales.

# Abreviaturas

## Obras de Frege

| | |
|---|---|
| C | *Conceptografía,* en *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos* (H. Padilla, Trad.) México: UNAM, 1972 . |
| CO | *Sobre concepto y objeto**[1] |
| FA | *Los fundamentos de la aritmética,* en *Los fundamentos de la aritmética: Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*. (U. Moulines, trad.) Barcelona: Laia, 1973 . |
| FC | *Función y Concepto** |
| IL | *Introducción a la lógica** |
| SR | *Sobre sentido y referencia** |
| CSR | *Comentarios sobre sentido y referencia** |
| QL | *¿Qué es la lógica?** |

## Obras de Kant

| | |
|---|---|
| CD | *Crítica del discernimiento*, en *Crítica del Discernimiento.* (R. R. Aramayo, S. Mas, trad.) Madrid: Alianza, 2012. |
| CrP | *Crítica de la razón pura,* en *Crítica de la Razón Pura*. (M. Caimi, trad.) México: FCE, UAM, UNAM, 2009. |
| MN | *Las magnitudes negativas en filosofía,* en *Opúsculos de filosofía natural.* |

[1]Todos los artículos indicados con * se encuentran en una compilación de M. Valdés (2013). En la citación de estos artículos indicamos en primer lugar la página del original y en segundo lugar la página de la edición en español.

(A. Domínguez, trad.) Madrid: Alianza, pp. 115-164,1992.

| | |
|---|---|
| P | *Prolegómenos,* en *Prolegómenos a toda metafísica del porvenir que haya de poder presentarse como ciencia*. (M. Caimi, trad.) Madrid: Istmo, 1999. |
| L | *Lógica,* en Logic. (R. S. Hartman / W. Schwarz, trad.) New York: Dover Publications. Edición Kindle,1988. |

## Obras de Hume

| | |
|---|---|
| EHU | *Investigación sobre el entendimiento humano,* en Investigación sobre el entendimiento humano. (V. Safélix, C. Ors trad.) Madrid: Ágora, 2004**[2]. |
| THN | *Tratado sobre la naturaleza humana,* en *Tratado de la naturaleza humana.* (F. Duque Trad.) Madrid: Tecnos, 1988**. |

## Obras de Leibniz

| | |
|---|---|
| Nuevos Ensayos | *Nuevos ensayo sobre el entendimiento humano,* en *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano.* (J. Echeverria, trad.) Madrid: Editora Nacional, 1983***[3]. |
| Monadología | *Monadología,* en *Monadología.* (M. Fuentes, A. Piñan, F. de Samaranch, trad.) Barcelona: Orbis, 1983***. |

## Obras de Mill

| | |
|---|---|
| System of logic | System of logic en, A System of Logic, Ratiocinative and Inductive, being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation. London: J. W. Parker, West Strand, 1843. |

[2]Para citar Hume utilizamos las siglas en inglés, en el caso de THN damos en números romanos la sección, la parte; en números arábigos damos la paginación de la edición en inglés seguida de la paginación de la edición en español. Para EHU damos en notación romana el número de la sección, la parte, y en arábigos el número del original y el de la versión en español.

[3]Para citar Leibniz damos en números romanos, el libro, el capítulo y en números arábigos la página seguida de la paginación en la que se encuentra en la edición en español. En el caso de la Monadología damos el parágrafo correspondiente. Las abreviaturas las tomamos de: http://www.leibniz.es/siglas.html

# Introducción

Este trabajo trata sobre un debate acerca de la naturaleza del juicio aritmético. La determinación analítica, sintética, *a priori* o *a posteriori* de la naturaleza de un juicio depende de los elementos por los cuales este se justifica. Inmanuel Kant postuló la forma de la intuición pura de tiempo para justificar las verdades, y los juicios aritméticos, como sintéticos *a priori*. Gottlob Frege sostuvo que los axiomas y las leyes de la lógica formal son suficientes para derivar todas las leyes y los teoremas aritméticos. Por lo que considera que la aritmética es una ciencia analítica. Ambos filósofos consideran que su respectiva caracterización otorga a la ciencia conocimientos nuevos, universales y necesarios.

El debate por la naturaleza de los juicios aritméticos resulta de la última caracterización mencionada. ¿Cómo es posible definir que los juicios de la aritmética son conocimientos nuevos, universales y necesarios si uno determina la aritmética como sintética *a priori*, y el otro la determina como analítica? La respuesta que proponemos en este trabajo es que la pregunta no es por los conceptos de *a priori*, *a posteriori*, analítico y sintético. La pregunta debe establecerse respecto de la manera como cada autor define los conceptos que en principio parecen ser lo mismo. Al preguntarnos por la definición de los conceptos implicados en la definición nos dimos cuenta de dos cosas. Primero, la diferencia entre las definiciones es tan grande que no nos atrevemos a decir que cuando Frege y Kant hablan acerca de la naturaleza de la aritmética se refieran a lo mismo. Segundo, toda caracterización conceptual de la naturaleza de la aritmética necesita de un elemento que justifique la verdad de los juicios. Para Kant es la intuición pura de tiempo, para Frege es la prueba lógica. Nosotros consideramos que el método fregeano para definir la naturaleza de la aritmética es más adecuado que el método kantiano.

El propósito del trabajo es múltiple, por lo que requiere presentar. Primero, la caracterización kantiana de la naturaleza sintética *a priori* de los juicios aritméticos; segundo, los problemas de pensar la naturaleza de los juicios aritméticos como sintéticos *a priori*, es decir, las objeciones que se le pueden presentar a la caracterización kantiana de la naturaleza de los juicios; tercero, la posibilidad de postular la naturaleza de los juicios aritméticos como analítica, desde Frege.

Para desarrollar nuestros objetivos hemos dividido el texto en tres capítulos y un apéndice. A cada capítulo le corresponden dos secciones. En el primero, titulado "Sintético *a priori*: la naturaleza del juicio aritmético según Kant", exponemos los elementos que debe establecer Kant para clasificar los juicios aritméticos como sintéticos *a priori*. En la primera sección nos ocupamos de los conceptos necesarios para comprender lo que significa que un juicio sea sintético y *a priori*; en la segunda sección, nos ocupamos del elemento que permite justificar el conocimiento sintético *a priori* del juicio aritmético. Con nuestra exposición mostramos claramente el significado de dos nociones fundamentales para la aritmética, a saber: la de número y el método aritmético.

En el segundo capítulo, "problemas de la concepción sintética *a priori* de los juicios aritméticos", presentamos las objeciones que se le pueden hacer a una concepción kantiana de los juicios sintéticos *a priori*. En la primera sección de este capítulo, desarrollamos, a partir de las relaciones que se presentan entre los términos gramaticales sujeto-predicado, los problemas que surgen al dividir los juicios en tres tipos; en la segunda sección, desarrollamos las consecuencias de que la justificación de los juicios sintéticos *a priori* ocurra en la intuición pura.

En el tercer capítulo, "La concepción analítica de la aritmética según Frege", exponemos, parcialmente, otra forma de justificar los juicios aritméticos. Esta vez desde axiomas y leyes lógicos que son por naturaleza analíticos. En la primera sección de este capítulo exploramos la sustitución de los conceptos gramaticales sujeto y predicado por los conceptos lógicos de argumento y función; en la segunda sección, la manera como Frege usa axiomas y leyes de la lógica formal para dar la definición del concepto de número, el número particular y la serie numérica. ¿Cómo se puede abordar el estudio de la aritmética desde la filosofía? En los *Fundamentos de la Aritmética*, la obra maestra de Frege, según Michael Dummet, se muestran las motivaciones matemáticas y filosóficas que tuvo Frege (cf. Dummett 1991: 1).

Respecto de las motivaciones matemáticas no podemos decir algo más allá a que la investigación por la fundamentación del conocimiento aritmético es producto de la precaria situación en la que se encontraba la ciencia en esos momentos (Sluga 2013: 26%). Debido a la indeterminación de los fundamentos de la aritmética, Frege toma conceptos epistemológicos de la filosofía y emprende la tarea de definir la ciencia que le interesa (Sluga 2013: 26%). En el caso de Inmanuel Kant, no podemos afirmar que tuviese motivaciones intrínsecas a la aritmética para proponer que sus verdades son sintéticas *a priori*, la caracterización kantiana de la aritmética es necesaria para un proyecto más grande que se presenta en la *Crítica de la razón pura*. Kant tenía como referente tanto los *Elementos* de Euclides como la mecánica newtoniana. De la consideración de estos dos cuerpos de conocimiento como sistemas que garantizan la verdad del conocimiento expresado por el juicio de las ciencias, Kant postula que el conocimiento matemático en general –geometría, aritmética y mecánica pura– sirve como paradigma de la razón.

Por último, en el apéndice, "Frege y la concepción empirista de la aritmética de Mill", mostramos los errores de una caracterización de la naturaleza del juicio aritmético y la aritmética desde la intuición empírica. Presentamos este apéndice con la intención de mostrar tres formas de abordar la pregunta por la naturaleza del juicio aritmético.

Si nos interesan las razones por las que un conocimiento se toma por verdadero necesario y universal, la pregunta por el fundamento del juicio y lo que él expresa resulta indispensable. Ahora bien, nuestro trabajo es sobre la naturaleza de los juicios aritméticos. Si los fundamentos de la aritmética fueran evidentes por sí mismos e incuestionables, nuestra exposición no tendría sentido y, la determinación que se realiza por medio de los conceptos de analítico, sintético, *a priori* y *a posteriori* para un juicio, así como aquello que justifica la aceptabilidad de un conocimiento, no sería algo más que una pelea terminológica.

En la primera mitad del S. XIX el surgimiento y creación de tres geometrías no-euclidianas provocó una profunda crisis filosófica no sólo en matemáticas, sino en general en toda la teoría del conocimiento humano (cf. Suárez 1984: 66-7). La pregunta por la naturaleza de la aritmética surge de esta crisis. Si no sabemos cuál es el carácter del conocimiento expresado por los juicios de la ciencia, no podemos confiar en que ellos están bien fundamentados. Bajo este contexto se sitúa la justificación de nuestro trabajo. En él trabajamos una concepción anterior a la llamada crisis de los fundamentos –Kant–, y la postulación de un intento de fundamentación a la crisis –Frege–.

Del efecto que resulta al escuchar a una persona con suma claridad conceptual como lo era Luis Eduardo Suárez, resulta la intriga por un tema que en nuestra facultad no es extensamente trabajado y que, a primera vista, puede parecer simple, mecánico y árido. El interés por los problemas que le corresponden a la filosofía de la matemática nace de la curiosidad y el asombro por un tema sumamente difícil y poco trabajado.

Por supuesto, en este trabajo no pretendemos responder positivamente a las cuestiones antes mencionadas, para ello nos faltan fuerzas; lo que queremos exponer es nuestra comprensión de un problema tan complicado como lo es la investigación por la naturaleza de los juicios aritméticos desde dos grandes filósofos, Inmanuel Kant y Gottlob Frege.

Los límites de esta investigación se circunscriben a ser una exposición de los supuestos que implica definir la naturaleza de la aritmética ya sea como sintética *a priori* o, como analítica. Las objeciones que se presentan a la concepción kantiana de la naturaleza de la aritmética no son propias, son tomadas tanto de Frege como de distintos historiadores de la filosofía de la lógica y la matemática. Además, la comprensión lograda de varias de estas objeciones son producto de la conversación con Miguel Ángel Pérez, el director del trabajo. Sin embargo, cualquier error que se encuentre en estas páginas por pequeño o grande que sea es propio.

Aunque en nuestro trabajo nos inclinamos por las ideas de Frege, somos conscientes de los errores que estas presentan; sin embargo, por la extensión de la tarea no las hacemos explícitas. Respecto a esto sólo diremos que antes de 1903, Lord Bertrand Russell presentó una paradoja que se deducía del axioma V de *Grundgesetze der Arithmetik*. Trabajo en el cual Frege esperaba finalizar su empresa: la deducción de la aritmética a la lógica desde definiciones lógicas. Con la paradoja descubierta por Russell el proyecto fregeano se viene abajo, mas no consideramos que esto sea una razón suficiente para no estudiar y poner en relación al lógico más grande desde Aristóteles, Gottlob Frege, con uno de los grandes filósofos modernos, Inmanuel Kant.

Como ya lo dijimos, Kant no se interesó propiamente por la naturaleza de la aritmética, trabajó el tema por la necesidad de su proyecto general. Por esta razón, encontrar bibliografía sobre la caracterización de los juicios sintético *a priori* aritméticos y la noción kantiana de número resultó difícil. Principalmente hemos usado secciones específicas de la *Crítica de la razón pura* (CrP), traducción de M. Caimi (2009), en la citación incluimos la paginación A y B del original; §§ 3-13 de los *Prolegómenos* (P), traducción de M. Caimi (1999), en la citación incluimos el parágrafo y la paginación de la edición española; § 86 de la *Crítica del discernimiento* (CD), traducción de R. Aramayo y S. Mas (2012), en la citación incluimos la paginación del original y la paginación de la edición española; § 1 de la *Lógica* (L), traducción al inglés de R. Hartman y W. Schwarz (1988), en la citación incluimos la paginación de la academia de las ciencias de Berlín, y el parágrafo y el porcentaje del libro en la versión de Kindle que usamos; el ensayo pre-crítico sobre las *Magnitudes negativas* (MN), traducción de A. Domínguez (1992), en la citación incluimos la paginación original y la paginación de la edición española.

De Gottlob Frege hemos usado la *Conceptografía* (C) traducción de H. Padilla (1972), en la citación incluimos el parágrafo y la página de la edición española; *Los fundamentos de la aritmética* (FA) traducción de U. Moulines (1973), en la citación incluimos el parágrafo y la paginación de la edición española. *Función y concepto* (FC) traducción de M. Valdés (2013), en la citación incluimos la paginación del original y la paginación de la edición española; *Sobre sentido y referencia* (SR), traducción de M. Valdés (2013), en la citación incluimos la paginación del original y la paginación de la edición española; *Sobre concepto y objeto* (CO), la traducción de M. Valdés (2013), en la citación incluimos la paginación del original y la paginación de la edición española; *¿Qué es una función?* (QF), traducción de M. Valdés (2013), incluimos la paginación del original y la paginación de la edición española. *Introducción a la lógica* (IL), traducción de M. Valdés (2013), en la citación incluimos la paginación del original y la paginación española.

# Capítulo primero
# Sintético *a priori*: la naturaleza del juicio aritmético según Kant

*He aquí, pues, un conocimiento grande y comprobado, que ya ahora alcanza una extensión admirable y promete, para el porvenir, una ampliación ilimitada; un conocimiento que lleva en sí certeza perfectamente apodíctica, esto es, necesidad absoluta, y que por tanto no se apoya en ningún fundamento empírico; que es, por consiguiente un producto puro de la razón, pero además completamente sintético.*

P §6, 79.

Inmanuel Kant propone que la naturaleza del juicio aritmético es sintética *a priori*. El objetivo de este capítulo es exponer la explicación kantiana del juicio aritmético. Para lograrlo hemos dividido nuestro capítulo en dos secciones. En la primera, la clasificación kantiana de los juicios, exponemos los conceptos necesarios para comprender lo que significa que un juicio sea sintético *a priori*. En la segunda sección, problemas referentes a la definición kantiana de la intuición, exponemos dos cosas: que la intuición pura es el elemento legitimador del conocimiento sintético *a priori*, y que la intuición pura es necesaria para los juicios aritméticos.

## 1. La clasificación kantiana de los juicios

Hasta la segunda mitad del S. XIX se pensó que la distinción gramatical sujeto–predicado era válida para determinar los componentes y las relaciones entre los componentes de todos los juicios. Kant usó la distinción gramatical sujeto–predicado para clasificar los juicios en tres tipos: juicios sintéticos *a priori*, juicios analíticos y juicios sintéticos *a posteriori* (cf. Körner 1977: 26). Una de estas clasificaciones, los juicios sintéticos *a priori*, es, para Kant, la naturaleza del conocimiento aritmético.

Los conceptos que utiliza Kant para clasificar los juicios en tres tipos no son conceptos inventados por el filósofo prusiano. Para empezar vamos a realizar una comparación entre lo que entendían Leibniz y Hume por naturaleza del juicio aritmético con lo que entendía Kant por lo mismo.

Tanto para Leibniz como par Hume todo el conocimiento humano puede dividirse en dos tipos fundamentales. El primero corresponde al conocimiento necesario y *a priori*; el segundo corresponde al conocimiento contingente y *a posteriori* (cf. Gardner 2010:52). Las dos clases de conocimiento dividen los juicios en dos tipos. Así, tenemos juicios analíticos que expresan un conocimiento necesario y *a priori*, y tenemos juicios sintéticos que expresan un conocimiento contingente y *a posteriori* (cf. Körner 1977: 26).

Lo primero que debemos saber es que para Leibniz todo juicio o posee la forma sujeto-predicado, o puede ser analizado en un juicio o cadena de juicios de dicha forma. La verdad se considera como la correspondencia del juicio a la realidad, posible o actual (cf. Copleston 1971: 257; Nuevos Ensayos IV, V, 8, 477). Aunque todos los juicios puedan ser analizados por la forma sujeto-predicado, no todos los juicios expresan conocimiento del mismo género. Para Leibniz hay dos clases de verdades, que expresan dos clases de conocimientos:

> Las verdades de Razonamiento son necesarias, y su opuesto es imposible, y las de Hecho son contingentes y su opuesto es posible. Cuando una verdad es necesaria, se puede hallar su razón por medio de análisis, resolviéndola en ideas y verdades más simples, hasta que se llega a las primitivas. (Monadología §33)

Leibniz llamó a los conocimientos necesarios y *a priori* ‘verdades de razón’, a diferencia de los conocimientos contingentes y *a posteriori*, los cuales llamó ‘verdades de hecho’. La necesariedad de las ‘verdades de razón’ se justifica porque éstas son analizables por medio de los principios lógicos de identidad y no–contradicción. Estos dos principios los expresa Leibniz de la siguiente manera:

> Es verdad, y ya he indicado que igual de evidente es decir *estrictamente* en particular A es A que decir en general *se es lo que es*. Pero como también he hecho notar, no siempre resulta evidente negar los sujetos de ideas diferentes unas de otras; como si alguien quisiera decir que *el trilátero* (o lo que tiene tres lados) *no es un triángulo*. (Nuevos Ensayos, IV, VII, 4, 490)

La identidad es la conexión evidente entre el predicado y el sujeto de una oración. Que un juicio no admita contradicción entre su predicado y su sujeto es un principio de identidad. Los principios de identidad y no-contradicción se encuentran íntimamente ligados. Por ello es que no se puede negar una 'verdad de razón' sin caer en una contradicción[4] (cf. Copleston 1971: 258).

Así, al afirmar que 'el trilátero no es un triángulo' notamos que es una contradicción porque decimos que aquello que tiene tres lados no es un triangulo, siendo necesario que todos los triángulos tengan tres lados. Por principio de no-contradicción podemos establecer que todo lo que tiene tres lados es un triángulo, por tanto hay una identidad entre el trilátero y el triángulo. El juicio que expresa una verdad de razón es 'el triángulo es un trilátero', porque su contradicción no es concebible. Las verdades de razón no nos enseñan nada (cf. Nuevos Ensayos IV. III, 1, 434) y se pueden reducir a lo que hoy entendemos por tautologías (cf. Copleston 1971: 259).

La contingencia de las verdades de hecho se justifica en que son dadas por la experiencia. Por eso, una verdad de hecho nunca puede ser universalmente necesaria. Para Leibniz la matemática posee 'verdades de razón' derivables de principios puramente lógicos. Como ya lo habíamos dicho, las 'verdades de razón' se refieren a la esfera de la posibilidad. Entonces, ellas enuncian lo que sería verdadero en todo caso; mientras que las 'verdades de hecho' enuncian lo que existe de un modo particular (cf. Copleston 1971: 260).

---

[4] Todo lo que no sea contradictorio es posible, pero la posibilidad no implica existencia. Así un juicio puede ser posible, no-contradictorio, sin afirmar la existencia del sujeto. "Leibniz entendía lo posible como lo no-contradictorio. La proposición de que la redondez es compatible con la cuadralidad es una proposición contradictoria, y eso es lo que quiere decir que la idea de un cuadrado redondo es contradictoria e imposible." (Copleston 1971: 260)

Hume dice que todo nuestro conocimiento versa sobre relaciones entre cosas. Las relaciones son de dos clases: ‘relaciones de ideas’ y ‘cuestiones de hecho’. Hume llamó necesario y *a priori* al conocimiento expresado en las ‘relaciones de ideas’ (cf. Copleston 1973: 260); a diferencia del conocimiento contingente y *a posteriori*, el cual llamó ‘cuestiones de hecho’.

Las ‘relaciones de ideas’ implican que el conocimiento adquirido se da por la sola operación del pensamiento. Si el conocimiento es sólo una relación conceptual de la mente, no hay razón para que lo que se piensa deba existir en el mundo. “Aunque jamás hubiera habido en la naturaleza un círculo o un triángulo, las verdades demostradas por Euclides hubieran retenido por siempre su certeza y evidencia” (EHU IV, I; 1, 85).

La diferencia entre el conocimiento por ‘cuestiones de hecho’ y el conocimiento adquirido por medio de ‘relaciones de ideas’ es que en el segundo no se puede negar un juicio sin incurrir en contradicción, mientras que en el conocimiento por medio de ‘cuestiones de hecho’ es posible negar el juicio sin incurrir necesariamente en ella.

No podemos afirmar los dos juicios ‘$7 + 5 = 12$’ y ‘$7 + 5 \neq 12$’ sin afectar la verdad que se expresa, ya que los dos no pueden ser ni falsos ni verdaderos. Así, los juicios matemáticos son invariables “no pueden sufrir alteración sin que cambien los objetos relacionados o las ideas de los mismos” (Copleston 1973: 261).

Sí podemos afirmar los dos juicios ‘la mañana es fría’ y ‘la mañana no es fría’. En las ‘cuestiones de hecho’ podemos pensar tanto que *x* es *y*, como que *x* no es *y* sin problema. Por ello una cuestión de hecho se considera como una relación variable. “[L]as relaciones variables pueden cambiar sin que ello implique necesariamente un cambio en los objetos que se relacionan o en las ideas de los mismos.” (Copleston 1973: 261)

Al igual que Leibniz, Hume clasifica el conocimiento de la geometría, el álgebra y la aritmética como necesario y *a priori*[5]. A diferencia de Leibniz, Hume clasifica el conocimiento de la metafísica como contingente y *a posteriori*. Esta diferencia se debe a la crítica que Hume realiza del principio de causalidad.

De lo anterior podemos decir que Leibniz y Hume coinciden al caracterizar las verdades de la matemática como necesarias y *a priori*. Para ambos la justificación de las verdades aritméticas descansa en principios lógicos, por ello todos sus juicios se consideran analíticos. Sólo un juicio analítico tiene en cuenta las relaciones que se producen por medio de conceptos en la mente sin necesidad de acudir a la experiencia. La concordancia entre origen y legitimidad del conocimiento en Leibniz y Hume es absoluta (cf. Serrano 2007: 61). Así, si el origen del conocimiento que expresa el juicio es puro, la legitimidad del juicio es analítica. Porque todo conocimiento puro se justifica por relaciones lógicas entre los conceptos implicados en el juicio. Si el origen del conocimiento que expresa el juicio es empírico, la legitimidad del juicio es sintética. Todo conocimiento empírico se justifica en última instancia por la experiencia. Al ser absoluta la concordancia entre el origen y la legitimidad, todo juicio analítico es *a priori* y todo juicio sintético es *a posteriori*. Las verdades necesarias y absolutas del conocimiento sólo se pueden expresar en juicios analíticos. Las verdades particulares y contingentes sólo se pueden expresar en juicios sintéticos. ¿De qué nos sirve lo que hemos dicho hasta el momento para dar cuenta de la naturaleza sintético *a priori* de los juicios aritméticos?

Inmanuel Kant fue el primero en proponer que la naturaleza de la aritmética es sintética *a priori*. Al proponer una naturaleza sintética y *a priori* Kant tuvo, por necesidad, que desligar la concordancia absoluta entre origen y legitimada del conocimiento. Antes de

---

[5] Ya he indicado que la geometría, *arte* por el que determinamos las proporciones de las figuras, a pesar de superar con mucho en universalidad y exactitud a los vagos juicios de los sentidos y la imaginación, no alcanza jamás una precisión y exactitud perfectas. Sus primeros principios siguen estando extraídos de la apariencia general de los objetos; y esa apariencia no puede ofrecernos nunca seguridad alguna. (THN I, III, 71, 129) Aunque Hume incluye, en *Investigaciones sobre el entendimiento humano* los conocimientos de la geometría junto con la aritmética y el álgebra en el conocimiento producto de 'relaciones de ideas', en el *Tratado de la naturaleza humana* establece una diferencia entre geometría, aritmética y álgebra. Lo primero es que trata a la geometría como un arte y no como una ciencia. Lo segundo es que la exactitud y la universalidad de los juicios geométricos es menor a la de los juicios aritméticos y algebraicos; en razón de que los principios geométricos son adquiridos de la forma general de los objetos.

Kant una ciencia sintética *a priori* no era posible, porque por definición todo lo analítico es *a priori* y todo lo sintético es *a posteriori*. Como la ciencia debe poseer leyes y juicios absolutamente necesarios y universales sus juicios no se podían legitimar en la experiencia.

Para entender la separación entre origen y legitimidad, y la posibilidad de los juicios sintéticos *a priori*, debemos exponer las definiciones kantianas de *a priori*, *a posteriori*, analítico y sintético.

En la introducción a la segunda edición de la *Crítica a la razón pura*, Kant define *a priori* como aquello que es independiente de toda experiencia en absoluto. "[E]n lo que sigue no entenderemos por conocimientos *a priori* aquellos que tienen lugar independientemente de esta o aquella experiencia, // sino los que tienen lugar independientemente de toda experiencia en *absoluto*." (CrP B3) Por definición un conocimiento *a priori* es independiente de la experiencia, todo lo independiente de la experiencia es universal necesario. Entonces todo lo que es *a priori* es universal y necesario.

Los criterios que nos son dados para reconocer un conocimiento *a priori* son dos: 1. Un conocimiento es *a priori* si el juicio que se piensa se hace en razón de su necesidad. La necesidad es un criterio de todo conocimiento *a priori* porque la experiencia nos dice qué son las cosas pero no cómo deben ser. 2. Un conocimiento es *a priori* si el juicio se piensa con universalidad estricta y no comparativa (cf. CrP B3-4). La universalidad estricta exige que no haya excepción alguna para que aquello que se predique de un objeto no sea su predicado (cf. Gardner 2010: 53). Esto quiere decir que un juicio como 'todos los gatos son negros' no es universal porque de por lo menos un gato se puede predicar que no es negro, sino que es blanco. Cosa que no ocurre con el siguiente juicio, 'todos los hombres son mortales' porque la mortalidad es una cualidad necesaria de ser hombre, entonces de todo lo que sea hombre se predicará 'es mortal'.

Que la definición de *a priori* implique la independencia del conocimiento de la experiencia, no implica que el juicio que exprese un conocimiento *a priori* no se pueda aplicar a ella (cf. Deleuze 2008: 25). Podemos identificar dos tipos de elementos *a priori*. Por un lado están las categorías y por el otro la forma de la intuición sensible. Mientras que las categorías se refieren a las formas predicativas para los objetos, por ejemplo, 'toda mudanza tiene una causa' (cf. CrP B102-9/A77-83); la forma de la intuición sensible presenta las condiciones de posibilidad bajo las cuales se dan –a los seres humanos– los objetos. Estas condiciones de posibilidad se dan bajo dos formas puras de la intuición sensible, el espacio y el tiempo (cf. CrP A22/B36).

En el conocimiento humano, ¿qué juicios son necesarios y universalmente estrictos? Kant nos proporciona por lo menos tres ejemplos de juicios necesarios y universalmente estrictos, acá traemos a colación el ejemplo para los juicios aritméticos, y el ejemplo para los juicios geométricos: 1. "[S]i se desea un ejemplo tomado de las ciencias, basta considerar todas las proposiciones de la matemática." (CrP B4) Tomemos algún juicio matemático. '7 + 5 = 12', si es *a priori* no puede tomar nada de la experiencia, debe ser universal y necesario. Ninguna experiencia nos puede proporciona los conceptos de 7, 5, o 12, los signos '+' e '=', o las leyes de la aritmética. Si el conocimiento en la aritmética no fuese universal y necesario, cada teoría que se construyese tendría que definir sus conceptos básicos pero, en la aritmética se acepta que '7 + 5 = 12' sin tener que recurrir a la definición de la suma o los numerales cada vez que se usan. 2. 'Todo cuerpo es una substancia y ocupa un espacio'. Si al concepto de cuerpo le quitamos todas las determinaciones empíricas, extensión, peso, color, maleabilidad, altura, densidad, entre muchas otras, en él quedarán dos nociones necesarias. La noción de espacio, y la noción de ser una substancia. Como los conceptos son generalizaciones (cf. Friedman 1992: 96-7), si es verdad que todo lo que cae en el concepto de cuerpo tiene como cualidad ocupar un espacio y ser una substancia. Podemos afirmar Universalmente que el espacio y la substancia son predicados necesarios del concepto de cuerpo y de todo lo que cae bajo el concepto de cuerpo (cf. CrPB5-6).

Un juicio *a posteriori* es un juicio particular que se hace acerca de la experiencia. Entonces un juicio *a posteriori* no establece verdades necesarias y universales. Las verdades expresadas en dicho tipo de los juicios son particulares al momento de generalizar, la generalización se hará por medio de la inducción comparativa de casos; ejemplo de juicio *a* *posteriori*: ‘las mesas tienen cuatro patas’. Es verdad que las mesas tienen cuatro patas, incluso si se presenta el caso en que se halle una mesa de tres o dos patas. Porque con el juicio ‘las mesas tienen cuatro patas’ no se establece que en todos los casos posibles ha de ser así. Con ello sólo se dice que hay casos –la mayoría– en que las mesas tienen cuatro patas.

Leibniz y Hume consideraron que la diferencia de origen para el conocimiento que se expresa en los juicios era suficiente para legitimarlos. Kant estableció que el origen no era suficiente para la legitimidad del conocimiento expresado en el juicio (cf. Serrano 2007: 62). ¿Por qué es importante la diferencia entre origen y legitimidad del conocimiento expresado por los juicios? Porque si hay una diferencia entre el origen y la legitimidad del conocimiento expresado por el juicio, la correspondencia entre *a priori* –analítico, *a posteriori*– sintético no es absoluta. Kant posibilita la comprensión de un nuevo tipo de juicio, el cual pertenece por excelencia a la ciencia, este juicio es el juicio sintético *a priori*.

Como el origen no legitima, podemos preguntarnos ¿qué legitima el conocimiento expresado en el juicio? La caracterización de un juicio no sólo se puede hacer conforme a su origen. Un juicio se puede distinguir –caracterizar– por la manera en que sus términos se relacionan. Los juicios se pueden caracterizar de dos formas según la relación que se encuentre entre sus términos, un juicio puede ser analítico o sintético.

No es justo decir que Kant no niega la existe de juicios diferentes a los que tienen forma gramatical de sujeto-predicado, pero supone que dicha forma es un análisis válido para todos los juicios posibles. Entonces Kant aplica sus definiciones de analítico y sintético, que son pensadas según las relaciones entre los conceptos del predicado y del sujeto, a juicios hipotéticos, juicios disyuntivos y juicios aritméticos (cf. Kneale 1977: 329-30). La relación entre los términos es mediada por la cópula ‘es’, por ejemplo: ‘el gato es pardo’, ‘la rosa es roja’. En ejemplos de este tipo, el término que se encuentra a la izquierda de la cópula ‘es’ se toma como el concepto-sujeto y el término que se encuentra a la derecha de la cópula ‘es’ se toma como el concepto-predicado del juicio. Según esto en un juicio aritmético tal como lo es ‘7 + 5 = 12’ debemos distinguir un concepto-sujeto y un concepto-predicado, así como lo que significa la cópula 'es' para el caso. La cópula en un juicio aritmético, según Kant, viene a ser el signo '=', que determina la relación entre el concepto-predicado '12' y el concepto-sujeto '7 + 5'.

Kant ofrece dos definiciones lógicas de juicio analítico y juicio sintético[6]. La primera definición se hace en términos de si el concepto-predicado se encuentra o no contenido en el concepto-sujeto por una relación de identidad. La segunda definición, según el principio de no-contradicción, establece la razón por la cual un juicio analítico[7] se legitima[8].

> En todos los juicios en los que se piense la relación de un sujeto con el predicado (…) esta relación es posible de dos maneras. O bien el predicado *B* pertenece al sujeto *A* como algo que está contenido (ocultamente) en ese concepto *A*; o bien *B* reside enteramente fuera del concepto *A*, aunque está en conexión con él. En el primer caso, llamo analítico al juicio; en el otro, | sintético. Los juicios analíticos (afirmativos) son, por tanto, aquellos en los cuales la conexión del predicado con el sujeto es pensada por identidad; pero aquellos en los que esta conexión es pensada sin identidad, deben llamarse juicios sintéticos. (CrP A7/B10)

[6] Este punto es bastante discutido entre los comentaristas de Kant. Si las definiciones de los juicios respecto de su contenido se consideran como definición lógica, implica, como lo veremos más adelante, un problema para el sistema kantiano. Porque lo que entendía Kant por lógica, era una parte reducida de la silogística aristotélica, entonces su análisis permite la introducción de nociones ajenas a la lógica para explicar ciertas relaciones, un caso evidente de esta falla se ve en el tratamiento de los juicios aritméticos. Sebastian Gardner interpreta la distinción entre juicios analíticos y juicios sintéticos como distinción epistemológica, para evitar los problemas de la generalización del análisis de los juicios sujeto-predicativos a todos los juicios posibles. El propio Gardner explicita que la lectura epistemológica conlleva atribuir un psicologismo al sistema kantiano, cosa que el propio Kant trata de evitar (cf. Gardner 2010: 62-3). La lectura de la definición como lógica o epistemológica depende en gran medida de la interpretación que se haga del término 'contenido' en la primera definición de juicios analíticos y juicios sintéticos en la Critica de la Razón Pura (cf. CrP A7/B10). En nuestro trabajo adoptamos la postura de Kenny, Nidditch, Kneale y Burge: Las distinciones kantianas de juicio analítico y juicio sintético son lógicas, no epistemológicas.

[7] Esto implica que la legitimidad de un juicio analítico es diferente a la legitimidad de un juicio sintético. Mientras que la legitimidad de un juicio analítico se justifica por las cualidades que se otorgan al concepto de analítico, la legitimidad de un juicio sintético no se puede justificar por las cualidades del concepto de sintético. Los juicios sintéticos encontraran su legitimidad en la intuición, serán *a priori* si son productos de la forma pura de la intuición sensible, serán *a posteriori* si son producto de la intuición sensible. Este tema lo tratamos con profundidad en nuestro siguiente apartado.

[8] Nos inclinamos a pensar que las definiciones para establecer una diferencia entre los juicios sintéticos y los juicios analíticos son lógicas, porque ellas se realizan conforme a si de la negación entre los términos del juicio resulta una contradicción o una contrariedad. La contradicción es una oposición lógica; "[c]onsiste en que de la misma cosa se afirma y se niega algo a la vez." (MN 171, 122) La contrariedad es una oposición real; "es aquella en que dos predicados de una cosa se oponen, mas no en virtud del principio de contradicción. También aquí el uno suprime lo que ha sido puesto por el otro; sin embargo, la consecuencia es algo (*cogitable*)." (MN 171, 122) Kant cree que en todos los juicios aritméticos se establecen oposiciones reales y no oposiciones lógicas. Como decimos que los juicios analíticos se justifican en los principios de identidad y no-contradicción, la aritmética no puede ser, para Kant, analítica. Porque la negación (−) significa contrariedad y no, contradicción. Kant establece lo anterior al considerar que las relaciones aritméticas son relaciones entre magnitudes (cf. MN 169-71, 119-21/ CD B86, §26, 328).

$A = B$[9] es el esquema de un juicio analítico sí y sólo sí el predicado *B* ya se encuentra pensado en el sujeto *A*. Entonces se puede establecer una identidad entre los conceptos *B* y *A*. La identidad en ningún caso es informativa, sólo expresa la forma vacía –sin contenido– del pensamiento. Por ello los juicios de identidad siempre son *a priori*, necesarios y universales (cf. Deleuze 2008: 30-1). También son juicios analíticos: 'los solteros son no casados', 'todas las madres son mujeres'. Estos ejemplos se consideran juicios analíticos porque en el primer caso, 'los solteros son no casados' el concepto-solteros implica la condición de no ser casado –implica el concepto-predicado–. En el segundo caso, 'todas las madres son mujeres' ser mujer es una condición para ser madre. Por tanto no se puede ser madre sin ser mujer y se puede afirmar que todas las madres son por necesidad mujeres, mas no que todas las mujeres son madres, porque el concepto-mujer es mayor al concepto-madre. Por estas razones podemos entender lo que nos decía Kant acerca de la relación entre conceptos de un juicio. Para que un juicio sea analítico el concepto *B* debe pertenecer al sujeto *A* como algo que está contenido, aunque en principio la relación entre los conceptos no sea clara.

Ahora revisemos un ejemplo de juicio aritmético. Recordemos que tanto para Leibniz como para Hume los juicios aritméticos son juicios analíticos y *a priori* porque son universales y necesarios. Entonces los juicios como '7 + 5 = 12' o 'los tres ángulos de cualquier triángulo son iguales a dos ángulos rectos" son juicios analíticos. Kant no admite que estos dos juicios se puedan clasificar como analíticos, si un juicio es analítico, el juicio no informa nada nuevo. Pero no hay nada en el concepto-sujeto '7 + 5' que nos haga pensar que el concepto-predicado '=12' se predica necesariamente del concepto-sujeto, además parece que con la suma de 7 y 5 sí se logra adquirir un conocimiento nuevo.

> Pero si se lo considera más de cerca, se encuentra que el concepto de la suma de 7 y 5 no contiene nada más que la unificación de ambos números en uno único; con lo cual no se piensa, de ninguna manera, cuál sea ese número único que los abarca a ambos. El concepto de doce no está en modo alguno ya pensado, sólo porque yo piense aquella unificación de siete y cinco; por mucho que yo analice mi concepto de una suma posible tal, no encontraré en él el doce. (CrP B15)

[9] Es más fácil reconocer un juicio analítico si este se presente de la forma $A = A$, 'lo rojo es rojo'. Pero como vimos es posible que algunos juicios sean analíticos así en un principio no lo parezcan. Por esto también es posible representarlos según la forma $A = B$, 'todos los solteros son no casados' siempre y cuando por el análisis del juicio se reconozca que el concepto-predicado *B* ya estaba pensado en el concepto-sujeto *A*.

Entonces, según Kant, los juicios aritméticos no son analíticos sino sintéticos porque el concepto-predicado no se encuentra contenido en el concepto-sujeto y el juicio es informativo. El juicio 'los tres ángulos interiores de cualquier triángulo son iguales a dos ángulos rectos' no es analítico porque el concepto-sujeto 'ángulos interiores de cualquier triángulo' no contiene el concepto-predicado 'son iguales a dos ángulos rectos'. La conexión entre la identidad de los ángulos no es posible por el puro análisis del concepto-sujeto. Cualquiera puede reconocer que el juicio 'los tres ángulos interiores de cualquier triángulo son iguales a dos ángulos rectos' se conoce como parte del segundo teorema del ángulo externo, establecido por Euclides en sus *Elementos*. Este teorema representa la necesidad y universalidad de los juicios geométricos (cf. Campos 1994: 226). Entonces, Kant considera que los juicios geométricos, al igual que los juicios aritméticos, no son analíticos. Si un juicio no es analítico, sólo puede ser sintético. Por tanto los juicios geométricos al igual que los aritméticos son juicios sintéticos.

Según esta primera definición un juicio es sintético sí y sólo sí el predicado no se encuentra ya pensado en el sujeto. *B* se encuentra por fuera de *A*. Esto quiere decir que la relación que une *A* con *B* no puede ser una relación lógica, porque ninguno de los dos se sigue del otro.

Así pues, mientras que los juicios analíticos se presentan como $A = A$ y $A = B$. Los juicios sintéticos sólo se pueden presentar como $A = B$, cuyos conceptos son heterogéneos lo que impide que la relación mediada establecida por el '=' sea una relación de identidad (Deleuze 2008: 31). Es decir que los juicios sintéticos no establecen identidades entre los conceptos implicados. Al no establecerse identidades entre los conceptos de los juicios sintéticos, resulta inadmisible que su legitimidad se establezca por el principio de no-contradicción. Entonces la negación de un juicio sintético es una contrariedad más no una contradicción, porque es lógicamente posible. Podemos afirmar 'el gato es pardo' y 'el gato no es pardo', dependiendo de a qué gato particular hacemos referencia. Es más, podemos afirmar del mismo gato particular tanto 'es pardo' como 'no es pardo' conforme a las circunstancias en que lo afirmemos. Que el gato sea o no sea pardo es una corrección de nuestra percepción, y no una necesidad del sujeto-gato.

Los juicios sintéticos parecen en primera instancia ser todos *a posteriori* o empíricos, porque en ellos se expresa un contenido dado en la experiencia. Siendo contingente la relación entre los términos del juicio, no necesaria. Lo llamativo de este tipo de juicios es que ellos sí contribuyen con la creación y obtención de conocimientos nuevos, ya que lo que se predica del concepto *A* no estaba pensado en él con anterioridad. La relación entre los términos de un juicio sintético es una relación asociativa, no aclarativa, como lo es en los juicios analíticos (cf. Detlefsen 2004: 51).

Hasta este momento notamos que no todos los juicios son o analíticos *a priori* o sintéticos *a posteriori*. Porque podemos dar por lo menos dos ejemplos que no cuadran exactamente en esta clasificación, a saber: nuestro juicio aritmético '7 + 5 = 12', y nuestro juicios geométrico 'los tres ángulos interiores de cualquier triángulo son iguales a dos ángulos rectos'. De estos dos juicios dijimos que sus respectivos predicados no estaban contenidos en sus respectivos sujetos. Por tanto, no se podría establecer una relación de identidad entre los términos, sino más bien una relación asociativa entre ellos. También dijimos que con ellos adquirimos conocimientos que antes no poseíamos, '=12' del primero, 'igual a dos ángulos rectos' del segundo. Además este conocimiento es universal y necesario, no cambia según la experiencia por lo que no vale para sólo una circunstancia o para un objeto particular.

Antes de seguir con la segunda definición de juicios analíticos y juicios sintéticos, debemos decir que para Kant mientras que los juicios analíticos son en su totalidad *a priori*, los juicios sintéticos pueden ser tanto *a posteriori*, como *a priori*. Esta idea de los juicios sintéticos *a priori* es propia de la filosofía kantiana.

Lo que consideramos como segunda definición de juicios analíticos y juicios sintéticos se encuentra tanto en P como en CrP. Esta definición no establece la identidad –relación entre los términos del juicio, ya sea de contenido o de asociación– como principio por el cual se reconoce que un juicio es analítico o sintético. Lo que se hace en esta definición es establecer el criterio por el cual un juicio analítico es verdadero, sin tener en cuenta la relación de contenencia entre el concepto-predicado y el concepto-sujeto. En la definición anterior, el principio de identidad se puede establecer formalmente $A = A$, pero siempre en términos de si el concepto-predicado se encuentra o no contenido en el concepto-sujeto. Como veremos, el principio de no-contradicción –principio lógico– sirve como criterio universal de legitimidad para la división formal entre los juicios analíticos y sintéticos.

> Todos los juicios analíticos reposan enteramente en el principio de contradicción y son por naturaleza conocimientos *a priori*, ya sea que los conceptos que les sirven de materia sean empíricos o no lo sean. Pues, dado que el predicado de un juicio analítico afirmativo ya está pensado de antemano en el concepto del sujeto, no es por lo que no puede ser negado de él sin contradicción. (P 267, §2b, 43)

> Ahora bien, la proposición: que a ninguna cosa le conviene un predicado que le contradiga, se llama principio de contradicción, y es un criterio universal, aunque sólo negativo, de toda verdad, y por ello mismo, empero, pertenece sólo a la lógica, porque vale para conocimientos, sólo como conocimientos en general, sin tomar en consideración su contenido. (CrP A151/B190)[10]

El hecho de que el principio de no-contradicción garantice la legitimidad de un juicio analítico, en virtud de su forma lógica, significa que todo juicio analítico es por principio verdadero.

Todo juicio en el que el concepto-sujeto no acepta la negación del concepto-predicado porque de ello resulta una contradicción es analítico y verdadero. Si la negación del concepto-predicado no implica una contradicción en el juicio, el juicio será sintético y la negación una contrariedad. Para cualquier juicio $A = A$ es un identidad; $A \neq A$ una contradicción; $A = \sim A$ una contrariedad. La identidad y la no-contradicción son principios de la lógica y, si se cumplen, el juicio, cualquiera que éste sea, será necesariamente *a priori*. Porque lo que se afirma es la estructura y no el contenido del juicio. Entonces la legitimidad de todo juicio analítico descansa en estos principios: 1. Se debe establecer una identidad entre los conceptos del juicio, si el concepto-predicado está o no contenido en el juicio. 2. La negación del juicio debe tener como consecuencia una contradicción.

Para un juicio sintético los principios de identidad y no-contradicción no legitiman el conocimiento que ellos expresan. Porque en ellos no se establece una necesidad entre el

[10] En las dos citas aparece como principio de contradicción lo que en este trabajo hemos llamado como principio de no-contradicción. Este cambio en la terminología no es arbitraria. Atendemos a la corrección de W/ M Kneale en *El desarrollo de la lógica* (cf. Kneale 1972: 330 n. 124).

concepto-predicado y el concepto-sujeto, es una relación de asociación, no una relación de identidad. Además la negación del concepto-predicado no implica una contradicción del juicio, sino una contrariedad. No podemos afirmar que 'todos los solteros son no casados' y 'no todos los solteros no son no casados', pero sí podemos afirmar que 'los lunes llueve' y 'los lunes no llueve'.

Demos un ejemplo: 'todos los triángulos tienen tres lados'. Por la primera definición, sabemos que la relación entre el concepto-predicado y el concepto-sujeto o es de contenido o es de asociación; por la segunda definición, sabemos que si la negación del juicio resulta en una contradicción en el juicio el juicio es analítico y verdadero. No podemos pensar, siquiera imaginar, un triángulo que no tenga tres lados. Según Kant, en este caso la relación que establecemos entre los conceptos gramaticales es de contenido y no de asociación. Así pues, la relación que media a los dos conceptos gramaticales del juicio es de identidad. La negación del juicio implica una contradicción, es contradictorio decir 'algún triángulo no tiene tres lados', porque en la definición de triángulo ya está pensado que tiene tres lados. Entonces nuestro juicio 'todos los triángulos tienen tres lados' es analítico y verdadero. Como decíamos que en la definición de triángulo ya se encontraba 'tiene tres lados' y por ello el predicado se encuentra contenido en el sujeto, los juicios analíticos no aportan ningún conocimiento nuevo. Sólo permiten aclarar los conceptos que se incluyen en las definiciones. Formemos juicios analíticos, sintéticos y sintéticos *a priori* con el mismo sujeto:

(A) Todos los triángulos tienen tres lados.
(B) El triángulo es blanco.
(C) En cualquier triángulo sus tres ángulos internos son iguales a dos ángulos rectos.

Por lo que hemos dicho podemos notar claramente que (A) es un juicio analítico, mientras que (B) y (C) son sintéticos. La conclusión del párrafo anterior es que los juicios analíticos aunque son universal y necesariamente verdaderos, no aportan ningún conocimiento nuevo, sólo aclaran los conceptos usados. Entonces aunque (A) sea verdadero y valga de forma universal y necesaria no es el tipo de juicio que requiere la ciencia, si ella considera que aporta conocimientos nuevos (cf. CrP BX-BXII).

¿Qué sucede con los juicios del tipo (B) y (C)? Podemos decir que los dos juicios son sintéticos. Ni en (B) ni en (C) el predicado se encuentra contenido en el sujeto. La negación de cualquiera de los dos juicios es una contradicción porque los términos no se encuentran relacionados por el principio de identidad.

¿Tanto (B) como (C) son iguales? No, (B) y (C) tienen un contenido cognoscitivo diferente. (B) es un juicio particular, habla de un triángulo y que ese triángulo es blanco. 'ser blanco' no es una condición del concepto-sujeto triángulo, porque la cualidad del color no es una cualidad necesaria de los triángulos, no en todos los casos en que pensamos, vemos o imaginamos un triángulo este es blanco, o siquiera tiene un color. Por tanto la relación entre los conceptos gramaticales es de asociación y no de identidad lógica. ¿Qué queremos decir cuando afirmamos 'todos los triángulos son blancos'? Lo que decimos con una afirmación tal es que no hemos encontrado el caso, en la experiencia, en que se nos presente un triángulo que no sea blanco. Aunque esto no implica que no hayan triángulo que no sean blancos, o incoloros. El juicio (B) 'el triángulo es blanco' es sintético y *a posteriori* su verdad depende de la experiencia empírica que nos afecta, en consecuencia, no podemos generalizarla hasta el punto de postular una ley. Aunque con este juicio sabemos algo que antes no sabíamos del triángulo, que es blanco.

El juicio (C) 'los tres ángulos internos de cualquier triángulos son iguales a dos ángulos rectos' es parte de lo que se conoce como segundo teorema del ángulo externo. Es una ley básica de la geometría, universal y necesaria pero no analítica (cf. CrP A716/B744). No es analítica porque de la relación entre sus conceptos gramaticales no se deduce que el predicado ya se encontraba contenido en el sujeto. Además su negación no es contradictoria. La asociación entre conceptos no se justifica en la experiencia, porque nadie se atreve a afirmar que las relaciones entre los ángulos internos de un triángulo son relaciones percibidas empíricamente; además, la verdad que se expresa es universal y necesaria aunque no se supiera con anterioridad. Por tanto, el juicio no puede ser ni analítico ni sintético *a posteriori*. No es analítico porque la verdad que se expresa es una verdad nueva, un conocimiento nuevo adquirido por la ciencia. No es sintético *a posteriori* porque su legitimidad no recae en la experiencia y se pueden postular leyes con la verdad expresada. ¿Qué tipo de juicio es (C)? (C) es un juicio sintético *a priori*, la justificación de la asociación de sus conceptos sólo se encuentra en la demostración de la verdad expresada por el juicio[11].

Indagamos por la naturaleza del juicio aritmético pero hemos dado un ejemplo acerca de un juicio geométrico. Como ya lo hemos dicho, Kant considera que la matemática es aritmética, geometría y mecánica newtoniana. La naturaleza de la matemática es la misma para todas sus ramas. Así, los juicios sintéticos *a priori* valen tanto para la aritmética, como para la geometría y la mecánica newtoniana. Hasta ahora presentamos un ejemplo de los juicios geométricos como sintéticos *a priori* porque sin la explicación de la forma temporal pura de la intuición resulta muy difícil comprender la naturaleza sintética *a priori* de la aritmética. En el siguiente apartado explicaremos cómo se construyen los juicios aritméticos para que estos se consideren como sintéticos *a priori*. Sólo nos falta advertir que, aunque Kant establece que la naturaleza de la matemática y de sus ramas es la misma, las razones por las que se justifica son más claras y abundantes respecto de la geometría que de la aritmética.

Hemos dicho que, por definición todos los juicios analíticos son *a priori*, pero no todos los juicios sintéticos son *a posteriori*. Algunos juicios sintéticos valen *a priori*, ya que son informativos y aún así universales y necesarios. Esta clasificación de los juicios en tres tipos resulta de la distinción entre origen y legitimidad. Nos falta exponer el elemento por el que se justifican los juicios sintéticos *a priori*, y cómo este elemento es esencial para el conocimiento aritmético.

Ya sabemos que los juicios sintéticos *a priori* son posibles. Lo que no sabemos es en qué se sustenta su legitimidad. La legitimidad del conocimiento que expresan los juicios analíticos se justifica en el principio de no-contradicción. En los juicios sintéticos *a posteriori* la legitimidad depende del caso particular de la experiencia al que se refieran. De los juicios sintéticos *a priori* no sabemos hasta este momento cuál es la justificación de su legitimidad.

[11] Como aún no mencionamos el papel de las formas puras de la intuición sensible nos resulta imposible acudir a ellas para establecer la legitimidad del juicio sintético *a priori*. Esta tarea la desarrollaremos en el siguiente apartado del capítulo.

## 2. El papel de la intuición en la formación de juicios sintéticos *a priori*

¿En qué se basa la legitimidad de los juicos sintéticos *a priori*, en concreto los aritméticos? Para responder a la pregunta tenemos que entender la caracterización de lo que Kant entiende por forma pura de la intuición sensible y su papel en la formación de juicios sintéticos *a priori*.

Para entender lo que es una intuición, Kant dice que nuestra cognición está compuesta fundamentalmente por dos elementos: intuiciones y conceptos. Mientras que en la intuición los objetos son dados, por medio de los conceptos los objetos son pensados; la intuición presenta los objetos de manera inmediata gracias a su relación con la sensibilidad (cf. CrP A19/B33), los conceptos permiten pensar de manera mediata los objetos gracias a su relación con el entendimiento.

La sensibilidad es la capacidad receptiva por la cual recibimos representaciones inmediatas de la manera como somos afectados por los objetos. El entendimiento es la capacidad de pensar el objeto de la intuición, y producir –por medio de la espontaneidad– representaciones generales por medio de conceptos (cf. CrP B75/A51). Es por la conjunción de estas dos facultades de la mente humana que nos es posible conocer. Así pues:

> Sin sensibilidad no nos sería dado objeto alguno; y sin entendimiento, ninguno sería pensado. Pensamientos sin contenido son vacíos, intuiciones sin conceptos son ciegas. Por eso, es tan necesario hacer sensibles sus conceptos (…) como hacer inteligibles sus intuiciones (…). Tampoco pueden estas dos facultades, o capacidades, trocar sus funciones. (CrP B75/A51)

Teniendo esto en cuenta podemos decir que la intuición es una facultad que presenta representaciones singulares, la representación de una cosa individual, un único objeto (cf. Gardner 2010: 66). Los conceptos son generales, lo que caracteriza a un concepto es que éste se puede aplicar a más de una cosa particular (cf. Gardner 2010: 66-7). Entonces la distinción entre intuición y concepto es una distinción entre aquello que es particular y aquello que es general en nuestro conocimiento.

Kant dice que sólo somos capaces de una intuición sensible –esto es con relación a la sensibilidad– y que ella no satisface por sí sola lo que exige el conocimiento, por eso necesita de la espontaneidad de los conceptos. El hecho de que poseamos una intuición sensible, no significa que ésta sea la única forma de la intuición, por ejemplo, la intuición intelectual en la cual el acto de pensar y ser presentado un objeto particular son el mismo evento. En el caso de la intuición intelectual la diferencia entre conocer un objeto y crearlo desaparece (cf. CrP B68/B71-2/A230).

Es pertinente la mención de la intuición intelectual porque ella sería totalmente *a priori*, ya que no tiene necesidad de conocer los objetos a través de la sensibilidad y en ella no se encuentra la diferencia entre conocer y crear (cf. Burge 2005b: 376). En el caso de la intuición sensible, no hay claridad de si ella es *a priori*, es más, podríamos pensar que ella es esencialmente *a posteriori*.

En A20/B34 Kant establece una distinción en la intuición sensible, esta distinción es respecto de aquello en la intuición que podemos llamar su materia y su forma. Mientras que toda la materia de lo que se presenta en la intuición sensible es *a posteriori*, la forma de la intuición sensible es *a priori* en la medida en que en ella se organiza toda representación, es estructura de toda representación. Por ser estructura, la forma pura de la intuición es anterior a aquello que se da por medio de la sensibilidad, así pues, no podemos imaginarnos a los objetos representados de formas diferentes a como se presentan bajo la forma de la intuición pura. Las formas de la intuición pura son dos: el tiempo y el espacio.

Si la intuición no contiene nada más que la forma de la sensibilidad, la cual precede a todo sujeto, a todas las impresiones reales mediante las cuales somos afectados por los objetos (cf. P §9, 83), la posibilidad de la intuición como intuición *a priori* es real. Esto implica que todo lo que recibimos en la intuición no se presenta tal como es, sino bajo las formas de la sensibilidad. De la intuición sólo tenemos conocimiento *a priori* de los juicios que se realizan conforme a las formas de la sensibilidad. Como las formas puras de la sensibilidad son el espacio y el tiempo. Todo juicio que se refiera al espacio y al tiempo es *a priori*.

Ahora bien, aquello que Kant entiende por matemática pura se encuentra en estrecha relación con el espacio y el tiempo. "La geometría toma por fundamento la intuición pura del espacio. La aritmética construye ella misma sus conceptos de números mediante la adición sucesiva de las unidades en el tiempo." (P §10, 85)

Como ya dijimos que la forma de la intuición pura es el espacio y el tiempo, y que son *a priori*. La geometría es sintética y *a priori* por tener como fundamento la intuición pura del espacio. La aritmética es sintética y *a priori* por construir sus conceptos –números– en la intuición pura del tiempo. La intuición nos presenta objetos inmediatos de los cuales creamos conceptos (cf. P §7, 81). Como el tiempo es una forma de la intuición pura, estructura de nuestras representaciones, los conceptos que se construyan desde los objetos en esta intuición son *a priori* y éstos se refieren a objetos de los sentidos tal como se nos aparecen.

Entonces aquello que legitima un juicio sintético *a priori* es el método por el cual construye sus conceptos en la intuición pura. En el caso de los juicios aritméticos la intuición pura de tiempo. A continuación daremos un ejemplo de este método.

El método matemático se caracteriza por construir los conceptos que utiliza. "*Construir* un concepto significa: exhibir *a priori* la intuición que le corresponde." (CrP A713/B741) Este método de construcción de conceptos le permite a Kant conciliar lo universal con lo particular. Lo universal que se expresa en un concepto con lo particular que se representa en la intuición. Lo particular de la intuición se representa bajo ciertas condiciones universales de la construcción. Las condiciones de la construcción son universales porque pertenecen a la forma de representación humana. Así que, siempre y cuando sea un humano, las formas de la intuición, el espacio y el tiempo, legitiman la creación de conocimientos universales y necesarios, así se apliquen a casos particulares.

De esto debemos entender que una suma particular como ‘7 + 5 = 12’ es posible porque los conceptos ‘7 + 5’ e ‘= 12’ se relacionan en la intuición pura de tiempo. La cual permite comprender que ‘7 + 5’ es una suma de unidades (cf. CrP B16) sucesivas (cf. CrP B47). Entonces podemos recurrir a nuestros dedos de la mano o a imágenes que nos representamos para agregarle al concepto ‘7’ los ‘5’ que nos faltan para construir el concepto ‘12’. El recurrir a imágenes u objetos particulares para expresar *in concreto* el concepto de número es necesario. Porque de los puros conceptos-números no se sigue nada; es más, sólo se tiene el concepto cuando se ha presentado el objeto de la intuición que lo representa.

Los números son conceptos construidos en la intuición pura. La construcción de los conceptos a partir de objetos dados resulta en definiciones. Porque el concepto definido no puede contener absolutamente nada más de lo que se exprese en la definición. Como los conceptos matemáticos sólo son posibles al ser construidos en la intuición, no existen antes de ser definidos (cf. A731-2/B759-60). Los juicios aritméticos presentan conocimientos nuevos porque antes de su demostración el concepto no existe.

Entonces cada fórmula aritmética particular es la definición del concepto general. Cabe preguntarnos, ¿qué nos estamos representando con los números, si se entiende número como concepto? Lo que nos representamos con los conceptos de números son las magnitudes variables de los objetos que se presentan a través del tiempo (cf. MN 173, 124; Friedman 1992: 109). Es decir, el cambio de la cantidad o el movimiento a través del tiempo expresado en un concepto (cf. B761/A733).

> Supongamos un barco, que viaja desde Portugal a Brasil. Señalamos todos los trechos que avanza con el viento del este con (+) y aquellos que retrocede a causa del viento del oeste con (–). Los números deben significar las millas. Y así, el viaje de siete días es: +12+7–3–5+8 = 19 millas, que ha avanzado hacia el oeste.(MN 173, 124).

Las millas no son objetos, son unidades de longitud, conceptos que indican distancias recorridas. Los números son las millas recorridas sin importar la dirección. Los números son conceptos que expresan magnitudes variables. Utilizamos los números para expresar las millas recorridas en el viaje y calcular el trayecto. En este ejemplo se ve claramente el uso particular de los números. El juicio aritmético ‘+1 2 + 7 – 3 – 5 + 8 = 12’ sólo es comprensible al construirse en la intuición.

Es problemático que los conceptos de la aritmética –los números– representen las magnitudes de los objetos y no los objetos mismos (cf. Friedman 1992: 109). Porque en algunos casos Kant asimila algebra y aritmética[12] (cf. CrP A717/B745; Friedman 1992: 108), esto quiere decir que leyes generales del tipo ‘$(a + b) + c = a + (b + c)$’ son equiparables a fórmulas particulares como ‘7 + 5 = 12’. El problema es que las fórmulas aritméticas no son axiomas (cf. CrP A163-5/B204-06) porque serían axiomas particulares e infinitos (FA §5 29); como aritmética y algebra no son esencialmente diferentes, las leyes generales, algebra, no son leyes axiomáticas[13].

Ahora bien un axioma es un juicio *a priori* que se considera cierto de modo inmediato (cf. CrP A734/B762; Körner 1991: §286, 154). Si ni aritmética ni álgebra tienen axiomas, las leyes para las magnitudes son de algún modo menos generales que las leyes geométricas. Así pues, en matemáticas hay por lo menos dos modos diferentes de construcción: la construcción ostensiva o geométrica, y la construcción simbólica –comprende al algebra y la aritmética– (cf. CrP A717/B745).

Ambos modos de construcción producen juicios sintéticos *a priori*. La diferencia es que estrictamente sólo la geometría cumple todas las condiciones de un conocimiento sintético y *a priori*. Porque el álgebra y la aritmética son técnicas para calcular las magnitudes que presentan los objetos, no los objetos mismos, por lo que no puede establecer axiomas para la intuición. En cambio, la geometría se encarga de la abstracción general de los objetos, entonces las leyes que ella determina son axiomas evidentes y válidos para todos los objetos sensibles.

[12] Tanto el álgebra como la aritmética se ocupan de las magnitudes que expresan el cambio de los objetos. El álgebra expresa las magnitudes generales o indeterminadas, así como la relación de la extracción de la raíz cuadrada –*root-extraction*–, la aritmética expresa las magnitudes particulares expresadas por los conceptos numéricos (cf. Friedman 1992: 108).

[13] Kant no da definición de axiomas algebraicos, sólo dice que en el caso de la geometría (*quanta*) hay construcciones generales –axiomas–; mientras que en la aritmética y el álgebra (*quantitas*) no hay construcciones de esta generalidad, sólo juicios o postulados como ‘7 + 5 = 12’ (cf. Friedman 1992: n. 24).

Aunque la aritmética y el álgebra no establecen axiomas intuitivos, sí pueden hacer demostraciones de sus verdades por medio de pruebas en la intuición. Una prueba algebraica expone los signos que utiliza, expone los conceptos en la intuición por lo que en ella toman sentido. Los signos algebraicos expresan relaciones posibles entre magnitudes, ya sean determinadas –aritméticas– o generales.

La naturaleza de los juicios aritméticos es sintética *a priori*. Esto quiere decir que todo juicio aritmético construye sus conceptos –los números– en la intuición pura de tiempo, y que todo juicio aritmético es objetivamente informativo. Aunque los juicios aritméticos sean sintéticos *a priori* ellos no pueden construir axiomas que sean aplicables a los objetos en general, porque, con sus conceptos, la aritmética trata fundamentalmente de capturar la variabilidad de las magnitudes y no de los objetos mismos.

Entonces siempre que utilizamos fórmulas aritméticas o leyes algebraicas predicamos el cambio o la variación de medida entre propiedades de los objetos, el cambio de distancia, la relación de temperatura, cambios de estados de las cosas, entre muchos otros. Entonces podemos decir que los juicios aritméticos son conceptos construidos en la intuición pura que hablan acerca de otros conceptos –las propiedades de los objetos–.

Al construirse los conceptos de la aritmética en la intuición pura, los conceptos son objetivos necesarios y universales. Porque las condiciones de construcción para los conceptos son las mismas en todos los seres humanos. La forma pura de la intuición que es el tiempo es el elemento legitimador de los juicios aritméticos porque sin ella nos es imposible pensar en el cambio –puede ser adición, sustracción, producto, etc.– continuo de un mismo objeto o la relación de cambio entre varios estados. Mientras los números son conceptos, los signos (+), (–), (√) expresan los cambios posibles entre las magnitudes. La relación asociativa entre los términos gramaticales que forman el juicio, el sujeto y el predicado se expresa por el signo ‘=’ que no establece una identidad lógica pero sí real.

*  *  *

En este capítulo hemos expuesto la explicación kantiana de la naturaleza sintética*a priori* del juicio aritmético. Para ello tuvimos que mostrar qué significa que un juicio sea sintético *a priori* y cuál es el elemento que legitima este tipo de juicios.

Que un juicio sea sintético *a priori* significa que el contenido que se expresa en el juicio no se conocía con anterioridad –característica de sintético–, y que éste nuevo conocimiento es universal y necesario –característica de *a priori*. La universalidad y necesariedad del juicio no depende del origen puro o empírico de sus conceptos, depende de la objetividad del juicio expresado. Esto quiere decir que el juicio se reconozca como verdadero de modo objetivo.

Para que un juicio sintético se pueda reconocer como objetivo debe legitimarse en las formas puras de la intuición sensible. Las formas puras de la intuición sensible legitiman los juicios sintéticos *a priori* porque son estructuras generales de la sensibilidad humana. La forma de la intuición pura que permite la construcción de juicios aritméticos es el tiempo. Todo juicio que se fundamente en la intuición pura de tiempo expresa el cambio de un objeto, por ello los juicios sintéticos *a priori* aritméticos remiten en último término a la experiencia –sus variables–.

# Capítulo segundo
# Problemas de la concepción sintética *a priori* de los juicios aritméticos

> Debido a alguna predisposición particular, cierto gran genio empieza a trabajar magníficamente sobre un tema. Como se trata de algo difícil, es admirado y eso estimula a otros. Luego se demuestra la utilidad de tales trabajos. Así surgen las ciencias.
>
> Lichtenberg 2008: §67 33.

En el capítulo anterior expusimos lo que implica suponer la naturaleza del juicio aritmético como sintética *a priori*. En este capítulo nuestro objetivo es exponer las objeciones que se pueden hacer a la concepción sintético *a priori* de los juicios aritméticos. Las objeciones que presentamos son las que realizan Gottlob Frege y algunos historiadores de la lógica. Hemos dividido el capítulo en dos secciones. En la primera sección, problemas referentes a la clasificación kantiana de los juicios, exponemos cinco objeciones que se plantean a la clasificación kantiana. En la segunda sección, problemas referentes a la definición kantiana de intuición, exponemos lo que implica tomar a la intuición pura de tiempo como elemento legitimador de los juicios aritméticos y lo que Frege comprende por intuición.

## 1. Problemas referentes a la clasificación kantiana de los juicios

En esta sección presentamos cinco objeciones a la clasificación kantiana de los juicios. La primera de las objeciones tiene que ver con la diferencia entre una definición lógica y una definición epistemológica para la división de los juicios en analíticos y sintéticos. La segunda objeción se refiere a la insuficiencia de los conceptos gramaticales sujeto-predicado para la explicación de las relaciones entre los términos de cualquier juicio. La tercera objeción tiene que ver con los errores que comete Kant dada su comprensión de lógica. La cuarta objeción se refiere al papel que cumple la modalidad en el sistema kantiano. La quinta objeción es la falta de exhaustividad de las definiciones kantianas para la distinción de cualquier juicio en juicio sintético *a priori*, juicio analítico y juicio sintético. Todas estas objeciones están relacionadas entre sí. En nuestra exposición siempre que nos referimos a alguna de las objeciones, presentamos un desarrollo alterno que nos parece más apropiado. Este desarrollo alterno es la solución que en algunos casos plantea Gottlob Frege.

La diferencia entre una definición lógica y una definición epistemológica de los conceptos para definir la naturaleza de los juicios aritméticos, implica una caracterización específica de la naturaleza del juicio. Como lo vimos en el primer capítulo, para Kan, la definición de los conceptos *a priori* y *a posteriori* es epistemológica; mientras que la definición de los conceptos de analítico y sintético es lógica. Gottlob Frege sostiene que ambas definiciones son definiciones epistemológicas, que dan cuenta del grado de generalidad que alcanzan las verdades de la ciencia, y, que es capaz de expresarse en el juicio.

Inmanuel Kant postuló que nuestro conocimiento de la aritmética es posible porque la aritmética construye sus conceptos en la intuición pura de tiempo. Si el conocimiento de una ciencia depende de la intuición pura, entonces las verdades que se expresan en los juicios de dicha ciencia son sintéticas y *a priori*. Así, aunque los juicios son genuinamente informativos se conocen con anterioridad y con independencia de la experiencia (cf. Kenny 1997: 17).

En CrP se distinguen los conceptos de *a priori* y *a posteriori* bajo una diferencia epistemológica, la cual responde a la pregunta por los modos de conocer posibles al ser humano. Mientras la distinción entre *a priori* y *a posteriori* es epistemológica, la distinción entre analítico y sintético es lógica. Una distinción lógica significa que la definición se hace conforme a la relación de contenido o asociación entre los términos del juicio (cf. Detlefsen 2004: 51).

Como Kant piensa los juicios exclusivamente bajo la forma gramatical sujeto-predicado, su análisis lógico de los juicios –las relaciones entre sus términos– puede verse afectado de dos formas: primero, por la reducción a una sola forma gramatical que no da cuenta de las relaciones de todos los juicios. Segundo, por la intrusión de nociones psicológicas cuando en un juicio no se pueden distinguir su sujeto y su predicado gramatical. En estos casos la definición lógica no es suficiente para separar todos los juicios en analíticos y sintéticos (cf. Kneale 1972: 329-30).

Frege dice que sus distinciones de *a priori*, *a posteriori*, analítico y sintético son de carácter epistemológico. Al postular que todas las distinciones se fundamentan en definiciones epistemológicas es posible distinguir entre juicios analíticos, juicios sintéticos y juicios sintéticos *a priori* sin restricción ni a la forma gramatical sujeto-predicativa, ni al papel legitimador de la intuición.

La investigación de la naturaleza de la aritmética es epistemológica, porque al iniciar su investigación Frege encontró que el fundamento en principios lógicos es una consecuencia de la naturaleza y estructura de la justificación de verdades y juicios en la aritmética (cf. Burge 2005a: 317). La legitimidad del juicio depende del reconocimiento de la generalidad con el que se expresa una verdad.

> Las distinciones antes mencionadas entre *a priori* y *a posteriori*, sintético y analítico no atañen, según mi opinión[1] al contenido del juicio, sino a la legitimidad del acto de juzgar. Allí donde falta ésta, desaparece también la posibilidad de esta división. (FA §3 26-7)
>
> [1] Con esto, naturalmente, no quiero introducir un nuevo sentido, sino referirme sólo a lo que han querido decir autores anteriores, Kant en especial. (FA §3 n. 1)

Así pues, la distinción epistemológica queda ratificada por el hecho de que ésta se lleva a cabo para responder por la legitimidad o justificación del acto de juzgar, independientemente de que en la justificación se deba recurrir a principios lógicos. Para Frege, aquello que legitima o justifica el juicio es el acto judicativo que se produce por la aserción del contenido conceptual; es decir, la legitimidad del juicio depende del reconocimiento de la verdad expresada.

Al poner los conceptos utilizados por Kant como herramientas para encontrar la razón última en la que se basa la justificación de tener un juicio, enunciado o proposición por verdadero[14], Frege logra desligar el análisis de circunstancias psicológicas, fisiológicas y físicas. Estas circunstancias dan razón tanto de la formación del contenido de un enunciado como de las creencias por las cuales podemos llegar a tomarlo como verdadero. Como las verdades de la aritmética no dependen ni del modo de formación del contenido del juicio, ni de las creencias que se le pueden adjuntar para tenerlo por verdadero, las circunstancias psicológicas, fisiológicas y físicas no afectan en nada la verdad afirmada por el juicio.

La circunstancia por la que llegamos a tomar un juicio aritmético ‘7 + 5 = 12’ como verdadero es que aprendimos, con el tiempo, por medio de la corrección, que la suma de 7 y 5 siempre es 12. Esta razón no es suficiente para la justificación de la verdad, porque la verdad del juicio no depende de mi capacidad para reconocerlo como verdadero, el juicio ‘7 + 5 = 12’ es verdadero así yo crea que no.

Cada ciencia posee un rango de aplicabilidad. Por ello es que no usamos los axiomas espaciales para entender las cualidades cromáticas de los objetos. La lógica posee el mayor rango de aplicabilidad porque ella gobierna las leyes del pensamiento; podemos pensar un espacio de cuatro dimensiones, pero no podemos pensar que lo que es no es. Ahora bien,

---

[14] Tal como indica Burge, debemos tener en cuenta que Frege utiliza los conceptos de *a priori, a posteriori*, sintético y analítico respecto de juicios, proposiciones, verdades y leyes (cf. Burge 2005b: 357). Ahora bien, los juicios en el sentido de Frege son abstracciones idealizadas, compromisos de la lógica o de otras ciencias, no de los actos de los individuos. Los individuos pueden instanciar estos juicios a través de su acto judicativo, sin embargo, los juicios abstractos por sí mismos parecen ser independientes de los actos de la mente individual. Por supuesto, las verdades y los juicios son diferentes para Frege. Pero la diferencia en la lógica fregeana concierne sólo a su rol en la estructura lógica. Algunas verdades (los antecedentes verdaderos en los condicionales) no son judicativos. Ellas no están marcadas por el signo de aserción. Pero todo lo que es judicativo es verdadero. Sólo las verdades o los juicios verídicos pueden ser *a priori* para Frege. Judgements in Frege’s sense are idealized abstractions, commitments of Logic or other sciences, not the acts of individuals. Individuals can instantiate these judgements through their acts of judgement, but the abstract judgements themselves seem to be independent of individual mental acts. Truths and judgements are, of course, different for Frege. But the difference in Frege’s logic concerns only their role in the logical structure. Some truths (true antecedents in conditionals) are not judged. They are not marked by the assertion sign. But everything that is judged is true.(Burge 2005b: 357-58) La traducción es propia.

¿cuál es el rango y el dominio de la aritmética? Para responde la pregunta Frege procedió de la siguiente manera: "primero, busqué retrotraer el concepto de ordenación en un serie al de consecuencia *lógica* y de aquí progresar al concepto de número. Al procurar cumplir lo más rigurosamente posible con este requerimiento, me encontré, con todas las dificultades que surgen de la expresión." (C prólogo 3) Esto quiere decir que para investigar por la naturaleza de la verdad y el juicio de cualquier ciencia, se debe buscar la prueba y retrotraerla hasta sus verdades originarias (cf. FA §3 27). Siendo que, lo que se encuentra en este proceder es lo que llega a determinar si la naturaleza de la verdad que afirma el juicio es *a priori* o *a posteriori*, analítica o sintética.

> Si por este camino se llega a leyes lógicas generales y a definiciones, entonces se tiene una verdad analítica, para lo cual se presupone que también se toman en consideración los enunciados en los que se basa la admisibilidad de una definición. Si, por el contrario, no es posible llevar a término la prueba sin utilizar verdades que no son de naturaleza lógica general, sino que están relacionadas con un campo particular del saber, entonces el enunciado será sintético. (FA §3 27)

Que una verdad sea considerada como analítica o sintética, y por extensión el enunciado del cual son parte, es consecuencia de que en su demostración necesitemos retrotraernos a leyes lógicas generales y definiciones, o a leyes de ciencias particulares. Si el caso es que en la demostración nos retrotraemos a definiciones y leyes lógicas, la verdad, la proposición, el juicio y el enunciado se considerarán analíticos; mientras que, si al retrotraer la demostración se hayan verdades que no correspondan a las definiciones y leyes lógicas, sino a la esfera de una ciencia especial, la verdad será tomada como sintética. Así, las definiciones de los conceptos establecen grados de generalidad que expresan las ciencias. La lógica posee el máximo grado y es analítica. Las demás ciencias son sintéticas. Si la aritmética se puede reducir a axiomas y leyes lógicas entonces, es analítica.

En el caso de la prueba lógica, las leyes y definiciones que se encuentran son universalmente aplicables y no se restringen a disciplinas particulares (cf. Kenny 1997: 80). En el caso de las demostraciones o pruebas que incluyen verdades diferentes a las otorgadas por la lógica, la ley por la cual se rige la prueba estará limitada a un campo específico, el campo de la ciencia al que pertenecen. En este caso las leyes que se postulan no tienen razón para entrar en conflicto con las leyes generales del pensamiento, en la prueba donde ocurra esto, se hallan verdades sintéticas. Que una verdad sea sintética no implica que no pueda ser *a priori*. La diferencia entre *a priori* y *a posteriori* Frege la establece respecto a si la ciencia tiene o no axiomas y leyes.

Desde la definición fregeana, si se postula la aritmética como ciencia sintético *a priori* se restringe su aplicabilidad a un domino específico. Por tanto la aritmética sólo se consideraría en un campo específico, por ejemplo para explicar el cambio de los objetos en el tiempo. La cuestión radica en que los juicios aritméticos no sólo se usan para explicar la magnitud de un objeto en el tiempo. La aritmética tiene múltiples aplicaciones e incluso se puede pensar sin necesidad de referirse a un campo específico. Por ejemplo, los juicios y las leyes del álgebra. Por ello Frege nota una dificultad en aceptar que la aritmética es sintética desde una distinción lógica.

Entonces, el problema de entender la distinción entre analítico y sintético desde una definición lógica, es que dicha definición supone una estructura específica aplicable a cualquier juicio. Si la estructura es insuficiente para explicar alguna clase de juicio, la distinción entre analítico y sintético no es aplicable a todos los juicios posibles. Kant afirma que la estructura válida para la separación de cualquier juicio en analítico y sintético es la forma gramatical sujeto-predicado. Por ello se ve en la libertad de aplicar estos conceptos a juicios aritméticos como ‘7 + 5 = 12’.

En CrP, Kant ofrece dos definiciones de la distinción entre analítico y sintético. Las dos están concebidas como definiciones lógicas que dan cuenta de la relación entre los términos del juicio. Estas dos definiciones son válidas para los juicios de forma sujeto-predicado. Ahora bien, los conceptos gramaticales sujeto-predicado no son adecuados para explicar las relaciones de cualquier juicio. A continuación, presentamos las objeciones que se le pueden realizar a la división y el análisis de un juicio según la forma sujeto-predicativa.

La primera definición de juicio analítico y juicio sintético, en Kant, corresponde a la relación lógica que debe existir entre los conceptos, es decir si el predicado *B* está o no contenido en el sujeto *A*. Si efectivamente el predicado se encuentra contenido en el sujeto, y por el sólo análisis llegamos a establecer entre ellos dos una relación de identidad, del juicio diremos que es analítico. En cambio, si el predicado *B* no se encuentra contenido en el concepto *A*, y no se puede establecer una relación de identidad entre los conceptos por el mero análisis, del juicio diremos que es sintético.

El análisis de todo juicio analítico de la forma sujeto–predicado resulta en la división de todos los conceptos parciales que conforman el juicio. El estudio de los juicios sintéticos resulta en la diferenciación de conceptos-predicados que no se encontraban pensados o contenidos en el concepto-sujeto. En el último caso, la relación del concepto-predicado con el concepto-sujeto es el de una asociación que permite afirmar que la conexión entre ellos no se podría deducir del puro análisis conceptual (cf. CrP A7/B10; P §2; Detlefsen 2004: 51).

La objeción a la forma gramatical sujeto-predicativa es que en la definición de juicio analítico y juicio sintético, no es claro si Kant supone que todos los juicios son de la misma forma sujeto–predicado, o, aunque considera que hay distintas formas en las que se presenta el juicio –hipotético, disyuntivo, entre otros– no le parece relevante aplicarles la distinción. De lo anterior, Resulta como consecuencia, que la definición que se construye para los juicios de forma sujeto-predicado es aplicable a todo el campo del conocimiento posible (Cfr. Kneale 1972: 330).

En cualquiera de los dos casos, los juicios a los que les corresponden los conceptos gramaticales de sujeto y predicado quedan cortos para explicar todo los juicios; de esta falencia surge que proposiciones del tipo ‘7 + 5 = 12’ sean tratadas como sintéticas; siendo el único modo de justificar el agregado del concepto-predicado al concepto-sujeto el auxilio de una facultad que es capaz de asociar conceptos independientes entre sí, tal como lo es la intuición pura[15].

---

[15] Recordemos que la intuición pura tiene dos elementos que a su vez son puros: el espacio y el tiempo. Tanto espacio como tiempo son la estructura objetiva de representación de los objetos sensibles. Las ciencias que construyen sus conceptos por fundamentarse o en la intuición pura de espacio o en la intuición pura de tiempo son la geometría y la aritmética. Los juicios de estas dos ciencias son universales y necesarios porque espacio y tiempo son condiciones objetivas del conocimiento sensible, y los seres humanos sólo pueden aspirar a este tipo de conocimiento.

Si se quiere analizar el juicio '7 + 5 = 12' bajo la distinción gramatical de sujeto-predicado, tal como parece proponerlo Kant, deberíamos pensar que '7 + 5' es el concepto-sujeto, '12' el concepto predicado e '=' como aquello que permite establecer una relación entre los conceptos. Si al negar la igualdad expresada con '=' no se genera una contradicción del juicio, sino que, con ello se expresa algún tipo de asociación entre conceptos, diremos que el juicio es sintético y no analítico. De la negación de la igualdad '=' no se puede generar una contradicción, porque conceptualmente sólo se expresa la unificación de los dos conceptos mencionados, más no el nuevo concepto como un número determinado. Por tanto, no se puede establecer una identidad y el juicio por la relación entre sus meros conceptos no aporta ninguna información nueva al conocimiento de la suma entre 7 y 5. "El concepto de doce no está en modo alguno ya pensado, sólo porque yo piense aquella unificación de siete y cinco; por mucho que yo analice mi concepto de una suma posible tal, no encontraré en él el doce." (CrP B15) Para que aquello que expresa la suma entre 7 y 5, sea un concepto nuevo o un número particular, debemos ir más allá del análisis conceptual, y llegar al campo de la intuición:

> por ejemplo los cinco dedos, o bien (…) cinco puntos, y agregando así, poco a poco, las unidades del cinco dado en la intuición, al concepto del siete. Pues tomo primeramente el número 7 y, tomando como ayuda, como intuición, para el concepto de 5, los dedos de mi mano, añado ahora poco a poco al número 7, *en aquella imagen mía*, las unidades que antes // reuniera para formar el número 5, y veo así surgir el número 12. (CrP B5)[16]

Al poner en la intuición por lo menos uno de los dos conceptos que utilizamos en la suma, podemos establecer un número particular, que es el predicado de '7 + 5', por no estar pensado con anterioridad el predicado '= 12' es un conocimiento nuevo de la ciencia. Así, logramos establecer una igualdad entre los conceptos gramaticales '7 + 5' y '12' (cf. CrP B16). En este ejemplo se nota algo característico del pensamiento kantiano respecto a la aritmética. Los conceptos aritméticos son construcciones de los hombres en la intuición pura de tiempo[17]. Entonces, todo conocimiento aritmético es un conocimiento construido

[16] El énfasis en la cita que se indica con cursiva es mío. Lo hemos puesto porque para nuestro trabajo es esencial resaltar el papel subjetivo de la intuición. La representación es mía, aunque sé que ella vale de modo objetivo, porque su estructura o forma es compartida por todos los seres humanos.

[17] Recordemos que hay dos modos de construcción de conceptos en la intuición pura. El primer modo, la construcción ostensiva, no sólo construye de manera sintético y *a priori* los conceptos geométricos, también,

por las mentes humanas, no un descubrimiento. La consecuencia es que en Kant los elementos de la matemática no tienen por qué tener existencia independiente de la mente ya que ellos se corresponden con los conceptos pensados; entendiendo por concepto la agrupación de ciertas características de múltiples objetos.

La segunda definición de analítico y sintético establece el principio fundamental y suficiente de todos los juicios analíticos. Este principio es el de no–contradicción. Un juicio es analítico, sí y sólo sí, su negación es una conjunción de contradictorios (cf. Kneale 1972: 330). Esta definición de analítico en CrP se presenta de la siguiente manera:

> Ahora bien, la proposición: que a ninguna cosa le conviene un predicado que le contradiga, se llama principio de contradicción, y es un criterio universal, aunque sólo negativo, de toda verdad, y por ello mismo, empero, pertenece sólo a la lógica, porque vale para conocimientos, sólo como conocimientos en general, sin tomar en consideración su contenido. (CrP A151/B190)

De la cita anterior podemos decir varias cosas. Primero, Kant conecta el hecho de que un juicio sea analítico con el principio de no–contradicción. Esto implica que, como ese es un principio lógico formal, en los juicios analíticos no tiene relevancia el contenido de sus conceptos, sino que en ellos sólo vale la relación formal entre el sujeto y el predicado. Del hecho de que al negarse el juicio sus conceptos no sean contradictorios, no se sigue la afirmación de que los conceptos que lo componen se encuentren bien o mal enlazados respecto del objeto que les corresponde. Por lo que el cumplimiento del principio de no–contradicción no es suficiente para establecer la verdad o falsedad objetiva de un juicio.

Segundo, como sólo vale la relación formal entre los conceptos de sujeto y predicado, Kant proclama que la autoridad y utilidad del juicio analítico, no es otra que ser un criterio suficiente de verdad negativo. Al conectar la diferencia entre analítico y sintético, de forma negativa, con el criterio de verdad de todos los juicios, la división de todos los juicios verdaderos en analíticos y sintéticos se hace posible. Sí y sólo sí la forma gramatical sujeto-

está en la capacidad de construir axiomas y leyes para los objetos sensibles. El segundo modo, la construcción simbólica, es propia del álgebra y de la aritmética. Aunque por este modo se construyen conceptos sintéticos *a priori* no es posible el establecimiento de axiomas y leyes generales. Porque los conceptos aritméticos se refieren a magnitudes –que a su vez son conceptos– y no a objetos sensibles. La diferencia entre la construcción ostensiva y la construcción simbólica es la generalidad que alcanzan los juicios. Los juicios ostensivos son más generales que los juicios simbólicos, aunque por ser sintéticos *a priori* ambos son objetivamente verdaderos, universales y necesarios.

predicado es adecuada para cualquier juicio. Cosa que no sucedía en la primera definición. Lo problemático de esta noción es que si se supone el principio de no-contradicción como único principio lógico, la clase de los juicios analíticos así definidos no comprende todos los juicios lógicamente verdaderos (cf. CrP B191/A151; Kneale 1972: 330/411). Los juicios verdaderos que en este caso se pueden separar como juicios analíticos y juicios sintéticos en virtud de si sus términos pueden ser o no contradictorios, no corresponden con todos los juicios lógicamente verdaderos. La prueba de ello se ve al analizar el primer modo de la primera figura aristotélica –*Barbara*– que es lógicamente verdadera sin que sus premisas deban tener en ellas una contradicción (cf. Kneale: 70).

| | |
|---|---|
| Todo ser vivo es mortal. | Todo A es B. |
| Todo hombre está vivo. | Todo C es A. |
| Entonces todo hombre es mortal. | Entonces todo C es B. |

Como este silogismo es lógicamente verdadero sin tener que recurrir al principio de no-contradicción, no es verdadera la afirmación kantiana de que el principio de no-contradicción es garantía suficiente para la separación total de los juicios verdaderos en juicios analíticos y juicios sintéticos. Porque algunos juicios que son lógicamente verdaderos son excluidos por la definición.

Ahora vamos a presentar cómo se relacionan los conceptos de analítico y sintético con los de *a priori* y *a posteriori* tanto en Frege como en Kant. A lo primero que debemos prestar atención y tomar como relevante es la afirmación de Frege al decir que "un error *a priori* es, entonces, un absurdo igual que un concepto azul." (FA §327) Un error *a priori* es un absurdo al igual que un concepto azul porque conocer *a priori* es un modo de conocer, y sólo podemos conocer lo que es verdadero –vale también para un conocimiento *a posteriori* y todo modo distinto de conocer–. ¿Qué sucede con juicios como '7 + 5 = 8'? En este caso tendríamos conocimiento *a priori* de que *p* [18] es falsa, pero, como toda proposición

[18] Tomando *p* como el juicio '7 + 5 = 8'. Que *p* sea falsa significa que su negación $\sim p$ es verdadera. Es verdad que '7 + 5 ≠ 8'.

judicativa debe ser verdadera, la falsedad es tratada por Frege como conocimiento *a priori* de que la negación de *p* es verdadera (cf. Kenny 1997: 79 y n. 1).

> Para que una verdad sea *a posteriori* se exige que su prueba no pueda ser validada sin alguna apelación a los hechos; es decir, a verdades indemostrables y sin universalidad, que contienen aseveraciones sobre objetos particulares. Si, por el contrario, es posible llevar a cabo la prueba partiendo de leyes generales únicamente, que no pueden ni precisan ser demostradas, entonces la verdad es *a priori*. (FA §3 27)

Tal como se encuentra en la cita, la verdad se refleja en la prueba. La condición que debe cumplir una prueba para ser tomada como tal, es que la justificación se realice desde verdades evidentes por sí mismas que, a su vez conforman una prueba deductiva.

Ahora bien, en Frege, nos es posible marcar una diferencia entre analítico y *a priori*. Una verdad analítica se deriva junto con sus definiciones de las verdades generales de la lógica; mientras que una verdad *a priori* deriva de leyes generales. Las verdades *a priori* ni pueden ni precisan ser demostradas, no tiene porqué ser de carácter lógico. Entonces la diferencia entre analítico y *a priori* se establece como una diferencia de grado de generalidad, las verdades *a priori* son más generales que las analíticas y por ello, toda verdad analítica vendrá siendo por necesidad una verdad *a priori*, aunque no toda verdad *a priori* deba ser una verdad analítica (cf. Kenny 1997: 80).

En el caso de las verdades *a posteriori* no se puede establecer universalidad alguna aunque son consideradas como principios fundamentales y necesarios de la naturaleza de las cosas. Una verdad sintética se deriva junto con sus definiciones de las verdades de la ciencia particular; es *a priori* si la verdad se deriva de las leyes generales del campo específico y no hay necesidad de contrastarla con casos particulares, es *a posteriori* si no se puede establecer una validez para todos los casos, sino para ciertos objetos en ciertas circunstancias.

Lo que justifica las verdades *a priori*, es el hecho de que en la prueba se encuentren tanto pruebas deductivas como axiomas evidentes en sí mismos. Esto indica que toda prueba *a priori* debe iniciar su cadena deductiva desde verdades generales y evidentes por sí mismas, y que toda verdad diferente a esas axiomáticas deben ser demostradas dentro de un sistema deductivo bien formado.

Ahora bien, las definiciones kantianas de *a priori* y *a posteriori*, tienen en común con las definiciones fregeanas el hecho de ser distinciones epistemológicas. Pero son diferentes en un punto esencial, mientras que la definición kantiana se hace conforme a un origen puro o empírico del conocimiento, la definición fregeana se hace en términos de generalidad[19], siendo lo *a priori* lo más general y aplicable a todo lo que caiga bajo él, y lo *a posteriori* el conocimiento particular y difícilmente generalizable.

Otra gran diferencia entre las dos nociones es que mientras en la prueba fregeana de verdades *a priori* se encuentran verdades axiomáticas irreducibles y no definibles que se encadenan para formar una demostración; Kant considera que las definiciones de cualquier ciencia son construibles en la intuición pura, en el caso particular de la aritmética, en la intuición pura de tiempo. Estas pruebas son condiciones universales sólo en la medida en que son construibles de un modo determinado (cf. CrP A714/B742).

Kant cree que la lógica es una ciencia concluida y acabada desde los tiempos de Aristóteles (cf. CrP BVIII). La objeción a la noción kantiana de lógica, es precisamente lo que Kant entendía por ella. En palabras de los Kneale, la lógica adoptada por Kant no era más que una variedad confusa de elementos aristotélicos y estoicos. Estos elementos son usados por Kant para clasificar todo el conjunto de juicios del que somos capaces los seres humanos independientemente de su contenido en una tabla (CrP A70/B95):

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| *Cantidad de juicios* | *Cualidad* | *Relación* | *Modalidad* |
| Universales | Afirmativos | Categóricos | Problemáticos |
| Particulares | Negativos | Hipotéticos | Asertóricos |
| Singulares | Infinitos | Disyuntivos | Apodícticos |

[19] Este punto genera controversia porque se han encontrado algunos parágrafos posteriores al §3 de los Fundamentos de la aritmética, en donde parece que Frege, por lo menos respecto a las verdades *a posteriori* establece una relación en términos de experiencia sensible (cf. Burge, 2005b: 359; FA §63 87).

Los problemas de esta división se hacen evidentes cuando se concede que la simetría, el hecho de que a cada encabezamiento le corresponden tres especies, se supone esencial.

> (*a*) [Q]ue todo juicio puede ser emplazado en alguno de los tres casilleros en los que se divide cada uno de los cuatro encabezados, y (*b*) que cada uno de esos casilleros bajo un encabezamiento dado puede ser combinado en cada uno de los casilleros incluidos bajo los restantes encabezamientos. (Kneale 1972: 328-29)

De la afirmación de los Kneale podemos presentar dos ejemplos: 1. Intentemos construir un juicio hipotético negativo. 2. Demos un ejemplo de un juicio disyuntivo particular.

(1) ‘Si llueve, hace frio’.
(2) ‘Si no llueve, hace frio’.
(3) ‘Si llueve, no hace frio’.
(4) ‘No llueve, no hace frio’.

El problema del juicio hipotético radica en que si niego ya sea el antecedente (2) o el consecuente (3) el juicio no es negativo en su totalidad. En el caso en que niegue el juicio en su totalidad (4) éste no se podría considerar como hipotético, porque la relación de consecuencia entre el antecedente y el consecuente se pierde.

Respecto del juicio disyuntivo particular (5) ‘algún gato es atigrado o algún gato no es atigrado.’ no tiene sentido ubicarla como una relación posible, ya que al no poseer la disyunción completa un sujeto y un predicado, tal como lo pensaba Aristóteles, el juicio no es clasificable. De esto podemos decir que la división de los juicios en analíticos y sintéticos sólo comprende a los juicios categóricos afirmativos y universales.

Otra objeción que se le realiza a la clasificación kantiana de los juicios es la forma en la que se trata la modalidad (cf. CrP A75/B100). El problema es que, tal como lo pone Kant, la modalidad es una noción lógica que no tiene nada que ver con el contenido del juicio, el cual sólo se afecta por la cantidad, la cualidad, y la relación entre los términos.

Al afirmar que la modalidad es una noción lógica, Kant no distingue entre proposiciones de primer orden y proposiciones de segundo orden, sino que ve en la cópula del juicio un modo de relación con el pensamiento general (cf. CrP B100). Es decir, la representación de un modo del pensamiento enunciado como una instancia de otros dos modos sucesivos, la aserción y la necesidad (cf. Kneale 1972: 39). Con esto, Kant estaría afirmando del juicio (6) 'posiblemente mañana llegaré tarde' que yo (7) 'mañana llego tarde' para después poder afirmar necesariamente que (8) 'tenía que llegar tarde'. En este caso están interviniendo nociones psicológicas, epistemológicas y metafísicas en algo que se había definido como propio de la lógica. Es por esta irrupción de otros campos del saber en la lógica que no se puede entender el juicio: (9) 'posiblemente mañana llegaré tarde' como una proposición de segundo orden, que en vez de implicar momentos de mi pensamiento o hechos facticos, significa que es posible –respecto de lo que yo sé del asunto– que mañana llegue tarde.

Al objetar Frege la falta de exhaustividad kantiana en la distinción de los juicios analíticos y los juicios sintéticos (cf. FA §88 111), no dijo otra cosa más que las definiciones kantianas no accedían a todo el campo donde un juicio sintético o analítico se puede encontrar. La división kantiana sólo se da en virtud del juicio afirmativo universal, en el cual se puede hablar de un concepto de sujeto y preguntarse si el concepto de predicado está o no contenido en él desde su definición (cf. FA §88 111-12). Como hay casos en los que los juicios no son de la forma sujeto-predicado y aún así se puede decir de ellos que son analíticos o sintéticos, en virtud del tipo de leyes al que debamos acudir para su demostración y prueba, la distinción en términos de relación de sus conceptos –distinción lógica– es demasiado estrecha.

Frege no acepta la concepción kantiana de la naturaleza sintético *a priori* de la aritmética, *a fortiori*, la naturaleza sintético *a priori* de los juicios aritméticos. Sin embargo, Frege afirma que la clasificación kantiana de los juicios –juicios sintéticos *a priori*, juicios analíticos y juicios sintéticos– es válida. El conocimiento de un juicio analítico lo expresa la aritmética, el conocimiento de un juicio sintético lo expresa la experiencia particular, y el conocimiento de un juicio sintético *a priori* lo expresa la geometría.

A primera vista podemos decir que Frege y Kant coinciden al caracterizar la naturaleza de los juicios geométricos como sintéticos *a priori*. Con un examen más detallado de lo que cada uno entendía por intuición, el elemento legitimador de los juicios sintéticos *a priori* en

Kant, se verá que la coincidencia es una coincidencia terminológica que no permite equiparar los términos porque éstos no significan lo mismo.

A continuación, exponemos los problemas que conlleva suponer la forma pura de la intuición como garante de legitimidad de los juicios sintéticos *a priori*. La forma pura de la intuición es necesaria en el sistema kantiano, porque gracias a ella las representaciones particulares, lo que se nos da en la experiencia y lo que podemos aplicar a ella, son objetivas, universales y necesarias.

## 2. Problemas referentes a la definición kantiana de intuición

Kant y Frege coincidieron al determinar la naturaleza de la verdad de la geometría euclidiana y el fundamento de la ciencia espacial como sintético *a priori*. Frege dice que por esta coincidencia su uso de los términos kantianos se debe entender más como un ajuste de la definición que como una nueva definición. Ahora bien, el hecho de aceptar, al igual que Kant, que existe una ciencia sintética y *a priori*, es tan relevante como su mayor discrepancia: que todos los objetos deban ser dados por la sensibilidad a la intuición (cf. FA §89 112; Sluga 2013: 26%).

> Para no atraer sobre mí la acusación de hacer una crítica mezquina a un genio, al que sólo podemos ver con admiración agradecida, creo que estoy obligado a poner de relieve las coincidencias, que superan en mucho las discrepancias. Para referirnos sólo a lo que nos atañe más de cerca, Kant tiene el gran mérito de haber establecido la diferenciación entre juicios sintéticos y analíticos. Al calificar las verdades geométricas de sintéticas y *a priori*, reveló su verdadera naturaleza. (FA §89 113)

¿Cómo hemos de entender esta supuesta coincidencia entre Kant y Frege? Al aclarar el sentido en el que Frege acuña los conceptos kantianos de analítico, sintético, *a priori* y *a posteriori*, notamos que, aunque se use la misma terminología no es lo mismo una concepción kantiana de ciencia sintética *a priori*, y una concepción fregeana de una ciencia sintética *a priori*. Esta discrepancia se debe a la caracterización de la intuición que cada uno dio.

Recordemos que 'sintético' significa para Frege decir que un juicio no es derivable de la lógica, mientras que analítico significa que es derivable de la lógica. Ahora bien, respecto de los conceptos de *a priori* y *a posteriori*, aunque en los dos autores lo *a priori* corresponde con el conocimiento universal y necesario, y lo *a posteriori* con el conocimiento que se produce por la experiencia que no es universalizable más allá que por la probabilidad. Frege no acepta la explicación kantiana de que lo *a priori* es una imposición de la estructura de comprensión humana para representarse todo lo sensible (cf. Burge, 2005a/b). El conocimiento *a priori* es de tal modo que no necesita ni admite una prueba de sus verdades por ser ellos de máxima generalidad y evidentes en sí mismos. En Frege, el conocimiento *a priori* tiene como característica esencial el establecimiento de axiomas.

Una ciencia es sintética si sus leyes no son derivables de la pura lógica, una ciencia es *a priori* si sus teoremas son demostrables a partir de leyes generales –en el caso de la geometría los axiomas euclidianos–, y si en su prueba no se tiene que recurrir a nada que sea dado en o por la experiencia. El hecho de que las leyes generales sean *a priori*, no implica nada respecto de la aplicabilidad de sus conceptos en algún campo determinado; por ello una ciencia *a priori* puede ser analítica o sintética dependiendo de si sus conceptos son aplicables a un campo específico –los conceptos espaciales para el espacio, caso de la geometría–, o se refieren a todo lo pensable –axiomas y conceptos lógicos– (cf. Kenny 1997: 80; Burge 2005b: 377).

En el caso de la geometría, que es sintética *a priori*, sus axiomas son generales pero no son aplicables a algo que no se corresponda con el espacio, razón de ello es que no todo lo que concebimos es espacial. Por esto, pueden existir teorías en una misma ciencia internamente congruentes –cuando los axiomas no se contradicen entre sí para un campo específico–, pero mutuamente excluyentes –cuando de un campo se pueden formar dos teorías que internamente no se contradicen pero entre ellas sí–. Este sería el caso de las geometrías no-euclidianas con la euclidiana[20]. Por esta independencia entre los axiomas de una ciencia y

[20] Es sumamente interesante pensar que la geometría como ciencia sintética *a priori* es posible por medio de las definiciones fregeanas, aunque por geometría no se entienda sola y exclusivamente geometría euclidiana. Decimos que resulta interesante porque con la concepción de la geometría kantiana, no es posible pensar tres

las leyes primitivas de la lógica –o del pensamiento– es que la ciencia es considerada como sintética, y *a priori* si su prueba se reduce a los axiomas establecidos en el campo específico (cf. FA §26 57).

Ahora bien, para fundamentar la naturaleza sintética *a priori* de la matemática, Kant usa como recurso la intuición sensible pura. Por su parte, Frege no acepta en ningún momento que todo el fundamento de la naturaleza de la matemática sea sintético *a priori*. Él le admite a Kant que a cierto dominio de la matemática le corresponde dicha naturaleza, este dominio es el dominio de lo espacial, especialmente aquello que se conoce como espacio para el cual vale la teoría euclidiana de la geometría.

Lo primero que debemos decir es que Frege localiza en Kant dos definiciones de intuición: en la *Lógica*, y en la *Crítica de la razón pura*. Lo segundo, es que por el trato que da Frege a las dos definiciones de intuición se puede notar una superficialidad en su la lectura de Kant, ya que, siguiendo a Burge, Frege no nota la posibilidad de la intuición como facultad intelectiva y su diferencia con la intuición como facultad sensible pura[21] (cf. Burge 2005b: 375 n. 39).

Para Kant la intuición es tanto una facultad como un producto de la facultad. La intuición en general se caracteriza como una facultad que representa elementos inmediatos y singulares en el espacio y en el tiempo. La intuición pura es la facultad en sí misma considerada independientemente de aquello que está en la capacidad de representar, es decir, de todo contenido sensible. Ahora bien, la intuición puede ser tanto intelectiva –cuando se refiere exclusivamente a su ser puro– que no es posible para los seres humanos, o

geometrías distintas, mutuamente excluyentes, pero internamente coherentes. La creación y aparición de las Geometrías no-euclidianas en la primera mitad del siglo XIX provocó una profunda crisis no sólo en matemáticas sino en general en toda la teoría del conocimiento humano, por tanto la pregunta por el significado de 'verdad' en Matemáticas y en general, en el conocimiento tuvo que ser atendida (cf. Suárez 1984: 67).

[21] Consideramos que la 'lectura superficial' de las definiciones de intuición no minimiza la fuerza del argumento de Frege contra la intuición pura como elemento legitimador de los juicios sintéticos *a priori*. El argumento es: no todos los objetos son sensoperseptibles, la aritmética trata sobre objetos, no sobre conceptos, los conceptos aritméticos no son sensoperseptibles, la intuición no puede legitimar objetos que no nos sean dados por la intuición. Entonces, así Frege no haga la distinción rigurosa entre intuición intelectiva e intuición sensible, el problema se mantiene, porque el problema es la legitimación de los juicios aritméticos en la intuición sensible.

sensible –cuando los elementos que representa son dados en el espacio y en el tiempo–. Por ello es que la intuición sensible siempre está relacionada con la sensibilidad (cf. Burge 2005b: 375).

Frege, al igual que Kant, considera que los humanos sólo podemos hacer uso de la intuición como intuición sensible, es decir, intuición y sensibilidad siempre deben estar relacionadas. La superficialidad que señala Burge en la lectura fregeana de la intuición kantiana se remite a que Frege parece confundir la intuición intelectiva con la intuición sensible sin notar el hecho de que el mismo Kant admite que toda intuición posible para los seres humanos es la que tiene una conexión profunda con la sensibilidad.

Ahora bien, en la definición de la *Lógica* se hace referencia a la intuición como una representación singular en oposición al concepto que es una representación general. En la *Crítica de la razón pura* se establecen los elementos que caen en la facultad, y la pureza de la intuición se interpreta como el esquema común a todas las mentes humanas por el cual es posible percibir elementos sensibles; lo que no nota Frege es que incluso en CrP Kant dice de la intuición que, aunque es un producto puro de la sensibilidad le corresponde como característica fundamental el dar representaciones objetivas inmediatas y singulares.

> Todo nuestro conocimiento, esto es, todas las representaciones consientes que se refieren a un objeto, son intuiciones o conceptos. La intuición es una representación individual (*repraesentatio singularis*), el concepto es una representación general (*repraesentatio per notas comunes*) o reflejada (*repraesentatio discursiva*). (A139/ 521,L §1 62%)[22]

En esta definición vemos que intuición y concepto parecen ser opuestos, mientras el concepto es una "representación general o una representación de lo que es común a muchos objetos" (A139/ 521, L §1 n.1 62%), la intuición sólo representa objetos particulares.

---

[22] En la edición que usamos de *Los fundamentos de la aritmética* (§12 40)el traductor no presenta la correspondencia entre la edición de Kant que usa Frege con la edición de la *Academia*. Frege utiliza la segunda edición completa de Kant editada por Hartenstein (1867-69). Nosotros damos la paginación de la Academia de las ciencias de Berlín y el parágrafo y porcentaje de la edición de Kindle que usamos. Para encontrar la correspondencia entre las distintas ediciones hemos utilizado los *Kant-Seitenkonkordanz* (1970). Para la traducción se cotejó con la edición para Kindle de R. S. Hartman y W. Schwarz. All cognitions, that is, all presentations consciously referred to an object, are either *intuitions* or *concepts*. Intuition is a *singular* presentation (*repraesentatio singularis*), the concept is a *general* (*repraesentatio per notas comunes*) or *reflected* presentation (*repraesentatio discursiva*). (L §1 62%)

En este sentido es que Frege nos dice que 100.000 puede ser una intuición, según la definición que Kant presenta en la *Lógica* (FA §12 40). Que 100.000 sea una intuición es un problema porque significa que la intuición sólo refiere a objetos particulares, impidiendo que se pueda, a partir de ella, establecer leyes generales aplicables a todos los casos, por tanto queda en entredicho su estatuto de ciencia *a priori*, según la definición fregeana.

Además, con estas definiciones de intuición y concepto, podemos entender lo que es un concepto o cómo se forma: un concepto es la representación de aquello que es común a los objetos que caen bajo él. A una noción tal de concepto, Frege le objeta que es uno de los modos menos fructíferos de formar conceptos, ya que con ello sólo se usa lo que ya ha estado delimitado, entonces el concepto no es un concepto nuevo, sólo es la agrupación de ciertas características ya establecidas. La explicación de la noción kantiana de concepto Frege la propone desde una imagen geométrica:

> Si representamos los conceptos (o sus extensiones) por medio de áreas de una superficie, al concepto definido por características asociadas le corresponde el área que es común a todas las áreas de las características definidas; aquella está delimitada por segmentos de las líneas fronterizas de éstas. En una definición semejante se trata, pues –para hablar figuradamente– de utilizar las líneas ya dadas de una manera distinta para la delimitación de un área. Pero en tal caso no surge nada esencialmente nuevo. Las definiciones conceptuales más útiles son las que marcan líneas fronterizas que aún no habían sido trazadas en absoluto. (FA §88 112)[23]

El error de Frege es no notar que en CrP la intuición también se caracteriza en términos de singularidad y en algunos casos de inmediatez (cf. CrP A320/B376-7), entonces la objeción de la *Lógica* también resulta aplicable a la intuición tal como se presenta en CrP. Cuando no se realiza la conexión entre sensibilidad e intuición, se habla, según Kant, de la postulación de la posibilidad de la intuición como facultad del puro intelecto, aunque esta facultad, como no necesita de la sensibilidad, no es posible para las mentes humanas (cf. Burge 2005b: 375 y n. 39). Entonces no es que la definición en la *Lógica* sea más estrecha o no tenga en cuenta la conexión de la intuición con la sensibilidad, sino que Kant allí hablaba de la intuición pura del intelecto. Aunque en todo caso, es esencial a la noción

[23] Para entender esto damos la definición geométrica del concepto 'intersección de dos circunferencias'. Ir al anexo de imágenes.

kantiana de intuición poder representar con objetividad las representaciones singulares, por tanto la objeción de Frege respecto a la generalidad de las fórmulas aritméticas es válida.

Ahora bien, la intuición sensible de la que somos capaces los seres humanos posee a su vez una especie de pureza. Esta pureza es la estructura de la facultad sin tener en cuenta los contenidos sensibles que se reciben, ya sea de la experiencia o que se producen en la imaginación. La estructura de la intuición sensible son dos formas puras que nos permiten recibir cualquier elemento sensible, estas formas son la representación de elementos en el espacio y en el tiempo.

> Él cree sin embargo que nosotros tenemos la capacidad de la intuición pura del espacio. Él cree que la geometría euclidiana está de alguna manera basada en el ejercicio de esta capacidad. Como Kant, Frege asocia la capacidad de la intuición pura con la sensibilidad (…) –la capacidad de tener experiencia sensorial. (Burge 2005b: 376)

Entonces la definición que toma Frege como segunda expresa la relación entre la intuición y la sensibilidad, por lo que puede servir como principio de conocimiento de los juicios sintéticos *a priori* geométricos (cf. CrP A19/B33; FA §13 40) y se encuentra más cercana a lo que él admitía como intuición.

> La capacidad (receptividad) de recibir representaciones gracias a la manera como somos afectados por objetos, se llama **sensibilidad**. Por medio de la sensibilidad, entonces, nos son dados los objetos, y sólo ella nos suministra *intuiciones* (…) Todo pensar, empero, debe referirse en último término, sea directamente (*directe*) o por un rodeo, por medio de ciertas características, (*indirecte*), a intuiciones, y por tanto, en nuestro caso, a la sensibilidad; porque ningún objeto nos puede ser dado de otra manera. (CrP A19/B33)

La distancia radical entre los autores respecto a la noción de intuición es que mientras Kant la consideraba como garante de objetividad de las representaciones inmediatas, singulares o particulares, porque es una estructura común en la mente humana; Frege veía la particularidad de la intuición como algo accesorio que no otorga objetividad alguna, siendo sintética porque se refería a leyes espaciales, y *a priori* porque de los axiomas geométricos –que aunque tenían que ver con la experiencia– se desprendía toda la prueba del juicio de la ciencia.

Para Frege la intuición del espacio no es objetiva (cf. FA §26 53) en la medida en que no podemos saber si distintos hombres se representan el espacio de la misma manera. De lo que sabemos de la intuición espacial no podemos llegar a afirmar que las relaciones geométricas (proyectivas) sean vistas por dos hombres distintos de igual modo.

> [E]l estar tres puntos en una recta, cuatro puntos en un plano, etc.; para el uno podría aparecer como plano lo que el otro intuye como punto, y viceversa. Lo que para uno sería la línea de conexión entre dos puntos, sería para el otro la línea de intersección de dos planos (…) siempre en correspondencia dual. Entonces, podrían entenderse muy bien entre sí y no se darían cuenta nunca de la diferencia de sus intuiciones. (FA §26 53-4)

Además, Frege comenta que todo aquello que sea puramente intuitivo no es comunicable, entonces lo *a priori* u objetivo de la ciencia espacial no recae en la inmediatez o singularidad de la intuición, como sí lo piensa Kant. Lo objetivo es todo aquello que se puede comunicar por medio de juicios, todo aquello que se puede conceptualizar y afirmar. Lo judicativo de la geometría es aquello que aparece como regular a la experiencia espacial, las leyes sintéticas *a priori* geométricas son algo así como leyes de la regularidad que se presenta en la naturaleza.

Kant caracteriza la intuición como una representación objetiva en contraste explicito con representaciones subjetivas (cf. CrP A320/B376-7). Las leyes, los axiomas y los juicios de la matemática son válidos objetivamente sin necesidad de recurrir a la subjetividad del individuo. Porque la estructura de la mente que intuye bajo las formas del espacio y el tiempo es común a todos los seres humanos. Esta estructura es independiente y anterior a toda experiencia sensible. Al ser así, la forma pura de la intuición sirve como garante de que aquello que se percibe de modo inmediato sea un conocimiento objetivo y universal.

Kant postula que la intuición es el elemento que otorga legitimidad a todo juicio sintético *a* priori. Porque en ella todos los juicios y conceptos son construibles. Frege entiende por intuición aquello que es opuesto al concepto, es decir todo lo que es particular, y singular del conocimiento.

Para Kant lo objetivo se representa particularmente en la intuición. Para Frege lo objetivo de la intuición no es su particularidad o forma de representación. Lo objetivo de un juicio aritmético no es ni cómo llegamos a tener que ‘7 + 5 = 12’ es verdadero, ni qué necesitamos para construir el juicio. En el caso de los juicios aritméticos, y de todos los juicios, lo objetivo, universal y necesario es que sabemos cuál es el valor de verdad del juicio, el afirmar verdadero de ‘7 + 5 = 12’, o el afirmar que la negación es verdadera ‘7 + 5 ≠ 8’. Si la legitimidad del juicio se encuentra en la prueba de su verdad y no en cada representación particular, la justificación no depende de si el objeto se da o no en la intuición. Por lo que no hay necesidad de que todos los objetos que existen sean objetos reales[24]. Una característica que Frege adjudica a los objetos, independientemente a su realidad efectiva, es que de ellos se pueden predicar verdades. Por ello todo juicio que contiene una verdad es un juicio acerca de objetos.

> Distingo lo objetivo de lo que es palpable, espacial o real. El eje terrestre, el centro de masas del sistema solar, son objetivos, pero no quisiera llamarlos reales, como lo es la Tierra misma. Es frecuente llamar al Ecuador línea *imaginaria*, pero sería falso llamarlo línea *inventada*; no ha nacido en el pensamiento, no es el resultado de un proceso anímico, sino que sólo ha sido conocido, aprehendido por el pensamiento. (FA § 26 53)

La geometría es una ciencia sintética *a priori*, pero la legitimidad de su conocimiento no descansa en la relación universal y necesaria que otorga la intuición espacial, por lo que no puede ser al modo de concepción kantiano de sintético *a priori*. La legitimidad de la ciencia espacial radica en que la prueba de sus juicios se puede realizar de tal manera que se garantiza la objetividad y verdad del juicio o enunciado. Es *a priori* porque la geometría tiene axiomas válidos para desarrollar sus teoremas. Es sintética porque su dominio se limita; los axiomas euclidianos valen para el espacio euclidiano, los axiomas de la geometría hiperbólica no valen para el espacio euclidiano, pero sí para un espacio que tiene curvatura negativa y que el V postulado de los *Elementos* es negado.

Hablemos un poco de la intuición pura de tiempo. Ya dijimos que en ningún momento de su vida Frege llegó a considerar la intuición pura de tiempo como elemento legitimador de

[24] Decimos reales en un sentido físico. Así una mesa es real mientras que un número no lo es. Porque de las mesas tenemos información sensitiva, podemos predicar de ella propiedades empíricas, sabemos qué tan alta es, podemos diferenciar sus materiales, su color y su densidad. En el caso de los números no podemos predicar ninguna propiedad empírica, aunque logremos notar que ellos poseen distintas propiedades. En este sentido los números primos tienen propiedades distintas a los números cuyo cubo es un número natural positivo. En ninguno de los casos se puede conceder que ‘ser un número primo’ y ‘ser un número cuyo cubo es un número natural positivo’ sean predicados reales.

los juicios aritméticos. ¿Por qué? Porque Frege considera que si Kant justifica los juicios aritméticos en la intuición pura de tiempo, entiende el concepto de número como la variación en el tiempo de una magnitud (cf. QF 657, 161). El problema de pensar el concepto como la variación es que toda variación se aplica a procesos temporales. La aplicación a procesos temporales no viene al caso para la aritmética pura –algebra y análisis–.

Los números no expresan magnitudes variables porque un número determinado, por ejemplo el número 2, no es un número variable. El 2 tiene propiedades determinadas que no cambian respecto al tiempo. La variabilidad de una magnitud no es la variabilidad de un número, es la variabilidad del objeto en tiempos diferentes. El cambio de un objeto a través del tiempo se puede representar con números distintos, porque las propiedades del objeto han cambiado, pero esto no implica que el número 2 cambie conforme a la magnitud del objeto para volverse el número 3.

> El 1.000 no se ha inflado para convertirse, por así decirlo, en 1.001, sino que ha sido reemplazado por este último. ¿O es el número 1.000 el mismo que el 1.001, sólo que con otra expresión en el rostro? Si algo varía, tiene entonces, una tras otra, diversas propiedades, estados del mismo objeto. Si no fuera el mismo, no tendríamos ningún sujeto del que pudiéramos decir que ha variado. (…) Un hombre envejece; pero si, dada la circunstancia, no pudiéramos reconocerlo como el mismo, no tendríamos nada de lo que pudiéramos decir que envejece. ¡Apliquemos esto al número! ¿Qué continúa siendo lo mismo cuando un número varía? ¡Nada! Se sigue entonces que el número no varía en absoluto. (QF 658, 162)

Las magnitudes se predican del cambio de los objetos en el tiempo, las propiedades de los números no cambia respecto del tiempo, así que la magnitud no es un predicado válido de los números. El número como expresión de lo variable de un objeto es una de tantas aplicaciones que puede hacer la aritmética de sus objetos. Ello no significa que su naturaleza se deba justificar desde una aplicación particular.

Según Kant, la intuición pura de tiempo da cuenta de la construcción de conceptos aritméticos si éstos expresan una magnitud ya sea pequeña o grande. Según esto, se podrían dividir los números en números de magnitudes pequeñas y números de magnitudes grandes, pero ¿cuál sería el criterio en una división tal? Como esta pregunta no tiene una respuesta, es dudoso que la división de los números en números con magnitudes pequeñas y números con magnitudes grandes sea correcta. La explicación de los números como magnitudes implica el recurrir a la intuición pura de tiempo y a la intuición sensible. Porque todo cambio tiene en consideración el tiempo –agregación de momentos sucesivos– y a los objetos sensibles en los que se pueda representar este agregado. Los dedos de la mano, puntos o líneas en un plano (cf. CrP B5).

Ahora bien, supongamos que la intuición de tiempo da cuenta de la legitimidad del juicio ‘7 + 5 = 12’ porque es gracias a la imagen que me hago de la adición empírica por la que sé que al sumar 7 y 5 es 12. Pero ¿qué sucede con números de ‘magnitudes’ exorbitantes, ejemplo 736.689? Cómo puedo representarme imágenes de este número y de qué me sirve la intuición en un juicio ‘379.897 + 457.892 = 837.789’. Hay otra pregunta problemática, ¿de qué parte Kant para establecer una diferencia entre números pequeños y números grandes en CrP B5? ¿Los números naturales hasta el nueve se pueden considerar pequeños, y de ahí en adelante como números grandes?

Si las fórmulas aritméticas se definen como construcciones particulares de n-números, la totalidad de los números debería tener características únicas. Pero de ellos sabemos cosas que no son específicas para un solo número, como por ejemplo ‘x · 1 = x’ si x es un número natural diferente de 0, o que todo número primo es divisible por 2. Entonces no es verdad que la definición de número tenga que ser una definición particular y especial para cada número.

*  *  *

En este capítulo hemos expuesto los problemas que conlleva la concepción de los juicios aritméticos como sintéticos *a priori*. Nuestra exposición se divide en dos secciones. En la primera presentamos cinco objeciones que se plantean a la clasificación kantiana de los juicios en tres tipos. En la segunda sección del capítulo exponemos dos cosas: la supuesta concordancia entre Kant y Frege en la definición de la naturaleza del juicio geométrico; La diferencia en la noción de intuición entre los dos autores.

Las cinco objeciones del primer capítulo tienen que ver tanto con la comprensión de lógica de Kant como con la definición de los conceptos de analítico y sintético desde las relaciones entre los conceptos gramaticales en el juicio. Estas objeciones son propuestas por filósofos de la lógica y la matemática. Para nuestros fines hemos compilado las críticas a la concepción sintética *a priori* de Gottlob Frege, y los Kneale.

La primera de las objeciones tiene que ver con la diferencia entre una definición lógica y una definición epistemológica para la división de los juicios en analíticos y sintéticos. La segunda objeción se refiere a la insuficiencia de los conceptos gramaticales sujeto-predicado para la explicación de las relaciones entre los términos de cualquier juicio. La tercera objeción tiene que ver con los errores que comete Kant por su noción de lógica. La cuarta objeción se refiere al papel que cumple la modalidad en el sistema kantiano. La quinta objeción es sobre la falta de exhaustividad de las definiciones kantianas para la distinción de cualquier juicio como juicio sintético *a priori*, juicio analítico y juicio sintético.

En la segunda sección exponemos la concordancia terminológica en la caracterización de la geometría hecha por Kant y Frege. También presentamos las implicaciones que constituye la aceptación de la intuición como elemento legitimador de los juicios. Para Kant la intuición formal de tiempo es suficiente para legitimar los juicios aritméticos, porque por medio de la estructura pura y objetiva de la mente humana, el juicio particular de la aritmética –juicio acerca del cambio de magnitudes variables– se puede establecer como universal y necesario. Frege le objeta a Kant que los números no pueden ser magnitudes o no pueden tener como predicados magnitudes, porque ellos no varían conforme al tiempo. Un número determinado mantiene sus propiedades, si en algún momento se le atribuye una nueva propiedad al número 2, no es en razón del tiempo transcurrido, sino de la demostración para justificar la nueva propiedad del número. Esto quiere decir que, para Frege todo conocimiento aritmético es un conocimiento por descubrimiento.

En el siguiente capítulo exponemos la posibilidad del juicio analítico como juicio informativo desde la postulación de una nueva forma válida para el análisis de todos los juicios: el análisis desde los conceptos de función y argumento. El análisis desde los conceptos de función y argumento sustituye al análisis de los juicios desde los conceptos gramaticales de sujeto y predicado.

# Anexo de imágenes

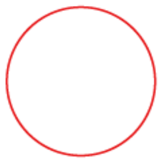
Imagen 1

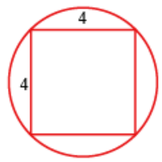

Imagen 2

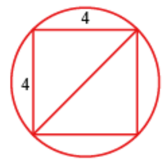

Imagen 3

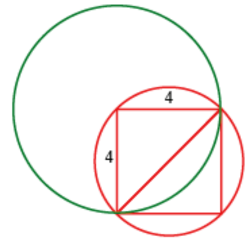

Imagen 4

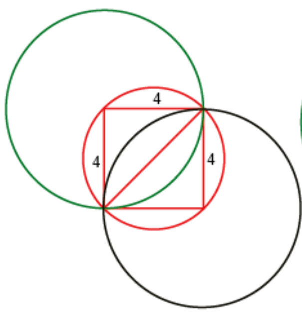

Imagen 5

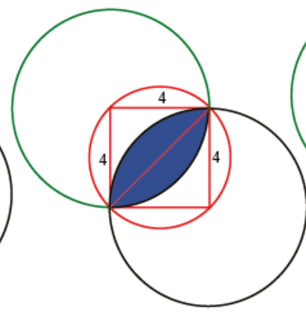

Imagen 6

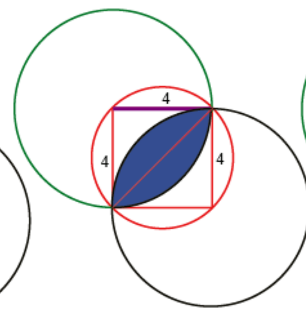

Imagen 7

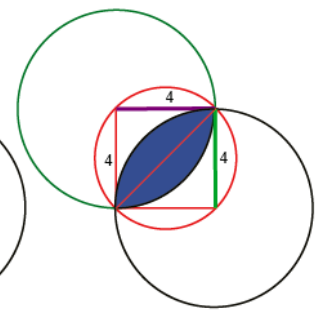

Imagen 8

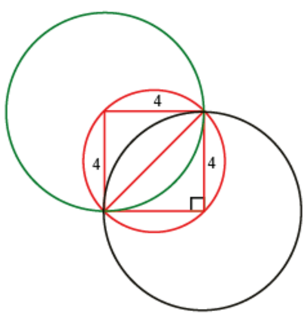

Imagen 9

$$A(\square) = \; l^2 = \; 4*4 = \; 16A(\circ) = \pi * r^2$$
$$r(\circ_{azul}) = r(\circ_{negro}) = 4$$
$$A(\circ_{azu})l = \; \pi * 4^2 = 16\pi$$
$$A(\circ_{negro}) = \; \pi * 4^2 = 16\pi$$
$$rebanada{:}\frac{1}{4}circulo$$
$$A(rebanada_{negra}) = A(rebanada_{azul}) = \frac{1}{4}A(\circ) = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$
$$A(rebanada_{azul}) + A(rebanada_{negra}) = A(\square) + A(intersección)$$
$$A(intersección) = A(rebanada_{azul}) + A(rebanada_{negra}) - A(\square)$$
$$A(intersección) = 4\pi + 4\pi - 16$$
$$A(intersección) = 8\pi - 16$$

# Capítulo tercero
# La concepción analítica de la aritmética según Frege

> Parafraseando una sentencia famosa, podríamos decir: el objeto propio de la razón es la razón. En la aritmética nos ocupamos de objetos que no nos vienen dados desde fuera, como algo extraño, gracias a la mediación de los sentidos, sino que son dados directamente a la razón, la cual los puede contemplar como lo más propio de sí misma.
> Y con todo, o mejor dicho, precisamente por esto, no son estos objetos fantasías subjetivas. No hay nada más objetivo que las leyes aritméticas.
>
> FA §105, 124-5

Gottlob Frege sostiene que la naturaleza del juicio aritmético es analítica. El objetivo de este capítulo es exponer la justificación fregeana de la naturaleza del juicio aritmético. Para llevar a cabo nuestro cometido hemos dividido nuestro capítulo en dos secciones. En la primera, llamada ‘Un nuevo análisis de los juicios aritméticos’, exponemos el análisis de los juicios desde los conceptos lógicos argumento y función. En ‘Juicios aritméticos que no requieren de la intuición’, la segunda sección exponemos las definiciones fregeanas del concepto general de número, el número 0, y la serie numérica desde nociones meramente lógicas.

## 1. Un nuevo análisis de los juicios aritméticos

La sustitución de la pareja de conceptos gramaticales sujeto y predicado por la pareja de conceptos lógicos argumento y función es de vital importancia tanto para la lógica como para la investigación sobre la naturaleza de los juicios aritméticos. Gottlob Frege fue el primero en proponer dicha sustitución en su trabajo de 1879, la *Conceptografía*. La propuesta de un nuevo análisis que explicara las relaciones entre los componentes de todos los juicios nace de la inadecuación que presenta el lenguaje natural para los fines científicos (cf. C prólogo 3). Un análisis en términos de argumento y función provee una herramienta para hacer una explicación clara de los juicios con cuantificadores, y explica las distintas formas en que se relacionan los objetos y los conceptos entre sí. Con la invención del nuevo cálculo lógico Frege pudo construir un diálogo entre la matemática y la filosofía (cf. Sluga 2013: 27%)

Para Frege un juicio es tanto la captación de un pensamiento como su aseveración. Es decir, el juicio es el medio por el cual se acepta un pensamiento como verdadero y se lo asevera (cf. Il 2005f: 201, 171). La estructura del juicio la proporcionan los conceptos lógicos de argumento y función y que la estructura del lenguaje es una guía para mostrar las relevancias lógicas que se presentan en el pensamiento. El problema es que todo lo que sea irrelevante para la justificación de la aseveración del juicio no puede presentarse en la estructura del lenguaje, por tanto ese aspecto del pensamiento no se representa (cf. Potter 2010: 14)

Siempre que hablemos de juicios, por lo menos en Frege, significa que estamos aceptando que el pensamiento que se expresa es verdadero y que en él se expresa lo relevante para la inferencia. En el caso de juicios como ‘7 + 5 = 8’ que son falsos, se expresa que la negación del juicio es verdad, es decir ‘7 + 5 ≠ 8’ (cf. Kenny 1997: 79 y n. 1). Entonces, lo relevante para la inferencia es si el juicio es verdadero o no.

Aquello que presentamos en el título como nuevo análisis, corresponde en terminología fregeana, al análisis según los conceptos lógicos de argumento y función. Este análisis nace de la inadecuación de la diferencia gramatical entre sujeto y predicado[25], que es a su vez se

[25] Es verdad que Frege usa los conceptos de sujeto y predicado en su análisis, pero en ningún momento con el mismo sentido que tienen los conceptos gramaticales sujeto y predicado. El sujeto y predicado fregeano son conceptos lógicos. En donde el predicado se entiende como la función no-saturada que se completa por

refiere a la inadecuación que presenta el lenguaje natural con los fines científicos. La distinción gramatical sujeto-predicativa revela particularidades interesantes de los juicios. Aunque estas particularidades tienen un mayor efecto lingüístico que lógico. Pensemos en dos juicios de la forma sujeto y predicado e intentemos resaltar las consecuencias lógicas del análisis:

(1) Lev Tolstói escribió *Guerra y Paz*[26].

(2) *Guerra y Paz* fue escrita por Lev Tolstói.

Lingüísticamente podemos decir que estos dos juicios son diferentes entre sí, aunque parece que el contenido que expresan no es esencialmente diferente. Ahora bien, lo primero que notamos es que en los dos juicios se puede establecer tanto un sujeto como un predicado. Decimos que los juicios difieren porque el sujeto y el predicado en (1) no se corresponde con el sujeto y el predicado en (2). En (1), el sujeto es 'Lev Tolstói' y el predicado es 'escribió *Guerra y Paz'*. Mientras que en (2), el sujeto es '*Guerra y Paz*'y el predicado es 'fue escrita por Lev Tolstói'.

Otra diferencia entre los dos juicios en términos de sujeto y predicado es que la forma del verbo que encontramos en el predicado de los juicios es diferente. Por ello el análisis del predicado del juicio cambia en (1) y (2). El verbo que se encuentra en el predicado (1) 'escribió', es un verbo activo cuya acción la realiza el sujeto 'Lev Tolstói' para el objeto '*Guerra y paz'*. Por otro lado, el verbo que se encuentra en el predicado (2) 'fue escrita', es un verbo pasivo, lo que indica que la acción recae en el sujeto '*Guerra y Paz'*. En el último caso 'Lev Tolstói' es el objeto y hace parte del predicado (cf. Kenny 1997: 29). Estas distinciones son importantes porque según la forma pasiva o activa del verbo, el hablante puede influir en la percepción del juicio del oyente. Estas diferencias, nos dice Frege, no tienen implicaciones lógicas ya que sólo presenta distintas formas en las que el mismo contenido del juicio puede ser presentado por el hablante al oyente.

---

argumentos –nombres completos– que cumplen el papel de ser sujetos (cf. CO 194-5, 125-6). Más adelante veremos que los conceptos, tal como los entiende Frege, son predicativos.

[26] De aquí en adelante usamos los números arábigos –(1), (2), (3)… – para indicar un juicio. Las letras minúscula –(a), (b), (c)… – para indicar una función no-saturada. Las letras minúsculas en cursiva –(*a*), (*b*), (*c*)… – para indicar un argumento.

El sentido[27] de los juicios (1) y (2) no cambia[28]. La prevalencia del sentido en distintos juicios es lo que Frege llama contenido conceptual de un juicio, es la validez del contenido conceptual lo que es relevante para las inferencias tanto lógicas como aritméticas. De la inadecuación del lenguaje natural y la distinción gramatical entre sujeto y predicado Frege se dio cuenta prontamente, así nos dice:

> [e]n el primer esbozo de un lenguaje de fórmulas me dejé llevar por el ejemplo del lenguaje ordinario, componiendo los juicios con sujeto y predicado. Pero pronto me persuadí de que esto era contrario a mi propósito y de que sólo conducía a prolijidades inútiles. (C §3 7).

Veamos la ventaja que nos presta el análisis de los juicios desde los conceptos de argumento y función para la prueba. Frege define función y argumento en C §9, esta nueva forma de análisis permite un mejor método para determinar la validez del juicio en la prueba. Una función es una expresión incompleta, no–saturada, un componente fijo del juicio; mientras que un argumento es todo aquello que puede variar o puede ser reemplazado en la función:

> Si *en una expresión* (...), *aparece un símbolo simple* o compuesto *en uno* o más *lugares, y* si lo pensamos como *reemplazable en todos o en algunos de* estos lugares *por algo distinto, pero siempre por lo mismo, entonces a la parte de la expresión que aparece sin cambio la llamamos función y a la parte reemplazable, su argumento*. (C §9 14).

Retomemos nuestro juicio (1) 'Lev Tolstói escribió *Guerra y Paz*.' Analicémoslo bajo los conceptos de función y argumento –como la función del juicio es aquello que se mantiene como fijo e insaturado–; y el argumento de una función es aquello reemplazable en ella. Las funciones y los argumentos que se presentan en nuestro análisis del juicio (A) pueden ser:

[27] La importante y bien conocida diferencia entre sentido y referencia no se encuentra en los dos primeros trabajos de Frege, *la Conceptografía* y *los Fundamentos de la aritmética*. Esta distinción es válida tanto para nombres propios –argumentos– (SR), como para conceptos (CO) y expresiones declarativas (FC). La primera aparición de la distinción entre sentido y referencia la propuso Frege para las expresiones declarativas (cf. FC 3, 55).

[28] Para entender la diferencia entre el sentido y la referencia de un juicio podemos decir que el sentido de un juicio se toma como el pensamiento que expresa el juicio; la referencia del juicio se toma como su valor de verdad (cf. Potter 2010: 16). De esto podemos decir que lo relevante en todo juicio que se analiza por los conceptos de argumento y función no es el pensamiento, que se puede presentar de múltiples formas, sino su referencia, los valores de verdad a los que remita.

| | |
|---|---|
| (a) 'Lev Tolstói escribió... | (a) *'Guerra y Paz'* |
| (b) '... escribió *Guerra y Paz'* | (b) 'Lev Tolstói' |
| (c) '...escribió...' | (c) 'Lev Tolstói...*Guerra y Paz'* |

La diferencia entre las funciones[29] (a) y (b) con (c) es que en los dos primeros casos necesitamos un solo argumento para saturar o completar la función. Este tipo de funciones se llaman funciones de primer orden. El caso (c) necesita dos argumentos para saturarse, toda función que presente dos o más espacios para ser saturada se conoce como una relación, si en la relación sólo damos un argumento, necesita otro argumento para ser completada, por ejemplo el argumento (*b*) para la relación (c) resulta la función (a) 'Lev Tolstói escribió…'. (a). Lo mismo sucede si damos el argumento (*a*) para la relación (c), en cuyo caso resulta la función (b) 'escribió *Guerra y Paz'*. A su vez, (b) requiere otro argumento para ser saturada.

Las relaciones pueden ser funciones de primer orden o funciones de segundo orden. Una función se considera función de segundo orden si el elemento que la satura no es un argumento sino otra función. Las funciones de segundo orden son de suma importancia para nuestro trabajo, ya que los números, la relación de existencia y el uso de los cuantificadores –todo y alguno– pertenecen a este tipo especial de función.

Por ahora veamos cómo podemos saturar las funciones de primer orden. Los argumentos que saturan la función pueden ser (*a*) para (a), (*b*) para (b) y (*c*) para (c). En nuestro ejemplo los argumentos que presentamos para cada función son adecuados para que el

[29] Las funciones son predicados en un sentido lógico. Los estudiosos de Frege han tratado de identificar qué es un predicado expresiones simples, esquemas, funciones lingüísticas, o propiedades de los juicios (Oliver 2010: 119-121). En este trabajo adoptamos la posición de Alex Oliver: Mientras que otros autores argumentan por distintos candidatos, yo propongo que no hay nada que elegir entre ellos. Cualquiera sirve: cada uno es igualmente útil (…) La elección entre alguno de ellos se puede hacer de manera arbitraria, o, cuando el contexto lo requiera, se puede dejar sin hacer. Traducción propia de: Whereas other authors argue for different candidates, I propose that there is nothing to choose between them. Anything goes: each is equally serviceable (…) The choice between them can be made arbitrarily, or, when the context allows, it can be left made. (Oliver 2010: 122)

valor del juicio no cambie. Introduzcamos otros dos argumentos (*d*) '*Cien años de Soledad*', y (*e*) '*Ana Karenina*'. ¿Qué sucede cuando saturamos nuestra función (a)?

Si el argumento para la función no-saturada (a) es (*d*) '*Cien años de Soledad*', tenemos que el juicio (3) 'Lev Tolstói escribió *Cien años de Soledad*', no es verdadero y se diferencia del juicio (1) 'Lev Tolstói escribió *Guerra y Paz*'. La diferencia no se da por el contenido del juicio como tal, sino, porque el valor[30] del juicio (3) no es el mismo que el valor del juicio (1). Existe un *x* que efectivamente escribió *a*, pero *x* no es el mismo que escribió *d*. Si reemplazamos el argumento (*e*) en la función (a) nos queda el juicio (4) 'Lev Tolstói escribió Ana Karenina'. Este nuevo juicio no tiene ninguna diferencia en cuanto al valor del juicio (1) en la función (a) para el argumento (*a*), ya que en los dos casos el valor para los dos enunciados es verdadero[31].

En terminología de la *Conceptografía* debemos decir que el enunciado o juicio (1) es el valor de la función (a) para el argumento (*a*), y el juicio (3) es el valor de la función (a) para el argumento (*d*) (cf. Kenny 1997: 30-1). Ahora bien, el análisis de los juicios se piensa en Frege bajo la dicotomía de expresiones saturadas o no–saturadas. A este respecto María José Frápolli y Ester Romero resaltan dos cosas importantes: "1. No hay diferencia entre la estructura y la forma de significar de las expresiones matemáticas y las del lenguaje natural y 2. Todas las expresiones significan, en cierto sentido, de la misma manera."(Frápolli 2007: 50)

¿Por qué no hay diferencia entre la estructura del análisis de los juicios del lenguaje natural y los juicios de la matemática? Porque así como en el lenguaje natural podemos analizar los juicios según la forma de argumento y función, también lo podemos hacer en la aritmética. Es más, el análisis según éstos conceptos es propio de la última ciencia mencionada (cf. FC 13-4, 62-3).

[30] Valor del juicio significa el valor de verdad del juicio. "[A] sentence has a Truth-value only if each of its constituents has *bedeutung* its to state part of a regulative ideal that, Frege thinks, guides scientific research".

[31] Es peligroso usar los conceptos de verdadero y falso cuando estamos hablando de conceptos propios de la *Conceptografía*. Porque los conceptos de verdad y falsedad están ausentes en este trabajo. En la descripción, de lo que podríamos llamar las conectivas veritativo-funcionales, Frege sólo habla de proposiciones que son afirmadas o negadas, no de unas que son verdaderas o falsas. Esta primera caracterización de las conectivas veritativo-funcionales hace que en la *Conceptografía* se vislumbre un rastro de psicologismo (cf. Sluga 2013: 28%). Esta crítica también la expone A. Kenny en *Introducción a Frege*: 45.

En la aritmética tenemos diversas funciones, recordemos que la condición para ser función es ser una expresión no-saturada. Entonces funciones de la aritmética son: la adición ‘(x) + (x)’; la sustracción ‘(x) – (x)’; la exponenciación ‘$(x)^2$’; la ecuación ‘$2 \cdot (x)^3 + (x)$’ entre muchas otras. Los argumentos aritméticos son los numerales, y como lo muestra la función, el argumento no le pertenece. Así, para todas las funciones antes escritas podemos poner los numerales 3, 4, 5 o cualquier numeral que se nos ocurra. Los argumentos adecuados para la función conforman un todo, una expresión completa. Las expresiones completas las llama Frege nombres (cf. Frápolli 2007: 50).

Si damos los argumentos adecuados para las distintas funciones, tenemos que un mismo nombre se expresa en funciones distintas. Así, para la función ‘$(x) + (y)$’, damos los argumentos 7 y 11; para la función ‘$(x) – (y)$’, damos los argumentos 20 y 2; para la función ‘$(r)^2$’, damos el argumento 9; para la función ‘$2 \cdot (x)^3 + (x)$’, damos el argumento 2. Entonces la expresión saturada ‘(7) + (11)’, es un nombre del número 18; la expresión saturada ‘(20) – (2)’, es un nombre del número 18; la expresión saturada ‘$(9)^2$’, es un nombre del número 18; la expresión saturada ‘$2 \cdot (2)^3 + (2)$’, es un nombre del número 18. El número 18 es el valor, en este caso, para todas las funciones saturadas que se completan con los argumentos particulares que dimos.

En el ejemplo anterior quisimos dar distintos numerales –argumentos– para que al completarse la función, aquello que se representa tuviese el mismo nombre y el mismo valor. El nombre es la expresión completa, no la función, y el valor del nombre es el número que indica. En el ejemplo ‘(7) + (11)’ el valor de la función ‘(x) + (x)’ es 18 cuando los argumentos son 7 y 11. Ahora es claro por qué los numerales o argumentos no son propios de las funciones. Si quisiéramos dar los mismos argumentos para funciones distintas, 7 y 5 para las funciones relacionales, 5 para las funciones con un solo espacio, aunque todas las funciones sean válidas, el nombre de cada función será distinto, así como su valor: ‘(7) + (5) = 12’; ‘(7) – (5) = 2’; ‘$(5)^2 = 25$’; ‘$2 \cdot (7)^3 + (5) = 691$’.

A la lógica le importa la aseveración del contenido conceptual, esto quiere decir que a la lógica le interesa si el juicio es o no válido. Para que un juicio sea válido en la inferencia, este debe mantener su valor de verdad. Entonces siempre y cuando los juicios que se expresan por la saturación de argumentos distintos en las funciones posean el mismo valor de verdad, los juicios son reemplazables en la prueba. Este reemplazo de los juicios se da, en la aritmética por medio del signo '=', 'el mismo que'[32]. Esto quiere decir que si los argumentos 7 y 5 presentan el mismo valor para la función '(x) + (y)' que el que presentan los argumentos 6 y 2 para la función '(x) · (y)', a saber 12, las funciones saturadas son reemplazables en una prueba sin alterar el valor de esta. Aunque no se puede negar que el cambio de expresiones altera un poco el modo de presentación del pensamiento o sentido del juicio.

(5) '[(7) + (5)] = (12) = [(6) · (2)]'

En este ejemplo se ve claramente que, aunque las dos funciones saturadas presentan diferentes argumentos, el valor de la función no varía y, por tanto, podemos afirmar la igualdad:

(6) '(7) + (5) = (6) · (2)'

Así como en las expresiones del lenguaje podemos diferenciar funciones de primer orden, relaciones y funciones de segundo orden, en las expresiones aritméticas nos es posible realizar la misma distinción. Esta distinción se da gracias a que el lenguaje natural y la aritmética pueden ser analizadas según una misma estructura. Una función de primer orden con un argumento puede ser '$(x)^2$'o '(7) + ($x$)'. Una función de primer orden relacional puede ser '($x$) + ($y$)' o '($x$) · ($y$)'. Una función de segundo orden es la igualdad, en dicha relación, cada lado se puede saturar con una función de primer orden. Una función de segundo orden puede ser '($x$) + ($x$) = ($z$) · ($r$)' o '(7) + (x) = ($r$) – ($z$)'. En donde su valor de

[32] El estudio de la igualdad lo hace Frege en "Sobre Sentido y Referencia". El ensayo inicia preguntándose por el valor cognoscitivo de juicios del tipo $a = a$ que en todos los casos son necesariamente verdaderos y *a priori*, por tanto son juicios analíticos en el sentido kantiano; el valor cognoscitivo de juicios del tipo $a = b$ que no tiene por qué ser necesariamente verdaderos y *a priori*, los juicios de este tipo son entendidos por Kant como juicios sintéticos, que aunque aumentan el conocimiento al establecer relaciones nuevas entre los términos de ellos no se puede saber si son necesariamente verdaderos –sintéticos *a priori*– o solamente expresan verdades circunstanciales –sintéticos *a posteriori*–. En este escrito Frege concluye que si bien los juicios analíticos $a = a$ no informan nada nuevo a la ciencia, los juicios de la forma $a = b$ también se pueden considerar como juicios analíticos, en cuyo caso 1. Son informativos. 2. Son generales y universalmente necesarios. El error kantiano es que por la definición de los conceptos por los cuales se puede clasificar un juicio, su noción de juicio analítico es muy estrecha y no alcanza a determinar qué es lo que se dice mediante el signo '=' en aritmética. Ahora bien para determinar lo que expresa el signo '=' hay que determinar la interpretación adecuada de la expresión 'es el mismo que' (cf. Frápolli 2007: 56).

verdad sólo es conocido cuando el argumento, lugar señalado por la *x* adquiere un argumento (cf. FC 13, 63).

Las funciones de primer orden toman como argumentos términos singulares, esto significa que se refieren a un objeto[33]. Como ya vimos, las funciones pueden saturarse con otras funciones, lo cual permite una jerarquización. Las funciones que se completan con otra función son funciones de segundo orden y, son más generales porque indican la relación entre conceptos que refieren un mismo objeto o valor de verdad. Las funciones de segundo orden son lo que le permite a Frege abordar el análisis tanto de los cuantificadores, todo y alguno, como de la existencia.

El análisis de los componentes del juicio como componentes gramaticales con la forma sujeto-predicativa es insuficiente para dar razón de lo que sucede cuando aparecen términos como lo son ‘todos’, ‘algunos’, ‘algún’, entre otros. El análisis de los componentes de los juicios con la forma argumento-función dan cuenta de lo especiales que son estos conceptos. Esto se aclara al comparar juicios en donde se encuentren términos singulares con juicios donde se encuentre un cuantificador o término general.

(5) ‘Héctor Parra es alto.’

(7) ‘Alguien es alto.’

De los dos juicios si los analizamos bajo los conceptos gramaticales de sujeto-predicado, sintácticamente podemos decir que son similares. Los dos presentan un sujeto, en un caso ‘Héctor Parra’ en el otro ‘alguien’; los dos juicios atribuyen un adjetivo que es el predicado a su sujeto por medio de la cúpula es, ‘alto’ a ‘Héctor Parra’ en (6), ‘alto’ a ‘alguien’ en (7). Ahora bien, en ningún momento el análisis gramatical da cuenta de la diferencia entre la particularidad que expresa (6) y la generalidad que expresa (7). Si se le aplica un análisis lógico-semántico las propiedades de (6) y (7) son distintas. La primera propiedad que no comparten los dos juicios es que su contradictorio no se puede construir de la misma manera.

(8) ‘Héctor Parra no es alto.’

[33] De acuerdo con Frege un objeto no tiene por qué ser sensoperseptible o intuitivo.

(9) ‘Alguien no es alto.’

Los juicios (6) y (8) son contradictorios[34] entre sí, cosa que no pasa entre los juicios (7) y (9). Si la negación de los juicios (8) y (9) se encuentra en el mismo lugar, antes de la cópula ‘es’ ¿Por qué el juicio (9) no es el juicio contradictorio de (7)? Antes de responder nuestra pregunta podemos complicar un poco más el asunto. De la conjunción de (6) y (10) se sigue (11).

(10) ‘Héctor Parra es blanco.’

(11) ‘Héctor Parra es alto y blanco.’

Mientras que de la conjunción de (7) y (12) no se puede seguir (13). Aunque (13) puede ser un juicio verdadero así como (7) y (12).

(12) Alguien es blanco.

(13) Alguien es alto y blanco.

A nuestra pregunta anterior ¿por qué el juicio (9) no es el juicio contradictorio de (7)? Podemos sumarle otra. ¿Cuál es la diferencia entre las expresiones ‘Héctor Parra’ y ‘Alguien’? Ya que parece que el análisis lógico entre los juicios difiere gracias a estas expresiones.

‘Héctor Parra’ es una expresión saturada, por tanto es un nombre o argumento que denota un objeto particular. ‘Alguien’ no es una expresión saturada o nombre porque no denota un objeto particular, por tanto es una función de la cual se puede predicar algo, es predicable. Entonces, mientras que en el juicio (6) ‘Héctor es alto’, encontramos la función (d) ‘… es alto’. Y la podemos completar con un argumento como (*g*)[35]‘Héctor Parra’. En el juicio (7)

[34] Que un juicio sea la contradicción de otro juicio significa que si el primer juicio es verdadero, el segundo no puede serlo. Esto sucede con los juicios ‘Héctor Parra es alto’ y ‘Héctor Parra no es alto’; si aceptamos que el primero es verdadero no podemos aceptar que el segundo lo sea, así como si aceptamos que el segundo es verdadero no podemos aceptar que el primero lo sea. En los juicios como ‘Alguien es alto’ y ‘alguien no es alto’ no se cumple la condición de que si el primer juicio es verdadero el segundo no pueda serlo. En este caso, posiblemente los dos juicios son verdaderos. No se presenta contradicción porque la verdad del primero no excluye la verdad del segundo ya que lo que se presenta por medio de la palabra ‘alguien’ no es un nombre propio, sino un concepto.

[35] No usamos intencionalmente las letras f y *f* .

‘alguien es alto’, la función (d) no se satura por un argumento como (*g*), sino que se satura por una función que a su vez admite un argumento como (*g*).

Así pues, lo que dicen juicios como (7), (9), (12) y (13) es que los conceptos ‘ser una persona alta’, ‘no ser una persona alta’, ‘ser una persona blanca’ y ‘ser una persona alta y blanca’ respectivamente no son conceptos vacíos, por lo menos un objeto cae en ellos (cf. CO 199, 131).

Los cuantificadores siempre que aparecen en un juicio no se toman como nombres sino como conceptos que expresan que hay por lo menos un objeto –o todos, según sea el caso– que sirve como argumento para la función, pero que en ese caso –del juicio con cuantificador– no es un objeto concreto sino un concepto que expresa generalidad. Ahora sabemos porqué el juicio (9) no es contradictorio con el juicio (7), porque la negación del predicado gramatical no es suficiente para la negación de la totalidad del juicio que contiene un cuantificador. Para dar la contradicción de un juicio de segundo orden como lo es (7) ‘Alguien es alto’ debemos negar aquello que indica la generalidad o el concepto del juicio y no sólo el predicado. La contradicción del juicio (7) es (14) ‘Nadie es alto’[36]. Para concluir esta sección sólo nos falta examinar la existencia como función de segundo orden.

Todo análisis de la existencia que se exprese en los términos gramaticales de sujeto y predicado caerá por necesidad o en una contradicción[37] o en una redundancia[38]. “El sujeto de una oración representa el sustrato del que se predica la propiedad expresada por el predicado.” (Frápolli 2007: 55) Esto quiere decir que siempre que el juicio sea verdadero o falso, el sujeto tiene que representar algo en relación con el predicado. Si analizamos la

[36] Frege conecta su análisis de cuantificadores con el análisis de los números como juicios de segundo orden en §53 de *Los fundamentos de la aritmética* al manifestar que una afirmación de la existencia no es más que la negación del número 0 (cf. Frápolli 2007: 55), es decir la negación de la totalidad. Por tanto, decir que un concepto es vacío, no es más que decir que al concepto del cual se está predicando no le corresponde ningún objeto.

[37] Caso en el que la existencia del sujeto es negada. ‘El circulo cuadrado no existe’.

[38] Caso en el que la existencia del sujeto se afirma. ‘Aristóteles existió realmente’.

oración[39] (I) desde los términos gramaticales de sujeto y predicado, caemos en lo que a veces se conoce como "paradoja de la existencia" (cf. Frápolli 2007: 56).

(I) 'El círculo-cuadrado no existe.'

En el lugar del sujeto se debería encontrar un objeto, en este caso 'el círculo-cuadrado' del que se predica que 'no existe'. Es contradictorio, porque para que la oración tenga sentido se necesita que el sujeto 'el círculo-cuadrado' permanezca de alguna manera sin importar que lo que se predica de él es su no-existencia. Las expresiones u oraciones negativas de existencia en el análisis tradicional son contradictorias, ¿qué pasa con las oraciones afirmativas?

(II) 'Aristóteles existió realmente.'

Si el sujeto gramatical indica un objeto del cual predicar algo, con la afirmación del sujeto basta para saber que existe. Entonces la oración (II) 'Aristóteles existió realmente' es semánticamente redundante y en nada informativa. En el análisis fregeano de la existencia se evita tanto la "paradoja de la existencia" para las oraciones negativas, como la redundancia para las oraciones afirmativas. Para que del caso (I) 'El círculo-cuadrado no existe' pueda decirse que es verdadero o falso, sin caer en una contradicción, se debe aplicar el análisis de las funciones de segundo orden postulado por Frege. La existencia es una función de segundo orden. En las funciones de segundo orden, el predicado –en este caso 'existe' admite como argumentos otros predicados. El análisis de (I) como juicio (15) 'el circulo-cuadrado no existe' vendría siendo que el predicable '…ser un círculo y ser un cuadrado en el mismo tiempo y en el mismo espacio' no se predica de nada[40], por tanto el predicado 'no existe' es un concepto vacío en el cual no cae ningún objeto, porque no hay objeto alguna que cumpla su propiedad. Según lo anterior, podemos decir que:

[39] Una Oración se diferencia de un juicio en la medida en que en una oración no se asevera el pensamiento sino que simplemente se expresa, por tanto de ella no se dice que sea verdadera o falsa. Las oraciones las indicamos con notación romana.

[40] La diferencia entre predicado y ser predicable es que mientras el predicado siempre se hará de objetos particulares, el predicable es predicado de un objeto sin que el objeto se determine, es decir es una función que sólo se puede saturar con otra función y no con un argumento (cf. Frápolli 2007: nota 8.)

(15) ‘El círculo-cuadrado no existe.’

Es un juicio verdadero porque no hay un objeto tal como ‘el círculo-cuadrado’, por tanto en el predicable ‘…un objeto tal que es círculo y cuadrado en el mismo tiempo y lugar’ es vacío, nada cae bajo el concepto.

Para el caso en el que al afirmar la existencia de una oración es una redundancia (II) ‘Aristóteles existió realmente’, el análisis fregeano sería de la siguiente manera. Hay por lo menos un objeto que cumple las características asociadas al nombre ‘Aristóteles’. Las características asociadas al nombre se revelan si del nombre se dan descripciones como ‘el discípulo de Platón y maestro de Alejandro Magno, escritor de la *Metafísica* y fundador de la silogística’. Entonces la afirmación de existencia nos diría que para el nombre ‘Aristóteles’ hay un objeto, y sólo uno, que cumple con las características de la conjunción de conceptos ‘el discípulo de Platón, Maestro de Alejandro Magno, escritor de la *Metafísica*, fundador de la silogística’, así el concepto que se afirma no es vacío.

En filosofía, el análisis de la existencia en términos de argumento y función es sumamente importante y provechoso, porque gracias a su aplicación se pueden diferenciar los predicados que le corresponden a un objeto, cuando la saturación de una función se cumple por medio de un argumento; y los predicados que le corresponden a conceptos, cuando la saturación de una función se satisface con otra función. El propio Frege se da cuenta de esta aplicación de su análisis al resaltar los problemas que tiene la prueba ontológica de la existencia de Dios propuesta por san Anselmo.

> La afirmación de la existencia, no es, en efecto, sino la negación del número 0. Porque la existencia es una propiedad del concepto, la prueba ontológica de la existencia de Dios no alcanza su objetivo. Pero igual que la existencia, tampoco la unicidad es una característica del concepto de «Dios». La unicidad no puede usarse para la definición de este concepto, del mismo modo que la solidez, la comodidad y la habitabilidad de una casa no pueden utilizarse en su construcción, junto con piedras, argamasa y vigas. (FA §53 77)

Ahora bien, para pasar al tema de los juicios aritméticos que no requieren de la intuición para ser considerados como juicios objetivos e informativos. Tenemos que examinar qué entiende Frege por objeto y por concepto[41]. Ya Hemos utilizado estas dos palabras, concepto y objeto. Decíamos que los objetos son indicados por los nombres –expresiones saturadas– en el lenguaje; decíamos que los conceptos son indicados por predicados, funciones de primer o segundo orden que refieren a valores veritativos (Oliver 2010: 118). En el primer caso necesitan ser saturadas con un argumento; en el segundo caso deben ser saturadas con una función y no con un argumento. El valor de toda función saturada es un objeto, el objeto puede ser un objeto físico 'Miguel Ángel' cuando el juicio es (16) 'Miguel Ángel toma café todos los días a la misma hora', o un objeto abstracto 'Ana Karenina' para el juicio (17) 'La novela escrita por Lev Tolstoi publicada por primera vez en 1877 es extensa.', en este último caso el valor del juicio es lo Verdadero o lo Falso (cf. SR 35, 44 / 94, 104-5).

Frege postula que lo Verdadero y lo Falso como objetos abstractos son el valor de verdad que indica cualquier juicio. Todos los juicios pueden ser divididos entre los juicios que tienen como valor de verdad Lo Verdadero, y los juicios que tienen como valor de verdad Lo Falso. Por ello, en el lenguaje, el juicio (17) y el juicio (18) expresan el mismo valor de verdad y pueden ser sustituidos en una prueba aunque varíe su contenido particular.

(17) '(7) − (5)' = '(6) ÷ (3)'

(18) 'La capital de Colombia es Bogotá y '(2) · (2) = (4)'

[41] María José Frápolli y Ester Romero resaltan el hecho de que cuando hablamos de objetos y conceptos, hablamos de la realidad y no del lenguaje. Según ellas esto tiene implicaciones en la ontología fregeana, "el lenguaje es un fiel reflejo de la realidad, aunque la realidad no se reduce, en este caso, al mundo físico." (Frápolli 2007: 57). Si el lenguaje es un reflejo de la realidad, lenguaje y realidad comparten la misma estructura. Que dos cosas compartan la misma estructura implica que las categorías y distinciones que se realizan en el análisis de uno valen, en sentido estricto, para el otro. El análisis de los juicios revela la dicotomía exhaustiva saturado/no-saturado. En donde lo saturado se corresponde o con los argumentos que son completos por sí solos o en los nombres que son las funciones –de cualquier tipo– saturadas; el nombre de una función indica un valor que, en algunos casos, es un objeto particular y, en otros, un valor de verdad. Así como encontramos esto en el análisis del lenguaje, al analizar la realidad debemos encontrar los mismos elementos y distinciones. En la realidad, que no se limita al mundo físico o perceptible, todas las entidades son o saturadas o no-saturadas. Las entidades saturadas son objetos, son representados en el lenguaje por medio de nombres. Las entidades no-saturadas son funciones, estas son representadas en el lenguaje por los *functores* –funciones–. Como en el lenguaje todo lo que no es *functor* es argumento o nombre, en la realidad todo lo que no es función es un objeto. Las funciones son entidades abstractas, los objetos pueden serlo o no. Esto quiere decir que hay objetos que no son necesariamente sensibles, ejemplo de ello es el 'eje de la tierra', 'la línea del ecuador' que se reconocen como objetos, porque están completos pero no son reales, en sentido físico (cf. FA §26 53).

Frege caracteriza los conceptos de una forma especial. Los conceptos, entendidos como entidades no lingüísticas, no son entidades psicológicas que se presentan gracias a que los hombres los piensan. Los conceptos son entidades objetivas que no dependen de la mente humana (cf. Frápolli 2007: 59-60), por eso, más que crear objetos, los descubrimos (cf. FA §88 112).

En CO Frege nos dice que las palabras se usan de distintos modos, incluso la palabra ‘concepto’. En este ensayo se establecen tres modos distintos de usar la palabra ‘concepto’. “[U]nas veces en un sentido psicológico, otras en un sentido lógico y otras quizás en una mezcla poco clara de ambos.” (CO 93, 123) El problema no es usar ‘concepto’ de un modo psicológico, de un modo lógico o de modo tal que sea la mezcla de ambos; el problema es decir que se va a usar la palabra ‘concepto’ de un modo y no restringirse a ese uso. El uso que le dará Frege a ‘concepto’ es un uso lógico, el cual implica que el concepto es predicativo. Un objeto no se puede usar como predicado, porque el objeto es por sí mismo saturado, él no necesita de nada para ser completo. Las relaciones entre objetos y conceptos pueden ser de tres tipos, dependiendo del papel que tenga la partícula ‘es’ en el juicio.

i. Decimos que algo cae bajo un concepto, y el predicado gramatical se refiere a ese concepto. (19) ‘Yann Tiersen es músico.’ Primero, el objeto es ‘Yann Tiersen’. Segundo, el concepto[42] es ‘*ser músico*’. Tercero, el objeto ‘Yann Tiersen’ cae bajo el concepto ‘*ser músico*’. Entonces lo que se dice es que al objeto ‘Yann Tiersen’ le pertenece el atributo que expresa el concepto ‘*ser músico*’.
ii. Un concepto puede subordinarse a otro concepto. Para que un concepto se subordine a otro, todos los objetos que tengan la propiedad del primero tienen la propiedad del segundo. (20) ‘Los músicos son artistas’.
iii. Un concepto puede caer bajo otro de orden superior. (21) ‘el concepto *a priori* es difícil de adquirir’. En donde el concepto de segundo orden *a priori* cae bajo el concepto ‘es un concepto difícil de adquirir’. Esto significa ‘ser un concepto difícil de adquirir’ es una propiedad, un predicable, del concepto *a priori*. (cf. Frápolli 2007: 60).

[42] En este caso el predicado gramatical y el concepto coinciden.

De lo anterior nos debe quedar claro que siempre que hablemos de juicios, debemos diferenciar si en ellos se está predicando algo acerca de objetos, funciones de primer orden, o si se está predicando algo acerca de conceptos, funciones de segundo orden. Tengamos en cuenta que la única relación posible en la que se encuentran los objetos con los conceptos es en el caso (i), mientras que se pueden encontrar dos tipos de relación conceptual (ii) y (iii). El análisis de los cuantificadores, la existencia y los números caen sobre el segundo caso de las relaciones conceptuales, y el valor de los juicios, en dicho caso siempre será o lo Verdadero o lo Falso.

Los componentes de todo juicio son o argumentos o funciones. Estos componentes del lenguaje se hacen extensivos a la realidad. Entonces todo lo que existe puede ser clasificado o como un argumento que es saturado, un objeto; o una función, functor o concepto que necesita ser saturado. Así como en el lenguaje todo lo que no sea una función es un argumento, en la realidad todo lo no sea un concepto es un objeto. Como lo veremos en el siguiente apartado, los números se emplean en el lenguaje como argumentos y son en la realidad objetos. Aunque son objetos que no necesitan ser sensorialmente perceptibles para poseer realidad objetiva, universal y necesaria. La condición de ser universales y necesarios es dada por la deducción de los principios y teoremas matemáticos de la lógica. Si se acepta lo anterior, se debe admitir que la naturaleza de la aritmética, *a fortiori* de sus juicios es analítica. Porque el juicio se legitima desde axiomas y leyes lógicas, que como sabemos por el segundo capítulo, para Frege, poseen máxima aplicabilidad –su dominio es el pensamiento– y son necesariamente *a priori*. Para explicar la naturaleza analítica del juicio aritmético debemos presentar la definición de serie numérica y de los números particulares de 0 y 1.

## 2. Juicios aritméticos que no requieren de la intuición

En esta sección exponemos la definición del concepto de número, y la definición del número 0. Entendemos que para deducir todos los teoremas y postulados aritméticos se deben realizar las definiciones no sólo de 0, también de 1, y de la serie numérica. Por cuestiones de extensión en este trabajo no presentamos dichas definiciones, sólo las mencionamos. Para que las definiciones sean analíticas deben hacerse desde conceptos lógicos. Esta exigencia implica una restricción a los ejemplos del lenguaje natural.

Para afirmar que los juicios aritméticos son analíticos y aun así informativos, Frege debe demostrar dos cosas: que los axiomas y leyes que permiten definir tanto el concepto de número general como los números particulares y la serie numérica son axiomas y leyes lógicos; que existen objetos que son independientes a la experiencia. Para la justificación de que la referencia de todo juicio aritmético particular como '7 + 5 = 12' es un objeto substantivo que puede ser conocido, Frege debe mostrar la posibilidad de la existencia de objetos que no son sensoperseptibles (cf. Kneale 1972: 422).

Al desplegar las definiciones de número y serie numérica, Frege encuentra que los únicos términos que quedan sin definir son nociones de la lógica formal. El lenguaje aritmético en términos de números naturales es reducible a un lenguaje lógico de conjuntos, clases o multiplicidades. En lógica cuando hablamos de conjuntos, clases y multiplicidades nos referimos a las extensiones de conceptos (cf. Kneale 1972: 417). Si las definiciones de los números naturales se logran reducir a leyes y axiomas lógicos, es posible reducir la aritmética de orden superior.

En la introducción de *Los fundamentos de la aritmética*, Frege establece tres principios que debemos tener presente si queremos entender su investigación por los fundamentos de la aritmética:

> *Hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo; el significado de las palabras debe ser buscado en el contexto de todo el enunciado, nunca en las palabras aisladas; Hay que tener siempre presente la diferencia entre concepto y objeto.*(FA introducción: 20)

El primer principio se satisface con la sustitución de los conceptos gramaticales de sujeto y predicado por los conceptos lógicos de argumento y función. El segundo principio impide que el valor veritativo o el significado de un juicio se tome como el significado de sus argumentos o por el significado de sus funciones; éste debe tomarse por la totalidad del juicio. El tercer principio alerta sobre la confusión entre concepto y objeto, la confusión entre un predicado lógico o entidad abstracta y un nombre lógico que puede ser abstracto o factual.

En *Los fundamentos de la aritmética* §52-3 Frege niega tanto que el número sea un predicado de objetos ya sean físicos o mentales, como que sea predicado de lo temporal y eterno desde el análisis de la particularidad del número 0. Tanto en aritmética como en el lenguaje natural tiene sentido usar el signo 0. Pero ¿qué significa este signo? El número 0 corresponde al concepto vacío. Como ya habíamos visto la existencia es un concepto de segundo orden, lo que quiere decir que es un predicado de conceptos. Si 0 hace parte de los números naturales, y su afirmación es la negación de la existencia de los objetos que caen bajo un concepto, el 0 es un concepto de segundo orden, como es un número natural, los números naturales son conceptos de segundo orden que expresan que hay objetos que caen bajo ellos, siempre y cuando el número sea diferente a 0.

Antes de explicar la definición de Frege del concepto general de número, que, como ya vimos, tiene que ver con la aserción de existencia de objetos que caen bajo conceptos. Vamos a decir algo acerca del principio de identidad de los indiscernibles[43], planteado por Leibniz.

> Si dos individuos fuesen perfectamente semejantes, iguales, y, en una palabra, *indistinguibles* por sí mismos, no habría principio de individuación; me atrevo a decir incluso que entonces no habría distinción individual, o individuos diferentes en ese supuesto. (Nuevos Ensayos II, XXVII, 3)

El principio de identidad de los indiscernibles es sumamente importante, porque si él se llegase a negar, la afirmación de que sólo existe una substancia sería verdadera. Ahora bien ¿Por qué es importante para Frege el principio de los indiscernibles? Porque, por este

[43] Frege acepta el principio de identidad de los indiscernibles leibniziano. Podemos encontrar una estrecha conexión entre las reflexiones lógicas y matemáticas de Leibniz por una parte, y su filosofía de la substancia, por la otra (cf. Copleston 1971: 275). Por ello, aunque el principio de identidad de los indiscernibles está pensado para la substancia, podemos aplicarlo para la distinción de unidades. Aún más significativo es lo que dice al respecto B. Russell, la diferencia de los indiscernibles se basa en la distinción numérica que de ellos se puede hacer (Russell 1900: 59).

principio, Frege logra dar la definición del concepto de número general (cf. Kenny 1997: 103). La identidad de los indiscernibles radica en que las unidades como tal son idénticas, pero podemos diferenciarlas a cada una como individual. Así, ante el juicio ‘la carroza es tirada por 4 caballos’ decimos que lo que expresa el 4 es la afirmación de existencia de 4 unidades distintas que caen bajo el mismo concepto ‘caballo’. Estamos aseverando que al concepto ‘caballos que tiran la carroza’ le corresponden objetos que según sus atributos son distinguibles, pero como objetos que caen bajo un concepto son idénticos (Kneale 1973: 427).

Entonces podemos decir que el contenido de un juicio aritmético es una aserción sobre un concepto (cf. Kenny 1997: 105). Decir que el contenido de un juicio aritmético es una aserción sobre un concepto no justifica la naturaleza del juicio aritmético. Para justificarla debemos presentar la definición lógica del concepto general de número. En FA §55 Frege comienza la investigación por el concepto general de número desde tres definiciones particulares: el número 0, el número 1 y el incremento en 1.

1. A un concepto le corresponde el número 0, cuando, sea lo que sea *a*, vale con toda generalidad, el enunciado de que *a* no cae bajo *F*.
2. A un concepto *F* le corresponde el número 1, cuando, sea lo que sea *a*, no vale con toda generalidad el enunciado de que *a*, no cae bajo *F*, y cuando de los enunciados «*a* cae bajo *F*» y «*b* cae bajo *F*» se sigue con toda generalidad que *a* y *b* son el mismo.
3. Al concepto *F* le corresponde el número (n + 1) cuando existe un objeto *a* que cae bajo *F* y tal que al concepto «cae bajo *F*, pero no *a*», le corresponde el número *n*. (cf. FA §55 81)

Estas tres definiciones que, en principio, parecen ser acertadas y parecen definir la noción de número como la relación entre conceptos y objetos tiene dos problemas. Los dos problemas son producto de supuestos psicológicos. El primero permite que a los conceptos les correspondan números como *Julio César*, es decir, objetos de un tipo diferente a los que son los números[44] (cf. FA §56 82; Kenny 1997: 106-7).El segundo problema es que la identidad numérica ‘1 = 1’ ‘5 + 7 = 12’ no se puede justificar, como la gran mayoría de las relaciones en aritmética son identidades –ya se expresen con números determinados o con

[44] Si tenemos en cuenta el título de la primera sección, cada número es un objeto independiente, del cuarto capítulo de los *Fundamentos de la Aritmética*, podemos aceptar que los números particulares son objetos, aunque aún no lo hemos presentado las razones para suponerlo.

números indeterminados–, las definiciones dadas no justifican la validez de los juicios aritméticos.

> [P]ero, mediante nuestras definiciones, nunca podremos decir –para dar un ejemplo burdo– si a un concepto le corresponde el número *Julio César*, ni si este famoso conquistador de las Galias es un número o no. Además con el auxilio de nuestros intentos de definición, no podemos demostrar que debe ser $a = b$, cuando al concepto $F$ le corresponde el número $a$ y cuando al mismo le corresponde el número $b$ (…) y así sería en general imposible probar una igualdad numérica, porque nunca podríamos concebir un número determinado. (FA §56 88)

Las tres definiciones de Frege no sirven para determinar qué es un número y diferenciarlo de aquello que no es. Pero, sí presentan el sentido de expresiones como «el número 0 pertenece a», es decir, sirven para clarificar el sentido de un concepto de segundo orden (cf. Kenny 1997: 109). Los números no son predicados de conceptos, aunque un número $n$ le pertenece a un concepto, el predicado del concepto no es el número $n$, sino el hecho de que el número $n$ le pertenece. Así, nos resulta más claro entender la afirmación de la existencia y de la unicidad.

Decimos que un concepto tiene la propiedad de la existencia, si un objeto cae bajo él, esto es lo mismo a decir que el número 0 le pertenece. Un concepto tiene la propiedad de la unicidad, si además de la propiedad de la existencia tiene un solo objeto que cae bajo él, le pertenece el número 1. Entonces ¿qué son los números? Un número es un objeto independiente a la realidad física y mental del hombre. Es un objeto porque el número se comporta en los juicios aritméticos como lo hacen los nombres en el lenguaje natural.

(A) ‘7 + 5 = ($x$)’. (B) ‘<u>Dante</u> es un gato’

El guion bajo en (B) representa en el lenguaje natural, la $x$ en los juicios aritméticos. Un número determinado es susceptible de ser el sujeto de un contenido judicable –valor veritativo–. Ejemplo de ello es la forma en la que se puede expresar el juicio (A). ‘12 es la suma de 7 y 5’ (cf. Kenny 1997: 112).

Para Frege, la característica fundamental de un objeto es que posea una identidad capaz de ser reconocida una y otra vez. Como ya dijimos, en la aritmética se presentan juicios de identidad, entonces lo que se encuentra a cada lado relacionado debe ser un objeto, porque el signo '=' reconoce una identidad. En los juicios aritméticos '(x) = 2(x)' el '=' es la función y (x)…2(x) son los argumentos. La identidad requiere de un criterio que justifique que los objetos que se ponen en relación son idénticos o diferentes. Así que, si encontramos el criterio, para aplicar el principio de identidad en los juicios aritméticos, encontramos la definición de número como objeto independiente. Para la definición del criterio de identidad Frege adopta una idea humeana (FA §62 86).

> Estamos en posesión de un criterio preciso para juzgar la igualdad y proporción de los números, y según estos correspondan o no a dicho criterio determinamos sus relaciones, sin posibilidad alguna de error. Cuando dos números están combinados de modo que uno tenga siempre una unidad correspondiente a todas y cada una de las unidades del otro, los declaramos iguales. (THU, I, III, I, 71; FD 129)

La igualdad numérica la trata Frege como identidad numérica. De esto, Frege establece la posibilidad de definir la identidad por la correlación uno-a-uno o relación biunívoca[45] entre las unidades. Entonces, para la identidad numérica: "[e]l número que pertenece al concepto *F* es el mismo que el número que pertenece al concepto *G* si todos los elementos que caen bajo *F* pueden ser puestos en correlación de uno-a-uno con todos los elementos que caen bajo *G*." (Kenny, 1997: 114) Pongamos un ejemplo de nuestra vida diaria.

Supongamos que en un salón de clases cada estudiante toma su pupitre antes de entrar al salón. Con esto basta para saber que en el salón se encuentra el mismo número de niños y pupitres sin necesidad de contar niños o pupitres. Esto resulta verdadero siempre y cuando se cumpla la condición de que cada niño tome su pupitre antes de ingresar al salón. Esta idea simple de correlación uno-a-uno propuesta por Hume y usada por Frege cumple la condición *salva veritate* postulada por Leibniz para identificar los indiscernibles. "Dos cosas son respectivamente iguales si una de ellas puede ser sustituida por la otra sin pérdida de la verdad."[46] (FA §65 89)

[45] La noción de relación biunívoca es anterior a cualquier noción aritmética, y no hay necesidad de que para establecerla se deba recurrir a contar la cantidad de objetos que se presentan. Para estar seguros de una relación biunívoca entre dos conjuntos sólo se debe suponer una condición para que a cada objeto de cada conjunto le corresponda un solo objeto del conjunto que no es él mismo (cf. Kenny 1997: 119).
[46] La cita está en *Losfundamentos de la aritmética* en el idioma original, el cual es latín. *Eadum sunt, quorum unom potest substitus alteri salva veritate*. La traducción que citamos en el cuerpo del texto es la de Anthony Kenny (cf. Kenny 1997: 115).

El segundo problema ha sido solucionado al poner los objetos de la relación de identidad en los juicios aritméticos en correlación uno-a-uno. Pero no se ha solucionado el primer problema, el caso de los números como *Julio César*. La solución al primer problema se realiza por medio de la definición de dirección para establecer el paralelismo entre una línea *a* y una línea *b* (cf. FA §65 89).

(C) La dirección de *a* es idéntica a *q*

Lo primero que se debe hacer según la condición de *salva veritate* es establecer si en todas las partes de la línea *a* se pueden sustituir todas las partes de la línea *b*. Si es así las líneas están en relación uno-a-uno. Lo segundo, para solucionar el problema de *Julio César*, es encontrar el concepto de dirección, así si *q* no viene dada como la dirección de la línea *b* el juicio es inmediatamente negado, pero si *q* viene dado como la dirección de *b* el juicio se puede afirmar o negar con seguridad de que en los conceptos que utiliza caen los objetos correctos.

Para evitar la circularidad en la definición de la igualdad de dirección entre dos paralelas, Frege propone definir la dirección de la línea *a*, como la extensión del concepto «línea paralela a la línea *a*». Si *a* y *b* están en correspondencia de uno-a-uno, la extensión[47] de sus conceptos será por necesidad idéntica. La extensión de un concepto comprende la totalidad de los objetos que caen bajo el concepto. La extensión del concepto «línea paralela a la línea *a*» es la clase de todas las líneas paralelas a ellas. Entonces si *b*, *c*, y *d* están en correspondencia biunívoca con *a*, la extensión de sus conceptos es idéntica y *a* es paralela de *b*, *c* y *d*. Ahora bien, podemos presentar la definición de número que propone Frege en los §70 a §74.

> Ahora bien, si todo objeto que cae bajo el concepto *F*, se halla en la relación con un objeto que caiga bajo el concepto *G*, y si con todo objeto que cae bajo el concepto *G* esta en la relación ∅ un objeto

[47] La extensión de un concepto es la clase total de los objetos que caen bajo él (cf. Kenny 116). Así la extensión del concepto «familia Parra Ballesteros» es el conjunto total de todos los individuos que pertenecen al concepto, María Paula Parra Ballesteros.

que cae bajo *F*, entonces los objetos que caen bajo *F* y *G* están correlacionados por la relación ∅. (FA §71 95).

Acá se establece una correlación entre objetos. Aún no están definidos los objetos que caen bajo *F* como el mismo objeto. Aún no podemos establecer de ‘A = B’ ‘A = A’. Para lograr esto, la correlación entre los objetos debe ser uno-a-uno o biunívoca. Esto se logra estableciendo la condición de que cada objeto del concepto *F* está en relación con sólo un objeto del concepto *G*. Así, la identidad entre los objetos se establece por la noción lógica de relación biunívoca.

1. Si *d* está en la relación ∅ con *a*, y si *d* está en la relación ∅ con *e*, entonces, en general, sean lo que sean *d*, *a* y *e*, *a* es lo mismo que *e*.
2. Si *d* está en la relación ∅ con *a*, y si *b* está en la relación ∅ con *a*, entonces, en general, sean lo que sean *d*, *b* y *a*, *d* es lo mismo que *b*.

Ahora bien, sólo falta incluir el concepto por el cual las identidades que se establecieron entre los objetos, son identidades de objetos numéricos. Esta es la definición del concepto «extensión del concepto». Ahora podemos comprender la definición general de número como: “el número que corresponde al concepto *F* es la extensión del concepto «equinumérico al concepto *F*»”. *n* es un número. Significa lo mismo que la expresión, “existe un concepto tal que *n* es el número que le corresponde” (cf. FA §72 97). Para mostrar que el número que corresponde al concepto *F* es el mismo que corresponde al concepto *G*, el concepto *F* debe ser equinumérico al concepto *G*. Esta última prueba indica que cualquiera que sea el concepto, si su extensión es equinumérica al concepto *F*, ese concepto y el concepto *F* son idénticos.“[P]uesto que si dos conceptos cualesquiera son numéricamente equivalentes a un tercero, son numéricamente equivalentes entre sí” (Kenny 1997: 121)

Podemos decir que la definición general de número es una definición de número como un conjunto de conceptos numéricamente equivalentes. Ahora nos corresponde presentar las definiciones de número particular y serie numérica.

Para la definición de los números particulares, Frege adopta la sugerencia de Leibniz y Mill. Según ellos, los número naturales mayores a 1 se pueden definir por referencia a sus predecesores (cf. Kneale 1973: 421) resultando como fundamentales las nociones de 0, 1 y serie numérica. Así que, si Frege define los números 0, 1 y la serie numérica desde nociones puramente lógicas, le es posible definir cualquier número particular. La definición de 0 es:

> 0 es el número que corresponde al concepto «desigual consigo mismo». (FA §74 98)

Dado que bajo la extensión del concepto «desigual consigo mismo» no cae nada, porque todos los objetos son idénticos, el 0 corresponde al conjunto vacío, y podemos entender nuestra afirmación de que el 0 es la negación de la existencia, tomando a la existencia como un concepto de segundo orden. Vamos a presentar una objeción que se le puede hacer a esta definición (cf. FA §74 98). Esta objeción consiste en afirmar de un concepto su autocontradicción, es decir, bajo todos los conceptos deben caer objetos, ¿qué cae bajo un concepto que afirma la falta de identidad de un objeto, si todos los objetos por definición son idénticos a sí mismo?

Frege dice que si el concepto está perfectamente delimitado no hay problema en que sea autocontradictorio. Nuestro concepto es "aquello que es desigual consigo mismo", como sabemos que este concepto es un concepto vacío, porque ningún objeto no es idéntico consigo mismo, no hay contradicción en la definición. Todo concepto en que se niegue la identidad 'A = A', es decir que se niegue la existencia de un objeto 'A ≠ A' es equinumérico con el número 0, esto significa que se afirma que nada cae bajo él. "Todo lo que parta de la lógica y para el rigor de la demostración pueda exigirse de un concepto, es una delimitación clara según la cual para cada objeto está determinado si cae bajo el concepto dado o no" (FA §74 88).

Ahora se debe demostrar la definición del número 1 para que resulte posible definir los números mayores a 1, por $n + 1$. Para dar la definición de número 1, se debe definir la relación entre dos números adyacentes de la serie numérica.

«Existe un concepto $F$ y un objeto $x$ de tal tipo que el número que corresponde al concepto $F$ es $n$, y que el número que corresponde al concepto "que cae bajo $F$ pero no es igual a $x$", es *m*» (FA §76 100) Esto significa que *n* sigue inmediatamente a *m* en la serie que se define como serie de los números naturales.

Entonces podemos decir que 0 corresponde a la totalidad de los conceptos bajo los que no cae objeto alguno. Si afirmamos '= 0' estamos estableciendo una identidad entre objetos, por lo tanto 1 es el número que le pertenece al concepto idéntico a cero, pero diferente a cero. 2 es el número que le pertenece al concepto idéntico a 1, ya que con la afirmación '= 2' estamos afirmando '= 1' e '= 0'.

Nos faltaría por presentar la demostración de que sólo 1 es el sucesor de 0, y que el patrón de sucesión, por el agregado de 1 a la definición anterior puede generar la infinita serie numérica. Ese trabajo no lo presentamos acá. De él sólo diremos que, así como las nociones de identidad y equivalencia son lógicas, las nociones de sucesor y relación ancestral también lo son. A partir de esto, podemos afirmar que los juicios aritméticos son construidos por medio de relaciones lógicas o analíticas, y aunque son *a priori*, descubren conocimientos que antes no teníamos. La justificación del juicio aritmético en Frege se dará por la cadena de inferencias o la prueba que se realice para demostrarlo.

* * *

En este capítulo hemos expuesto la posibilidad de que la naturaleza de los juicios aritméticos y la aritmética sea analítica. Como ya lo sabemos por nuestro segundo capítulo, si afirmamos, con Frege, que la naturaleza de una ciencia es analítica, afirmamos de ella que es *a priori* y, que sus axiomas y leyes son los mismos que gobiernan el pensamiento. Son axiomas y leyes lógicos. Para demostrar la naturaleza analítica de los juicios aritméticos Frege debe hacer por lo menos dos cosas. La primera es sustituir los conceptos gramaticales por lo que se analizaban los juicios, la pareja de conceptos sujeto-predicado. La sustitución de estos conceptos la realiza Frege en la *Conceptografía*. La segunda es demostrar que por medio de juicios analíticos podemos adquirir nuevos conocimientos por el descubrimiento de conceptos que antes no teníamos. Para llevar a cabo esta tarea Frege debe demostrar: primero que el concepto de número así como los números particulares son definibles desde conceptos lógicos; segundo que los números son objetos independientes de cualquier experiencia.

En nuestra primera sección exponemos las ventajas de la sustitución de los conceptos gramaticales por los conceptos lógicos. Los conceptos gramaticales de argumento y función permiten el análisis de cualquier juicio. Además, por presentar claramente la estructura del lenguaje –y el pensamiento– sólo muestran lo relevante para la inferencia. El análisis por los conceptos lógicos permite, a su vez, explicar de modo satisfactorio el uso de los cuantificadores –todo y alguno–, las relaciones de identidad, y la afirmación o negación de la existencia.

En nuestra segunda sección exponemos parcialmente la demostración de la reducción de la aritmética a la lógica. Decimos que la exposición es parcial porque sólo mostramos los pasos necesarios para definir el concepto general de número y el número 0. Para que la definición fuese completa deberíamos añadir la demostración de la sucesión en serie por el agregado de 1, y el número 1. Sin embargo con esta exposición parcial se vislumbra el camino que sigue Frege y que sólo concluirá en sus dos volúmenes de los *Grundgesetze der Arithmetik*. Por ahora diremos que las cuatro nociones lógicas fundamentales para realizar el proyecto fregeano son: la identidad, la equivalencia, la sucesión, la relación ancestral.

# Apéndice
# Frege y la concepción empirista de la aritmética de Mill

En este apéndice queremos exponer los problemas que se encuentran en una caracterización de la naturaleza del juicio aritmético como sintética *a posteriori*. En *Los fundamentos de la aritmética* Frege plantea cinco objeciones a dicha caracterización. J. S. Mill es el principal representante de la concepción sintético *a posteriori* de la aritmética. La posición de Mill[48] es influenciada principalmente por el empirismo humeano, y el asociacionismo de Hartley.

Es importante aclarar qué entendían Mill y Frege por psicología y por qué Mill la consideró de gran utilidad para responder a los problemas por el fundamento de la aritmética en su tiempo. “La psicología es el estudio experimental de la mente, la búsqueda de regularidades que gobiernan los fenómenos mentales.” (Kenny, 1997: 73) Esta definición de psicología corresponde a una tesis conocida como el *asociacionismo* elaborada por David Hartley.

La razón por la que J. S. Mill aceptó de tan buena manera la tesis es porquecon ella se logra eliminar la retórica, la superstición acerca del alma y el lenguaje metafísico, sustituyéndolos por el análisis psicológico escrupuloso. La tesis empirista radica en que todo lo que puede conocerse, incluso las verdades, debe referirse a la experiencia, si no, se

[48]Ketcher ubica la posición de Mill frente a dos tradiciones opuestas. La primera la llama trascendentalismo –*trasncendentalism*–, la segunda naturalismo –naturalism–. Ketcher considera que la filosofía de la aritmética tal como la entiende Frege cae sobre la primera posición junto con Kant y Dummett. Mientras que en la segunda se pueden encontrar autores como Aristóteles, Locke, Hume y Dewey. En este trabajo no aceptamos que la filosofía de a la aritmética tal y como la propuso Frege sea trascendentalista, es más creo que a lo largo del trabajo hemos tratado de resaltar la distancia entre Kant y Frege (cf. Kitcher 1998: 57). El hecho de que usen los mismos conceptos para definir la naturaleza de la aritmética y coincidan en la caracterización de la geometría no es suficiente para ubicarlos a los dos en una misma corriente. Actualmente se conoce al proyecto fregeano de reducción de la matemática como logicismo y se opone directamente a la caracterización kantiana de la naturaleza de la aritmética.

da pie a que se construyan, intelectualmente falsas doctrinas, factualmente falsas instituciones (cf. Passmore 1966: 15-16).

Mill adopta tanto el asociasionismo como el empirismo de tal manera que "si los razonamientos filosóficos (…) amenazan en algún punto lo que él considera los fundamentos del empirismo o ponen en entredicho la adecuación del asociacionismo, su retroceso es inmediato, sea cual sea el coste para la consistencia." (Passmore 1966: 16) Entonces cualquier aceptación de la tesis empirista, tendrá como consecuencia la aceptación de asociaciones que dan explicaciones psicológicas causales de los eventos presentados en la experiencia.

Por lo anterior es que podemos entender el postulado de Mill acerca de las verdades aritméticas. Las verdades aritméticas son conocidas *a posteriori*, sobre la base de la experiencia y de las cuales sólo se pueden dar explicaciones causales. Bajo esta concepción de las verdades aritméticas y de toda la matemática, se establece la tesis "de que las verdades matemáticas son generalizaciones empíricas bastamente aplicables y ampliamente confirmadas." (Kenny 1997: 17) Por lo que "la aritmética descansa en la inducción a partir de hechos relativos a agrupaciones concretas de cosas." (Kneale 1972: 410) La interpretación de la matemática y en específico de la aritmética como una ciencia cuyo fundamento es *a posteriori* es consecuencia de la radicalización del empirismo humeano y el asociasionismo de Hartley.

Desde la Grecia antigua, se acepta a la matemática como una ciencia *a priori*, dando a entender con ello que es "una ciencia cuyas proposiciones todas se hallan establecidas sin necesidad de acudir a la experiencia en busca de información acerca de objetos particulares." (Kneale 1972: 410) Según esta definición de ciencia *a priori*, una ciencia *a posteriori* vendría siendo una ciencia en la que por lo menos una de sus proposiciones se establece acudiendo a la experiencia, por lo que se recibe información acerca de objetos particulares y todo conocimiento adquirible por medio de estas proposición tendrá una referencia a dichos objetos. Como Mill es un empirista radical, para él, todos los juicios aritméticos denotan información sobre objetos particulares; siendo el caso de que los axiomas y las leyes se producen por medio de la inducción de acontecimientos naturales; las definiciones que se utilizan para cada número particular, significan la igualdad entre el objeto percibido y la separación que éste acepta en la experiencia. Son cinco las objeciones contra esta noción de la aritmética que desarrolla Frege en varias secciones de *Los fundamentos de la aritmética*.

La primera objeción radica en que, si bien todo conocimiento y toda verdad se refieren inmediatamente a impresiones sensoriales o imágenes mentales, diferentes personas asocian distintas imágenes a un mismo número. La imagen de la palabra ‘cien’, el símbolo ‘100’, la letra ‘C’. Como en esta variedad de imágenes mentales no se utiliza el mismo signo para expresar un solo significado, la imagen no es esencial ni a la aritmética ni al significado expresado. La elección de un signo específico radica en la utilidad o facilidad que presente frente a otro signo. Esto nos resulta evidente cuando comparamos: hacer cualquier operación con números arábigos –1, 2, 3 (…)– con, hacer cualquier operación con números romanos. En el caso en que se trate con números enteros, las operaciones básicas de la aritmética pueden realizarse en numeración romana. Aunque su procedimiento, como lo veremos, sea un poco engorroso y complicado por los signos que se utilizan. ¿Cómo sabemos que la suma ‘$\mathrm{VII} + \mathrm{V}'$ es ‘$= \mathrm{XII}$’? El procedimiento es el siguiente (cf. Asimov 1978: 12-3)

| | |
|---|---|
| (*a*) Debemos eliminar la notación substractiva si la hay | (*a*) No hay notación substractiva. |
| (*b*) Concatenamos los términos | (*b*) $\mathrm{VII} + \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{VIIV}$. |
| (*c*) Ordenamos los numerales de mayor a menor. | (*c*) $\mathrm{VIIV} \rightarrow \mathrm{VVII}$. |
| (*d*) Simplificamos el resultado reduciendo símbolos. | (*d*) $\mathrm{VV} \rightarrow \mathrm{X}$. |
| (*e*) Añadimos la notación substractiva | (*e*) No hay necesidad |
| (*f*) Tenemos la solución | (*f*) ‘$\mathrm{VII} + \mathrm{V} = \mathrm{XII}$ |

Ahora pensemos en lo engorroso que es realizar este tipo de operaciones con números romanos para cantidades mucho mayores: ‘$\overline{\mathrm{CCCLXXIX}}\mathrm{DCCCXCVII} + \overline{\mathrm{CDLVII}}\mathrm{DCCXCII} = \overline{\mathrm{DCCCXXXVII}}\mathrm{DCCLXXXIX}$’, para poder realizar esta suma debemos realizar los pasos anteriores, así:

($a$) Del primer número: $\overline{\mathrm{IX}} \rightarrow \overline{\mathrm{VIIII}}$; $\mathrm{XC} \rightarrow \mathrm{LXXXX}$. Del segundo número: $\overline{\mathrm{CD}} \rightarrow \overline{\mathrm{CCCC}}$; $\mathrm{XC} \rightarrow \mathrm{LXXXX}$.

($b$)

$\overline{\mathrm{CCCLXXVIIII}}\mathrm{DCCCLXXXXVII} + \overline{\mathrm{CCCCLVII}}\mathrm{DCCLXXXXII} \rightarrow \overline{\mathrm{CCCLXXVIIII}}\mathrm{DCCCVIIIIVII}\overline{\mathrm{CCCCLVII}}\mathrm{DCCCVIIIIII}.$

($c$) $\overline{\mathrm{CCCCCCCLLXXVVIIIIII}}\mathrm{DDCCCCCCLLXXXXXXXXXVIIII}.$

($d$)$\overline{\mathrm{CCCCC}} \rightarrow \overline{\mathrm{D}}$; $\overline{\mathrm{LL}} \rightarrow \overline{\mathrm{C}}$; $\overline{\mathrm{VV}} \rightarrow \overline{\mathrm{X}}$; $\overline{\mathrm{IIIII}} \rightarrow \overline{\mathrm{V}}$; $\mathrm{DD} \rightarrow \mathrm{M} \rightarrow \overline{\mathrm{I}}$; $\mathrm{CCCCC} \rightarrow \mathrm{D}$; $\mathrm{LL} \rightarrow \mathrm{C}$; $\mathrm{XXXXX} \rightarrow \mathrm{L}$.

($e$) $\mathrm{VIIII} \rightarrow \mathrm{IX}$.

($f$)$\overline{\mathrm{DCCCXXXVII}}\mathrm{DCCLXXXIX}$. [49]

La segunda objeción que se plantea a la caracterización de la aritmética de Mill es que el estudio psicológico no responde a las necesidades de la matemática. La psicología estudia las imágenes mentales y no el pensamiento, dado el caso en el que ésta pasara a estudiar al último mencionado, las explicaciones causales que daría de la ocurrencia del pensamiento no serían relevantes para la matemática (cf. Kenny 1997: 73-4), todo argumento acerca de la generación de una idea o de la razón por la que esta tuviese este signo y no otro, carecería de peso en la ciencia de los números.

La tercera objeción tiene que ver con el papel del 0 en las fórmulas de la aritmética. Si todo número natural denota un objeto ¿qué denota el 0, o acaso el 0 no hace parte de los números naturales? No podemos decir que el símbolo 0 es superfluo para la matemática y que no implicaría nada el no usarlo en las operaciones en las que se usa. Entonces si este signo posee un significado independientemente a que no denote un objeto sino la ausencia de este; es posible que no sea esencial para las definiciones de los números su respectiva correspondencia con objetos físicos.

La quinta objeción pone en entre dicho lo que para Mill significan los signos tales como '+' e '='. La interpretación de los signos de '+' e '=' contienen un error que Frege caracterizará como la confusión entre la matemática pura y la matemática aplicada. Mill dice que los signos antes expuestos revelan relaciones entre cosas factuales. Así pues el '+' representa la agregación de una parte a otra, o de cuantas partes se expresen a un lado de un signo con cuantas partes se expresen en la otra. En el caso de la igualdad, la cosa se complica un poco más. Ya que representa el resultado de la operación y éste nunca es exacto, porque las

[49]La suma en números arábigos es: 379.897 + 457.892 = 837.789.

cantidades dependen de variables que afectan los objetos, ya sea el volumen la densidad o el peso.

Esto debe ser entendido de la siguiente manera: Necesitamos 12 litros de agua en un tanque, tenemos dos cubetas, una con capacidad de 5 litros y otra con capacidad de 7 litros. Llenamos cada cubeta con su máxima capacidad, para luego verter el contenido en el tanque. No hay modo alguno en el que estemos completamente seguros de que el tanque contiene los 12 litros que necesitamos. Ya que puede que por el vaivén de la cubeta se salieran algunos mililitros o que las condiciones hicieran evaporar cierta cantidad –por mínima que fuera–, del contenido que cargamos. Frege responde a esto que si bien los cálculos matemáticos pueden y son aplicados a fenómenos o situaciones reales –entendiéndose por reales como dadas en la experiencia sensible–, en ningún momento son pensados sólo para este campo. Los cálculos matemáticos responden a un rango muy superior al de la experiencia física, en el que no se tiene en cuenta el contenido que expresan sus juicios, ya sean volúmenes, densidades o magnitudes.

La quinta objeción no admite que un método científico se pueda sostener por inducciones dadas por el hábito. Como cualquier método científico debe garantizar la verdad o falsedad de sus proposiciones, la ciencia no se puede basar en inducciones dadas por el hábito o la costumbre sino en inducciones basadas en las leyes de probabilidad; así pues, incluso la inducción tal como la plantea Mill tiene un fundamento en una rama de la matemática que aunque usa datos dados por la experiencia, no se basa en ellos para dictaminar las leyes que puede establecer (cf. FA §10 38). Entonces el campo de la matemática así pueda aplicarse a la realidad empírica no se reduce a ella, sino que esta es aplicable a todo el campo del pensamiento posible (cf. Dummett 2003: 431). A continuación daremos dos ejemplos que creemos que muestran la naturaleza *a posteriori* del razonamiento aritmético tal y como lo entendía Mill.

Tómese una suma cualquiera, ‘7 + 5 = 12’, la demostración de la ecuación depende tanto de un axioma para la operación de adición como de las definiciones que surgen para cada caso particular. Así pues, el axioma debe valer tanto para ‘(a + b) + c = a + (b + c)’ como para una suma particular '7 + 5 = 12 o 5 + 7 = 12'; la definición sólo dará cuenta del caso particular, el hecho de que la suma de 7 y 5 sea 12. La ley en la que se basan las operaciones sería en este caso 'las sumas de iguales son iguales', valiendo tanto para el caso general como para el caso particular. En este planteamiento no se nota una diferencia sustancial con respecto a una tesis leibniziana o apriorística de la naturaleza de la aritmética; es más, tanto Leibniz como Mill incurren en el mismo error. Ninguno de los dos nota que en el caso de la operación general '(a + b) + c = a + (b + c)', para que la identidad sea clara se deben poner los paréntesis a cada lado de la igualdad. Al pasar por alto los paréntesis, la definición de los números particulares adolece de una laguna o salto en su prueba. Por supuesto, no diremos que la filosofía de la aritmética de Mill es igual o sólo carece de los mismos errores que contiene una filosofía de la aritmética leibniziana. Mill, a diferencia de Leibniz, incurre en el error de sostener que cada operación particular refiere a un objeto sensible, y que la operación es posible por la división de este objeto en partes.

La característica de la teoría de Mill es que los axiomas deben considerarse como verdades inductivas o leyes de la naturaleza de máxima amplitud, por tanto, estos axiomas resultan de la asociación de casos particulares en la experiencia. Estos casos particulares se justifican en la creencia de que como todas las veces en las que se ha sumado 7 y 5 a dado 12, la operación se vuelve necesaria, entendiendo por operación necesaria un paso de la costumbre a la necesidad psicológica, en donde después de unos años resulta inadmisible para la mente que '7 + 5 = 8' (cf. Passmore 1981: 19-20).

La definición de los números por parte de Mill, que en principio resulta similar a la leibniziana, se realiza por medio del agregado de 1 a un número definido con anterioridad. Aunque no sea evidente en las definiciones de Leibniz y de Mill se encuentra una diferencia esencial de carácter epsitémico. Mill nos enseña que sus "definiciones no son definiciones en sentido lógico, que no sólo fijan el significado de una expresión, sino que con ello también afirman un hecho observado." (FA §7 31) En este caso, cualquiera que sea la definición esta denota algo de la experiencia o el mundo sensible que sucede efectivamente. A cada signo que se emplea ha de corresponderle un objeto o una relación física, siendo lo que expresa la definición un conocimiento *a posteriori*.

Ahora bien, aún nos falta el axioma del cual depende la definición para la suma. Al igual que las definiciones el axioma es una paráfrasis del axioma utilizado por Leibniz para definir la suma aritmética (cf. Nuevos Ensayos IV, VII, 10, 497). La diferencia entre ambos se dará en la naturaleza de la ley que expresan. Mientras que para el británico, el axioma expresa una ley natural que se corresponde con la inducción, ley *a posteriori*; para el alemán se expresa una ley lógica que permite las deducciones sin recurrir a nada más que a los términos incluidos, ley *a priori*.
Entonces en la prueba de ‘7 + 5 = 12’ se debe considerar lo siguiente:

12 = (7 + 5)

| Definición: | | Axioma: |
|---|---|---|
| 1 = 1 | (6 + 1) = 7 | “Lo que está compuesto de partes, está compuesto de partes de estas partes.” |
| (1+ 1) = 2 | (7 + 1) = 8 | (FA 1972: 35 §9) (Cf. System of logic III, XXIV, §5; Kneale 1972: 410) |
| (2 + 1) = 3 | (8 + 1) = 9 | |
| (3 + 1) = 4 | (9 + 1) = 10 | |
| (4+ 1) = 5 | (10 + 1) = 11 | |

Por lo que hemos dicho, en la definición se deben denotar objetos de los cuales se haya tenido experiencia por los menos una vez; el axioma por el cual se sigue la definición es comprobable empíricamente y la ley se produce por medio de la inducción.

Los problemas surgen cuando se usan números más grandes a los presentados en la definición anterior. ¿Qué experiencia podríamos tener de un número de 6 cifras? Y una pregunta más problemática, si estamos más interesados en los objetos a los que refieren los números ¿qué nos garantiza la verdad o falsedad de la operación que se realiza? Si no podemos hacer una definición de 379.897 y de 457.892 porque no logramos captar suficientes hechos físicos, cómo justificamos que ‘379.897 + 457.892 = 736.689’ sea verdadera y ‘379.897 + 457.892 = 837.789’ sea falsa. Si la prueba, las definiciones y los axiomas se justifican por su correspondencia con los objetos de la naturaleza y las leyes inductivas de ella, no se puede explicar el hecho de que un juicio tan grande como no imaginable o perceptivo sea verdadero o falso. Lo que implica que la verdad que nos parecía evidente en '7 + 5 = 12' no se puede afirmar con tanta facilidad como se suponía en un principio.

Cualquiera que realice bien la operación entre '379.897 + 457.892', sabrá que la suma no es 736.689, sino 837.789. Si se devuelve un párrafo, también notará que aquella suma que habíamos puesto como verdadera no lo era, y el número es tan grande que la suma no se puede hacer ni siquiera por medio de signos en la mente, mucho menos por la agrupación y separación de objetos físicos. Por ello hemos de aceptar que en operaciones semejantes en ningún momento acudimos a un hecho físico para realizarla, y que este impedimento no fue motivo para llevar acabo nuestra suma y decir cuando es verdadera y cuando no. Si alguien respondiese: sí hay hechos físicos que les corresponden a números tan grandes, el paradigma es el dinero. La separación de 837.789 en 379.897 y 457.892 responde a este hecho físico. Nosotros responderíamos que no hay necesidad de que el hecho físico exista para pensar cualquier suma o cualquier número. Por ello podemos pensar 90'467.283.918 sin tener nunca una cantidad de objetos tal, y sin siquiera tener que imaginar una cantidad ya sea de perros, gatos o pesos.

Kitcher defiende la posición de Mill al caracterizar la naturaleza de los juicios aritméticos como *a posteriori* si se tiene en consideración la forma en que somos capaces de adquirir el conocimiento de los axiomas básicos y las leyes lógicas (cf. Kitcher 1998: 59). Como ya lo hemos visto, el argumento no es válido. La pregunta por la forma en que aparecen los axiomas y las leyes de la aritmética no puede responder por la naturaleza de ellas. Porque el modo en el que adquirimos o aparece a nosotros por primera ves un juicio es subjetivo y los axiomas y leyes de la ciencia son objetivos, universales y necesarios.

*  *  *

En este apéndice expusimos de manera general la concepción empirista de Mill respecto de la naturaleza del juicio aritmético, y la aritmética misma. Más que una exposición general de la doctrina de Mill, presentamos las críticas que se le pueden realizar a su tesis empirista. Las objeciones son cinco, y algunas de ellas no sólo son válidas para la concepción de Mill sino también para la concepción de los juicios aritméticos kantiana. Por ejemplo, la dificultad que presenta suponer una división de los números en números grandes y números pequeños –en Kant eran números de magnitudes grandes y números de magnitudes pequeñas–, o los problemas que acarrea suponer que la objetividad de la aritmética se justifica en la particularidad, ya sea de la experiencia o de la intuición pura.

# Consideraciones finales

Un trago de razón. (Lichtenberg 2008: §202 174)

Para concluir este trabajo queremos presentar unas cuantas consideraciones finales, lo que queda por hacer y un nuevo horizonte de investigación que resulta de lo que hemos hecho. Como la pregunta por la naturaleza de los juicios aritméticos la abordamos desde la exposición de la caracterización kantiana de la aritmética y la caracterización fregeana de la aritmética, debemos responderla conforme a ellas dos.

Si quisiéramos responder que la naturaleza de la aritmética es sintética *a priori*, *a fortiori* sus juicios, nos inclinaríamos por la caracterización kantiana. Pero, como lo vimos en las páginas precedentes incurriríamos en errores como aceptar que la validez de la aritmética pura se fundamenta en la intuición pura de tiempo. Lo que implica que los juicios aritméticos sólo poseen significado cuando se realizan para expresar una particularidad, en el caso específico de Kant, la particularidad que representa el cambio de magnitud de los objetos. Esto quiere decir que los juicios aritméticos son en principio particulares y gracias a que se construyen en la forma pura de la intuición –según Kant estructura objetiva de la mente humana– se establecen con generalidad, universalidad y necesariedad.

Además, tratamos la dificultad que presenta la distinción lógica entre analítico y sintético que Kant supone para clasificar todos los juicios en tres tipos. Esta distinción se basa en los principios de identidad y no-contradicción, y se puede usar sin problema para dividir los juicios afirmativos universales. Mientras que, al aplicarla a juicios disyuntivos, hipotéticos y aritméticos pierde todas las ventajas que suponía. La principal deficiencia de la distinción lógica es que el análisis de las relaciones entre los términos de los juicios es un análisis gramatical bajo la forma sujeto-predicativa.

Si quisiéramos responder que la naturaleza de la aritmética es analítica, *a fortiori* sus juicios, nos inclinaríamos por la caracterización fregeana y tendríamos que probar dos cosas. La primera, una forma válida de analizar los juicios aritméticos. La segunda, inferir todos los teoremas y leyes de la aritmética pura de principios y axiomas lógicos. Hemos mostrado el método por el cual Frege resuelve estas dos condiciones.

La forma válida de analizar los juicios aritméticos es sustituyendo los conceptos gramaticales sujeto y predicado, por los conceptos lógicos argumento y función. Frege prueba que este nuevo par de conceptos lógicos no sólo es adecuado para el análisis de los juicios aritméticos, es adecuado para analizar la totalidad de los juicios. La división de los términos del juicio en conceptos lógicos permite resaltar la estructura básica del lenguaje, por ello no presta atención a la particularidad del contenido de cada expresión. Entonces, podemos afirmar con Frege, que en el lenguaje todo lo que no sea un argumento es necesariamente una función, y todo lo que no sea una función es necesariamente un argumento. El papel de los conceptos filosóficos *a priori*, *a posteriori*, analítico y sintético no es el mismo en Kant y Frege. En Frege éstos representan el grado de generalidad del conocimiento que expresa un juicio. Por organizar los conceptos filosóficos en orden de generalidad, diríamos: analítico *a priori*, sintético *a priori*, sintético *a posteriori*.

La segunda prueba no la desarrollamos con profundidad en este trabajo. El propio Frege no la llega a realizar a cabalidad. El trabajo más completo acerca del tema se realiza en los *Grundgesetze der Arithmetik*. Allí, desde cuatro nociones lógicas emprende su tarea de inferir toda la aritmética básica desde las nociones de identidad, equivalencia, sucesor y relación ancestral –condicional–. El proyecto fregeano de inferir la aritmética de la lógica inicia en la *Conceptografía* y culmina en los *Grundgesetze der Arithmetik*. En el intermedio de estos dos trabajos, aparecen *Los fundamentos de la aritmética* –considerada por Dummett como la obra filosófica maestra de Frege (cf. Dummett 1991: 1) – y, algunos ensayos que hoy reciben el nombre de ensayos semánticos y ensayos lógicos (Valdés

2013). El propio Frege indica en muchos de estos ensayos que su preocupación por la semántica del lenguaje natural nace de la investigación por la naturaleza de la aritmética. Al tener que preguntarse por el significado de juicios como ‘7 + 5 = 12’, tuvo que preguntarse por el significado de juicios como ‘el monstruo del lago Ness existe’.

Ahora bien, nos toca responder a la pregunta por la naturaleza analítica o sintética de los juicios aritméticos desde la caracterización kantiana y la caracterización fregeana. Nuestra respuesta es: aunque Frege dice en *Los fundamentos de la aritmética* que él toma la definición de los conceptos kantianos para expandirla y no redefinirla (cf. FA §89 100). Su caracterización es esencialmente distinta, al punto de necesitar elementos diferentes para la validez del juicio aritmético. Para Frege los conceptos expresan la generalidad del juicio y la justificación se hace en la inferencia del mismo. Para Kant los conceptos se relacionan tanto por la generalidad –generalidad concedida por una estructura general de la mente– como por las relaciones que se pueden establecer entre los términos del juicio, justificando la validez del mismo en la intuición pura de tiempo.

Ahora podemos decir que nuestra pregunta no se puede responder. No podemos ir contra Kant desde una concepción fregeana; o ir contra Frege desde una concepción kantiana. Porque los conceptos filosóficos esenciales son definidos de forma completamente diferente. Lo que sí podemos decir es que la discusión de Frege con Kant no cae en vacuidad. Gracias al proyecto de inferir toda la aritmética de la lógica Frege logró establecer un análisis válido de todos los juicios del pensamiento, y esto no es poca cosa. Si consideramos que la definición de los juicios aritméticos como juicios analíticos es más adecuada que la definición de los juicios aritméticos como sintético *a priori* y juicios sintéticos. Porque en la definición fregeana se explica la generalidad y el rango de la aritmética.

De este trabajo se puede desprender una investigación futura. Personalmente me interesaron los planteamientos lógicos y filosóficos de Gottlob Frege, y aquella idea de que sus escritos, que hoy usualmente conocemos como semánticos, son producto de una investigación por los fundamentos de la aritmética. Quizás el interés es producto de que estos temas aunque fueron mencionados no fueron desarrollados en lo que presento acá. Sobre todo por la extensión que se requiere para explicarlos, y porque no eran esenciales para responder a nuestra pregunta. Lo más cercano a esta posible investigación es el capítulo tercero, que en este trabajo no es más que una explicación de algunas de las nociones esenciales de la concepción de lógica y aritmética de Gottlob Frege.

# Bibliografia

## Obras de Frege


Frege, G. (1972). *Conceptografía, un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritmética, para el pensamiento puro*. (H. Padilla, Trad.) México: UNAM.

Frege, G. (1973). *Los fundamentos de la aritmética: Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*. (U. Moulines, trad.) (J. Mosterín, prólogo.) Barcelona: Laia.

Frege, G. (2013). 'Función y Concepto', en *Escritos lógico-semánticos*. *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (L. M. Valdés Villanueva, edit. Intro. Trad. Notas.) Madrid: Tecnos, pp. 53-79.

Frege, G. (2013). 'Sobre sentido y referencia', en *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (L. M. Valdés Villanueva, edit. Intro. Trad. Notas.) Madrid: Tecnos, pp. 84-111.

Frege, G. (2013). 'Comentarios sobre sentido y referencia', en *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (L. M. Valdés Villanueva, edit. Intro. Trad. Notas.) Madrid: Tecnos, pp. 112-122.

Frege, G. (2013). 'Sobre concepto y objeto', en *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (L. M. Valdés Villanueva, edit. Intro. Trad. Notas.) Madrid: Tecnos, pp. 123-139

Frege, G. (2013). '¿Qué es una función?', en *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (L. M. Valdés Villanueva, edit. Intro. Trad. Notas.) Madrid: Tecnos, pp. 160-170.

Frege, G. (2013). 'Introducción a la lógica', en *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (L. M. Valdés Villanueva, edit. Intro. Trad. Notas.) Madrid: Tecnos, pp. 160-170. La traducción de este artículo es de L. M. Poveda, la corrección es de L. M. Valdés.

## Obras de Kant

Kant, I. (2009). *Crítica de la Razón Pura*. (M. Caimi, Estudio y notas, & M. Caimi, trad.) (E. Amador, M. Paolucci, M. Thisted, índices temáticos y onomásticos). (D. M. Granja, M. Gallardo, E. Aguilar, O. Palancares, tabla de correspondencia y traducción de términos) México: FCE, UAM, UNAM.

Kant, I. (1992). 'Ensayo para introducir las magnitudes negativas en la filosofía', en *Opúsculos de Filosofía Natural*. (A. Domínguez, intro. Trad. Notas.) Madrid: Alianza, pp. 115-164.

Kant, I. (1988). *Logic*. (R. S. Hartman / W. Schwarz edit, and intr.) New York: Dover Publications. Edición Kindle.

Kant, I. (1999). *Prolegómenos a toda Metafísica del Porvenir que Haya de Poder Presentarse como Ciencia*. (M. Caimi, edit. Trad. Notas) Madrid: Istmo.

Kant, I. (2012). *Crítica del Discernimiento*. (R. R. Aramayo, S. Mas, trad. y estudio preliminar) Madrid: Alianza.

## Otras obras clásicas

Deleuze, G. (2008). *Kant y el tiempo*. (Equipo editorial cactus, trad y notas.) Buenos Aires: Cactus.

Hume, D. (2004). *Investigación sobre el Entendimiento Humano*. (V. Safélix, C. Ors trad.) Madrid: Ágora.

Hume, D. (1988). *Tratado de la Naturaleza Humana*. (F. Duque, intro. Trad. Notas) Madrid: Tecnos.

Leibniz, G. W. (1983). *Monadología*. (M. Fuentes, A. Piñan, F. de Samaranch trad.) Barcelona: Orbis.

Leibniz, G. W. (1983). *Nuevos Ensayos sobre el Entendimiento Humano*. (J. Echeverria edición preparada) Madrid: Editora Nacional.

Lichtenberg, G. C. (2008). *Aforismos*. (J. del Solar, trad.) Barcelona: Edhasa

Mill, J. S. (1843). *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive, being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation*. London: J. W. Parker, West Strand.

Russell, B. (1900). *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*. Londres: Cambridge University Press.

## Obras de apoyo

Asimov, I. (1978). *Asimov on Numbers*. New York: Pocket Books.

Campos, A. (1994). *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá.

Burge, T. (2005a). "Frege on Knowing the Foundation", en *Truth, Thought, Reason*. Oxford: Clarendon Press, pp. 317–355.

Burge, T. (2005b). "Frege on Apriority", en *Truth, Thought, Reason*. Oxford: Clarendon Press, pp. 356–387.

Copleston, F. (1971). "De Descartes a Leibniz", en *Historia de la Filosofía* (Vol. IV) Barcelona: ediciones Ariel.

Copleston, F. (1973). "De Hobbes a Hume", en *Historia de la Filosofía* (Vol. V) Barcelona: ediciones Ariel.

Detlefsen, M. (2004)."Philosophy of mathematics in the twentieth century", en *Routledge History of Philosophy Volume IX. Philosophy of Sciencie, Logic and Mathematics in The Twentieth Century* (Vol. IX). (S. G. Schanker, edit.) New York: Taylor & Francis e-Library, pp. 50-124.

Dummett, M. (1991). *Frege Philosophy of Mathematics*. Cambridge: Harvard University Press.

Dummett, M. (2003). *The seas of Language*. Oxford: Clarendon Press.

Frapolli, M. J / Romero, E. (2007). *Una Aproximación a la Filosofía del Lenguaje*. Madrid: Síntesis.

Friedman, M. (1992). *Kant and the Exact Sciences*. Massachussetts: Harvard University Press.

Gardner, S. (2010). *Routledge Philosophy Guidebook to Kant and the Critique of Pure Reason*. Routledge Philosophy Guidebook.

Hinske, N / Weischedel, W. (1970).*Kant-Seitenkonkordanz*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Kenny, A. (1997). *Introducción a Frege*. (C. García, trad.) Madrid: Cátedra

Kitcher, P.(1998). 'Mill, Mathematics, and the naturalist tradition', en *TheCambridge Companion to Mill* (J. Skorupski edit.).New York: Cambridge University Press, 57-112.

Kneale, W. / M. (1972). *El desarrollo de la lógica*. (J. Muguerza, trad.) Madrid: Tecnos.

Körner, S. (1977). *Introducción a la filosofía de la matemática*. (C. Gerhard, trad.) México: Siglo veintiuno editores, teoría y crítica.

Körner, S. (1991). *Kant*. (R. Rodríguez, edit.) Barcelona: Península.

Nidditch,P. H. (1995). *El desarrollo de la lógica matemática*. (C. García, trad.) Madrid: Cátedra.

Oliver, A. (2010). "What is a Predicate", en *The Cambridge Companion to Frege*. (M. Potter / T. Ricketts, edit.) New York: Cambridge University Press, pp. 118-148.

Passmore, J. (1981). *100 años de filosofía*. (P. Castrillo, trad.) Madrid: Alianza.

Potter, M. (2010). "Introduction", en *The Cambridge Companion to Frege*. (M. Potter / T. Ricketts, edit.) New York: Cambridge University Press, pp. 1-32.

Serrano, G. (2007). 'Origen y Legitimidad. La metáfora política de la epistemología de Kant', en *Inmanuel Kant: vigencia de la filosofía crítica*. Bogotá: Siglo del hombre editores; Universidad Nacional de Colombia; Universidad de los Andes y Pontificia Universidad Javeriana, pp. 53–66.

Sluga, H. (2013). 'Sobre el significado en Frege', en *El surgimiento de la Filosofía Analítica* (H. J. Glock edit). México: Círculo Ometeotl Madero, edición Kindle.

Suárez, L. (1984). "Filosofía – Lógica – Matemática", en *Universitas Philosophica* año 1, número 2. Bogotá: Publicaciones Universidad Javeriana, pp. 65-75.

Suárez, L. (1985). "La naturaleza de la verdad matemática", en *Universitas Philosophica* año 2. Bogotá: Publicaciones Universidad Javeriana, pp. 79-95.

Bogotá, 27 de febrero de 2015

Profesor Diego Pineda
Director de Departamento (E)
Facultad de Filosofía

Respetado Profesor Pineda:

Reciba un cordial saludo. Por medio de la presente tengo el gusto de presentarle el trabajo de grado *¿Analítico o sintético? Un debate sobre la naturaleza del juicio aritmético* que la estudiante María Paula Parra Ballesteros ha elaborado bajo mi dirección como requisito parcial para optar al título de Filósofa.

María Paula ha realizado un trabajo serio, responsable y respetuoso en torno al difícil tema de la filosofía de la aritmética. En él repasa el debate suscitado por la obra de Gottlob Frege respecto de la concepción sintética del juicio aritmético, y expone la alternativa de que dicha naturaleza sea más bien analítica.

El resultado del trabajo de María Paula es un texto reflexivo y bien documentado, que muestra claramente unas competencias filosóficas bien desarrolladas en torno a una iniciativa bien trabajada. Por estas razones considero que el trabajo satisface cabalmente las condiciones impuestas por la Facultad para estos casos. En este sentido, lo pongo a su consideración para que le sea asignado un evaluador y, si es el caso, se cite a su defensa.

Miguel Ángel Pérez Jiménez
Director del trabajo

Se reciben tres ejemplares
27 de febrero de 2015

UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE FILOSOFIA
SECRETARIO
BOGOTA

Pontificia Universidad
JAVERIANA
Bogotá

## CALIFICACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO

**PROGRAMA** : CARRERA DE FILOSOFÍA

**TÍTULO DEL TRABAJO:** "¿ANALÍTICO O SINTÉTICO? UN DEBATE SOBRE LA NATURALEZA DEL JUICIO ARITMÉTICO.

**ESTUDIANTE:** MARÍA PAULA PARRA BALLESTEROS

**NOTA DEFINITIVA** (Promedio de los examinadores): **4.8 (Cuatro, Ocho)**

**Firma del Secretario de Facultad**

**FECHA:** 28 de abril de 2015

**Facultad de Filosofía**
Carrera 5 No 39-00. Edif. Manuel Briceño, S.J. Piso 6° PBX: (57-1) 3208320 ext.: 5800 Fax (57-1) 3384532
Bogotá, D.C., Colombia

## ANEXO 2

## CARTA DE AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES
**(Licencia de uso)**

Bogotá, D.C., 02 de septiembre del 2015

Señores
Biblioteca Alfonso Borrero Cabal S.J.
Pontificia Universidad Javeriana
Cuidad

Los suscritos:
María Paula Parra Ballesteros, con C.C. No 1026278872
__________, con C.C. No __________
__________, con C.C. No __________

En mi (nuestra) calidad de autor (es) exclusivo (s) de la obra titulada:
¿Analítico o sintético? Un debate sobre la naturaleza del juicio aritmético
(por favor señale con una "x" las opciones que apliquen)
Tesis doctoral [ ] Trabajo de grado [X] Premio o distinción: Si [ ] No [ ]
cual:
presentado y aprobado en el año 2015, por medio del presente escrito autorizo (autorizamos) a la Pontificia Universidad Javeriana para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mi (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación, teniendo en cuenta que en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autorizan a la Pontificia Universidad Javeriana, a los usuarios de la Biblioteca Alfonso Borrero Cabal S.J., así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado un convenio, son:

| AUTORIZO (AUTORIZAMOS) | SI | NO |
|---|---|---|
| 1. La conservación de los ejemplares necesarios en la sala de tesis y trabajos de grado de la Biblioteca. | X | |
| 2. La consulta física (sólo en las instalaciones de la Biblioteca) | X | |
| 3. La consulta electrónica - on line (a través del catálogo Biblos y el Repositorio Institucional) | X | |
| 4. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer | | X |
| 5. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet | X | |
| 6. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previo convenio perfeccionado con la Pontificia Universidad Javeriana para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones | | X |

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

De manera complementaria, garantizo (garantizamos) en mi (nuestra) calidad de estudiante (s) y por ende autor (es) exclusivo (s), que la Tesis o Trabajo de Grado en cuestión, es producto de mi (nuestra) plena autoría, de mi (nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy (somos) el (los) único (s) titular (es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Pontifica Universidad Javeriana por tales aspectos.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, *"Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores"*, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Pontificia Universidad Javeriana está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

**NOTA:** **Información Confidencial:**
Esta Tesis o Trabajo de Grado contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de una investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. Si ☐ No ☒
En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta, tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

| NOMBRE COMPLETO | No. del documento de identidad | FIRMA |
|---|---|---|
| Maria Paula Pavia Ballesteros | 1026.278.872 | Maria Paula Pavia |
| | | |
| | | |

FACULTAD: Filosofia
PROGRAMA ACADÉMICO: Filosofía

**ANEXO 3**
**BIBLIOTECA ALFONSO BORRERO CABAL, S.J.**
**DESCRIPCIÓN DE LA TESIS O DEL TRABAJO DE GRADO**
**FORMULARIO**

<table>
<tr><th colspan="12">TÍTULO COMPLETO DE LA TESIS DOCTORAL O TRABAJO DE GRADO</th></tr>
<tr><td colspan="12">¿Analítico o sintético?</td></tr>
<tr><th colspan="12">SUBTÍTULO, SI LO TIENE</th></tr>
<tr><td colspan="12">Un debate sobre la naturaleza del juicio aritmético</td></tr>
<tr><th colspan="12">AUTOR O AUTORES</th></tr>
<tr><th colspan="6">Apellidos Completos</th><th colspan="6">Nombres Completos</th></tr>
<tr><td colspan="6">Parra Ballesteros</td><td colspan="6">María Paula</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><th colspan="12">DIRECTOR (ES) TESIS O DEL TRABAJO DE GRADO</th></tr>
<tr><th colspan="6">Apellidos Completos</th><th colspan="6">Nombres Completos</th></tr>
<tr><td colspan="6">Pérez Jiménez</td><td colspan="6">Miguel Ángel</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6"></td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><th colspan="12">FACULTAD</th></tr>
<tr><td colspan="12">Filosofía</td></tr>
<tr><th colspan="12">PROGRAMA ACADÉMICO</th></tr>
<tr><th colspan="12">Tipo de programa ( seleccione con “x” )</th></tr>
<tr><td colspan="3">Pregrado</td><td colspan="3">Especialización</td><td colspan="3">Maestría</td><td colspan="3">Doctorado</td></tr>
<tr><td colspan="3">x</td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><th colspan="12">Nombre del programa académico</th></tr>
<tr><td colspan="12">Filosofía</td></tr>
<tr><th colspan="12">Nombres y apellidos del director del programa académico</th></tr>
<tr><td colspan="12">Gustavo Gómez</td></tr>
<tr><th colspan="12">TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE:</th></tr>
<tr><td colspan="12">Filósofa</td></tr>
<tr><th colspan="12">PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o tener una mención especial):</th></tr>
<tr><td colspan="12"></td></tr>
<tr><th colspan="4">CIUDAD</th><th colspan="4">AÑO DE PRESENTACIÓN DE LA TESIS O DEL TRABAJO DE GRADO</th><th colspan="4">NÚMERO DE PÁGINAS</th></tr>
<tr><td colspan="4">Bogotá</td><td colspan="4">2015</td><td colspan="4">106</td></tr>
<tr><th colspan="12">TIPO DE ILUSTRACIONES ( seleccione con “x” )</th></tr>
<tr><td>Dibujos</td><td>Pinturas</td><td colspan="2">Tablas, gráficos y diagramas</td><td colspan="2">Planos</td><td colspan="2">Mapas</td><td colspan="2">Fotografías</td><td colspan="2">Partituras</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">x</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th colspan="12">SOFTWARE REQUERIDO O ESPECIALIZADO PARA LA LECTURA DEL DOCUMENTO<br>Nota: En caso de que el software (programa especializado requerido) no se encuentre licenciado por la Universidad a través de la Biblioteca (previa consulta al estudiante), el texto de la Tesis o Trabajo de Grado quedará solamente en formato PDF.</th></tr>
<tr><td colspan="12">No aplica</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="6">MATERIAL ACOMPAÑANTE</th></tr>
<tr><th rowspan="2">TIPO</th><th rowspan="2">DURACIÓN (minutos)</th><th rowspan="2">CANTIDAD</th><th colspan="3">FORMATO</th></tr>
<tr><th>CD</th><th>DVD</th><th>Otro ¿Cuál?</th></tr>
<tr><td>Vídeo</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Audio</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Multimedia</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Producción electrónica</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Otro Cuál?</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

**DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVE EN ESPAÑOL E INGLÉS**

Son los términos que definen los temas que identifican el contenido. (*En caso de duda para designar estos descriptores, se recomienda consultar con la Sección de Desarrollo de Colecciones de la Biblioteca* Alfonso Borrero Cabal S.J *en el correo* *biblioteca@javeriana.edu.co*, *donde se les orientará).*

| ESPAÑOL | INGLÉS |
|---|---|
| **Gottlob Frege** | **Gottlob Frege** |
| **Inmanuel Kant** | **Inmanuel Kant** |
| **Filosofía de la matemática** | **Philosophy of mathematics** |
| **Juicios analíticos** | **Analytic juices** |
| **Juicios sintéticos** | **Sintetic juices** |

**RESUMEN DEL CONTENIDO EN ESPAÑOL E INGLÉS**

(Máximo 250 palabras - 1530 caracteres)

**En el trabajo de grado desarrollamos dos concepciones de la naturaleza de los juicios aritméticos la aritmética. Por un lado, explicamos lo que significa que la matemática sea una ciencia sintética *a priori*, en sentido kantiano. Por otro, explicamos lo que significa que la matemática sea una ciencia analítica, en sentido fregeano. Además, en el trabajo mostramos la forma en que la filosofía, la matemática y la lógica se aproximan.**

**In the undergraduate work, we developed two conceptions of the nature of the juices in arithmetic. On the one hand, in the Kantian sense, we explain what it means that mathematics is synthetic a priori knowledge. Furthermore, we explain meaning that is an analytical mathematical science, Fregean sense. Finally, we can say that the paper shows how philosophy, mathematics and logic approach.**