



FACULTAD DE INGENIERIA
Maestría en Ingeniería Civil

Trabajo de Grado

Análisis Probabilístico de Fallas Superficiales en
Taludes Debido a Procesos de Infiltración

Presentado por:
Leonardo José Cruz Zelaya

Director
Carlos Eduardo Rodríguez Pineda

Bogotá D.C.
Junio de 2012

APROBACIÓN

El Trabajo de grado con título “Análisis probabilístico de fallas superficiales en taludes debido a procesos de infiltración.”, desarrollado por el estudiante Leonardo José Cruz Zelaya, en cumplimiento de uno de los requisitos depuestos por la Pontificia Universidad Javeriana, Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Civil, para optar el Título de Magister en Ingeniería Civil, fue aprobado por:

Carlos Eduardo Rodríguez Pineda

Director de trabajo de grado

Luis Felipe Prada Sarmiento

Jurado de Tesis

Alfonso Mariano Ramos Cañón

Jurado de Tesis

Análisis Probabilístico de Fallas Superficiales en Taludes Debido a Procesos de Infiltración

Leonardo José Cruz Zelaya

La Pontificia Universidad Javeriana, no es responsable por los conceptos emitidos por los autores-investigadores del presente trabajo, por lo cual son responsabilidad absoluta de sus autores y no comprometen la idoneidad de la institución ni de sus valores.

Resumen

Las fallas superficiales son uno de los tipos de deslizamientos más comunes en taludes de suelos residuales donde se experimentan precipitaciones intensas y prolongadas. El análisis de este tipo de deslizamientos está caracterizado por varias fuentes de incertidumbre. El comportamiento estadístico de los procesos de infiltración no ha sido tomado en cuenta en este tipo de análisis. Al incluir esta incertidumbre, se puede obtener una metodología que puede ser utilizada para la elaboración de mapas de amenazas y sistemas de alerta temprana. Para definir la metodología, se aplicaron los métodos probabilísticos de Primer Orden Segundo Momento, Estimativos Puntuales, Hasofer-Lind y Simulación de Monte Carlo a dos modelos de análisis superficial de taludes en un caso piloto. Los modelos utilizados fueron propuestos por Pradel y Raad e Iverson.

Al comparar los resultados obtenidos de los modelos de análisis, se puede observar una gran variación en las probabilidades de falla (0.0437 – 0.4732) obtenidas mediante el método propuesto por Pradel y Raad, mientras que para el modelo propuesto por Iverson son menores (0.0021 – 0.1103). Luego de analizar los resultados, se concluyó que la mejor metodología para el análisis probabilístico de la estabilidad superficial de taludes consiste en aplicar la Simulación de Monte Carlo al modelo propuesto por Iverson. Del ejercicio realizado se puede mencionar que la principal desventaja en el uso de métodos probabilísticos a los modelos de estabilidad propuestos es la falta de datos de campo para variables que contribuyen al comportamiento de las fallas superficiales.

Abstract

Shallow failures are one of the most common types of landslides that occur on residual soils where intense and prolonged rainfalls are present. The analysis of this type of landslides is characterized by many sources of uncertainty. The statistical behavior of the infiltration processes has not been taken into account in the analysis. Once the uncertainty is included, a framework can be used to elaborate risk maps and early warning systems. In order to define the framework, the probabilistic methods of First Order Second Moment, Point Estimates, Hasofer-Lind and Monte Carlo Simulation were applied to two models for the analysis of shallow landslides in a case study. The models used were proposed by Pradel and Raad and Iverson.

After comparing the results from the analysis, a great variation of the probability of failure was observed for the model proposed by Pradel and Raad (0.0437 – 0.4732). Meanwhile, the model proposed by Iverson shows less variation (0.0021 – 0.1103). After analyzing the results, it was concluded that the best methodology for the probabilistic analysis of shallow stability consists on the application of Monte Carlo Simulation to the model proposed by Iverson. The primary disadvantage of using probabilistic methods is the lack of field data for the variables that contribute to the behavior of shallow failures.

Palabras Claves

Deslizamientos superficiales, Infiltración, Incertidumbre, Análisis de confiabilidad, Índice de confiabilidad, Probabilidad de falla.

Keywords

Shallow landslides, Infiltration, Uncertainty, Reliability analysis, Reliability index, Probability of failure.

Tabla de Contenidos

Lista de Figuras.....	8
Lista de tablas.....	9
1 Introducción.....	9
2 Incertidumbre y Confiabilidad.....	11
2.1 Incertidumbre.....	11
2.1.1 Incertidumbre Natural.....	11
2.1.2 Incertidumbre Epistémica.....	11
2.1.3 Error Humano.....	12
2.2 Confiabilidad.....	12
2.2.1 Índice de Confiabilidad y Probabilidad de Falla.....	12
3 Conceptos Probabilísticos.....	17
3.1 Descriptores Estadísticos.....	17
3.2 Distribuciones Probabilísticas.....	19
3.2.1 Distribución Normal.....	20
3.2.2 Distribución Lognormal.....	21
3.3 Ajuste de Función de Densidad de Probabilidad Matemática a Datos.....	22
4 Métodos Probabilísticos.....	23
4.1 Método de Primer Orden Segundo Momento.....	23
4.2 Método de Estimativos Puntuales.....	25
4.3 Método de Hasofer-Lind.....	28
4.4 Simulación de Monte Carlo.....	32
5 Deslizamientos Superficiales.....	34
5.1 Detonante.....	34
5.2 Tipos de Análisis de Estabilidad Superficial.....	35
5.2.1 Métodos Empíricos.....	35
5.2.2 Métodos Completos.....	36
6 Modelos de Análisis Superficial.....	37
6.1 Modelo de Pradel y Raad.....	37
6.2 Modelo de Iverson.....	39

7	Metodología del Análisis de Confiabilidad	45
7.1	Parámetros Geotécnicos del Análisis.....	45
7.2	Registros Meteorológicos del Análisis.....	50
7.3	Aplicación al Modelo de Pradel y Raad.....	53
7.3.1	Método de Primer Orden Segundo Momento.....	53
7.3.2	Método de Estimativos Puntuales.....	57
7.3.3	Método de Hasofer-Lind	61
7.3.4	Simulación de Monte Carlo.....	65
7.4	Aplicación al Modelo de Iverson	69
7.4.1	Método de Primer Orden Segundo Momento.....	69
7.4.2	Método de Estimativos Puntuales.....	73
7.4.3	Método de Hasofer-Lind	74
7.4.4	Simulación de Monte Carlo.....	77
8	Resultados.....	79
8.1	Modelo de Pradel y Raad	79
8.2	Modelo de Iverson	80
9	Discusión.....	83
9.1	Método de Pradel y Raad	83
9.2	Método de Iverson	84
10	Conclusiones	85
11	Recomendaciones.....	86
12	Bibliografía.....	87
13	Anexos	89
13.1	Parámetros para Análisis.....	89

Lista de Figuras

<i>Figura 2.1 Representación gráfica de la probabilidad de falla para dos casos diferentes con un mismo factor de seguridad. Tomado de (Russelli, 2008).</i>	13
<i>Figura 2.2 Comparación de diferentes factores de seguridad con sus respectivas probabilidades de falla. Tomado de (Russelli, 2008).</i>	13
<i>Figura 2.3 Representación gráfica del índice de confiabilidad β. Tomado de (Baecher & Christian, 2003)</i>	14
<i>Figura 3.1 a) Ejemplo de distribución positiva y b) negativa. Tomado de (Russelli, 2008)</i>	18
<i>Figura 3.2 a) Variables perfectamente correlacionadas de forma positiva. b) Variables perfectamente correlacionadas de forma negativa. c) Variables no correlacionadas. Tomado de (Russelli, 2008)</i>	19
<i>Figura 3.3 Función de probabilidad acumulada y de densidad. Tomado de (Baecher & Christian, 2003).</i>	20
<i>Figura 3.4 a) Función de densidad de probabilidad normal. b) Función de densidad de probabilidad normal estándar con media igual a cero y desviación estándar igual a 1. Tomado de (Russelli, 2008)</i>	21
<i>Figura 4.1 Representación de los pesos asignados a los resultados de la función de comportamiento. Tomado de (Russelli, 2008).</i>	26
<i>Figura 4.2 Linearización de la función de comportamiento Z. Tomado de (Russelli, 2008).</i>	28
<i>Figura 6.1 Sección que muestra el mecanismo de saturación de un talud. Tomado de (Pradel & Raad, 1993)</i>	38
<i>Figura 6.2 Ilustración del modelo de talud infinito.</i>	44
<i>Figura 7.1 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la cohesión.</i>	46
<i>Figura 7.2 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para el coeficiente de fricción.</i>	47
<i>Figura 7.3 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la humedad volumétrica in situ.</i>	48
<i>Figura 7.4 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la humedad volumétrica saturada.</i>	49
<i>Figura 7.5 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la duración.</i>	52
<i>Figura 7.6 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la intensidad.</i>	53
<i>Figura 7.2 Resumen de la hoja de cálculo para la primera iteración.</i>	64
<i>Figura 7.3 Resumen de la hoja de cálculo para la última iteración.</i>	65
<i>Figura 7.4 Comportamiento de la probabilidad de falla al aumentar el número de simulaciones.</i>	69
<i>Figura 7.5 Resumen de la hoja de cálculo para la última iteración.</i>	77
<i>Figura 7.6 Comportamiento de la probabilidad de falla al aumentar el número de simulaciones.</i>	78
<i>Figura 8.1 Comparación entre la metodología original de Monte Carlo y el uso de límites en el cálculo del factor de seguridad mediante el Modelo de Pradel y Raad.</i>	80
<i>Figura 8.2 Comparación entre la metodología original de Monte Carlo y el uso de límites en el cálculo de la probabilidad de falla mediante el Modelo de Pradel y Raad.</i>	80
<i>Figura 8.3 Comparación entre la metodología original de Monte Carlo y el uso de límites en el cálculo del factor de seguridad mediante el Modelo de Iverson.</i>	81
<i>Figura 8.4 Comparación entre la metodología original de Monte Carlo y el uso de límites en el cálculo de la probabilidad de falla mediante el Modelo de Iverson.</i>	82

Lista de tablas

<i>Tabla 2.1 Niveles esperados de comportamiento en términos de probabilidad de falla y sus correspondientes índices de confiabilidad. Tomado de (Sivakumar & Murthy, 2005).</i>	14
<i>Tabla 2.2 Índice de confiabilidad y probabilidad de falla deseados. Tomado de (Phoon, 2008).</i>	15
<i>Tabla 5.1 Profundidad de la superficie según varios investigadores.</i>	34
<i>Tabla 7.1 Descriptores estadísticos de los parámetros geotécnicos obtenidos para el análisis.</i>	50
<i>Tabla 7.2 Coeficientes de correlación de los parámetros geotécnicos.</i>	50
<i>Tabla 7.3 Periodo entre eventos lluviosos calculados en el análisis.</i>	51
<i>Tabla 7.4 Datos estadísticos de los parámetros meteorológicos obtenidos para el análisis.</i>	51
<i>Tabla 7.5 Descriptores estadísticos para el cálculo del frente húmedo.</i>	54
<i>Tabla 7.6 Coeficientes de correlación para el cálculo del frente húmedo.</i>	54
<i>Tabla 7.7 Descriptores estadísticos para el cálculo del factor de seguridad.</i>	56
<i>Tabla 7.8 Coeficientes de correlación para el cálculo del factor de seguridad.</i>	56
<i>Tabla 7.9 Cálculo de los puntos estimativos en los cuales se evaluará el frente húmedo.</i>	57
<i>Tabla 7.10 Resumen de los cálculos para obtener la media y desviación estándar del frente húmedo.</i>	59
<i>Tabla 7.11 Cálculo de los puntos estimativos en los cuales se evaluará el factor de seguridad.</i>	60
<i>Tabla 7.12 Resumen de los cálculos para obtener la media y desviación estándar de factor de seguridad.</i>	60
<i>Tabla 7.13 Resumen de las iteraciones para el cálculo de β.</i>	63
<i>Tabla 7.14 Matriz S.</i>	65
<i>Tabla 7.15 Números aleatorios uniformemente distribuidos, U.</i>	66
<i>Tabla 7.16 Matriz Y.</i>	67
<i>Tabla 7.17 Matriz X.</i>	67
<i>Tabla 7.18 Matriz Z.</i>	68
<i>Tabla 7.19 Resumen de simulaciones realizadas.</i>	69
<i>Tabla 7.20 Valores utilizados para el cálculo del factor de seguridad.</i>	70
<i>Tabla 7.21 Resumen de los valores en los cuales se evaluará el factor de seguridad.</i>	73
<i>Tabla 7.22 Resumen de los cálculos para obtener la media y desviación estándar de factor de seguridad.</i>	73
<i>Tabla 7.23 Resumen de las iteraciones.</i>	76
<i>Tabla 7.24 Resumen de simulaciones realizadas.</i>	77
<i>Tabla 8.1 Resultados obtenidos mediante los análisis de probabilidad aplicados al modelo propuesto por Pradel y Raad.</i>	79
<i>Tabla 8.2 Resultados del frente húmedo obtenidos mediante el modelo propuesto por Pradel y Raad.</i>	79
<i>Tabla 8.3 Resultados obtenidos mediante los análisis de probabilidad aplicados al modelo propuesto por Iverson.</i>	81
<i>Tabla 13.1 Datos de pesos unitarios totales utilizados en el análisis.</i>	89
<i>Tabla 13.2 Datos de pesos unitarios saturados utilizados en el análisis.</i>	90
<i>Tabla 13.3 Datos de cohesión utilizada en el análisis.</i>	90
<i>Tabla 13.4 Valores de ángulos de fricción utilizados en el análisis.</i>	91
<i>Tabla 13.5 Valores de las humedades volumétricas calculadas en el análisis.</i>	91

1 Introducción

Las fallas superficiales son uno de los tipos de deslizamientos más comunes en taludes de suelos residuales en zonas sub-tropicales y tropicales donde se experimentan precipitaciones intensas y prolongadas (Fourie, 1996; Rahardjo, Rezaur, & Leong, 2009). Estos se dan en taludes con pendientes muy altas. Se caracterizan porque la superficie de falla se encuentra paralela a la cara original del talud y por tener una profundidad no mayor de tres metros (Meisina & Scarabelli, 2007). El análisis de este tipo de deslizamientos está caracterizado por varias fuentes de incertidumbre. La contribución de dicha incertidumbre se ha manejado mediante diferentes métodos que utilizan la variabilidad estadística de los parámetros geotécnicos.

El uso de métodos de confiabilidad ha sido aplicado previamente en análisis de estabilidad de taludes. Un comité internacional de expertos fue formado para analizar la estabilidad de los taludes del proyecto hidroeléctrico de la Bahía de James, Canada. En este proyecto se utilizó el análisis probabilístico para evaluar la construcción de diques (Baecher & Christian, 2003). El-Ramly realizó análisis probabilísticos para analizar la estabilidad de una sección de 44 metros de altura del Dique de Syncrude en Fort McMurray, Canada (Griffiths & Fenton, 2007). También se ha aplicado en el análisis de cuñas de roca (Low, 1997) y al método de dovelas de Morgenstern y Price (Low, Gilbert, & Wright, 1998). También se ha estudiado la relación entre diferentes ángulos de talud y el factor de seguridad y probabilidad de falla del deslizamiento de Lodalen, Noruega (El-Ramly, Morgenstern, & Cruden, 2006). Otros han incluido la variabilidad de los parámetros que controlan la saturación del suelo (Cho, 2007).

Al igual que los parámetros geotécnicos, la intensidad y duración de la lluvia presentan una variabilidad que pueden ser expresadas en términos estadísticos. Sin embargo, el comportamiento estadístico de los procesos de infiltración no ha sido tomado en cuenta en el análisis de fallas superficiales. Al incluir esta incertidumbre, se puede obtener un procedimiento para analizar la probabilidad de falla superficial en zonas propensas a este tipo de eventos. Una vez formulada la metodología, esta puede ser utilizada para la elaboración de mapas de amenaza y uso de tierra así como sistemas de alerta temprana para este tipo de deslizamientos.

Esta investigación tiene como objetivo principal elaborar un marco metodológico para el estudio de la estabilidad superficial de taludes debido a procesos de infiltración mediante análisis probabilístico. Para demostrar su aplicación, la metodología se utilizó en un caso piloto. Primero se determinaron las variables aleatorias que controlan la estabilidad superficial y sus modelos de probabilidad. Se utilizaron dos métodos determinísticos con el fin de definir la función de comportamiento de la estabilidad superficial de taludes ante precipitaciones. Luego de comparar los resultados de cuatro diferentes métodos probabilísticos, se definió el modelo de simulación que mejor calcula la probabilidad de falla superficial. Hay que mencionar que durante el análisis estadístico se generaron valores negativos para algunas variables aleatorias, los cuales no tienen sentido en la realidad. Sin embargo se decidió utilizar estos valores para no modificar los métodos probabilísticos originales.

Para alcanzar los objetivos de esta investigación, el trabajo se dividió en los siguientes capítulos:

En el Capítulo 2 se describen las causas y tipos de incertidumbre asociados a la ingeniería geotécnica. Posteriormente se presenta la importancia de los análisis de confiabilidad y como la probabilidad de falla puede cumplir una función complementaria al factor de seguridad en la toma de decisiones. En el Capítulo 3 se resumen los conceptos estadísticos básicos de variables aleatorias con los cuales se puede cuantificar la incertidumbre. En el Capítulo 4 se estudian las técnicas de probabilidad que toman en cuenta la incertidumbre en el análisis de confiabilidad. Las técnicas utilizadas son las de Primer Orden Segundo Momento, Estimativos Puntuales, Hasofer-Lind y Simulación de Monte Carlo. En el Capítulo 5 se resume como han sido analizados los deslizamientos superficiales mediante métodos empíricos y completos. Los métodos completos, específicamente las metodologías de Pradel y Raad y la metodología de Iverson, son explicados en detalle en el Capítulo 6. En el siguiente capítulo, mediante un caso piloto las técnicas de probabilidad son aplicadas a estos dos modelos de comportamiento superficial para definir el mejor procedimiento para su análisis de confiabilidad. En los últimos cuatro capítulos se discuten los resultados obtenidos de esta investigación con los cuales se realizan las conclusiones y recomendaciones para futuras investigaciones.

2 Incertidumbre y Confiabilidad

2.1 Incertidumbre

Existen muchas fuentes de incertidumbre en la ingeniería. Lastimosamente, en los análisis determinísticos no se cuantifica la contribución de la incertidumbre por lo que los diseños deben ser conservadores. Sin embargo, entre más grande sea la incertidumbre y el diseño este más cercano a un estado crítico, mayor será la necesidad de evaluar sus efectos en los resultados (Griffiths & Fenton, 2007).

Las incertidumbres asociadas a la ingeniería puede dividirse en tres categorías: natural o inherente (aleatoria), incertidumbre debido a la falta de conocimiento perfecto (epistémico) y error humano.

2.1.1 Incertidumbre Natural

La incertidumbre natural o inherente es atribuida a la variabilidad o aleatoriedad de cierta propiedad (variaciones en la composición mineralógica, condiciones durante la depositación, historial de esfuerzos y procesos de descomposición física y mecánica (El-Ramly, Morgenstern, & Cruden, 2002)), manifestándose como variabilidades temporales, espaciales o ambas. Este tipo de incertidumbre es impredecible y por lo tanto irreducible a través de la recopilación de más datos o modelos más refinados, pero puede aproximarse utilizando simplificaciones matemáticas o modelos (Baecher & Christian, 2003).

2.1.2 Incertidumbre Epistémica

La incertidumbre epistémica proviene de la falta de conocimiento de un sistema y está relacionada a datos limitados o ambiguos, error de medición, criterios subjetivos y la falta de entendimiento de las leyes físicas que limitan nuestra habilidad de modelar el mundo real. Este tipo de incertidumbre puede ser reducido al recopilar más datos experimentales, mejorando los métodos de medición y cálculo y utilizando modelos más refinados. Se subdivide en tres sub-categorías: incertidumbre en la caracterización del sitio, incertidumbre de modelo e incertidumbre de parámetros (Baecher & Christian, 2003).

La incertidumbre en la caracterización del sitio tiene que ver con la adecuada interpretación que hacemos de la geología sub-superficial. Es producto de las incertidumbres en la exploración y datos incluyendo: errores de medición; inconsistencia y falta de homogeneidad de los datos; errores en el manejo y transcripción de los datos; y representatividad inadecuada de las muestras debido a limitaciones de tiempo y espacio.

La incertidumbre de modelo tiene que ver con el grado con el cual el modelo matemático escogido se acerca a la realidad. Ya que es complejo simular el comportamiento real mediante modelos matemáticos, se realizan simplificaciones y presunciones las cuales reducen la precisión de los resultados.

La incertidumbre de los parámetros tiene que ver con la precisión con la cual se estiman los parámetros utilizados en los modelos. Es producto de la imprecisión de asumir los parámetros de

ensayos y es exacerbada por el número limitado de observaciones, resultando en imprecisión estadística.

2.1.3 Error Humano

El error humano incluye el uso de equipos de campo y de laboratorio con imperfecciones o sin calibración. Los errores cometidos por el operador de estos equipos y fallas cometidas en los procedimientos también reducen la confiabilidad de los resultados obtenidos.

2.2 Confiabilidad

Un reto importante en la ingeniería es la definición de la seguridad del proyecto al incluir componentes inciertas y llevar a cabo un análisis de confiabilidad en el cual basar sus decisiones. Métodos adecuados son necesarios para obtener niveles consistentes de seguridad. Los niveles de seguridad están sujetos a restricciones (económicas y sociales) importantes (Russelli, 2008).

Los análisis de confiabilidad tratan la relación entre las cargas que actúan en un sistema y la habilidad de sobrellevarlas. Tanto las cargas como las resistencias pueden ser inciertas, por lo tanto el resultado de su interacción también será incierto (Baecher & Christian, 2003). Actualmente es común expresar la confiabilidad en la forma del índice de confiabilidad, el cual puede relacionarse a una probabilidad de falla.

Estos métodos no han sido aplicados ampliamente debido a dos razones (Duncan, 2000). La primera es que los ingenieros no están familiarizados con los conceptos y términos. La segunda es que es comúnmente percibido que se requiere mayor información, tiempo y esfuerzo.

2.2.1 Índice de Confiabilidad y Probabilidad de Falla

El factor de seguridad utilizado en la práctica geotécnica se basa en la experiencia. Sin embargo, es común usar el mismo valor sin importar el grado de incertidumbre asociado (Duncan, 2000). Por lo tanto es ilógico utilizar el mismo valor del factor de seguridad en condiciones con diferentes grados de incertidumbre.

Otra forma de analizar la seguridad de un sistema es por medio del margen de seguridad Z , conocido también como función de comportamiento. Esta función puede indicar el colapso de una estructura o la pérdida de funcionamiento correcto. Se define como la diferencia entre la resistencia R y la carga L en un sistema. Si las variables de este sistema son X_i , entonces

$$Z(X_i) = R(X_i) - L(X_i) \quad 1$$

Cuando Z es menor que cero la falla ocurre. El fin del análisis de confiabilidad es asegurar la seguridad y esta solamente puede obtenerse en términos de probabilidad, donde

$$P_s = P[Z(X_i) > 0] = P[R(X_i) > L(X_i)] \quad 2$$

Donde $P[R(X_i) > L(X_i)]$ es la probabilidad que la resistencia sea mayor que la carga. La probabilidad de falla se da por

$$P_f = 1 - P_s = P[Z(X_i) < 0] = P[R(X_i) < L(X_i)]$$

3

Considerando a la resistencia y la carga como variables aleatorias con sus correspondientes funciones de densidad de probabilidad, entonces la probabilidad de falla es la zona donde ambas funciones de densidad de probabilidad se intersecan, donde L es mayor a R , tal y como se muestra en la Figura 2.1. En ella se muestra como la probabilidad de falla representa una indicación más racional de las condiciones inseguras. En ambos casos el factor de seguridad es el mismo, sin embargo la probabilidad de falla es diferente.

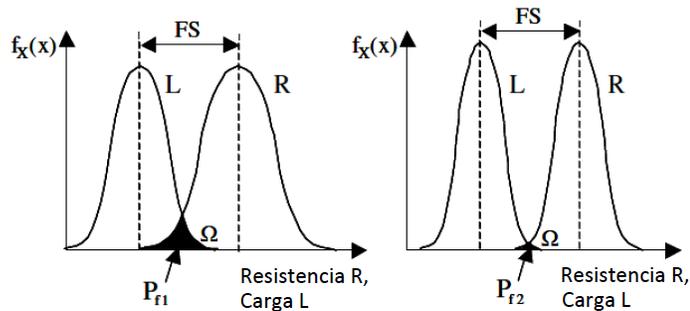


Figura 2.1 Representación gráfica de la probabilidad de falla para dos casos diferentes con un mismo factor de seguridad. Tomado de (Russelli, 2008).

Otra forma de apreciar los beneficios al considerar la probabilidad de falla se muestra en la Figura 2.2. Dos casos se presentan, el primero tiene un factor de seguridad de 1.4 y baja incertidumbre debido a la desviación estándar baja. El segundo caso tiene un factor de seguridad de 1.8 pero con mayor incertidumbre. Desde un punto de vista determinístico el caso con un factor de seguridad de 1.8 es más seguro. Pero al comparar los valores de la probabilidad de falla, ese caso tiene mayor probabilidad insatisfactoria.

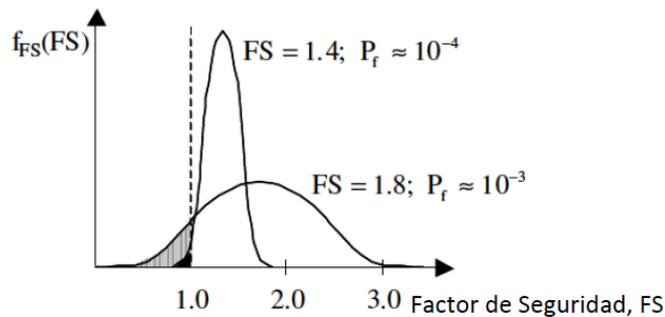


Figura 2.2 Comparación de diferentes factores de seguridad con sus respectivas probabilidades de falla. Tomado de (Russelli, 2008).

Si la resistencia y la carga siguen distribuciones normales, entonces la probabilidad de falla puede calcularse mediante

$$P_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta)$$

4

Donde Φ es la distribución estándar normal y β es un parámetro útil para caracterizar el grado de seguridad, llamado índice de confiabilidad.

$$\beta_{normal} = \frac{\mu_R - \mu_L}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_L^2 \pm 2\rho_{RL}\sigma_R\sigma_L}} = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad 5$$

Para la mayor parte del rango del índice de confiabilidad, la presunción de una distribución normal es conservativa. Para valores de β menores a 2, hay poca diferencia entre los resultados obtenidos para diferentes tipos de distribuciones estadísticas. Para valores muy pequeños de β la probabilidad de falla es ligeramente mayor para una distribución normal que para otras. Estos resultados sugieren que es razonable asumir una distribución normal ante la falta de mayor información (Baecher & Christian, 2003). Como se observa en la Figura 2.3, el índice de confiabilidad representa el número de desviaciones estándar del margen de seguridad Z por los cuales μ_Z excede el estado límite.

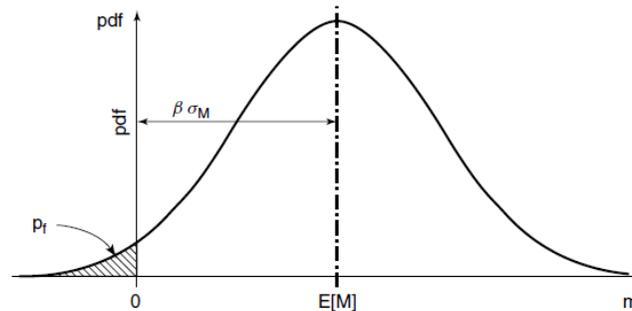


Figura 2.3 Representación gráfica del índice de confiabilidad β . Tomado de (Baecher & Christian, 2003)

Una vez calculado el índice de confiabilidad y la probabilidad de falla, el nivel de comportamiento puede compararse cualitativamente según varias clasificaciones, por ejemplo las enumeradas en las Tablas 2.1 y 2.2.

Tabla 2.1 Niveles esperados de comportamiento en términos de probabilidad de falla y sus correspondientes índices de confiabilidad. Tomado de Sivakumar & Murthy, 2005 .

Nivel de comportamiento esperado	Índice de confiabilidad (β)	Probabilidad de falla (p_f)
Alto	5.0	0.000003
Bueno	4.0	0.00003
Por encima del promedio	3.0	0.001
Por debajo del promedio	2.5	0.006
Pobre	2.0	0.023
Insatisfactorio	1.5	0.07
Peligroso	1.0	0.16

Tabla 2.2 Índice de confiabilidad y probabilidad de falla deseados. Tomado de Phoon, 2008 .

Estado Límite	Índice de confiabilidad deseado (β)		Probabilidad de falla deseada (p_f)	
	1 año	50 años	1 año	50 años
De Falla	4.7	3.8	1×10^{-6}	7.2×10^{-5}
De Servicio	2.9	1.5	2×10^{-3}	6.7×10^{-2}

Los valores de la Tabla 2.1 fueron propuestos por el Cuerpo de Ingenieros de Estados Unidos para clasificar el desempeño de obras civiles mediante la probabilidad de falla. Para la obtención de factores parciales utilizados en los análisis de estado límite, el Eurocódigo 7 propone como valores mínimos aceptables los que aparecen en la Tabla 2.2, para estructuras temporales y permanentes.

Ya que muchos parámetros no son considerados en el análisis de confiabilidad con el fin de simplificar los cálculos, la probabilidad de falla estimada debe considerarse como un límite inferior de la probabilidad de falla absoluta (Russelli, 2008). Para obtener la probabilidad de falla absoluta, sería necesario un análisis riguroso que tomará en cuenta todos los tipos de incertidumbre existentes.

En resumen, los pasos a seguir para realizar un análisis de confiabilidad son (Baecher & Christian, 2003):

1. Establecer el modelo para calcular el margen de seguridad, factor de seguridad u otra forma de medir la función de comportamiento.
2. Estimar los descriptores estadísticos de los parámetros que forman parte de la función de comportamiento. Estos descriptores son la media, desviación estándar, coeficiente de asimetría y coeficiente de correlación.
3. Cálculo de los momentos estadísticos de la función de comportamiento. El procedimiento para obtener la solución exacta de estos descriptores (media, desviación estándar, etc.) se basa en encontrar la función de distribución acumulada y la función de densidad de probabilidad de la función de comportamiento analizada (Rodríguez, 2009). Sea Z la función de comportamiento dependiente de n variables aleatorias:

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

6

La función de distribución acumulada $F_Z(z)$ será:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \iiint_{g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq z} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{g^{-1}} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^z f_{X_1 X_2 \dots X_n}(g^{-1}, x_1, x_2, \dots, x_n) \left| \frac{\partial g^{-1}}{\partial z} \right| dz dx_1 dx_2 \dots dx_n
\end{aligned}
\tag{7}$$

Donde g^{-1} :

$$g^{-1} = g^{-1}(z, x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{8}$$

La función de densidad de probabilidad $f_Z(z)$ se calcula de la siguiente forma:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(g^{-1}, x_1, x_2, \dots, x_n) \left| \frac{\partial g^{-1}}{\partial z} \right| dz dx_1 dx_2 \dots dx_n \tag{9}$$

A partir de la función de densidad de probabilidad se puede calcular la media y desviación estándar de la función de comportamiento:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \tag{10}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \tag{11}$$

La mayoría de las funciones de comportamiento no son muy fáciles de analizar mediante el procedimiento anterior. Por lo tanto, métodos aproximados deben ser utilizados.

4. Cálculo del índice de confiabilidad.
5. Cálculo de la probabilidad de falla.

3 Conceptos Probabilísticos

Una de las desventajas en el análisis de estabilidad es la alta variabilidad de las propiedades de los suelos. Esta heterogeneidad puede atribuirse a las diferentes condiciones de depositación de los suelos y las diferentes historias de esfuerzos a los que ha estado expuesto. Los análisis probabilísticos proveen una excelente herramienta para tomar en cuenta la variabilidad en las propiedades de los suelos y para desarrollar algoritmos racionales para estimar los parámetros de diseño mediante probabilidades donde el nivel de riesgo asociado puede cuantificarse (Elkateb, Chalaturnyk, & Robertson, 2003).

En los análisis probabilísticos los parámetros geotécnicos, que representan la mayor fuente de incertidumbre, son tratados como variables aleatorias. Una variable aleatoria es una función matemática definida en un espacio que asigna una probabilidad a cada evento posible. En términos prácticos, es una variable cuyo valor preciso (o rango de valores) no pueden predecirse con seguridad, solamente con una probabilidad asociada.

3.1 Descriptores Estadísticos

Los parámetros estadísticos más importantes relacionados con la variabilidad del suelo son el valor medio, la desviación estándar, la asimetría y el coeficiente de correlación (Russelli, 2008).

El valor medio de una variable aleatoria, también definido como primer momento central o valor esperado es la suma de la probabilidad de cada posible resultado de un experimento multiplicado por su valor. Por lo tanto representa el promedio de todos los datos experimentales disponibles.

$$\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad 12$$

Además de la media, otra importante característica de una variable aleatoria es la medida de su dispersión o varianza, también conocida como el segundo momento central o momento de inercia de la variable. Esta cantidad indica que distante están los valores de la variable de la media.

$$\sigma^2_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2 \quad 13$$

Una medida más clara de la dispersión es la desviación estándar σ calculada a partir de la raíz cuadrada de la varianza

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma^2_X} \quad 14$$

Como es difícil visualizar si la dispersión de una variable es grande o pequeña a partir de la desviación estándar, es más conveniente usar el coeficiente de variación CoV. Este coeficiente adimensional describe si la dispersión relativa del valor central de una variable es grande o pequeña. El coeficiente está definido por

$$\text{CoV}_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad 15$$

Otro descriptor útil es la asimetría o tercer momento central. Es una medida del grado de asimetría de la función de densidad de probabilidad.

$$v_X = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \mu_X)^3}{\sigma_X^3} f_X(x) dx \quad 16$$

En la Figura 3.1 se puede observar gráficamente el significado del valor de la asimetría. Cuando este coeficiente es cero la función es simétrica.

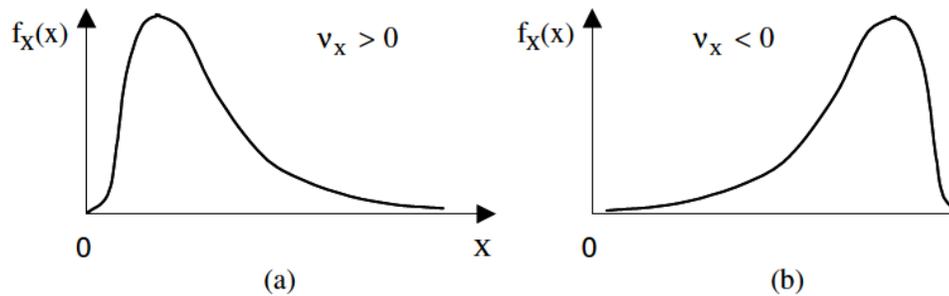


Figura 3.1 a) Ejemplo de distribución positiva y b) negativa. Tomado de (Russelli, 2008)

La covarianza es una medida del grado de dependencia lineal entre dos o más variables. Si X y Y son variables aleatorias, la covarianza se calcula mediante

$$\text{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{XY}(x, y) dx dy \quad 17$$

En vez de la covarianza, es preferible utilizar el coeficiente de correlación

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad -1 \leq \rho_{XY} \leq 1 \quad 18$$

Cuando el coeficiente de correlación es igual a ± 1 existe una relación lineal entre la variable, como se muestra en la Figura 3.2. Si el coeficiente es igual a cero, se puede decir que las variables son independientes entre sí.

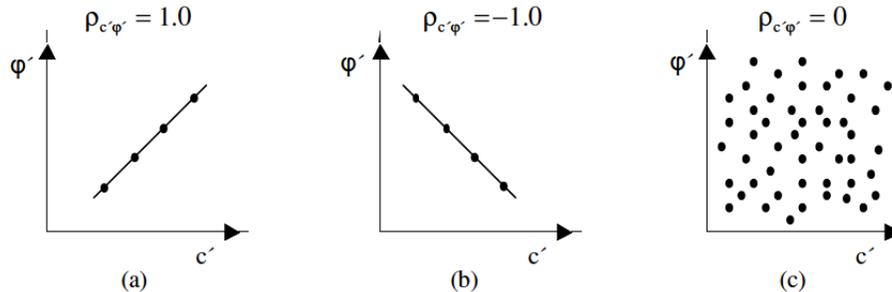


Figura 3.2 a) Variables perfectamente correlacionadas de forma positiva. b) Variables perfectamente correlacionadas de forma negativa. c) Variables no correlacionadas. Tomado de (Russelli, 2008)

3.2 Distribuciones Probabilísticas

La función de distribución acumulada $F_X(x)$ describe la probabilidad que una variable aleatoria X tome un valor menor o igual a un número x , para cada valor de x . La función se define como

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad -\infty < x < +\infty \quad 19$$

Si la variable es continua, sus medidas de probabilidad también puede describirse en términos de la función de densidad de probabilidad $f_X(x)$. Esta función puede integrarse para obtener la probabilidad que una variable aleatoria tome un valor en un intervalo dado.

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad 20$$

La probabilidad que una variable aleatoria X en un intervalo $[x_1, x_2]$ puede evaluarse como

$$\int_{x_1}^{x_2} f_X(x) = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \leq x_2) \quad 21$$

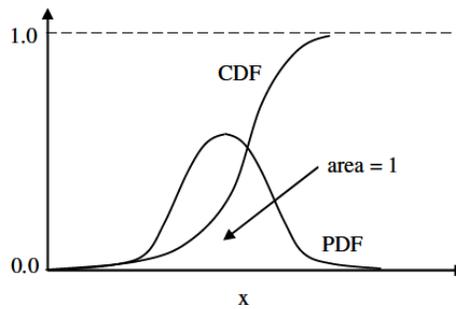


Figura 3.3 Función de probabilidad acumulada y de densidad. Tomado de (Baecher & Christian, 2003).

La función de distribución acumulada debe ser una función continua ascendente con valores en el rango $[0, 1]$. Como consecuencia la función de densidad de probabilidad es una función no negativa para todos los valores x y el área total debajo de la función es igual a 1. Las dos funciones pueden observarse en la Figura 3.3.

Las principales características de una variable aleatoria pueden ser descritas completamente si la función de densidad de probabilidad y sus parámetros asociados son conocidos. En muchos casos, desafortunadamente, la forma de la distribución es desconocida y muy a menudo una descripción aproximada es necesaria. Varias distribuciones continuas pueden utilizarse como una buena aproximación de una variable aleatoria.

3.2.1 Distribución Normal

La distribución normal es la distribución probabilística más comúnmente utilizada debido a su simetría y simplicidad matemática. Es común caracterizar las variables aleatorias con un coeficiente de variación menor de 30% con esta distribución (Russelli, 2008). Su función de densidad de probabilidad es

$$f_X(x) = N(\mu_X, \sigma^2_X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right], \quad -\infty < x < +\infty \quad 22$$

Para simplificar los cálculos, una distribución normal arbitraria puede convertirse en una distribución estándar normal, como se observa en la Figura 3.4. Esto se logra al transformar la variable normal X en una variable estándar normal Z mediante

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad 23$$

Donde Z tiene una media 0 y desviación estándar de 1. Su función de densidad de probabilidad es

$$\Phi_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right], \quad -\infty < x < +\infty \quad 24$$

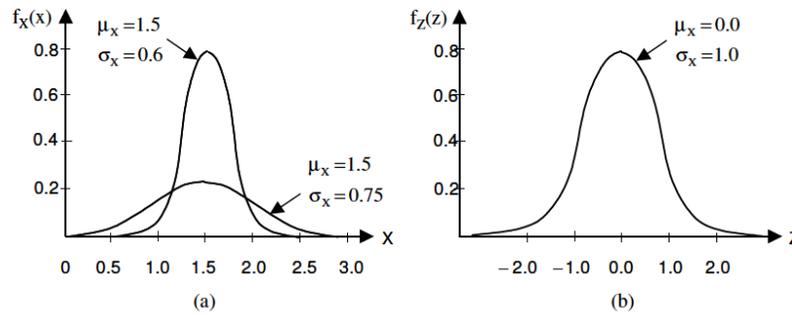


Figura 3.4 a) Función de densidad de probabilidad normal. b) Función de densidad de probabilidad normal estándar con media igual a cero y desviación estándar igual a 1. Tomado de (Russelli, 2008)

Probabilidades asociadas a la distribución $\Phi_Z(z)$ son tabuladas en libros y en softwares.

Desde el punto de vista geotécnico, esta distribución permite valores negativos, los cuales son físicamente imposibles. Debido a esto, esta distribución es una aproximación inicial. El error incurrido puede ser pequeño cuando el coeficiente de variación es pequeño. Por ejemplo si es menor o igual a 0.3, entonces la probabilidad que la variable tome un valor negativo es menor o igual a 0.0004 (Griffiths & Fenton, 2007).

3.2.2 Distribución Lognormal

Una variable aleatoria X tiene una distribución lognormal si su logaritmo natural $Y = \ln(X)$ tiene una distribución normal. La formula general de esta distribución es

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(x - x_0)\sigma_{\ln(X)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x - x_0) - \mu_{\ln(X)}}{\sigma_{\ln(X)}}\right]^2\right\}, \quad x_0 < x < +\infty \quad 25$$

Donde x_0 es el parámetro de ubicación de la variable aleatoria X . Cuando este parámetro es cero, uno regresa a la distribución estándar lognormal. Para transformar la variable aleatoria lognormal X en una variable estándar normal $Y = \ln(X)$ (Russelli, 2008):

$$\mu_{\ln(X)} = \ln(\mu_X - x_0) - \frac{1}{2} \ln\left[1 + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X - x_0}\right)^2\right] \quad 26$$

$$\sigma_{\ln(X)} = \sqrt{\ln\left[1 + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X - x_0}\right)^2\right]} \quad 27$$

$$\nu_{\ln(X)} = 3\frac{\sigma_X}{\mu_X - x_0} + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X - x_0}\right)^3 \quad 28$$

La distribución lognormal es generalmente aceptable para modelar razonablemente muchas propiedades del suelo porque es estrictamente no negativa. Provee una forma razonable en casos donde el coeficiente de variación es mayor a 30% (Russelli, 2008).

3.3 Ajuste de Función de Densidad de Probabilidad Matemática a Datos

Cuando los datos han sido recopilados, pueden ser utilizados en una de las siguientes tres formas para especificar una distribución probabilística (Fenton & Griffiths, 2008):

1. Los datos mismos son usados directamente en la simulación. Esta es la opción menos deseable ya que el procedimiento solo podrá simular los datos obtenidos. Generalmente hay pocos datos que capturen el futuro comportamiento.
2. Los valores son usados directamente para definir una distribución empírica.
3. Una distribución teórica razonable es ajustada a los datos observados.

Para verificar que tan razonable se ajustan los datos experimentales a funciones de densidad de probabilidad teóricas, existen varios métodos estadísticos que pueden ser utilizados. Las pruebas más comunes son las pruebas de bondad de ajuste Chi Cuadrado, Kolmogorov- Smirnov y Anderson-Darling, (Rychlik & Rydén, 2006).

El primer paso al escoger la distribución es considerar que es físicamente razonable para la propiedad del suelo que se trata de modelar. La distribución normal es muy popular. Su mayor desventaja es su rango de valores entre $-\infty$ y $+\infty$. Para la mayoría de las propiedades, valores negativos no tienen sentido. Nunca tendremos suficiente información para establecer con precisión cual distribución es la verdadera. Hay que tomar en cuenta las siguientes recomendaciones para escoger la mejor distribución (Fenton & Griffiths, 2008):

- Si hay suficientes datos, seleccionar la distribución que mejor se ajuste al histograma de los datos.
- Asegurarse que la distribución sea físicamente razonable.
- Hacer una revisión bibliográfica para conocer como otros han atacado el problema.
- Escoger la distribución más simple que se pueda, sin perder realidad.
- Estimar los parámetros de una distribución y probar que tan bien dicha distribución se ajusta a la distribución.

4 Métodos Probabilísticos

Procedimientos probabilísticos para el análisis de estabilidad de taludes varían en suposiciones, limitaciones, capacidad de manejar problemas complejos y complejidad matemática. La mayoría de ellos pertenecen a dos categorías: métodos aproximados (Primer Orden Segundo Momento, Estimativos Puntuales, Hasofer-Lind) y simulación de Monte Carlo (El-Ramly et al., 2002).

Los métodos aproximados hacen suposiciones simplificantes que generalmente limitan su aplicación a tipos de problemas específicos. Muy a menudo se ignoran la variabilidad espacial de las propiedades del suelo. Los métodos aproximados permiten la estimación de la media y la varianza del factor de seguridad pero no proveen la forma de la función de densidad de probabilidad, así que la probabilidad de falla solo puede ser obtenida asumiendo una distribución probabilística paramétrica del factor de seguridad (típicamente normal o lognormal).

Pocos estudios han utilizado simulación de Monte Carlo en comparación con métodos aproximados. Uno de estos estudios consistió en la comparación de la simulación de Monte Carlo con los métodos de Primer Orden Segundo Momento, Segundo Orden Segundo Momento y Estimativos Puntuales al análisis de capacidad portante de cimentaciones superficiales (Russelli, 2008). El esfuerzo computacional requerido por las simulaciones hasta hace poco fue considerado poco económico.

4.1 Método de Primer Orden Segundo Momento

Uno de los métodos más simples para estimar los parámetros estadísticos de la función de comportamiento analizada es el Método de Primer Orden Segundo Momento. Este método utiliza los primeros términos de la expansión de la serie de Taylor de la función de comportamiento o de falla analizada, con el fin de determinar los valores de los dos primeros momentos centrales (la media y la varianza) (Baecher & Christian, 2003). El procedimiento consiste en una linealización alrededor del valor medio de las variables aleatorias de un problema probabilístico. Si existe un número N de variables aleatorias, este método requiere evaluar N derivadas parciales de la función de comportamiento o calcular una aproximación numérica utilizando $2N+1$ puntos.

Al realizarse una expansión, esta se trunca después del término lineal, por esta razón se conoce como primer orden. Se le conoce como método de segundo momento porque la varianza es una forma del segundo momento y es el resultado estadístico de mayor orden estimado en el análisis.

Ya que los términos $(x_i - \mu_{x_i})$ tienen valores pequeños, al elevarse al cuadrado, al cubo y ordenes mayores, sus valores serán aún menores y pueden ser ignorados. Considerando una función de comportamiento g con n variables aleatorias X_i , su expansión de series de Taylor alrededor de la media de las variables aleatorias $\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}$, truncada después de los términos de primer orden, genera

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx g(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}) + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_{x_i}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad 29$$

El signo de aproximación reemplaza el signo de igualdad ya que es una estimación (hay que recordar que los términos de mayor orden han sido removidos). Para encontrar la media, es necesario integrar g multiplicado por la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables X_1 a la X_n , entre $-\infty$ y $+\infty$. La ecuación anterior es la suma de $n+1$ términos, así que cada término puede ser integrado y los resultados son sumados. Los términos $g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$ son constante, también lo son las derivadas parciales (considerados puntos de linearización) ya que han sido evaluadas en las medias de las variables individuales. Además, la integral de $-\infty$ y $+\infty$ de una función de densidad de probabilidad multiplicada por una constante es simplemente esa constante. Todo esto nos da

$$\mu_g \approx g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) + \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_{X_i}) f_{X_i}(x_i) dx_i \quad 30$$

Pero cada uno de estos términos después del signo de suma debe ser cero, por lo tanto

$$\mu_g \approx g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad 31$$

Es razonable que el valor esperado de una función de varias variables sea aproximadamente igual al valor de la función calculada con el valor medio de todas las variables. Para obtener la varianza de la función

$$\sigma^2_g \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{X_i X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \sigma^2_{X_i} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq 1}^n \text{COV}(X_i, X_j) \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \quad 32$$

Si las variables aleatorias no están correlacionadas entonces el término que contiene la covarianza no se toma en cuenta. Entre mayor sea el número de variables aleatorias, los cálculos se incrementarán. Por tanto para n variables aleatorias se realizarán $2n+1$ cálculos.

A continuación se presentan algunas ventajas importantes del Método de Primer Orden Segundo Momento (Russelli, 2008):

- El método es exacto para funciones de comportamiento lineal.
- Este método presenta un error de la estimación entre 5% y 15%, al ser comparado con métodos más robustos como la Simulaciones de Monte Carlo. Estos valores son razonables en el campo de la geotecnia.

Para evitar el uso erróneo del Método de Primer Orden Segundo Momento en análisis probabilísticos, se debe conocer sus limitaciones (Russelli, 2008):

- Debido al truncamiento de la serie de Taylor después del término de primer orden, la precisión del método se deteriora si las segundas y demás derivadas de la función de comportamiento son significativas. Es así que la precisión del método disminuye a medida que la no linealidad de la función incrementa.
- La asimetría de la función de la densidad probabilística no se puede estimar.
- A medida que el nivel de incertidumbre de las variables aleatorias incrementa y sus funciones de densidad de probabilidad son más asimétricas, la precisión del método disminuye.
- La forma de la función de densidad de probabilidad de las variables aleatorias no es tomada en cuenta al momento de realizar los cálculos. Las variables aleatorias son descritas utilizando solamente sus medias y desviaciones estándar. De esta manera no se obtiene la forma de la función de densidad de probabilidad de la función de comportamiento, por lo que debe asumirse. Esta suposición introduce imprecisiones.

4.2 Método de Estimativos Puntuales

Rosenbleuth propuso un método simple y elegante para obtener los momentos estadísticos de una función de comportamiento al evaluarla en un conjunto de puntos discretos escogidos específicamente (Baecher & Christian, 2003). Además del método original propuesto por Rosenbleuth, existe otra variación para calcular el índice de confiabilidad y la probabilidad de falla (Sánchez, 2010). El Método de Estimativos Puntuales es capaz de estimar los momentos estadísticos a partir de varias variables aleatorias.

La idea básica de este método consiste en sustituir las distribuciones probabilísticas de las variables aleatorias continuas por distribuciones discretas equivalentes, las cuales tendrán los mismos tres primeros momentos centrales. Luego se calcula la media, desviación estándar y asimetría de la función de comportamiento.

Debe considerarse una función de comportamiento Y dependiente de n variables aleatorias X_i . Dichas variables son simétricas y están correlacionadas. El proceso escoge 2^n puntos de tal forma que el valor de cada variable esta una desviación estándar por arriba y por debajo de la media. Estos puntos se conocen como puntos de muestreo. Al conocer el valor medio μ_{X_i} y la desviación estándar σ_{X_i} de las variables aleatorias, la ubicación de los puntos de muestreo x_{i+} y x_{i-} pueden ser calculados de la siguiente forma

$$x_{i+} = \mu_{X_i} + \xi_{X_{i+}} \sigma_{X_i} \quad 33$$

$$x_{i-} = \mu_{X_i} + \xi_{X_{i-}} \sigma_{X_i} \quad 34$$

Donde las desviaciones estándar unitarias $\xi_{X_{i+}}$ y $\xi_{X_{i-}}$ dependen de los coeficientes de asimetría ν_{X_i} de las variables aleatorias. Estas se calculan mediante:

$$\xi_{X_{i+}} = \frac{v_{X_i}}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{v_{X_i}}{2}\right)^2} \quad 35$$

$$\xi_{X_{i-}} = \frac{v_{X_i}}{2} - \sqrt{1 + \left(\frac{v_{X_i}}{2}\right)^2} \quad 36$$

Ahora es posible calcular el valor de la función de comportamiento utilizando los puntos de muestreo o estimativos x_{i+} y x_{i-} . Para n variables aleatorias, la función se evalúa en 2^n puntos.

Los pesos P_i , también conocidos también como concentraciones de probabilidad, deben ser calculados para tomar en cuenta la contribución de la correlación entre las variables aleatorias. Ya que una función de densidad de probabilidad tiene un área unitaria, también los pesos deben sumar uno y tienen que ser positivos. Los pesos se obtienen mediante diferentes expresiones dependiendo del número de variables y su correlación. En la Figura 4.1 se puede observar la función de densidad de probabilidad resultante de evaluar la función de comportamiento en cada uno de los puntos de muestreo. Ya que la distribución es asimétrica, los pesos asignados a cada una de las evaluaciones tienen diferentes valores.

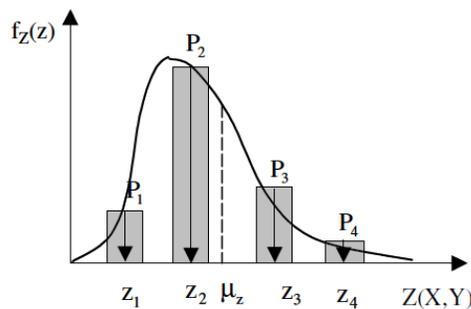


Figura 4.1 Representación de los pesos asignados a los resultados de la función de comportamiento. Tomado de (Russelli, 2008).

Cuando existe n variables aleatorias, los pesos se calculan mediante la siguiente fórmula

$$P_{(s_1 s_2 \dots s_n)} = \frac{1}{2^n} \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (s_i)(s_j)\rho_{ij} \right] \quad 37$$

Donde s es $+1$ cuando el valor de la variable es una desviación estándar por arriba de la media. Será -1 cuando esté por debajo de la media. Finalmente los tres primeros momentos centrales de la función de comportamiento se calculan de la siguiente manera:

$$\mu_{Y(X_i)} = \sum_{i=1}^{2^n} P_i Y(X_i = x_i) \quad 38$$

$$\sigma^2_{Y(X_i)} = \sum_{i=1}^{2^n} P_i (Y(X_i = x_i) - \mu_{Y(X_i)})^2 \quad 39$$

$$v_{Y(X_i)} = \frac{1}{\sigma^3_{Y(X_i)}} \sum_{i=1}^{2^n} P_i (Y(X_i = x_i) - \mu_{Y(X_i)})^3 \quad 40$$

Las ventajas más importantes del Método de Estimativos Puntuales al compararse con otros métodos son (Russelli, 2008):

- Este método no requiere el conocimiento de la forma de la función de densidad de probabilidad de las variables aleatorias.
- Provee, además de la media y la desviación estándar, el coeficiente de asimetría con poco esfuerzo computacional.
- El método analiza mejor el comportamiento de funciones no lineales.
- Para calcular los valores estadísticos no es necesario calcular las derivadas parciales.
- Como es un proceso no iterativo, el problema converge directamente.
- Los valores de la media y desviación estándar obtenidos concuerdan muy bien con los resultados de las Simulaciones de Monte Carlo, con la ventaja de un menor esfuerzo computacional.

Las limitaciones del Método de Estimativos Puntuales son (Russelli, 2008):

- Se requiere evaluar la función de comportamiento en 2^n puntos. Entre más variables aleatorias mayor esfuerzo computacional.
- No se obtiene información acerca de la forma de la función de densidad de probabilidad de la función de comportamiento.
- La implementación del método en códigos de elementos finitos requiere software adicional.
- Se sugiere que no debe aplicarse para evaluar momentos mayores a la varianza para funciones no lineales.
- Adicionalmente entre más grande sea el coeficiente de variación, será mayor el error de la estimación.

4.3 Método de Hasofer-Lind

Una desventaja del método de Primer Orden Segundo Momento es que los resultados dependen de la media de las variables en las cuales las derivadas parciales de la función de comportamiento son evaluadas. Aunque produce resultados exactos para funciones lineales, se introducen errores para funciones no lineales. Hasofer-Lind propuso una mejora del método de Primer Orden Segundo Momento basado en una interpretación geométrica del índice de confiabilidad como una medida en un espacio adimensional entre el pico de la distribución multivariada de parámetros aleatorios y la función que define la condición de falla (Baecher & Christian, 2003).

El método de Hasofer-Lind, también conocido como Método de Confiabilidad de Primer Orden, calcula las derivadas de la función de comportamiento en un punto crítico en la superficie de falla, también llamado punto de diseño. Usualmente una solución iterativa es requerida para calcular este punto, pero el proceso tiende a converger muy rápidamente. En la Figura 4.2 se puede observar una función Z con dos variables aleatorias, R y L . Esta función de comportamiento ($Z = 0$) representa el límite entre la zona de falla ($Z < 0$) y la zona segura ($Z > 0$).

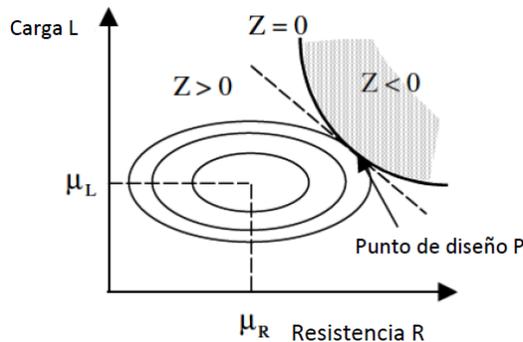


Figura 4.2 Linearización de la función de comportamiento Z . Tomado de (Russelli, 2008).

En la figura anterior, la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias R y L es linealizada en el punto de diseño P .

El primer paso de este método es reformular el problema con variables adimensionales. Para una función de comportamiento g , existen n variables aleatorias. Cada variable x_i se define por su media μ_{x_i} y su desviación estándar σ_{x_i} . Ahora podemos definir una variable prima

$$x'_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad 41$$

Dicha variable es adimensional y tiene media igual a cero y desviación estándar igual a 1. Reordenando la ecuación anterior obtenemos

$$x_i = \sigma_{x_i} x'_i + \mu_{x_i} \quad 42$$

Podemos reescribir cualquier función de comportamiento utilizando estas variables primas, obteniendo una función de comportamiento $g(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Estas relaciones pueden expresarse en forma matricial:

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad 43$$

$$\mathbf{x}' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\} \quad 44$$

$$g(\mathbf{x}') = 0 \quad 45$$

De la definición de las variables primas,

$$\frac{dx_i}{dx'_i} = \sigma_{x_i} \quad 46$$

$$\frac{dx'_i}{dx_i} = \frac{1}{\sigma_{x_i}} \quad 47$$

Por lo tanto, para cualquier función f

$$\frac{df}{dx'_i} = \frac{df}{dx_i} \frac{dx_i}{dx'_i} = \sigma_{x_i} \frac{df}{dx_i} \quad 48$$

Este resultado puede generalizarse cuando existen más de dos variables. En un espacio multidimensional, la distancia entre el origen y un punto en la superficie de falla es

$$d = \sqrt{x'^2_1 + x'^2_2 + \dots + x'^2_n} = (\mathbf{x}'^T \mathbf{x}')^{1/2} \quad 49$$

Donde \mathbf{x}' es el vector de las x'_i y T indica la transpuesta. El problema es una minimización que puede resumirse como el requerimiento de minimizar d dado que la función de comportamiento igual a cero sea satisfecha. Este proceso puede llevarse a cabo mediante comandos de “minimizar” o “resolver” en hojas de cálculo.

El gradiente de la función de falla, \mathbf{G} , puede definirse de la siguiente manera

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\partial g}{\partial x'_1}, \frac{\partial g}{\partial x'_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x'_n} \right) \quad 50$$

Esta puede normalizarse en un vector unitario α :

$$\alpha = \frac{\mathbf{G}}{(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{1/2}} \quad 51$$

Donde cada término del vector será

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x'_i}\right)}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial g}{\partial x'_i}\right)^{1/2}}} \quad 52$$

Se utilizará un asterisco para indicar que el vector unitario será evaluado en el punto de falla. Como consecuencia, las coordenadas del punto de falla serán

$$x'_i{}^* = -\alpha_i{}^* \beta \quad 53$$

Todo este procedimiento se puede resumir mediante el algoritmo de Rackwitz, el cual contiene 6 pasos iterativos:

1. Asumir valores iniciales $x'_i{}^*$ para luego calcular los correspondientes valores $x'_i{}^*$.
2. Calcular \mathbf{G} y α en $x'_i{}^*$.
3. Formar las expresiones para las nuevas $x'_i{}^*$

$$x'_i{}^* = \mu_{x_i} - \alpha_i \sigma_{x_i} \beta \quad 54$$

4. Resolver para β al sustituir dichas expresiones en

$$g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad 55$$

5. Con el β , calcular nuevos valores de

$$x'_i{}^* = -\alpha_i \beta \quad 56$$

6. Repetir los pasos 2 al 5 hasta que el proceso converja.

Cuando las variables están correlacionadas, se deben hacer ciertos ajustes necesarios. Existen dos técnicas. Una de ellas está basada en la descomposición de Choleski de la matriz de correlación. \mathbf{K} es la matriz de correlación de las variables aleatorias:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1n} & \rho_{2n} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad 57$$

Ya que \mathbf{K} debe ser simétrica y positiva, se puede separar en dos matrices que son transpuestas entre ellas.

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}\mathbf{S}^T \quad 58$$

\mathbf{S} es una matriz triangular inferior y su transpuesta \mathbf{S}^T es una matriz triangular superior. Ahora, sea \mathbf{z} un vector de n variables independientes $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, donde cada una tiene una distribución normal estándar. Queremos encontrar el vector \mathbf{w} de n variables, las cuales tienen distribución estándar normal con matriz de correlación \mathbf{K}

$$\mathbf{w} = \mathbf{S}\mathbf{z} \quad 59$$

$$w_i = \sum_{j=1}^n s_{ij}z_j \quad 60$$

El vector \mathbf{z} consiste de variables primas sin correlacionar, las cuales son la base para el método de Hasofer-Lind. El vector \mathbf{w} es otro juego de variables primas, con la diferencia que están correlacionadas.

Si pudiéramos trabajar con las variables sin correlacionar, todos los pasos anteriores podrían ser aplicables, particularmente la distancia d

$$\begin{aligned} d &= (\mathbf{z}^T \mathbf{z})^{1/2} = [(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{w})^T (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{w})]^{1/2} = [\mathbf{w}^T \mathbf{S}^{-1T} \cdot \mathbf{S}^{-1}\mathbf{w}]^{1/2} \\ &= [\mathbf{w}^T \mathbf{S}^{T-1} \cdot \mathbf{S}^{-1}\mathbf{w}]^{1/2} = [\mathbf{w}^T (\mathbf{S}\mathbf{S}^T)^{-1}\mathbf{w}]^{1/2} \\ &= [\mathbf{w}^T \mathbf{K}^{-1}\mathbf{w}]^{1/2} \end{aligned} \quad 61$$

En otras palabras, la correlación puede ser incorporadas en el análisis utilizando el mismo criterio de falla solamente sustituyendo la distancia d por

$$d = [\mathbf{x}'^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{x}']^{1/2} \quad 62$$

Se observa que si \mathbf{m} es el vector de las medias y \mathbf{C} es la matriz de covarianza, la ecuación anterior puede reescribirse como

$$d = [(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m})]^{1/2} \quad 63$$

El uso del Método De Hasofer-Lind tiene las siguientes ventajas (Russelli, 2008):

- El índice de confiabilidad y la probabilidad de falla son independientes de la forma de la función de comportamiento y pueden evaluarse para funciones no lineales.
- Es un método más eficiente para estimar probabilidades de falla bajas al ser comparado con otros.

La desventaja más importante de este método es que, al igual que el Método De Primer Orden Segundo Momento, no provee la forma de la función de densidad de probabilidad y el coeficiente de asimetría de la función de comportamiento (Russelli, 2008).

4.4 Simulación de Monte Carlo

Un tipo de técnica de simulación es el Método de Monte Carlo. Se asumen variables aleatorias generadas de forma consistente con la función de densidad de probabilidad correspondiente. Luego el factor de seguridad se calcula con cada una de las combinaciones. El proceso se repite muchas veces, típicamente miles de veces para obtener una distribución aceptable de la función de comportamiento. Por lo tanto, el método de Monte Carlo consiste en resolver un problema determinístico muchas veces para construir una distribución estadística, de donde se calculan la media y la desviación estándar de la función de comportamiento. Este método se acerca a la respuesta real de la función de comportamiento, por lo que se usa como referencia de comparación con otros métodos probabilísticos (Russelli, 2008).

Cuando las variables están correlacionadas, los números aleatorios deben estar correlacionados también (Baecher & Christian, 2003). Esto es relativamente fácil de hacer si las variables tienen una distribución normal. Existe un vector \mathbf{X} consiste de n números aleatorios, cada uno estadísticamente independiente y con una distribución normal estándar.

Se relaciona \mathbf{X} con la matriz de correlación \mathbf{K} (mediante la descomposición de Cholesky, [ecuación 58](#)) para generar un vector \mathbf{Y} con n números aleatorios correlacionados (con distribución normalmente estándar). Esto se logra mediante:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}^T \mathbf{X} \quad 64$$

Para calcular las variables aleatorias z_i con medias y desviaciones estándar correctas, se utiliza la siguiente fórmula:

$$z_i = \mu_{z_i} + \sigma_{z_i}y_i$$

65

Una vez calculados las variables, se resuelve la función de comportamiento con cada uno de los conjuntos generados aleatoriamente. Es así como se obtiene miles de resultados, los cuales pueden ser tratados estadísticamente para calcular la media, desviación estándar y asimetría de la función de comportamiento.

5 Deslizamientos Superficiales

Las fallas superficiales son uno de los tipos de deslizamientos más comunes en taludes compuestos por suelos residuales en zonas sub-tropicales y tropicales donde se experimentan precipitaciones intensas y prolongadas (Fourie, 1996; Rahardjo et al., 2009). Los taludes con pendientes muy altas son propensos a este tipo de deslizamientos. Se caracterizan porque la superficie de falla se encuentra paralela a la cara original del talud y por tener una profundidad no mayor a 3 metros (Meisina & Scarabelli, 2007). En la Tabla 5.1 se enumera la profundidad de la superficie de falla según algunos investigadores.

Tabla 5.1 Profundidad de la superficie según varios investigadores.

Investigadores	Profundidad
Meisina & Scarabelli, 2007	1.0 – 2.0
Kim, Jeong, Park, & Sharma, 2004	2.0 – 3.0
Xie, Esaki, & Cai, 2004	0.5 – 2.0
Tsaparas, Rahardjo, Toll, & Leong, 2002	< 2.0
Cho & Lee, 2002	2.0 – 3.0
Van Asch, Buma, & Van Beek, 1999	1.0 – 2.0
Crosta & Frattini, 2003	0.6 – 1.0
Terlien, 1998	2.0
Fourie, 1996	1.0 – 1.5

Los factores que controlan la ocurrencia y distribución de los deslizamientos superficiales en un área específica se pueden dividir en dos categorías: variables cuasi-estáticas y variables dinámicas (Crosta & Frattini, 2003; Rosso, Rulli, & Vannucchi, 2006).

Las variables cuasi-estáticas son las relacionadas con la geología, geomorfología (altura y pendiente del talud, patrones de drenaje, áreas de convergencia y divergencia) y propiedades geotécnicas (cohesión, ángulo de fricción, permeabilidad). Estas variables contribuyen a la definición de la susceptibilidad de los taludes a la falla y definen la distribución espacial de los deslizamientos.

Las variables dinámicas o transitorias (como el grado de saturación y la cohesión aparente debida a la presencia de raíces y/o a la saturación parcial del suelo) controlan las fallas en taludes susceptibles. Estas variables caracterizan los patrones temporales de los deslizamientos y son controladas por procesos climáticos (temporadas lluviosas) y por actividades humanas (uso de la tierra, reconfiguración del terreno, cambios en los patrones de drenaje).

5.1 Detonante

La precipitación es comúnmente conocida como una de las causas principales que desencadenan los deslizamientos superficiales. Generalmente se ha observado que el nivel freático en los taludes se encuentra a una profundidad considerable. En el momento de la falla, no existe evidencia que las precipitaciones causen un incremento suficiente del nivel freático para causar estas fallas superficiales (Rahardjo et al., 2009). Por lo tanto, la saturación del suelo superficial se debe a la

infiltración de la lluvia a través de la zona no saturada lo cual genera un incremento de la presión poros en el plano potencial de falla el cual reduce la resistencia cortante del suelo, causando variaciones en la estabilidad del talud (Kim et al., 2004; Rahardjo et al., 2009).

Otros investigadores atribuyen estas fallas a la profundización de un frente húmedo en el talud resultando en un incremento en el contenido de humedad, un rápido descenso de la cohesión aparente seguido de una disminución de la succión, y como consecuencia una disminución de la resistencia cortante a una profundidad crítica (Kim et al., 2004; Van Asch, Van Beek, & Bogaard, 2009).

Se ha llegado a la conclusión, mediante la utilización de tensiómetros, que la succión tiene valores altos muy cerca de la superficie de un talud. Durante períodos de lluvia, la fluctuación de los valores de la succión es mayor cerca de la superficie. Se observó que durante la época húmeda la succión casi llegaba a cero en la superficie pero que no se daba mayor variación a mayor profundidad (Fourie, 1996).

5.2 Tipos de Análisis de Estabilidad Superficial

Tradicionalmente, la predicción de deslizamientos inducidos por lluvia se basaba en el reconocimiento de terrenos propensos a deslizamientos e identificación de parámetros meteorológicos que causan fallas en los taludes (Iverson, 2000). Estos métodos empíricos son importantes, pero no proveen un marco teórico para entender como los procesos hidrológicos influyen en la ubicación, tiempo y razón de deslizamientos o anticipar como estas amenazas pueden cambiar en respuesta a cambios en el clima o uso de la tierra.

La predicción de estos deslizamientos es una tarea difícil debido a que este proceso depende de muchas variables (propiedades del suelo, morfología del talud, cobertura vegetal, variabilidad temporal y espacial de la lluvia). Los métodos utilizados para analizar estos fenómenos se dividen métodos empíricos y métodos completos (Capparelli, Biondi, De Luca, & Versace, 2009).

5.2.1 Métodos Empíricos

Los modelos empíricos tratan de identificar la relación entre deslizamientos y la lluvia basándose en deslizamientos observados y las correspondientes precipitaciones. Los intervalos de lluvia considerados dependen de la profundidad de los deslizamientos. En el caso de deslizamientos superficiales, es suficiente considerar la lluvia ocurrida en las horas previas (hasta 24-48 horas) (Capparelli et al., 2009).

Uno de los primeros trabajos en la predicción de deslizamientos superficiales consistió en analizar 73 eventos lluviosos que produjeron deslizamientos superficiales (Caine, 1980). Basado en esta información se propuso un umbral global para la ocurrencia de este tipo de movimientos en masa. Dicha ecuación se presenta a continuación

$$I = 14.82 \times D^{-0.39} \quad (0.167 < D < 500) \quad 66$$

Donde D es la duración de la lluvia en horas e I es la intensidad de lluvia en milímetros por hora.

5.2.2 Métodos Completos

Aunque existan correlaciones entre deslizamientos con una intensidad crítica o duración crítica de lluvia, es importante notar que la intensidad o cantidad de lluvia por si solas no pueden ser indicativos de deslizamientos. Resultados indican que los principales parámetros que controlan la inestabilidad de los taludes expuestos a lluvia son la intensidad y las propiedades del suelo. La ubicación inicial del nivel freático y la geometría del talud juegan un rol secundario porque estos parámetros controlan principalmente el factor de seguridad inicial del talud (Ekanayake & Phillips, 1999).

Otra metodología para el análisis de estos eventos consiste en la aplicación de modelos hidrológicos (que expliquen la infiltración de agua) en conjunto con modelos geotécnicos (que analicen la estabilidad del talud) para encontrar los umbrales críticos de lluvia que generarán la falla. Las autoridades locales pueden utilizar los resultados obtenidos para el ordenamiento del uso de la tierra y para desarrollar sistemas de alerta temprana que mejorarán los procedimientos de evacuación; mientras que los ingenieros geotécnicos pueden utilizarlo en el diseño seguro de taludes (Terlien, 1998).

Para el análisis de la respuesta hidrológica del talud existen modelos que simulan el ingreso del frente húmedo en el suelo, haciendo la simplificación que la conductividad hidráulica y la succión son constantes en la zona no saturada. Modelos de infiltración más sofisticados han aparecido en años recientes, en los cuales la infiltración es analizada tomando en cuenta el almacenamiento temporal del agua, succiones y variaciones en la permeabilidad de la zona no saturada, usando soluciones de la ecuación de Richards y curvas características experimentales (Hung, 2009). A continuación se presentan dos de estos métodos.

6 Modelos de Análisis Superficial

6.1 Modelo de Pradel y Raad

En los deslizamientos superficiales se asume que la forma de la superficie de falla es plana. Esta simplificación es generalmente válida debido a que los deslizamientos tienen un bajo espesor en comparación con la longitud y ancho del volumen desplazado y de los taludes. Es así que la estabilidad puede analizarse mediante un talud infinito usando el método de equilibrio límite.

Durante la precipitación, el agua se infiltra en el suelo, saturando las capas superiores (ver Figura 6.1). Debido a esto, se incrementa la presión de poros la cual reduce la resistencia del suelo. Cuando los suelos superficiales se encuentran sobre un material más impermeable, el flujo se da paralelo al talud. Esta condición reduce el factor de seguridad del talud y puede causar la falla (Pradel & Raad, 1993). Con el fin de estimar la profundidad crítica en la cual se presentará la falla, se hacen las siguientes consideraciones respecto al proceso de infiltración.

Para que se presente la falla, el suelo previamente debe saturarse. Los requerimientos mínimos para alcanzar la saturación en la superficie del talud son:

- Lluvia lo suficientemente intensa para exceder la razón de infiltración del suelo
- Lluvia lo suficientemente larga para saturar el talud a una profundidad z_w .

La proporción a la cual el suelo no saturado se humedecerá es crítica para la estabilidad superficial del talud. Un simple modelo de infiltración, basado en la ley de Darcy, fue propuesta por Green y Ampt. Este modelo se basa en las siguientes simplificaciones:

1. La superficie del suelo es continuamente humedecida,
2. Se puede apreciar claramente un frente húmedo,
3. El coeficiente de permeabilidad en la zona húmeda (k_w) no cambia con el tiempo, y
4. Existe una presión de poros negativa constante justo por encima del frente húmedo.

De acuerdo al modelo de Green & Ampt, el tiempo necesario para saturar el suelo a una profundidad z_w es:

$$T_w = \frac{\mu}{k_w} \left[z_w - S \ln \left(\frac{S + z_w}{S} \right) \right] \quad 67$$

Donde μ es la porosidad humedecible, la cual se puede expresar como la diferencia entre los contenidos de humedad volumétricos antes y después de la saturación ($\theta_w - \theta_i$). S es la succión en el frente húmedo. La razón de infiltración, v_i , es la razón a la cual el agua entra a la superficie del suelo. El modelo de Green y Ampt predice:

$$v_i = k_w \left(\frac{S + z_w}{z_w} \right) \quad 68$$

La primera condición para la saturación requiere que la intensidad de la lluvia I sea mayor que la razón de infiltración v_i . La segunda condición requiere que la precipitación dure más que T_w . Por lo tanto los requerimientos mínimos para saturar el suelo a una profundidad z_w :

$$T_{min} = T_w \quad 69$$

$$I_{min} = v_i \quad 70$$

Al combinar las ecuaciones 67 a la 70, se puede relacionar I_{min} y T_{min} :

$$I_{min} = \frac{\mu}{T_{min}} \left[z_w - S \ln \left(\frac{S + z_w}{S} \right) \right] \left(\frac{z_w + S}{z_w} \right) \quad 71$$

Combinando las ecuaciones 68 y 71, se puede obtener:

$$k_{lim} = I_{min} \left(\frac{z_w}{z_w + S} \right) = \frac{\mu}{T_{min}} \left[z_w - S \ln \left(\frac{S + z_w}{S} \right) \right] \quad 72$$

Donde k_{lim} es la permeabilidad máxima que permitirá la saturación a la profundidad z_w . Hay que hacer la observación que esta ecuación no considera los efectos de la escorrentía y la evapotranspiración.

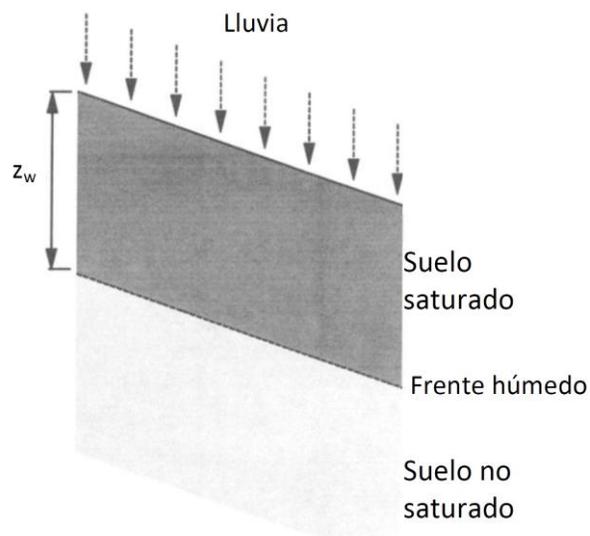


Figura 6.1 Sección que muestra el mecanismo de saturación de un talud. Tomado de (Pradel & Raad, 1993)

Una vez obtenido z_w , se procede al análisis mediante equilibrio límite. Para un talud infinito con flujo paralelo a la cara, se establece la siguiente ecuación:

$$FS = \frac{c + (\gamma_t - \gamma_w)z_w \cos^2 \alpha \tan \phi}{\gamma_t z_w \sin \alpha \cos \alpha} \quad 73$$

Donde c es la cohesión, ϕ es el ángulo de fricción, α es la pendiente del talud, z_w es el espesor del suelo saturado, γ_t es el peso unitario total del suelo y γ_w es el peso unitario del agua.

Si la cohesión es despreciada:

$$FS = \left(1 - \frac{\gamma_w}{\gamma_t}\right) \frac{\tan \phi}{\tan \alpha} \quad 74$$

Para materiales muy permeables, las ecuaciones 73 y 74 se convierten en:

$$FS = \frac{c + \gamma_t z_w \cos^2 \alpha \tan \phi}{\gamma_t z_w \sin \alpha \cos \alpha} \quad 75$$

$$FS = \frac{\tan \phi}{\tan \alpha} \quad 76$$

6.2 Modelo de Iverson

El modelo sugerido por Iverson considera la respuesta de la presión de poros de los suelos superficiales durante el transcurso de la lluvia (Iverson, 2000). Se basa en una simplificación de la siguiente ecuación general de Richards:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{d\theta}{d\psi} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k_L(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \sin \alpha \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_L(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k_Z(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \cos \alpha \right) \right] \quad 77$$

En donde ψ es la cabeza de presión del nivel freático, θ es el contenido de humedad volumétrico, t es tiempo y α es el ángulo de inclinación del talud ($0 \leq \alpha < 90^\circ$). Algunos términos pueden ser añadidos para que las coordenadas x y y se modifiquen con la curvatura del talud., sin embargo estos términos son generalmente pequeños y desaparecen en las aproximaciones válidas a profundidades superficiales. La ecuación no representa el flujo no darciano en taludes, pero puede ser simulado satisfactoriamente al asignar parámetros darcianos que simulan propiedades no darcianas.

Los parámetros darcianos clave en la ecuación anterior son la conductividad hidráulica en las direcciones laterales (x y y) y normal al talud (z), K_L y K_Z respectivamente. Las conductividades pueden variar debido a variaciones en las propiedades del suelo o de la cabeza de presión. Es conveniente definir conductividades normalizadas K^* con referencia a la conductividad máxima (K_{sat}).

$$K_L^* = \frac{K_L(\psi)}{K_{sat}}, \quad K_Z^* = \frac{K_Z(\psi)}{K_{sat}} \quad 78$$

Y para relacionar las conductividades con las difusividades hidráulicas (D_L, D_Z, D_0):

$$D_L = \frac{K_L(\psi)}{C(\psi)}, \quad D_Z = \frac{K_Z(\psi)}{C(\psi)}, \quad D_0 = \frac{K_{sat}}{C_0} \quad 79$$

Donde $D_0 = K_{sat}/C_0$. C_0 es el valor mínimo de $C(\psi)$. $C(\psi) = d\theta/d\psi$ es el cambio de contenido de humedad volumétrico por unidad de cambio en la cabeza de presión.

El fin de la normalización de la ecuación 71 es el análisis de la respuesta de la presión de poros a una profundidad H y una posición de área (x y y) en función del tiempo. La posición de área determina hasta qué punto la infiltración en otro lugar de la cuenca afecta la cabeza de presión en (x, y, H). por lo tanto Iverson define las variables normalizadas

$$\psi^* = \frac{\psi}{H}, \quad z^* = \frac{z}{H}, \quad x^* = \frac{x}{\sqrt{A}}, \quad y^* = \frac{y}{\sqrt{A}} \quad 80$$

La normalización anterior incluye dos escalas de longitud. Una escala es H , la cual se aplica en la dirección z y establece una referencia apropiada para la cabeza de presión que se desarrolla a una profundidad H en respuesta a la lluvia. La escala en las direcciones x y y es \sqrt{A} , donde A es el área de la cuenca que puede influir a $\psi(x, y, H, t)$ si la lluvia persiste.

Las respuestas piezométricas a corto plazo debido a la lluvia pueden analizadas mediante la sustitución del tiempo adimensional t^* junto con las ecuaciones 72 a 74 en la ecuación 71.

$$t^* = \frac{tD_0}{H^2} \quad 81$$

Luego al multiplicar todos los términos por H/K_{sat} y mediante una simplificación algebraica se obtiene una forma de la ecuación de Richards apropiada para $\psi(x, y, H, t)$ en respuesta para una lluvia de corta duración ($t \ll A/D_0$).

$$\begin{aligned} \frac{C(\psi)}{C_0} \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x^*} \left[K_L^* \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} - \frac{1}{\varepsilon} \sin \alpha \right) \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y^*} \left[K_L^* \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z^*} \left[K_Z^* \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} - \cos \alpha \right) \right] \end{aligned} \quad 82$$

Asumiendo $\varepsilon \ll 1$, el término ε^2 puede ser despreciado. Por lo tanto la ecuación anterior puede describir el flujo de agua cerca de la superficie en la dirección z :

$$\frac{C(\psi)}{C_0} \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial Z^*} \left[K_Z^* \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial Z^*} - \cos \alpha \right) \right] \quad 83$$

Está ecuación puede expresarse en términos de la coordenada vertical $Z^* = x^* \sin \alpha + z^* \cos \alpha$:

$$\frac{C(\psi)}{C_0} \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} = \cos^2 \alpha \frac{\partial}{\partial Z^*} \left[K_Z^* \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial Z^*} - 1 \right) \right] \quad 84$$

Debido a su no-linealidad, esta ecuación es difícil de resolver analíticamente. El análisis se facilita al considerar formas limitantes de la ecuación 78, que describan las respuestas de la cabeza de presión en suelos inicialmente secos o húmedos. Estas formas limitantes pueden ser identificadas al diferenciar los términos dentro de los paréntesis y usando la definición de cabeza total $h = \psi - Z$ en conjunto con la Ley de Darcy para flujo vertical en respuesta a la infiltración ($I_Z = -K_Z(\partial h/\partial Z)$). La ecuación 78 se reescribe como:

$$\frac{C(\psi)}{C_0} \frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} = \cos^2 \alpha \left[K_Z^* \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial Z^{*2}} - \frac{I_Z}{K_Z} \frac{\partial K_Z^*}{\partial Z^*} \right) \right] \quad 85$$

La ecuación anterior indica que si un suelo esta suficientemente húmedo tal que $K_Z \rightarrow K_{sat}$ y $C(\psi) \rightarrow C_0$, el término I_Z/K_Z puede ser despreciado, generando:

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t^*} = \frac{C_0 K_Z^* \cos^2 \alpha}{C(\psi)} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial Z^{*2}} \quad 86$$

Para condiciones iniciales de humedad, Iverson asume $K_Z \approx K_{sat}$ y $C \approx C_0$. Por lo tanto la ecuación anterior se reduce a la aproximación:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D_0 \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \quad 87$$

Una solución para la ecuación 81 puede ser obtenida mediante condiciones iniciales de frontera apropiadas. Para un estado inicial con nivel freático d_z en dirección vertical, la condición inicial ($t = 0$) en términos de la cabeza de presión puede expresarse como:

$$\psi(Z, 0) = (Z - d_z) \cos^2 \alpha \quad 88$$

Para un talud con una profundidad de d_{LZ} medida en dirección vertical, la condición de frontera en términos de cabeza de presión en la base impermeable puede escribirse como:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(d_{LZ}, t) = \cos^2 \alpha \quad 89$$

Para la superficie de un talud sujeto a una lluvia con intensidad I_z se obtiene las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \psi}{\partial Z}(0, t) = -I_z/K_{sat} + \cos^2 \alpha \quad t \leq T \quad 90$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Z}(0, t) = \cos^2 \alpha \quad t > T \quad 91$$

Donde T es la duración de la lluvia y la restricción $I_z/K_{sat} \leq 1$ debe satisfacerse. En otras palabras, la lluvia se infiltra totalmente en el suelo si la intensidad es menor o igual a la conductividad hidráulica saturada. Sin embargo, cuando la intensidad excede la conductividad hidráulica saturada, la razón de infiltración es idéntica a la conductividad saturada. La lluvia excedente, la cual es la diferencia entre la intensidad y la conductividad hidráulica saturada, se convierte en escorrentía superficial. Para evitar cabezas de presión altas (no realísticas), una limitación física adicional de la cabeza de presión está dada por:

$$\psi(Z, t) \leq Z \cos^2 \alpha \quad 92$$

Simplificaciones significantes resultan en la normalización con respecto a Z, lo que da

$$\frac{\psi}{Z}(Z, t \leq T) = \cos^2 \alpha (1 - d/z) + \frac{I_z}{K_z} [R(t^*)] \quad 93$$

$$\frac{\psi}{Z}(Z, t > T) = \cos^2 \alpha (1 - d/z) + \frac{I_z}{K_z} [R(t^*) - R(t^* - T^*)] \quad 94$$

Donde t^* y T^* son tiempos normalizados

$$t^* = \frac{t}{Z^2/\bar{D}} \quad 95$$

$$T^* = \frac{T}{Z^2/\bar{D}} \quad 96$$

La función de respuesta de la presión de cabeza es

$$R(t^*) = \sqrt{t^*/\pi} \exp(-1/t^*) - \operatorname{erfc}(-1/\sqrt{t^*}) \quad 97$$

Donde erfc es la función de error complementaria. La difusividad hidráulica efectiva es

$$\widehat{D} = 4D_0 \cos^2 \alpha \quad 98$$

Una vez que las cabezas de presión $\psi(Z, t)$ son obtenidas del modelo hidrológico, el potencial de falla del talud puede estimarse usando el análisis de estabilidad mediante un talud infinito, esto debido a su simplicidad, como se puede observar en la Figura 6.2. Una superficie de falla a una profundidad Z ocurre cuando se satisface la siguiente ecuación para el factor de seguridad:

$$FS = F_f + F_w + F_c = 1 \quad 99$$

Donde F_f corresponde al término de la gravedad, F_w corresponde a la presión de agua y el factor que representa a la cohesión es F_c .

$$F_f = \frac{\tan\phi}{\tan\alpha} \quad 100$$

$$F_w = \frac{-\psi(Z, t)\gamma_w \tan\phi}{\gamma_{sat} Z \sin\alpha \cos\alpha} \quad 101$$

$$F_c = \frac{c}{\gamma_{sat} Z \sin\alpha \cos\alpha} \quad 102$$

Donde ϕ es el ángulo de fricción, c es la cohesión, γ_w y γ_{sat} representan el peso unitario del agua y del suelo saturado respectivamente. Aunque este modelo es simple y práctico, la suposición de infiltración constante no es realista.

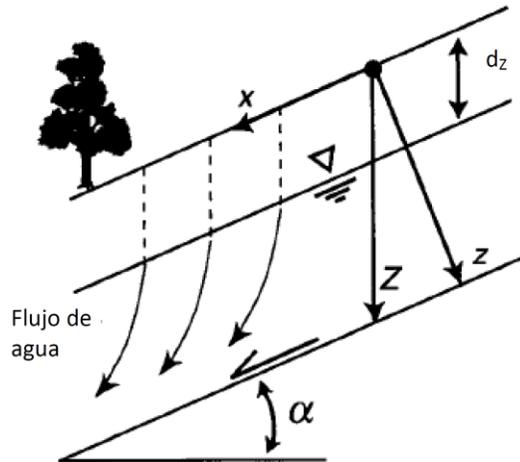


Figura 6.2 Ilustración del modelo de talud infinito.

Cuando la lluvia ocurre, el factor de seguridad varía en función de la profundidad y el tiempo. Puede ser convenientemente separado entre un componente dependiente del tiempo FS' y una componente inicial FS_0

$$FS(Z, t) = FS_0(Z) + FS'(Z, t) \quad 103$$

$$FS_0(Z) = F_f + F_c - \frac{\psi_0(Z)\gamma_w \tan\phi}{\gamma_s Z \sin\alpha \cos\alpha} \quad 104$$

$$FS'(Z, t) = - \frac{[\psi(Z, t) - \psi_0(Z)]\gamma_w \tan\phi}{\gamma_s Z \sin\alpha \cos\alpha} \quad 105$$

Si la presión de poros inicial es conocida al igual que los parámetros geotécnicos, el factor de seguridad inicial puede ser calculado para cualquier profundidad Z .

La componente dependiente del tiempo se obtiene al combinar las ecuaciones

$$FS'(Z, t) = - \frac{\gamma_w \tan\phi}{\gamma_s \sin\alpha \cos\alpha} \frac{I_Z}{K_Z} \cdot \begin{cases} [R(t^*)], & t^* \leq T^* \\ [R(t^*) - R(t^* - T^*)], & t^* > T^* \end{cases} \quad 106$$

7 Metodología del Análisis de Confiabilidad

A continuación se presentan el procedimiento para el análisis de confiabilidad aplicado a dos modelos de análisis de estabilidad superficial existentes. Primero se explica cómo se obtuvieron los parámetros geotécnicos y meteorológicos así como sus descriptores estadísticos. Luego se procede al análisis probabilísticos de la estabilidad superficial de un talud en un caso piloto.

7.1 Parámetros Geotécnicos del Análisis

Para este análisis se necesitan conocer las variables geotécnicas de un talud. Con el fin de obtener parámetros estadísticos de estas variables, se recopilaron datos geotécnicos de cuatro estudios realizados en la ciudad de Manizales (Centro de Investigación en Materiales y Obras Civiles, 2002; Escobar, 2007; Rodríguez, 2005, 2010).

En el Anexo 13.1 se presentan los datos recopilados para esta investigación. La mayoría de suelos analizados son de origen volcánico. Debido a que los deslizamientos son superficiales, se eliminaron aquellos datos obtenidos a profundidades mayores a 4 metros. Los datos obtenidos fueron el peso unitario total y saturado, la cohesión, el coeficiente de fricción y humedades volumétricas.

Todos los parámetros geotécnicos fueron obtenidos directamente, a excepción de las humedades volumétricas. Utilizando el peso unitario, el contenido de humedad y la gravedad específica se pudo obtener la humedad volumétrica in situ (θ_i), mientras que la humedad volumétrica saturada (θ_w) fue calculada asumiendo una saturación del 100%.

Una vez obtenidos los valores a utilizar, se procedió a analizar los datos con el fin de obtener los descriptores estadísticos. Para lograrlo, se utilizó el complemento de Excel EasyFit 5.3 de MathWave Technologies. Con este software se calculó la media y desviación estándar para cada una de las variables. También se calculó el coeficiente de correlación entre la cohesión y el coeficiente de fricción y entre las humedades volumétricas.

Se decidió utilizar la distribución normal para todas las variables excepto para la cohesión. Se tomó esta decisión ya que los coeficientes de variación son menores a 0.3, por lo que la probabilidad de obtener valores negativos es menor o igual 0.0004 (Griffiths & Fenton, 2007). En el caso de la cohesión, el coeficiente de variación es mayor a 0.3, por lo que se decidió utilizar la distribución lognormal.

Con el mismo software se realizaron pruebas de bondad de ajuste para establecer si los datos se comportan según las distribuciones elegidas. Las pruebas de Kolmogorov-Smirnov, Chi-Cuadrado y Anderson-Darling muestran que las hipótesis no son rechazadas. Los resultados se muestran en las Figuras 7.1 a 7.4.

Goodness of Fit - Details [hide]					
Lognormal [#41]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	16				
Statistic	0.16703				
P-Value	0.7031				
Rank	25				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.25778	0.29472	0.32733	0.36571	0.39201
Reject?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Sample Size	16				
Statistic	0.58074				
Rank	34				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Reject?	No	No	No	No	No
Chi-Squared					
Deg. of freedom	2				
Statistic	2.9706				
P-Value	0.22643				
Rank	48				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	3.2189	4.6052	5.9915	7.824	9.2103
Reject?	No	No	No	No	No

Figura 7.1 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la cohesión.

Goodness of Fit - Details [hide]					
Normal [#41]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	16				
Statistic	0.14012				
P-Value	0.87003				
Rank	24				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.25778	0.29472	0.32733	0.36571	0.39201
Reject?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Sample Size	16				
Statistic	0.28748				
Rank	17				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Reject?	No	No	No	No	No
Chi-Squared					
Deg. of freedom	1				
Statistic	0.4901				
P-Value	0.48388				
Rank	42				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	1.6424	2.7055	3.8415	5.4119	6.6349
Reject?	No	No	No	No	No

Figura 7.2 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para el coeficiente de fricción.

Goodness of Fit - Details [hide]					
Normal [#41]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	18				
Statistic	0.14392				
P-Value	0.80001				
Rank	37				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.2436	0.27851	0.30936	0.34569	0.37062
Reject?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Sample Size	18				
Statistic	0.23886				
Rank	28				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Reject?	No	No	No	No	No
Chi-Squared					
Deg. of freedom	1				
Statistic	0.02634				
P-Value	0.87108				
Rank	21				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	1.6424	2.7055	3.8415	5.4119	6.6349
Reject?	No	No	No	No	No

Figura 7.3 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la humedad volumétrica in situ.

Goodness of Fit - Details [hide]					
Normal [#41]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	18				
Statistic	0.1797				
P-Value	0.54709				
Rank	34				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.2436	0.27851	0.30936	0.34569	0.37062
Reject?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Sample Size	18				
Statistic	0.79266				
Rank	29				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Reject?	No	No	No	No	No
Chi-Squared					
Deg. of freedom	2				
Statistic	7.2844				
P-Value	0.02619				
Rank	47				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	3.2189	4.6052	5.9915	7.824	9.2103
Reject?	Yes	Yes	Yes	No	No

Figura 7.4 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la humedad volumétrica saturada.

En la Tabla 7.1 se resumen los descriptores estadísticos de las variables. Ya que para realizar los análisis de confiabilidad se necesitan variables con distribución normal, la media y desviación estándar de la cohesión fueron normalizadas, mediante las ecuaciones 101 y 102. Se decidió caracterizar los pesos unitarios de manera determinística ya que se ha observado (Baecher & Christian, 2003) que el peso unitario muestra menos variabilidad que otras propiedades, usualmente coeficientes de variación menores a 10%. Esto no es sorprendente ya que los minerales suelen tener gravedades específicas dentro un rango pequeño y el procedimiento para calcular el peso unitario es razonablemente preciso, por lo que el error de medición es pequeño.

$$\mu_{\ln x} = \ln(\mu_x - x_0) - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{\sigma_x}{\mu_x - x_0} \right)^2 \right] \quad 107$$

$$\sigma_{\ln x} = \sqrt{\ln \left[1 + \left(\frac{\sigma_x}{\mu_x - x_0} \right)^2 \right]} \quad 108$$

Tabla 7.1 Descriptores estadísticos de los parámetros geotécnicos obtenidos para el análisis.

Parámetro Geotécnico	Distribución	Media	Desviación Estándar	Asimetría
c (kN/m ²)	Log-normal	35.056	20.354	0
$\tan \phi$	Normal	0.49171	0.0880	0
θ_i	Normal	0.43757	0.09673	0
θ_w	Normal	0.51336	0.07272	0
γ_t (kN/m ³)	-	16.519	-	-
γ_s (kN/m ³)	-	18.157	-	-

En la Tabla 7.2 se presentan los coeficientes de correlación entre los parámetros geotécnicos obtenidos para el análisis. Algunos autores basan sus estudios probabilísticos en la suposición que la cohesión y el ángulo de fricción no están correlacionados, con el fin de simplificar los cálculos. Lumb probablemente fue el primero en estudiar la correlación basada en datos experimentales (Russelli, 2008). El encontró una correlación negativa entre estos parámetros, con un rango entre $-0.3 < \rho_{c\phi} < -0.7$, lo que implica que valores bajos de cohesión son asociados con valores altos del ángulo de fricción y viceversa. En nuestro caso piloto, se obtuvo una correlación positiva, la cual dista del comportamiento de estas dos variables en el Modelo de Mohr-Coulomb. Dicho valor positivo puede ser producto de la utilización de valores de diferentes estudios geotécnicos. En nuestro ejemplo, se utilizará tal como fue obtenido para demostrar el procedimiento.

Tabla 7.2 Coeficientes de correlación de los parámetros geotécnicos.

Coeficientes de Correlación				
Parámetro	c	$\tan \phi$	θ_i	θ_w
c	1	0.456405	0	0
$\tan \phi$	0.456405	1	0	0
θ_i	0	0	1	0.8039736
θ_w	0	0	0.8039736	1

7.2 Registros Meteorológicos del Análisis

Para realizar el análisis se necesita conocer el comportamiento estadístico de los eventos lluviosos en la ciudad de Manizales. Estos registros meteorológicos se obtuvieron para la estación de observación EMAS por medio de la Universidad Nacional de Colombia-Sede Manizales (IDEAM, 2010). Los registros contienen datos de precipitación medidos cada cinco minutos, durante el período comprendido entre los años 2002 y 2009. Los datos analizados aparecen anexados en archivos de Excel.

En la zona de la ciudad de Manizales se presenta un régimen de precipitación bimodal (Mejía, 2008). Las lluvias se presentan entre los meses de Marzo a Mayo y Septiembre a Noviembre. Para esta investigación, se obtuvieron los parámetros estadísticos de la precipitación solamente del período comprendido entre los meses de Septiembre y Noviembre.

Como primer paso se necesitó individualizar los eventos lluviosos para cada uno de los años analizados. Para lograr esto, se definió el tiempo entre eventos lluviosos (tiempo si lluvia) (Wynn, 1994). Este periodo de tiempo es aquel que define si dos lluvias consecutivas pertenecen al mismo evento o si son independientes entre sí.

Para definir este periodo, se utiliza el método del coeficiente de variación (Adams & Papa, 2000; Wynn, 1994). Los periodos sin lluvia presentan un comportamiento estadístico exponencial. Para comprobar su exponencialidad, el coeficiente de variación debe ser igual a 1. Se comienza por discretizar los registros lluviosos, removiendo los periodos sin lluvias menores a un tiempo t especificado. Luego se calcula el coeficiente de variación de los periodos sin lluvia restantes. Si el coeficiente de variación es igual a 1, entonces t será el tiempo entre eventos lluviosos. De lo contrario, se escoge otro valor para t y se vuelve analizar la muestra.

Una vez definido los eventos lluviosos, se puede calcular su duración e intensidad. Este análisis se realizó para cada año (tal como se muestra en la Tabla 7.3). Los periodos entre eventos lluviosos para el año 2002 y el 2009 fueron retirados del análisis debido a que presentaban valores fuera del rango observado en los años restantes.

Tabla 7.3 Periodo entre eventos lluviosos calculados en el análisis.

Año	Periodo entre eventos lluviosos (min)
2002	915
2003	160
2004	140
2005	185
2006	235
2007	265
2008	110
2009	560

Los descriptores estadísticos de las lluvias para los años restantes se calcularon de la misma manera que los parámetros geotécnicos. Al igual que la cohesión, se decidió utilizar la distribución lognormal para evitar valores negativos, aunque las pruebas de bondad de ajuste fueron rechazadas (Figuras 7.5 y 7.6). En la Tabla 7.4 se resume los descriptores estadísticos de las variables lluviosas. Ya que para realizar los análisis de confiabilidad se necesitan variables con distribución normal, la media y desviación estándar de la duración e intensidad fueron normalizadas mediante las ecuaciones 101 y 102.

Tabla 7.4 Datos estadísticos de los parámetros meteorológicos obtenidos para el análisis.

Parámetro Meteorológico	Distribución	Media	Desviación Estándar	Asimetría	Coefficiente de correlación
I (mm/hr)	Log-normal	0.89702	2.0909	0	0.3565
T (hr)	Log-normal	5.1967	2.5972	0	

Goodness of Fit - Details [hide]					
Lognormal [#40]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	914				
Statistic	0.17029				
P-Value	0				
Rank	20				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.03549	0.04045	0.04492	0.05021	0.05388
Reject?	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Anderson-Darling					
Sample Size	914				
Statistic	40.333				
Rank	18				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Reject?	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Chi-Squared					
Deg. of freedom	9				
Statistic	127.71				
P-Value	0				
Rank	19				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
Reject?	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes

Figura 7.5 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la duración.

Goodness of Fit - Details [hide]					
Lognormal [#36]					
Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size	910				
Statistic	0.1344				
P-Value	8.5906E-15				
Rank	7				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.03557	0.04054	0.04502	0.05032	0.054
Reject?	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Anderson-Darling					
Sample Size	910				
Statistic	20.72				
Rank	3				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Reject?	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Chi-Squared					
Deg. of freedom	9				
Statistic	64.847				
P-Value	1.5448E-10				
Rank	8				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
Reject?	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes

Figura 7.6 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para la intensidad.

7.3 Aplicación al Modelo de Pradel y Raad

7.3.1 Método de Primer Orden Segundo Momento

Para determinar el factor de seguridad en el modelo propuesto por Pradel y Raad, primero se debe calcular la profundidad del frente húmedo (Z_w). La ecuación utilizada para calcularla será

$$I = \frac{(\theta_w - \theta_i)}{T} \left[Z_w - S \cdot \ln \left(\frac{S + Z_w}{S} \right) \right] \left(\frac{Z_w + S}{Z_w} \right) \quad 109$$

Donde,

Z_w = profundidad frente húmedo (mm) S = succión capilar en el frente húmedo (mm)

I = intensidad (mm/hr) θ_w = contenido de humedad volumétrico saturado

T = duración (hr)

θ_i = contenido de humedad volumétrico in situ

Los datos utilizados se muestran en la Tabla 7.5. En ninguno de los reportes de la ciudad de Manizales se obtuvieron valores para la succión capilar. Es por eso que se utilizaron los valores estadísticos de arcilla arenosa de trabajos previos (Rawls, Brakensiek, & Miller, 1983).

Tabla 7.5 Descriptores estadísticos para el cálculo del frente húmedo.

	Media	Desviación Estándar	Asimetría
I (mm/hr)	0.8970	2.0909	0
θ_w	0.5134	0.0727	0
θ_i	0.4376	0.0967	0
T (hr)	5.20	2.60	0
S (mm)	239.0	58.62	0

Para encontrar la media de la profundidad del frente húmedo, se sustituyen los valores medios para cada una de las variables en la ecuación 109.

$$\mu[Z_w] = 109.4 \text{ mm} = 0.109 \text{ m}$$

Para calcular la desviación estándar de la profundidad del frente húmedo, se necesita conocer los coeficientes de correlación de las variables aleatorias. Estos coeficientes se muestran en la Tabla 7.6.

Tabla 7.6 Coeficientes de correlación para el cálculo del frente húmedo.

Variable	ρ_{xy}				
	I	T	S	θ_w	θ_i
I	1	0.3565	0	0	0
T	0.3565	1	0	0	0
S	0	0	1	0	0
θ_w	0	0	0	1	0.8040
θ_i	0	0	0	0.8040	1

Cuando las funciones son complicadas para derivar parcialmente, se pueden calcular mediante diferencias centrales utilizando la siguiente fórmula.

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} \approx \frac{1}{2\varepsilon_i} \{g(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_i} + \varepsilon_i, \dots, \mu_{x_n}) - g(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_i} - \varepsilon_i, \dots, \mu_{x_n})\} \quad 110$$

Las derivadas parciales para cada variable se obtienen al incrementar y reducir la variable por una pequeña cantidad, luego se encuentra la diferencia entre los valores resultantes para después dividirla por el doble del pequeño incremento. El valor de ε debe ser pequeño. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_w}{\partial I} &\approx \frac{1}{2(0.0001)} \{109.404777954 - 109.382436205\} = 111.71 \\ \frac{\partial z_w}{\partial \theta_w} &\approx \frac{1}{2(0.0001)} \{109.261576586 - 109.52596422\} = -1321.94 \\ \frac{\partial z_w}{\partial \theta_i} &\approx \frac{1}{2(0.0001)} \{109.52596422 - 109.261576586\} = 1321.94 \\ \frac{\partial z_w}{\partial T} &\approx \frac{1}{2(0.0001)} \{109.395534135 - 109.391680182\} = 19.27 \\ \frac{\partial z_w}{\partial S} &\approx \frac{1}{2(0.0001)} \{109.393611006 - 109.393603316\} = 0.03845\end{aligned}$$

Se utilizaron diferentes valores de ε para calcular las derivadas parciales. A medida se reduce la magnitud de su valor, los cambios en los resultados de la derivada parcial se reducen hasta ser despreciables.

Para calcular la desviación estándar se utiliza la siguiente fórmula:

$$\sigma^2_g = \sum_{i=1}^n \sigma^2_{x_i} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \rho_{x_i x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \quad 111$$

$$\sigma_{z_w} = 266.9056 \text{ mm} = 0.267 \text{ m}$$

Para el cálculo de la media y desviación estándar del factor de seguridad, se sigue el mismo procedimiento de los pasos anteriores, utilizando la siguiente fórmula:

$$FS = \frac{c' + (\gamma_t - \gamma_w) Z_w \cos^2 \alpha \tan \phi'}{\gamma_t Z_w \sin \alpha \cos \alpha} \quad 112$$

Donde,

c = cohesión efectiva del suelo (kN/m^2)	Z_w = profundidad frente húmedo (m)
γ_t = peso unitario total del suelo (kN/m^3)	α = ángulo de inclinación del talud ($^\circ$)
γ_w = peso unitario del agua (kN/m^3)	$\tan \phi$ = coeficiente de fricción del suelo

Los descriptores estadísticos utilizados se presentan a continuación en la Tabla 7.7.

Tabla 7.7 Descriptores estadísticos para el cálculo del factor de seguridad.

	Media	Desviación Estándar	Asimetría
c (kN/m ²)	35.06	20.35	0
γ_t (kN/m ³)	16.52	-	-
γ_w (kN/m ³)	9.81	-	-
Z_w (m)	0.109	0.267	0
α (°)	20	-	0
$\tan \phi$	0.4917	0.0880	0

La media del factor de seguridad se cálculo al sustituir los valores medios de las variables aleatorias en la ecuación 112, de donde se obtuvo

$$\mu[FS] = 61.13$$

Tabla 7.8 Coeficientes de correlación para el cálculo del factor de seguridad.

Variable	ρ_{xy}		
	c	Z_w	$\tan \phi$
c	1	0	0.4564
Z_w	0	1	0
$\tan \phi$	0.4564	0	1

Para el cálculo de la desviación estándar, se vuelve a utilizar la ecuación 111.

$$\frac{\partial FS}{\partial c'} = \frac{1}{\gamma_t Z_w \cos \alpha \sin \alpha} \approx 1.7279$$

$$\frac{\partial FS}{\partial \tan \phi'} = \frac{\cos \alpha (\gamma_t - \gamma_w)}{\gamma_t \sin \alpha} \approx 1.1159$$

$$\frac{\partial FS}{\partial Z_w} = -\frac{c'}{\gamma_t Z_w^2 \cos \alpha \sin \alpha} \approx -555.7908$$

$$\sigma_{FS}^2 = 23261.04$$

$$\sigma_{FS} = 152.52$$

Para calcular el índice de confiabilidad (β) y la probabilidad de falla (ρ_f), se utiliza las siguientes fórmulas

$$\beta = \frac{E[FS] - 1}{\sigma_{FS}} = \frac{61.13 - 1}{152.52} \approx 0.3942$$

$$p_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \approx 0.3467$$

7.3.2 Método de Estimativos Puntuales

Al igual que el método anterior, para calcular el factor de seguridad primero hay que calcular la profundidad del frente húmedo (Z_w) con la ecuación 92. El procedimiento comienza al calcularse ξ para cada una de las variables mediante la siguiente fórmula, donde v es la asimetría.

$$\xi = \sqrt{1 + \left(\frac{v}{2}\right)^2} \quad 113$$

Una vez obtenida ξ , se calculan x_+ y x_- mediante las siguientes fórmulas para cada una de las variables aleatorias. Estos valores serán los puntos donde se evaluará la función de comportamiento (ecuación 109).

$$x_+ = \mu + \left(\frac{v}{2} + \xi\right) \cdot \sigma \quad y \quad x_- = \mu + \left(\frac{v}{2} - \xi\right) \cdot \sigma \quad 114$$

Los símbolos $+$ y $-$ en la ecuaciones anteriores significan que el valor es mayor y menor a la media, respectivamente. En este caso a partir de las variables aleatorias, se obtienen 10 valores, 5 valores mayores a la media de cada variable y 5 valores menores a la media, los cuales pueden observarse en la siguiente tabla.

Tabla 7.9 Cálculo de los puntos estimativos en los cuales se evaluará el frente húmedo.

	μ	σ	v	ξ	x_+	x_-
I	0.897	2.091	0	1.0000	2.988	-1.194
θ_w	0.513	0.073	0	1.0000	0.586	0.441
θ_i	0.438	0.097	0	1.0000	0.534	0.341
T	5.200	2.600	0	1.0000	7.800	2.600
S	239.000	58.620	0	1.0000	297.620	180.380

Para evaluar el frente húmedo, se deben utilizar todas las posibles combinaciones a partir de los valores obtenidos en el paso anterior. Si existen n variables aleatorias, entonces el número de combinaciones posibles es 2^n . En nuestro caso, existen 32 posibles combinaciones, los cuales se pueden observar en la Tabla 7.9.

Luego de calcular los 32 valores para el frente húmedo, se calculan los pesos p . Estos valores se calculan utilizando la siguiente fórmula:

$$P_{(s_1 s_2 \dots s_n)} = \frac{1}{2^n} \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (s_i)(s_j) \rho_{ij} \right] \quad 115$$

Donde s es +1 cuando el valor de la variable es una desviación estándar por arriba de la media y será -1 cuando esté por debajo de la media. En la Tabla 7.10 se resumen los cálculos realizados.

Tabla 7.10 Resumen de los cálculos para obtener la media y desviación estándar del frente húmedo.

Punto	l	θ_w	θ_i	T	S	Z_w	p	$Z_w p$	$Z_w^2 p$
1	2.988	0.586	0.534	7.800	297.620	653.932	0.068	44.151	28871.508
2	2.988	0.586	0.534	7.800	180.380	613.718	0.068	41.436	25429.746
3	2.988	0.586	0.534	2.600	297.620	248.966	0.045	11.262	2803.811
4	2.988	0.586	0.534	2.600	180.380	234.945	0.045	10.628	2496.899
5	2.988	0.586	0.341	7.800	297.620	165.913	0.017	2.865	475.273
6	2.988	0.586	0.341	7.800	180.380	157.664	0.017	2.722	429.188
7	2.988	0.586	0.341	2.600	297.620	59.776	-0.005	-0.300	-17.922
8	2.988	0.586	0.341	2.600	180.380	58.035	-0.005	-0.291	-16.893
9	2.988	0.441	0.534	7.800	297.620	-203.513	0.017	-3.514	715.100
10	2.988	0.441	0.534	7.800	180.380	-123.29	0.017	-2.129	262.445
11	2.988	0.441	0.534	2.600	297.620	-203.513	-0.005	1.021	-207.735
12	2.988	0.441	0.534	2.600	180.380	-123.29	-0.005	0.618	-76.240
13	2.988	0.441	0.341	7.800	297.620	369.029	0.068	24.915	9194.440
14	2.988	0.441	0.341	7.800	180.380	346.725	0.068	23.409	8116.609
15	2.988	0.441	0.341	2.600	297.620	137.948	0.045	6.240	860.794
16	2.988	0.441	0.341	2.600	180.380	131.579	0.045	5.952	783.144
17	-1.194	0.586	0.534	7.800	297.620	-203.513	0.045	-9.206	1873.497
18	-1.194	0.586	0.534	7.800	180.380	-123.29	0.045	-5.577	687.582
19	-1.194	0.586	0.534	2.600	297.620	-159.32	0.068	-10.757	1713.740
20	-1.194	0.586	0.534	2.600	180.380	-123.29	0.068	-8.324	1026.266
21	-1.194	0.586	0.341	7.800	297.620	-85.687	-0.005	0.430	-36.826
22	-1.194	0.586	0.341	7.800	180.380	-108.138	-0.005	0.542	-58.652
23	-1.194	0.586	0.341	2.600	297.620	-26.143	0.017	-0.451	11.800
24	-1.194	0.586	0.341	2.600	180.380	-26.776	0.017	-0.462	12.379
25	-1.194	0.441	0.534	7.800	297.620	173.82	-0.005	-0.872	-151.539
26	-1.194	0.441	0.534	7.800	180.380	165.03	-0.005	-0.828	-136.600
27	-1.194	0.441	0.534	2.600	297.620	62.763	0.017	1.084	68.013
28	-1.194	0.441	0.534	2.600	180.380	60.875	0.017	1.051	63.982
29	-1.194	0.441	0.341	7.800	297.620	-203.513	0.045	-9.206	1873.497
30	-1.194	0.441	0.341	7.800	180.380	-123.29	0.045	-5.577	687.582
31	-1.194	0.441	0.341	2.600	297.620	-67.944	0.068	-4.587	311.678
32	-1.194	0.441	0.341	2.600	180.380	-75.687	0.068	-5.110	386.765

Para calcular la media del frente húmedo,

$$\mu[Z_w] = \sum z_w \cdot p = 0.111 \text{ m}$$

La desviación estándar del frente húmedo se calcula de la siguiente forma:

$$\sigma[Z_w] = \sqrt{\left(\sum Z_w^2 \cdot p\right) - (\mu_{Z_w})^2} = 0.276 \text{ m}$$

Para el cálculo del factor de seguridad, se utiliza el mismo procedimiento para encontrar ξ , x_+ y x_- (ecuaciones 113 y 114, respectivamente). Los valores aparecen resumidos en la Tabla 7.11. En la Tabla 7.12 se resumen los resultados para el cálculo del factor de seguridad.

Tabla 7.11 Cálculo de los puntos estimativos en los cuales se evaluará el factor de seguridad.

	μ	σ	v	ξ	x_+	x_-
c	35.060	20.350	0	1	55.410	14.710
Z_w	0.111	0.276	0	1	0.387	-0.165
tan ϕ	0.492	0.088	0	1	0.580	0.404

Tabla 7.12 Resumen de los cálculos para obtener la media y desviación estándar de factor de seguridad.

Punto	c	Z_w	tan ϕ	FS	p	FSp	FS²p
1	55.410	0.387	0.580	27.614	0.182	5.027	138.8198
2	55.410	0.387	0.404	27.418	0.068	1.863	51.07992
3	55.410	-0.165	0.580	-62.602	0.182	-11.397	713.46
4	55.410	-0.165	0.404	-62.799	0.068	-4.267	267.9719
5	14.710	0.387	0.580	7.806	0.068	0.530	4.140741
6	14.710	0.387	0.404	7.610	0.182	1.385	10.54255
7	14.710	-0.165	0.580	-16.144	0.068	-1.097	17.70956
8	14.710	-0.165	0.404	-16.340	0.182	-2.975	48.60853

Los valores para la media y desviación estándar del factor de seguridad son:

$$\mu[FS] = \sum FS \cdot p = -10.930$$

$$\sigma[FS] = \sqrt{\left(\sum FS^2 \cdot p\right) - (\mu_{FS})^2} = 33.658$$

El índice de confiabilidad y la probabilidad de falla mediante este método para el caso piloto es

$$\beta = \frac{E[FS] - 1}{\sigma_{FS}} \approx -0.354$$

$$p_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(0.354) \approx 0.638$$

7.3.3 Método de Hasofer-Lind

Como primer paso en este método, se debe definir el criterio de falla como

$$FS - 1 = 0$$

Por lo tanto la función g se define como

$$g = \frac{c' + (\gamma_t - \gamma_w) \cdot Z_w \cdot \cos^2 \alpha \cdot \tan \phi'}{\gamma_t \cdot Z_w \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} - 1$$

Para una primera iteración se asumen los siguientes valores

$$c' = \mu_{c'} = 35.06 \text{ kPa} \quad Z_w = \mu_{Z_w} = 0.109 \text{ m} \quad \tan \phi' = \mu_{\tan \phi'} = 0.4917$$

Utilizando los valores anteriores, se calculan las derivadas parciales de la función g con respecto a las variables aleatorias, para luego multiplicarlas por las desviaciones estándar respectivas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial c'} &= \frac{1}{\gamma_t Z_w \cos \alpha \sin \alpha} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial c''} = \frac{1}{\gamma_t Z_w \cos \alpha \sin \alpha} \cdot \sigma_{c'} = 35.163360 \\ \frac{\partial g}{\partial Z_w} &= -\frac{c'}{\gamma_t Z_w^2 \cos \alpha \sin \alpha} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial Z_w'} = -\frac{c'}{\gamma_t Z_w^2 \cos \alpha \sin \alpha} \cdot \sigma_{Z_w} = -148.396150 \\ \frac{\partial g}{\partial \tan \phi'} &= \frac{\cos \alpha (\gamma_t - \gamma_w)}{\gamma_t \sin \alpha} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial \tan \phi''} = \frac{\cos \alpha (\gamma_t - \gamma_w)}{\gamma_t \sin \alpha} \cdot \sigma_{\tan \phi'} = 0.098204 \end{aligned}$$

Luego se construyen las matrices \mathbf{G} y α

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \partial g / \partial c'' \\ \partial g / \partial Z_w' \\ \partial g / \partial \tan \phi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.163360 \\ -148.396150 \\ 0.098204 \end{bmatrix} \\ \alpha &= \frac{\mathbf{G}}{(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{1/2}} = \begin{bmatrix} 0.230571 \\ -0.973055 \\ 0.000644 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se debe calcular el valor x_i^* para cada variable aleatoria la siguiente fórmula

$$x_i^* = \mu_{x_i} - \alpha_i \cdot \sigma_{x_i} \cdot \beta$$

116

Por lo tanto

$$\begin{aligned}c'^* &= 35.06 - 4.692120\beta \\Z_w^* &= 0.109 + 0.259806\beta \\ \tan \phi'^* &= 0.4917 - 0.000057\beta\end{aligned}$$

Sustituir las ecuaciones anteriores en la función g ,

$$\frac{[35.06 - 4.692120\beta] + (16.52 - 9.81)[0.109 + 0.259806\beta]\cos^2(20)[0.4917 - 0.000057\beta]}{16.52[0.109 + 0.259806\beta] \sin 20 \cos 20} - 1 = 0$$

Al resolver para β se obtiene

$$\beta = 6.546988$$

Con este valor, se calcula x_i^* para cada variable aleatoria mediante la siguiente fórmula

$$x_i^* = -\alpha_i \cdot \beta \quad 117$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}c'^* &= -(0.230571)(6.546988) = -1.50955 \\Z_w^* &= -(-0.973055)(6.546988) = 6.37058 \\ \tan \phi'^* &= -(0.000644)(6.546988) = -0.00422\end{aligned}$$

Para la segunda iteración, con $\beta = 6.546988$,

$$\begin{aligned}c^* &= 35.06 - 4.692120\beta = 4.340745 \\Z_w^* &= 0.109 + 0.259806\beta = 1.809946877 \\ \tan \phi^* &= 0.4917 - 0.000057\beta = 0.491327\end{aligned}$$

Con estos nuevos valores, se vuelve a calcular un nuevo β

$$\frac{\partial g}{\partial c'} = 2.117635; \quad \frac{\partial g}{\partial Z_w} = -0.066634; \quad \frac{\partial g}{\partial \tan \phi'} = 0.098204$$

$$G = \begin{bmatrix} 2.117635 \\ -0.066634 \\ 0.098204 \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0.998433 \\ -0.031417 \\ 0.046302 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}c'^* &= 35.06 - 20.318118\beta \\Z_w^* &= 0.109 + 0.008388\beta \\ \tan \phi'^* &= 0.4917 - 0.004075\beta\end{aligned}$$

$$\frac{[35.06 - 20.318118\beta] + (16.52 - 9.81)[0.109 + 0.008388\beta]\cos^2(20)[0.4917 - 0.004075\beta]}{16.52[0.109 + 0.008388\beta] \sin 20 \cos 20} - 1 = 0$$

$$c'^* = -1.70808; \quad \beta = 1.710756; \quad Z_w^* = 0.05375; \quad \tan \phi'^* = -0.07921$$

Este proceso de iteración se repite hasta que los valores de β converjan. En este caso con seis iteraciones se consiguieron valores β similares. En la Tabla 7.13 se resumen los cálculos para las iteraciones realizadas.

Tabla 7.13 Resumen de las iteraciones para el cálculo de β .

Paso	Parámetros	Iteraciones					
		1	2	3	4	5	6
1	c'	35.06	4.340745	0.300649	0.296468	0.295920	0.295919
	Z_w	0.109	1.809947	0.123350	0.123586	0.123357	0.123357
	$\tan \phi'$	0.4917	0.491327	0.484729	0.491225	0.491223	0.491225
2	$\partial g / \partial c''$	35.163360	2.117635	31.072609	31.013272	31.070845	31.070845
	$\partial g / \partial Z_w'$	-	-0.066634	-0.993677	-0.976120	-0.977936	-0.977933
	$\partial g / \partial \tan \phi''$	148.396150	0.098204	0.098204	0.098204	0.098204	0.098204
3	$\alpha_{c'}$	0.230571	0.998433	0.999484	0.999500	0.999500	0.999500
	α_{Z_w}	-0.973055	-0.031417	-0.031963	-0.031459	-0.031459	-0.031459
	$\alpha_{\tan \phi'}$	0.000644	0.046302	0.003159	0.003165	0.003159	0.003159
4	$\alpha_{c'} \cdot \sigma_{c'}$	4.692120	20.318118	20.339499	20.339825	20.339825	20.339825
	$\alpha_{Z_w} \cdot \sigma_{Z_w}$	-0.259806	-0.008388	-0.008534	-0.008400	-0.008400	-0.008400
	$\alpha_{\tan \phi'} \cdot \sigma_{\tan \phi'}$	0.000057	0.004075	0.000278	0.000279	0.000278	0.000278
5	β	6.54699	1.71076	1.70916	1.70916	1.70916	1.70916
6	c'^*	-1.509546	-1.708076	-1.708282	-1.708309	-1.708309	-1.708309
	Z_w^*	6.370580	0.053747	0.054630	0.053769	0.053769	0.053769
	$\tan \phi'^*$	-0.004216	-0.079211	-0.005399	-0.005410	-0.005399	-0.005399

Con el último índice de confiabilidad calculado, se obtiene la probabilidad de falla,

$$p_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) = \Phi(-1.70916) \approx 0.0437$$

A continuación se aplica otro procedimiento utilizando el método de Hasofer-Lind (Low & Tang, 1997). Con la función de comportamiento definida en la [ecuación 112](#), se inician las iteraciones, se utilizan como valores iniciales las medias de las variables aleatorias. Se construye el vector columna $[x-\mu]$ y se obtiene su transformada $[x-\mu]^T$.

Se calcula el factor de seguridad utilizando como valores las medias de las variables aleatorias

$$FS = \frac{c' + (\gamma_t - \gamma_w)Z_w \cos^2 \alpha \tan \phi'}{\gamma_t Z_w \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{35.06 + (16.52 - 9.81) \cdot 0.109 \cdot \cos^2 20 \cdot 0.4917}{16.52 \cdot 0.109 \cdot \sin 20 \cdot \cos 20} = 61.1299$$

Se calcula la matriz de covarianza C de la siguiente manera

$$Cov(x, y) = \rho_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y$$

118

Para obtener el índice de confiabilidad, se utiliza la siguiente fórmula

$$\beta = \sqrt{[x - \mu]^T \cdot [C]^{-1} \cdot [x - \mu]} = 0.00000$$

Utilizando la función para resolver ecuaciones incluida en varias hojas de cálculo (e.g. *Solver* en Excel), se minimiza β al variar los valores de las variables aleatorias, sujeto a la restricción que el FS = 1. En Figura 7.1 se resume la primera iteración.

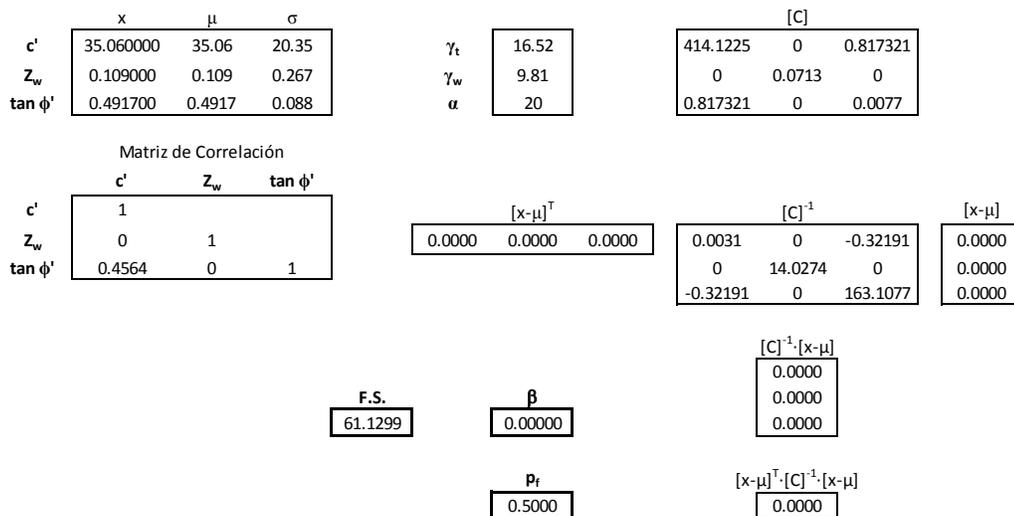


Figura 7.7 Resumen de la hoja de cálculo para la primera iteración.

En la Figura 7.2, se resumen los cálculos obtenidos luego de las iteraciones en Excel. Se obtuvo un índice de confiabilidad

$$\beta = 1.70668$$

Con el índice de confiabilidad, se calcula la probabilidad de falla,

$$p_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \approx 0.0439$$

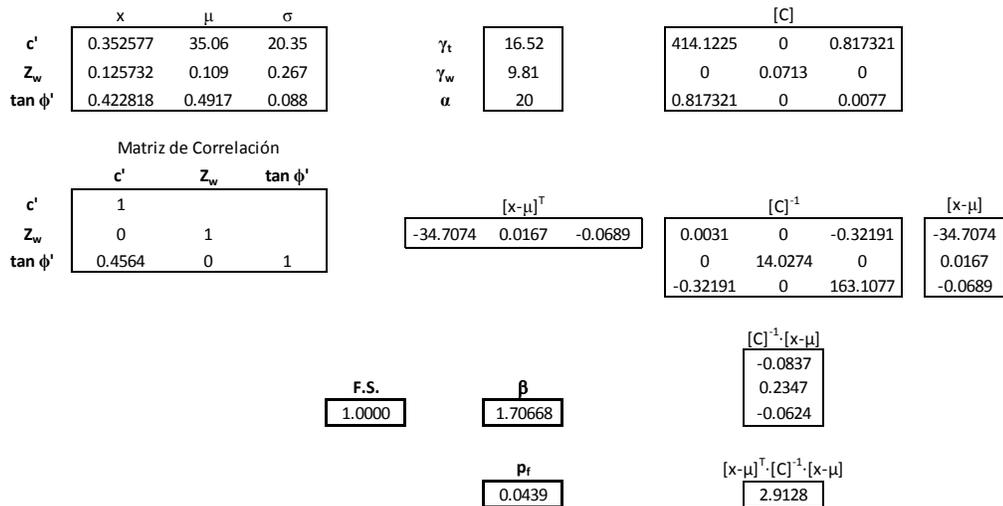


Figura 7.8 Resumen de la hoja de cálculo para la última iteración.

7.3.4 Simulación de Monte Carlo

Con la función de comportamiento definida en la ecuación 112 y con la media, desviación estándar y matriz de correlación (ρ_{xy}) calculadas, se procede a la elaboración de una hoja de cálculo. Utilizando la metodología original, se generaron variables aleatorias con distribución normal. En el análisis se toman en cuenta la correlación entre las variables mediante la descomposición de Choleski, en la cual se obtiene la matriz **S** a partir de la matriz de correlaciones, donde

$$K = S \cdot S^T \quad 119$$

El algoritmo para la obtención de la matriz **S**, es el siguiente

$$S_{ii} = \left(K_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{ki}^2 \right)^{1/2} \quad i = 1, \dots, n$$

$$S_{ij} = \frac{(K_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} S_{ki} S_{kj})}{S_{ii}} \quad j = i + 1, \dots, n$$

$$S_{ji} = 0 \quad j = i + 1, \dots, n$$

En la Tabla 7.14 se muestra la matriz **S** calculada en el caso piloto,

Tabla 7.14 Matriz S.

Matriz S		
1	0	0
0	1	0
0.4564	0	0.889775

En la hoja de cálculo se generan n números aleatorios distribuidos uniformemente entre 0 y 1 para cada una de las variables aleatorias. En nuestro caso, se generarán n números aleatorios para las tres variables aleatorias. Posteriormente se modifica cada uno de los números aleatorios para que correspondan a la distribución estándar normal ($\mu = 0$ y $\sigma = 1$). Esta se denominará la matriz **X**. Utilizando las matrices **X** y **S**, se calcula la matriz **Y** (Tabla 7.17). Esta matriz consiste de números aleatorios correlacionados entre sí. En la Tabla 7.15 se muestra como ejemplo 10 números aleatorios para cada variable.

$$Y = X \cdot S^T \quad 121$$

Para obtener las variables aleatorias con las medias y desviaciones estándar correspondientes, se calcula z para cada variable mediante

$$z_i = \mu + \sigma \cdot y_i \quad 122$$

En caso piloto se generaron valores negativos para la profundidad del frente húmedo y la cohesión, lo cual no refleja el comportamiento real de dichas variables. Debido a esto, la metodología se modifica para restringir los valores generados aleatoriamente. Para todas las variables aleatorias se estableció un límite inferior y superior. El límite inferior se estableció como cero ya que valores inferiores serán negativos y deseamos evitarlos. Ya que el 99.73% de los posibles valores de las variables aleatorias se encuentran en el rango de la $\mu \pm 3\sigma$, el límite superior se definió igual a la media más tres veces la desviación estándar (USACE, 2006).

Los números generados aleatoriamente (U , Tabla 7.15) entre 0 y 1 son modificados mediante la siguiente fórmula (Saucier, 2000). F es la función de distribución normal acumulada. Los resultados del ejemplo aparecen en la Tabla 7.16.

$$Y = F(a) + [F(b) - F(a)]U \quad 123$$

La variable Y es transformada a la inversa de la distribución normal estándar acumulada (F^{-1} , Tabla 7.17). Luego se utiliza la [ecuación 122](#) para calcular las variables que utilizamos en la evaluación de la función de comportamiento (Tabla 7.18). Debido a esta modificación, la contribución de la correlación no puede ser tomada en cuenta.

Tabla 7.15 Números aleatorios uniformemente distribuidos, U.

U

a	b	c
0.106871	0.202863	0.888448
0.212561	0.452016	0.014046
0.660647	0.59807	0.901333
0.139367	0.146666	0.583147
0.456753	0.559646	0.680973
0.252335	0.540882	0.292042
0.697935	0.864222	0.114709
0.719231	0.566392	0.466689
0.925532	0.181919	0.37998
0.53902	0.882554	0.853934

Tabla 7.16 Matriz Y.

Y		
a	b	c
0.144647	0.474851	0.887249
0.245707	0.638569	0.014028
0.674163	0.734542	0.900116
0.175719	0.437923	0.582359
0.479202	0.709293	0.680053
0.283739	0.696963	0.291647
0.709818	0.90943	0.114554
0.730181	0.713726	0.46606
0.927444	0.461088	0.379467
0.557864	0.921476	0.852782

Tabla 7.17 Matriz X.

X		
a	b	c
-1.05967	-0.06308	1.212028
-0.68806	0.354636	-2.19652
0.451438	0.626607	1.282212
-0.9318	-0.15624	0.207933
-0.05216	0.55132	0.467848
-0.57177	0.515686	-0.54858
0.552853	1.337254	-1.20266
0.61336	0.564302	-0.08518
1.457016	-0.09769	-0.30688
0.145556	1.415069	1.048439

Tabla 7.18 Matriz Z.

Z			
c	Z_w	tan φ	FS
13.49567	0.092157	0.598358	28.24927
21.05792	0.203688	0.298407	19.80466
44.24677	0.276304	0.604535	30.8357
16.09783	0.067285	0.509998	45.63041
33.9986	0.256202	0.532871	25.58834
23.42447	0.246688	0.443425	18.37922
46.31057	0.466047	0.385866	19.14618
47.54188	0.259669	0.484204	35.02368
64.71028	0.082916	0.464694	147.5088
38.02207	0.486824	0.583963	15.36181

Se evalúa la función de comportamiento del factor de seguridad para cada combinación aleatoria y se obtiene la media y desviación estándar del factor de seguridad. En nuestro ejemplo se obtuvo una media de 38.55 y una desviación estándar de 39.36.

Para calcular el índice de confiabilidad se utiliza la siguiente fórmula

$$\beta = \frac{E[FS] - 1}{\sigma_{FS}} = \frac{38.55281 - 1}{39.35686} \approx 0.954$$

Con el índice de confiabilidad, se calcula la probabilidad de falla,

$$p_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \approx 0.170$$

Se realizaron varias simulaciones con diferentes cantidades de números aleatorios. Los resultados se resumen en la Tabla 7.19 y en la Figura 7.3.

Tabla 7.19 Resumen de simulaciones realizadas.

n	μ_{FS}	σ_{FS}	β	p_f
100	154.8669	1009.2595	0.1525	0.439414
500	124.0899	787.0679	0.1564	0.437863
1,000	90.4866	350.7203	0.2552	0.399303
2,500	1003.4090	33906.3761	0.0296	0.488207
5,000	158.5297	1985.3706	0.0793	0.468379
7,500	220.8381	7516.1780	0.0292	0.488333
10,000	158.0668	2888.8325	0.0544	0.47832
25,000	150.1385	2220.3516	0.0672	0.473224
50,000	153.8429	2160.0576	0.0708	0.471795

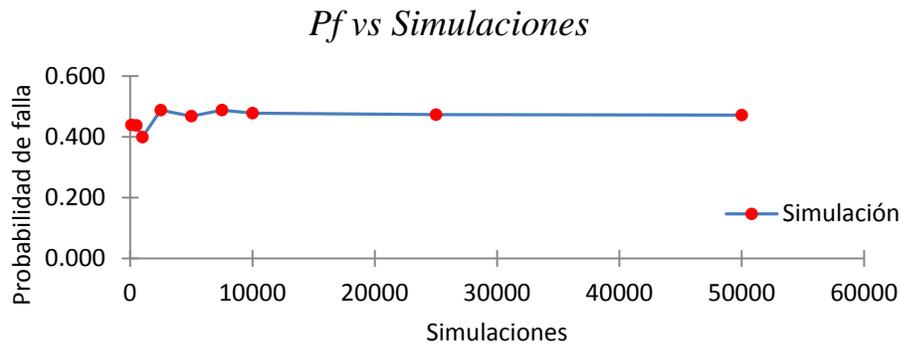


Figura 7.9 Comportamiento de la probabilidad de falla al aumentar el número de simulaciones.

7.4 Aplicación al Modelo de Iverson

7.4.1 Método de Primer Orden Segundo Momento

Previo al cálculo del factor de seguridad, se debe calcular la función de respuesta de cabeza de presión R y la cabeza de presión inicial en el suelo, para un tiempo t luego de iniciada la lluvia con duración T . Las variables representan:

t = período de análisis (seg)

Z = profundidad vertical a analizar (m)

T = duración de lluvia (seg)

D_0 = difusividad hidráulica máxima (m^2/s)

$$R(t^*) = \sqrt{t^*/\pi} \exp(-1/t^*) - \operatorname{erfc}(1/\sqrt{t^*}); \quad t \leq T \quad 124$$

$$R(t^* - T^*) = \sqrt{(t^* - T^*)/\pi} \exp(-1/(t^* - T^*)) - \operatorname{erfc}(1/\sqrt{(t^* - T^*)}); \quad t > T \quad 125$$

Donde

$$t^* = \frac{t}{Z^2/\widehat{D}} \quad 126$$

$$T^* = \frac{T}{Z^2/\widehat{D}} \quad 127$$

Con \widehat{D} calculado mediante

$$\widehat{D} = 4D_0 \cos^2 \alpha \quad 128$$

En la Tabla 7.20 se muestran los valores utilizados en este análisis. Se decidió calcular el comportamiento a una profundidad de 1.5 metros luego de 1 hora de lluvia. Al igual que la succión utilizada en el modelo de Pradel y Raad, el valor para la permeabilidad saturada se tomó de la literatura (Rawls et al., 1983). Por falta de datos se asumió un valor para la difusividad hidráulica.

Tabla 7.20 Valores utilizados para el cálculo del factor de seguridad.

Parámetros	Media	Desviación estándar	Asimetría
t (hr)	1.0	-	-
T (hr)	5.2	2.6	0
Z (m)	1.5	-	-
α (°)	20	-	-
K_{sat} (m/s)	1.667×10^{-7}	-	-
l_z (m/s)	2.492×10^{-7}	5.808×10^{-7}	0
c (kN/m ²)	35.06	20.35	0
$\tan \phi$	0.4917	0.0880	0
γ_s (kN/m ³)	18.16	-	-
γ_w (kN/m ³)	9.81	-	-
D_0 (m ² /s)	1×10^{-3}	-	-

Ya que $t \leq T$,

$$t^* = \frac{t}{Z^2/\widehat{D}} = \frac{3600}{1.50^2/3.532 \times 10^{-3}} = 5.651$$

$$R(t^*) = \sqrt{5.651/\pi} \exp(-1/5.651) - \operatorname{erfc}(1/\sqrt{5.651}) = 0.572$$

Posteriormente calcula la cabeza de presión inicial mediante:

$$\psi_0 = (Z - d_z)\beta \quad 129$$

Donde β para flujo paralelo a la pendiente del talud

$$\beta = \cos^2 \alpha \quad 130$$

En este caso, no existe nivel freático ($d_z = 0$). Por lo tanto

$$\psi_0 = (1.5 - 0)\cos^2(20) = 1.325 \text{ m}$$

A continuación se calcula la media del factor de seguridad inicial del talud, con la función de comportamiento definida como

$$FS_0 = \frac{\tan \phi}{\tan \alpha} + \frac{c}{\gamma_s Z \sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\psi_0 \gamma_w \tan \phi}{\gamma_s Z \sin \alpha \cos \alpha} \quad 131$$

El valor medio obtenido se calcula de la siguiente manera

$$\mu_{FS_0} = \frac{\mu_{\tan \phi}}{\tan \alpha} + \frac{\mu_c}{\gamma_s Z \sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\psi_0 \gamma_w \mu_{\tan \phi}}{\gamma_s Z \sin \alpha \cos \alpha} = 4.63$$

La desviación estándar se calcula de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \sigma_{FS_0}^2 &= \left[\sigma_c^2 \left(\frac{\partial FS_0}{\partial c} \right)^2 + \sigma_{\tan \phi}^2 \left(\frac{\partial FS_0}{\partial \tan \phi} \right)^2 \right] + \left[\rho_{c \tan \phi} \sigma_c \sigma_{\tan \phi} \frac{\partial FS_0}{\partial c} \frac{\partial FS_0}{\partial \tan \phi} \right]^2 \\ \frac{\partial FS_0}{\partial c} &\approx \frac{1}{2(0.0001)} \{4.62558030892 - 4.62558028605\} = 0.00011435 \\ \frac{\partial FS_0}{\partial \tan \phi} &\approx \frac{1}{2(0.0001)} \{4.62570657468 - 4.62545402029\} = 1.26277195 \\ \sigma_{FS_0} &= 2.33 \end{aligned}$$

A continuación se calcula la media del factor de seguridad que depende de la respuesta hidrológica del talud.

$$FS' = - \frac{\gamma_w \tan \phi I_z R}{\gamma_s \sin \alpha \cos \alpha K_{sat}} \quad 132$$

La media calculada tiene un valor de

$$\mu_{FS'} = -\frac{\gamma_w \mu_{\tan\phi} \mu_{I_z} R}{\gamma_s \sin \alpha \cos \alpha K_{sat}} = -0.47$$

La desviación estándar se calcula de la siguiente forma,

$$\sigma_{FS'}^2 = \left[\sigma_{I_z}^2 \left(\frac{\partial FS'}{\partial I_z} \right)^2 + \sigma_{\tan\phi}^2 \left(\frac{\partial FS'}{\partial \tan\phi} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial FS'}{\partial I_z} \approx \frac{1}{2(0.0001)} \{-190.171213069 - 189.225755822\} = -1896984.84446$$

$$\frac{\partial FS'}{\partial \tan\phi} \approx \frac{1}{2(0.0001)} \{-0.472824764914 - (-0.472632481562)\} = -0.96141676$$

$$\sigma_{FS'} = 1.10$$

A continuación se calcula el factor de seguridad total del talud, bajo las condiciones analizadas.

$$FS = FS_0 + FS' \quad 133$$

La media del factor de seguridad total será

$$\mu_{FS} = \mu_{FS_0} + \mu_{FS'}$$

$$\mu_{FS} = 4.63 + (-0.47) = 4.16$$

La desviación estándar se calcula de la siguiente forma,

$$\sigma_{FS}^2 = \left[\sigma_{FS_0}^2 \left(\frac{\partial FS}{\partial FS_0} \right)^2 + \sigma_{FS'}^2 \left(\frac{\partial FS}{\partial FS'} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial FS}{\partial FS_0} = 1; \quad \frac{\partial FS}{\partial FS'} = 1$$

$$\sigma_{FS} = 2.58$$

Para calcular el índice de confiabilidad se utiliza la siguiente fórmula

$$\beta = \frac{E[FS] - 1}{\sigma_{FS}} = \frac{4.16 - 1}{2.58} \approx 1.2248$$

Con el índice de confiabilidad, se calcula la probabilidad de falla,

$$p_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \approx 0.1103$$

7.4.2 Método de Estimativos Puntuales

Como primer paso se calculan los valores para ξ , x_+ y x_- , los cuales aparecen en la Tabla 7.21.

Tabla 7.21 Resumen de los valores en los cuales se evaluará el factor de seguridad.

	μ	σ	v	ξ	x_+	x_-
c	35060	20350	0	1	55410	14710
I_z	2.492E-07	5.807E-07	0	1	8.299E-07	-3.315E-07
tan ϕ	0.492	0.088	0	1	0.580	0.404

Para evaluar el factor de seguridad, se deben utilizar todas las posibles combinaciones a partir de los valores obtenidos en el paso anterior (i.e. x_+ y x_-). Si existen n variables aleatorias, entonces el número de combinaciones posibles es 2^n . En nuestro caso, existen 8 posibles combinaciones, los cuales se pueden observar en la Tabla 7.22. Se debe recordar que la infiltración (I_z) sea menor o igual que la conductividad hidráulica saturada (K_{sat}), para que toda la lluvia se infiltre en el suelo.

Tabla 7.22 Resumen de los cálculos para obtener la media y desviación estándar de factor de seguridad.

Punto	c	I_z	tan ϕ	FS	p	FSp	FS²p
1	55410	8.299E-07	0.580	6.50	0.182	1.184	7.700653
2	55410	8.299E-07	0.404	6.45	0.068	0.438	2.827574
3	55410	-3.315E-07	0.580	7.28	0.182	1.326	9.658371
4	55410	-3.315E-07	0.404	6.99	0.068	0.475	3.323786
5	14710	8.299E-07	0.580	1.85	0.068	0.126	0.233798
6	14710	8.299E-07	0.404	1.80	0.182	0.328	0.591078
7	14710	-3.315E-07	0.580	2.63	0.068	0.179	0.471749
8	14710	-3.315E-07	0.404	2.35	0.182	0.427	1.001134

Para calcular la media del factor de seguridad,

$$\mu[FS] = \sum FS \cdot p = 4.484$$

La desviación estándar del factor de seguridad es

$$\sigma[FS] = \sqrt{\left(\sum FS^2 \cdot p\right) - (\mu_{FS})^2} = 2.389$$

Para calcular el índice de confiabilidad se utiliza la siguiente fórmula

$$\beta = \frac{E[FS] - 1}{\sigma_{FS}} \approx 1.4585$$

Con el índice de confiabilidad, se calcula la probabilidad de falla,

$$p_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) \approx 0.0724$$

7.4.3 Método de Hasofer-Lind

El criterio de falla se define como

$$g = \frac{\tan\phi}{\tan\alpha} + \frac{c}{\gamma_s Z \sin\alpha \cos\alpha} - \frac{\psi_0 \gamma_w \tan\phi}{\gamma_s Z \sin\alpha \cos\alpha} - \frac{\gamma_w \tan\phi I_z R}{\gamma_s \sin\alpha \cos\alpha K_{sat}} - 1 \quad 134$$

Para la primera iteración se asumen los siguientes valores

$$c' = \mu_{c'} = 35060 \text{ Pa}; \quad I_z = \mu_{I_z} = 2.492 \times 10^{-7} \text{ m/s}; \quad \tan\phi' = \mu_{\tan\phi'} = 0.4917$$

Se calculan las derivadas parciales de la función g con respecto a las variables aleatorias, para luego multiplicarlas por las desviaciones estándar respectivas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial c} &= \frac{1}{\gamma_s Z \sin\alpha \cos\alpha} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial c'} = \frac{1}{\gamma_s Z \sin\alpha \cos\alpha} \cdot \sigma_c = 2.32448 \\ \frac{\partial g}{\partial I_z} &= -\frac{\gamma_w \tan\phi R}{\gamma_s \sin\alpha \cos\alpha K_{sat}} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial I_z'} = -\frac{\gamma_w \tan\phi R}{\gamma_s \sin\alpha \cos\alpha K_{sat}} \cdot \sigma_{I_z} = -1.101579 \\ \frac{\partial g}{\partial \tan\phi} &= \frac{1}{\tan\alpha} - \frac{\psi_0 \gamma_w}{\gamma_s Z \sin\alpha \cos\alpha} - \frac{\gamma_w I_z R}{\gamma_s \sin\alpha \cos\alpha K_{sat}} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial \tan\phi'} \\ &= \left[\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{\psi_0 \gamma_w}{\gamma_s Z \sin\alpha \cos\alpha} - \frac{\gamma_w I_z R}{\gamma_s \sin\alpha \cos\alpha K_{sat}} \right] \cdot \sigma_{\tan\phi} = 0.026519 \end{aligned}$$

Posteriormente se calcula la matriz \mathbf{G} y $\boldsymbol{\alpha}$. Con los valores de la matriz $\boldsymbol{\alpha}$ se obtiene para cada variable aleatoria

$$\begin{aligned} x_i^* &= \mu_{x_i} - \alpha_i \cdot \sigma_{x_i} \cdot \beta \\ c^* &= 35060 - 18388.483850\beta \\ I_z^* &= 2.492 \times 10^{-7} + 2.4867 \times 10^{-7}\beta \\ \tan\phi^* &= 0.4917 - 0.000907\beta \end{aligned}$$

Las ecuaciones obtenidas en el paso anterior se sustituyen en la función g ,

$$\frac{(0.4917 - 0.000907\beta)}{\tan 20} + \frac{(35060 - 18388.483850\beta)}{18160(1.5) \sin 20 \cos 20} - \frac{1.325(9810)(0.4917 - 0.000907\beta)}{18160(1.5) \sin 20 \cos 20} - \frac{9810(0.4917 - 0.000907\beta)(2.492 \times 10^{-7} + 2.4867 \times 10^{-7}\beta)(0.572)}{18160 \sin 20 \cos 20 (2.492 \times 10^{-7})} - -1 = 0$$

Al resolver para β se obtiene

$$\beta = 1.226154914$$

Con el índice de confiabilidad calculado, se obtienen los siguientes valores

$$c^* = -1.10797; \quad x_i^* = -\alpha_i \cdot \beta \\ I_z^* = 0.52508; \quad \tan \phi^* = -0.01264$$

Para la segunda iteración, con $\beta = 1.226154914$,

$$c^* = 35060 - 18388.483850\beta = 12512.87 \\ I_z^* = 2.492 \times 10^{-7} + 2.4867 \times 10^{-7}\beta = 1.0 \times 10^{-6} \\ \tan \phi^* = 0.4917 - 0.000907\beta = 0.490588$$

Se repiten los pasos en la nueva iteración y se continua con ella hasta que los valores de β calculados converjan. En este caso se realizaron 6 iteraciones, en las cuales se consiguieron valores β similares. En la Tabla 7.23 se resumen los cálculos para las iteraciones realizadas.

Tabla 7.23 Resumen de las iteraciones.

Paso	Parámetros	Iteraciones					
		1	2	3	4	5	6
1	c	35060	12512.87017	7426.54105	7472.56236	7472.56342	7472.56342
	I_z	0.0000002492	0.000001	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$\tan \phi$	0.4917	0.490588	0.503441	0.485997	0.485997	0.485997
2	$\partial g / \partial c'$	2.324448	2.324448	2.324448	2.324448	2.324448	2.324448
	$\partial g / \partial I_z$	-1.101579	-1.099088	-1.127883	-1.088802	-1.088802	-1.088802
	$\partial g / \partial \tan \phi'$	0.026519	-0.228381	0.111124	0.111124	0.111124	0.111124
3	α_c	0.903611	0.900488	0.898850	0.904729	0.904729	0.904729
	α_{Iz}	-0.428230	-0.425785	-0.436145	-0.423787	-0.423787	-0.423787
	$\alpha_{\tan \phi}$	0.010309	-0.088475	0.042971	0.043252	0.043252	0.043252
4	$\alpha_c \cdot \sigma_c$	18388.48385	18324.93080	18291.59750	18411.23515	18411.23515	18411.23515
	$\alpha_{Iz} \cdot \sigma_{Iz}$	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	$\alpha_{\tan \phi} \cdot \sigma_{\tan \phi}$	0.000907	-0.007786	0.003781	0.003806	0.003806	0.003806
5	β	1.22615491	1.50797071	1.50820275	1.49840227	1.49840227	1.49840227
6	c^*	-1.107967	-1.357910	-1.355648	-1.355648	-1.355648	-1.355648
	I_z^*	0.525076	0.642071	0.657795	0.635003	0.635003	0.635003
	$\tan \phi^*$	-0.012640	0.133418	-0.064809	-0.064809	-0.064809	-0.064809

Con el índice de confiabilidad, se calcula la probabilidad de falla,

$$p_f = 1 - \Phi(\beta) = \Phi(-\beta) = \Phi(1.49840227) \approx 0.0670$$

Siguiendo el procedimiento de Low y Tang (Low & Tang, 1997), se obtuvieron los valores de

$$\beta = 2.86212 \quad y \quad p_f = 0.0021$$

En la Figura 7.4 aparece la hoja de cálculo correspondiente a los valores utilizados.

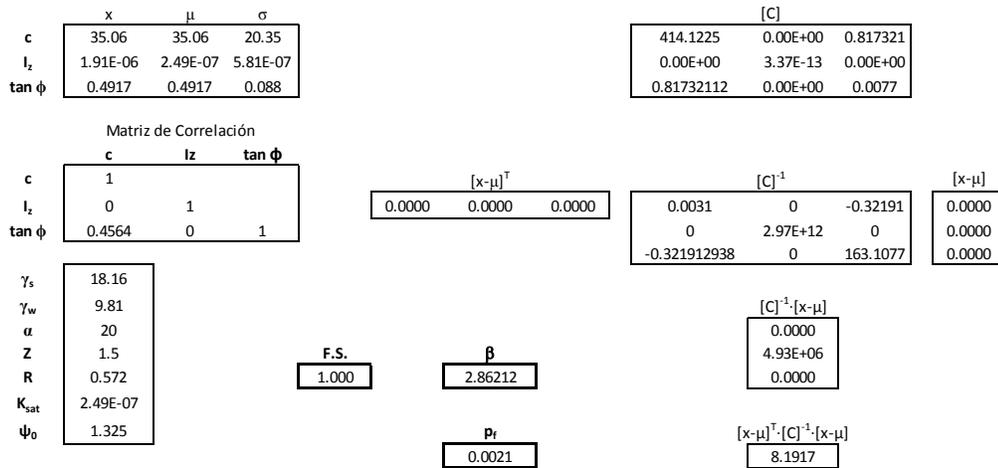


Figura 7.10 Resumen de la hoja de cálculo para la última iteración.

7.4.4 Simulación de Monte Carlo

Al igual que en el modelo de Pradel y Raad, se establecen límites inferiores y superiores para restringir el uso de valores negativos. Se calculan las matrices U, Y, X y Z de la misma forma con la cual se calcula el factor de seguridad. Se realizaron varias simulaciones con diferentes cantidades de números aleatorios. Los resultados se resumen en la Tabla 7.24 y en la Figura 7.5.

Tabla 7.24 Resumen de simulaciones realizadas.

n	μ_{FS}	σ_{FS}	β	p_f
100	4.1998	2.0155	1.5876	0.056188
500	4.4796	2.1616	1.6097	0.053732
1,000	4.4493	2.0381	1.6924	0.045287
2,500	4.4506	2.0914	1.6498	0.049487
5,000	4.4085	2.0957	1.6265	0.051926
7,500	4.4182	2.0984	1.6290	0.051659
10,000	4.4493	2.0996	1.6429	0.050206
25,000	4.4033	2.1028	1.6185	0.052781
50,000	4.4189	2.0974	1.6300	0.051547

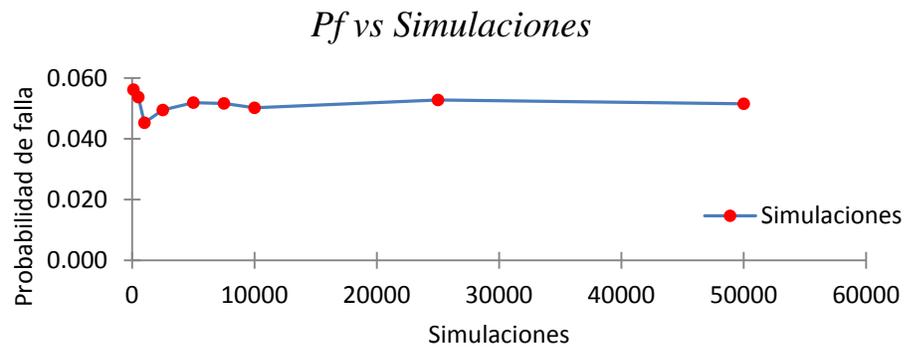


Figura 7.11 Comportamiento de la probabilidad de falla al aumentar el número de simulaciones.

8 Resultados

8.1 Modelo de Pradel y Raad

Se aplicaron los métodos de análisis de confiabilidad al modelo de deslizamientos superficiales propuesto por Pradel y Raad. En la Tabla 8.1 se muestran los valores del factor de seguridad, índice de confiabilidad y probabilidad de falla obtenidos por medio de cada método probabilístico. El método de Hasofer-Lind no calcula los parámetros estadísticos para el factor de seguridad.

Tabla 8.1 Resultados obtenidos mediante los análisis de probabilidad aplicados al modelo propuesto por Pradel y Raad.

Método	μ_{FS}	σ_{FS}	β	P_f
Primer Orden Segundo Momento	61.13	152.52	0.3942	0.3467
Estimativos Puntuales	-10.93	33.66	-0.3540	0.6380
Hasofer-Lind	-	-	1.7092	0.0437
	-	-	1.7067	0.0439
Simulación de Monte Carlo	150.14	2,220.35	0.0672	0.4732

En los métodos de Primer Orden Segundo Momento y Estimativos Puntuales se calcularon la media y desviación estándar del frente húmedo. Se puede observar en la Tabla 8.2 que los resultados obtenidos son similares. En los métodos de Hasofer-Lind y Monte Carlo se utilizó directamente los resultados del frente húmedo obtenidos del método de Primer Orden Segundo Momento.

Tabla 8.2 Resultados del frente húmedo obtenidos mediante el modelo propuesto por Pradel y Raad.

Método	Media (m)	Desviación Estándar (m)
Primer Orden Segundo Momento	0.109	0.267
Estimativos Puntuales	0.111	0.276

Debido a la metodología original de los análisis de Estimativos Puntuales y Monte Carlo, se generaron valores negativos para la intensidad, frente húmedo y cohesión. El uso de estos valores en la función de comportamiento produjo factores de seguridad individuales con valores negativos.

Como medida para evitar la utilización de variables negativas en la simulación de Monte Carlo, se decidió comparar los resultados iniciales con resultados producto de la limitación al uso de variables negativas mediante la definición de límites basados en el comportamiento real de las variables. En la Figura 8.1 se puede observar que esta limitación produce factores de seguridad muy altos en comparación a los resultados originales. Esta limitación en los valores utilizados produjo probabilidades de falla menores, tal como se observa en la Figura 8.2.

FS vs Simulaciones

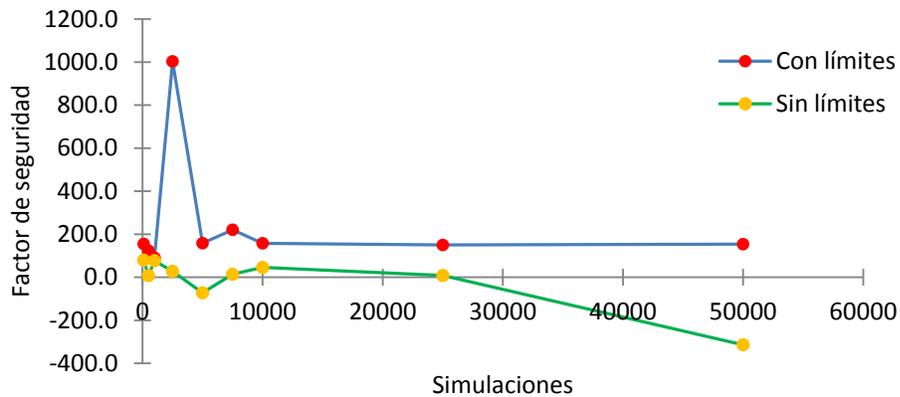


Figura 8.1 Comparación entre la metodología original de Monte Carlo y el uso de límites en el cálculo del factor de seguridad mediante el Modelo de Pradel y Raad.

Pf vs Simulaciones

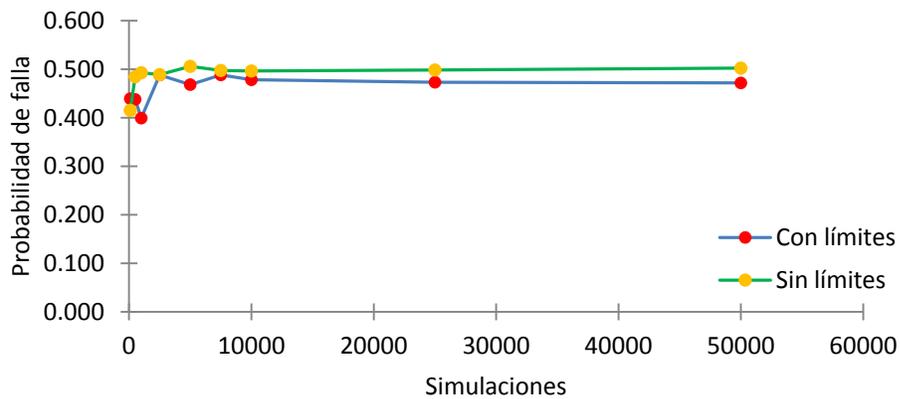


Figura 8.2 Comparación entre la metodología original de Monte Carlo y el uso de límites en el cálculo de la probabilidad de falla mediante el Modelo de Pradel y Raad.

8.2 Modelo de Iverson

Utilizando los mismos métodos probabilísticos, se realizó el análisis al modelo propuesto por Iverson. En la Tabla 8.3 se muestran los valores del factor de seguridad, índice de confiabilidad y probabilidad de falla obtenidos por medio de cada método probabilístico.

Tabla 8.3 Resultados obtenidos mediante los análisis de probabilidad aplicados al modelo propuesto por Iverson.

Método	μ_{FS}	σ_{FS}	β	P_f
Primer Orden Segundo Momento	4.16	2.58	1.2248	0.1103
Estimativos Puntuales	4.48	2.38	1.4585	0.0724
Hasofer-Lind	-	-	1.4984	0.0670
	-	-	2.8621	0.0021
Simulación de Monte Carlo	4.42	2.09	1.6300	0.0515

Para utilizar la metodología de Estimativos Puntuales, se generaron algunos valores negativos para la intensidad. Con ellos se calcularon los factores de seguridad. Es de notar, que en este caso no se produjeron valores negativos para el factor de seguridad.

Al igual que en el modelo de Pradel y Raad, se compararon los resultados del método original de Monte Carlo con los resultados de la limitación de las variables aleatorias. Factores de seguridad y probabilidades de falla menores fueron calculados al limitar las variables (ver Figura 8.3 y 8.4, respectivamente).

FS vs Simulaciones

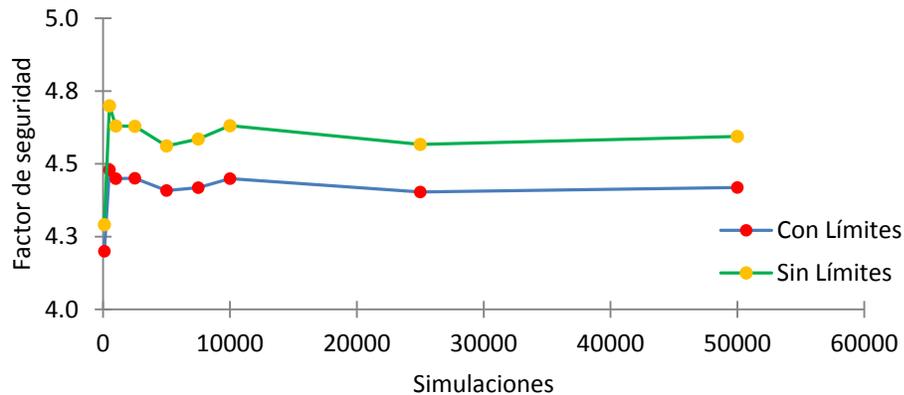


Figura 8.3 Comparación entre la metodología original de Monte Carlo y el uso de límites en el cálculo del factor de seguridad mediante el Modelo de Iverson.

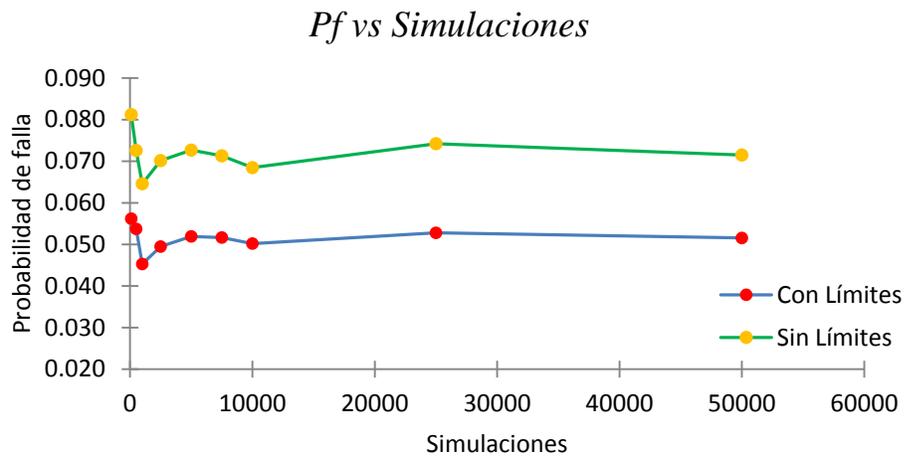


Figura 8.4 Comparación entre la metodología original de Monte Carlo y el uso de límites en el cálculo de la probabilidad de falla mediante el Modelo de Iverson.

9 Discusión

Los resultados obtenidos para el modelo de Iverson presentan resultados diferentes al compararse con el modelo de Pradel y Raad. Esto se debe a que en el modelo de Pradel y Raad la succión se considera como una variable aleatoria, por lo que su contribución influye en gran medida en la ubicación del frente húmedo y por ende en el factor de seguridad. Además, al no tener datos de campo para esta variable se tuvo que usar valores de literatura (Rawls et al., 1983) lo incrementa la incertidumbre de los resultados.

Para el modelo de Iverson, los únicos parámetros asumidos (permeabilidad y difusividad hidráulica) fueron considerados determinísticos, por lo que su contribución en la incertidumbre fue baja.

La selección de las distribuciones estadísticas se basó en los procedimientos probabilísticos utilizados, ya que estos fueron creados basándose en la utilización de variables normales y log-normales. Al utilizar las pruebas de bondad de ajuste en la intensidad y duración, la suposición de normalidad y log-normalidad fue rechazada, pero se decidió utilizar de todas formas para poder aplicar la metodología.

9.1 Método de Pradel y Raad

Los valores del frente húmedo obtenidos mediante Primer Orden Segundo Momento y Estimativos Puntuales presentaron valores similares en el caso piloto. Sin embargo, el segundo método utilizó valores negativos para la intensidad de lluvia. El uso de estos valores irreales reduce la confiabilidad del resultado.

Según investigadores (Russelli, 2008) la aplicación del Método de Primer Orden Segundo Momento a funciones no lineales introduce imprecisiones en los resultados. Debido a los diferentes valores obtenidos en los demás métodos, no fue posible corroborar esta declaración.

La metodología original para Estimativos Puntuales y Monte Carlo utiliza la distribución estadística de las variables aleatorias para generar conjuntos de valores con los cuales evaluar la función de comportamiento. En el caso piloto, se generaron valores negativos debido a que dichas variables se modelaron mediante la distribución normal, la cual toma valores entre $-\infty$ y $+\infty$. El uso de estos valores produjo factores de seguridad negativos, los cuales introducen errores en el índice de confiabilidad y la probabilidad de falla. Dichos factores de seguridad negativos pueden ser producto, posiblemente, de la succión generada por la presión de poros negativa.

La modificación del método de Monte Carlo elimina la aparición de valores negativos. En comparación con los demás métodos, los resultados de Primer Orden Segundo Momento concuerdan (en menor medida) con la Simulación de Monte Carlo basándose en la media y la alta dispersión observada para el factor de seguridad.

La obtención de factores de seguridad extremadamente altos para el procedimiento de Primer Orden Segundo Momento y Simulación de Monte Carlos se debe a la gran incertidumbre introducida (i.e. desviaciones estándar altas) de ocho variables estadísticas. Además, la cohesión presenta un valor medio y desviación estándar alto, lo cual influye en factores de seguridad altos.

El factor de seguridad negativo producto del procedimiento de Estimativos Puntuales se debe a que el mismo método calcula factores de seguridad utilizando valores por encima y debajo de la media de las variables estadísticas. Este procedimiento puede generar datos negativos que al ser introducidos en los cálculos, generan factores de seguridad negativos. Un índice de confiabilidad negativo se obtendrá si se produce una media negativa del factor de seguridad.

Si se utiliza la clasificación propuesta por el Cuerpo de Ingenieros (Tabla 2.1), los resultados obtenidos clasificarían como pobre a peligroso el desempeño del talud analizado.

9.2 Método de Iverson

Al igual que en el modelo de Pradel y Raad, la función de comportamiento para Iverson es no lineal, por lo que la precisión se reduce al usarlo en conjunto con Primer Orden Segundo Momento.

Para el modelo de Iverson, los resultados obtenidos mediante el método original y el propuesto por Low difieren. Esto se debe a que en el método de Low no se pudo programar la condición necesaria que la infiltración sea menor o igual que la conductividad hidráulica saturada. En este caso es preferible utilizar la metodología original.

El comportamiento del talud puede ser clasificado como insatisfactorio a pobre, basándose en las recomendaciones del Cuerpo de Ingenieros (Tabla 2.1).

10 Conclusiones

La mejor metodología propuesta para el análisis probabilístico de la estabilidad superficial de taludes consiste en aplicar la Simulación de Monte Carlo al modelo propuesto por Iverson.

La aplicación de los diferentes métodos de confiabilidad al modelo propuesto por Pradel y Raad generan valores muy diferentes entre sí, tanto en el factor de seguridad como en la probabilidad de falla, por lo que su uso para analizar la estabilidad superficial de taludes en el caso piloto es deficiente.

El modelo propuesto por Iverson genera resultados similares para cada uno de los métodos de confiabilidad utilizados, tanto en el factor de seguridad como en la probabilidad de falla, por lo que su uso es satisfactorio en el análisis de estabilidad superficial.

A partir de la aplicación del modelo de Iverson en el caso piloto, el método probabilístico que mejor modela la estabilidad superficial es la Simulación de Monte Carlo. Esto se debe al gran número de cálculos realizados gracias a la generación aleatoria de las variables estadísticas. Al obtener un número amplio de resultados, el factor de seguridad puede tratarse estadísticamente y por lo tanto es más confiable.

El modelo propuesto por Pradel y Raad utiliza los parámetros meteorológicos y los parámetros hidráulicos del suelo para estimar la profundidad en la cual se genera la superficie de falla. Sin embargo, la contribución de estos parámetros no es tomada en cuenta en el cálculo de la estabilidad superficial del talud, a diferencia del modelo de Iverson en donde la contribución de la presión de poros sí es tomada en cuenta.

Una desventaja en el uso de métodos probabilísticos a los modelos de estabilidad propuestos es la falta de datos de campo para variables que contribuyen al comportamiento de las fallas superficiales en taludes.

El uso de la distribución normal en los análisis de confiabilidad no es el más indicado para modelar el comportamiento de la intensidad y duración de la precipitación así como la cohesión del suelo. Esto se debe a que dicha distribución puede generar valores negativos en el análisis, los cuales no representan el comportamiento real de los parámetros meteorológicos y geotécnicos.

11 Recomendaciones

Debido a la falta de datos para ciertos parámetros geotécnicos (succión, conductividad hidráulica saturada, difusividad hidráulica máxima), se tuvo que utilizar datos de literatura que no representan fielmente las características de los suelos analizados. Para prevenir esta desventaja, se deben llevar a cabo estudios regionales para caracterizar los suelos y así contar con una base de datos con la cual calcular descriptores estadísticos.

Con el fin de evitar la evaluación de funciones de comportamiento con variables cuyas distribuciones estadísticas generen valores negativos y por lo tanto irreales, se recomienda la utilización de distribuciones no negativas como la lognormal. El uso de este tipo de distribuciones estadísticas tiene la ventaja de evitar la generación de valores negativos al momento de analizar la función de comportamiento.

Una vez superado los inconvenientes descritos en los párrafos anteriores, la metodología propuesta puede ser incorporada en normas (e.g. Norma Colombiana de Diseño y Construcción Sismo Resistente). Los resultados pueden ser utilizados directamente y compararlos con probabilidades de falla permitidas en conjunto con los factores de seguridad tradicionales. También puede ser utilizada indirectamente para generar factores parciales aceptables que pueden ser utilizados en los análisis de estado límite, tal como se realizó con el Diseño Geotécnico del Eurocódigo 7.

A partir de la metodología propuesta se pueden construir mapas de riesgo para deslizamientos superficiales debido a procesos de infiltración.

12 Bibliografía

- Adams, B., & Papa, F. (2000). *Urban stormwater management planning with analytical probabilistic models*. Wiley.
- Baecher, G., & Christian, J. (2003). *Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering*. West Sussex: Wiley.
- Caine, N. (1980). The rainfall intensity-duration control of shallow landslides and debris flows. *Geografiska Annaler*, 62(1/2), pp. 23–27.
- Capparelli, G., Biondi, D., De Luca, D., & Versace, P. (2009). Hydrological and complete models for forecasting landslides triggered by rainfalls. *First Italian Workshop on Landslides* (pp. 162–173). Napoli.
- Centro de Investigación en Materiales y Obras Civiles. (2002). *Microzonificación sísmica de la Ciudad de Manizales*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Cho, S. (2007). Effects of spatial variability of soil properties on slope stability. *Engineering Geology*, 92(3-4), pp. 97–109.
- Cho, S., & Lee, S. (2002). Evaluation of surficial stability for homogeneous slopes considering rainfall characteristics. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 128(9), pp. 756–763.
- Crosta, G., & Frattini, P. (2003). Distributed modelling of shallow landslides triggered by intense rainfall. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 3(1/2), pp. 81–93.
- Duncan, J. (2000). Factors of safety and reliability in geotechnical engineering. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 126(4), pp. 307–316.
- Ekanayake, J., & Phillips, C. (1999). A model for determining thresholds for initiation of shallow landslides under near-saturated conditions in the East Coast region, New Zealand. *Journal of Hydrology (NZ)*, 38(1), pp. 1–28.
- Elkateb, T., Chalaturnyk, R., & Robertson, P. (2003). An overview of soil heterogeneity: quantification and implications on geotechnical field problems. *Canadian Geotechnical Journal*, 40(1), pp. 1–15.
- El-Ramly, H., Morgenstern, N., & Cruden, D. (2002). Probabilistic slope stability analysis for practice. *Canadian Geotechnical Journal*, 39, pp. 665–683.
- El-Ramly, H., Morgenstern, N., & Cruden, D. (2006). Lodalén slide: a probabilistic assessment. *Canadian Geotechnical Journal*, 43(9), pp. 956–968.
- Escobar, C. (2007). *Diseño de las obras de estabilidad en el sector Vereda El Arenillo en la Ciudad de Manizales*. Manizales.
- Fenton, G., & Griffiths, D. (2008). *Risk Assessment in Geotechnical Engineering*. New Jersey: Wiley.
- Fourie, A. (1996). Predicting rainfall-induced slope instability. *Proceedings Institution of Civil Engineers Geotechnical Engineering*, pp. 211–218.
- Griffiths, D., & Fenton, G. (Eds.). (2007). *Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering*. New York: Springer.
- Hungr, O. (2009). Rainfall-triggered shallow landslides and debris avalanches: mechanics and susceptibility mapping. *1st Italian Workshop on Landslides* (Vol. 1).
- IDEAM. (2010, October 26). Datos precipitación Estación Emas.
- Iverson, R. (2000). Landslide triggering by rain infiltration. *Water Resources Research*, 36(7), pp. 1897–1910.
- Kim, J., Jeong, S., Park, S., & Sharma, J. (2004). Influence of rainfall-induced wetting on the stability of slopes in weathered soils. *Engineering geology*, 75(3-4), pp. 251–262.
- Low, B. (1997). Reliability Analysis of Rock Wedges. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 123(6), pp. 498–505.
- Low, B., Gilbert, R., & Wright, S. (1998). Slope reliability analysis using generalized method of slices. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 124(4), pp. 350–362.

- Low, B., & Tang, W. (1997). Efficient Reliability Evaluation Using Spreadsheet. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(7), pp. 749–752.
- Meisina, C., & Scarabelli, S. (2007). A comparative analysis of terrain stability models for predicting shallow landslides in colluvial soils. *Geomorphology*, 87(3), pp. 207–223.
- Mejía, F. (2008). *Apuntes sobre el clima en Manizales* (No. 68). Boletín Ambiental. Manizales: Instituto de Estudios Ambientales.
- Phoon, K.-K. (Ed.). (2008). *Reliability-Based Design in Geotechnical Engineering: Computations and Applications* (1st ed.). Taylor & Francis.
- Pradel, D., & Raad, G. (1993). Effect of Permeability on Surficial Stability of Homogeneous Slopes. *Journal of Geotechnical Engineering*, 119(2), pp. 315–332.
- Rahardjo, H., Rezaur, R., & Leong, E. (2009). Mechanism of rainfall-induced slope failures in tropical regions. *1st Italian Workshop on Landslides* (Vol. 1).
- Rawls, W. J., Brakensiek, D. L., & Miller, N. (1983). Green-Ampt Infiltration Parameters from Soils Data. *Journal of Hydraulic Engineering*, 109(1), pp. 62–70.
- Rodríguez, C. (2005). *Estabilidad de taludes en cenizas volcánicas en la Ciudad de Manizales – Edificación de la Trilladora de Café Manizales*. Bogotá, Colombia: Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional - Sede Bogotá.
- Rodríguez, C. (2009). *Funciones de variables aleatorias*. Presented at the Clase de Análisis Estadístico, Probabilístico y de Confiabilidad y Riesgo en Ingeniería, Bogotá, Colombia.
- Rodríguez, C. (2010). *Ejecución de estudios y diseños geotécnicos de las obras de estabilización de taludes, manejo de aguas lluvias y control torrencial en la Vereda Buenavista y cauce de la Quebrada El Perro - Municipio de Manizales*.
- Rosso, R., Rulli, M. C., & Vannucchi, G. (2006). A physically based model for the hydrologic control on shallow landsliding. *Water Resources Research*, 42.
- Russelli, C. (2008). *Probabilistic methods applied to the bearing capacity problem*. Universitat Stuttgart, Stuttgart.
- Rychlik, I., & Rydén, J. (2006). *Probability and risk analysis: an introduction for engineers*. Berlin: Springer.
- Sánchez, M. (2010). *Introducción a la confiabilidad y evaluación de riesgos: teoría y aplicaciones en ingeniería* (2nd ed.). Ediciones Uniandes.
- Saucier, R. (2000). *Computer Generation of Statistical Distributions* (No. ARL-TR-2168). Army Research Laboratory.
- Sivakumar, G., & Murthy, D. (2005). Reliability analysis of unsaturated soil slopes. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 131(11), pp. 1423–1428.
- Terlien, M. (1998). The determination of statistical and deterministic hydrological landslide-triggering thresholds. *Environmental Geology*, 35(2-3), pp. 124–130.
- Tsaparas, I., Rahardjo, H., Toll, D., & Leong, E. (2002). Controlling parameters for rainfall-induced landslides. *Computers and Geotechnics*, 29(1), pp. 1–27.
- USACE. (2006). *Reliability Analysis and Risk Assessment for Seepage and Slope Stability Failure Modes for Embankment Dams* (Engineer Technical Letter No. 1110-2-561). Washington, D.C.
- Van Asch, T., Buma, J., & Van Beek, L. (1999). A view on some hydrological triggering systems in landslides. *Geomorphology*, 30(1-2), pp. 25–32.
- Van Asch, T., Van Beek, L., & Bogaard, T. (2009). The diversity in hydrological triggering systems of landslides. *First Italian Workshop on Landslides* (Vol. 1). Napoli.
- Wynn, J. (1994). *Seasonal and geographic variability in rainstorm parameter distributions*. Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts.
- Xie, M., Esaki, T., & Cai, M. (2004). A time-space based approach for mapping rainfall-induced shallow landslide hazard. *Environmental Geology*, 46(6-7), pp. 840–850.

13 Anexos

13.1 Parámetros para Análisis

Tabla 13.1 Datos de pesos unitarios totales utilizados en el análisis.

n	γ (kN/m ³)	n	γ (kN/m ³)	n	γ (kN/m ³)
1	16.13	22	12.95	42	17.22
2	15.40	23	14.32	43	15.94
3	16.49	24	13.54	44	16.11
4	16.17	25	20.50	45	16.28
5	19.08	26	10.59	46	16.15
6	18.33	27	16.28	47	16.96
7	17.70	28	15.11	48	16.99
8	14.72	29	18.05	49	17.40
9	17.50	30	16.89	50	17.55
10	16.16	31	14.62	51	18.26
11	15.29	32	14.89	52	17.52
12	14.83	33	16.98	53	18.40
13	17.08	34	18.02	54	20.22
14	15.21	35	17.90	55	19.55
15	15.40	36	14.93	56	16.72
16	16.72	37	15.20	57	18.11
17	14.62	38	16.93	58	17.52
18	19.62	39	16.82	59	17.77
19	14.32	40	17.31	60	16.78
20	13.73	41	17.35	61	17.81
21	14.72				

Tabla 13.2 Datos de pesos unitarios saturados utilizados en el análisis.

n	γ'_s (kN/m ³)
1	16.36
2	17.00
3	17.17
4	16.58
5	15.80
6	15.21
7	17.80
8	19.63
9	18.56
10	17.64
11	16.98
12	19.10
13	19.53
14	18.92
15	22.08
16	21.57
17	18.34
18	18.54

Tabla 13.3 Datos de cohesión utilizada en el análisis.

n	c (kN/m ²)	n	c (kN/m ²)
1	38.26	9	16.19
2	44.14	10	17.66
3	57.88	11	10.79
4	51.01	12	13.70
5	16.67	13	30.80
6	46.11	14	61.31
7	50.03	15	38.55
8	25.51	16	33.84

Tabla 13.4 Valores de ángulos de fricción utilizados en el análisis.

n	ϕ (°)	$\tan \phi$	n	ϕ (°)	$\tan \phi$
1	31.98	0.62438	9	18.50	0.33460
2	25.37	0.47419	10	26.10	0.48989
3	22.36	0.41135	11	27.50	0.52057
4	32.62	0.64002	12	17.90	0.32299
5	25.04	0.46716	13	29.46	0.56485
6	27.88	0.52903	14	28.84	0.55066
7	27.80	0.52724	15	26.19	0.49184
8	23.30	0.43067	16	26.01	0.48795

Tabla 13.5 Valores de las humedades volumétricas calculadas en el análisis.

n	γ (kN/m ³)	w (%)	G_s	θ_i	θ_w
1	15.21	39.10	2.50	0.4358	0.5534
2	15.40	32.30	2.62	0.3833	0.5464
3	16.72	38.10	2.55	0.4702	0.5160
4	14.62	29.60	2.51	0.3404	0.5419
5	14.62	63.30	2.62	0.5777	0.6522
6	14.89	75.40	2.65	0.6525	0.6734
7	16.82	37.10	2.60	0.4640	0.5192
8	17.31	24.20	2.64	0.3438	0.4621
9	16.28	30.90	2.61	0.3917	0.5146
10	17.40	38.60	2.60	0.4940	0.5078
11	17.55	45.70	2.60	0.5611	0.5277
12	18.26	32.20	2.80	0.4534	0.4971
13	17.52	26.50	2.70	0.3741	0.4771
14	18.40	33.50	2.80	0.4707	0.4982
15	20.22	15.70	2.80	0.2797	0.3638
16	19.55	17.90	2.80	0.3026	0.3963
17	16.72	32.30	2.60	0.4161	0.5045
18	18.11	33.70	2.70	0.4653	0.4886