Un Análisis Comprensivo sobre Tópicos en Teoría de la Medida, Teoría de Distribuciones y una Introducción a la Teoría de Espacios de Sobolev

Diego Armando García García

Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C, Colombia

2019

Un Análisis Comprensivo sobre Tópicos en Teoría de la Medida, Teoría de Distribuciones y una Introducción a la Teoría de Espacios de Sobolev

Diego Armando García García

Tesis de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Matemáticas

Director:
Ph.D. Edwin Gonzalo Murcia Rodríguez

Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2019

Pontificia Universidad
JAVERIANA
Bogotá

Un Análisis Comprensivo sobre Tópicos en Teoría de la Medida, Teoría de Distribuciones y una Introducción a la Teoría de Espacios de Sobolev

Autor: **Diego Armando García García**

Concepto de aprobación Tesis de grado Maestría en Matemáticas

Ph.D. Concepción J. Puerta B.
Decana
Facultad de Ciencias

Ph.D. Alba A. Trespalacios R.
Directora de Posgrado
Facultad de Ciencias

Bogotá D.C., Colombia
2019

Pontificia Universidad
JAVERIANA
Bogotá

Un Análisis Comprensivo sobre Tópicos en Teoría de la Medida, Teoría de Distribuciones y una Introducción a la Teoría de Espacios de Sobolev

Autor: Diego Armando García García

Concepto de aprobación Tesis de grado Maestría en Matemáticas

Ph.D. Julio C. Ramos F.
Jurado 1

Michael Rincón Villanueva.
Ph.D. Michael A. Rincón V.
Jurado 2

Edwin G Murcia R.
Ph.D. Edwin G. Murcia R.
Director

Bogotá D.C., Colombia
2019

A mis padres, hermanos y Mariana.

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente al profesor Jesús Ochoa, director de la maestría, por su apoyo durante estos dos años de estudio, tanto en lo personal como en los aportes y explicaciones de algunos temas. Al profesor Edwin Murcia, director de la carrera de matemáticas y mi tutor en el desarrollo de esta tesis, por sus explicaciones y metodología usada, que me permitieron comprender y motivarme a seguir con este campo de estudio. Al profesor Julio César Ramos, por sus conocimientos impartidos y ayuda incondicional. Al departamento de matemáticas, en cabeza de su director, el profesor Fernando Novoa, por su apoyo en el aspecto laboral. A la facultad de ciencias y la vicerrectoría académica, por brindarme la beca del 50 % para cursar la maestría. Por último, a mis seres queridos que siempre estuvieron ahí para darme una voz de aliento.

Resumen

En esta monografía, son presentados los resultados de una recopilación bibliográfica, puntualmente el análisis y estudio de [Lieb and Loss, 1997] y [Kesavan, 1989]. Se trabajan cálculos y demostraciones que los autores omiten en cada texto y algunos ejercicios que son utilizados en el desarrollo de los temas, así como ejemplos y contraejemplos que ayudan a analizar mejor los resultados encontrados en estos. El Capítulo 1, está dedicado a los capítulos 1 y 2 de [Lieb and Loss, 1997] y en algunas secciones en específico. En éste, se aborda la teoría de la medida y propiedades de los espacios L^p. En el Capítulo 2 se analizan los capítulos 1 y 2 de [Kesavan, 1989], allí se trabajó la teoría de distribuciones y una introducción a los espacios de Sobolev de orden entero.

Palabras clave: Espacio de Medida, Espacio L^p, Función de Prueba, Distribución, Espacios de Sobolev, Dominio de Extensión.

Abstract

In this monograph, results of a bibliographic compilation are presented, punctually the analysis and research about [Lieb and Loss, 1997] and [Kesavan, 1989] . Calculations and demonstrations which the author omits in each text, are given and some exercises which are used, as well as examples and counterexamples that help to analyze better the results found in these ones. Chapter 1 is devoted to chapters 1 and 2 of [Lieb and Loss, 1997] and some specific sections. In this one, measure theory and properties of L^p spaces is addressed. In chapter 2, chapters 1 and 2 of [Kesavan, 1989] are analyzed, here, the theory of distributions is treated and an introduction to Sobolev spaces of integer order.

Keywords: Measure Space, L^p Space, Test Function, Distribution, Sobolev Space, Extension Domain

Lista de Símbolos

Ω	En general, denota un conjunto abierto.
Σ	σ-álgebra de conjuntos
$\mathcal{M}$	Clase monótona de conjuntos
$\mathcal{A}$	Álgebra de conjuntos
μ	En general define una medida
$\mathcal{L}$	Medida de Lebesgue
$\mathcal{B}$	σ-álgebra de Borel
$\chi_{\{\cdot\}}$	Función característica sobre $\{\cdot\}$
$\operatorname{supp}\{f\}$	Soporte de la función f
$\operatorname{ess\,supp}\{f\}$	Soporte esencial de la función f
$\Vert\cdot\Vert_{L^p(\Omega)}$	Norma sobre $L^p(\Omega)$
$\Vert\cdot\Vert_{L^\infty(\Omega)}$	Norma sobre $L^\infty(\Omega)$
E^*, E'	Espacio dual de E
$\mathscr{D}$	Espacio de funciones C^∞ con soporte compacto
$\mathscr{D}'$	Espacio de distribuciones
$\mathcal{E}(\Omega)$	Espacio de funciones C^∞
$\mathcal{E}'(\Omega)$	Espacio de distribuciones con soporte compacto
$\hat{f}$	Transformada de Fourier de f
$\mathcal{S}$	Espacio Schwartz
$\mathcal{S}'$	Espacio de distribuciones templadas
$P(x)$	En general denota un polinomio en la variable x
$W^{m,p}(\Omega)$	Espacio de Sobolev con m entero
$H^m(\Omega)$	Espacio $W^{m,2}(\Omega)$
$W_0^{m,p}(\Omega)$	Clausura de $\mathscr{D}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$

Contenido

Introducción

Con el desarrollo formal de la teoría de la medida hecho por Lebesgue[1] y Borel[2] principalmente, se abrió un nuevo campo de estudio en matemáticas con una clase de espacios de funciones que han jugado un papel muy importante en Análisis Funcional y EDPs: los espacios L^p. Estos espacios cuentan con propiedades tan ricas que han permitido a los matemáticos plantear nuevas estructuras de espacios de funciones útiles en el estudio de las EDPs y que han generado un gran número de preguntas, algunas de ellas abiertas todavía.

Otra gran "joya" descubierta (tal como se refiere mi tutor), es la teoría de distribuciones desarrollada por Schwartz[3]. Y es que la importancia de esta teoría es de alto impacto en el estudio de EDPs, que Luz de Teresa[4] se refiere a ésta como "la indiferencia ante lo indiferenciable". Gran problema que hasta ese momento aquejaba a los matemáticos: las funciones que no son "buenas" (suaves). Posteriormente, un nuevo camino se abrió en el análisis de soluciones de EDPs y fue el trabajo realizado por Sobolev[5]. Los espacios de Sobolev estructuran una clase aún más poderosa de funciones que los espacios L^p y que dan condiciones para que en ellos, una EDP posea una solución suave en el sentido de las distribuciones.

Así pues, es el interés de analizar estas ramas contemporáneas de las matemáticas, comprender sus propiedades y el alcance que pueden tener en el estudio de soluciones. Este trabajo presenta un primer acercamiento a dichas teorías y una motivación personal para el autor, en iniciar una verdadera formación como matemático con miras a contribuir con una parte en el estudio de EDPs.
En las siguientes páginas se presentan los resultados del trabajo realizado en la recopilación bibliográfica, puntualmente el análisis y estudio de [Lieb and Loss, 1997] ,[Kesavan, 1989] y [Di Nezza et al., 2012]. Se trabajan cálculos y demostraciones que los autores omiten y algunos ejercicios que son utilizados en el desarrollo de los temas, así como contraejemplos y ejemplos que ayudan a analizar mejor los resultados encontrados en dichos textos.

El capítulo 1 está dedicado a los capítulos 1 y 2 de [Lieb and Loss, 1997] y algunas secciones en específico. En este se aborda la teoría de la medida y propiedades de los espacios L^p. En el capítulo 2, se analizan los capítulos 1 y 2 de [Kesavan, 1989], allí se aborda la teoría de

[1]Henri Léon Lebesgue (Francia; Junio 28, 1875 - Julio 26, 1941)
[2]Félix Édouard Justin Émile Borel (Francia; Enero 7,1871 - Febrero 3, 1956)
[3]Laurent-Moïse Schwartz (Francia; Marzo 5,1915 - Julio 4, 2002)
[4]`www.youtube.com/watch?v=zTKo3TdnVcs&t=2218s`
[5]Sergei Lvovich Sobolev (Rusia: Octubre 6, 1908 Enero 3, 1989)

distribuciones y una introducción a los espacios de Sobolev de orden entero. Finalmente en el capítulo 3, se realiza un breve análisis de las propiedades básicas de los espacios de Sobolev Fraccionarios. Esto permitirá a futuros lectores comprender de manera rápida y efectiva los temas allí tratados.

Algo para tener en cuenta es que aunque no se presentan resultados nuevos, las demostraciones hechas aquí son originales del autor de este trabajo con orientación del tutor.

Capítulo 1

Teoría de la Medida y Espacios L^p

Este capítulo está dedicado al análisis de los capítulos 1 y 2 de [Lieb and Loss, 1997] principalmente al estudio de la definición de espacios medibles, la integración en dichos espacios y también el estudio de los espacios L^p. Aquí se realizan cálculos y se solucionan algunos ejercicios que los autores proponen para comprender sus propiedades.

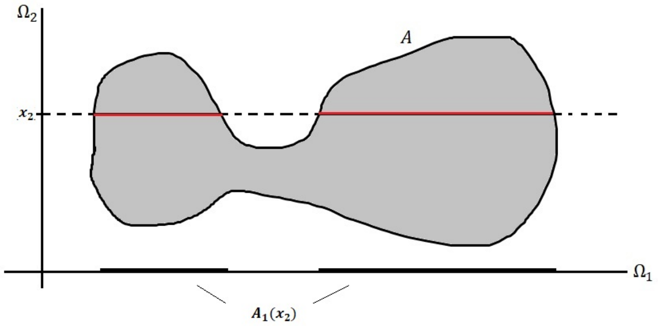
1.1. Propiedad de la sección

Definición 1.1. *Una colección de subconjuntos, Σ, de un conjunto Ω, es llamada una **σ-álgebra** si se cumple lo siguiente:*

1. *Si $A \in \Sigma$, entonces $A^c \in \Sigma$.*
2. *Si $A_1, A_2, ...$ es una familia contable de conjuntos en Σ, entonces su unión, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$, también pertenece a Σ.*
3. *$\Omega \in \Sigma$.*

Definición 1.2. *Un **espacio medible** está compuesto por un conjunto Ω y una σ-álgebra, y se denotará por (Ω, Σ).*

En esta sección, se introduce una "propiedad" del producto de σ-álgebras que será fundamental en la prueba del *Teorema de Fubini*, por eso es importante comprender dicha propiedad.
Sean (Ω_1, Σ_1) y (Ω_2, Σ_2) espacios medibles y sea $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$. Si consideramos un conjunto A en Σ, definimos el conjunto $A_1(x_2) := \{x_1 \in \Omega_1 : (x_1, x_2) \in A\}$. Decimos que Σ tiene la **propiedad de la sección** si el conjunto $A_1(x_2)$ pertenece a Σ_1 para cada elección de x_2. Una propiedad análoga se tiene intercambiando 1 y 2. Intuitivamente, una sección se puede observar como



1.2. Teorema de la Clase Monótona

Iniciaremos esta sección definiendo dos colecciones de conjuntos que, junto con la colección σ-álgebra, son fundamentales en el desarrollo de la teoría de la medida.

Definición 1.3. *Una **clase monótona** es una colección de conjuntos con las propiedades:*

1. *Si una sucesión creciente de conjuntos pertenece a la colección entonces también pertenece su unión.*

2. *Si una sucesión decreciente de conjuntos pertenece a la colección entonces también pertenece su intersección.*

Definición 1.4. *Una colección de conjuntos $\mathcal{A}$, se dice un **álgebra de conjuntos** si para cada A y B en $\mathcal{A}$, las diferencias $A \sim B$, $B \sim A$ y la unión $A \cup B$ están en $\mathcal{A}$.*

Teorema 1.5 (Clase Monótona)**.** *Sea Ω un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de Ω, tal que Ω y $\emptyset$ están en $\mathcal{A}$. Existe una clase monótona $\boldsymbol{S}$ que es la más pequeña que contiene a $\mathcal{A}$. Esta clase, $\boldsymbol{S}$, es también la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{A}$.*

Proposición 1.6. *Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de Ω. $\boldsymbol{S}$ definida como la intersección de todas las clases monótonas que contienen a $\mathcal{A}$, es una clase monótona.*

Demostración. Sea $\mathbf{S} = \bigcap_{i \in I} \mathbf{S}_i$, para I un conjunto de índices, arbitrario, donde cada $\mathbf{S}_i$ es una clase monótona que contiene a $\mathcal{A}$. Sea $A_i \in \mathbf{S}$ con $i \in I$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset ...$ Ya que A_i pertenece a todas las clases monótonas que contienen a $\mathcal{A}$ entonces $\bigcup A_i \in \mathbf{S}_i$ para todo $i \in I$ por lo que $\bigcup A_i \in \mathbf{S}$. Análogamente se prueba que la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos, está en $\mathbf{S}$.
En conclusión, la intersección de clases monótonas es de nuevo una clase monótona. $\square$

1.3. Teorema (Unicidad de medidas)

Teorema 1.7. *[Lieb and Loss, 1997, Teorema 1.4] Sea Ω un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de Ω y Σ la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{A}$. Sea μ_1 una medida σ-finita en el sentido más fuerte, que existe una sucesión de conjuntos $\{A_i\} \in \mathcal{A}$ con cada A_i con medida μ_1 finita, tal que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$. Si μ_2 es una medida que coincide con μ_1 sobre $\mathcal{A}$, entonces $\mu_1 = \mu_2$ sobre Σ.*

Definición 1.8. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Entonces μ cumple las siguientes propiedades:*

1. $\mu(A) \leq \mu(B)$ *si* $A \subset B$, *con* $A, B \in \Sigma$.
2. $\lim\limits_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)$ *si* $A_1 \subset A_2 \ldots$, *con* $A_i \in \Sigma$. ***Propiedad de continuidad inferior.***
3. $\lim\limits_{j\to\infty} \mu(A_j) = \mu(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i)$ *si* $A_1 \supset A_2 \ldots$, *con* $A_i \in \Sigma$ *y tal que* $\mu(A_1) < \infty$. ***Propiedad de continuidad superior.***

Una de las condiciones importantes que se debe cumplir para demostrar el Teorema 1.7 es la siguiente.

Proposición 1.9. *Bajo las condiciones del Teorema 1.7 y asumiendo que μ_1 es una medida finita, la colección $\mathcal{M} = \{A \in \Sigma : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ es una clase monótona.*

Demostración. Sea $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ una sucesión creciente de conjuntos en $\mathcal{M}$ entonces cada $A_i \in \Sigma$ por lo que $\bigcup_i A_i \in \Sigma$ y además $\mu_1(A_i) = \mu_2(A_i)$. Aplicando límite a ambos lados obtenemos $\mu_1(\bigcup_i A_i) = \mu_2(\bigcup_i A_i)$ esto por propiedad de continuidad inferior de la medida. De manera similar se puede probar que $\bigcap_i A_i \in \mathcal{M}$ usando la propiedad de continuidad superior, ya que μ_1 es finita. Por lo tanto $\mathcal{M}$ es una clase monótona. □

Observación 1.10. En la demostración del Teorema 1.7 se plantea lo siguiente: Sin pérdida de generalidad, podemos tomar la sucesión de conjuntos en $\mathcal{A}$ disjuntos, en el enunciado de la Proposición 1.9 ¿Por qué?
Respuesta: Sea $\{A_i\}$ una sucesión de conjuntos en $\mathcal{A}$. Sea $\{B_k\}$ la sucesión de conjuntos definida por

$$B_1 = A_1$$
$$B_k = A_k \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right)$$

con $k \geq 2$. Por definición de álgebra de conjuntos (Definición 1.4), B_k está en $\mathcal{A}$. Además,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

y claramente $B_{k_1} \cap B_{k_2} = \emptyset$ para $k_1 \neq k_2$.

1.4. Definición de funciones medibles e integrales

En esta sección se enuncian las propiedades de las funciones medibles: linealidad, producto, composición, función valor absoluto, máximo y mínimo entre dos funciones medibles; así como propiedades para sucesiones de funciones medibles: límite inferior, límite superior y en general el límite.

Definición 1.11. *Supongamos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función sobre Ω. Dada una σ-álgebra Σ sobre Ω, decimos que f es una función medible (con respecto a Σ) si para cada $t \in \mathbb{R}$, el conjunto*

$$S_f(t) := \{x \in \Omega : f(x) > t\} \tag{1.1}$$

pertenece a Σ, es decir, es medible. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es medible si las funciones reales $Re(f)$ y $Im(f)$ son medibles.

Observación 1.12. En (1.1), en vez del signo $>$, se puede tomar $<$, $\leq$ o $\geq$ y todas las definiciones son equivalentes.

Ejercicio 1.13. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$. Pruebe que para cualquier conjunto de Borel, $A \subset \mathbb{R}$ y cualquier σ-álgebra Σ sobre Ω, el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \in A\}$ es Σ-medible cuando la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible (definición 1.11).*

Solución. Sea $\mathcal{A}$ la colección de los $A \subset \mathbb{R}$, Borel-medibles, tales que $f^{-1}(A) \in \Sigma$.

i) Claramente $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ están en $\mathcal{A}$.

ii) Dado que f es Σ-medible, $(t, \infty) \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

iii) Sea $A \in \mathcal{A}$, es decir, $f^{-1}(A) \in \Sigma$, entonces $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c \in \Sigma$, pues Σ es σ-álgebra. Esto implica que $A^c \in \mathcal{A}$.

iv) Sea $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$, entonces $f^{-1}(\cup A_i) = \cup f^{-1}(A_i) \in \Sigma$, lo que implica que $\cup A_i \in \mathcal{A}$.

Por lo tanto $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra que contiene todos los intervalos de la forma (t, ∞). Además, la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la más pequeña de las σ-álgebras que contiene estos subconjuntos. Así $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ y como $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces podemos concluir que el conjunto $f^{-1}(A) = \{x \in \Omega : f(x) \in A\}$ es Σ-medible.

Ejercicio 1.14. *Sea $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función Borel medible y sea f una función medible de valor complejo. Probar que $\phi \circ f$ es medible.*

Solución. Sea $\phi(z) = \phi_1(z) + i\phi_2(z)$, donde $\phi_1 = \mathrm{Re}(\phi)$ y $\phi_2 = \mathrm{Im}(\phi)$. Entonces se debe ver que $\phi_j \circ f$ es medible para $j = 1, 2$. Como ϕ_j es Borel medible para $j = 1, 2$, el conjunto $A_j := \phi_j^{-1}(t, \infty)$ es Borel medible para $j = 1, 2$ y para todo $t \in \mathbb{R}$. Dado que f es Σ-medible, por el ejercicio anterior $f^{-1}(A_j) \in \Sigma$. Por lo tanto $(\phi_j \circ f)^{-1}(t, \infty) = f^{-1}(A_j) \in \Sigma$.

Proposición 1.15. *Si f y g son funciones medibles de valor complejo y λ, γ son dos números complejos distintos de cero, entonces las siguientes funciones son medibles:*

(a) $\lambda f(x) + \gamma g(x)$

(b) $f(x)g(x)$

(c) $|f(x)|$

(d) $\max\{f(x), g(x)\}$ *y* $\min\{f(x), g(x)\}$

Demostración. De la Definición 1.11, podemos suponer que $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$.

(a) En primer lugar, debido a que $S_{\lambda f}(t) = S_f(\frac{t}{\lambda})$ y gracias a la Observación 1.12, podemos afirmar que λf es medible. Para probar que $f + g$ es medible usaremos el hecho de que el conjunto $S_f(t)$ es medible para todo $t \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, es medible para todo $t \in \mathbb{Q}$. La implicación se tiene de forma trivial. Para el recíproco, usamos la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\{x : f(x) > t\} = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ r \leq t}} \{x : f(x) > r\}. \tag{1.2}$$

Note que el lado derecho de (1.2), es una unión contable de conjuntos medibles, que es de nuevo medible. Ahora, bajo esta premisa, podemos escribir el conjunto $S_{f+g}(t)$ como

$$S_{f+g}(r) = \{x : f(x) + g(x) > r\} = \bigcup_{b \in \mathbb{Q}} (\{x : f(x) > b\} \cap \{x : g(x) > r - b\}). \tag{1.3}$$

De nuevo, el lado derecho en (1.3) es un conjunto medible, pues $\{x : f(x) > b\} \cap \{x : g(x) > r - b\}$ es medible. Por lo tanto $f + g$ es medible.

(b) Primero se prueba que f^2 es medible y de $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$ se sigue que fg es medible. Sea f una función medible, es fácil ver que $S_{f^2}(t) = S_f(\sqrt{t}) \cup S_f(-\sqrt{t})$ cuando $t \geq 0$. Dado que $S_f(\sqrt{t})$ y $S_f(\sqrt{t})$ son medibles, entonces su unión es medible. Si t es negativo, $S_{f^2}(t) = \Omega$ y por tanto medible.

(c) Dado que $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es una función continua, es por lo tanto Borel medible. Por el Ejercicio 1.14, la función $|f|$ es medible siempre que f es medible.

(d) Se tiene de forma inmediata de las fórmulas $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$, $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ y de (a) y (c).

$\square$

Proposición 1.16. *Si $f_1, f_2, ...$ es una sucesión de funciones medibles entonces* $\limsup_{j\to\infty} f_j$ *y* $\liminf_{j\to\infty} f_j$ *son medibles. Concluya que si una sucesión $f_j(x)$ posee un límite $f(x)$ para μ-a.e. x, entonces f es una función medible.*

Demostración. Sea $f_1, f_2, ...$ una sucesión de funciones medibles. Note que

$$\{x : \sup_k(f_k(x)) > t\} = \bigcap_k \{x : f_k(x) > t\}$$

de aquí que $\sup(f_k)$ es medible y se puede verificar lo mismo para $\inf(f_k)$. Por definición,

$$\limsup_{k\to\infty}(f_k) = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n}(f_k)\right),$$

$$\liminf_{k\to\infty}(f_k) = \sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n}(f_k)\right)$$

de dónde $\limsup$ y $\liminf$ son medibles. Claramente si $\lim f_k$ existe μ-a.e. entonces

$$\lim f_k = \limsup f_k = \liminf f_k.$$

$\square$

Definición 1.17. *Se define el* ***soporte*** *de una función continua $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, denotado por* $\operatorname{supp}\{f\}$*, como la clausura del conjunto de puntos $x \in \Omega$ para los cuales $f(x)$ es distinto de cero, es decir,*

$$\operatorname{supp}\{f\} := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Definición 1.18. *La σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, es la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, es decir, es la σ-álgebra más pequeña que contiene a la colección de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.*

Definición 1.19. *Considerar la colección $\mathcal{C}$ de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ (Borel medibles), ω, con la propiedad que $f(x) = 0$ para a.e. $x \in \omega$ y sea ω^* la unión de todos los ω en $\mathcal{C}$. Note que $\mathcal{C}$ y ω^* pueden ser vacíos. Se define el* ***soporte esencial*** *de una función f (Borel medible),* $\operatorname{ess\,supp}(f)$*, como el complemento de ω^*.*

Proposición 1.20. *Si $\mathcal{L}$ es la medida de Lebesgue ([Jones, 2001, Capítulo 2, secciones A y B]) y f es continua, entonces* $\operatorname{ess\,supp}(f) = \operatorname{supp}(f)$.

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

Definición 1.21. *Un* ***espacio de medida*** *es una tripleta (Ω, Σ, μ), donde Ω es un conjunto, Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y μ es una medida sobre Σ.*

Definición 1.22. *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida. Si* $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ *es una función medible, se define la función* F_f *como*

$$F_f(t) := \mu(S_f(t)).$$

De la definición, $F_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *es monótona no creciente y por lo tanto la integral de Riemann de tal función está bien definida. Esta integral define la integral de* f *sobre* Ω*, es decir,*

$$\int_\Omega f(x)\mu(dx) := \int_0^\infty F_f(t)dt. \tag{1.4}$$

Además, una función f *se dice* ***integrable*** *si la integral en* (1.4) *es finita.*

Ejercicio 1.23. *Verificar la linealidad de la integral definida en* (1.4) *completando los siguientes pasos. En lo que sigue* f *y* g *son funciones integrables no negativas. Como se indica en [Lieb and Loss, 1997] esto se verifica en varios pasos. Explicitaremos el primero y el tercero, el segundo queda como ejercicio para el lector.*

(a) Mostraremos que $f + g$ es integrable. En efecto, por un simple argumento $\int(f + g) \leq 2(\int f + \int g)$.

Solución. De la desigualdad

$$(f + g) \leq 2\,\text{máx}\{f, g\}.$$

se obtiene

$$\int (f + g)d\mu \leq \int 2\,\text{máx}\{f, g\}d\mu = 2\int \text{máx}\{f, g\}d\mu,$$

Donde la igualdad se obtiene de la homogeneidad de la integral de Riemann. Ahora,

$$2\int_\Omega \text{máx}\{f, g\}dx = 2\left(\int_A f(x)dx + \int_B g(x)dx\right),$$

donde
$A = \{x \in \Omega : \text{máx}\{f(x), g(x)\} = f(x)\}$ y $B = \{x \in \Omega : \text{máx}\{f(x), g(x)\} = g(x)\}$ y así

$$\int (f + g)(x)d\mu \leq 2\left(\int f(x)d\mu + \int g(x)d\mu\right). \tag{1.5}$$

Por lo tanto, el lado izquierdo de la desigualdad (1.5) es finito cuando el lado derecho lo es, como f y g son integrables entonces $f + g$ es integrable.

(b) Para cualquier entero N, encuentre dos funciones f_N y g_N que toman muchos pero finitos valores, tal que $|\int f - f_N| \leq 1/N$, $|\int g - f + g_N| \leq 1/N$ y $|\int(f+g) - (f_N+g_N)| \leq 1/N$.

(c) Muestre que para f_N y g_N como en (b), se cumple que $\int(f_N + g_N) = \int f_N + \int g_N$.

Solución. Se define la integral de una función simple como sigue ([Jones, 2001]),

$$\int_\Omega f(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Sean $f_N = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ y $g_N = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$, entonces se cumple que

$$f_N(x) + g_N(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i + \beta_j)\chi_{A_i \cap B_j}(x)$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int f_N + g_N &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i + \beta_j)\mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j) \\
&= \int f_N + \int g_N.
\end{aligned}$$

(d) Ahora use (b) y (c) para probar la linealidad de la integral.

Solución. Dado que (b) y (c) se cumplen, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left| \int f + g - \int f - \int g \right| &= \left| \int f + g - \int f_N + g_N + \int f_N + g_N - \int f - \int g \right| \\
&= \left| \int f + g - \int f_N + g_N + \int f_N + \int g_N - \int f - \int g \right| \\
&\leq \left| \int f + g - \int f_N + g_N \right| + \left| \int f_N - \int f \right| + \left| \int g_N - \int g \right| \\
&\leq \frac{3}{N}.
\end{aligned}$$

Haciendo N suficientemente grande la igualdad se tiene.

Observación 1.24. Supongamos que $f_1, f_2, ...$ es una sucesión creciente de funciones integrables en (Ω, Σ, μ), es decir, para cada j, $f_{j+1}(x) \geq f_j(x)$ a.e. $x \in \Omega$.Dado que la unión contable de conjuntos de medida cero tiene medida cero, se sigue que la sucesión de números $f_1(x), f_2(x), ...$ es no decreciente a.e. Esta monotonicidad nos lleva a definir

$$f(x) := \lim_{j\to\infty} f_j \text{ a.e.}$$

y podemos definir $f(x) := 0$ para los x en los cuales el anterior límite no existe. Es claro que este límite puede ser ∞ pero está bien definido a.e. Además, los números $I_j := \int_\Omega f_j d\mu$ son también no decrecientes y podemos definir

$$I := \lim_{j\to\infty} I_j.$$

Teorema 1.25 (Teorema de convergencia monótona)**.** *Sea $f_1, f_2, ...$ una sucesión creciente de funciones integrables sobre un espacio de medida (Ω, Σ, μ). Sea $f(x) := \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ para a.e.$x \in \Omega$. Entonces f es medible y, además, $\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j d\mu$ es finito si, y sólo si, f es integrable, en cuyo caso $\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j d\mu = \int_\Omega f d\mu$. En otras palabras,*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j d\mu = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} f_j d\mu, \tag{1.6}$$

con la suposición que el lado derecho en (1.6) *es ∞ si f no es integrable.*

1.5. Lema de Fatou

Lema 1.26. *Sea $f_1, f_2, ...$ una sucesión de funciones integrables y no-negativas sobre (Ω, Σ, μ). Entonces $f(x) := \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ es medible y*

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x)\mu(dx) \geq \int_\Omega f(x)\mu(dx).$$

En esta sección se resalta la importancia de no-negatividad de la sucesión de funciones para el Lema 1.26.

Observación 1.27. Sin la condición de no-negatividad, el Lema de Fatou no se cumple.

Sean $\Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \mathcal{B}$, $\mu = \mathcal{L}$(Medida de Lebesgue) y $f_k(x) = -\frac{1}{k}\chi_{[0,k]}(x)$. Por un lado,

$$\liminf_{k\to\infty} f_k(x) = 0,$$

de donde,

$$\int_\mathbb{R} \liminf_{k\to\infty} f_k(x) = \int_\mathbb{R} 0 d\mathcal{L} = 0.$$

Por otro lado

$$\int_\mathbb{R} -\frac{1}{k}\chi_{[0,k]} d\mathcal{L} = \frac{-1}{k}k = -1,$$

entonces

$$\int_\mathbb{R} \liminf_{k\to\infty} f^k(x) d\mathcal{L} > \liminf_{\to\infty} \int_\mathbb{R} f_k(x) d\mathcal{L},$$

contradiciendo así el lema.

1.6. Medida Producto

Teorema 1.28. *Sean* $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ *y* $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ *dos espacios de medida sigma-finitos. Sea* A *un conjunto medible en* $\Sigma_1 \times \Sigma_2$. *Para cada* $x_2 \in \Omega_2$ *se define la función* $f(x_2) := \mu_1(A_1(x_2))$ *y, para cada* $x_1 \in \Omega_1$, *la función* $g(x_1) := \mu_2(A_2(x_1)$. *Entonces se cumple que:*

(a) f *es* Σ_2*-medible,* g *es* Σ_1*-medible y,*

(b)

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A) := \int_{\Omega_2} f(x_2)\mu_2(dx_2) = \int_{\Omega_1} g(x_1)\mu_1(dx_1).$$

Demostración. Sea $\mathcal{M} \subset \Sigma$ el conjunto de los $A \in \Sigma$ tales que f y g, definidos como en el enunciado del teorema, son medibles (Σ_2-medible y Σ_1-medible respectivamente). Si $A = A^1 \times A^2$, con $A^1 \subset \Omega_1$ y $A^2 \subset \Omega$ entonces [6], sus secciones, definidas en la Sección 1.1, están dadas por

$$A_1(x_2) = \begin{cases} A^1, & x_2 \in A^2, \\ \emptyset, & x_2 \notin A^2 \end{cases}$$

y

$$A_2(x_1) = \begin{cases} A^2, & x_1 \in A^1, \\ \emptyset, & x_1 \notin A^1. \end{cases}$$

y por lo tanto $g(x_1) = \mu_2(A_2(x_1)) = \chi_{A^1}(x_1)\mu_2(A^2)$ y $f(x_2) = \mu_1(A_1(x_2)) = \chi_{A^2}(x_2)\mu_1(A^1)$. Como $\chi_{\{\cdot\}}$ es medible y $\mu_2(A^2) < \infty$ y $\mu_1(A^1) < \infty$, entonces f y g son medibles, por lo tanto A pertenece a $\mathcal{M}$, es decir, $\mathcal{M}$ contiene todos los rectángulos.
Ahora considerar A como unión finita de rectángulos, es decir, $A = \bigsqcup_{j=1}^n A^j$, con $A^j = B^j \times C^j$. Aquí, tomar unión disjunta, pues cualquier unión finita de rectángulos puede expresarse como unión disjunta de rectángulos de nuevo finita. Entonces,

$$\mu_2(A_2(x_1)) = \sum_{j=1}^n \mu_2(A_2^j(x_1)) = \sum_{j=1}^n \mu_2(C^j)\chi_{B^j}(x_1)$$

y por el argumento anterior g es medible y análogamente f también lo es, por lo que A está en $\mathcal{M}$. Ver ahora que $\mathcal{M}$ es un clase monótona, para ello se debe probar que si $\{A^n\}$ es una sucesión creciente en $\mathcal{M}$ tal que $A^n \nearrow A$, en el sentido que que $A = \cup A^n$ y $A^1 \subseteq A^2 \subseteq ...$, entonces $g(x_1) = \mu_2(A_2^n(x_1))$ es una función medible. De forma similar si $A^n \searrow A$. Probaremos ahora que $\mathcal{M}$ es una clase monótona. Sea A^n, una sucesión creciente de conjuntos en $\mathcal{M}$. Definimos

$$A := \bigcup_{j=1}^n A^n.$$

[6] Aquí y para el resto de la prueba, indexamos los conjuntos en la parte superior para posteriormente, poder denotar sus secciones. No se debe confundir con potencias.

Con abuso de la notación, usaremos $A^n \nearrow A$ para denotar este hecho. Consideremos la sección

$$A_2^k(x_1) = \{x_2 \in \Omega_2 : (x_1, x_2) \in A^k \subseteq A^{k+1}\},$$

para $1 \leq k < n$. De aquí que $A_2^k(x_1) \subseteq A_2^{k+1}(x_1)$. Por otro lado,

$$A_2(x_1) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n\right)_2 (x_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_2^n(x_1), \tag{1.7}$$

de donde se concluye que $A_2^n(x_1) \nearrow A_2(x_1)$ y por la continuidad inferior de μ_2 se tiene que

$$g(x_1) = \mu_2(A_2(x_1)) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(A_2^n(x_1)). \tag{1.8}$$

Dado que el lado derecho en (1.8) es medible entonces g lo es, y de manera similar f es medible y así $A \in \mathcal{M}$. Sea A^n una sucesión decreciente de conjuntos en $\mathcal{M}$. Del mismo modo, definimos

$$A := \bigcap_{j=1}^{\infty} A^j.$$

De nuevo, denotaremos esto por $A^n \searrow A$. Por el argumento anterior se puede afirmar que

$$A_2^n(x_1) \searrow A_2(x_1). \tag{1.9}$$

Ahora, supongamos que μ_2 es una finita, es decir, $\mu_2(\Omega_2) < \infty$. Entonces, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\mu_2(A_2^{(j)}(x_1)) < \infty. \tag{1.10}$$

De este modo podemos usar la continuidad superior de μ_2. Aplicando límite a ambos lados de (1.9), obtenemos que

$$\mu_2(A_2(x_1)) = \lim_{j\to\infty} \mu_2(A_2^{(j)}(x_1)). \tag{1.11}$$

El lado derecho de (1.11) es una función medible, pues cada $\mu_2(A_2^{(j)}(x_1))$ define una función medible y el lím es también medible. En conclusión, $A \in \mathcal{M}$. Todo se cumple análogamente para la función f (suponiendo que μ_1 es finita) y podemos decir que $\mathcal{M}$ es una clase monótona, que además contiene todos los rectángulos y gracias al Teorema de Clase Monótona (Teorema 1.5), $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra. Pero, Σ es la más pequeña que contiene todos los rectángulos, entonces $\Sigma \subseteq \mathcal{M}$. De la definición de la colección $\mathcal{M}$ también se tiene que $\mathcal{M} \subset \Sigma$, en otras palabras, $\Sigma = \mathcal{M}$ probando de esta manera la parte (a) del teorema, para el caso cuando μ_1 y μ_2 son finitas.

Veamos el caso cuando $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ y $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ son dos espacios de medida σ-finitos. De la definición de σ-finitud, existe una sucesión de conjuntos $\{A_n\}$ en Σ_1 tal que $\cup A_n = \Omega_1$ y $\mu_1(A_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y de la misma forma, existe una sucesión de conjuntos $\{B_n\}$ en Σ_2 tal que $\cup B_n = \Omega_2$ y $\mu_2(B_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la sucesión de conjuntos en Σ, definida como

$$C_n = A_n \times B_n.$$

Entonces,

$$\mu(C_n) = \mu_1(A_n)\mu_2(B_n) < \infty.$$

Claramente

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \Omega,$$

donde $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Sea $A \in \Sigma$, un conjunto medible sobre la σ-álgebra producto. Por la prueba del teorema para el caso finito, la función

$$x_1 \mapsto \mu_2[(A \cap C_n)_2(x_1)], \tag{1.12}$$

es medible para cada $n \in \mathbb{N}$. También,

$$(A \cap C_n)_2(x_1) \nearrow A_2(x_1).$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_2[(A \cap C_n)_2(x_1)] = \mu_2(A_2(x_1)).$$

Nuevamente, el lado izquierdo define una función medible, que es precisamente $g(x_1)$. Tomando la otra sección en (1.12), se tiene que $f(x_2)$ es medible, concluyendo así la prueba de (a).

Previo a probar la segunda parte del teorema es necesario verificar que $\mu_1 \times \mu_2$ define una medida sobre $\Omega_1 \times \Omega_2$. La positividad es evidente por la definición de $f(x_2)$ y $g(x_1)$ y además $\mu_1((\emptyset)_1(x_2)) = \mu_1(\emptyset) = 0$. Ahora, sea $\{A_i\}$ una colección numerable de conjuntos, que son disjuntos, en $\Sigma_1 \times \Sigma_2$, claramente sus secciones (Sección 1.1), que son medibles son también disjuntas y por lo tanto podemos calcular

$$\mu_1 \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i)_1(x_2) \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1((A_i)_1(x_2)) = f(x_2).$$

Por definición de medida producto, se obtiene que

$$(\mu_1 \times \mu_2) \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \int_{\Omega_2} f(x_2)\mu_2(dx) = \int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1((A_i)_1(x_2))\mu_2(dx_2).$$

Consideremos la sucesión de funciones integrables

$$F_j(x_2) = \sum_{i=1}^{j} \mu_1((A_i)_1(x_2)),$$

y además

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_1((A^i)_1(x_2)) = \lim_{j\to\infty} F_j(x_2).$$

Usando el teorema de convergencia monótona se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_1((A_i)_1(x_2))\mu_2(dx_2) &= \int_{\Omega_2}\lim_{j\to\infty}F_j(x_2)\mu_2(dx_2)\\ &= \lim_{j\to\infty}\int_{\Omega_2}F_j(x_2)\mu_2(dx_2)\\ &= \lim_{j\to\infty}\int_{\Omega_2}\sum_{i=1}^{j}\mu_1((A_i)_1(x_2))\\ &= \lim_{j\to\infty}\sum_{i=1}^{j}\int_{\Omega_2}\mu_1((A_i)_1(x_2))\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Omega_2}\mu_1((A_i)_1(x_2))\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}(\mu_1\times\mu_2)(A_i).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu_1\times\mu_2$ cumple la propiedad de aditividad contable y define una medida. $\square$

1.7. Teorema de Fubini

Teorema 1.29 (Teorema de Fubini). *Sean $(\Omega_i,\Sigma_i,\mu_i)$ con $i=1,2$ dos espacios de medida σ-finitos. Sea f una función $\Sigma_1\times\Sigma_2$-medible sobre $\Omega_1\times\Omega_2$. Si $f\geq 0$, entonces las siguientes integrales son iguales:*

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2}f(x_1,x_2)(\mu_1\times\mu_2)(dx_1dx_2) \tag{1.13}$$

$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}f(x_1,x_2)\mu_2(dx_2)\right)\mu_1(dx_1) \tag{1.14}$$

$$\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}f(x_1,x_2)\mu_1(dx_1)\right)\mu_2(dx_2). \tag{1.15}$$

Ejercicio 1.30. *Dar un contraejemplo del Teorema de Fubini donde no se tenga la condición de σ-finitud.*

Solución. Sean $\Omega_1=\Omega_2=I=[0,1]$, $\mu_1=\mathcal{L}^1$ (media de Lebesgue en una dimensión), $\mu_2=m$ (Medida de conteo), $\Sigma_1=\mathcal{B}$ y $\Sigma_2=\mathcal{P}([0,1])$.
Sea $A=\{(x,x):x\in[0,1]\}$, dado que A es cerrado pertenece a $\mathcal{B}(I^2)\subset\mathcal{B}(I)\times\mathcal{P}(I)$ y por lo tanto $f(x,y)=\chi_A(x,y)$ es una función medible por la medida inducida sobre $\Omega_1\times\Omega_2$.
Por un lado,

$$\begin{aligned}\int_I\left(\int_I\chi_A(x,y)m(dy)\right)\mathcal{L}^1(dx) &= \int_I\left(\int_I\chi_{\{x\}}m(dy)\right)\mathcal{L}^1(dx)\\ &= \int_I m(\{x\})\mathcal{L}^1(dx)=\mathcal{L}^1(I)=1.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\int_I \left(\int_I \chi_A(x,y) \mathcal{L}^1(dx) \right) m(dy) = \int_I \left(\int_I \chi_{\{y\}} \mathcal{L}^1(dx) \right) m(dy)$$
$$= \int_I \mathcal{L}^1(\{y\}) m(dx) = 0.$$

Aquí falla la σ-finitud de I con la medida del conteo, en general, un conjunto no numerable dotado con la medida del conteo, no es σ-finito.

Observación 1.31. En la demostración del Teorema 1.29, el valor de la integral (1.13) está dado por

$$(\mu_1 \times \mu_2 \times \mathcal{L}^1)(G),$$

donde $G = \{(x_1, x_2, t) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \mathbb{R} : 0 \le t < f(x_1, x_2)\}$ y $\mathcal{L}^1$ es la medida de Lebesgue en una dimensión, es decir, G es el conjunto bajo la gráfica de f. Usando la asociatividad del producto de medidas ([Lieb and Loss, 1997, Sección 1.11]) se tiene que

$$\begin{aligned}
((\mu_1 \times \mu_2) \times \mathcal{L}^1)(G) &= \int_0^\infty \left(\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \chi_{\{f>t\}}(x_1, x_2)(\mu_1 \times \mu_2)(dx_1 dx_2) \right) dt \\
&= \int_0^\infty (\mu_1 \times \mu_2)(\{f > t\}) dt \\
&= \int_0^\infty F_f(t) dt \\
&= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1, x_2)(\mu_1 \times \mu_2)(dx_1 dx_2).
\end{aligned}$$

Por consideraciones hechas al final de [Lieb and Loss, 1997, Seción 1.5], se puede verificar esta igualdad, calculando primero la integral

$$\int_0^\infty \chi_{\{f>t\}}(x_1, x_2) dt.$$

En efecto,

$$\int_0^\infty \chi_{\{f>t\}}(x_1, x_2) dt = \int_0^{f(x_1,x_2)} dt = f(x_1, x_2),$$

y esto define el valor de $(\mathcal{L}^1 \times (\mu_1 \times \mu_2))(G)$.

1.8. Definición de espacios L^p

Definición 1.32. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función medible sobre Ω y $1 \le p < \infty$. Se define el espacio $L^p(\Omega, \mu)$ (o simplemente $L^p(\Omega)$), como*

$$L^p(\Omega, d\mu) := \{f : f \text{ es medible},\ |f|^p \text{ es integrable}\},$$

dotado con la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p}.$$

Proposición 1.33. *$L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial.*

Demostración. Sean f y g dos funciones en $L^p(\Omega)$. Si α y β son dos números reales[7] distintos de cero, por la Proposición 1.15, $\alpha f + \beta g$ es una función medible. Dada la función $g(t) := |t|^p$, podemos verificar, usando la segunda derivada, que es convexa. En otras palabras, ya que $g''(t) = p(p-1)|t|^{p-2}$, para $t \neq 0$ y $p \geq 1$, entonces $g'' > 0$. Con esta propiedad, se cumple que, para $\lambda \in [0,1]$,

$$g(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda g(t_1) + (1-\lambda)g(t_2).$$

Tomando $\lambda = \frac{1}{2}$, tenemos que

$$g\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) \leq \frac{1}{2}g(\alpha) + \frac{1}{2}g(\beta),$$

lo cual es equivalente a decir que

$$\left|\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right|^p \leq \frac{|\alpha|^p}{2} + \frac{|\beta|^p}{2}.$$

Obteniendo así la desigualdad

$$|\alpha + \beta|^p \leq 2^{p-1}(|\alpha|^p + |\beta|^p). \tag{1.16}$$

Gracias a (1.16), se cumple que

$$\int_\Omega |\alpha f + \beta g|^p d\mu \leq \int_\Omega 2^{p-1}(|\alpha f|^p + |\beta g|^p) d\mu = 2^{p-1}|\alpha|^p \int_\Omega |f|^p d\mu + 2^{p-1}|\beta|^p \int_\Omega |g|^p d\mu < \infty.$$

Por lo tanto $\alpha f + \beta g$ pertenece a $L^p(\Omega)$. □

Observación 1.34. La desigualdad del triángulo es equivalente a la convexidad de la norma, es decir, si $0 \leq \lambda \leq 1$ entonces

$$\|\lambda f + (1-\lambda)g\|_{L^p(\Omega)} \leq \lambda \|f\|_{L^p(\Omega)} + (1-\lambda)\|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Una dirección es evidente, para la otra solo basta tomar $\lambda = \frac{1}{2}$.

Definición 1.35. *El espacio $L^\infty(\Omega)$ se define como*

$$L^\infty(\Omega) := \{f : f \textit{ es medible y existe una constante } K \textit{ tal que } |f(x)| < K \textit{ a.e.}\}$$

dotado con la norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ínf}\{K : |f(x)| < K \textit{ a.e.}\}.$$

[7] Dado que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, entonces $\int_\Omega \alpha f = \alpha_1 \int_\Omega \mathrm{Re}(f) + i\alpha_2 \int_\Omega \mathrm{Im}(f)$, podemos suponer α y β reales.

Observación 1.36. Notemos que $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ a.e. Usando la definición de ínfimo, fijando $\epsilon > 0$, $\exists K_0 \in \{K : |f(x)| < K \text{ a.e.}\}$ tal que

$$K_0 \leq \|f\|_\infty + \epsilon,$$

con $|f(x)| < K_0$ a.e. En virtud de esto último,

$$\|f\|_\infty < |f(x)| < K_0 \leq \|f\|_\infty + \epsilon,$$

por lo tanto

$$|f(x)| < \|f\|_\infty + \epsilon \text{ a.e..}$$

Dado que la elección de ϵ es arbitraria, se sigue que

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

Proposición 1.37. *Si $f \in L^\infty(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ para algún $1 < q < \infty$, entonces $f \in L^p(\Omega)$ para todo $p > q$ y*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demostración. De la Observación 1.36,

$$|f(x)|^p = |f(x)|^q |f(x)|^{p-q} \leq |f(x)|^q \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-q} \text{ a.e,}$$

y por lo tanto

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{p-q} \int_\Omega |f(x)|^q d\mu < \infty.$$

De este modo se tiene que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^q(\Omega)}^{\frac{q}{p}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\frac{q}{p}},$$

y tomando $\limsup$,

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

En el otro sentido, dado $\epsilon > 0$ existe un conjunto $E(\epsilon)$ con $\mu(E) > 0$ tal que $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} - \epsilon < |f|$ sobre E y ya que $f \in L^p(\Omega)$ entonces $\mu(E) < \infty$. Por lo que

$$\int_E (\|f\|_{L^\infty(\Omega)} - \epsilon) d\mu \leq \int_E |f| d\mu,$$

$$(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} - \epsilon)\mu(E) \leq \int_E |f| d\mu \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \mu(E)^{1-\frac{1}{p}},$$

de donde

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} - \epsilon \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \mu(E)^{-1/p}$$

por lo tanto, tomando $\liminf$ a ambos lados de la desigualdad

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} - \epsilon \leq \liminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

y de aquí,

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \liminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

$\square$

Definición 1.38. *Si f es una función en $L^p(\Omega)$, decimos que f está relacionado con g si $f = g$ a.e. y se denota esta relación de equivalencia por $f \sim g$. Denotaremos la clase de equivalencia de f mediante $\widetilde{f}$.*

Proposición 1.39. *El espacio que consiste de las clases bajo la relación de equivalencia $\sim$ con las operaciones $\widetilde{f} + \widetilde{g} = \widetilde{f+g}$ y $\widetilde{\lambda f} = \lambda \widetilde{f}$, es un espacio vectorial.*

Demostración. Sea f_1 un representante de $\widetilde{f}$ y g_1 de $\widetilde{g}$, entonces $f_1 = f$ μ-a.e.y $g_1 = g$ μ-a.e.respectivamente. Entonces $f_1 + g_1 = f + g$ μ-a.e. y así las suma está bien definida y de la misma forma $\lambda f_1 = \lambda f$ μ-a.e. también lo está. Además,

$$\widetilde{\alpha f + \beta g} = \widetilde{\alpha f} + \widetilde{\beta g} = \alpha\widetilde{f} + \beta\widetilde{g}.$$

$\square$

Proposición 1.40. *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto entonces toda función convexa $f : K \to \mathbb{R}$, es continua.*

Demostración. Dado que K es un conjunto abierto entonces es la unión contable de cubos mutuamente disjuntos (ver por ejemplo [Fon-Che, 2016]), es decir, se puede "embaldosar" K. Sea $x_0 \in K$ entonces sea $Q_{x_0} = \{x : \|x - x_0\|_{\sup} \leq 1\} \subset K$. Así, para mostrar que f es continua en x_0, será suficiente mostrar que para cualquier sucesión $\{x_k\}$ que converge a x_0, tenemos que $f(x_k) \to f(x_0)$. Si C_i con $i = 1, ..., 2^n$ son los vértices de Q_{x_0} entonces podemos escribir cualquier $x \in Q_{x_0}$ como $x = \sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i C_i$ donde $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i = 1$. Sea $M = \max_i f(C_i)$. Dado que f es convexa se cumple que

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i C_i\right) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i f(C_i) \leq M$$

para todo $x \in Q_{x_0}$.

Ahora, sea $\{x_k\}$ una sucesión en Q_{x_0} (acotada) con $x_k \neq 0$ para todo k, tal que $x_k \to x_0$ cuando $k \to \infty$. Dado que x_k es acotada y converge a x_0, entonces

$$\|x_k - x_0\|_{\sup} \to 0,$$

donde $\|(x_k)\|_{\sup} = \sup_{k\geq 1} |x_k|$. Si $\lambda = \|x_k - x_0\|_{\sup}$, definamos las sucesiones

$$y_k = \frac{x_k}{\lambda} \qquad \text{y} \qquad z_k = -\frac{x_k}{\lambda}.$$

Consideremos el segmento que une los puntos co-lineales y_k, x_k y x_0. Como $0 \leq \|x_k - x_0\|_{\text{sup}} \leq 1$ y dado que f es convexa, se tiene que para cada punto x_k del segmento, entonces

$$f(x_k) \leq \lambda f(y_k) + (1-\lambda) f(x_0). \tag{1.17}$$

Dado que $\lambda = \|x_k - x_0\|_{\text{sup}} \to 0$ cuando $k \to \infty$, al aplicar limite en la desigualdad convexa (1.17), se tiene que

$$\limsup_{k\to\infty} f(x_k) \leq f(x_0).$$

Tomando ahora el segmento que une los puntos co-lineales x_k, x_0 y z_k, definiendo $\lambda = \frac{\|x_k - x_0\|_{\text{sup}}}{\|x_k - x_0\|_{\text{sup}}+1}$ y usando de nuevo la convexidad de f, se tiene que para x_0 que pertenece al segmento,

$$f(x_0) \leq \lambda f(z_k) + (1-\lambda) f(x_k). \tag{1.18}$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ en (1.18), obtenemos

$$f(x_0) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$$

y por consiguiente f es continua en x_0. $\square$

Definición 1.41. *Sean p y q dos números reales tales que $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$. Decimos que p y q son índices duales si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

bajo la condición que si $p = 1$, entonces $q = \infty$ y viceversa.

1.9. Desigualdad de Hölder

Teorema 1.42. *Sean p y q índices duales con $1 \leq p \leq \infty$ y sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces el producto puntual $(fg)(x) = f(x)g(x)$, está en $L^1(\Omega)$ y*

$$\left| \int_\Omega fg d\mu \right| \leq \int_\Omega |f||g| d\mu \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.19}$$

Observación 1.43. En la prueba del Teorema 1.42, para el caso $1 < p$ y $q < \infty$ se usa la medida auxiliar definida como $\nu(dx) = g(x)^q \mu(dx)$. Verificaremos que efectivamente ν define una medida. Es claro que $\nu(\emptyset) = 0$ por ser μ una medida; además por suposiciones previas g es no negativa y nuevamente como μ es medida, entonces ν es positiva. Sea A^i una sucesión de conjuntos disjuntos, entonces

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^i\right) = g(x)^q \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^i\right) = g(x)^q \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A^i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x)^q \mu(A^i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A^i).$$

Esto prueba la aditividad contable de ν.

Proposición 1.44. *Si $f_1, ..., f_m$ son funciones tales que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ para todo $1 \leq i \leq m$ y $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$, entonces*

$$\left| \int_\Omega \prod_{i=1}^{m} f_i d\mu \right| \leq \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^{p-i}(\Omega)} d\mu. \tag{1.20}$$

Demostración. Para simplificar la notación, para esta prueba se usará $\| \cdot \|_k$, en lugar de $\| \cdot \|_{L^k(\Omega)}$. Usando inducción, supongamos que la desigualdad se cumple para algún $m > 2$ y veamos que se tiene para $m+1$. Sean $p_1, ..., p_{m+1}$ tales que $\sum\limits_{j=1}^{m+1} \frac{1}{p_j} = 1$ y sea $f_j \in L^{p_j}(\Omega)$, $j = 1, ..., m+1$. Entonces por la desigualdad de Hölder para el caso $m = 2$, tenemos que

$$\int_\Omega \prod_{j=1}^{m+1} |f_j| = \int_\Omega |f_1| \prod_{j=2}^{m+1} |f_j| \leq \|f\|_{p_1} \left(\int_\Omega \prod_{j=2}^{m+1} |f_j|^{\frac{p_1}{p_1-1}} \right)^{\frac{p_1-1}{p_1}}. \tag{1.21}$$

Dado que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{\frac{p_1}{p_1-1}} = 1$ se cumple que

$$\sum_{j=2}^{m+1} \frac{1}{p_j \frac{p_1-1}{p_1}} = \frac{p_1}{p_1-1} \sum_{j=2}^{m+1} \frac{1}{p_j} = \frac{p_1}{p_1-1} \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) = 1$$

y por hipótesis de inducción y (1.21), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \prod_{j=1}^{m+1} |f_j| &= \|f_1\|_{p_1} \left(\prod_{j=2}^{m+1} |f_j|^{\frac{p_1}{p_1-1} \frac{p_j(p_1-1)}{p_1}} \right)^{\frac{p_1}{p_j(p_1-1)} \frac{p_1-1}{p_1}} \\
&= \|f_1\|_{p_1} \left(\prod_{j=2}^{m+1} \int |f_j|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}} \\
&= \prod_{j=1}^{m+1} \|f_j\|_{p_j}.
\end{aligned}$$

□

1.10. Desigualdad de Minkowski

Teorema 1.45. *Sean (Ω, μ) y (Γ, ν) espacios de medida σ-finitos. Sea $f \geq 0$ $\mu \times \nu$-medible y $1 \leq p < \infty$. Entonces*

$$\int_\Gamma \left(\int_\Omega f(x,y)^p \mu(dx) \right)^{1/p} \nu(dy) \geq \left(\int_\Omega \left(\int_\Gamma f(x,y)^p \nu(dy) \right)^p \mu(dx) \right)^{1/p}.$$

Observación 1.46. Una de las suposiciones clave para demostrar la desigualdad es que las funciones

$$H(x) := \int_\Gamma f(x,y)\nu(dy) \qquad \text{y} \qquad y \mapsto \int_\Omega f(x,y)^p \mu(dx)$$

son medibles. Considerar el conjunto

$$A = \{(x,y,t) \in \Omega \times \Gamma \times \mathbb{R}^+ : 0 \leq t < f(x,y)\}$$

y sea

$$A_{2,3}(x) = \{(y,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^+ : 0 \leq t < f(x,y)\}$$

el cual es $\nu \times \mathcal{L}$-medible por ser sección. Entonces,

$$(\nu \times \mathcal{L})(A_{2,3}(x)) = \int_\Gamma \mathcal{L}((A_{23}(x))_2(y))\nu(dy) = \int_\Gamma f(x,y)\nu(dy),$$

y por [Lieb and Loss, 1997, Teorema 1.10], la función $(\nu \times \mathcal{L})(A_{23}(x))$ es medible, que es precisamente $H(x)$. Gracias al teorema de Fubini o usando el argumento anterior, la función $y \mapsto \int_\Omega f(x,y)^p \mu(dx)$ también es medible.

1.11. Completitud de $L^p(\Omega)$

Teorema 1.47. *Sea* $1 \leq p \leq \infty$ *y sea* f_i *una sucesión de Cauchy en* $L^p(\Omega)$*, es decir,* $\|f_i - f_j\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ *cuando* $i, j \to \infty$*. Entonces existe una única función* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $\|f_i - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ *cuando* $i \to \infty$ *y se dice que* f_i *converge fuertemente a* f *en* $L^p(\Omega)$*.*

Observación 1.48. Aquí, se prueba la convergencia de alguna subsucesión f_{i_k}, de la sucesión descrita en el Teorema 1.47 y con ayuda de la desigualdad triangular,

$$\|f_i - f\|_{L^p(\Omega)} = \|f_i - f + f_{i_k} - f_{i_k}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_i - f_{i_k}\|_{L^p(\Omega)} + \|f_{i_k} - f\|_{L^p(\Omega)}$$

se prueba la convergencia fuerte para toda la sucesión. Para construir la subsucesión f_{i_k}, empezamos fijando un número i_1 tal que $\|f_{i_1} - f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq 1/2$ para todo $n \geq i_1$. Esto es posible gracias a que la sucesión f_i es de Cauchy. Ahora, escoger i_2 tal que $\|f_{i_2} - f_n\|_{L^p(\Omega)} < 1/4$ para todo $n \geq i_2$. Así sucesivamente, obtenemos una subsucesión de los enteros, i_k, con la propiedad que $\|f_{i_k} - f_{i_{k+1}}\|_{L^p(\Omega)} \leq 2^{-k}$, para $k = 1, 2, ...$. Considerar la sucesión de funciones monótonas positivas

$$F_l(x) := |f^{i_1}(x)| + \sum_{k=1}^{l} |f^{i_k}(x) - f^{i_{k-1}}(x)|.$$

y dado que $f^{i_j} \in L^p$ para todo j y además L^p es un espacio vectorial, se sigue que la sucesión $F_l \in L^p$. Se cumple que

$$\begin{aligned}
\|F_l\|_{L^p(\Omega)} &\leq \||f^{i_1}(x)| + \sum_{k=1}^{l} |f^{i_k}(x) - f^{i_{k-1}}(x)|\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \|f^{i_1}\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l} \|f^{i_k} - f^{i_{k-1}}\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \|f^{i_1}\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l} 2^{-k} \leq \|f^{i_1}\|_{L^{p+1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto F_l es una función medible y además integrable pues es suma finita de funciones integrables. Por la Observacion 1.24, podemos definir $\lim_{l\to\infty} F_l^p(x) =: G(x)$ a.e. y $I := \int_\Omega F_l^p d\mu$. Dado que

$$\int_\Omega F_l^p(x)\mu(dx) = \|F_l^p\|_{L^1(\Omega)} = \|F_l\|^p_{L^p(\Omega)} \leq (\|f^{i_1}\|_{L^p(\Omega)} + 1)^p < \infty,$$

por el teorema de convergencia monótona $G(x)$ es una función sumable. Entonces basta definir $F := G^{1/p}$ por lo que

$$\int_\Omega F^p d\mu = \int_\Omega G d\mu < \infty.$$

En conclusión $F \in L^p$. La conclusión se puede ver en [Lieb and Loss, 1997, Teorema 2.7].

1.12. Funcionales Lineales Continuos y Convergencia Débil

Definición 1.49. *Sea L un funcional lineal de $L^p(\Omega)$ en $\mathbb{C}$. Es un funcional lineal continuo, si para cada sucesión f_j que converge fuertemente a f en $L^p(\Omega)$ se cumple que*

$$L(f^j) \to L(f).$$

Además, se dice acotado si

$$|L(f)| \leq K\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposición 1.50. *Un funcional lineal sobre $L^p(\Omega)$ es continuo si, y solamente si, es acotado.*

Demostración. Supongamos que L es un funcional lineal acotado sobre $L^p(\Omega)$, es decir, existe una constante K tal que $|L(f)| \leq K\|f\|_{L^p(\Omega)}$. Consideremos una sucesión f_j en $L^p(\Omega)$ que converge fuertemente a una función f, es decir, $\|f_j - f\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\epsilon}{K}$. Entonces,

$$|L(f_j) - L(f)| = |L(f_j - f)| < K\frac{\epsilon}{K} < \epsilon,$$

de aquí que L es continuo. Supongamos ahora que L es continuo y veamos que es acotado. De la definición de continuidad en el origen, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|f_j - f\|_{L^p(\Omega)} < \delta$ entonces $|L(f_j) - L(f)| < \epsilon$. Sea $f_j - f$, entonces $\frac{\delta(f_j - f)}{2\|f_j - f\|_{L^p(\Omega)}}$ es tal que

$$\left\| \frac{\delta(f_j - f)}{2\|f_j - f\|_{L^p(\Omega)}} \right\|_{L^p(\Omega)} < \delta,$$

por lo que

$$\left| L\left(\frac{\delta(f_j - f)}{2\|f_j - f\|_{L^p(\Omega)}} \right) \right| < \epsilon.$$

Entonces

$$|L(f_j - f)| < \frac{2\epsilon}{\delta} \|f_j - f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definiendo $f_j := \frac{f}{j} + f$ para toda f, se tiene que L es acotado. □

Proposición 1.51. *EL dual de $L^p(\Omega)$, $L^p(\Omega)^*$, es un espacio vectorial con norma definida por*

$$\|L\| = \sup\{|L(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\},$$

para todo $L \in L^p(\Omega)^*$.

Demostración. Primero se prueba que efectivamente el valor

$$\sup\{|L(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\},$$

define una norma sobre el espacio $L^p(\Omega)^*$. Sea $L \in L^p(\Omega)^*$, entonces

$$\|L\| := \sup\{|L(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\}.$$

Veamos que se cumplen las propiedades de una norma.

i) Dado $\lambda > 0$ se tiene que

$$\|\lambda L\| = \sup\{|\lambda L(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\} = |\lambda| \sup\{|L(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\} = |\lambda| \|L\|.$$

ii) $\|L\| = 0$ si, y sólo si,

$$\sup\{|L(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\} = 0,$$

pero el valor del lado derecho es el supremo de un conjunto de números positivos, es necesario que $|L(f)| = 0$ para toda f tal que $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1$ y por tanto $L \equiv 0$.

iii) Por definición

$$\|L_1 + L_2\| = \sup\{|L_1(f) + L_2(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\}.$$

Usando la desigualdad triangular, que cumple $|\cdot|$, se tiene que

$$\sup\{|L_1(f)+L_2(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\} \leq \sup\{|L_1(f)|+|L_2(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\},$$

pero en el lado derecho se cumple que

$$\begin{aligned}\sup\{|L_1(f)|+|L_2(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\} &= \sup\{|L_1(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\} \\ &\quad + \sup\{|L_2(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1\} \\ &= \|L_1\| + \|L_2\|.\end{aligned}$$

Veamos ahora que efectivamente $L^p(\Omega)^*$ es un espacio vectorial. Sean L y H dos funcionales lineales continuos sobre Ω entonces para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cumplen que

$$|\alpha L(f)| \leq k_1 \|f\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.22}$$

y también

$$|\beta H(f)| \leq k_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.23}$$

Sumando los valores (1.22) y (1.23), y usando la desigualdad triangular obtenemos que

$$|(\alpha L + \beta H)(f)| \leq |\alpha L(f)| + |\beta H(f)| \leq (k_1 + k_2)\|f\|_{L^p(\Omega)},$$

de donde $\alpha L + \beta H \in L^p(\Omega)^*$. □

Observación 1.52. Comprenderemos qué es $L^p(\Omega)^*$. Una función g en $L^{p'}(\Omega)$ actúa sobre funciones arbitrarias $f \in L^p(\Omega)$ mediante

$$L_g(f) = \int_\Omega g(x)f(x)\mu(dx),$$

con p y p' índices duales. Así L_g es un funcional lineal sobr e $L^{p'}(\Omega)$. Además por la desigualdad Hölder,

$$|L_g(f)| \leq \int_\Omega |g(x)||f(x)|\mu(dx) \leq \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}\|f\|_{L^p(\Omega)} = K\|f\|_{L^p(\Omega)},$$

por lo tanto $L_g \in L^p(\Omega)^*$ y así $L^{p'}(\Omega) \subset L^p(\Omega)^*$.

Definición 1.53. *Si $f_1, f_2, ...$ es una sucesión de funciones en $L^p(\Omega)$, decimos que f_i converge débilmente a f si*

$$\lim_{i\to\infty} L(f_i) = f,$$

para cada $L \in L^p(\Omega)^*$.

Note que podemos determinar cómo es posible que una sucesión f_j converja débilmente pero no fuertemente a f. Una forma de mostrar éste último hecho para $n = 1$ se hace en la siguiente proposición.

Proposición 1.54. *Sea f_k la sucesión de funciones en $L^p([0,1])$ definida por*

$$f_k(x) = \begin{cases} \sin(kx), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Entonces f_k converge débilmente en $L^p([0,1])$ pero no lo hace fuertemente.

Demostración. Sea $g \in L^q([0,1])$ entonces $L_g \in L^p([0,1])^*$ y

$$L_g(f_k) = \int_0^1 g(x)\sin(kx)dx = \frac{i}{2}\int_0^1 g(x)e^{-ikx}dx - \frac{i}{2}\int_0^1 g(x)e^{ikx}dx,$$

entonces las dos integrales del lado derecho, por el Lema de Riemann-Lebesgue, son iguales a cero cuando $k \to \infty$ y esto es precisamente $f_k \rightharpoonup 0$. Pero,

$$\|\sin(kx)\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_0^1 |\sin(kx)|^p dx = \frac{1}{k}\int_0^k |\sin(y)|^p dy = \int_0^1 |\sin(y)|^p dy.$$

Entonces es claro que f_k no converge fuertemente a cero en $L^p([0,1])$. □

1.13. El dual de $L^p(\Omega)$

Teorema 1.55. *El dual de $L^p(\Omega)$ es $L^q(\Omega)$ con p y q índices duales ($1 \le p < \infty$), en el sentido que $L \in L^p(\Omega)^*$ tiene la forma*

$$L(g) = \int_\Omega v(x)g(x)\mu(dx), \tag{1.24}$$

para alguna $v \in L^q(\Omega)$. Además, L dada de esta forma está en $L^p(\Omega)^*$ y su norma es

$$\|L\| = \sup\{|L(f)| : \|f\|_{L^p(\Omega)} \le 1\} = \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demostración. Supongamos primero que $\boxed{1 < p < \infty}$ Con $L \in L^p(\Omega)^*$ dado, definir el conjunto $K = \{g \in L^p(\Omega) : L(g) = 0\} \subset L^p(\Omega)$. Dado que $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial entonces la combinación convexa $\lambda g + (1-\lambda)h$ está en $L^p(\Omega)$ cuando $g, h \in L^p(\Omega)$. Además, si $g, h \in K$ entonces por la linealidad de L, se tiene que $L(\lambda g + (1-\lambda)h) = 0$ entonces K es un conjunto convexo y además cerrado. Podemos suponer que $L \neq 0$ cuando existe $f \in L^p(\Omega)$ tal que $L(f) \neq 0$, es decir, $f \notin K$. Entonces existe $h \in K$ tal que

$$\mathrm{Re}\int_\Omega [|f(x) - h(x)|^{p-2}(\bar{f}(x) - \bar{h}(x))]kd\mu \le 0,$$

para todo $k \in K$. Si definimos $u(x) := |f(x) - h(x)|^{p-2}(\bar{f}(x) - \bar{h}(x))$, tenemos que

$$|u(x)|^q = [|f(x) - h(x)|^{p-2}|f(x) - h(x)|]^{\frac{p}{p-1}} = (|f-h|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} = |f-h|^p$$

así $u(x) \in L^q(\Omega)$. Sin embargo K es un espacio lineal y por lo tanto $-k \in K$ y $ik \in K$ cuando $k \in K$. Entonces

$$\mathrm{Re} \int_\Omega u(\pm ik)d\mu = \pm \int_\Omega uikd\mu = \pm \mathrm{Im} \int_\Omega uk \leq 0.$$

Por lo que,

$$\mathrm{Im} \int_\Omega ukd\mu \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im} \int_\Omega ukd\mu \leq 0.$$

En conclusión,

$$\int_\Omega ukd\mu = 0,$$

para todo $k \in K$. Sea g un elemento arbitrario en $L^p(\Omega)$ y escribimos $g = g_1 + g_2$ con

$$g_1 = \frac{L(g)}{L(f-h)}, \qquad\qquad g_2 = g - \frac{L(g)}{L(f-h)}(f-h).$$

Claramente $L(f-h) = L(f) \neq 0$ pues $h \in K$, así pues

$$L(g_1) = \frac{L(g)}{L(f-h)} L(f-h) = L(g),$$

y por lo tanto

$$L(g_2) = L(g) - L(g_1) = 0.$$

Luego g_2 pertenece a K. Entonces,

$$\int_\Omega ugd\mu = \int_\Omega ug_1 d\mu + \int_\Omega ug_2 d\mu = \int_\Omega ug_1 d\mu = L(g)A$$

donde $A = \int \frac{u(f-h)}{L(f-h)} \neq 0$ ya que $\int u(f-h) = \int |f-h|^p$. Entonces la función v buscada, es

$$v = \frac{u}{A}.$$

La unicidad de v se sigue del hecho que si

$$\int (v-w)g = 0$$

para todo $g \in L^p(\Omega)$ entonces obtenemos una contradicción escogiendo

$$g = \overline{(v-w)}|v-w|^{q-2} \in L^p(\Omega).$$

Para el caso $\boxed{p=1}$ asumimos por el momento que Ω es de medida finita. En este caso la desigualdad de Hölder implica que un funcional lineal continuo en $L^1(\Omega)$ tiene una restricción a $L^p(\Omega)$ que es otra vez es continuo pues

$$|L(f)| \leq C\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int C|f| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_\Omega |C|^{1/q} d\mu \right)^{1/q} = C(\Omega)^{1/q} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad (1.25)$$

para todo $p \geq 1$. Por la prueba anterior para $p > 1$ tenemos la existencia de un único $v_p \in L^q$ tal que $L(f) = \int v_p f$ para todo $f \in L^p$. La unicidad de v_p para cada p implica que v_p es independiente de p, es decir, esta función (que ahora llamaremos solamente v) está en cada L^r-espacio para $1 < r < \infty$. Si fijamos algún par dual p y q con $p > 1$ y escogemos $f = |v|^{q-2}\bar{v}$ en (1.25) obtenemos

$$L(f) = \left| \int_\Omega v|v|^{q-2}\bar{v} \right| \leq C(\mu(\Omega))^{1/q} \|v\|_{L^q(\Omega)}^{-1},$$

y por lo tanto

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\mu(\Omega))^{1/q}$$

(dividiendo por $\|v\|_q^{-1}$) para todo $q < \infty$. Si tomamos el límite cuando $q \to \infty$ entonces $\|v\|_{L^q(\Omega)} \leq C$ y podemos declarar que $v \in L^\infty(\Omega)$. Sea $A = \{x \in \Omega : |v(x)| > C + \epsilon\}$ y $\mu(A) = M > 0$ entonces de $|v(x)| > C + \epsilon$ tenemos que

$$|v|^q > (C + \epsilon),$$

y esto implica que

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} > \left(\int_A (C + \epsilon)^q \right)^{1/q} = (C + \epsilon)(\mu(A))^{1/q} = (C + \epsilon)M^{1/q},$$

que excede a $C\mu(\Omega)^{1/q}$ si q es suficientemente grande. Así $v \in L^\infty(\Omega)$ y $L(f) = \int v(x)f(x); \forall f \in L^p(\Omega)$ para $p > 1$. Si $f \in L^1(\Omega)$ está dado, entonces

$$\int_\Omega |f(x)||v(x)| d\mu \leq \infty,$$

por la desigualdad de Hölder. Ahora si reemplazamos $f(x)$ por

$$f^k(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq k \\ 0, & \text{e.o.c.}, \end{cases}$$

notamos que $|f^k(x)| \leq |f(x)|$ y $f^k \to f$ cuando $k \to \infty$ pues el conjunto donde f^k vale cero es tal que su medida tiende a cero. Por lo tanto, por el teorema de convergencia dominada tenemos que $vf^k \to vf$ en $L^1(\Omega)$ y también $v \in L^1(\infty)$ y una consecuencia de la desigualdad de Hölder. Luego

$$L(f) = \lim_{k\to\infty} L(f^k) \lim_{k\to\infty} \int_\Omega vf^k d\mu = \int_\Omega vf d\mu.$$

La segunda igualdad está dada por el hecho que $\int |f^k|^p \leq \int |k|^p = k^p\mu(\Omega) < \infty$, es decir, $f^k \in L^p(\Omega)$.Para extender esta conclusión en el caso en que $\mu(\Omega) = \infty$, podemos suponer que Ω es σ-finito. □

Proposición 1.56. *La norma del operador L definido en* (1.55)*, está dada por*

$$\|L\| = \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demostración. Acá es suficiente tomar $f \in L^p(\Omega)$ definida como

$$f = \frac{\bar{v}|v|^{q-2}}{\|\bar{v}|v|^{q-2}\|_{L^p(\Omega)}},$$

pues

$$|L(f)| = \left|\int_\Omega |v|^q\right| = \frac{\|v\|^q_{L^q(\Omega)}}{\|v\|^{q/p}_{L^q(\Omega)}} = \|v\|^{q-1/p}_{L^q(\Omega)} = \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

□

Capítulo 2

Teoría de Distribuciones y Espacios de Sobolev

Aquí son presentados los detalles que se omiten en [Kesavan, 1989], y algunos ejercicios y demostraciones que son útiles para comprender la teoría de distribuciones. Además propiedades de los espacios de Sobolev de orden entero.

2.1. Funciones de prueba y distribuciones

En este capítulo, Ω denotará un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ a menos que se especifique otra condición.

Definición 2.1. *El espacio de funciones $C^\infty(\Omega)$, $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$, con soporte compacto será denotado por $\mathscr{D}(\Omega)$ y está dotado de una topología descrita por medio de sucesiones convergentes como sigue. Decimos que una sucesión $\{\phi_n\}$ de funciones $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto, converge a cero en $\mathscr{D}(\Omega)$ si existe un compacto fijo $K \subset \Omega$, tal que $\operatorname{supp}\{\phi_n\} \subset K$ para todo n y además, ϕ_n y todas sus derivadas convergen uniformemente a cero en K.*

Observación 2.2. El espacio $\mathscr{D}(\Omega)$, también es llamado el **espacio de funciones de prueba**.

Proposición 2.3. *$\mathscr{D}(\Omega)$ es un espacio vectorial.*

Demostración. Sean f y g funciones en $\mathscr{D}(\Omega)$ y sean $a, b \neq 0 \in \mathbb{C}$. Consideremos la función $h = f + g$ y los siguientes conjuntos:

$$F = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\},$$

$$G = \{x \in \Omega : g(x) \neq 0\} \text{ y}$$

$$H = \{x \in \Omega : h(x) \neq 0\},$$

entonces se tiene que $H \subset F \cup G$. Dado que $\overline{F}$ y $\overline{G}$ son conjuntos acotados en $\mathbb{R}^n$, su unión también es un conjunto acotado y por lo tanto $\overline{F \cup G}$ es compacto. Así

$$\overline{H} \subset \overline{F \cup G},$$

de donde $\overline{H}$ es un conjunto cerrado contenido en un conjunto compacto, y por tanto $\overline{H}$ es compacto. Además, si $a \neq 0$, $\operatorname{supp}\{af\} = \operatorname{supp}\{f\}$. La diferenciabilidad de $af + bg$ se desprende del hecho que C^∞ es un espacio vectorial. □

Definición 2.4. *Un funcional lineal $T : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, se denomina una **distribución** sobre Ω, si cuando $\phi_n \to 0$ en $\mathscr{D}(\Omega)$, se tiene que $T(\phi_n) \to 0$.*
El espacio de distribuciones, que es el dual del espacio de funciones de prueba, es denotado por $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Definición 2.5. *Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$(o $\mathbb{C}$) se dice **localmente integrable** si para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$,*

$$\int_K |f| < \infty.$$

Ejemplo 2.6. Sea f una función localmente integrable. El funcional lineal $T_f : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) definido por

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f\phi, \tag{2.1}$$

es una distribución. Sea $\{\phi_m\}$ una sucesión de funciones en $\mathscr{D}(\Omega)$ tal que $\phi_m \to 0$ en $\mathscr{D}(\Omega)$, es decir, existe $K \subset \Omega$ compacto fijo tal que $\operatorname{supp}(\phi_m) \subset K$ para todo m y tal que ϕ_m y todas sus derivadas convergen uniformemente a cero en K. Dado $\epsilon > 0$ y sean $M := \int_K |f|$ una constante finita (pues f es localmente integrable) y α un multi-índice, entonces se tiene que

$$|T_f(\phi_m)| \leq \int_\Omega |f||\phi_m| = \int_K |f||\phi_m| < \frac{\epsilon}{M}\int_K |f| < \epsilon.$$

Por lo tanto T_f define una distribución.

Proposición 2.7. *Si f y g son funciones localmente integrables tales que $f = g$ a.e., entonces $T_f = T_g$. En particular, si $f = 0$ a.e. entonces $T_f = 0$ y además, si f es localmente integrable y $T_f = 0$, entonces $f = 0$ a.e.*

Demostración. Sean f y g funciones localmente integrables tales que $f = g$ a.e y sea $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ con soporte contenido en un conjunto compacto K. Entonces, $f\phi = g\phi$ a.e. y además $\int_K |f\phi| < \infty$ y $\int_K |g\phi| < \infty$. Por lo tanto por la propiedad a.e. ([Jones, 2001, Sección C]), se tiene que $\int_K f\phi = \int_K g\phi$ y así

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f\phi = \int_K f\phi = \int_K g\phi = \int_\Omega g\phi = T_g(\phi).$$

Si en la anterior conclusión, $g \equiv 0$ entonces $T_f = 0$. Ahora, Supongamos que $T_f = 0$ y f es localmente integrable, esto implica que para $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ distinta de cero,

$$T_f(\phi) = \int_K f\phi = 0,$$

donde K es compacto y contiene al soporte de ϕ. Gracias a que f es localmente integrable, se tiene que $f\phi$ es localmente integrable, de hecho

$$\int_K |f\phi| = 0,$$

y dado que $|f\phi|$ es no negativa, se sigue que $|f\phi| = 0$ a.e. (ver [Folland, 1999, Proposición 2.16]). De lo último se sigue que $f = 0$ a.e., pues $\phi \neq 0$.

Ejercicio 2.8. *Sea f una función continua en $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\phi = 0,$$

para toda $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \equiv 0$.

Solución. Supongamos que f es distinta de cero, es decir, podemos suponer que $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dado que f es continua, existe $B(x_0; 2\epsilon)$ una vecindad de x_0 tal que $f(y) > 0$ para todo $y \in B(x_0; 2\epsilon)$. Para $\epsilon > 0$, consideremos la función

$$\rho_{\epsilon_0}(x) = \begin{cases} \frac{k}{\epsilon^n}\exp(-\epsilon^2/(\epsilon^2 - |x - x_0|^2)), & |x - x_0| < \epsilon, \\ 0, & |x - x_0| \geq \epsilon, \end{cases}$$

entonces $\rho_{\epsilon_0} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ con soporte contenido en $B(x_0; \epsilon)$. Sin embargo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\rho_{\epsilon_0}(x)dx = \int_{B(x_0;\epsilon)} f(x)\rho_{\epsilon_0}(x)dx > 0,$$

lo cual contradice que la integral sea igual a 0 y por lo tanto $f \equiv 0$.

□

Proposición 2.9. *Cualquier función $f \in L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$, genera una distribución mediante* (2.1).

Demostración. Sea $K \subset \Omega$ un conjunto compacto. Entonces si χ_K es la función característica sobre K tenemos que

$$\int_K |f| = \int_\Omega |f|\chi_K \leq \|f\|_p \left(\int_K |\chi_K|^q\right)^{1/q} = \|f\|_p(\mathcal{L}(K))^{1/q} < \infty.$$

Por lo tanto f es localmente integrable y define una distribución mediante (2.1). □

Ejemplo 2.10. Sea $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ y consideremos el funcional δ_x definido por

$$\delta_x(\phi) = \phi(x).$$

Entonces δ_x define una distribución que es llamada *distribución de Dirac*. Si $x = 0$, entonces

$$\delta_0 = \delta.$$

Sea $\{\phi_m\}$ una sucesión de funciones de prueba que converge a cero en $\mathscr{D}(\Omega)$, entonces

$$\delta_x(\phi_m) = \phi_m(x) \to 0,$$

puntualmente para toda m. Por lo tanto $\delta_x \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

2.2. Fórmula de Leibniz y convergencia en $\mathscr{D}'(\Omega)$

En esta sección, probaremos la fórmula de Leibniz para distribuciones y algunas condiciones de convergencia en $\mathscr{D}'(\Omega)$

Observación 2.11. Empezaremos por definir y dar algunas propiedades de *multi-índices*. Sea $x \in R^n$ con coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$. Un multi-índice es una n-tupla $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, donde $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$ para todo $1 \leq j \leq n$. Asociado a un multi-índice α, tenemos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} &|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \\ &\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!, \\ &x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Si α y β son dos multi-índices, $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_j \leq \beta_j$, para todo $1 \leq j \leq n$. Podemos escribir

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n},$$

y es fácil verificar que

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},$$

cuando $\beta \leq \alpha$ y

$$\binom{\alpha}{\beta} = 0$$

en otro caso.

Definición 2.12. *Sea $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Para cualquier multi-índice α, la distribución*

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \tag{2.2}$$

*con $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, define la **derivada de la distribución** T.*

Otra operación importante con distribuciones es la multiplicación por funciones C^∞. La operación definida por

$$\phi \to T(\psi\phi), \ \ \phi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

para $\psi \in C^\infty$ fijo y $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, define una distribución.

Definición 2.13. *Definimos la distribución ψT por*

$$(\psi T)(\phi) = T(\psi\phi), \tag{2.3}$$

para toda $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Teorema 2.14 (Fórmula de Leibniz)**.** *Sean $\psi \in C^\infty(\Omega)$ y $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Entonces para cualquier multi-índice α,*

$$D^\alpha(\psi T) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta\psi D^{\alpha-\beta}T. \tag{2.4}$$

Demostración. Usaremos inducción sobre $|\alpha|$ para demostrar la fórmula. Supongamos que $\boxed{|\alpha|{=}1}$. Gracias a (2.2) y (2.3), se sigue que

$$\begin{aligned}(D^\alpha(\psi T))(\phi) &= -\psi T(D^\alpha\phi) = -T\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)\\ &= -T\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi\phi)\right) + T\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\phi\right)\\ &= \left(\psi\frac{\partial}{\partial x_j}T\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}T\right)(\phi).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Para usar (2.4), es necesario identificar los valores de β tales que $\beta \leq \alpha$, que para este caso son $\beta = 0$ (cero de $\mathbb{R}^n$) y $\beta = e_j$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}(D^\alpha(\psi T))(\phi) &= \frac{1!}{0!1!}\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}T\right)(\phi) + \frac{1!}{1!0!}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}T(\phi)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}T\right)(\psi\phi) + T\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\phi)\right)\\ &= -T\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi\phi)\right) + T\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\phi\right)\\ &= \left(\psi\frac{\partial}{\partial x_j}T + \frac{\partial\psi}{\partial x_j}T\right)(\phi).\end{aligned} \tag{2.6}$$

De aquí que (2.5) coincide con (2.6). Supongamos ahora que (2.4) se cumple para $|\alpha| = m$. Sea γ un multi-índice tal que $|\gamma| = m+1$ y dado que $|\gamma| \geq 1$ entonces $\gamma_j \geq 1$, para algún $1 \leq j \leq m+1$, en particular, $j = 1$. Podemos suponer que $\alpha_1 = \gamma_1 - 1$ y $\alpha_j = \gamma_j$, para $2 \leq j \leq m$. Entonces

$$D^\gamma = D^{e_1}D^\alpha,$$

y además,

$$(D^{e_1}(\psi T))(\phi) = \left(\psi \frac{\partial}{\partial x_1} T + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} T\right)(\phi); \quad \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D^\gamma(\psi T) = D^{e_1} D^\alpha(\psi T) &= \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} T \\ &= \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{e_1} D^\beta \psi D^{\alpha-\beta} T \\ &= \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\beta+e_1} \psi D^{\alpha-\beta} T + D^\beta \psi D^{\alpha-\beta+e_1} T \\ &= \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\beta+e_1} \psi D^{\alpha-\beta} T + \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi D^{\alpha-\beta+e_1} T. \end{aligned}$$

Dado que $\alpha = \gamma - e_1$, en la última igualdad tenemos que

$$\sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\beta+e_1} \psi D^{\alpha-\beta} T)(\phi) = \sum_{\beta} \binom{\gamma - e_1}{\beta} (D^{\beta+e_1} \psi D^{\gamma-(\beta+e_1)} T)(\phi) \tag{2.7}$$

y también

$$\sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta \psi D^{\alpha-\beta+e_1} T)(\phi) = \sum_{\beta} \binom{\gamma - e_1}{\beta} (D^\beta \psi D^{\gamma-\beta} T)(\phi). \tag{2.8}$$

Si en (2.7), hacemos $\iota = \beta + e_1$, obtenemos que

$$\sum_{\beta} \binom{\gamma - e_1}{\beta} (D^{\beta+e_1} \psi D^{\gamma-\beta+e_1)} T = \sum_{\iota} \binom{\gamma - e_1}{\iota - e_1} D^\iota \psi D^{\gamma-\iota}, \tag{2.9}$$

y si en (2.8), sustituimos $\beta = \iota$, obtenemos

$$\sum_{\beta} \binom{\gamma - e_1}{\beta} D^\beta \psi D^{\gamma-\beta} T = \sum_{\iota} \binom{\gamma - e_1}{\iota} D^\iota \psi D^{\gamma-\iota} T. \tag{2.10}$$

Sumando (2.9) y (2.10), tenemos que

$$D^\gamma(\psi T) = \sum_{\iota \le \gamma} \binom{\gamma_2}{\iota_2} \cdots \binom{\gamma_n}{\iota_n} \left(\binom{\gamma_1 - 1}{\iota_1 - 1} + \binom{\gamma_1 - 1}{\iota_1} \right) D^\iota \psi D^{\gamma-\iota} T,$$

y dado que $\iota = \beta + e_1$, entonces $\gamma \ge 1$ y por tanto podemos usar la identidad $\binom{\gamma_1 - 1}{\iota_1 - 1} + \binom{\gamma_1 - 1}{\iota_1} = \binom{\gamma_1}{\iota_1}$, obteniendo así

$$D^\gamma(\psi T) = \sum_{\iota \le \gamma} \binom{\gamma}{\iota} D^\iota \psi D^{\gamma-\iota} T.$$

$\square$

Definición 2.15. *Una sucesión de distribuciones* $\{T_m\}$ *converge a una distribución* T, *si para cada* $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$,

$$T_m(\phi) \to T(\phi).$$

Ejemplo 2.16. Sea $\epsilon > 0$ y definamos la función $\rho_\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$\rho_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{k}{\epsilon^n} e^{\frac{-\epsilon^2}{\epsilon^2 - |x|^2}}, & |x| < \epsilon, \\ 0, & |x| \geq \epsilon, \end{cases}$$

donde

$$k^{-1} = \int_{|x|\leq 1} e^{\frac{-1}{1-|x|^2}} dx.$$

Claramente $\rho_\epsilon \in \mathscr{D}(\Omega)$ con soporte contenido en $B(0;\epsilon)$, y por ende define una distribución mediante (2.1). Considerar la familia de funciones $\{\rho_\epsilon\}$ en $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Veamos que $\rho_\epsilon \to \delta$ en $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sea $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x)\phi(x)dx = k\epsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\epsilon^2}{\epsilon^2-|x|^2}} \phi(x)dx.$$

Usando el cambio de variable $y = \frac{x}{\epsilon}$, se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x)\phi(x)dx = k \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\epsilon y) e^{\frac{-1}{1-|y|^2}} dy. \tag{2.11}$$

Luego, sumando y restando $\phi(0)$ en (2.11) y sabiendo que

$$k \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{1-|y|^2}} dy = 1, \tag{2.12}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x)\phi(x)dx &= \phi(0) - \phi(0)k \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-1}{1-|y|^2}} dy + k \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\epsilon y) e^{\frac{-1}{1-|y|^2}} dy \\ &= \phi(0) + k \int_{\mathbb{R}^n} [\phi(\epsilon y) - \phi(0)] e^{\frac{-1}{1-|y|^2}} dy. \end{aligned}$$

Si definimos la función $\phi_\epsilon(y) := \phi(\epsilon y)$, para $\epsilon < 1$ la función ϕ_ϵ, aunque con soporte más grande que ϕ, sigue siendo acotada en su soporte, también lo hace la función $e^{-1/1-|y|^2}$, por lo tanto son integrables. Si $K = \operatorname{supp}(e^{-1/1-|y|^2})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\phi(\epsilon y) - \phi(0)] e^{\frac{-1}{1-|y|^2}} dy = \int_{\operatorname{supp}(\phi_\epsilon)\cap K} [\phi(\epsilon y) - \phi(0)] e^{\frac{-1}{1-|y|^2}} dy,$$

por el teorema de convergencia dominada se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x)\phi(x)dx &= \phi(0) + k \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\operatorname{supp}(\phi_\epsilon)\cap K} [\phi(\epsilon y) - \phi(0)] e^{\frac{-1}{1-|y|^2}} dy \\ &= \phi(0) + \int_{\operatorname{supp}(\phi_\epsilon)\cap K} \lim_{\epsilon\to 0} [\phi(\epsilon y) - \phi(0)] e^{\frac{-1}{1-|y|^2}} dy \\ &= \phi(0) = \delta(\phi). \end{aligned}$$

2.3. Soporte y soporte singular de una distribución

En esta sección, se complementan detalles en las demostraciones de [Kesavan, 1989, Sección 1.4], sobre el soporte y el soporte singular de una distribución. Además, se define el espacio $\mathcal{E}(\Omega)$, que es usado en dicha sección.

Observación *2.17.* Si $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, decimos que T *se anula* en un conjunto $\Omega_0 \subset \Omega$, cuando para cada $\phi \in \mathscr{D}(\Omega_0)$, $T(\tilde{\phi}) = 0$, siendo $\tilde{\phi}$ la extensión por cero de ϕ fuera de Ω_0, es decir,

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in \Omega_0, \\ 0, & x \notin \Omega_0. \end{cases}$$

Definición 2.18. *El **soporte de una distribución** es el complemento del conjunto abierto más grande sobre el cual la distribución se anula. Su notación es similar a la del soporte de una función.*

Proposición 2.19. *Sea f una función continua, esto implica que f es localmente integrable (Definición 2.5) y por tanto define una distribución T_f. Entonces se cumple que*

$$supp(T_f) = supp(f).$$

Demostración. Para mostrar que $\text{supp}(T_f) \subseteq \text{supp}(f)$, podemos mostrar su contra positiva: si f se anula en un conjunto abierto Ω_0, entonces T_f se anula allí también. Así, el complemento de $\text{supp}(f)$, está contenido en el complemento de $\text{supp}(T_f)$. Así mismo, si T_f se anula en un conjunto abierto $\Omega_0 \subset \Omega$ (que es el más grande donde se anula), entonces

$$T_f(\tilde{\phi}) = \int_\Omega f\tilde{\phi} = \int_{\Omega_0} f\phi = 0, \quad \phi \in \mathscr{D}(\Omega_0).$$

Por el Ejercicio 2.8 se tiene que $f = 0$ en Ω_0 y por lo tanto $\Omega_0 \subseteq \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$, es decir, $(\text{supp}(T_f))^c \subseteq (\text{supp}(f))^c$. □

Definición 2.20. *El espacio de funciones $C^\infty(\Omega)$ será denotado por $\mathcal{E}(\Omega)$, cuando está dotado de una topología donde una sucesión $\{\psi_n\}$, converge a cero si, y sólo si, ψ_n y todas sus derivadas convergen uniformemente a cero en todos los subconjuntos compactos de Ω.*

Proposición 2.21. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua con soporte compacto y $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$. La operación $\psi \to \int_\Omega f\psi$ define un funcional lineal continuo sobre el espacio $\mathcal{E}(\Omega)$.*

Demostración. La linealidad es una consecuencia de la linealidad de la integral. Para ver la continuidad, consideremos $\{\psi_m\}$ una sucesión de funciones que converge a una función ψ en $\mathcal{E}(\Omega)$. Entonces la sucesión,

$$\psi_m - \psi \to 0$$

en $\mathcal{E}(\Omega)$. Supongamos que $\operatorname{supp}(f) \subseteq K$, donde K es cualquier subconjunto compacto de Ω y sea $\epsilon > 0$, entonces

$$\left|\int_\Omega f(\psi_m - \psi)\right| = \left|\int_K f(\psi_m - \psi)\right| \leq \int_K |f||\psi_m - \psi| < \frac{\epsilon}{M}\int_K |f| < \epsilon,$$

donde $M := \int_K |f|$, pues f es localmente integrable. De esta manera, $\int f(\psi_m - \psi) \to 0$ y así el funcional es continuo. $\square$

Observación 2.22. La proposición anterior extiende una distribución $T = T_f$ a un funcional lineal continuo en $\mathcal{E}(\Omega)$, cuando f es continua con soporte compacto. Lo mismo sucede si T es una distribución con soporte compacto.

Proposición 2.23. *Lo siguiente se cumple:*

1. *Si $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$ y $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, entonces $\psi\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$.*

2. *Si $\psi_m \to 0$ en $\mathcal{E}(\Omega)$, entonces $\phi\psi_m \to 0$ en $\mathscr{D}(\Omega)$.*

3. *Sea $\phi \in D(\Omega)$, definimos $T(\psi) := T(\psi\phi)$, para todo $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Entonces T es un funcional continuo en $\mathcal{E}(\Omega)$.*

Demostración. 1. Sea α un multi-índice, entonces por la fórmula de Leibniz para funciones C^∞, tenemos que

$$D^\alpha(\psi\phi) = \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi D^{\alpha-\beta}\phi. \tag{2.13}$$

Dado que el lado derecho en (2.13) es la suma finita de funciones continuas, podemos concluir que $\psi\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Además se cumple que

$$\operatorname{supp}(\psi\phi) \subset \operatorname{supp}(\psi) \cap \operatorname{supp}(\phi),$$

donde el lado derecho de la contenencia es la intersección de un conjunto compacto con uno cerrado, por lo que $\operatorname{supp}(\psi) \cap \operatorname{supp}(\phi)$ es compacto. Así, $\operatorname{supp}(\psi\phi)$ es un conjunto cerrado contenido en un compacto y por lo tanto es compacto. Esto prueba que $\psi\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

2. Supongamos que $\psi_m \to 0$ en $\mathcal{E}(\Omega)$ y sea K un conjunto compacto tal que $\operatorname{supp}(\phi\psi) \subset K$. Entonces para $\epsilon > 0$,

$$|D^\gamma \psi_m| < \frac{\epsilon}{M},$$

para todo multi-índice γ. Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}|D^{\alpha}(\psi_m\phi)| &= \left|\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}\psi_m D^{\beta}\phi\right| \\ &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|D^{\alpha-\beta}\psi_m||D^{\beta}\phi| \\ &< \frac{\epsilon}{M}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|D^{\beta}\phi|.\end{aligned}$$

Dado que ϕ es acotada en K, se tiene que

$$\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|D^{\beta}\phi| \leq M,$$

para alguna constante finita M y en consecuencia

$$|D^{\alpha}(\psi_m\phi)| < \epsilon,$$

en K. Podemos concluir que $\psi_m\phi \to 0$ en $\mathscr{D}(\Omega)$ y claramente $T(\psi_m) = T(\phi\psi_m) \to 0$. Así T es un funcional continuo sobre $\mathcal{E}(\Omega)$.

□

Definición 2.24. *La clase de distribuciones con soporte compacto se puede identificar con las restricciones del dual de $\mathcal{E}(\Omega)$ a $\mathscr{D}(\Omega)$. Por esta razón, denotaremos la clase de distribuciones con soporte compacto por $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

En [Kesavan, 1989] el autor muestra que las únicas distribuciones con soporte $\{0\}$ son la distribución de Dirac y todas sus derivadas, para ello usa el siguiente lema sobre funcionales lineales.

Lema 2.25. *Sea E un espacio vectorial topológico y sean $\Lambda, \Lambda_1, ..., \Lambda_n$ funcionales lineales sobre E tales que*

$$Ker\Lambda \supset \bigcap_{i=1}^{n} Ker\Lambda_i.$$

Entonces existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$, tales que

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Lambda_i.$$

Observación 2.26. El argumento clave para la demostración del Lema 2.25, es el teorema de Hahn-Banach. Usaremos el siguiente corolario presentado en [Treves, 1967, Cap. 18, Corolario 3] y daremos cuenta de las condiciones bajo las cuales podemos aplicarlo al Lema 2.25.

Corolario 2.27 (del Teroema de Hanh-Banach). *Sea M un subespacio lineal cerrado de un espacio localmente convexo R. Si $M \neq R$, hay un funcional lineal y continuo L, no equivalentemente cero pero que se anula en M.*

Para usar el corolario anterior definimos la aplicación $\Phi : E \to \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\Phi(x) = (\Lambda x, \Lambda_1 x, ..., \Lambda_n x),$$

con $x \in E$ y sea $M := \text{rang}(\Phi)$. Dado que $\mathbb{R}^{n+1}$ es localmente convexo, tiene dimensión finita y Φ es lineal, M es un subespacio lineal cerrado de $\mathbb{R}^{n+1}$. Además, si $y = (1, 0, ..., 0)$ entonces $y \notin \text{rang}(\Phi)$, por lo que $\text{rang}(\Phi) \neq \mathbb{R}^{n+1}$. De todo esto podemos concluir que, bajo las hipótesis del Lema 2.25 y de cómo se definió Φ, existe un funcional lineal sobre $\mathbb{R}^{n+1}$, es decir, $(n+1)$ escalares $\beta, \beta_1, ..., \beta_n$ tal que

$$\begin{cases} \beta \Lambda x + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \Lambda_i x = 0, & x \in E, \\ \beta \neq 0. \end{cases}$$

En [Kesavan, 1989], el autor describe el comportamiento local de una distribución local dada, es decir, dado $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ es explicado lo que se debe entender por $T|_{\Omega_0}$ donde $\Omega_0 \subset \Omega$. De igual manera, dadas varias distribuciones localmente definidas que son “compatibles”, en un sentido que se precisa en el siguiente teorema, podemos “pegarlas” para definir una distribución global.

Teorema 2.28. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y sea $\{\Omega_i\}$, $i \in I$, un cubrimiento abierto de Ω. Sea $T_i \in \mathscr{D}'(\Omega_i)$ tal que cuando $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, entonces*

$$T_i|_{\Omega_i \cap \Omega_j} = T_j|_{\Omega_i \cap \Omega_j}.$$

Entonces existe una única distribución $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tal que

$$T|_{\Omega} = T_i, \quad \forall i \in I.$$

Definición 2.29. *Sea $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Si existe $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ tal que $T = T_f$, decimos que T es C^∞ sobre Ω.*

Como consecuencia de el Teorema 2.28 y la definición anterior se tiene lo siguiente:

Proposición 2.30. *Sea $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Si $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos abiertos en Ω tal que $T|_{\Omega_i}$ es C^∞ sobre Ω_i, entonces T es C^∞ sobre $\cup_{i \in I} \Omega_i$.*

Demostración. Primero definamos la siguiente familia de funciones en $\mathscr{D}(\Omega)$, que nos ayudarán en la prueba de esta proposición.

Definición 2.31 (Partición de la unidad). *Sea $\Omega = \cup_{i \in I} \Omega_i$, donde Ω_i es un conjunto abierto para cada $i \in I$. Entonces existen funciones ϕ_i que pertenecen a $\mathcal{E}(\Omega)$, que cumplen:*

i) $\text{supp}\{\phi_i\} \subset \Omega_i$*, para todo* $i \in I$*,*

ii) $0 \leq \phi_i \leq 1$*, para todo* $i \in I$*, y*

iii) $\sum_{i\in I} \phi_i = 1$.

Dicho esto, supongamos que $T|_{\Omega_i}$ es C^∞ sobre Ω_i, es decir, existe $f_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ que es C^∞ y tal que $T|_{\Omega_i} = T_{f_i}$. Sea ϕ_i una partición de la unidad subordinada a la familia $\{\Omega_i\}$ y definamos

$$f := \sum_{i\in I} f_i\phi_i.$$

Gracias a la fórmula de Leibniz f es C^∞. Por el Teorema 2.28, podemos definir

$$T(\phi) = \sum_{i\in I} T_{f_i}(\phi_i\phi), \quad \phi \in \mathscr{D}(\Omega_i).$$

Entonces $T \in \mathscr{D}'(\cup\Omega_i)$ y para $\phi \in \mathscr{D}(\cup\Omega_i)$ se tiene que

$$T(\phi) = \sum_{i\in I} \int_{\cup\Omega} f_i\phi_i\phi = \int_{\cup\Omega_i} \sum_{i\in I} f_i\phi_i\phi = \int_{\cup\Omega_i} f = T_f|_{\cup\Omega_i}.$$

□

Definición 2.32. *Sea* $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$*. El* ***soporte singular*** *de* T *es el complemento del conjunto abierto más grande en el cual* T *es* C^∞*.*

Proposición 2.33. *El conjunto sing supp*(T) *es cerrado en* Ω *y además*

$$\textit{sing supp}(T) \subset \textit{supp}(T).$$

Demostración. Sea $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ que es C^∞, entonces $T = T_f$ para alguna función $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Sea Ω_0 el conjunto abierto más grande donde T se anula, entonces $T = T_0$ en Ω_0 y dado que la función idénticamente cero pertenece a $\mathcal{E}(\Omega_0)$, podemos decir que T es C^∞ en Ω_0. Dado que $\text{sing supp}(T)$ es el abierto más grande donde T es C^∞ entonces $\Omega_0 \subset \Omega\backslash\text{sing supp}(T)$ y así

$$\Omega\backslash\text{supp}(T) \subset \Omega\backslash\text{sing supp}(T),$$

tomando complemento se tiene la contenencia deseada. □

2.4. Convolución de funciones

Definición 2.34. *Sean* f *y* g *dos funciones en* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $x \in \mathbb{R}^n$*. La función definida por*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, \tag{2.14}$$

es llamada la ***convolución*** *de* f *y* g *y es denotada por*

$$h = f * g.$$

Proposición 2.35. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y h está definida mediante* (2.14)*, entonces $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Definamos la función

$$F(x, y) := f(x-y)g(y),$$

veamos que F es medible en el espacio producto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. La transformación que va de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dada por $(x, y) \mapsto (x-y, y)$, es lineal e invertible, así que $f(x-y)$ es medible en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (ver [Jones, 2001, Sección 7.B]) y por lo tanto $F(x, y)$ es medible. Además, por el Teorema de Fubini se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |F(x, y)| dx dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Así, la integral (2.14) está bien definida y $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. □

Proposición 2.36. *Sea f una función continua y g una función continua con soporte compacto. Entonces se cumple que $\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = (\frac{\partial f}{\partial x_i}) * g$.*

Demostración. Sea e_i el vector con entradas 0 excepto en la i-ésima donde es 1 y sea K un conjunto compacto tal que $\operatorname{supp}(g) = K$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f * g)(x + he_i) - (f * g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_K [f(x + he_i - y) - f(x-y)] g(y) dy \end{aligned} \tag{2.15}$$

Si definimos $q(\theta) := f(x - y + \theta h e_i)$ con $\theta \in [0, 1]$, entonces se cumple que:

i) q es continua y diferenciable,

ii) $q'(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y + \theta h e_i) h$,

iii) $q(1) - q(0) = f(x - y + he_i) - f(x-y)$.

Por el teorema del valor medio se cumple que

$$q'(\theta) = q(1) - q(0),$$

es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y + \theta h e_i) = \frac{f(x - y + he_i) - f(x-y)}{h}. \tag{2.16}$$

Reemplazando (2.16) en la integral (2.15), obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_K \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y + \theta h e_i) g(y) dy.$$

Dado que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es continua y por tanto acotada sobre K podemos aplicar el teorema de convergencia dominada, del cual se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) * g.$$

□

2.5. Convolución de distribuciones

Definición 2.37. *Sea* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $x \in \mathbb{R}^n$. *Se definen*

$$(\tau_x u)(y) = u(y - x) \quad y \quad \check{u}(y) = u(-y).$$

Si T *es una distribución, entonces*

$$(\tau_x T)(\phi) = T(\tau_{-x}\phi).$$

Definición 2.38. *Sean* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *y* $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. *La convolución de* T *y* ϕ*, es una función* $T * \phi$ *definida por*

$$(T * \phi)(x) = T(\tau_x(\check{\phi})). \tag{2.17}$$

Note que si $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$*, también lo hace* $\tau_x\check{\phi}$ *y la anterior definición tiene sentido.*

Teorema 2.39. *Sean* $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *y* $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. *Entonces:*

1. *Para cualquier* $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\tau_x(T * \phi) = (\tau_x T) * \phi = T * (\tau_x \phi).$$

2. *Si* α *es cualquier multi-índice,*

$$D^\alpha(T * \phi) = (D^\alpha T) * \phi = T * (D^\alpha \phi).$$

   En particular, $T * \phi \in \mathcal{E}$.

3. *Si* $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$*, entonces*

$$T * (\phi * \psi) = (T * \phi) * \psi.$$

Todos las conclusiones del teorema anterior son probadas en [Kesavan, 1989], únicamente el autor deja como ejercicio el siguiente hecho en la demostración del resultado 2 del teorema y también la observación allí anotada.

Ejercicio 2.40. *Bajo las condiciones del teorema anterior y si* α *es cualquier multi-índice, entonces*

$$\frac{T - \tau_{e_i h} T}{h} \to \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

en $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Solución. Si $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ y si $h \to 0$, se tiene que

$$\frac{\phi(x + e_i h) - \phi(x)}{h} \to \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi)$$

en $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, y dado que T es funcional lineal y continuo entonces

$$T\left[\frac{\phi(x+e_ih)-\phi(x)}{h}\right] \to T\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi)\right].$$

Además se tiene que

$$T\left[\frac{\phi(x+e_ih)-\phi(x)}{h}\right] = \frac{T(\tau_{-e_ih}\phi)-T(\phi)}{h} = -\frac{T(\phi)-(\tau_{e_ih}T)(\phi)}{h}.$$

Por otro lado

$$T\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi)\right] = -\frac{\partial}{\partial x_i}(T)(\phi).$$

Por lo tanto cuando $h \to 0$,

$$\frac{T(\phi)-(\tau_{e_ih}T)(\phi)}{h} \to \frac{\partial T}{\partial x_i}(\phi),$$

para toda $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Observación 2.41. Mostraremos la observación del numeral 2 del Teorema 2.39, es decir, que $T*\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Sea $\{x_m\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que $x_m \to 0$. Definamos

$$\psi_m := \tau_{x_m}\check{\phi}.$$

Veamos que

$$\psi_m \to 0 \qquad \text{en } \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Sea K un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ tal que $\operatorname{supp}(\phi) \subset K$. Por lo tanto

$$x_m - y \in \operatorname{supp}(\phi) \iff y \in x_m - \operatorname{supp}(\phi).$$

además, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$, entonces $x_m \in B(0;\epsilon)$. Sea K_1 un conjunto compacto tal que $x_i \in K_1$, $i = 1,...,N$ y $B(0;\epsilon) \subset K_1$. Claramente, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ fijo, $\phi_m \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, dado que ψ_m es C^∞ pues $\phi \in C^\infty$ y este es un espacio cerrado bajo traslaciones y reflexiones. También

$$\operatorname{supp}(\psi_m) = x_m - \operatorname{supp}(\phi),$$

que es un conjunto compacto. De todo esto se sigue que

$$\psi_m \to \hat{\phi}$$

en $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$(T*\phi)(x_m) = T(\tau_{x_m}\check{\phi}) \to T(\check{\phi}) = T(\tau_0\hat{\phi}) = (T*\phi)(0),$$

lo que prueba la continuidad de la convolución entre T y ϕ. Además, $D^\alpha(T*\phi) = T*(D^\alpha\phi)$ que es de nuevo una función continua para cualquier multi-índice α.

La definición de convolución puede ser extendida a $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ con la condición que T tenga soporte compacto. Así si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, de nuevo podemos definir la función

$$(T * \psi)(x) = T(\tau_x \check{\psi}). \tag{2.18}$$

Esta definición tiene sentido ya que las funciones $\check{\psi}$ y $\tau_x \psi$ pertenecen a $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ y como T tiene soporte compacto se puede definir, para $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $T(\tau_x \check{\psi}) = T(\phi \tau_x \check{\psi})$ pues $\phi \tau_x \check{\psi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

Definición 2.42. *Sean S y T dos distribuciones, al menos una con soporte compacto. Considere el funcional $L : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, definido por*

$$L(\phi) = T * (S * \phi).$$

Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, entonces $S * \psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto L está bien definido. Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, entonces $S * \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ y L de nuevo está bien definido.

Proposición 2.43. *L es lineal y además, el funcional*

$$\phi \to (L(\check{\phi}))(0), \ \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \tag{2.19}$$

define una distribución.

Demostración. Sean $\psi, \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$(S * (\phi + \psi))(x) = S(\tau_x (\phi + \psi)) = S(\tau_x \check{\phi}) + S(\tau_x \check{\psi}),$$

gracias a la linealidad de τ_x y de $\check{(\cdot)}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}(T * (S * \phi + S * \psi))(x) &= T(\tau_x (S * \phi + S * \psi)^\vee) \\ &= T(\tau_x (S * \phi)^\vee) + T(\tau_x (S * \psi)^\vee) \\ &= T * (S * \phi) + T * (S * \psi).\end{aligned}$$

Lo que prueba la linealidad de L. Dado que (2.17) y (2.18) son definiciones iguales que dependen únicamente de si la distribución tiene o no soporte compacto, la linealidad de L también se tiene en el caso en el que T sea la distribución con soporte compacto. Ahora, si $\phi_m \to 0$ en $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ entonces $\check{\phi}_m \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ entonces gracias a la Observación 2.41, se cumple que $S * \check{\phi}_m \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto converge a 0 en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Así

$$L(\check{\phi}_m)(0) = [T * (S * \check{\phi}_m)](0) = T(\tau_0 (S * \check{\phi}_m)^\vee).$$

En la última igualdad $\tau_0 (S * \check{\phi}_m)^\vee \to 0$ y en consecuencia $T(\tau_0 (S * \check{\phi}_m)^\vee) \to 0$, probando así que el operador definido por (2.19), es una distribución. $\square$

2.6. Soluciones Fundamentales

Consideremos un operador diferencial

$$L = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha.$$

Sea $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, es tal que

$$L(T) = S,$$

es decir,

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha T = S,$$

entonces T es llamada una *distribución solución* del operador L.

Definición 2.44. *Sea L un operador diferencial. Una* ***solución fundamental*** *de L, es una distribución E tal que $L(E) = \delta$ (en el sentido de las distribuciones).*

Ejercicio 2.45. *Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, mostrar que la función*

$$E(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

es una solución fundamental del operador $L = \left(\frac{d}{dx} + \lambda\right)$ en $\mathbb{R}$.

Solución. E define una distribución ya que es una función continua sobre cualquier intervalo cerrado que no contenga al cero, es decir, es localmente integrable. Así que bastará con hacer la prueba para una vecindad del cero. Sea $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, tal que $\operatorname{supp}(\phi) \subset (-R, R)$, $R > 0$. Sea $0 < r < R$ y consideremos el conjunto $\Omega_r = (-R, r) \cup (r, R)$. Usando la definición de derivada de una distribución, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dx}\right)(\phi) &= -\int_{\mathbb{R}} E(x)\left(\frac{d\phi}{dx}\right) dx \\ &= -\lim_{r\to 0}\int_{\Omega_r} E(x)\left(\frac{d\phi}{dx}\right) dx \\ &= -\lim_{r\to 0}\int_r^R e^{-\lambda x}\left(\frac{d\phi}{dx}\right) dx. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Usando integración por partes en la última integral de (2.20) obtenemos,

$$\begin{aligned} -\int_r^R e^{-\lambda x}\left(\frac{d\phi}{dx}\right) dx &= -e^{\lambda x}\phi(x)|_r^R - \lambda\int_r^R e^{-\lambda x}\phi(x)dx \\ &= -e^{-\lambda R}\phi(R) + e^{-\lambda r}\phi(r) - \lambda\int_r^R e^{-\lambda x}\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $r \to 0$, obtenemos

$$\int_0^R e^{-\lambda x}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)dx = \phi(0) - \lambda\int_0^R e^{-\lambda x}\phi(x)dx = \phi(0) - \lambda\int_{\mathbb{R}} E(x)\phi(x)dx,$$

pues $\phi(R) = 0$. Entonces

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)(\phi) = \phi(0) - \lambda E(\phi).$$

Así, para el operador L,

$$(LE)(\phi) = \left(\frac{d}{dx} + \lambda\right)E(\phi) = \left(\frac{dE}{dx}\right)(\phi) + \lambda E(\phi) = (\phi(0) - \lambda E(\phi)) + \lambda E(\phi) = \phi(0) = \delta(\phi).$$

Ejercicio 2.46. *Considerar el operador diferencial* $L = \left(\frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx} + b\right)$ *donde* a, b *son constantes. Sean* f *y* g *que satisfacen* $f(0) = g(0)$, $Lf = Lg = 0$ *y* $g'(0) - f'(0) = 1$. *Considerar la función,*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 0, \\ g(x), & x > 0. \end{cases}$$

Mostrar que $-F$ *es una solución fundamental de* L.

Solución. Sea $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, tal que $\operatorname{supp}(\phi) \subset (-R, R)$ con $R > 0$, entonces

$$\begin{aligned} L(-F)(\phi) &= \int_{\mathbb{R}} F(x)(-\phi''(x) + a\phi'(x) - b\phi(x))dx \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R g(x)(-\phi''(x) + a\phi'(x) - b\phi(x))dx \qquad (2.21) \\ &+ \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 f(x)(-\phi''(x) + a\phi'(x) - b\phi(x))dx. \end{aligned}$$

Usando integración por partes en (2.21), tenemos que

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R g(x)(-\phi'')(x)dx + a\int_0^R g(x)\phi'(x) - b\int_0^R g(x)\phi(x)dx = g(0)\phi'(0) - g'(0)\phi(0) - L(g), \qquad (2.22)$$

pues $\phi'(R) = \phi(R) = 0$. Análogamente, para la segunda parte

$$\int_{-R}^0 f(x)\phi''(x)dx + a\int_{-R}^0 f(x)\phi'(x)dx + b\int_{-R}^0 f(x)\phi(x)dx = -f(0)\phi'(0) + f'(0)\phi(0) - L(f). \qquad (2.23)$$

Combinando (2.21) con (2.22) y (2.6), y considerando las condiciones sobre f y g obtenemos que

$$L(-F) = \phi(0)(f'(0) - g'(0)) = \phi(0) = \delta(\phi).$$

2.7. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier junto con la convolución proporcionan poderosas herramientas para el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales. El autor de [Kesavan, 1989] define la transformada de Fourier de funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y luego la extiende a la clase de distribuciones. En esta sección son presentadas algunas propiedades básicas de la Transformada de Fourier pero que son fundamentales para realizar la extensión antes mencionada.

Definición 2.47. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La* ***transformada de Fourier*** *de f, denotada por $\hat{f}$, es una función definida en $\mathbb{R}^n$ por la fórmula*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx. \tag{2.24}$$

Teorema 2.48. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $h \in \mathbb{R}^n$. Entonces se cumple que:*

i) $(\tau_h f)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i h\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$.

ii) $\tau_h(\hat{f}) = (e^{2\pi i h\cdot\xi} f(\xi))^\wedge$.

iii) Si $\lambda > 0$ y $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ para $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\hat{g}(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi).$$

Demostración. i)

$$\begin{aligned}
(\tau_h f)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x-h)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (y+h)\cdot\xi} f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y\cdot\xi} e^{-2\pi i h\cdot\xi} f(y)dy \\
&= e^{-2\pi i h\cdot\xi}\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\tau_h(\hat{f})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot(\xi-h)} f(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} e^{2\pi i h\cdot x} f(x)dx \\
&= (e^{2\pi i h\cdot(\cdot)} f(\cdot))^\wedge(\xi).
\end{aligned}$$

Aquí usamos el hecho que $kx \cdot h = x \cdot kh$ para k constante.

iii)

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} g(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx \\ &= \lambda^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y\cdot\lambda\xi} f(y)dy \\ &= \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi),\end{aligned}$$

lo cual sigue del cambio de variable $y = \frac{x}{\lambda}$.

□

2.8. El espacio Schwartz, $\mathcal{S}$

El espacio Schwarz es un subespacio de $L^1(\mathbb{R}^n)$ que es invariante bajo la transformada de Fourier. Consiste de funciones C^∞, que junto con sus derivadas, decrecen rápidamente en el infinito, es decir, decrece a cero más rápido que cualquier potencia de $|x|^{-1}$, en el infinito.

Definición 2.49. *El **espacio Schwartz**, o el espacio de funciones que decaen rápidamente, $\mathcal{S}$, se define como*

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} |x^\beta D^\alpha f(x)| = 0, \ \forall\, \alpha,\ \beta \text{ multi-índices}\}.$$

Observación 2.50. Se describe la topología en $\mathcal{S}$ vía sus sucesiones convergentes. Decimos que una sucesión $f_k \to 0$ en $\mathcal{S}$, si para cada polinomio $P(x)$ y cada operador diferencial con coeficientes constantes L, las funciones

$$P(x)Lf_k(x),$$

convergen uniformemente a cero en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.51. *Para $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, se cumple:*

i) $f \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, para cada polinomio $P(x)$ y para cada operador diferencial $L = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$ con coeficientes constantes, la función $P(x)Lf(x)$, está acotada en $\mathbb{R}^n$.

ii) $f \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, para cualquier entero $k \ge 0$ y cualquier multi-índice α la función

$$(1 + |x|^2)^k D^\alpha f(x),$$

está acotada en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. i) Supongamos que $f \in \mathcal{S}$ y sea

$$P(x) = \sum_{|\beta|\leq m} b_\beta x^\beta$$

un polinomio de grado m en R^n. Entonces si L es un operador diferencial con coeficientes constantes, se tiene que

$$\begin{aligned} |P(x)Lf(x)| &= \left| \sum_{|\beta|\leq n} b_\beta x^\beta \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha f(x) \right| \\ &\leq \sum_{|\beta|\leq n} \sum_{|\alpha|\leq m} |C_{\alpha,\beta}||x^\beta D^\alpha f(x)|. \end{aligned}$$

Dado que para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que si $|x| > N$ entonces $|x^\beta D^\alpha f(x)| < \epsilon$, y sea $M :=\leq \sum_{|\beta|\leq n} \sum_{|\alpha|\leq m} |C_{\alpha,\beta}|$ una constante que es finita. Por lo tanto

$$|P(x)Lf(x)| \leq M\epsilon,$$

lo que prueba que $P(x)Lf(x)$ es acotado en $\mathbb{R}^n$ para $|x| > N$. Para los $0 < |x| \leq N$, es suficiente notar que $P(x)Lf(x)$ es continua y por lo tanto es acotada en un compacto. En el otro sentido, supongamos que $P(x)Lf(x)$ es acotado para todo polinomio y operador diferencial con coeficientes constantes, en particular, si $P(x) = x^\beta$ y $L = D^\alpha$ se cumple que

$$|P(x)Lf(x)| = |x^\beta D^\alpha f(x)| \leq M,$$

para alguna constante finita M. También se tiene que

$$|x_1||x^\beta D^\alpha f(x)| \leq M,$$

de manera que si $|x| \to \infty$, necesariamente $|x_1| \to \infty$ lo que hace que

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^\beta D^\alpha f(x)| = 0.$$

En conclusión $f \in \mathcal{S}$.

ii) Si $f \in \mathcal{S}$,

$$|(1 + |x|^2)^k D^\alpha f(x)| = \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |x|^{2j} D^\alpha f(x) \right|.$$

Si β es tal que $|\beta| \leq j$, entonces

$$\left| \sum_{|\beta|\leq j} b_\beta x^{2\beta} D^\alpha f(x) \right| \leq \sum_{|\beta|\leq j} |b_\beta||x^{2\beta} D^\alpha f(x)| < M\epsilon.$$

La segunda desigualdad se obtiene usando el mismo razonamiento que (i) y por lo tanto

$$|(1+|x|^2)^k D^\alpha f(x)| < M\epsilon,$$

y de nuevo como en (i), se sigue que $(1+|x|^2)^k D^\alpha f(x)$ es acotada. Supongamos ahora que $(1+|x|^2)^k D^\alpha f(x)$ es acotada para todo multi-índice α y entero $k \geq 0$. Entonces se tiene que

$$\left|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |x|^{2j} D^\alpha f(x)\right| \leq M.$$

Dado que la relación $|x^\beta| \leq |x|^{|\beta|}$ se tiene, y además podemos suponer que $|\beta| \leq 2j$ entonces se sigue que

$$|x^\beta D^\alpha f(x)| \leq \left|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} |x|^{2j} D^\alpha f(x)\right| \leq M,$$

por lo que

$$|x^\beta D^\alpha f(x)| \leq M,$$

y al igual que en (i) se sigue que $f \in \mathcal{S}$.

$\square$

Teorema 2.52. *Sean $f, g \in \mathcal{S}$, α un multi-índice, L un operador diferencial con coeficientes constantes y $P(x)$ un polinomio en la variable $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces las funciones:*

(a) $D^\alpha f$;

(b) $P(x)f(x)$;

(c) $L(P(x)f(x))$;

(d) $P(x)Lf(x)$;

(e) fg,

están en $\mathcal{S}$. Además, la aplicación $f \to L(P(\cdot)f(\cdot))$ es continuo de $\mathcal{S}$ en sí mismo.

Demostración. (a) Del simple hecho que $D^\iota(D^\alpha f) = D^\gamma f$ para multi-índices α, γ y ι, además $f \in \mathcal{S}$, de la definición de $\mathcal{S}$ se sigue que $D^\alpha f \in \mathcal{S}$.

(b) Sea $Q(x)$ un polinomio y L un operador diferencial con coeficientes constantes. Entonces, por la fórmula de Leibniz se tiene que

$$|Q(x)L(P(x)f(x))| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |Q(x)D^\beta P(x)||D^\alpha f(x)|.$$

Dado que

$$|Q(x)D^{\beta}P(x)| \leq A|x^{\gamma}|,$$

para alguna constante finita A y donde $|\gamma| > |\beta| + \deg(Q)$. Gracias que por la parte (a), la función $D^{\alpha}f$ está en $\mathcal{S}$, por lo tanto podemos concluir que $Q(x)L(P(x)f(x))$ es acotada. Así, por la caracterización de la definición de $\mathcal{S}$ descrita en la parte (i) de la Proposición 2.51, podemos concluir que $P(x)f(x)$ está en $\mathcal{S}$.

(c) Sea L es un operador con coeficientes constantes y sean γ y ι multi-índices, entonces

$$|x^{\gamma}L(P(x)f(x))| \leq \sum_{|\alpha|\leq m} a_{\alpha} \sum_{\beta\leq\iota} b_{\beta,\iota}|D^{\iota-\beta}P(x)||x^{\gamma}D^{\beta}f(x)|,$$

y de nuevo, el lado derecho tiende a cero cuando $|x| \to \infty$.

(d) Por (c), la función $L(f)$ está en $\mathcal{S}$ (con polinomio de grado cero) y por la parte (b) se sigue que $P(x)Lf(x) \in \mathcal{S}$.

El ítem (e) y la demostración que el funcional allí descrito es continuo se deja como un ejercicio para el lector. □

Teorema 2.53. *Para cualquier p, tal que $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}$. Entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p(1+|x|^2)^{pk})(1+|x|^2)^{-pk})dx\right)^{1/p}. \tag{2.25}$$

Dado que para cualquier entero $k \geq 0$ existe una constante M_k tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)(1+|x|^2)^{pk}| \leq M_k, \tag{2.26}$$

debemos probar que la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-pk}dx, \tag{2.27}$$

converge para un valor adecuado de k. Sea

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-k}dx &= \int_0^{\infty} (1+r^2)^{-k}r^{n-1}\omega_n dr \\ &= \omega_n\left[\int_0^1 (1+r^2)^{-k}r^{n-1}dr + \int_1^{\infty} (1+r^2)^{-k}r^{n-1}dr\right].\end{aligned} \tag{2.28}$$

Pero sabemos que

$$\int_1^{\infty} (1+r^2)^{-k}r^{n-1}dr < \int_1^{\infty} r^{-2k}r^{n-1}dr < \infty,$$

para $k > \frac{n}{2}$. Por lo tanto la integral (2.28) es finia y la integral (2.27) converge para $kp > \frac{n}{2}$. Usando este hecho y (2.26) podemos concluir que (2.25) es finita y así $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

La importancia y utilidad del espacio de Schwartz $\mathcal{S}$, radica en su buen comportamiento con la transformada de Fourier como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.54. *Sea $f \in \mathcal{S}$. Entonces $\hat{f} \in \mathcal{S}$ y el funcional $f \to \hat{f}$ es lineal y continuo de $\mathcal{S}$ en sí mismo.*

Algunos detalles en la prueba del Teorema 2.54 se complementan a continuación.

Proposición 2.55. *Si $f \in \mathcal{S}$ entonces $\hat{f} \in \mathcal{E}$.*

Demostración. Tenemos que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx.$$

Para calcular $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}$ debemos usar el teorema de convergencia dominada, pero solamente es necesario mostrar que $x_j f \in \mathcal{S}$, donde x_j es la j-ésima entrada de x, lo cual es inmediato de la parte (b) del Teorema 2.52 y dado que $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, se sigue que $x_j f$ es integrable. Por lo tanto

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{h}\left[e^{-2\pi i x\cdot(\xi+he_j)} - e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right] f(x)dx.$$

Por el teorema de convergencia dominada,

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} x_j f(x)dx.$$

Se sigue por iteración que, para cualquier multi-ínidice α,

$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|}(x^\alpha f(x))^\wedge(\xi),$$

que siendo la transformada de Fourier de una función en L^1, es continua. Así $\hat{f} \in \mathcal{E}$. □

En el paso 2, queremos verificar que

$$2\pi i\xi_j \hat{f}(\xi) = \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx,$$

para ello se debe usar la fórmula de integración por partes (ver [Evans, 2007] Apéndice A). Primero, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{B(0;R)} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx. \tag{2.29}$$

Entonces aplicando integración por partes,

$$\int_{B(0;R)} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx = -\int_{B(0;R)} -2\pi i\xi_j e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx + \int_{|x|=R} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\upsilon^j dx,$$

donde υ^j es la j-ésima coordenada del vector normal unitario que apunta hacia afuera, es decir, $\upsilon = \frac{x}{R}$. Luego,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{R}\int_{|x|=R} e^{-2\pi ix\cdot\xi} f(x)x_j dS_R\right| &\leq \frac{1}{R}\int_{|x|=R} |x_j||f(x)|dS_R \\ &\leq \frac{1}{R}\int_{|x|=R} |x_j||f(x)||(1+|x|^2)^{-k}||(1+|x|^2)^k|dS_R \\ &\leq \frac{M_k}{R}\int_{|x|=R} |x_j||(1+|x|^2)^{-k}|dS_R,\end{aligned} \tag{2.30}$$

donde M_k es la misma de (2.26). Haciendo el cambio de variable $y = \frac{x}{R}$, obtenemos que $y_j = \frac{x_j}{R}$ y así,

$$\frac{M_k}{R}\int_{|x|=R} |x_j|(1+|x|^2)^{-k} dS_R = M_k \int_{|y|=1} |y_j|(1+R^2)^{-k}\omega_n R^{n-1} dS_1, \tag{2.31}$$

pues $\mathcal{L}(S_R) = \omega_n R^{n-1}$. La integral del lado derecho en (2.31) tiene a cero cuando $R \to \infty$, fijando k suficientemente grande. Entonces combinando (2.29) y (2.30) se obtiene lo deseado.

Como un corolario del Teorema 2.54, se tiene el Corolario de Riemann-Lebesgue que se enuncia a continuación.

Corolario 2.56 (Riemann-Lebesgue)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\hat{f}$ es una función uniformemente continua que se anula en el infinito.*

Uno de los hechos importantes en la demostración del Corolario de Riemann-Lebesgue es el siguiente.

Proposición 2.57. *El espacio de funciones continuas que se anula en infinito es un espacio de Banach con la norma del supremo.*

Demostración. Simplemente notar que dicho espacio es un subespacio cerrado del espacio de funciones continuas y acotadas que es completo con la norma del supremo, por lo tanto es también completo con esta norma. (Ver [Conway, 1985] Cap. 1) □

2.9. Espacios de Sobolev: Definiciones y propiedades básicas

Definición 2.58. *Sea $m > 0$ un entero y $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$, está definido por*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}. \tag{2.32}$$

Proposición 2.59. *El valor* $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$*, definido por*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.33}$$

o alternativamente si $1 < p < \infty$*,*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, \tag{2.34}$$

define una norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$*.*

Demostración. Sea $1 < p < \infty$. Probaremos las tres condiciones que definen una norma.

i) Sea k una constante, entonces se tiene que

$$\|ku\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} |k|^p \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} = |k| \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

ii) Si $u = 0$ es evidente que $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0$. Supongamos que $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0$, entonces

$$0 \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

y por tanto se tiene que u=0.

iii) (Desigualdad Triangular) Es una simple aplicación de la desigualdad de Minkowski para sumas, que puede ser verificada en [Kreyszig, 1978, Sección 1.2], a la expresión

$$\left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Notación: El caso $p = 2$ es de gran importancia, por lo tanto el espacio $W^{m,2}(\Omega)$ será denotado por $H^m(\Omega)$.

Observación 2.60. Una observación importante sobre el espacio $H^m(\mathbb{R}^n)$ es la siguiente. Sea $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Entonces por definición $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq m$, por lo tanto la transformada de Fourier de $D^\alpha u$ está bien definida y se tiene que

$$(D^\alpha u) = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}(\xi),$$

y así $\xi^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq m$. Por el contrario, si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\xi^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq m$, tenemos que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq m$ y así $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

Veremos una caracterización del espacio $H^m(\Omega)$, para ello usaremos la siguiente observación.

Observación 2.61. Sea $\xi \in \mathbb{R}^n$. Existen constantes positivas M_1 y M_2, que dependen únicamente de n y m tal que

$$M_1(1+|\xi|^2)^m \leq \sum_{|\alpha|\leq m} |\xi^\alpha|^2 \leq M_2(1+|\xi|^2)^m. \tag{2.35}$$

Proposición 2.62. *Las siguientes dos definiciones del espacio de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^n) = W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$, son equivalentes:*

i) $H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n); \forall |\alpha| \leq m\}$;

ii) $H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$.

Demostración. Probaremos que el espacio definido en (i) está contenido en el espacio definido en (ii). Gracias a la Observación 2.60, de la primera desigualdad en (2.35) se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(1+|\xi|^2)|^m |\hat{u}(\xi)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{M_1} \sum_{|\alpha|\leq m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{u}(\xi)|^2. \tag{2.36}$$

Dado que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{M_1} \sum_{|\alpha|\leq m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 = \frac{1}{M_1} \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 < \infty,$$

entonces la integral en (2.36) es finita y esto prueba que $(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. La otra equivalencia es análoga usando la segunda desigualdad en (2.35). □

Proposición 2.63. *Las siguientes normas son equivalentes sobre el espacio $H^m(\mathbb{R}^n)$:*

$$\|u\|_1 = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{1/2} \quad y \quad \|u\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2},$$

para $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Del argumento en la proposición anterior y Observación 2.61, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{M_1} \sum_{|\alpha|\leq m} |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{M_1^{1/2}} \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{M_1^{1/2}} \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |(2\pi i)^{|\alpha|} (D^\alpha u)^\wedge|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&= \frac{(2\pi i)^{|\alpha|/2}}{M_1^{1/2}} \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|(D^\alpha u)^\wedge)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/2} \\
&= \frac{(2\pi i)^{|\alpha|/2}}{M_1^{1/2}} \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de la isometría que existe de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo (Teorema de Plancherel). Para la otra desigualdad, $\|\cdot\|_1 \leq C_2 \|\cdot\|_2$, se utilizan la Observación 2.61 y el argumento de la desigualdad anterior. □

Notación: A menudo se usarán las semi-normas

$$|u|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

para $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Proposición 2.64. *El funcional*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \to \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \in (L^p(\Omega))^{n+1},$$

es una isometría dotando a $(L^p(\Omega))^{n+1}$ con la norma $\|u\| = \sum_{i=1}^{n+1} |u_i|_{0,p,\Omega}$, donde $u_1 = u$ y $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_{i-1}}$ para todo $2 \leq i \leq n+1$.

Demostración. Veamos que se preserva la norma. Dada

$$\|u\|_{1,p,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n+1} |u_i|_{0,p,\Omega} = \|u\|,$$

pues $|\alpha| = 1$ implica $\alpha = e_k$ para algún $1 \leq k \leq n$. La inyectividad es obvia y por lo tanto esto define una isometría. □

Teorema 2.65. *$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{u_n\}$ un sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\Omega)$. Entonces, dado que tanto u_n y $D^\alpha u_n$ son sucesiones de Cauchy en $L^p(\Omega)$ y como éste es completo entonces supongamos que $u_n \to u$ y $D^\alpha u_n \to u_\alpha$ en $L^p(\Omega)$. Para cada n, u_n define una distribución mediante $T_{u_n}(\cdot) = \int_\Omega u_n(\cdot)$, así, para $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned} |T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| &\leq \int_\Omega |u_n - u||\phi| \\ &\leq \|\phi\|_q \|u_n - u\|_p. \end{aligned}$$

Además $\|u_n - u\|_p \to 0$, por lo tanto $u_n \to u$ en el sentido de las distribuciones. Análogamente, $T_{D^\alpha u_n} \to T_{u_\alpha}$. Se sigue que

$$T_{u_\alpha}(\phi) = \lim_{n\to\infty} T_{D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} T_u(D^\alpha \phi).$$

De esto que $u_\alpha = D^\alpha u$ y esto implica que $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha(u_n - u)\|_p = \lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u\|_p = 0,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{m,p,\Omega} = 0.$$

Así $W^{m,p}(\Omega)$ es completo. □

2.10. Aproximación por funciones suaves

Teorema 2.66 (Friedrichs)**.** *Sea $1 \leq p < \infty$, y sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces existe una sucesión $\{u_m\}$ en $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\left.\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|_{\Omega'} \to \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\Omega'}$ en $L^p(\Omega')$, para cada $1 \leq i \leq n$ y para cada Ω'* relativamente compacto *(es decir, $\overline{\Omega'}$ es compacto y $\overline{\Omega'} \subset \Omega$).*

Observación 2.67. Si $\tilde{u}$ es la extensión por cero de u en $\mathbb{R}^n$, en el paso 1 de la prueba del *Teorema de Friedrichs* se usa la convergencia de la sucesión de funciones $\rho_\epsilon * \tilde{u}$ a la función $\tilde{u}$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para determinar la convergencia de $\rho_\epsilon * \tilde{u}$ a u en $L^p(\Omega)$. Para mostrar dicha convergencia, basta notar que

$$\begin{aligned} \|\rho_\epsilon * \tilde{u} - u\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |\rho_\epsilon * \tilde{u} - u|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\rho_\epsilon * \tilde{u} - u|^p + \int_\Omega |\rho_\epsilon * \tilde{u} - u|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho_\epsilon * \tilde{u} - \tilde{u}|^p \right)^{1/p} \\ &= \|\rho_\epsilon * \tilde{u} - \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|\rho_\epsilon * \tilde{u} - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lim_{\epsilon\to 0} \|\rho_\epsilon * \tilde{u} - u\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Observación 2.68. En el paso 2 de la prueba del *Teorema de Friedrichs*, se afirma que si Ω' es un subconjunto relativamente compacto de Ω entonces $d(\Omega', \partial\Omega) > 0$. Sea Ω' un subconjunto relativamente compacto de Ω. Gracias a [Munkres, 2000, Ejercicio 27.2], para algún $\epsilon > 0$, la ϵ-vecindad de $\overline{\Omega'}$,

$$V(\overline{\Omega'}, \epsilon) := \{y : d(y, \overline{\Omega'}) < \epsilon\},$$

está contenida en Ω. Esto implica que para todo $x \in \overline{\Omega'}$, $B(x,\epsilon) \subset \Omega$, por lo tanto $d(x,\partial\Omega) > \frac{\epsilon}{3}$. Si esto no sucediera, es decir, si $d(x,\partial\Omega) \leq \frac{\epsilon}{3}$, entonces dado $\frac{\epsilon}{3} > 0$ existe $y \in \partial\Omega$ tal que

$$d(x,\partial\Omega) < d(x,y) \leq d(x,\partial\Omega) + \frac{\epsilon}{3} \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Teorema 2.69 (Regla de la cadena)**.** *Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ y $|G'(s)| \leq M$ para toda $s \in \mathbb{R}$. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces la función $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ y*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i},\ 1 \leq i \leq n.$$

Bajo la hipótesis del teorema sobre G y sabiendo que $G \circ u \in L^p(\Omega)$, si $u_m \to u$ en $L^p(\Omega)$ entonces $G \circ u_m \to G \circ u$ en $L^p(\Omega)$. Sean $a < b$ números reales. Por el teorema del valor medio, $\exists c \in (a,b)$ tal que

$$G'(c) = \frac{G(b) - G(a)}{b - a} \tag{2.37}$$

por lo tanto $G(b) - G(a) = G'(c)(b - a)$ que implica

$$|G(b) - G(a)| = |G'(c)(b - a)| \leq |G'(c)||b - a| \leq M|b - a|.$$

Luego, si $u_m \to u$ en $L^p(\Omega)$, de la desigualdad

$$|G \circ u_m - G \circ u| \leq M|u_m - u|,$$

se tiene que $G \circ u_m \to G \circ u$ en $L^p(\Omega)$.

Para finalizar esta sección, enunciaremos un importante teorema en la teoría de espacios de Sobolev. Aunque no realizamos ninguna demostración alternativa a la presentada en [Kesavan, 1989], es preciso enunciarlo pues percibimos una relación con los espacios de Sobolev de orden fraccionario que son tratados en el siguiente capítulo.

Teorema 2.70 (Stampacchia)**.** *Sea G una función Lipschitz continua de $\mathbb{R}$ en sí mismo tal que $G(0) = 0$. Si Ω es un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$ y sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $G \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

2.11. Teoremas de extensión

Observación 2.71. Usaremos la siguiente notación para esta sección. Sea $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x' = (x_1, ..., x_{n-1}) .$$

Además se denotará por R^n_+ al conjunto

$$R^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}.$$

Teorema 2.72. *Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Se define u^* en $\mathbb{R}^n$ por*

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x', x_n), & x_n > 0. \\ u(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Entonces $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y además

$$|u^*|_{W^{0,p}(\mathbb{R}^n)} \leq 2|u|_{W^{0,p}(\mathbb{R}^n_+)},$$

$$|u^*|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq 2|u|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Observación 2.73. Sea $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Si se define

$$\psi(x', x_n) = \phi(x', x_n) + \phi(x', -x_n)$$

para $x_n > 0$, entonces $\psi \notin \mathscr{D}(\mathbb{R}^n_+)$. Mostraremos con el siguiente ejemplo que esta afirmación es correcta.

Ejemplo 2.74. Sea

$$\rho_1(x) = \begin{cases} ke^{\frac{-1}{1-|x|^2}}; & |x| < 1 \\ 0; & |x| \geq 1 \end{cases}$$

una función que está en $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathrm{supp}(\rho_1) = B(0;1)$. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |a| < 1$ y sea $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que si $x = (x', a^2)$ entonces $|x| < 1$. Tenemos

$$\rho_1(x', a^2) = ke^{\frac{-1}{1-(|x'|^2+a^4)}}, \text{ y}$$

$$\rho_1(x', -a^2) = ke^{\frac{-1}{1-(|x'|^2+a^4)}}$$

y así

$$\psi(x', a^2) = 2ke^{\frac{-1}{1-(|x'|^2+a^4)}},$$

de donde $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. Además

$$\mathrm{supp}(\psi) = B(0;1),$$

pero dado que $B(0;1) \nsubseteq \mathbb{R}^n_+$, podemos asegurar que $\psi \notin \mathscr{D}(\mathbb{R}^n_+)$.

Definición 2.75. *Se definen los rectángulos*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1, |x_n| < 1\},$$
$$Q_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1, 0 < x_n < 1\}.$$

Teorema 2.76. *Sea $u \in W^{1,p}(Q_+)$. Definimos u^* en Q por*

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x', x_n); & x \in Q_+, \\ u(x', -x_n); & (x', -x_n) \in Q_+. \end{cases}$$

Entonces $u^* \in W^{1,p}(Q)$ y en adición

$$|u^*|_{W^{0,p}(Q)} \leq 2|u|_{W^{0,p}(Q_+)}, \tag{2.38}$$

$$|u^*|_{W^{1,p}(Q)} \leq 2|u|_{W^{1,p}(Q_+)}. \tag{2.39}$$

Demostración. $\boxed{\text{Paso 1}}$ Sea $\zeta \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ tal que

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

y definamos $\zeta_k(t) = \zeta(kt)$.

$\boxed{\text{Paso 2}}$ Probaremos ahora que

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^*, \ (1 \leq i \leq n-1),$$

en el sentido de las distribuciones, donde

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^*(x', x_n) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n), & x_n > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Sea $\phi \in \mathscr{D}(Q)$ y consideremos la integral

$$\int_Q u^* \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \tag{2.40}$$

con $1 \leq i \leq n-1$. Si definimos la función

$$\psi(x', x_n) := \phi(x', x_n) + \phi(x', -x_n), \ 0 < x_n < 1, \ |x'| < 1.$$

Entonces podemos escribir (2.40) como

$$\int_Q u^* \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}.$$

Por la misma razón hecha en la Observación 2.73, la función ψ no está en $\mathscr{D}(Q_+)$, pero si la multiplicamos por ζ_k, definida en el paso 1, obtenemos una función en $\mathscr{D}(Q_+)$. En otras palabras, para $k > 2$, la función

$$\zeta_k(x_n)\psi(x', x_n) = \begin{cases} 0, & -1 < x_n < \frac{1}{k}, \\ \phi(x', x_n) + \phi(x', -x_n), & \frac{2}{k} < x_n < 1, \end{cases}$$

está en $\mathscr{D}(Q_+)$ pues $\operatorname{supp}(\zeta_k\psi) \subset Q_+$. Por lo tanto, por la definición de derivada en el sentido de las distribuciones, tenemos que

$$\int_{Q_+} u\frac{\partial(\zeta_k\psi)}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\zeta_k\psi,$$

y como ζ_k solo depende de x_n y $1 \leq i \leq n-1$ se tiene que,

$$\int_{Q_+} u\frac{\partial(\zeta_k\psi)}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} u\zeta_k\frac{\partial\psi}{\partial x_i}.$$

Ahora bien, por el teorema de convergencia dominada tenemos entonces

$$\begin{aligned} \int_{Q_+} u\frac{\partial\psi}{\partial x_i} &= \int_{Q_+} \lim_{k\to\infty} u\zeta_k\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \lim_{k\to\infty}\int_{Q_+} u\zeta_k\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{Q_+} u\frac{\partial\zeta_k\psi}{\partial x_i} = -\lim_{k\to\infty}\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\zeta_k\psi \\ &= -\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\psi. \end{aligned}$$

Note que el paso

$$\int_{Q_+} u\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\psi,$$

no es inmediato puesto que $\psi \notin \mathscr{D}(Q_+)$. Regresando a la definición de ψ se sigue que

$$\int_Q u^*\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\phi(x', x_n)dx - \int_{Q_+}\frac{\partial u}{\partial x_i}\phi(x', -x_n)dx. \tag{2.41}$$

Recordando que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^*(x', x_n) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n), & |x'| < 1, 0 < x_n < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', -x_n), & |x'| < 1, -1 < x_n < 0, \end{cases}$$

de (2.41) resulta que

$$\int_Q u^*\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_Q\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^*\phi,$$

o lo que es equivalente

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^*, \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq n-1. \tag{2.42}$$

$\boxed{\text{Paso 3}}$ Consideremos ahora el caso $i = n$. Sea $\phi \in \mathscr{D}(Q)$. De forma similar al paso anterior

$$\int_Q u^* \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_n},$$

donde ahora

$$\psi(x', x_n) = \phi(x', x_n) - \phi(x', -x_n), \quad 0 < x_n < 1, \ |x'| < 1.$$

Si multiplicamos por ζ_k y usando la definición de derivada distribucional, se tiene que

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial(\zeta_k \psi)}{\partial x_n} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \zeta_k \psi$$

y además

$$\frac{\partial(\zeta_k \psi)}{\partial x_n} = \zeta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_n} + k\psi\zeta'(kx_n). \tag{2.43}$$

Debemos estimar ahora la integral

$$k \int_{Q_+} u\psi\zeta'(kx_n). \tag{2.44}$$

Para ello, dado que $\psi(x', 0) = 0$, por el teorema del valor medio existe $z_n \in (0, x_n)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x', z_n) = \frac{\psi(x', x_n)}{x_n},$$

y esto implica que

$$|\psi(x', x_n)| = |x_n| \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x', z_n) \right| \leq C|x_n|,$$

donde la última desigualdad se tiene, pues

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial z_n}(x', x_n) \right| \leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x', z_n) \right| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x', -z_n) \right| \leq C,$$

ya que $\phi \in \mathscr{D}(Q)$. También la función ζ' es una función acotada, por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| k \int_{Q_+} u\psi\zeta'(kx_n) \right| &\leq kC \int_{\{0<x_n<\frac{2}{k}\}} |u||x_n| \\ &< C \int_{\{0<x_n<\frac{2}{k}\}} |u| \\ &= \int_{Q_+} |u|\chi_{[0,\frac{2}{k}]} \\ &\leq \|u\|_{L^p(Q_+)} \|\chi_{[0,\frac{2}{k}]}\|_{L^q(Q_+)} \to 0, \end{aligned} \tag{2.45}$$

cuando $k \to \infty$. De (2.43) y (2.45), aplicando el teorema de convergencia dominada se obtiene que

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \psi, \tag{2.46}$$

y en consecuencia

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^+,$$

donde para cualquier función $v \in Q_+$, v^+ está definida por

$$v^+(x', x_n) = \begin{cases} v(x', x_n), & x_n > 0, \\ -v(x', -x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Si $v \in L^p(Q_+)$, tanto v^* como v^+ están en $L^p(Q)$. Para mostrar este hecho, notemos lo siguiente:

$$\int_Q |v^*|^p = \int_{Q_+} |v(x, x_n)|^p dx' dx_n + \int_{\{(x', x_n): |x'|<1, -1<x_n<0\}} |v(x, -x_n)|^p dx' dx_n$$

y usando un cambio de variable apropiado en la segunda integral, se obtiene que

$$\int_Q |v^*|^p = 2 \int_{Q_+} |v|^p < \infty.$$

Con un argumento similar se puede verificar que $v^+ \in L^p(Q)$.

En conclusión, tanto en el paso 2 como en el paso 3, se tiene que $\frac{\partial u^*}{\partial x_i}$ está en $L^p(Q)$ y como $u^* \in L^p(Q)$ se sigue que $u^* \in W^{1,p}(Q)$. $\square$

Conclusiones

Una de las técnicas más útiles para demostrar medibilidad de funciones y conjuntos en espacios producto, es la de considerar la colección de conjuntos que contenga los conjuntos objetivo y mostrar que dicha colección es una clase monótona que contiene todos los rectángulos y luego aplicar el teorema de la clase monótona.

El teorema de convergencia dominada es uno de los resultados más importantes en teoría de integración , pues permite pasar de límite dentro integral, siempre y cuando la sucesión de funciones se encuentre dominada pero no necesariamente sea creciente o decreciente, condición que pide el teorema de convergencia monótona y que, en general, no es fácil de tener.

La propiedad de la sección, descrita al inicio de este trabajo, es la herramienta fundamental para demostrar y definir propiedades del espacio producto, asegurando que si un conjunto A es medible en el espacio producto, todas sus secciones son medibles. Dicha propiedad permitió demostrar el argumento principal en la desigualdad de Minkowski.

El uso de las distribuciones ρ_ϵ descritas en la sección 3.1 de este trabajo es fundamental en la demostración de muchas propiedades de las distribuciones y propiedades de los espacios de Sobolev.

La partición de la unidad, definida en el capítulo 2 de este trabajo, es utilizada en gran cantidad de las demostraciones, tanto de la aproximación por funciones suaves como en los teoremas de extensión.

Bibliografía

[Conway, 1985] Conway, J. (1985). *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag.

[Di Nezza et al., 2012] Di Nezza, E., Palatucci, G., and Valdinoci, E. (2012). Hitchhiker's guide to the fraccional sobolev spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 136:521–573.

[Evans, 2007] Evans, L. (2007). *Partial Differential Equations.* AMS.

[Folland, 1999] Folland, G. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* Pure and Applied Mathematics: A Wilev-Inlerscience Series 01 Texts, Monographs, and Tracts.

[Fon-Che, 2016] Fon-Che, L. (2016). *Real Analysis.* Oxford University Press.

[Jones, 2001] Jones, F. (2001). *Lebesgue Integration on Euclidean Space.* Jones and Barlett Mathematics.

[Kesavan, 1989] Kesavan, S. (1989). *Topics in functional analysis and applications.* New Age International.

[Kreyszig, 1978] Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications.* JOHN WILEY and SONS.

[Lieb and Loss, 1997] Lieb, E. and Loss, M. (1997). *Analysis.* American Mathematical Society.

[Munkres, 2000] Munkres, J. (2000). *Topology.* Prentice Hall.

[Treves, 1967] Treves, F. (1967). *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Academic Press.