Sobre la compacidad y la norma esencial del Operador Multiplicación actuando en espacios $L^p(X)$

YESID ALEJANDRO LEMUS ABRIL

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:
Magister en Matemáticas

Director: Julio César Ramos Fernández
Doctor en Matemáticas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, COLOMBIA
2020

Trabajo de Grado de Maestría

Yesid Alejandro Lemus Abril

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Matemáticas

Director:
Julio César Ramos Fernández, Ph.D.

Línea de Investigación: **Análisis Matemático**

Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2020

Sobre la compacidad y la norma esencial del Operador Multiplicación actuando en espacios $L^p(X)$

YESID ALEJANDRO LEMUS ABRIL

Alba Alicia Trespalacios Rangel, Ph.d.
Directora de Posgrados
Facultad de Ciencias

Concepción Judith Puerta Bula, Ph.d.
Decana
Facultad de Ciencias

Bogotá D.C., Colombia
2020

Sobre la compacidad y la norma esencial del Operador Multiplicación actuando en espacios $L^p(X)$

YESID ALEJANDRO LEMUS ABRIL

Carlos R Carpintero F

Carlos Carpintero Figueroa, Ph.D
JURADO

Edwin Gonzalo Murcia, Ph.D
JURADO

Julio César Ramos Fernández, Ph.D
DIRECTOR TRABAJO DE GRADO

Jesús Alonso Ochoa Arango, Ph.D
COORDINADOR MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS Y DELEGADO DIRECCIÓN DE POSGRADO

Bogotá D.C., Colombia

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mis padres, Celmira Abril Álvarez y Luis Alfonso Lemus Gutiérrez, por todo el apoyo incondicional e innumerables esfuerzos que me han proporcionado para mi vida como persona y profesional, también a Yuly Andrea por su paciencia y apoyo durante estos años. Además, quiero agradecer a la Universidad Javeriana por permitirme formarme en el ambiente académico y además como una persona íntegra. Gracias a mis profesores, compañeros y comunidad en general, por todo lo que me han brindado. Por último, pero no menos importante quiero dar gracias al doctor Julio César Ramos Fernández, quien desde un inicio me apoyó, brindándome su experiencia, conocimientos y su calidad humana, las cuales me han ayudado y formado durante el transcurso de mi proceso académico y personal.

Introducción

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y p un número mayor o igual que uno, el conjunto $\mathcal{L}^p(X) = \{f$ función medible a valor real $\mid \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\}$ es un espacio vectorial, sin embargo, al establecer la función $\| \cdot \|_p : L^p(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, como $\|f\|_p := (\int_X |f|^p \, d\mu)^{1/p}$ para $f \in \mathcal{L}^p(X)$, tiene la particularidad que si $f \in \mathcal{L}^p(X)$, tal que $\|f\| = 0$ no es posible concluir que $f = 0$, Esto quiere decir $\| \cdot \|$ define una seminorma, luego, si se define para $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ la relación $f \sim g$ si y solamente si $f = g$ casi toda parte (c.t.p) sobre X, entonces la relación $\sim$ es de equivalencia la cual permite subsanar el problema de la norma y de esta manera el conjunto de $L^p(X) := \mathcal{L}^p(X)/\sim$ conformado por todas las clases de equivalencia $[f]$, constituye un espacio de Banach con la norma $\| \cdot \|_p$ definida por $\|[f]\|_p = \|g\|_p$ con $g \in [f]$. De manera general para realizar el estudio del espacio $L^p(X)$ basta escoger solo el representante y por tanto de ahora en adelante se omite el símbolo de clase de equivalencia $[\cdot]$ y se dirá que $f \in L^p(X)$ de forma intrínseca se entenderá que f es una clase de equivalencia. Otro conjunto importante es $L^\infty(X)$ el cual está constituido por todas las funciones a valor real, en el cual existe $0 \leq M < \infty$ tal que $|f(x)| \leq M$ c.t.p. sobre X, dichas funciones son conocidas como esencialmente acotadas, el valor de M recibe el nombre de cota superior esencial, y definiendo $\| \cdot \|_\infty : L^\infty(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, como $\|f\|_\infty := \text{ínf}\{k \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x : |f(x)| \geq k\}) = 0\}$, $L_\infty(X)$ constituyen un espacio de Banach con normada dada por $\| \cdot \|_\infty$.

Este tipo de espacios fueron estudiados por F. Riesz en el año 1910 en el artículo [10] y conforman una clase muy importante de espacios de Banach en teoría de la medida y análisis funcional, siendo de gran importancia en las aplicaciones en teoría de probabilidad, ingeniería y física, entre otras. Su importancia y diversas propiedades lo hacen un foco de estudio y por tanto una motivación para realizar diversas investigaciones.

En los espacios de medida (X, Σ, μ) se define un átomo $A \in \Sigma$ de μ si cumple dos condiciones, la primera es $\mu(A) > 0$. La segunda condición, para todo subconjunto medible F de A, $\mu(F) = 0$ o bien $\mu(A \setminus F) = 0$, además si para todo conjunto de medida positiva tiene un subconjunto el cual es un átomo, se dice que (X, Σ, μ) es puramente atómico. si (X, Σ, μ) no contiene átomos entonces se dice que es no atómica. Un conjunto medible B es no atómico si existe un subconjunto medible F de B talque $\mu(F) \neq 0$ y $\mu(B \setminus F) \neq 0$. Si el espacio de medida es σ-finito, una de las propiedades de interés de los conjuntos atómicos y no atómicos radica en la descomposición del espacio medible en dos subconjuntos, uno puramente atómico y el otro no atómico como se presenta a continuación

$$X = B \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right),$$

donde $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ son átomos disjuntos y B es no atómico; esta descomposición del espacio de medida será de gran importancia para el estudio de los espacios $L^p(X)$.

Considérese $L_0(X)$ como el conjunto conformado por las clases de equivalencia de funciones medibles en el espacio de medida (X, Σ, μ) bajo la relación de equivalencia dada por la igualdad c.t.p. Si $u \in L_0(X)$ es fijo, considérese la función de $L^p(X)$ a $L_0(X)$, definida por

$$M_u(f)(x) := u(x)f(x) \qquad x \in X\,, f \in L^p(X).$$

M_u es llamado operador de multiplicación, donde u recibe el nombre del símbolo del operador. Es importante establecer que propiedades tiene este operador; es decir, se desea buscar condiciones sobre el símbolo u para M_u sea un operador continuo o acotado de $L^p(X)$ en $L^q(X)$. También se busca establecer condiciones para que este operador tenga rango cerrado, sea compacto, entre otras propiedades. En el artículo [13], realizado por Takagi y Yokouchi en el año 1999, se realiza el estudio del operador de multiplicación M_u entre diferentes espacios $L^p(X)$ y se establecen condiciones para que el operador $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ sea continuo y a la vez cómo es la norma del operador M_u. Otra de las propiedades del operador estudiada es establecer condiciones para que el operador de multiplicación tenga rango cerrado. Esta investigación se tiene en cuenta los valores de $p, q \geq 1$, el símbolo del operador $u \in L_0(X)$ y la descomposición del espacio en su parte atómica y no atómica. En el articulo [12], realizado por R. K. Singh y A. Kumar en el año 1979, se establecen condiciones para que un operador multiplicación $M_u : L^2(X) \to L^2(X)$ sea compacto teniendo en cuenta la dimensión de el subespacio Z_ϵ^u conformado por todas las funciones que se anulan en $X \setminus X_\epsilon^u$, donde $X_\epsilon^u = \{x \in X : |u(x)| > \epsilon\}$. Como consecuencia se desprenden corolarios los cuales serán de gran importancia en el estudio de los operadores multiplicación entre espacios $L^p(X)$. Los resultados que se van a presentar en este trabajo de investigación van a depender de las propiedades que tiene el símbolo del operador u, la medida μ y el espacio de medida como descomposición en su parte no atómica y atómica.

En este trabajo se pretende estimar o determinar la norma esencial de los operadores multiplicación entre espacios $L^p(X)$ para $p \geq 1$, $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$, con el símbolo $u \in L_0(X)$, es por ello que se estudian propiedades ya mencionadas, además se utilizaran otros artículos que tengan relación con los operadores multiplicación, entre los cuales podemos citar los trabajos de H. Takagi y K. Yokouchi [13], R.K. Singh y A. Kumar [12], en los cuales se basan este trabajo, y además los artículos de R. E. Castillo, H. Refeiro, J. C. Ramos Fernández y M. Salas Brown [4] y J. C. Ramos-Fernández y M. Salas-Brown [9]. Estos documentos servirán de apoyo debido a que proveen un análisis del operador multiplicación sobre los espacios de Köthe en el cual se desarrolla los temas que se desean estudiar como lo son continuidad del operador, si es de rango cerrado además si es compacto y uno de los temas más importante que ha motivado la realización este trabajo: la estimación de la norma esencial, que hasta el momento del desarrollo de esta monografía, no se ha encontrado artículos o documentos en los cuales se trate este tema de manera más general y le da un aire de originalidad al trabajo propuesto.

Cabe resaltar que en el desarrollo de este trabajo se considera (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito ya que es una hipótesis fundamental en los artículos revisados. Este documento consiste de tres capítulos. En el primer capítulo se establecen conceptos principales de la teoría de la medida, los espacios $L^p(X)$, análisis funcional, y se desarrollarán algunas propiedades de conjuntos atómicos y no atómicos en los espacios de medida (X, Σ, μ) σ-finito y las funciones en los espacios $L^p(X)$.

En el segundo capítulo se estudiará el operador multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ para $p, q \geq 1$ y donde el símbolo $u \in L_0(X)$. Se mostrará bajo qué condiciones el operador multiplicación M_u es acotado, y se establecerán condiciones sobre el símbolo u para que defina un operador multiplicación continuo y además se puede estimar la norma del operador; de igual forma, se establecerán propiedades para los operadores que tiene rango cerrado. Básicamente se darán los detalles de los resultados de Takagi y Yokouchi [13] complementando con ejemplos y analizando los casos que no fueron considerados por estos autores.

En el tercer y último capítulo se estudiará la compacidad del operador de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$, se analizan y se extienden los resultados de R. K. Singh y A. Kumar [12] y como resultado importante del trabajo de investigación, también se incluirá un criterio nuevo para los operadores de multiplicación compactos usando la descomposición del espacio de medida un su parte atómica y no atómica, al igual se estima la norma esencial del operador $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$. Se dan los detalles de los resultados que aparecen en [2].

Índice general

Agradecimientos IX

Introducción XI

1 Preliminares **1**

1.1 Espacios de Medida . . . 1

1.2 Átomos y conjuntos no atómicos . . . 7

1.3 Espacios $L^p(X, \Sigma, \mu)$ . . . 20

1.3.1 Funciones esencialmente acotadas . . . 20

1.3.2 Espacios de Lebesgue con $p \geq 1$ . . . 20

1.4 Descomposición atómica y funciones medibles . . . 22

1.5 Operadores lineales en espacios de Banach . . . 26

2 Operador Multiplicación actuando entre dos espacios $L^p(X)$ **30**

2.1 Sobre los multiplicadores de $L^p(X)$ . . . 30

2.1.1 Continuidad, caso $p = q$ . . . 30

2.1.2 Continuidad, caso $p > q$ . . . 33

2.1.3 Continuidad, caso $p < q$ . . . 38

2.2 Operador multiplicación con rango cerrado . . . 49

2.2.1 Rango cerrado, caso $p = q$ . . . 53

2.2.2 Rango cerrado, caso $p > q$ . . . 55

2.2.3 Rango cerrado, caso $p < q$ . . . 60

3 Compacidad y la norma esencial del operador de multiplicación M_u **63**

3.1 Compacidad del operador multiplicación en $L^p(X)$ . . . 63

3.2 Un nuevo criterio para la compacidad . . . 69

3.3 Operadores Multiplicación en $L^p(X)$ con rango de dimensión finita . . . 73

3.4 La norma esencial del operador multiplicación en $L^p(X)$ . . . 74

Conclusiones **81**

Problemas Abiertos **83**

Bibliografía **85**

1 Preliminares

En este capítulo se presentan conceptos, y resultados que son de gran importancia para la investigación. Se presentan varios resultados de forma que el trabajo sea auto contenido.

1.1. Espacios de Medida

Los resultados que se han obtenidos en esta investigación se basan en un buen conocimiento sobre los espacios de medida y las propiedades de los espacios de funciones medibles. Por esta razón, en esta sección se proveen las definiciones y los resultados más relevantes sobre este tema.

Definición 1.1.1. [3, Definición A.1., p. 419] Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, la colección $\mathscr{M} \subset \wp(X)$ se dice una σ- álgebra si satisface las siguientes condiciones

(a) $\emptyset \in \mathscr{M}$.

(b) si $E \in \Sigma$ entonces $X \setminus E \in \mathscr{M}$.

(c) si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{M}$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{M}$.

Se dice un espacio medible al par $(X, \mathscr{M})$ compuesto por un conjunto X y una σ-álgebra $\mathscr{M}$ de subconjuntos de X. Un subconjunto E de X es llamado medible siempre y cuando E pertenece a $\mathscr{M}$.

Definición 1.1.2. [11, Definición, p. 338] Una medida μ sobre un espacio medible $(X, \mathscr{M})$, hace referencia a una función no negativa a valor real extendido $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ para el que $\mu(\emptyset) = 0$ y es aditiva contable en el sentido que para todo colección contable disjunta $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Un espacio de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$ será una terna compuesta por un espacio medible $(X, \mathscr{M})$ junto con una medida μ definida sobre $\mathscr{M}$.

Proposición 1.1.3. *Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida.*

- *Aditividad finita. Para toda colección disjunta* $\{E_k\}_{k=1}^n$ *de conjuntos medibles,*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k).$$

- *Monotonía. Si* A *y* B *son conjuntos medibles y* $A \subseteq B$*, entonces*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

- *Si* A *y* B *son conjuntos medibles y* $A \subseteq B$ *y* $\mu(A) < \infty$*, entonces*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

- *Monotonía contable. Para toda colección* $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ *de conjuntos medibles que cubren a un conjunto medible* E*,*

$$\mu(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Una sucesión de conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ es llamada creciente siempre y cuando para cada k, $E_k \subseteq E_{k+1}$, y es llamada decreciente siempre y cuando para cada k, $E_{k+1} \subseteq E_k$.

Proposición 1.1.4 (Continuidad de la medida)**.** *Sea* $(X, \mathscr{M}, \mu)$ *un espacio de medida.*

(a) *Si* $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ *es una sucesión creciente de conjuntos medibles, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k).$$

(b) *Si* $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ *es una sucesión decreciente de conjuntos medibles para la cual* $\mu(E_1) < \infty$*, entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k).$$

Definición 1.1.5. Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida,

- La medida μ es llamada finita siempre que $\mu(X) < \infty$.

- La medida μ es llamada σ-finita siempre que X es la unión de una colección de conjuntos medibles cada uno de los cuales tiene medida finita. Es decir, existe $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathscr{M}$ tal que $\mu(E_k) < \infty$ y $X = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$.

- Un conjunto medible E es llamado de medida finita siempre y cuando $\mu(E) < \infty$.

- Un conjunto medible E es llamado de medida σ-finito siempre y cuando E es la unión de una colección de conjuntos medibles cada uno de los cuales tiene medida finita. Es decir, existe $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathscr{M}$ tal que $\mu(E_k) < \infty$ y $E = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$.

Definición 1.1.6. Un espacio de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es llamado completo siempre y cuando $\mathscr{M}$ contiene todos los subconjuntos de medida cero, esto es, si E pertenece a $\mathscr{M}$ y $\mu(E) = 0$, entonces todos subconjunto de E también pertenece a $\mathscr{M}$.

Para un espacio de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$ y un conjunto medible E de X, se dice que una propiedad se cumple casi toda parte sobre E o que es valida para casi todo $x \in E$, denotado por μ-c.t.p. E, si existe un subconjunto medible E_0 de E tal que $\mu(E_0) = 0$ y la propiedad se cumple sobre $E \setminus E_0$.

Proposición 1.1.7. *Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida. Se define $\mathscr{M}_0$ a la colección de subconjuntos de E de X de la forma $E = A \cup B$ donde $B \in \mathscr{M}$ y $A \subseteq C$ para algún $C \in \mathscr{M}$ para el cual $\mu(C) = 0$. Para tal conjunto E se define $\mu_0(E) = \mu(B)$. Entonces $\mathscr{M}_0$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathscr{M}$, μ_0 es una medida que extiende a μ, y $(X, \mathscr{M}_0, \mu_0)$ es un espacio de medida completo.*

Comentario 1.1.8. Una manera de construir espacios de medida partiendo de uno fijo $(X, \mathscr{M}, \mu)$ y $G \in \mathscr{M}$, Es posible establecer $\mathscr{M}_G = \{E \cap G \mid E \in \mathscr{M}\}$ y $\mu_G(E) = \mu(E)$ para todo $E \in \mathscr{M}_G$. De esta manera $(G, \mathscr{M}_G, \mu_G)$ es también un espacio de medida y posee las mismas características del espacio de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$, es decir:

- Si $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es σ-finito, $(G, \mathscr{M}_G, \mu_G)$ también es σ-finito.
- Si $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es completo, $(G, \mathscr{M}_G, \mu_G)$ también es completo.
- Si μ es σ-finita, μ_G también es σ-finita.
- Si μ es finita, μ_G también es finita.

Definición 1.1.9. Sea $(X, \mathscr{M})$ un espacio medible. Una función f a valor real extendido definido sobre X es llamada medible (medible con respecto a $\mathscr{M}$), si se cumple una (y por tanto todas) de las siguientes condiciones:

(a) Para cada número real c, el conjunto $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ es medible.

(b) Para cada número real c, el conjunto $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$ es medible.

(c) Para cada número real c, el conjunto $\{x \in X \mid f(x) > c\}$ es medible.

(d) Para cada número real c, el conjunto $\{x \in X \mid f(x) \geq c\}$ es medible.

El conjunto de las funciones medibles definidas en el espacio medible $(X, \mathscr{M})$ se denotará por $L_0(X) = L_0(X, \mathscr{M})$.

Proposición 1.1.10. *Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida completo y X_0 un subconjunto medible de X para el cual $\mu(X \setminus X_0) = 0$. Entonces una función a valor real extendido f sobre X es medible si y sólo si la restricción a X_0 es medible. En particular, si g y h son funciones a valor real extendido sobre X para las cuales $g = h$ c.t.p sobre X, entonces g es medible si y sólo si h es medible.*

Teorema 1.1.11. *Sea $(X, \mathscr{M})$ un espacio medible, f y g funciones medibles a valor real extendido sobre X. Para cualquiera par de números reales α y β, la función $\alpha f + \beta g$ es medible. También la función $f \cdot g$ es medible.*

Teorema 1.1.12. *Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles sobre X, tal que $f_n \to f$ puntualmente c.t.p. sobre X. Si el espacio de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es completo o bien la convergencia puntual es sobre todo X, entonces f es medible.*

Corolario 1.1.13. *Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles sobre X. Entonces las siguientes funciones son medibles:*

$$\sup f_n, \quad \text{ínf} f_n, \quad \text{lím sup} f_n, \quad \text{lím inf} f_n.$$

Definición 1.1.14. Sea $(X, \mathscr{M})$ un espacio medible. Para un conjunto medible E la función característica $\mathbf{1}_E$, es la función sobre X dada por:

$$\mathbf{1}_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in E, \\ 0, & \text{si} \quad x \in X \setminus E. \end{cases}$$

Una función a valor real ψ sobre X es llamada simple siempre y cuando existen una colección finita $\{E_k\}_{k=1}^n$ de conjuntos medibles y números reales $\{c_k\}_{k=1}^n$ tal que

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \mathbf{1}_{E_k}.$$

Luego, una función simple sobre X es una función a valor real medible sobre X que tomas un número finito de valores reales.

Definición 1.1.15. Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y ψ una función simple no negativa sobre X. Se define la integral de ψ sobre X,

$$\int_X \psi \, d\mu,$$

como sigue: si $\psi = 0$ sobre X, define

$$\int_E \psi \, d\mu = 0.$$

Por otro lado, sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$ los valores positivos que toma ψ sobre X, para $1 \leq k \leq n$, si $E_k = \{x \in X \mid \psi(x) = c_k\}$, se define

$$\int_X \psi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \mu(E_k). \tag{1.1.1}$$

El caso $\psi = 0$ sobre X se considera por separado para justificar la convención $0 \cdot \infty = 0$. Además, se dice que la expresión al lado derecho de (1.1.1) es ∞ si para algún k tal que $c_k > 0$, se cumple que $\mu(E_k) = \infty$. Para un subconjunto E de X, la integral de ψ sobre E con respecto a μ esta definido por $\int_X \psi \cdot \mathbf{1}_E \, d\mu$ y se denota por $\int_E \psi \, d\mu$.

Definición 1.1.16. Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible no negativa a valor real extendido sobre X. La integral de f sobre X con respecto a μ se denota y define por

$$\int_X f\,d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu \mid \varphi \text{ es simple y } 0 \leq \varphi \leq f\right\}.$$

Para una subjconjunto medible E de X, la integral de f bajo E con respecto a μ está definida por

$$\int_E f\,d\mu := \int_X f \cdot \mathbf{1}_E\,d\mu.$$

Teorema 1.1.17 (Desigualdad de Chebyshev)**.** *Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida, y f una función no negativa sobre X, y λ un número real positivo. Entonces*

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) \geq \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\int_X f\,d\mu. \tag{1.1.2}$$

Proposición 1.1.18. *Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible no negativa sobre X para la cual $\int_X f\,d\mu < \infty$. Entonces f es finita c.t.p. sobre X y el conjunto $\{x \in X \mid f(x) > 0\}$ es σ-finito.*

Lema 1.1.19 (Lema de Fatou)**.** *Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles no negativas sobre X tal que $f_n \to f$ puntualmente c.t.p. sobre X. Suponga que f es medible, entonces*

$$\int_X f\,d\mu \leq \liminf \int_X f_n\,d\mu. \tag{1.1.3}$$

Teorema 1.1.20 (Teorema de convergencia monótona)**.** *Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles no negativas sobre X. Se define*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

para cada $x \in X$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu. \tag{1.1.4}$$

Definición 1.1.21. Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible no negativa sobre X. Entonces f es llamada integrable sobre X con respecto a μ si se cumple que

$$\int_X f\,d\mu < \infty.$$

Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible sobre X. La parte positiva y la parte negativa de f, denotadas por f^+ y f^-, están definidas por

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{y} \quad f^- = \max\{-f, 0\} \quad \text{sobre}\, X.$$

Tanto f^+ y f^- son funciones medibles no negativas sobre X, y son tales que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{y} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Definición 1.1.22. Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida. Una función medible f sobre X es llamada integrable sobre X con respecto a μ siempre que $|f|$ es integrable sobre X con respecto a μ. Se define la integral de f sobre X con respecto a μ por

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu. \tag{1.1.5}$$

Para un subconjunto medible E de X, f se llama integrable sobre E si la función $f \cdot \mathbf{1}_E$ es integrable sobre X con respecto a μ. En este caso, la integral de f sobre E se denota y define por

$$\int_E f\, d\mu := \int_X f \cdot \mathbf{1}_E\, d\mu.$$

Teorema 1.1.23 (Prueba de comparación para integrales)**.** *Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible sobre X. Si g es integrable sobre X y domina a f sobre X en el sentido que $|f| \leq g$ c.t.p. sobre X, entonces f es integrable sobre X y*

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu. \tag{1.1.6}$$

Teorema 1.1.24. *Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y f, g funciones integrables sobre X.*

(Linealidad) Para números reales α, β, $\alpha f + \beta g$ es integrable sobre X y

$$\int_X \alpha f + \beta g\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu.$$

(Monotonía) Si $f \leq g$ c.t.p. sobre X, entonces

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$$

(Aditividad sobre dominios) Si A, B son subconjuntos disjuntos medibles de X y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_{A \cup B} f\, d\mu = \alpha \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu.$$

Teorema 1.1.25 (Aditividad contable sobre dominios de integración)**.** *Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible sobre X. Si $\{X_n\}$ es una colección contable de conjuntos medibles disjuntos cuya unión es X, entonces*

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} f\, \mu. \tag{1.1.7}$$

Teorema 1.1.26 (Continuidad de la integral)**.** *Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y f una función medible sobre X.*

1. *Si $\{X_n\}$ es una sucesión creciente de subconjutos de X cuya unión es X, entonces*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f\, d\mu. \tag{1.1.8}$$

2. Si $\{X_n\}$ es una sucesión decreciente de subconjutos de X, entonces

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f\, d\mu. \tag{1.1.9}$$

Teorema 1.1.27 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles sobre X tal que $f_n \to f$ c.t.p. sobre X con f medible. Si existe una función medible no negativa g, integrable sobre X que domina a la sucesión $\{f_n\}$ en el sentido*

$$|f_n| \leq g \quad c.t.p.\ sobre\, X\, para\ todo\ \ n,$$

entonces f es integrable sobre X y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu. \tag{1.1.10}$$

1.2. Átomos y conjuntos no atómicos

En esta sección se tratará sobre la descomposición atómica de un espacio de medida. Se clasificarán los espacios de medida en atómicos y no atómicos y se presentará un resultado sobre la descomposición atómica - no atómica de un espacio de medida, el cual será esencial en los siguientes capítulos.

En vista de la falta de referencias sobre este tema, en esta sección se dan todos los detalles de los resultados que se necesitarán más adelante.

Definición 1.2.1. [15, Definición 1.35., p. 19] Dado un espacio de medida (X, Σ, μ), un conjunto medible $A \in \Sigma$ es llamado átomo para μ si satisface las siguientes condiciones:

(a) $\mu(A) > 0$,

(a) Para todo $E \in \Sigma$ tal que $E \subseteq A$ se cumple que $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = \mu(A)$.

Ejemplo 1.2.2. Considérese el espacio de medida σ-finito, $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}), \#)$ donde $\#$ es la medida de conteo. En este caso los conjuntos unitarios son los átomos.

Alternativamente, se tiene la siguiente caracterización (véase [7]).

Proposición 1.2.3. *Un conjunto $A \in \Sigma$, es un átomo para μ si y sólo si*

(a) $\mu(A) > 0$,

(b) Para todo $F \in \Sigma$ se cumple que $\mu(A \cap F) = 0$ o bien $\mu(A \setminus F) = 0$.

Demostración. Sean A es un átomo para μ y F un conjunto medible de Σ. Entonces $F \cap A \in \Sigma$ y es un subconjunto de A por lo tanto $\mu(A \cap F) = 0$ o bien $\mu(A \cap F) = \mu(A)$; pero esta última condición implica que

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu((A \cap F) \cup (A \setminus F)) \\ &= \mu(A) + \mu(A \setminus F). \end{aligned}$$

Por tanto $\mu(A \setminus F) = 0$ y se cumple la condición 2 en la proposición.

Recíprocamente, si $A \in \Sigma$ satisface *(a)* y *(b)*, además si $E \in \Sigma$ está contenido en A, entonces $E = A \cap E$ y por la propiedad 2 se tiene $\mu(E) = \mu(E \cap A) = 0$ o bien $\mu(A \setminus E) = 0$; pero si $\mu(A \setminus E) = 0$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu((E) \cup (A \setminus E)) \\ &= \mu(E) + \mu(A \setminus E) \\ &= \mu(E) \end{aligned}$$

esto muestra que A es un átomo para μ. □

De ahora en adelante, si A es un átomo para μ, también se dirá que es un átomo para el espacio de medida (X, Σ, μ). Es importante destacar, que si se cambia la medida μ es posible que el conjunto A deje de ser átomo.

Se ilustra la definición anterior con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.4. Si $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\Sigma = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ y μ la medida de conteo, los conjuntos $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ son átomos de la medida μ; esto se debe a que no existen subconjuntos medibles de $\{1, 2\}$ o $\{3, 4\}$ que tengan medida positiva.

De la misma definición de átomo es posible encontrar átomos con medida no finita. Un ejemplo de ello es el siguiente.

Ejemplo 1.2.5. Se considera el espacio de medida, $(\{1, 2, 3\}, \mathcal{F}, \mu)$ donde la sigma álgebra es $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ y

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E = \emptyset, \\ 1, & E = \{1\}, \\ \infty, & E = \{2, 3\}, \\ \infty, & E = \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Para este caso $\{2, 3\}$ es un átomo y no tiene medida finita.

También es posible que un espacio de medida no posea átomos, tal y como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.6. Se considera el espacio de medida σ-finito, $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$, el espacio de medida de Lebesgue. Este espacio no posee átomos, ya que para cada conjunto medible F de medida positiva es posible encontrar un subconjunto de medida positiva con medida menor que $m(F)$.

El ejemplo anterior dice que es necesario una clasificación de los espacios de medidas según si tienen o no átomos. En tal sentido, se tiene la siguiente definición:

Definición 1.2.7. Un espacio de medida (X, Σ, μ) se dice *atómico* si para todo conjunto medible de medida positiva, éste contiene un átomo. Un conjunto $F \in \Sigma$ se dice *no atómico* si tiene medida positiva y no contiene ningún subconjunto $A \in \Sigma$ que sea un átomo para μ. En el caso que X sea no atómico, se dice que el espacio es no atómico.

Se ilustra esta definición con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.8. Se considera un conjunto X no vacío, el espacio de medida, $(\mathbb{X}, \wp(X), \#)$, donde $\#$ es la medida de conteo. En este caso, los unitarios son los átomos y claramente todo conjunto medible de medida positiva tiene como subconjunto al menos un conjunto unitario. Luego, este espacio es atómico. Mientras que el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$ de los conjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{R}$ con la medida exterior de Lebesgue es no atómico.

Como propiedad importante, se tiene que los átomos no distinguen conjuntos de medida cero; más precisamente, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.2.9. *Sean A un átomo para μ y E un conjunto medible de medida cero, entonces el conjunto $A \cup E$ también es un átomo para μ.*

Demostración. Sean A un átomo para μ y E conjunto de medida cero; se va a verificar que el conjunto medible $A \cup E$ cumple con las dos propiedades de la Definición 1.2.1. En efecto, ya que $A \subset A \cup E$, se tiene que $\mu(A) \leq \mu(A \cup E)$, en virtud de la monotonía, y de aquí que $\mu(A \cup E) > 0$. También, como $\mu(E) = 0$, se puede escribir

$$\mu(A) = \mu(A) + \mu(E) \geq \mu(A \cup E),$$

y de aquí se obtiene que $\mu(A \cup E) = \mu(A)$.

Para verificar la segunda condición de la Definición 1.2.1, se considera un conjunto medible F tal que $F \subseteq A \cup E$, entonces $F = (F \cap A) \cup (F \cap E)$ y como E es un conjunto de medida cero, de igual manera el conjunto $F \cap E$ será de medida cero, ya que $F \cap E \subseteq E$. Además, de la subaditividad de μ, se tiene

$$\mu(F) \leq \mu(F \cap A) + \mu(F \cap E) = \mu(F \cap A),$$

y como también se tiene que $F \cap A \subseteq F$, entonces por la monotonía de la medida, se obtiene $\mu(F \cap A) \leq \mu(F)$, con lo cual $\mu(F) = \mu(A \cap F)$. Por otra parte, como $A \cap F \subseteq A$ y A es un átomo, se debe cumplir que $\mu(A \cap F) = 0$ o $\mu(A \setminus F) = 0$.

Si $\mu(A \cap F) = 0$, entonces $\mu(F) = 0$.
En el segundo caso, si $\mu(A \setminus F) = 0$, entonces

$$\mu(A) = \mu(A \cap F) + \mu(A \setminus F) = \mu(A \cap F)$$

de esta última relación, teniendo en cuenta que $\mu(F) = \mu(A \cap F) = \mu(A) = \mu(A \cup E)$, se determina que $\mu(F) = \mu(A)$. Finalmente se concluye que $\mu(F) = 0$ o bien $\mu(F) = \mu(A \cup E)$, es decir $A \cup E$ es un átomo. □

Comentario 1.2.10. Bajo las condiciones de la proposición anterior, $A \setminus E$ también es un átomo, esto se debe a que $A \setminus E \subseteq A$ con lo cual $\mu(A \setminus E) = \mu(A) - \mu(E) = \mu(A)$ y para todo $F \subseteq A \setminus F$ medible F también es subconjunto medible de A, y por tanto $\mu(F) = 0$ o bien $\mu(F) = \mu(A) = \mu(A \setminus E)$.

La unión de dos átomos no necesariamente es un átomo; retomando el Ejemplo 1.2.8, si X contiene al menos dos elementos x_1, x_2, entonces los átomos $\{x_1\}, \{x_2\}$ son disjuntos, sin embargo, su unión $\{x_1, x_2\}$ contiene subconjunto propios de medida positiva, los cuales son los dos átomos $\{x_1\}$ y $\{x_2\}$.

Otra propiedad que se puede destacar de los átomos tiene que ver con la medida de sus intersecciones.

Proposición 1.2.11. *Sean A, B átomos de μ. Si $\mu(A) \neq \mu(B)$, entonces $\mu(A \cap B) = 0$.*

Demostración. Se supone que $\mu(A \cap B) \neq 0$, de esta forma

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B),$$

y

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$

Ya que A, B son átomos entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(A \setminus B) = 0$, esto quiere decir que

$$\mu(A) = \mu(A \cap B), \quad \mu(B) = \mu(A \cap B),$$

es decir $\mu(A) = \mu(B)$. □

El recíproco del resultado anterior no es cierto; esto queda en evidencia en el Ejemplo 1.2.8. Si X contiene al menos dos elementos x_1, x_2, entonces los átomos $\{x_1\}, \{x_2\}$ son disjuntos, sin embargo, sus medidas son iguales. Todavía más, de la demostración del resultado anterior, se puede ver que si A y B son átomos y $\mu\left(A \cap B\right) > 0$, entonces $A \cap B$ y $\mu(A) = \mu(B) = \mu\left(A \cap B\right)$.

Con la finalidad de particionar la colección de los átomos de un espacio de medida, se ofrece el siguiente resultado.

Proposición 1.2.12. *Sea $\mathscr{A}$ la colección de todos los átomos del espacio de medida (X, Σ, μ) y supongamos que $\mathscr{A} \neq \emptyset$. Para $A, B \in \mathscr{A}$ se define la relación*

$$A \equiv B \iff \mu\,(A \triangle B) = 0,$$

donde $\triangle$ denota la diferencia simétrica de conjuntos. Entonces $\equiv$ define una relación de equivalencia en $\mathscr{A}$.

Demostración. Sean A, B y C átomos de μ. Dado que $\mu(A \triangle A) = \mu(\emptyset) = 0$ entonces $A \equiv A$ y la relación es reflexiva. También es claro que si $A \equiv B$, entonces $\mu(A \triangle B) = 0$ y por la propiedad conmutativa de la diferencia simétrica de conjuntos, se obtiene que $\mu(B \triangle A) = 0$ y con esto, $B \equiv A$ con lo cual la relación es simétrica. Finalmente, si se supone que $A \equiv B$ y $B \equiv C$, entonces el conjunto $A \cap B$ es posible representarlo como se muestra a continuación,

$$A \cap B = (A \cap B \cap C) \cup [(A \cap B) \setminus C].$$

Pero $(A \cap B) \setminus C \subseteq B \setminus C \subset B \triangle C$, con lo cual $\mu([A \cap B] \setminus C) \leq \mu(B \triangle C) = 0$. Como la medida es no negativa, $\mu([A \cap B] \setminus C) = 0$.

$$\mu(A \cap B) = \mu(A \cap B \cap C). \tag{1.2.11}$$

Realizando el mismo razonamiento con el conjunto $B \cap C$, el cual se puede representar por medio de la siguiente expresión

$$B \cap C = (B \cap C \cap A) \cup [(B \cap C) \setminus A],$$

ya que $(B \cap C) \setminus A \subset A \triangle B$, se tiene que $\mu([B \cap C] \setminus A) = 0$ y por esta razón

$$\mu(B \cap C) = \mu(A \cap B \cap C). \tag{1.2.12}$$

Por la relación $\equiv$, se tiene que $\mu(A \triangle B) = 0$ y $\mu(B \triangle C) = 0$, así que los conjuntos medibles $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$ y $C \setminus B$ tienen medida cero, ya que son subconjuntos ya sea de $A \triangle B$ o de $B \triangle C$. Luego, las medidas de los átomos A, B y C se pueden escribir de acuerdo a los conjuntos a los cuales se encuentran relacionados, de hecho, de las ecuaciones (1.2.11) y (1.2.12) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A \cap B \cap C) \\
\mu(B) &= \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cap B \cap C) \\
\mu(C) &= \mu(C \cap B) + \mu(C \setminus B) = \mu(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

Luego, la definición de átomos implica que los conjuntos $A \setminus (A \cap B \cap C)$ y $C \setminus (A \cap B \cap C)$ deben tener medidas cero. Pero $A \setminus C \subseteq A \setminus (A \cap B \cap C)$ y $C \setminus A \subseteq C \setminus (A \cap B \cap C)$, así que se debe tener

$$\mu(A \triangle C) = \mu(A \setminus C) + \mu(C \setminus A) = 0$$

y por tanto, $A \equiv C$. Todo este argumento demuestra que $\equiv$ es una relación de equivalencia en $\mathscr{A}$ $\square$

Comentario 1.2.13. En virtud del resultado anterior, la colección $\mathscr{A} \neq \emptyset$ de los átomos de un espacio de medida (X, Σ, μ) queda particionada, de tal forma que dos átomos A y B de μ o son disjuntos o son iguales μ-c.t.p., es decir, el conjunto donde A y B son distintos tiene medida cero. En particular, se va a demostrar que en el caso que este espacio de medida sea σ-finito se tendrá a lo más un conjunto numerable de átomos; para esto, se requiere el siguiente resultado:

Proposición 1.2.14. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito con descomposición*

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$$

tal que para todo $i \geq 1$, se tiene que $X_i \in \Sigma$ y $\mu(X_i) < \infty$. Además, se supone que al menos un conjunto X_i tiene medida positiva y que $X_i \cap X_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. Si A es un átomo para μ, entonces:

(a) $\mu(A) < \infty$.

(b) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $A \subseteq X_{n_0}$ μ-c.t.p., esto último significa que $\mu(A \setminus X_{n_0}) = 0$.

Demostración. Como la sucesión $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ forma una partición para X y $A \subseteq X$, entonces se tiene que

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X_i \cap A).$$

En particular, para cada $i \in \mathbb{N}$ se satisface que $X_i \cap A$ es un subconjunto medible de A el cual es un átomo, de aquí que $\mu(X_i \cap A) = 0$ o bien $\mu(X_i \cap A) = \mu(A)$. Luego, si fuese cierto que para todo $i \geq 1$ se cumple que $\mu(X_i \cap A) = 0$, entonces de la σ-aditividad de la medida se tendría que

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(X_i \cap A)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X_i \cap A) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción al hecho que $\mu(A) > 0$, ya que A es un átomo. Por tanto, se puede garantizar que existe $k \geq 1$, tal que $\mu(A \cap X_k) > 0$. Entonces, usando nuevamente la definición de átomo, se debe tener que $\mu(X_k \cap A) = \mu(A)$ y por tanto, usando la monotonía de μ y el hecho que $\mu(X_k) < \infty$, se obtiene que

$$\mu(A) = \mu(X_k \cap A) \leq \mu(X_k) < \infty.$$

Esto demuestra el item *(a)*. Todavía más, se tiene que $A = (X_k \cap A) \cup (A \setminus X_k)$, y por esta razón, se puede escribir

$$\mu(A) = \mu(X_k \cap A) + \mu(A \setminus X_k) = \mu(A) + \mu(A \setminus X_k)$$

y como todos los conjuntos involucrados tienen medida finita, se concluye que

$$\mu(A \setminus X_k) = 0$$

y así $A \subseteq X_k$ μ-c.t.p. Esto culmina la demostración de la proposición. $\square$

Comentario 1.2.15. Del Comentario 1.2.10 se concluye que $B = A \cap X_k$ es también un átomo pues éste conjunto es un átomo menos un conjunto de medida cero. Además se tiene que $B \equiv A$. De aquí que en el item *(b)*, se puede tomar un representante de la clase de A que está completamente contenido en X_k.

Por el axioma de elección, se puede formar la colección $\hat{\mathscr{A}} \subseteq \mathscr{A}$ que contiene un único representante de cada clase del conjunto cociente $\mathscr{A}/\equiv$. Por el comentario anterior, ese representante $A \in \hat{\mathscr{A}}$ se puede suponer completamente contenido en algún X_k de la descomposición σ-finita $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$. En particular, si A y B pertenecen a elementos distintos de $\mathscr{A}/\equiv$, entonces estos conjuntos son átomos disjuntos y no están relacionados. Con esta notación se establece en el siguiente resultado.

Teorema 1.2.16. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito con descomposición $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ tal que para todo $i \geq 1$, se tiene que $X_i \in \Sigma$ y $\mu(X_i) < \infty$. Además, se supone que al menos un conjunto X_i tiene medida positiva y que $X_i \cap X_j = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. Entonces, se tienen las siguientes propiedades:*

(a) Para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto X_k contiene a lo más una cantidad numerable de elementos distintos de $\hat{\mathscr{A}}$.

(b) El conjunto $\hat{\mathscr{A}}$ es a lo sumo numerable, es decir, existen a lo más una cantidad numerable de átomos de μ disjuntos dos a dos.

Demostración. Se fija $k \in \mathbb{N}$ y se considera el conjunto

$$J = \left\{ A \in \hat{\mathscr{A}} \mid A \subseteq X_k \right\}.$$

Se debe demostrar que J es a lo sumo numerable. Con este fin, para cada $m \in \mathbb{N}$ se define el conjunto

$$J_m = \left\{ A \in J \mid \mu(A) > \frac{1}{m} \right\}.$$

Entonces como cada átomo tiene medida positiva, se tiene que

$$J = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m.$$

De aquí, es suficiente mostrar que cada J_m es finito para concluir el ítem *(a)*. En efecto, si J_m es infinito, entonces se puede encontrar un sucesión $\{A_j\}$ de átomos disjuntos dos a dos, todos elementos de J_m. Luego, por la σ-aditividad de la medida se obtiene

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m} = +\infty.$$

Por otra parte, cada átomo en J_m es un subconjunto de X_k y por esta razón, también se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \mu\left(X_k\right) < \infty.$$

Por esta contradicción, se debe tener que cada J_m es finito. En consecuencia J es a lo sumo numerable pues es unión numerable de conjuntos finitos y con esto se tiene *(a)*.

Finalmente, cada elemento de $\hat{\mathscr{A}}$ está contenido en algún X_k y por esta razón se tiene que

$$\hat{\mathscr{A}} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{A \in \hat{\mathscr{A}} \mid A \subseteq X_k\right\}$$

y como por *(a)* cada conjunto de la derecha es a lo sumo numerable, se concluye que $\hat{\mathscr{A}}$ también es a lo sumo numerable. Esto culmina la demostración del resultado. $\square$

Cabe aclarar que, en el espacio de medida (X, Σ, μ), la clase de conjuntos $\hat{\mathscr{A}}$ puede tener la particularidad que esté constituida por una cantidad finita de átomos o bien numerable de átomos, tal como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.17. Sean $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$ y $(X, \wp(X), \#)$ con $X = \{a, b, c\}$. Sea $Y = \mathbb{R} \cup X$ la unión disjunta de $\mathbb{R}$ y X, y considere $\mathscr{F} = \mathscr{M} \cup \wp(X)$,

- $\emptyset \in \mathscr{F}$,
- Si $W \in \mathscr{F}$, entonces $W = U \cup V$, con $U \in \mathscr{M}$ y $V \in \wp(X)$, con lo cual

  $$(\mathbb{R} \cup X) \setminus W = (\mathbb{R} \cup X) \setminus (U \cup V) = (\mathbb{R} \setminus U) \cup (X \setminus V)$$

  como $\mathbb{R} \setminus U \in \mathscr{M}$ y $X \setminus V \in \wp(X)$ se concluye que $(\mathbb{R} \cup X) \setminus W \in \mathscr{F}$.
- Si $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$, entonces existen $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$ y $\{V_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \wp(X)$ tales que $W_i = U_i \cup V_i$. Por tanto

  $$\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (U_i \cup V_i)$$

  como U_i, V_j son disjuntos para $i, j \in \mathbb{N}$, entonces

  $$\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right),$$

  pero $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \in \mathscr{M}$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \in \wp(X)$.

De esta manera $\mathscr{F}$, es una σ-álgebra.

Por otro lado, considere

$$\nu(W) = m(W \setminus X) + \#(W \setminus \mathbb{R}).$$

Claramente $\nu(\emptyset) = m(\emptyset) + \#(\emptyset) = 0$. Si $\{W_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{F}$, entonces existen $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{M}$ y $\{V_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \wp(X)$ tales que $W_i = U_i \cup V_i$ para $i \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i\right) &= m\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i\right) \setminus X\right) + \#\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i\right) \setminus \mathbb{R}\right) \\
&= m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) + \#\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} m\left(U_i\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \#\left(V_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(m\left(U_i\right) \cup \#\left(V_i\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \nu\left(W_i\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, $(\mathbb{R} \cup \wp(X), \mathscr{F}, \nu)$ es un espacio de medida, y a su vez la cantidad de átomos es finita, la cual consiste de los conjuntos medibles $\{a\}, \{b\}, \{c\}$.

Como consecuencia del resultado anterior, se puede dar otra descomposición del espacio de medida σ-finito (X, Σ, μ) en términos de los átomos y de un conjunto no atómico.

Teorema 1.2.18. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito, $\hat{\mathscr{A}}$ el conjunto de átomos disjuntos dos a dos definidos después del Comentario 1.2.15 y sea $B \in \Sigma$ definido por*

$$B = X \setminus \left(\bigcup_{A \in \hat{\mathscr{A}}} A\right).$$

Si $\mu(B) > 0$, entonces B es no atómico y además

$$X = B \cup \left(\bigcup_{A \in \hat{\mathscr{A}}} A\right). \tag{1.2.13}$$

Demostración. Supóngase que B contiene un subconjunto $F \in \Sigma$ que es un átomo para μ, es decir, $F \in \mathscr{A}$. Entonces, como $\equiv$ es una relación de equivalencia en $\mathscr{A}$, existe un único $A_0 \in \hat{\mathscr{A}}$ tal que $F \equiv A_0$, con lo cual $\mu\left(F \triangle A_0\right) = 0$. En particular, como $F \setminus A_0 \subseteq F \triangle A_0$, entonces, por la monotonía de la medida, $\mu\left(F \setminus A_0\right) = 0$. Además, por la definición del conjunto B, también se tiene que

$$F \cap A_0 \subseteq B \cap A_0 = \emptyset$$

y por esta razón, se obtiene que

$$\mu(F) = \mu\left(F \setminus A_0\right) + \mu\left(F \cap A_0\right) = 0,$$

contradiciendo el hecho que el conjunto medible F es un átomo. Luego, B no puede contener átomos y la otra parte del resultado sigue de despejar X en la expresión para B. Esto culmina la demostración del teorema. $\square$

Ahora un par de consecuencias de este resultado.

Corolario 1.2.19. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y supongamos que $\mathscr{A} \neq \emptyset$. Si X no contiene conjuntos no atómicos, entonces X es la unión, a lo sumo numerable, de átomos disjuntos dos a dos.*

Demostración. Ya se sabe que en un espacio σ-finito, la cantidad de átomos disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Como en el resultado anterior, sea

$$B = X \setminus \left(\bigcup_{A \in \hat{\mathscr{A}}} A \right).$$

Entonces $B \in \Sigma$ y $\mu(B) = 0$, pues si $\mu(B) > 0$ entonces, por el teorema anterior, B sería no atómico. Luego, como la unión de un átomo con un conjunto de medida cero es también un átomo, si distinguimos un elemento $A_0 \in \hat{\mathscr{A}}$, se tiene que $C_0 = A_0 \cup B \in \mathscr{A}$ y es un elemento de la clase de A_0, con lo cual será disjunto con los otros elementos de $\hat{\mathscr{A}}$. En conclusión

$$X = B \cup \left(\bigcup_{A \in \hat{\mathscr{A}}} A \right) = (B \cup A_0) \cup \left(\bigcup_{A \in \hat{\mathscr{A}} \setminus \{A_0\}} A \right) = C_0 \cup \left(\bigcup_{A \in \hat{\mathscr{A}} \setminus \{A_0\}} A \right)$$

que era lo que se quería demostrar. □

Finalmente, se escribe la descomposición atómica - no atómica tal y como aparece en la literatura. Más precisamente, se tiene el siguiente teorema el cual será la base de los resultados que se han obtenidos en este trabajo de grado.

Teorema 1.2.20. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito el cual contiene un conjunto no atómico y tal que $\hat{\mathscr{A}} = \{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, es decir, $\hat{\mathscr{A}}$ tiene una cantidad infinita numerable de átomos disjuntos dos a dos. Entonces existe un conjunto no atómico B tal que*

$$X = B \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right).$$

Demostración. Se supone que $F \in \Sigma$ es un conjunto no atómico para μ y, como antes, se considera el conjunto

$$B = X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right).$$

Se debe ver que $\mu(B) > 0$ y el resultado seguirá como consecuencia del Teorema 1.2.18. En efecto, si $\mu(B) = 0$, entonces por el Corolario 1.2.19, X es la unión numerable y disjunta de átomos. En este caso, se puede escribir

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k,$$

donde $C_1 = A_1 \cup B$ y $C_k = A_k$ para $k \geq 2$. De aquí que, como $F \subseteq X$, se puede escribir

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} (C_k \cap F).$$

En particular, debe existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(C_{k_0} \cap F) > 0$ pues, en otro caso, se tendría que $\mu(F) = 0$ y esto sería una contradicción al hecho que F es un conjunto no atómico. Pero por otro lado, también se tiene que $C_{k_0} \cap F$ es un subconjunto del átomo C_{k_0} y como $\mu(C_{k_0} \cap F) > 0$, entonces la definición de átomo implica que

$$\mu(C_{k_0} \cap F) = \mu(C_{k_0}).$$

Luego, como la medida del átomo C_{k_0} es finita, se deduce que $\mu(C_{k_0} \setminus F) = 0$ con lo cual

$$C_{k_0} \cap F = C_{k_0} \setminus (C_{k_0} \setminus F)$$

se escribe como la diferencia de un átomo menos un conjunto de medida cero; así que por el Comentario 1.2.10 se concluye que $C_{k_0} \cap F$ es un átomo el cual está contenido en F. Esto es una contradicción al hecho que F es un conjunto no atómico y por tanto se debe tener que $\mu(B) > 0$. El resultado ahora sigue por el Teorema 1.2.18. $\square$

Ejemplo 1.2.21. Teniendo en cuenta el espacio de medida definido en el Ejemplo 1.2.17 que se obtiene a través de los espacio de medida $((0,1), \mathscr{M}, m)$ y $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}), \#)$, se tiene una cantidad numerable de átomos que son los unitarios $\{n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ y un conjunto no atómico $B = (0,1)$.

Se finaliza esta sección con algunas propiedades importantes de los conjuntos no atómicos.

Proposición 1.2.22. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $F \in \Sigma$ un conjunto no atómico de μ. Entonces*

(a) Cada subconjunto medible E de F con medida positiva es también no atómico.

(b) F es la unión disjunta de dos conjuntos no atómicos.

(c) Si $\mu(F) < \infty$, entonces existe un conjunto no atómico $G_1 \subseteq F$ tal que

$$\mu(G_1) \leq \frac{1}{2}\mu(F).$$

(d) Si $\mu(F) < \infty$, entonces existe un conjunto no atómico $G_2 \subseteq F$ tal que

$$\mu(G_2) \geq \frac{1}{2}\mu(F).$$

Demostración. El ítem *(a)* es consecuencia inmediata de la Definición 1.2.7. En efecto, si E contiene algún átomo A de μ, entonces ese átomo también estaría incluido en el conjunto F y por tanto no sería no atómico.

De la definición de conjunto no atómico, se tiene que el mismo conjunto F no es un átomo; por tal motivo, la Proposición 1.2.3 implica que existe un conjunto medible E tal que $\mu\left(F\cap E\right)>0$ y $\mu\left(F\setminus E\right)>0$. De aquí que, por la parte *(a)*, el conjunto F es la unión de conjuntos no atómicos que son $F\cap E$ y $F\setminus E$. Esto demuestra el ítem *(b)*.

Finalmente, del ítem *(b)*, se tiene que F es unión disjunta de dos conjuntos no atómicos. De hecho,

$$\mu(F)=\mu\left(F\cap E\right)+\mu\left(F\setminus E\right),$$

luego, como $\mu(F)<\infty$, entonces

- $\mu\left(F\cap E\right)<\dfrac{1}{2}\mu(F)$,
- o bien $\mu\left(F\cap E\right)\geq\dfrac{1}{2}\mu(F)$.

En el primer caso, la propiedad *(c)* es valida con $G_1=F\cap E$ y *(d)* vale con $G_2=F\setminus E$; mientras que en el segundo caso, *(c)* es valido con $G_1=F\setminus E$ y *(*d) vale con $G_2=F\cap E$. Esto demuestra la proposición. □

Como una consecuencia importante de la proposición anterior se tiene el siguiente resultado el cual será fundamental para demostrar el teorema que se ha encontrado en esta investigación.

Teorema 1.2.23. *Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida σ-finito y supongamos que éste espacio tiene un conjunto no atómico. Entonces existe una sucesión $\{C_n\}$ de conjuntos no atómicos tales que*

(1) $\mu\left(C_1\right)<\infty$,

(2) $C_{n+1}\subseteq C_n$ *para cada* $n\in\mathbb{N}$,

(3) $0<\mu\left(C_{n+1}\right)\leq\dfrac{1}{2}\mu\left(C_n\right)$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\mu\left(C_n\right)=0$.

Demostración. Como el espacio (X,Σ,μ) es σ-finito, existe una sucesión $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles disjuntos dos a dos tales que $\mu\left(X_k\right)<\infty$ para todo $k\in\mathbb{N}$ y

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k.$$

Por hipótesis, existe un conjunto medible F que es no atómico para μ. En particular, $\mu(F) > 0$ y por esta razón debe existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \mu\left(F \cap X_{k_0}\right) < \infty.$$

Entonces, por la parte *(a)* de la Proposición 1.2.22, el conjunto $C_1 = F \cap X_{k_0}$ es no atómico y satisface *(1)*. De aquí que la parte *(c)* de la Proposición 1.2.22 implica la existencia de un conjunto no atómico $C_2 \subseteq C_1$ tal que

$$\mu\left(C_2\right) \leq \frac{1}{2}\mu\left(C_1\right).$$

Luego, aplicando de manera recursiva esta misma propiedad, se obtiene la sucesión $\{C_n\}$ de conjuntos no atómicos tales que se satisfacen las propiedades *(2)* y *(3)*. Además, por construcción, también se tiene que

$$\mu\left(C_n\right) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\mu\left(C_1\right)$$

y con esto se obtiene la propiedad (4). Esto demuestra el resultado. □

Un ejemplo que ilustra perfectamente el teorema anterior, es el método de la bisección o también el método de encajes de Cantor.

Ejemplo 1.2.24. En el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$, es posible considerar los intervalos $\{(n, n+1]\}_{n=1}^{\infty}$, los cuales da una partición numerable del conjunto $\mathbb{R}$; así que este espacio es σ-finito. Una sucesión que cumple con las propiedades del teorema anterior se puede definir de la siguiente manera: sea $C_1 = (0, 1]$ y para $n \in \mathbb{N}$ se considera

$$C_{n+1} = \left(0, \frac{1}{2^n}\right].$$

De esta manera, $C_{n+1} \subset C_n$, $m(C_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$, $m(C_{n+1}) = \frac{1}{2}m(C_n)$ y también se cumple

$$\lim_{n\to\infty} m(C_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

Esto culmina el ejemplo.

Se finaliza esta sección con el siguiente resultado el cual establece cierta continuidad de la medida en caso de tenerse conjuntos no atómicos, su demostración utiliza el Lema de Zorn y debido a que este hecho no será usado en las demostraciones de nuestros resultados, solamente se incluye su enunciado y la referencia por completitud..

Teorema 1.2.25. [1, Corolario 1.12.10., p. 56] *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y suponga que E es un conjunto no atómico de μ. Entonces, para todo numero real r con $0 < r < \mu(E)$, existe un subconjunto medible E_r de E tal que $\mu\left(E_r\right) = r$.*

1.3. Espacios $L^p(X, \Sigma, \mu)$

Los resultados que se han obtenido en esta investigación tratan sobre las propiedades del operador multiplicación actuando sobre los espacios $L^p(X, \Sigma, \mu)$. Por esta razón, en esta sección se presentan las definiciones y principales resultados referentes a estos espacios que serán de gran utilidad para los capítulos siguientes. En esta sección, (X, Σ, μ) denota un espacio de medida σ-finito, el espacio de todas las clases de equivalencia de funciones medibles sobre X se denota por $L_0(X)$, donde la relación de equivalencia esta definida como la igualdad de funciones μ-c.t.p. sobre X.

1.3.1. Funciones esencialmente acotadas

Definición 1.3.1. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y f una función medible. Para cada $M > 0$, se define $E_M = \{x \in X \mid |f(x)| > M\}$, que es medible. El conjunto

$$A = \{M > 0 \mid \mu(E_M) = 0\} = \{M > 0 \mid |f(x)| \leq M \ \mu\text{−c.t.p.}\}$$

El supremo esencial de f, denotado por $\operatorname{ess\,sup} f$ o $\|f\|_\infty$, está definido por

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} f = \operatorname{ínf}(A),$$

Con la convención $\operatorname{ínf} \emptyset = \infty$.

Definición 1.3.2. Se define $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$, llamado el conjunto de las funciones esencialmente acotadas por

$$L^\infty(X, \Sigma, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ es una función medible y } \|f\|_\infty < \infty\}$$

Ya que la expresión $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ es muy larga, se simplificará como $L^\infty(X)$ para hablar de las funciones esencialmente acotadas. Se menciona además que $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

1.3.2. Espacios de Lebesgue con $p \geq 1$

Definición 1.3.3. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y p un número real positivo. La función medible $f : X \to \mathbb{R}$ se dice que pertenece al espacio pre Lebesgue $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ si

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

esto es,

$$\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu) = \left\{f : X \to \mathbb{R} \text{ es una función medible y } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\right\}.$$

Algunas veces se usara la notación: $\mathcal{L}^p(X)$.

Se define la relación $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ μ-c.t.p sobre los elementos de $\mathcal{L}^p(X)$. $\sim$ es una relación de equivalencia, donde la clase de equivalencia de f es

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(X) \mid g \sim f\}.$$

Debido a que la integral de Lebesgue no distingue conjuntos de medida cero, se define la norma de $[f] \in \mathcal{L}^p(X)/\sim$ como $\|[f]\|_p = \|g\|_p$ para cualquier $g \in [f]$.

Definición 1.3.4. Se define el espacio de Lebesgue $L^p(X) = L^p(X, \Sigma, \mu)$ como el conjunto de clases de equivalencia

$$L^p(X, \Sigma, \mu) = \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)]\},$$

donde $[f]$ es la clase de equivalencia de f.

En la practica, se escribe f en vez de $[f]$ para efectuar los cálculos en $L^p(X)$. También hay que tener presente las siguientes desigualdades.

Teorema 1.3.5 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, $1 \leq p < \infty$ y q el conjugado de p tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, haciendo $q = \infty$ cuando $p = 1$. Si $f \in L^p(X)$ y $g \in L^q(X)$, entonces el producto $f \cdot g$ pertenece a $L^1(X)$ y se cumple*

$$\int_X |f \cdot g| \, d\mu = \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Teorema 1.3.6 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Para $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in L^p(X)$ se cumple*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Definición 1.3.7. Una sucesión $\{f_n\} \in L^p(X)$ se dice que converge a f en $L^p(X)$ si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Esto se puede escribir como, $f_n \to f$ en $L^p(X)$ o $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $L^p(X)$. La sucesión $\{f_n\}$ se dice convergente en medida sobre X a la función f si para cada $\eta > 0$, se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \eta\}\right) = 0.$$

Teorema 1.3.8 (Teorema de Riesz)**.** [11, Teorema 4, p. 100] *Si $f_n \to f$ en medida sobre X, entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge puntualmente c.t.p. sobre X a f.*

Teorema 1.3.9. [6, Teorema 5, p. 123] *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en $L^p(X)$ que converge a f en $L^p(X)$, entonces $\{f_n\}$ converge a f en medida.*

1.4. Descomposición atómica y funciones medibles

Se analizan ahora las propiedades de las funciones en $L^p(X)$ cuando se descompone el espacio en su parte atómica y no atómica.

Proposición 1.4.1. *Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y $f \in L_0(X)$. Si A es un átomo para μ entonces f es constante μ c.t.p. sobre A.*

Demostración. Sea $f \in L_0(X)$ y A un átomo de μ. Se supone primero que

$$\|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f \cdot \mathbf{1}_A| = \infty,$$

entonces para cada $r \geq 0$, el conjunto $F_r = \{x \in A \mid |f(x)| > r\}$ tiene medida positiva. por otro lado $F_r \subseteq A$, de esta manera $\mu(\{x \in A \mid |f(x)| \leq r\}) = 0$ para todo $r \geq 0$ ya que A es átomo, sin embargo,

$$\operatorname{ess\,inf} |f \cdot \mathbf{1}_A| = \sup\{r \geq 0 \mid \mu(\{x \in A \mid |f(x)| < r\}) = 0\} = \infty$$

por lo tanto

$$\infty = \operatorname{ess\,inf} |f \cdot \mathbf{1}_A| \leq \operatorname{ess\,sup} |f \cdot \mathbf{1}_A|$$

con lo cual $\mu(\{x \in A \mid |f(x)| = \infty\}) = \mu(A)$, es decir $|f|$ es constante μ-c.t.p. en A.

Ahora, si $\|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty < \infty$, entonces se tiene

$$\int_A |f| \, d\mu \leq \mu(A) \|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty,$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$G_n = \left\{x \in A \mid |f(x)| > \|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty - \frac{1}{n}\right\}$$

satisface $\mu(G_n) > 0$. Todavía más, para $n > m$ se tiene la propiedad $G_m \subseteq G_n$. Luego, como A es átomo y $G_n \subset A$, se puede escribir

$$\mu(A) = \mu(A \setminus G_n) + \mu(G_n) = \mu(G_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.4.14}$$

y de aquí que $\mu(A \setminus G_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir

$$\mu\left(\left\{x \in A \mid |f(x)| \leq \|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty - \frac{1}{n}\right\}\right) = 0.$$

En particular, esta última igualdad implica $|f| = \|f \cdot \mathbf{1}_A\|$ μ-c.t.p sobre A, pues

$$\{x \in A \mid |f(x)| < \|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \setminus G_n).$$

Además

$$\mu(A)\|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty \geq \int_A |f| \, d\mu = \int_{G_n} |f| \, d\mu.$$

Así que por la definición de G_n se obtiene

$$\int_{G_n} |f|\, d\mu \geq \left(\|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty - \frac{1}{n} \right) \mu(G_n), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

que junto con la relación (1.4.14) da

$$\mu(A)\|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty \geq \int_A |f|\, d\mu \geq \left(\|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty - \frac{1}{n} \right) \mu(A) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

haciendo $n \to \infty$

$$\mu(A)\|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty \geq \int_A |f|\, d\mu \geq \|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty \mu(A)$$

con lo que

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f|\, d\mu = \|f \cdot \mathbf{1}_A\|_\infty = |f| \qquad \mu\text{-c.t.p. sobre } A.$$

Finalmente, si $A = A^- \cup A^+$, con $A^- = \{x \in A \mid f(x) < 0\}$ y $A^+ = \{x \in A \mid f(x) \geq 0\}$, la integral

$$\begin{aligned} \int_A |f|\, d\mu &= \int_A f^+\, d\mu + \int_A f^-\, d\mu \\ &= \int_{A^+} f^+\, d\mu + \int_{A^-} f^-\, d\mu \end{aligned}$$

alguna de las integral de f^+ o f^-, es igual a cero, ya que A es un átomo y por esta razón $\mu(A^+) = 0$ o bien $\mu(A^-) = 0$; de esta manera, f es constante μ-c.t.p. en A. □

El valor de la contante de f en el átomo A se denota por la expresión

$$f(A) := \frac{1}{\mu(A)} \int_A f\, d\mu \tag{1.4.15}$$

Con esta notación, se puede descomponer cualquier función medible como se establece en la siguiente proposición

Proposición 1.4.2. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito con descomposición atómica - no atómica*

$$X = B \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right).$$

Cada función $f \in L_0(X)$ se puede escribir como

$$f = f \cdot \mathbf{1}_B + \sum_{k=1}^{\infty} f(A_k) \cdot \mathbf{1}_{A_k} \qquad \mu - c.t.p.$$

Demostración. En efecto, como los conjuntos en la descomposición atómica - no atómica son disjuntos dos a dos, se puede escribir

$$\begin{aligned} f &= f \cdot \mathbf{1}_X = f \cdot \mathbf{1}_{B \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)} \\ &= f \cdot \mathbf{1}_B + f \cdot \mathbf{1}_{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)} = f \cdot \mathbf{1}_B + \sum_{k=1}^{\infty} f(A_k) \cdot \mathbf{1}_{A_k}, \end{aligned}$$

donde la convergencia claro está es en casi todo X. □

Ahora se aprovecha esta descomposición de las funciones medibles para obtener otras expresiones para la norma que serán más convenientes para establecer los resultados de esta investigación.

Proposición 1.4.3. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito con descomposición atómica - no atómica*

$$X = B \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right).$$

Para cada $f \in L^{\infty}(X)$ se tiene

$$\|f\|_{\infty} = \text{máx} \left\{ \|f \cdot \mathbf{1}_B\|_{\infty}, \sup_{k \in \mathbb{N}} |f(A_k)| \right\}.$$

Demostración. Sea $f \in L^{\infty}(X)$ y $\|f\|_{\infty}$; entonces

$$\mu\left(\{x \in X \mid |f(x)| > \|f\|_{\infty}\}\right) = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

de manera que los subconjuntos $\{x \in A_k \mid |f(x)| > \|f\|_{\infty}\}$, $\{x \in B \mid |f(x)| > \|f\|_{\infty}\}$ y $\{x \in X \mid |f(x)| > \|f\|_{\infty}\}$ tienen medida nula. Por tanto $\|f \cdot \mathbf{1}_B\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$, además $\|f \cdot \mathbf{1}_{A_k}\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$para todo $k \in \mathbb{N}$.
En particular,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|f \cdot \mathbf{1}_{A_k}\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty},$$

y ya que $f \cdot \mathbf{1}_{A_k} = f(A_k) \cdot \mathbf{1}_{A_k}$ se tiene que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|f \cdot \mathbf{1}_{A_k}\|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |f(A_k)| \leq \|f\|_{\infty}.$$

Como consecuencia,

$$\text{máx} \left\{ \|f \cdot \mathbf{1}_B\|_{\infty}, \sup_{k \in \mathbb{N}} |f(A_k)| \right\} \leq \|f\|_{\infty}.$$

Para establecer la otra desigualdad, sea

$$f^* = \|f \cdot \mathbf{1}_B\|_{\infty} \mathbf{1}_B + \sum_{k=1}^{\infty} |f(A_k)| \mathbf{1}_{A_k}$$

de esta manera $|f| \leq f^*$ c.t.p. y por esta razón, también se ve que ,

$$\text{máx} \left\{ \|f \mathbf{1}_B\|_{\infty}, \sup_{k \in \mathbb{N}} |f(A_k)| \right\} \in \{M \geq 0 \mid |f(x)| \leq M \, c.t.p.\},$$

con lo cual

$$\|f\|_{\infty} \leq \text{máx} \left\{ \|f \cdot \mathbf{1}_B\|_{\infty}, \sup_{k \in \mathbb{N}} |f(A_k)| \right\}.$$

Así

$$\|f\|_{\infty} = \text{máx} \left\{ \|f \cdot \mathbf{1}_B\|_{\infty}, \sup_{k \in \mathbb{N}} |f(A_k)| \right\},$$

concluyendo la demostración. $\square$

Proposición 1.4.4. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito con descomposición atómica - no atómica*

$$X = B \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right).$$

Para cada $f \in L^p(X)$ con $1 \leq p < \infty$ se tiene

$$\|f\|_p^p = \int_B |f|^p \, d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} |f(A_k)|^p \mu(A_k).$$

Demostración. Sea $f \in L^p(X)$ con $1 \leq p < \infty$ y

$$X = B \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)$$

la descomposición atómica - no atómica de X. Como los conjuntos en esta descomposición son medibles y disjuntos dos a dos, entonces por el Teorema 1.1.25, se tiene

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \int_B |f|^p \, d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f|^p \, d\mu. \tag{1.4.16}$$

Pero, para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto A_k es un átomo de X y ya se ha visto que f es constante μ c.t.p. en A_k, es decir $f = f(A_k)$ en A_k μ-c.t.p. y de esta manera

$$\int_{A_k} |f|^p \, d\mu = \int_{A_k} |f(A_k)|^p \, d\mu = |f(A_k)|^p \mu(A_k).$$

Finalmente

$$\|f\|_p^p = \int_B |f|^p \, d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f|^p \, d\mu = \int_B |f|^p \, d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} |f(A_k)|^p \mu(A_k).$$

Esto culmina la demostración. □

Como consecuencia inmediata e importante, se tiene.

Corolario 1.4.5. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito con descomposición atómica - no atómica*

$$X = B \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right).$$

Para cada $f \in L^p(X)$ con $1 \leq p < \infty$ se tiene

$$\lim_{k \to \infty} \int_{A_k} |f|^p \, d\mu = \lim_{k \to \infty} |f(A_k)|^p \mu(A_k) = 0.$$

Demostración. En efecto, si $f \in L^p(X)$, entonces la serie en (1.4.16) es convergente; así que por el criterio del término n-ésimo se obtiene

$$\lim_{k \to \infty} \int_{A_k} |f|^p \, d\mu = \lim_{k \to \infty} |f(A_k)|^p \mu(A_k) = 0$$

que era lo que se quería mostrar. □

1.5. Operadores lineales en espacios de Banach

Se finaliza este capítulo mencionando las notaciones, definiciones y resultados de un curso de análisis funcional que se usaron en los siguientes capítulos. Más exactamente, lo referente a operadores lineales y sus propiedades.

Aún cuando en secciones anteriores se ha hablado de espacios de Banach, se recuerda brevemente esta noción. Un espacio vectorial X sobre un campo $\mathbb{K}$ se dice normado si se puede definir una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in X$ y cada $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple que

[N1] $\|x\| \geq 0$, y, $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,

[N2] $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

[N3] $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

El número real no negativo $\|x\|$ se llama la norma de x. Un espacio normado se denota por el par $(X, \|\cdot\|)$. Una sucesión $\{x_n\}$ de vectores en X se dice convergente, si existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$; es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy en X si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N$ implica $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice de Banach (o completo) si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

Se recuerda que si X y Y son espacios normados sobre el campo $\mathbb{K}$, entonces una función $T : X \to Y$ que satisface $T(\alpha x + y) = \alpha Tx + Ty$ para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se llama un operador lineal. Además, si existe una constante positiva c tal que

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

para todo $x \in X$, entonces se dice que este operador es continuo o acotado y en tal caso, el número

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| \leq 1\} \tag{1.5.17}$$

se le llama la norma de T. Otras cantidades equivalentes son:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x \neq 0\right\} \\ &= \text{ínf}\,\{c > 0 \mid \|Tx\| \leq c\|x\| \text{ para todo } x \in X\}\,. \end{aligned}$$

El conjunto de las transformaciones lineales y continuas que aplican el espacio normado X en el espacio normado Y se denota por $\mathscr{B}(X, Y)$ y éste resulta un espacio vectorial normado con la norma de los operadores definido en (1.5.17); de hecho, es conocido que si Y es un espacio de Banch, entonces $\mathscr{B}(X, Y)$ es un espacio de Banach.

A continuación se establece cuando la inversa de un operador continuo es también continuo.

Teorema 1.5.1 (Teorema del operador inverso)**.** [5, p. 91;12.5] *Si X y Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado que es biyectivo, entonces T^{-1} es acotado.*

El rango del operador $T : X \to Y$ se denota por $T(X)$ y su núcleo por *Ker* (T); de manera que $y \in T(X)$ si existe $x \in X$ tal que $y = Tx$; mientras que $x \in X$ pertenece a *Ker* (T) si $Tx = 0$. Se observa que el operador T es inyectivo o $1 - 1$ si y sólo si *Ker* $(T) = \{0\}$. Se dice que el operador $T : X \to Y$ tiene rango cerrado si $\overline{T(X)} = T(X)$. En este trabajo será de interés averiguar cuando cierto operador tiene rango cerrado; por eso, es conveniente tener presente el siguiente resultado:

Teorema 1.5.2. *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. El operador T es $1 - 1$ y tiene rango cerrado si y sólo si existe una constante $\delta > 0$ tal que*

$$\|Tx\| \geq \delta \|x\| \tag{1.5.18}$$

para todo $x \in X$.

Un operador $T : X \to Y$ que satisface la relación (1.5.18) se le suele llamar *acotado inferiormente* ("bounded below") o acotado lejos del cero.

La investigación desarrollada en este trabajo de grado trata sobre un criterio para la compacidad del operador multiplicación actuando sobre espacios $L^p(X)$; por esta razón, es pertinente recordar la definición de operadores compactos y algunas de sus propiedades.

Definición 1.5.3. [8, Definición 8.1-1, p. 405] Sean X y Y espacios normados. Un operador lineal $T : X \to Y$ es llamado compacto si T si para todo subconjunto acotado M de X, la imagen $T(M)$ es un compacto relativo, esto es, la clausura $\overline{T(M)}$ es compacta.

Equivalentemente, se puede decir que el operador continuo $T : X \to Y$ es compacto si para cada sucesión acotada $\{x_n\}$, la sucesión de las imágenes $\{Tx_n\}$ contiene una subsucesión convergente. Todo operador compacto es continuo; claramente el operador nulo siempre es compacto, mientras que el operador identidad $I : X \to X$ será compacto si y sólo si $\dim(X) < \infty$. Este hecho se puede escribir de la siguiente manera:

Teorema 1.5.4. [8, Teorema 2.5-5, p. 80] *Si un espacio normado X tiene la propiedad que la bola cerrada unitaria $M = \{x : \|x\| \leq 1\}$ es compacta, entonces X es de dimensión finita.*

El conjunto de los operadores compactos de X en Y se denota por $\mathscr{B}_0(X, Y)$, y en el caso que $Y = X$, se escribe $\mathscr{B}_0(X) = \mathscr{B}_0(X, X)$. Se tiene que $\mathscr{B}_0(X, Y)$ es un subespacio lineal y cerrado de $\mathscr{B}(X, Y)$; esto último significa que si $\{T_n\} \subseteq \mathscr{B}_0(X, Y)$ y $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ es tal que $\|T_n - T\| \to 0$, entonces $T \in \mathscr{B}_0(X, Y)$.

De hecho, también se tiene la siguiente propiedad

Teorema 1.5.5. [14, Teorema 7.4, p. 298] *Si T es un operador compacto en $\mathscr{B}(X,Y)$ cuyo rango es un subespacio completo de Y, entonces* $\dim T(X) < \infty$.

Y resulta que el espacio de los operadores compactos es un ideal en el sentido de la siguiente proposición.

Proposición 1.5.6. *Sean X, Y y Z espacio de Banach.*

1. *Si $\mathbf{K} \in \mathscr{B}_0(X,Y)$ y $\mathbf{A} \in \mathscr{B}(Y,Z)$, entonces $\mathbf{AK} \in \mathscr{B}_0(X,Z)$.*
2. *Si $\mathbf{K} \in \mathscr{B}_0(X,Y)$ y $\mathbf{A} \in \mathscr{B}(Z,X)$, entonces $\mathbf{KA} \in \mathscr{B}_0(Z,Y)$.*

Entre los operadores compactos destacan aquellos que tiene rango de dimensión finita.

Definición 1.5.7. Sean X, Y espacios de Banach. Un operador $T : X \to Y$ se dice que tiene rango finito si $T(X)$ es de dimensión finita.

El conjunto de todos los operadores de rango finito se denota por $\mathscr{B}_{00}(X,Y)$ y ciertamente $\mathscr{B}_{00}(X,Y) \subseteq \mathscr{B}_0(X,Y)$.

Un caso especial de operadores lineales ocurre cuando el espacio de llegada es el campo $\mathbb{K}$. Los elementos del conjunto $X^* = \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ se llaman funcionales lineales y acotados y X^* se llama el espacio dual de X. Por lo discutido anteriormente, es claro que

Teorema 1.5.8. *Si X es un espacio normado, X^* es un espacio de Banach.*

Con la introducción de este espacio de funcionales se puede definir la convergencia débil de la siguiente forma: Una sucesión $\{x_n\}$ en X se dice que converge débilmente a $x \in X$ si para todo $f \in X^*$ se cumple que $f(x_n) \to f(x)$. En particular, para los espacios $L^p(X)$ se tiene:

Teorema 1.5.9 (Teorema de Representación de Riesz)**.** *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y T un funcional lineal en $L^p(X)$, $(1 \leq p < \infty)$, entonces existe una única función $g \in L^q(X)$ tal que*

$$T(f) = \int_X f g \, d\mu, \qquad \forall\, f \in L^p(X).$$

Además, se cumple

$$\|T\| = \|g\|_q,$$

donde q es el exponente conjugado de p; esto es, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Como consecuencia importante, se tiene el siguiente aserto que será de gran utilidad en la obtención de uno de los resultados principales de esta investigación.

Corolario 1.5.10. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $1 \leq p < \infty$ y $q = p/(p-1)$ con la convención $q = +\infty$ si $p = 1$. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ en $L^p(X)$ converge débilmente a $f \in L^p(X)$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g \, d\mu = \int_X f g \, d\mu$$

para toda $g \in L^q(X)$.

Se finaliza esta sección recordando el concepto de espacio cociente. Si X es un espacio de Banach y Z es un subespacio de X, se define la relación en X

$$x \sim y \iff x - y \in Z.$$

Entonces $\sim$ es de equivalencia en X y el conjunto cociente por esta relación se llama el espacio cociente, el cual se denota por X/Z. Los elementos de este espacio se escriben como $x + Z$ con $x \in X$. En particular, si Z es un subespacio cerrado de X, entonces X/Z es un espacio normado con la relación

$$\|x + Z\| = \text{ínf}\left\{\|x + z\| \mid z \in Z\right\}.$$

Se estará interesado en calcular esta norma en el caso que el espacio de Banach sea $\mathscr{B}(X, Y)$, el subespacio cerrado sea $\mathscr{B}_0(X, Y)$ y el elemento sea un operador multiplicación. En tal caso, se le llamará la norma esencial.

2 Operador Multiplicación actuando entre dos espacios $L^p(X)$

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito, $u \in L_0(X)$, el espacio de las funciones medibles con dominio X, y para $p \geq 1$, sea $L^p(X)$ el espacio de las funciones medibles p-integrables definidos anteriormente. Se define el operador lineal $M_u : L^p(X) \to L_0(X)$ como

$$M_u f(x) := u(x)f(x), \qquad \forall\, x \in X, \forall\, f \in L^p(X).$$

Dicho operador recibe el nombre operador de multiplicación. Cuando el operador de multiplicación tiene como conjunto de llegada $L^q(X)$ donde $q \geq 1$, es decir, $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ se denomina operador de multiplicación de $L^p(X)$ en $L^q(X)$.

En este capítulo se establecerán condiciones para que el operador de multiplicación de $L^p(X)$ en $L^q(X)$ con símbolo u y $p, q \geq 1$ sea continuo (acotado). También se busca determinar la norma del operador, y establecer condiciones para que el operador de multiplicación tenga rango cerrado, haciendo distinción de los valores de $p, q \geq 1$, además se establecerán propiedades del símbolo del operador $u \in L_0(X)$ y de la descomposición del espacio de medida (X, Σ, μ) σ-finito en su parte atómica y no atómica; estudiada en el capítulo anterior (ver Teorema 1.2.20).

2.1. Sobre los multiplicadores de $L^p(X)$

Esta sección está dedicada a caracterizar todas las funciones $u \in L_0(X)$ que definen un operador multiplicación acotado o continuo desde $L^p(X)$ hasta $L^q(X)$, donde $1 \leq p, q \leq \infty$; en otras palabras, se trata de describir el conjunto

$$\mathcal{M}\left(L^p(X), L^q(X)\right) = \{u \in L_0(X) \mid M_u : L^p(X) \to L^q(X) \text{ es continuo }\},$$

el cual se conoce en la literatura como el espacio de los multiplicadores de $L^p(X)$ a $L^q(X)$. Esto se hará en tres casos: $p = q$, $q < p$ y $p < q$, los cuales se distribuyen como subsecciones.

2.1.1. Continuidad, caso $p = q$

Primero se analiza el caso $p = q$; se va a demostrar que

$$\mathcal{M}\left(L^p(X), L^p(X)\right) = L^\infty(X).$$

Este hecho se puede ver en un contexto más general en [13].

Teorema 2.1.1. *Sea $1 \leq p < \infty$. La función $u \in L_0(X)$ define un operador multiplicación acotado M_u de $L^p(X)$ en $L^p(X)$ si y sólo si $u \in L^\infty(X)$. Además, $\|M_u\| = \|u\|_\infty$.*

Demostración. Se supone primero que $1 \leq p < \infty$ y que $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es un operador acotado. Se observa que el resultado es evidente si $\|u\|_\infty = 0$ pues en este caso se tiene el operador nulo, así que se va a suponer que $\|u\|_\infty > 0$. Para toda $f \in L^p(X)$ con $\|f\|_p = 1$, se cumple la siguiente desigualdad

$$\left(\int_X |uf|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \|M_u\|.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el conjunto

$$E_n = \left\{x \in X \mid |u(x)| > \|u\|_\infty - \frac{1}{n}\right\}.$$

Se observa que si $m > n$ entonces $E_m \subseteq E_n$, y la definición de supremo esencial implica que $\mu\left(E_n\right) > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. De esto ultimo, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $\mu(E_k) < \infty$, y se puede considerar la función $f = \mu(E_k)^{-\frac{1}{p}}\mathbf{1}_{E_k}$. Entonces

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu = \int_{E_k} \frac{1}{\mu(E_k)}\mathbf{1}_{E_k} \, d\mu = 1$$

y de esta manera,

$$\begin{aligned}
\|M_u\|^p &\geq \|u \cdot f\|_p^p \\
&= \int_X |uf|^p \, d\mu \\
&\geq \int_{E_k} |uf|^p \, d\mu \\
&= \int_{E_k} |u|^p |f|^p \, d\mu \\
&> \left(\|u\|_\infty - \frac{1}{k}\right)^p \int_{E_k} |f|^p \, d\mu \\
&= \left(\|u\|_\infty - \frac{1}{k}\right)^p.
\end{aligned}$$

Tomando limite cuando $k \to \infty$

$$\|M_u\|^p \geq \lim_{k\to\infty} \left(\|u\|_\infty - \frac{1}{k}\right)^p = \|u\|_\infty^p, \tag{2.1.1}$$

es decir $u \in L^\infty(X)$.

Se procede a demostrar el recíproco. Si $u \in L^\infty(X)$, entonces por propiedad del supremo esencial,

$$|u(x)| \leq \|u\|_\infty \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

Si $f \in L^p(X)$ es cualquier función con $\|f\|_p = 1$, entonces por la monotonía de la integral,

$$\begin{aligned} \int_X |uf|^p \, d\mu &\leq \|u\|_\infty^p \int_X |f|^p \, d\mu \\ &\leq \|u\|_\infty^p \, . \end{aligned}$$

Así $\|M_u f\|_p \leq \|u\|_\infty$ para toda función $f \in L^p(X)$ con $\|f\|_p = 1$; lo cual significa que

$$\|M_u\| = \sup \{\|M_u(f)\|_p \mid f \in L^p(X) \text{ y } \|f\|_p = 1\} \leq \|u\|_\infty \, . \tag{2.1.2}$$

Finalmente, de las relaciones (2.1.1) y (2.1.2) se concluye que

$$\|M_u\| = \|u\|_\infty,$$

lo cual demuestra el teorema. □

El resultado anterior provee una herramienta para construir operadores acotados y no acotados en $L^p(X)$. El hecho que $u \in L^\infty(X)$ es esencial; esto se puede evidenciar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.2. Sea $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$ el espacio de medida σ-finito y considere el operador de multiplicación M_u con símbolo $u(x) = x^2$ actuando en $L^1(\mathbb{R})$. Es claro que $\|u\|_\infty = \infty$. Además, si $f(x) = x^{-2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{a \to \infty} -\frac{1}{x}\bigg|_1^a = 1,$$

es decir, $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\|f\|_1 = 1$. Por otro lado $M_u \, f \notin L^1(X)$ pues,

$$\|M_u f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |u(x)f(x)| \, dx = \int_1^\infty x^2 \frac{1}{x^2} \, dx = \int_1^\infty 1 \, dx = \infty.$$

Como es bien sabido,

$$\|M_u\| = \sup \{\|M_u \, f\|_1 \mid \|f\|_1 = 1\}$$

por tanto $\|M_u\| = \infty$, es decir, el operador de multiplicación M_u, en este caso, no es acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en sí mismo.

El siguiente ejemplo muestra la importancia del teorema anterior, exhibiendo un operador acotado y calculando la norma de éste.

Ejemplo 2.1.3. Con las mismas condiciones del ejemplo previo, se considera el operador de multiplicación M_u con símbolo $u(x) = (1 + x^2)^{-1}$ actuando en $L^1(\mathbb{R})$. Por el teorema anterior y dado que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| = 1,$$

se concluye que la norma del operador es $\|u\|_\infty = \|M_u\| = 1$, es decir, es un operador acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en si mismo.

Como aporte adicional se enuncia y demuestra un caso no considerado en el Teorema 2.1.1, es decir $p = q = \infty$.

Proposición 2.1.4. *La función $u \in L_0(X)$ define un operador multiplicación acotado M_u de $L^\infty(X)$ en $L^\infty(X)$ si y sólo si $u \in L^\infty(X)$. Además, $\|M_u\| = \|u\|_\infty$.*

Demostración. Sean $u, f \in L^\infty(X)$ con $\|f\|_\infty = 1$ y $\|u\|_\infty > 0$. Por propiedades del supremo esencial,

$$\|u \cdot f\|_\infty \leq \|u\|_\infty \|f\|_\infty = \|u\|_\infty$$

de esta manera,

$$\|M_u f\| = \sup \{\|u \cdot\ f\|_\infty \mid \|f\|_\infty = 1\} \leq \|u\|_\infty.$$

Por otro lado, suponga que M_u es un operador acotado; para todo $f \in\ L^\infty(x)$ con $\|f\|_\infty = 1$, se satisface la siguiente desigualdad

$$\|u \cdot f\|_\infty \leq \|M_u\|$$

sin embargo, $\mathbf{1}_X \in L^\infty(X)$ y además $\|\mathbf{1}_X\|_\infty = 1$, entonces

$$\|u \cdot \mathbf{1}_X\|_\infty = \|u\|_\infty \leq \|M_u\|$$

Esto muestra la veracidad del primer caso. Además, la norma del operador de multiplicación $M_u : L^\infty(X) \to\ L^\infty(X)$ está dado por $\|M_u\| = \|u\|_\infty$. □

2.1.2. Continuidad, caso $p > q$

Ahora se analiza el caso cuando el exponente del espacio de llegada es menor que el exponente del espacio de partida. Se va a demostrar que

$$\mathcal{M}\left(L^p(X), L^q(X)\right) = L^r(X),$$

donde p, q y r son números mayores o iguales a 1 y satisfacen la relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}.$$

El resultado que aquí se presenta se debe a Takagi y Yokouchi [13].

Teorema 2.1.5. *Sean $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq q < p < \infty$. La función $u \in L_0(X)$ induce un operador multiplicación M_u de $L^p(X)$ en $L^q(X)$ si y sólo si $u \in L^r(X)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$. Además, en este caso, M_u es un operador acotado de $L^p(X)$ a $L^q(X)$ y si norma está dada por $\|M_u\| = \|u\|_r$.*

Demostración. Se supone que $1 \leq q < p < \infty$ y que $r \in \mathbb{R}$ satisface

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}.$$

Se supone ahora que $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ es un operador lineal acotado y sean $p', q', r' >$ 1, tales que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}. \tag{2.1.3}$$

Se considera el funcional lineal ϕ en $L^{r'}(X)$ definido por la función $u \in L_0(X)$, donde $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Entonces

$$\phi(f) = \int_X uf\, d\mu, \tag{2.1.4}$$

para cada $f \in L^{r'}(X)$. Se va a demostrar que este funcional es continuo o acotado. Con este fin, para cada $f \in L^{r'}(X)$, posible definir las funciones

$$f_1(x) = \begin{cases} |f(x)|^{\frac{r'}{p}}, & \text{si} \quad f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{e.o.c,} \end{cases} \quad , \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{f_1(x)}, & \text{si} \quad f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

De esta manera, la definición de f_2 dice que f admite la factorización $f = f_1 \cdot f_2$. Se va a establecer que $f_1 \in L^p(X)$ y que $f_2(X) \in L^{q'}(X)$. En efecto, se tiene las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \|f_1\|_p^p &= \int_X |f_1|^p\, d\mu \\ &= \int_X \left| |f|^{\frac{r'}{p}} \right|^p d\mu \\ &= \int_X |f|^{r'}\, d\mu \\ &= \|f\|_{r'}^{r'} < \infty \end{aligned}$$

pues $f \in L^{r'}(X)$; mientras que

$$\begin{aligned} \|f_2\|_{q'}^{q'} &= \int_X |f_2|^{q'}\, d\mu \\ &= \int_X \left| \frac{f}{f_1} \right|^{q'} d\mu \\ &= \int_X \left| \frac{f}{|f|^{\frac{r}{p}}} \right|^{q'} d\mu \\ &= \int_X |f|^{q'(1-\frac{r'}{p})} d\mu; \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

pero de las expresiones (2.1.3)

$$\frac{r'}{p} + \frac{r'}{r} = \frac{r'}{q}, \qquad 1 + \frac{r'}{r} = r'$$

se obtiene, restando las dos expresiones, que

$$\begin{aligned} 1-\frac{r'}{p} &= r'-\frac{r'}{q} \\ &= r'\left(1-\frac{1}{q}\right) \\ &= \frac{r'}{q'}. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Luego, sustituyendo la expresión (2.1.6) en (2.1.5), se puede ver que

$$\begin{aligned} \|f_2\|_{q'}^{q'} &= \int_X |f|^{q'(1-\frac{r'}{p})} d\mu \\ &= \int_X |f|^{q'(\frac{r'}{q'})} d\mu \\ &= \int_X |f|^{r'} d\mu \\ &= \|f\|_{r'}^{r'} \end{aligned}$$

con lo cual $f_2 \in L^{q'}(X)$ pues $f \in L^{r'}(X)$. Todavía más, también se ha establecido que $\|f\|_{r'}^{r'} = \|f_2\|_{q'}^{q'} = \|f_1\|_p^p$. Ahora, con la factorización $f = f_1 \cdot f_2$, se puede escribir

$$\begin{aligned} |\phi(f)| &= \left|\int_X uf d\mu\right| \\ &= \left|\int_X uf_1 \cdot f_2 d\mu\right| \\ &= \left|\int_X (M_u f_1) f_2 d\mu\right|; \end{aligned}$$

y como $f_1 \in L^p(X)$ y M_u aplica $L^p(X)$ en $L^q(X)$, se tiene que $M_u(f_1) \in L^q(X)$ y dado que $f_2 \in L^{q'}(X)$, por la desigualdad de Hölder, se obtiene

$$\begin{aligned} |\phi(f)| &\leq \left(\int_X |M_u f_1|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |f_2|^{q'} \, d\mu\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &= \|M_u (f_1)\|_q \|f_2\|_{q'} \\ &\leq \|M_u\| \|f_1\|_p \|f_2\|_{q'} \\ &= \|M_u\| \|f\|_{r'}^{\frac{r'}{p}} \|f\|_{r'}^{\frac{r'}{q'}} \\ &= \|M_u\| \|f\|_{r'}^{\frac{r'}{p}+\frac{r'}{q'}}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la relación (2.1.6) se puede escribir

$$\begin{aligned} |\phi(f)| &\leq \|M_u\| \|f\|_{r'}^{\frac{r'}{p}+\frac{r'}{q'}} \\ &= \|M_u\| \|f\|_{r'}^{\frac{r'}{p}+1-\frac{r'}{p}} \\ &= \|M_u\| \|f\|_{r'}. \end{aligned}$$

Esto muestra que el funcional ϕ es acotado en $L^{r'}(X)$ y que $\|\phi\| \leq \|M_u\|$; pero por el teorema de representación de Riesz, ϕ es acotado en $L^{r'}(X)$ si y sólo si existe $v \in L^r(X)$, tal que

$$\phi(f) = \int vf d\mu, \tag{2.1.7}$$

para todo $f \in L^{r'}(X)$. Así que de las expresiones (2.1.7) y (2.1.4) se concluye que $v = u$, μ-c.t.p. y por tanto $u \in L^r(X)$, teniéndose además que $\|M_u\| \geq \|\phi\| = \|u\|_r$. Esto demuestra la primera implicación.

Ahora se va a demostrar el recíproco. Se supone que $u \in L^r(X)$; se va a demostrar que M_u aplica $L^p(X)$ en $L^q(X)$ de manera continua. Entonces para cada función $f \in L^p(X)$, se puede escribir

$$\|M_u(f)\|_q^q = \int |uf|^q \, d\mu = \int |u|^q \, |f|^q \; d\mu.$$

Ahora bien, como $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$, entonces $\frac{q}{p} + \frac{q}{r} = 1$ y por lo tanto $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{q}$ son números conjugados. Más aún, como la función $u \in L^r(X)$ y $f \in L^p(X)$, entonces $|u|^q \in L^{\frac{r}{q}}(X)$ y $|f|^q \in L^{\frac{p}{q}}(X)$. Así que por la desigualdad de Hölder, se puede escribir

$$\begin{aligned} \|M_u(f)\|_q^q &\leq \left(\int (|u|^q)^{\frac{r}{q}} \; d\mu\right)^{\frac{q}{r}} \left(\int (|f|^q)^{\frac{p}{q}} \; d\mu\right)^{\frac{q}{p}} \\ &= \|u\|_r^q \; \|f\|_p^q < \infty, \end{aligned}$$

con lo cual $\|M_u(f)\|_q \leq \|u\|_r \; \|f\|_p$, $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ es continua y es tal que $\|M_u\| \leq \|u\|_r$. Esto culmina la demostración del teorema. $\square$

Como antes, el teorema anterior provee una herramienta para construir operadores acotados y no acotados desde $L^p(X)$ a $L^q(X)$ cuando $q < p$; a continuación se presentan ejemplos en los cuales se evidencia la importancia de dicho teorema y sus condiciones.

Ejemplo 2.1.6. Considérese $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ el espacio de medida σ-finito con

$$\mu(E) = m(E) + \#(E \cap \mathbb{N}),$$

formada por la medida Lebesgue de $\mathbb{R}$ y la medida de conteo para $\mathbb{N}$. Se considera el operador de multiplicación M_u con símbolo $u(x) = x^2$ actuando en $L^{\frac{7}{2}}(\mathbb{R})$. Por el teorema anterior, ya que $p = \frac{7}{2}$ y considerando $q = \frac{3}{2}$ el valor de r se puede determinar por la ecuación:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{8}{21} = \frac{1}{\frac{21}{8}},$$

de esta manera $r = \frac{21}{8} > 1$

$$\|u\|_{\frac{21}{8}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |x^2|^{\frac{21}{8}} \, d\mu\right)^{\frac{8}{21}} = \infty,$$

es decir $u \notin L^r(X)$ y el operador $M_u : L^{\frac{7}{2}}(\mathbb{R}) \to L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R})$ no es acotado; de hecho, si se considera la función $f(x) = x^{-2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$, entonces $f \in L^{\frac{7}{2}}(\mathbb{R})$; así que normalizando y definiendo $f_1(x) = \|f\|_{\frac{7}{2}}^{-1} f(x)$ se tiene $\|f_1\|_{\frac{7}{2}} = 1$ y de esta manera,

$$\|M_u f_1\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |x^2 \|f\|_{\frac{7}{2}}^{-1} x^{-2} \mathbf{1}_{[1,\infty)}|^{\frac{3}{2}} \, d\mu \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\int_1^{\infty} \|f\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{3}{2}} \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \|f\|_{\frac{7}{2}}^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = \infty$$

lo cual ciertamente dice que con este símbolo el operador M_u de $L^{\frac{7}{2}}(\mathbb{R})$ en $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R})$ no es acotado.

Ejemplo 2.1.7. Considérese $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ el espacio de medida definido en el ejemplo anterior y el operador de multiplicación M_u con símbolo $u(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$ actuando en $L^{\frac{7}{3}}(\mathbb{R})$. Por el teorema anterior, para $q = \frac{6}{5}$, este operador multiplicación es continuo en $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R})$ si $u \in L^r(\mathbb{R})$, donde el valor de r esta dado por

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{6}{5}} - \frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{5}{6} - \frac{3}{7} = \frac{17}{42} = \frac{1}{\frac{42}{17}}.$$

esto es, $r = \frac{42}{17} > 1$. En efecto, en este caso

$$\begin{aligned} \|u\|_{\frac{42}{17}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |e^{-x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)|^{\frac{42}{17}} \, d\mu \right)^{\frac{17}{42}} \\ &= \left(\int_1^{\infty} e^{-\frac{42}{7}x} \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{42}{7}k} \right)^{\frac{17}{42}} = \left(\frac{17}{42} + \frac{1}{e^{\frac{42}{17}} - 1} \right)^{\frac{17}{42}}. \end{aligned}$$

Esto muestra que $u \in L^{\frac{42}{17}}(\mathbb{R})$ y el operador $M_u : L^{\frac{7}{3}}(\mathbb{R}) \to L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R})$ es un operador de multiplicación con norma dada por $\|M_u\| = \|u\|_{\frac{42}{17}}$.

El Teorema 2.1.5 deja en claro que el valor de p debe ser finito y mayor que uno, sin embargo, el resultado también se puede demostrar cuando el valor de $p = \infty$, el cual se presenta a continuación. Este caso no es considerado por Takagi y Yokouchi en [13].

Proposición 2.1.8. *Sea $1 \leq q < \infty$ y $u \in L_0(X)$, la función u induce un operador de multiplicación M_u de $L^{\infty}(X)$ en $L^q(X)$ si y sólo si $u \in L^q(X)$, además es continuo y $\|M_u\| = \|u\|_q$.*

Demostración. Se supone primero que $u \in L^q(X)$ y sea $f \in L^{\infty}(X)$ con $\|f\|_{\infty} = 1$. De esta manera

$$\|M_u f\|_q^q = \int_X |u \cdot f|^q \, d\mu \leq \|f\|_{\infty}^q \int_X |u|^q \, d\mu = \|u\|_q^q < \infty$$

por tanto, $M_u f \in L^q(X)$, así que es un operador multiplicación de $L^{\infty}(X)$ en $L^q(X)$,

$$\|M_u\| = \sup \{\|M_u f\|_q \mid \|f\|_{\infty} = 1\} \leq \|u\|_q$$

es decir M_u es un operador acotado de $L^{\infty}(X)$ en $L^q(X)$.

Por otro lado, si se supone que $M_u : L^\infty(X) \to L^q(X)$ es un operador de multiplicación acotado, entonces para toda $f \in L^\infty(X)$ tal que $\|f\|_\infty = 1$ se cumple

$$\|M_u f\|_q \leq \|M_u\|.$$

En particular, $\mathbf{1}_X \in L^\infty(X)$ y $\|\mathbf{1}_X\|_\infty = 1$ por lo cual

$$\int_X |u|^q \, d\mu = \int_X |M_u \mathbf{1}_X|^q \, d\mu = \|M_u \mathbf{1}_X\|_q^q \leq \|M_u\|^q$$

esto muestra que $u \in L^q(x)$ y además $\|M_u\| = \|u\|_q$. Esto culmina la demostración del resultado. $\square$

Ejemplo 2.1.9. Considérese $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ el espacio de medida σ-finito con

$$\mu(E) = m(E) + \#(E \cap \mathbb{N})$$

formada por la medida Lebesgue de $\mathbb{R}$ y la medida de conteo para $\mathbb{N}$. Se considera el operador de multiplicación M_u con símbolo $u(x) = x^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ actuando en $L^\infty(\mathbb{R})$ y $q > 1$. La función constante $f(x) = 1$ satisface $\|f\|_\infty = 1$, sin embargo,

$$\|M_u f\|_q^q \, d\mu = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left|\frac{1}{x}\right|^q \, dx = \infty.$$

De igual manera la condición $u \in L^q(X)$ es necesaria y suficiente para que el operador multiplicación sea continuo.

Cambiando el símbolo por $u(x) = x^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)}$ y usando el resultado previo para $q > 1$, se concluye que el operador M_u es continuo y la norma del operado esta dado por

$$\|M_u\| = \|u\|_q = \left(\frac{2}{q-1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2.1.3. Continuidad, caso $p < q$

Ahora se analiza el caso cuando el exponente del espacio de llegada es mayor que el exponente del espacio de partida. En este caso, el resultado que se obtiene también se debe a Takagi y Yokouchi [13] y se escribe en término de la descomposición atómica - no atómica (véase Teorema 1.2.20). Se recuerda que para el espacio (X, Σ, μ) con descomposición atómica - no atómica

$$X = B \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right), \tag{2.1.8}$$

En primer lugar, se establece el siguiente lema que será de gran ayuda en la demostración del teorema principal de esta subsección.

Lema 2.1.10. *Sean $1 \leq p < q < \infty$ y $E \in \Sigma$ no atómico. Entonces existe una función $f_0 \in L^p(X)$ tal que*

$$\int_E |f_0|^q \, d\mu = \infty.$$

Demostración. Sea a un número real, tal que $0 < a < \mu(E)$. Como E es no atómico, entonces de la Proposición 1.2.25, existe $E_1 \in \Sigma$ tal que $\mu(E_1) = \frac{a}{2}$, y de esta manera tomando ahora $E \setminus E_1$, que también es no atómico, existe $E_2 \in \Sigma$ tal que $\mu(E_2) = \frac{a}{2^2}$. Note que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Tomando el conjunto $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ continuando con este proceso, es posible obtener una colección de conjuntos medibles $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ disjuntos dos a dos, tales que $\mu(E_n) = \frac{a}{2^n}$. Considérese la función

$$f_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(E_k)^{\frac{1}{q}}} \mathbf{1}_{E_k}.$$

se afirma que $f_0 \in L^p(X)$, se tiene

$$\int_X |f_0|^p \, d\mu = \int_X \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(E_k)^{\frac{1}{q}}} \mathbf{1}_{E_k} \right|^p d\mu$$

y como los conjuntos $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$ son disjuntos dos a dos, se puede escribir

$$\begin{aligned}
\int_X |f_0|^p \, d\mu &= \int_X \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\mu(E_k)^{\frac{1}{q}}} \mathbf{1}_{E_k} \right|^p d\mu \\
&= \int_X \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(E_k)^{\frac{p}{q}}} \mathbf{1}_{E_k} \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \frac{1}{\mu(E_k)^{\frac{p}{q}}} \mathbf{1}_{E_k} \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_k)^{\frac{p}{q}}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} [\mu(E_k)]^{1-\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Ya que $p < q$, entonces $\frac{p}{q} < 1$, es decir $1 - \frac{p}{q} > 0$; además $\mu(E_n) = \frac{1}{2^n}$,

$$\begin{aligned}
\int_X |f_0|^p \, d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)^{1-\frac{p}{q}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2^k} \right)^{1-\frac{p}{q}} \\
&= a^{1-\frac{p}{q}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\left(1-\frac{p}{q}\right)}} \right)^k < \infty,
\end{aligned}$$

ya que la expresión anterior corresponde a una serie geométrica. Así se concluye que $f_0 \in L^p(X)$.

Ahora se va a demostrar que $f_0 \notin L^q(X)$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_X |f_0|^q \, d\mu &= \int_X \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\mu\left(E_k\right)^{\frac{1}{q}}} \mathbf{1}_{E_k} \right|^q d\mu \\
&= \int_X \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu\left(E_k\right)^{\frac{q}{q}}} \mathbf{1}_{E_k} \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \frac{1}{\mu\left(E_k\right)} \mathbf{1}_{E_k} \, d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu\left(E_k\right)}{\mu\left(E_k\right)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty,
\end{aligned}$$

con lo cual $f_0 \notin L^q(X)$ y el lema queda demostrado. □

Ejemplo 2.1.11. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ el espacio de Lebesgue y considere $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{(0,1]}(x)$. $f \in L^1(\mathbb{R})$, sin embargo, $f \notin L^2(\mathbb{R})$. Similarmente, si $g(x) = x^{-1}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$ entonces $g \in L^2(\mathbb{R})$, pero $g \notin L^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$; estos ejemplos muestran que $L^p(\mathbb{R}) \subsetneq L^q(\mathbb{R})$ ya sea $1 \leq p < q < \infty$ o $1 \leq q < p < \infty$.

De igual manera se puede establecer el mismo resultado del lema previo para el caso $q = \infty$, el cual se muestra a continuación.

Lema 2.1.12. *Supongamos* $1 \leq p < \infty$ *y* $E \in \Sigma$ *no atómico. Entonces existe una función* $f_0 \in L^p(X)$ *tal que*

$$\|f_0\|_\infty = \infty.$$

Demostración. Sea a un número real, tal que $0 < a < \mu(E)$. Como E es no atómico, entonces de la Proposición 1.2.25, existe una $E_1 \in \Sigma$ tal que $\mu(E_1) = a\left(1 - \frac{1}{2}\right)$, y de esta manera tomando ahora $E \setminus E_1$, que también es no atómico, existe $E_2 \in \Sigma$ tal que $\mu(E_2) = a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right)$. Note que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ y tomando el conjunto $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ y cintinuamdo con ese proceso, se concluye que es posible obtener una colección de conjuntos medibles $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ disjuntos dos a dos, tales que

$$\mu(E_n) = a\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right).$$

Considérese ahora la función

$$f_0 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/p} \cdot \mathbf{1}_{E_k}.$$

Entonces, se tiene

$$\int_X |f_0|^p \, d\mu = \int_X \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/p} \cdot \mathbf{1}_{E_k} \right|^p d\mu$$

y como los conjuntos $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ son disjuntos dos a dos, se puede escribir

$$\begin{aligned}\int_X |f_0|^p \, d\mu &= \int_X \sum_{k=1}^{\infty} \left| k^{1/p} \cdot \mathbf{1}_{E_k} \right|^p d\mu = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbf{1}_{E_k} \, d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X k \mathbf{1}_{E_k} \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} ka \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} \right) = 2a.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mu\left(\{x \in X \mid |f_0(x)| > k^{1/p}\} \right) &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \mu\left(\{x \in X \mid |f_0(x)| = i^{1/p}\} \right) \\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \mu\left(E_i\right) \\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty} a \left(\frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i} \right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=k+1}^{m} a \left(\frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i} \right) \\ &= \lim_{m\to\infty} a \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^m} \right) \\ &= \frac{a}{2^k}\end{aligned}$$

de esta manera, cuando $k \to \infty$

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(\{x \in X \mid |f_0(x)| > k^{1/p}\} \right) = 0,$$

así que $\|f_0\|_\infty = \infty$. □

Ejemplo 2.1.13. Considerando la función $f(x) = x^{-\frac{1}{2p}} \mathbf{1}_{(0,1]}(x)$, se tiene que $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $p \geq 1$, sin embargo, $f \notin L^\infty(\mathbb{R})$. Ahora si se considera la función $g(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x)$ entonces $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ y sin embargo, $g \notin L^p(\mathbb{R})$ para $p \geq 1$. Estos ejemplos muestran que $L^p(\mathbb{R}) \subsetneq L^\infty(\mathbb{R})$ y $L^\infty(\mathbb{R}) \subsetneq L^p(\mathbb{R})$.

Ahora se va a demostrar el resultado principal de esta subsección.

Teorema 2.1.14. *Sean $1 \leq p < q < \infty$ y que $u \in L_0(X)$. El operador multiplicación M_u aplica el espacio $L^p(X)$ en $L^q(X)$ si y sólo si el símbolo u satisface las siguientes dos condiciones:*

(a) $u(x) = 0$, *μ-c.t.p. sobre B.*

(b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{|u(A_n)|^s}{\mu(A_n)} < \infty$, *donde* $\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$,

donde los conjuntos B y A_n satisfacen la igualdad (2.1.8); en este caso, la norma del operador acotado M_u viene dada por

$$\|M_u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u(A_n)|}{\mu(A_n)^{\frac{1}{s}}}.$$

Demostración. Suponga que M_u es un operador multiplicación acotado de $L^p(X)$ en $L^q(X)$ con $p < q$. Primero se mostrara que *(a)* se cumple, si supone que la condición *(a)* no se satisface, es decir

$$\mu\left(\{x \in B \mid |u(x)| > 0\}\right) \neq 0.$$

Entonces, existe $\delta > 0$ tal que el conjunto

$$B_\delta = \{x \in B \mid |u(x)| > \delta\}$$

tiene medida positiva es decir, $\mu\left(B_\delta\right) > 0$. Dado que B_δ es no atómico, por el Lema 2.1.10, existe $f_0 \in L^p(X)$ talque $\int_{B_\delta} |f_0|^q \, d\mu = \infty$. De esta manera

$$\begin{aligned}
\infty &= \left(\delta^q \int_{B_\delta} |f_0|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{B_\delta} \delta^q \, |f_0|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{B_\delta} |u|^q \, |f_0|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\|M_u\left(f_0\right)\right\|_q \\
&\leq \|M_u\| \, \|f_0\|_p \, ,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, ya que $\|M_u\| < \infty$ y $\|f\|_p < \infty$. Por lo tanto

$$\mu\left(\{x \in B \mid |u(x)| > 0\}\right) = 0$$

así $u(x) = 0$, μ-c.t.p. sobre B.

Ahora se va a demostrar el item *(b)*; acordando que el supuesto es que M_u es un operador multiplicación acotado de $L^p(X)$ en $L^q(X)$ con $p < q$. Para cada $n \geq 1$ se consideran las funciones en $L^p(X)$

$$f_n = \frac{1}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}} \mathbf{1}_{A_n},$$

donde $\{A_n\}$ es la sucesión de átomos en la expresión (2.1.8). Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_p^p &= \int_X |f_n|^p \, d\mu \\
&= \int_X \left| \frac{1}{\mu\left(A_n\right)^{\frac{1}{p}}} \mathbf{1}_{A_n} \right|^p \, d\mu \\
&= \int_X \frac{1}{\mu\left(A_n\right)} \mathbf{1}_{A_n} \, d\mu \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Además, por definición de la norma de un operador, se tiene que

$$\|M_u\| = \sup\left\{\|M_u(f)\|_p \mid \|f\|_p \leq 1,\ f \in L^p(X)\right\}.$$

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\begin{aligned}
\|M_u\| &\geq \|M_u(f_n)\|_q \\
&= \left(\int_X |uf_n|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_X |u|^q \left|\frac{1}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}}\mathbf{1}_{A_n}\right|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{A_n} \frac{1}{\mu(A_n)^{\frac{q}{p}}} |u|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{1}{\mu(A_n)^{\frac{q}{p}}} \int_{A_n} |u|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{1}{\mu(A_n)^{\frac{q}{p}}} |u(A_n)|^q \mu(A_n)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{1}{\mu(A_n)^{\frac{q}{p}-1}} |u(A_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

donde en la penúltima línea se ha usado el hecho que la función medible u es constante c.t.p. en cada átomo (véase Proposición 1.4.1). Ahora bien, como $\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$, se tiene también que $\frac{q}{s} = \frac{q}{p} - 1$, y por esta razón

$$\begin{aligned}
\|M_u\| &\geq \left(\frac{|u(A_n)|^q}{\mu(A_n)^{\frac{q}{s}}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{|u(A_n)|}{\mu(A_n)^{\frac{1}{s}}}.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\frac{|u(A_n)|}{\mu(A_n)^{\frac{1}{s}}} < \|M_u\|,$$

para todo $n \geq 1$ y de esta manera

$$\|M_u\| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u(A_n)|}{\mu(A_n)^{\frac{1}{s}}} \tag{2.1.9}$$

esto demuestra la condición *(b)* y la implicación directa está lista.

Ahora se va a demostrar el recíproco. Se supone que las condiciones (2.1.3) y (2.1.5) se cumplen y se va a demostrar que el operador M_u aplica $L^p(X)$ en $L^q(X)$ de manera continua. Con este fin, para cualquier $f \in L_p(X)$ tal que $\|f\|_p \leq 1$, se puede usar la Proposición 1.4.2 y se puede escribir

$$\begin{aligned}\|M_u f\|_q^q &= \int_X |uf|^q \, d\mu \\ &= \int_B |uf|^q \, d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |uf|^q \, d\mu.\end{aligned}$$

Por la condición *(a)*, se tiene que $u = 0$, μ-c.t.p. en B y por esta razón, se obtiene que

$$\int_X |uf|^q \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |uf|^q \, d\mu. \tag{2.1.10}$$

Pero la función $|uf|^q$ es medible, así que por la Proposición 1.4.1, esta función es constante en cada átomo y entonces se cumple que

$$\int_{A_n} |uf|^q \; d\mu = |(uf)(A_n)|^q \, \mu(A_n) = |u(A_n)|^q \, |f(A_n)|^q \, \mu(A_n).$$

Luego, sustituyendo en la expresión (2.1.10)

$$\begin{aligned}\int_X |uf|^q \; d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} |u(A_n)|^q \, |f(A_n)|^q \, \mu(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |u(A_n)|^{\frac{sq}{s}} \, |f(A_n)|^q \, \mu(A_n) \, \frac{\mu(A_n)^{\frac{q}{s}}}{\mu(A_n)^{\frac{q}{s}}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u(A_n)|}{\mu(A_n)^{\frac{q}{s}}}^{\frac{sq}{s}} \, |f(A_n)|^q \, \mu(A_n)^{1+\frac{q}{s}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|u(A_n)|^s}{\mu(A_n)}\right)^{\frac{q}{s}} |f(A_n)|^q \, \mu(A_n)^{1+\frac{q}{s}}.\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Ahora, por la condición *(b)*,

$$\frac{|u(A_n)|^s}{\mu(A_n)} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|u(A_n)|^s}{\mu(A_n)} = L.$$

Ya que $\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$, entonces $1 + \frac{q}{s} = \frac{q}{p}$, comparando con la ecuación (2.1.11)

$$\begin{aligned}\int_X |uf|^q \; d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|u(A_n)|^s}{\mu(A_n)}\right)^{\frac{q}{s}} |f(A_n)|^q \, \mu(A_n)^{1+\frac{q}{s}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} L^{\frac{q}{s}} \, |f(A_n)|^q \, \mu(A_n)^{\frac{q}{p}} \\ &= L^{\frac{q}{s}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|f(A_n)|^p \, \mu(A_n)\right)^{\frac{q}{p}}.\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Pero por la Proposición 1.4.4 y la hipótesis $\|f\|_p \leq 1$, se tiene

$$\begin{aligned} 1 &\geq \|f\|_p^p \\ &= \int_B |f|^p \, d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} |f(A_n)|^p \mu(A_n) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} |f(A_n)|^p \mu(A_n). \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

En particular, para todo $n \geq 1$, se cumple que $|f(A_n)|^p \mu(A_n) \leq 1$ y como $\frac{q}{p} > 1$, entonces

$$\left(|f(A_n)|^p \mu(A_n)\right)^{\frac{q}{p}} \leq |f(A_n)|^p \mu(A_n).$$

Luego, usando las desigualdades (2.1.12) y (2.1.13), se concluye que

$$\int_X |M_u f|^q \, d\mu \leq L^{\frac{q}{s}} = \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u(A_n)|^s}{\mu(A_n)}\right)^{\frac{q}{s}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u(A_n)|^q}{\mu(A_n)^{\frac{q}{s}}} < \infty. \tag{2.1.14}$$

Por tanto M_u es un operador lineal acotado de $L^p(X)$ en $L^q(X)$. Además, por las expresiones (2.1.9) y (2.1.14), también se concluye que la norma del operador esta dada por la relación

$$\|M_u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u(A_n)|}{\mu(A_n)^{\frac{1}{s}}}.$$

Esto culmina la demostración. $\square$

Como consecuencia inmediata del resultado anterior, se puede obtener el siguiente corolario.

Corolario 2.1.15. *Suponga que $1 \leq p < q < \infty$ y que X es no atómico. El operador cero es el único operador multiplicación de $L^p(X)$ en $L^q(X)$.*

Demostración. Suponga que existe una función $u \neq 0$, μ-c.t.p. de forma que M_u es un operador de multiplicación acotado, con lo cual $\mu(\{x \in B \mid u(x) \neq 0\}) \neq 0$. Así existe $\delta > 0$ tal que el conjunto $X_\delta = \{x \in X \mid |u(x)| > \delta\}$ tiene medida positiva es decir, $\mu(X_\delta) > 0$. Dado que X_δ es no atómico, por el Lema 2.1.10, existe $f_0 \in L^p(X)$ tal que $\int_{B_\delta} |f_0|^q = \infty$. De esta manera

$$\begin{aligned} \infty &= \left(\delta^q \int_{B_\delta} |f_0|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{B_\delta} \delta^q |f_0|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_{B_\delta} |u|^q |f_0|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|M_u(f)\|_q \\ &\leq \|M\| \|f\|_p \end{aligned}$$

claramente es una contradicción ya que $\|M_u(f)\|_q < \infty$ y $\|f\|_p < \infty$, por lo tanto

$$\mu\left(\{x \in B \mid u(x) \neq 0\}\right) = 0,$$

es decir $u = 0$ c.t.p. sobre X. □

El Teorema 2.1.14 provee una herramienta para construir operadores acotados y no acotados desde $L^p(X)$ a $L^q(X)$ cuando $q > p$, como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.1.16. Considérese $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ el espacio de medida σ-finito con

$$\mu(A) = m(A) + \#(A \cap \mathbb{N}),$$

formada por la medida Lebesgue de $\mathbb{R}$ y la medida de conteo para $\mathbb{N}$. Se considera el operador de multiplicación M_u con símbolo $u(x) = 2^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{N}}(x)$ actuando en $L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R})$. Se puede observar que $u = 0$ sobre $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (conjunto no atómico). Además se tiene

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u\left(A_n\right)|^s}{\mu\left(A_n\right)} < \infty, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

donde los átomos son $A_n = \{n\}$ con $\mu(A_n) = 1$, si $q = \frac{7}{2}$ el valor de s es

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\frac{4}{3}} - \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{13}{28} = \frac{1}{\frac{28}{13}}$$

de esta manera $s = \frac{28}{13}$ en efecto.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u\left(A_n\right)|^{\frac{28}{13}}}{\mu\left(A_n\right)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|2^{-n}|^{\frac{28}{13}}}{1} = \frac{1}{2^{\frac{28}{13}}},$$

y por tanto $M_u : L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}) \to L^{\frac{7}{2}}(\mathbb{R})$ es un operador de multiplicación y la norma del operador es $\|M_u\| = \frac{1}{2}$.

A continuación se presentan dos ejemplos en los cuales se evidencia la necesidad de las condiciones *(a)* y *(b)* del Teorema 2.1.14, respectivamente.

Ejemplo 2.1.17. Considérese $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ el espacio de medida σ-finito con

$$\mu(A) = m(A) + \#(A \cap \mathbb{N}),$$

formada por la medida Lebesgue de $\mathbb{R}$ y la medida de conteo para $\mathbb{N}$. Se considera ademá el operador de multiplicación M_u con símbolo $u(x) = e^{-|x|}$ actuando en $L^1(\mathbb{R})$. Entonces para la función $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}\mathbf{1}_{(0,1]}(x)$, se puede usar su función normalizada $f_1(x) = \|f\|_1^{-1}f(x)$ y entonces $\|f_1\|_1 = 1$. Sin embargo, si $q = 3$,

$$\begin{aligned} \|M_u f_1\|_3 &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\|f\|_1^{-1} e^{-|x|} x^{-\frac{1}{3}} \mathbf{1}_{(0,1]}(x)\right|^3 d\mu\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\int_0^1 \left(\|f\|_1^{-1}\right)^3 \frac{1}{x} e^{-3x}\, dx + \left(\|f\|_1^{-1}\right)^3 e^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

con lo cual, en este caso, el operador M_u no aplica el espacio $L^1(\mathbb{R})$ en $L^3(\mathbb{R})$. Esto evidencia la importancia de la condición $u = 0$ μ-c.t.p. sobre B (conjunto no atómico), donde el conjunto no atómico en este caso es

$$B = (-\infty, 0] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (n-1, n) \right).$$

Ejemplo 2.1.18. Considerando el espacio de medida del ejemplo anterior $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$, el operador de multiplicación M_u con símbolo $u(x) = (1+x^2)\mathbf{1}_{\mathbb{N}}(x)$ actuando en $L^1(\mathbb{R})$, si $q = 3$ y tomando la función medible $g_1(x) = \|g\|_1^{-1} g(x)$, donde $g(x) = (1+x^2)^{-1}$, se tiene que $\|g_1\|_1 = 1$ y también

$$\|M_u g_1\|_3 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|g\|_1^{-3} \right)^{\frac{1}{3}} = \infty.$$

Se observa que en este caso, el valor de s es $\frac{3}{2}$ ya que,

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

y que para $n \in \mathbb{N}$ los átomos son $A_n = \{n\}$ y $\mu(A_n) = 1$. De esta manera

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|u(A_n)|}{\mu(A_n)^{\frac{1}{s}}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} n = \infty$$

y se ve la necesidad de la condición (b) del Teorema 2.1.14.

De manera adicional se propone la siguiente proposición basando en el resultado del Teorema 2.1.14, el cual considera el caso $\infty = q > p > 1$; la siguiente proposición no esta incluida en el estudio realizado por Takagi y Yokouchi en [13].

Proposición 2.1.19. *Se supone que $1 \leq p < \infty$ y que $u \in L_0(X)$. El operador M_u aplica el espacio $L^p(X)$ en $L^\infty(X)$ de manera continua si y sólo si el símbolo u satisface las siguientes dos condiciones:*

(a) $u(x) = 0$, *μ-c.t.p. para todo $x \in B$.*

(b) $\displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|u(A_n)|}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}} < \infty$

donde los conjuntos B y A_n satisfacen la igualdad (2.1.8). En este caso, la norma del operador M_u viene dada por

$$\|M_u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|u(A_n)|}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}}.$$

Demostración. Supóngase M_u es un operador acotado de $L^p(X)$ en $L^\infty(X)$ y que la condición (a) no se satisface, es decir, existe $\delta > 0$ para el cual el conjunto

$$B_\delta = \{x \in B \mid |u(x)| > \delta\}$$

tiene medida positiva. Entonces por el Lema 2.1.12, existe $f_0 \in L^p(X)$ tal que $f_0(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus B_\delta$, $\|f_0\|_p = 1$ y $\|f_0\|_\infty = \infty$. De esta manera

$$\infty = \delta \|f_0\|_\infty \leq \|M_u\|$$

y se llega a una contradicción al hecho que $M_u : L^p(X) \to L^\infty(X)$ es acotado. Por tanto $u = 0$ μ-c.t.p sobre B.

Por otro lado, por la Proposición 1.4.3, para cada $f \in L^\infty(X)$,

$$\|u \cdot f\|_\infty = \text{máx}\left\{\|f \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty, \sup_{k\in\mathbb{N}} |(u \cdot f)(A_k)|\right\} \leq \|M_u\|.$$

Como $u = 0$ μ-c.t.p. sobre B entonces, considerando la función $f_k = \mu(A_k)^{-\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{A_k}$, se obtiene

$$\|u \cdot f_k\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |(u \cdot f_k)(A_k)| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|u(A_k)|}{\mu(A_k)^{\frac{1}{p}}}$$

es decir

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|u(A_k)|}{\mu(A_k)^{\frac{1}{p}}} < \infty. \tag{2.1.15}$$

Esto muestra la primera implicación.

Ahora se va a demostrar el recíproco. Se supone ahora que las condiciones *(a)* y *(b)* se satisfacen, de esta manera para toda $f \in L^p(X)$ con $\|f\|_p = 1$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(A_k)|^p \mu(A_k) < 1.$$

En particular, $|f(A_k)|^p \mu(A_k) \leq 1$ y así $|f(A_k)| \leq \mu(A_k)^{-\frac{1}{p}}$. Además

$$\|u \cdot f\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |(u \cdot f)(A_k)| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|u(A_k)|}{\mu(A_k)^{\frac{1}{p}}},$$

por lo tanto

$$\|M_u\| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|u(A_k)|}{\mu(A_k)^{\frac{1}{p}}}. \tag{2.1.16}$$

De las ecuaciones (2.1.15) y (2.1.16), se concluye

$$\|M_u\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|u(A_k)|}{\mu(A_k)^{\frac{1}{p}}}.$$

Esto culmina la demostración del teorema. $\square$

Ejemplo 2.1.20. Considerando el mismo espacio de medida σ-finito $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ del ejemplo anterior, con $\mu(A) = m(A) + \#(A \cap \mathbb{N})$ formada por la medida Lebesgue de $\mathbb{R}$ y la medida de conteo para $\mathbb{N}$, el operador de multiplicación M_u con símbolo $u(x) = x$ actuando en $L^1(\mathbb{R})$, y la función medible $f(x) = \frac{1}{3}|x-2|^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{(2,3]}(x)$. Se puede ver que $\|f\|_1 = 1$, sin embargo

$$\|M_u f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\left|\frac{x}{3\sqrt{x-2}}\mathbf{1}_{(2,3]}(x)\right| = \infty$$

es decir, el operador M_u no aplica el espacio $L^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$, evidenciando la importancia de la condición *(a)* de la Proposición 2.1.19.

Ejemplo 2.1.21. Considerando el mismo espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ definido anteriormente, el operador de multiplicación M_u con símbolo $u(x) = x^3$ actuando en $L^{\frac{11}{2}}(\mathbb{R})$, y la función medible $f(x) = x^{-\frac{1}{x}-2}\mathbf{1}_{\mathbb{N}}(x)$. Se puede ver que $f \in L^{\frac{11}{2}}(\mathbb{R})$, así que escogiendo $f_1(x) = \|f\|_{\frac{11}{2}}^{-1} f(x)$, se puede ver que $\|f_1\|_{\frac{11}{2}} = 1$, sin embargo

$$\|M_u f_1\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\left|x^3 \cdot \|f\|_{\frac{11}{2}}^{-1} x^{-\frac{1}{x}-2}\mathbf{1}_{\mathbb{N}}(x)\right| = \operatorname{ess\,sup}\left|\|f\|_{\frac{11}{2}}^{-1} x^{-\frac{1}{x}+1}\mathbf{1}_{\mathbb{N}}(x)\right| = \infty.$$

De esta manera, éste operador M_u no aplica el espacio $L^{\frac{11}{2}}(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$, es decir, la condición *(b)* de la Proposición 2.1.19 es fundamental.

Ejemplo 2.1.22. Considerando el mismo espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ definido en el ejemplo anterior. El operador de multiplicación M_u con símbolo $u(x) = 2^{-x}\mathbf{1}_D(x)$ donde $D = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y actuando en $L^1(\mathbb{R})$, de esta manera $u \in L^1(X)$, además $u(x) = 0$ μ-c.t.p. en $B = (-\infty, 0] \cup (\bigcup_{n=1}^\infty (n-1, n))$ (conjunto no atómico), por otro lado

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|u(A_k)|}{\mu(A_k)^p}. = \text{máx}\left\{0, \sup_{x \in D}\frac{1}{2^x}\right\} = \frac{1}{4}$$

esto muestra que el operador $M_u : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ es un operador de multiplicación, así es acotado y la norma del operador es $\|M_u\|$ es $\frac{1}{4}$.

2.2. Operador multiplicación con rango cerrado

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito. En esta sección se van a caracterizar todos los símbolos $u \in L_0(X)$ que definen operador de multiplicación con rango cerrado M_u que aplican un espacio $L^p(X)$ en un espacio $L^q(X)$ con $1 \le p, q \le \infty$. Este estudio se hará en varias etapas según si $p < q$, $p = q$ o $p > q$. Se hará especial énfasis en el caso que uno de esos parámetros sea igual a ∞. No solamente se darán los detalles de los resultados que aparecen en el artículo de Takagi y Yokouchi [13], sino que también se darán ejemplos ilustrativos y se agregarán los casos que no fueron considerados por los autores antes citados.

La clave de los resultados que se presentan en esta sección es considerar la restricción de M_u a cierto subespacio cerrado de $L^p(X)$; por tal razón se recuerda que cada $G \in \Sigma$ define un espacio de medida σ-finito (G, Σ_G, μ_G), llamado espacio de medida relativo a G, en el cual la sigma álgebra Σ_G se define por

$$\Sigma_G = \{E \cap G \mid E \in \Sigma\},$$

y la medida (relativa o restringida) se define por

$$\mu_G(E) = \mu(E \cap G)$$

donde $E \in \Sigma_G$ (véase el Comentario 1.1.8). Luego, cada $G \in \Sigma$ permite definir el espacio $L^p(G)$ como

$$L^p(G) = \{f \cdot \mathbf{1}_G \mid f \in L^p(X)\},$$

el cual es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{L^p(G)} = \|f \cdot \mathbf{1}_G\|_{L^p(X)}.$$

Observe que si $h \in L^p(G)$ entonces $h \in L^p(X)$ y $h = h \cdot \mathbf{1}_G$. De hecho, $L^p(G)$ es justamente el rango del operador multiplicación con símbolo $\mathbf{1}_G$ actuando sobre el espacio $L^p(X)$. Se observa que si $f \in \overline{L^p(G)}$, entonces existe una sucesión $\{f_n\} \in L^p(G)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Luego, por el Teorema 1.3.9, se tiene que $f_n \to f$ en medida y consecuentemente, por el Teorema de Riesz 1.3.8, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ tal que $f_{n_k} \to f$ puntualmente μ-c.t.p. sobre X. De esta manera

$$\mu\left(\{x \in X \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| \neq 0\}\right) = 0.$$

Esto muestra que $f \in L^p(G)$, y por tanto $L^p(G)$ es un subespacio cerrado de $L^p(X)$; en particular, $L^p(G)$ es un subespacio completo de $L^p(X)$.

También será conveniente considerar la restricción del símbolo u al subconjunto medible G; más precisamente, para $u \in L_0(X)$, se define el símbolo u_G por

$$u_G(x) = u(x) \cdot \mathbf{1}_G(x), \tag{2.2.17}$$

con $x \in X$. Abusando del lenguaje, se dirá que u_G es la restricción de u al conjunto G. Finalmente, también se considera el conjunto

$$S_u = \{x \in X \mid u(x) \neq 0\},$$

el cual claramente es un elemento de Σ pues $u \in L_0(X)$. Con estas notaciones y definiciones, se tiene el siguiente resultado el cual establece una relación entre operadores de multiplicación con símbolo u con rango cerrados entre $L^p(X)$ y $L^q(X)$ y los operadores de multiplicación con símbolos u_G actuando entre $L^p(G)$ y $L^q(G)$.

Lema 2.2.1. *Sea $u \in L_0(X)$, $G \in \Sigma$ y sea u_G la función definida en (2.2.17). Se supone además que para $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, se cumple que $M_u \in \mathscr{B}(L^p(X), L^q(X))$. Si $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ tiene rango cerrado, entonces $M_{u_G} : L^p(G) \to L^q(G)$ tiene rango cerrado. Además, si $G \subseteq S_u$, entonces el operador $M_{u_G} : L^p(G) \to L^q(G)$ es inyectivo.*

Demostración. En primer lugar, se observa que si M_u es un operador de multiplicación de $L^p(X)$ en $L^q(X)$, entonces M_{u_G} es un operador de multiplicación de $L^p(G)$ en $L^q(G)$, ya que para $f \in L^p(G)$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\|M_{u_G}(f)\|_{L^q(G)} &= \|u_G \cdot f\|_{L^q(G)} = \|u \cdot \mathbf{1}_G \cdot f\|_{L^q(G)} \\
&\leq \|u \cdot \mathbf{1}_G \cdot f\|_{L^q(X)} \\
&\leq \|M_u\| \, \|\mathbf{1}_G \cdot f\|_{L^p(X)} \\
&= \|M_u\| \, \|f\|_{L^p(G)},
\end{aligned}$$

donde se ha usado que $\mathbf{1}_G \cdot f \in L^p(X)$. Esto muestra lo afirmado, incluso, como es esperado, que $\|M_{u_G}\| \leq \|M_u\|$.

Se supone ahora que el operador $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ tiene rango cerrado; se va a mostrar que $M_{u_G} : L^p(G) \to L^q(G)$ tiene rango cerrado. Con este fin, sea $h \in \overline{M_{u_G}(L^p(G))}$. Entonces, $h \in L^q(G) \subseteq L^q(X)$ y por definición de clausura, se puede encontrar una sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M_{u_G}(L^p(G))$ tal que

$$\|h_n - h\|_{L^q(G)} \to 0.$$

Por definición de la norma en $L^q(G)$, se puede escribir

$$\|h_n \cdot \mathbf{1}_G - h \cdot \mathbf{1}_G\|_{L^q(X)} = \|(h_n - h) \cdot \mathbf{1}_G\|_{L^q(X)} = \|h_n - h\|_{L^q(G)} \to 0,$$

lo cual significa que la sucesión $\{h_n \cdot \mathbf{1}_G\}$ converge a $h \cdot \mathbf{1}_G$ en $L^q(X)$.

Ahora, el hecho que $h_n \in M_{u_G}(L^p(G))$ permite encontrar $f_n \in L^p(G)$ tal que

$$M_{u_G}(f_n) = u_G \cdot f_n = h_n;$$

luego, como $u_G = u \cdot \mathbf{1}_G$, se tiene que

$$h_n \cdot \mathbf{1}_G = u \cdot (f_n \cdot \mathbf{1}_G)$$

y como $f_n \cdot \mathbf{1}_G \in L^p(X)$, se puede decir que $h_n \cdot \mathbf{1}_G \in M_u(L^p(X))$ y realmente $\{h_n \cdot \mathbf{1}_G\}$ es una sucesión convergente de $M_u(L^p(X))$ el cual, por hipótesis, es un subespacio cerrado de $L^q(X)$. Se concluye entonces que $h \cdot \mathbf{1}_G \in M_u(L^p(X))$ y por tanto, se puede encontrar $f \in L^p(X)$ tal que

$$h \cdot \mathbf{1}_G = M_u(f) = u \cdot f.$$

Luego, como $h \in L^q(G)$, se tiene que $h = h \cdot \mathbf{1}_G$ y se puede escribir

$$h = h \cdot \mathbf{1}_G = (u \cdot \mathbf{1}_G) \cdot (f \cdot \mathbf{1}_G) = u_G \cdot (f \cdot \mathbf{1}_G),$$

lo que significa que $h = M_{u_G}(f \cdot \mathbf{1}_G)$ y como $f \cdot \mathbf{1}_G \in L^p(G)$, realmente se ha concluido que $h \in M_{u_G}(L^p(G))$ lo que demuestra que $M_{u_G}(L^p(G))$ es un subespacio cerrado de $L^q(G)$.

Finalmente, si se supone que $G \subseteq S_u$ y se tiene $f \in \text{Ker}\,(M_{u_G})$, entonces $f \in L^p(G)$ y

$$M_{u_G}(f) = u_G \cdot f = 0 \quad (\mu \text{ - c.t.p. en } G),$$

esta última relación implica que $f = 0$ μ-c.t.p. en G ya que para todo $x \in G$, se cumple que $u(x) \neq 0$. Por otro lado, el hecho que $f \in L^p(G)$ implica que $f = 0$ fuera del conjunto G. Se concluye entonces que $f = 0$ μ-c.t.p. en X y esto muestra que el operador multiplicación $M_{u_G} : L^p(G) \to L^q(G)$ es inyectivo o $1 - 1$. Esto culmina la demostración del lema. □

El hecho que el operador restricto sea inyectivo en los subconjuntos de S_u es de gran interés ya que es un hecho muy conocido que un operador inyectivo tendrá rango cerrado si y sólo si es acotado inferiormente. Con esto en mente, se tiene el resultado principal de esta sección el cual será de gran utilidad para la obtención de las caracterizaciones en los distintos casos de p y q.

Teorema 2.2.2. *Sea $u \in L_0(X)$ y sea u_{S_u} su restricción al subconjunto $S_u \in \Sigma$. Se supone además que para $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ se cumple que $M_u \in \mathscr{B}(L^p(X), L^q(X))$. El operador multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ tiene rango cerrado si y sólo si existe una constante $\delta > 0$ tal que*

$$\left\| M_{u_{S_u}} h \right\|_{L^q(S_u)} \geq \delta \|h\|_{L^p(S_u)}, \tag{2.2.18}$$

para toda función $h \in L^p(S_u)$.

Demostración. Se supone primero que el operador multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ tiene rango cerrado. Por el lema anterior (Lema 2.2.1), se tiene que el operador $M_{u_{S_u}} : L^p(S_u) \to L^q(S_u)$ tiene rango cerrado y es inyectivo; así que por Teorema 1.5.2 se tiene que este último operador es acotado inferiormente y eso justamente significa que existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| M_{u_{S_u}} h \right\|_{L^q(S_u)} \geq \delta \|h\|_{L^p(S_u)},$$

para toda función $h \in L^p(S_u)$, lo cual muestra la primera implicación.

Se supone ahora que existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$\left\| M_{u_{S_u}} h \right\|_{L^q(S_u)} \geq \delta \|h\|_{L^p(S_u)},$$

para toda función $h \in L^p(S_u)$. Entonces, por el Teorema 1.5.2, el operador multiplicación $M_{u_{S_u}} : L^p(S_u) \to L^q(S_u)$ es inyectivo y tiene rango cerrado; es decir, $M_{u_{S_u}}(L^p(S_u))$ es un subespacio cerrado de $L^q(S_u)$; en particular, es un subespacio completo.

Se va a demostrar que $M_u(L^p(X)) = M_{u_{S_u}}(L^p(S_u))$. En efecto, si $h \in M_u(L^p(X))$, entonces existe $f \in L^p(X)$ tal que

$$h = M_u(f) = u \cdot f.$$

Luego, $h(x) = 0$ μ-c.t.p. sobre $X \setminus S_u$ y por esta razón,

$$h = (u \cdot \mathbf{1}_{S_u}) \cdot (f \cdot \mathbf{1}_{S_u}) = u_{S_u} \cdot (f \cdot \mathbf{1}_{S_u}) .$$

Esto significa que $h = M_{u_{S_u}}(f \cdot \mathbf{1}_{S_u})$ y así $h \in M_{u_{S_u}}(L^p(S_u))$. Esto muestra la inclusión $M_u(L^p(X)) \subseteq M_{u_{S_u}}(L^p(S_u))$.

Por otra parte, si $h \in M_{u_{S_u}}(L^p(S_u))$, entonces existe $g \in L^p(S_u)$ tal que

$$h = M_{u_{S_u}}(g) = u_{S_u} \cdot g = u \cdot \mathbf{1}_{S_u} \cdot g.$$

Luego, como $\mathbf{1}_{S_u} \cdot g \in L^p(X)$, se concluye que $h = M_u(\mathbf{1}_{S_u} \cdot g)$ y esto muestra que $M_{u_{S_u}}(L^p(S_u)) \subseteq M_u(L^p(X))$. Esto culmina la demostración del lema. $\square$

2.2.1. Rango cerrado, caso $p = q$

El Teorema 2.2.2 establece que el operador de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ tiene rango cerrado si y sólo el operador $M_{u_{S_u}} : L^p(S_u) \to M_{u_{S_u}}(L^p(S_u)) \subseteq L^q(S_u)$ tiene inversa continua. Así que como consecuencia del Teorema 2.1.1, el siguiente resultado es esperado.

Teorema 2.2.3. *Se supone que $u \in L_0(X)$ y que para $1 \leq p < \infty$ se cumple que M_u pertenece al espacio $\mathscr{B}(L^p(X))$. El operador multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ tiene rango cerrado si y sólo si existe una constante $\delta > 0$ talque*

$$|u(x)| \geq \delta \tag{2.2.19}$$

para casi todo $x \in S_u$.

Demostración. Se supone primero la existencia de $\delta > 0$ tal que la condición (2.2.19) se cumple. Entonces, para cualquier $h \in L^p(S_u)$ se cumple que

$$\left\| M_{u_{S_u}}(h) \right\|_{L^p(S_u)} = \|u_{S_u} \cdot h\|_{L^p(S_u)} \geq \delta \|h\|_{L^p(S_u)} ;$$

así que por el Lema 2.2.2 se puede concluir que el operador $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ tiene rango cerrado.

Recíprocamente, si se supone que el operador multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ tiene rango cerrado, entonces por el Teorema 2.2.2, $M_{u_{S_u}} : L^p(S_u) \to M_{u_{S_u}}(L^p(S_u))$ tiene inversa continua; pero la inversa de este operador es otro operador multiplicación con símbolo v el cual satisface que

$$v(x) = \frac{1}{u_{S_u}(x)}, \qquad \text{para } x \in S_u$$

$v(x) = 0$ para $x \in X \setminus S_u$. Se va a usar un argumento similar al de la demostración del Teorema 2.1.1 para mostrar que $v \in L^\infty(S_u) \subseteq L^\infty(X)$. Se tiene

$$\|M_v(g)\|_{L^p(S_u)} \leq \rho \|g\|_{L^p(S_u)} \tag{2.2.20}$$

para algún $\rho > 0$ y para toda función $g \in M_{u_{S_u}}(L^p(S_u))$. En particular, considerando los conjuntos

$$E_n = \left\{ x \in S_u \mid |v(x)| > \|v\|_\infty - \frac{1}{n} \right\}$$

con $n \in \mathbb{N}$, se puede ver, por definición del supremo esencial, que $\mu(E_n) > 0$ y que la función definida por

$$g = u_{S_u} \frac{\mathbf{1}_{E_n}}{\mu(E_n)^{\frac{1}{p}}}$$

pertenece a $M_{u_{S_u}}(L^p(S_u))$ pues

$$\int_{S_u} \left(\frac{\mathbf{1}_{E_n}}{\mu(E_n)^{\frac{1}{p}}} \right)^p d\mu = 1,$$

es decir, $g = u_{S_u} \cdot h$ con $h = \frac{\mathbf{1}_{E_n}}{\mu(E_n)^{\frac{1}{p}}} \in L^p(S_u)$. De hecho, también se tiene que

$$\|M_v(g)\|_{L^p(S_u)} = \|v \cdot g\|_{L^p(S_u)} = \left\| \left(\frac{1}{u_{S_u}} \right) \cdot \left(u_{S_u} \frac{\mathbf{1}_{E_n}}{\mu(E_n)^{\frac{1}{p}}} \right) \right\|_{L^p(S_u)} = 1.$$

Así que por la desigualdad (2.2.20) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &\leq \|g\|_{L^p(S_u)} = \left(\int_{S_u} |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{E_n} |u_{S_u}|^p \frac{\mathbf{1}_{E_n}}{\mu(E_n)} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\|v\|_\infty - \frac{1}{n}} \left(\int_{E_n} \frac{\mathbf{1}_{E_n}}{\mu(E_n)} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{\|v\|_\infty - \frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

donde se ha usado la definición del conjunto E_n y con esto, se puede escribir

$$\|v\|_\infty \leq \rho + \frac{1}{n};$$

y como $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario, realmente se concluye que

$$\|v\|_\infty \leq \rho.$$

Esto muestra que $v \in L^\infty(S_u) \subseteq L^\infty(X)$. De aquí que se ha encontrado una constante positiva ρ tal que

$$\frac{1}{|u_{S_u}(x)|} = |v(x)| \leq \rho$$

para casi todo $x \in S_u$; lo cual es lo mismo que decir que existe $\delta > 0$ tal que

$$|u(x)| \geq \delta$$

para casi todo $x \in S_u$ pues $u = u_{S_u}$ en casi todo S_u. Esto culmina la demostración del Teorema. $\square$

Ejemplo 2.2.4. Sea el espacio de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$ y el operador de multiplicación M_u con símbolo

$$u(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x).$$

Se puede observar que $\|u\|_\infty = 1$ y por esta razón, éste operador M_u aplica $L^1(\mathbb{R})$ en sí mismo. En este caso, $S_u = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y también se tiene que $|u(x)| \geq \frac{1}{2}$ para todo $x \in S_u$ por lo cual, el resultado anterior dice que, en este caso, M_u un operador de multiplicación con rango cerrado.

Ejemplo 2.2.5. Sea el espacio de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$ y el operador de multiplicación M_u con símbolo $u(x) = e^{-|x|}$. Ya que $\|u\|_\infty = 1$, este operador aaplica el espacio $L^{\frac{17}{5}}(\mathbb{R})$ en sí mismo. Sin embargo, dado que $S_u = \mathbb{R}$ y

$$\text{ínf}\,\{\delta > 0 \mid |u(x)| > \delta \ \ \mu\text{-c.t.p. } \ S_u\} = 0,$$

se concluye que este operador multiplicación M_u no tiene rango cerrado.

2.2.2. Rango cerrado, caso $p > q$

Ahora se usará el Teorema 2.1.5 (continuidad, caso $p > q$) y el Teorema 2.2.2 para caracterizar los operadores multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ que tienen rango cerrado con la condición $p > q$. Destaca el hecho que, en este caso, coinciden con los operadores multiplicación que tienen rango de dimensión finita (rango finito). El resultado que se tiene es el siguiente:

Teorema 2.2.6. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito con descomposición atómica*

$$X = B \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right),$$

donde $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ son átomos de μ y B es un conjunto no atómico. Se supone que $u \in L_0(X)$ y que para $1 \leq q < p \leq \infty$ se cumple que $M_u \in \mathscr{B}\left(L^p(X), L^q(X)\right)$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ *tiene rango cerrado.*

(b) $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ *tiene rango finito.*

(c) $u(x) = 0$ *μ-c.t.p. en B, y el conjunto $\mathcal{N}_u = \{n \in \mathbb{N} \mid u(A_n) \neq 0\}$ es finito.*

Demostración. Si $u = 0$ μ-c.t.p. sobre X no hay nada que mostrar pues en este caso se tiene el operador nulo, con lo cual $M_u\left(L^p(X)\right) = \{0\}$ y claramente se cumplen las tres proposiciones *(a)*, *(b)* y *(c)*. Así que se puede suponer que u no es la función nula en $L_0(X)$. Se demostrará que *(a)* $\Rightarrow$ *(c)*, *(c)* $\Rightarrow$ *(b)* y que *(b)* $\Rightarrow$ *(a)*.

(a)⇒*(c)* Se supone que el operador $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ tiene rango cerrado con $p > q$. En primer lugar, se va a demostrar que $u(x) = 0$ μ-c.t.p. en B. Con este fin, se supone que esto no es cierto, es decir, que

$$\mu\left(\{x \in B \mid u(x) \neq 0\}\right) > 0.$$

Se observa que

$$\{x \in B \mid u(x) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in B \mid |u(x)| \leq \frac{1}{n}\right\},$$

y por esta razón, debe existir $\delta > 0$ tal que

$$\mu\left(\{x \in B \mid |u(x)| \geq \delta\}\right) > 0.$$

Se define el conjunto medible

$$G = \{x \in B \mid |u(x)| \geq \delta\}$$

y se considera la función $v \in L_0(G)$ tal que

$$v(x) = \frac{1}{u(x)}$$

para $x \in G$ y $v(x) = 0$ para $x \in X \setminus G$. Entonces $\mu(G) > 0$ y v no es la función nula (en G). Además,

$$\|v\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|v(x)| \mid x \in G\} \leq \frac{1}{\delta} < \infty$$

pues para $x \in G$ se tiene

$$|v(x)| = \frac{1}{|u(x)|} \leq \delta$$

por definición de G. Así que por el Teorema 2.1.1 se tiene que el operador multiplicación $M_v : L^q(G) \to L^q(G)$ es continuo o acotado. Se va a demostrar que

$$M_v\left(L^q(G)\right) \subseteq L^p(G).$$

Se observa que, en virtud del Lema 2.2.1, el operador multiplicación $M_{u_G} : L^p(G) \to L^q(G)$ es acotado, inyectivo (pues $G \subseteq S_u$) y tiene rango cerrado. Además se tiene que el operador M_v es la inversa de M_{u_G}.

Para cada $E \in \Sigma_G$ con $\mu_G(E) < \infty$ se puede definir la función

$$h_E(x) = \frac{1}{u(x)}\mathbf{1}_E(x)$$

con $x \in G$. Entonces

$$\int_G |h_E(x)|^p \, d\mu_G = \int_G \left|\frac{1}{u(x)}\mathbf{1}_E(x)\right|^p \, d\mu_G \leq \frac{1}{\delta^p}\mu(E) < \infty$$

y de esta manera $h_E \in L^p(G)$. Consecuentemente, $M_{u_G}(h_E) \in L^q(G)$ lo que significa que

$$\mathbf{1}_E = (u \cdot \mathbf{1}_G)\frac{1}{u}\mathbf{1}_E = u_G \cdot h_E \in M_{u_G}(L^p(G))$$

y como toda función simple es combinación lineal finita de características, se puede escribir

$$\{\psi \in L^q(G) \mid \psi \text{ es una función simple}\} \subseteq M_{u_G}(L^p(G)).$$

Luego, como el conjunto de la izquierda es denso en $L^q(G)$ y el rango $M_{u_G}(L^p(G))$ es cerrado, se obtiene

$$L^q(G) = \overline{\{\psi \in L^p(G) \mid \psi \text{ es una función simple}\}} \subseteq M_{u_G}(L^p(G)).$$

Con esto, se ha demostrado que el operador multiplicación $M_{u_G} : L^p(G) \to L^q(G)$ es biyectivo y por tanto su operador inverso $M_v : L^q(G) \to L^p(G)$ es también continuo y por el Teorema 2.1.14, esto ocurre si el símbolo v es igual a cero en casi toda parte de la parte no atómica de G; pero resulta que por definición, G es un subconjunto de medida positiva del conjunto no atómico B; así que G es no atómico y por tanto $v = 0$ en casi todo G, esto es una contradicción y por tanto $u = 0$ en casi todo B.

Ahora se va a demostrar que el conjunto $\mathcal{N}_u = \{n \in \mathbb{N} \mid u(A_n) \neq 0\}$ es finito. Ya que $u(x) \neq 0$ μ-c.t.p. sobre X y $u = 0$ en casi todo B, se debe tener $u(x) \neq 0$ μ-c.t.p. sobre $X \setminus B$. Luego, debe existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $u(A_k) \neq 0$. De esta manera, el conjunto $\mathcal{N}_u$ es no vacío y además, en este caso,

$$S_u = \bigcup_{n \in \mathcal{N}_u} A_n.$$

En particular, $\mu(S_u) > 0$ y por el argumento usado en la parte anterior, cambiando G por S_u y considerando $w = \frac{1}{u(x)}$ con $x \in S_u$ en vez de v, se obtiene que el operador $M_w : L^q(S) \to L^p(S)$ es acotado y biyectivo; así que por el ítem *(b)* del Teorema 2.1.14, se tiene que $w \in L^r(S_u)$ y

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|w(A_n)|^r}{\mu(A_n)} < \infty,$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$. Sin embargo, si hacemos

$$b = \sup_{n \in \mathcal{N}_u} \frac{|w(A_n)|^r}{\mu(A_n)} = \sup_{n \in \mathcal{N}_u} \frac{1}{|u(A_n)|^r \mu(A_n)},$$

entonces

$$b \geq \frac{1}{|u(A_n)|^r \mu(A_n)}$$

para todo $n \in \mathcal{N}_u$, y de esta manera también se puede escribir

$$|u(A_n)|^r \mu(A_n) \geq \frac{1}{b}$$

para todo $n \in \mathcal{N}_u$. Con lo cual,

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_u} \frac{1}{b} \leq \sum_{n\in\mathcal{N}_u} |u(A_n)|^r \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathcal{N}_u} \int_{A_n} |u|^r \, d\mu \leq \int_X |u|^r \, d\mu$$

pero el operador $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ es continuo, así que por el Teorema 2.1.5, se puede escribir que $u \in L^r(X)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$, y por esta razón

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_u} \frac{1}{b} < \infty$$

hecho que ocurre solamente si $\mathcal{N}_u$ es finito. Esto culmina la demostración de la implicación.

(c)$\Rightarrow$*(b)* Se supone ahora que $u(x) = 0$ μ-c.t.p. sobre B y que $\mathcal{N}_u$ es finito; se va a demostrar que el operador $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ tiene rango de dimensión finita. En primer lugar, se observa que

$$S_u = \{x \in X \mid u(x) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathcal{N}_u} A_n.$$

Se considera el conjunto

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{1}_{A_n} \mid n \in \mathcal{N}_u\}.$$

Entonces $\mathscr{B}$ es un conjunto linealmente independiente, pues si

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \mathbf{1}_{A_{n_k}} = 0 \qquad (\mu\text{-c.t.p. } X),$$

entonces integrando sobre cualquier A_{n_j}, con $j = 1, 2, \cdots, m$, se obtiene

$$c_j \mu\left(A_{n_j}\right) = 0,$$

lo cual implica que $c_j = 0$ pues A_{n_j} es un átomo. También será de utilidad, considerar el subespacio Z de $L^q(X)$ definido por

$$Z = \{g \in L^q(X) \mid g = 0 \quad \text{c.t.p. sobre } X \setminus S_u\}.$$

Se observa que para cada $n \in \mathcal{N}_u$, se cumple que $\mathbf{1}_{A_n} \in L^q(X)$ pues $\mu\left(A_n\right) < \infty$. Además, para $x \in X \setminus A_n$, se tiene que $1_{A_n}(x) = 0$, y como $A_n \subseteq S_u$, se puede ver que $X \setminus S_u \subseteq X \setminus A_n$ y así $\mathscr{B} \subset Z$. Luego, cualquier combinación lineal de elementos $\mathscr{B}$ pertenece a Z. Vamos a ver que $\mathscr{B}$ es una base para Z.

En efecto, si se supone que $f \in Z$ entonces $f \in L^q(X)$ y en particular, f es medible; así que f es constante en cada átomo A_n. Luego, si definimos, $c_n = f\left(A_n\right)$, se puede ver que

$$f = \sum_{n\in\mathcal{N}_u} c_n \mathbf{1}_{A_n}, \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

Con esto, se puede concluir que Z es un espacio de dimensión finita.

Finalmente, si $h \in M_u(L^p(X))$, entonces $h \in L^q(X)$ y existe $f \in L^p(X)$ tal que $h = u \cdot f$. En particular, $h(x) = 0$ para casi todo $x \in X \setminus S_u$ y de aquí que $h \in Z$. Esto muestra que $M_u(L^p(X)) \subseteq Z$ y por tanto, $M_u(L^p(X))$ es un espacio de dimensión finita. Esto culmina la demostración de la implicación.

(b)$\Rightarrow$*(a)* Esta implicación es directa ya que es un hecho conocido que todo operador con rango de dimensión finita es de rango cerrado. Esto es consecuencia del hecho que todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach. □

Como consecuencia de la demostración del Teorema 2.2.6, más exactamente de la implicación *(a)*$\Rightarrow$*(c)* al demostrar que es $u = 0$ μ-c.t.p. sobre B, se desprende el siguiente corolario.

Corolario 2.2.7. *Sean $1 \leq q < p < \infty$ y X es no atómico. El operador cero es el único operador multiplicación de $L^p(X)$ en $L^q(X)$ con rango cerrado.*

Corolario 2.2.8. *Bajo las condiciones del Teorema 2.2.6, si $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ es de rango cerrado, entonces la restricción del símbolo u con respecto a S_u, tiene la propiedad* $\operatorname{ess\,inf} |u|_{S_u}| > 0$.

Ya que $S_u = \bigcup_{n \in \mathcal{N}_u} A_n$ esta compuesta de átomos entonces $u|_{S_u} \neq 0$ y constante μ-c.t.p. sobre cada $A_n \subseteq S_u$, de esta manera el conjunto $\{|u|_{S_u}(A_n)| \mid n \in \mathcal{N}_u\}$ es finito y por tanto posee mínimo, de esta manera

$$\text{ínf}\,\{|u|_{S_u}(A_n)| \mid n \in \mathcal{N}_u\} = \operatorname{ess\,inf} |u| > 0$$

Ejemplo 2.2.9. Considerando el mismo espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ σ-finito con

$$\mu(A) = m(A) + \#(A \cap \mathbb{N})$$

formada por la medida Lebesgue de $\mathbb{R}$ y la medida de conteo para $\mathbb{N}$. El operador de multiplicación $M_u : L^3(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ con símbolo

$$u(x) = e^x \mathbf{1}_{(-\infty,0]}(x),$$

tiene la propiedad que $u \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R})$ y por esta razón, es un operador de multiplicación acotado. Sin embargo, este operador de multiplicación M_u no tiene rango cerrado, debido a que la condición $u(x) = 0$ μ-c.t.p. no se satisface, ya que

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R} \mid |u(x)| > 0)\}\right) = \mu((-\infty, 0]) > 0.$$

Ejemplo 2.2.10. Considerando el mismo espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ definido anteriormente, el operador de multiplicación $M_u : L^4(\mathbb{R}) \to L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{R})$ con símbolo

$$u(x) = x^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{N}}(x),$$

tiene la propiedad que $u \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R})$ y por esta razón, este operador de multiplicación es acotado. Sin embargo, el conjunto $\mathcal{N}_u = \mathbb{N}$; esto se debe para cada $n \in \mathbb{N}$ el valor $u(A_n) > 0$ y cada átomo es de la forma $A_n = \{n\}$.

Ejemplo 2.2.11. Retomando el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ definido anteriormente, el operador de multiplicación $M_u : L^7(\mathbb{R}) \to L^{\frac{7}{4}}(\mathbb{R})$ con símbolo

$$u(x) = x^{-1}\mathbf{1}_D(x),$$

con $D = \{5, 7, 11, 53\}$ satisface que $u \in L^{\frac{7}{3}}(\mathbb{R})$, y por tanto el operador de multiplicación es acotado y tiene rango cerrado. El conjunto $\mathcal{N}_u$ es $\{5, 7, 11, 53\}$, dado que $u(A_n) > 0$ para $n \in D$ además $u(x) = 0$ μ-c.t.p. en $B = (\infty, 0] \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-1, n))$.

2.2.3. Rango cerrado, caso $p < q$

Ahora se centra la atención en el caso $p < q$. Se usará el respectivo resultado de continuidad y el Teorema 2.2.6 para demostrar el siguiente:

Teorema 2.2.12. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito con descomposición atómica*

$$X = B \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \right),$$

donde $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ son átomos de μ disjuntos dos a dos y B es un conjunto no atómico. Se supone que $u \in L_0(X)$ y que para $1 \leq p < q \leq \infty$ se cumple que $M_u \in \mathscr{B}(L^p(X), L^q(X))$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ *tiene rango cerrado.*

(b) $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ *tiene rango finito.*

(c) El conjunto $\mathcal{N}_u = \{n \in \mathbb{N} \mid u(A_n) \neq 0\}$ *es finito.*

Demostración. Si $u = 0$ μ-c.t.p. sobre X no hay nada que mostrar pues en este caso, $M_u(L^p(X)) = \{0\}$ y claramente tiene rango cerrado. Así que se va a suponer que u no es la función nula. Las demostraciones *(c)*⇒*(b)*⇒*(a)*, son iguales al Teorema 2.2.6. Se va a demostrar la implicación *(a)*⇒*(c)*

(a)⇒*(c)* Por la condición *(a)* del Teorema 2.1.14, se puede decir que $u(x) = 0$ μ-c.t.p. sobre B. Luego, como u no es la función nula, existe $k \in \mathbb{N}$ talque $u(A_k) \neq 0$. De esta manera el conjunto $\mathcal{N}_u$ es no vacío y además se cumple que

$$S_u = \bigcup_{n \in \mathcal{N}_u} A_n.$$

En particular, $\mu(S_u) > 0$ y, al igual que se mostró en el Teorema 2.2.6, se puede definir el símbolo w como

$$w(x) = \frac{1}{u(x)}$$

para $x \in S_u$ y $w(x) = 0$ en $X \setminus S_u$. De aquí que el operador $M_w : L^q(X) \to L^p(X)$ es acotado y por el Teorema 2.1.5 se debe tener que $w \in L^r(X)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$ y además

$$b = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u(A_n)|^r}{\mu(A_n)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\frac{\mu(A_n)}{|u(A_n)|^r}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|w(A_n)|^r \mu(A_n)} < \infty.$$

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$b \geq \frac{1}{|w\left(A_n\right)|^r \mu\left(A_n\right)}$$

y de esta manera

$$|w(A_n)|^r \mu(A_n) \geq \frac{1}{b}.$$

para cada $n \in \mathcal{N}_u$. Se concluye entonces que

$$\sum_{n\in\mathcal{N}_u} \frac{1}{b} \leq \sum_{n\in\mathcal{N}_u} |w(A_n)|^r \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathcal{N}_u} \int_{A_n} |w|^r \, d\mu \leq \int_X |w|^r \, d\mu < \infty$$

y esto solamente ocurre si $\mathcal{N}_u$ es finito. Esto culmina la demostración del resultado. □

Al igual que en el caso $p > q$, se obtiene el siguiente resultado, el cual se sustenta de igual manera.

Corolario 2.2.13. *Si $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ es de rango cerrado con $p < q$, entonces la restricción del símbolo u con respecto a S_u, tiene la propiedad* $\operatorname{ess\,inf} |u|_{S_u}| > 0$.

Ejemplo 2.2.14. Retomando el Ejemplo 2.1.16 $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ el espacio de medida σ-finito con

$$\mu(E) = m(E) + \#(E \cap \mathbb{N})$$

formada por la medida Lebesgue de $\mathbb{R}$ y la medida de conteo para $\mathbb{N}$, el operador de multiplicación $M_u : L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}) \to L^{\frac{7}{2}}(\mathbb{R})$ con símbolo

$$u(x) = 2^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{N}}(x)$$

satisface que $u = 0$ c.t.p. sobre B (conjunto no atómico) y

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u\left(A_n\right)|^s}{\mu\left(A_n\right)} < \infty$$

donde $s = \frac{28}{13}$, y la norma del operador es $\|M_u\| = \frac{1}{2}$. Este operador de multiplicación no tiene rango cerrado, ya que el conjunto $\mathcal{N}_u = \mathbb{N}$, dado que para todo $n \in \mathbb{N}$, $u(A_n) > 0$ y cada átomo es de la forma $A_n = \{n\}$.

Ejemplo 2.2.15. Sea $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, \mu)$ es espacio de medida definido anteriormente, el operador de multiplicación $M_u : L^2(\mathbb{R}) \to L^7(\mathbb{R})$ con símbolo

$$u(x) = (x+8)^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[-7,\pi]}(x)$$

tiene la propiedad que $u = 0$ μ-c.t.p. en

$$B = (\infty, 0] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-1, n)\right)$$

y además también se tiene que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|u(A_n)|^s}{\mu(A_n)} < \infty,$$

ya que $\#(\mathcal{N}_u) = 3$. Más exactamente, los átomos son $\{1\}, \{2\}$ y $\{3\}$, por lo tanto este operador de multiplicación es acotado y tiene rango cerrado.

3 Compacidad y la norma esencial del operador de multiplicación M_u

En este capítulo se darán los argumentos de los resultados que se han obtenidos en esta investigación (véase [2]). Se trata de un nuevo criterio para la compacidad del operador multiplicación actuando sobre los espacios $L^p(X)$ y una estimación de la norma esencial de este operador. El capítulo se completa con la primera sección donde se dan los detalles del criterio que se conoce sobre la compacidad de este operador, el cual fue obtenido por R.K. Singh y A. Kumar en [12].

3.1. Compacidad del operador multiplicación en $L^p(X)$

En esta sección se dan los detalles de los resultados obtenidos por Singh y Kumar [12] sobre la compacidad del operador multiplicación actuando en los espacios $L^p(X)$; de hecho, los resultados que se presentan en esta sección son un poco más general ya que los autores antes citados obtuvieron sus resultados en $L^2(X)$. Como antes, se asume que (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finito; la clave de los resultados de esta sección está en considerar el siguiente conjunto:

$$Z_\epsilon^u = \{f \in L^p(X) \mid f(x) = 0 \quad \mu\text{-c.t.p. sobre } X \setminus X_\epsilon^u\},$$

donde $\epsilon > 0$ es fijo y

$$X_\epsilon^u = \{x \in X : |u(x)| > \epsilon\}.$$

Entonces Z_ϵ^u satisface la siguiente propiedad:

Proposición 3.1.1. *Se asume que (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finito y que $p \geq 1$. Para cada $\epsilon > 0$ el conjunto Z_ϵ^u es un subespacio cerrado de $L^p(X)$.*

Demostración. Se fija $\epsilon > 0$. En primer lugar, se va a ver que el conjunto Z_ϵ^u es un espacio vectorial. Se observa que $Z_\epsilon^u \neq \emptyset$ ya que la función nula esta en Z_ϵ^u. Ahora, si $f, g \in L^p(X)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces para cada $x \in X \setminus X_\epsilon^u$ se cumple

$$\alpha f(x) + g(x) = \alpha(0) + 0 = 0$$

con lo cual $\alpha f + g \in Z_\epsilon^u$, y así Z_ϵ^u es un subespacio de $L^p(X)$.

Ahora se va a mostrar que Z_ϵ^u es un conjunto cerrado de $L^p(X)$. Con este fin, sea $f \in \overline{Z_\epsilon^u}$; entonces existe una sucesión $\{f_n\} \in Z_\epsilon^u$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Luego, por el Teorema 1.3.9, se tiene que $f_n \to f$ en medida y consecuentemente, por el Teorema de Riesz 1.3.8, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ tal que $f_{n_k} \to f$ puntualmente μ-c.t.p. sobre X. De esta manera

$$\mu\left(\{x \in X \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| \neq 0\}\right) = 0.$$

Esto muestra que $f \in Z_\epsilon^u$, y por tanto Z_ϵ^u es un conjunto cerrado de $L^p(X)$. Esto culmina la demostración de la proposición. □

Como una consecuencia importante de la proposición anterior se tiene el siguiente resultado que fue establecido por Singh y Kumar [12] para el caso $p = 2$.

Teorema 3.1.2. *Sea $u \in L^\infty(X)$. El operador multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es compacto si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, el espacio Z_ϵ^u tiene dimensión finita. .*

Demostración. Se supone primero que el operador multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es compacto. Si u es la función nula (c.t.p), entonces no hay nada que mostrar; así que se va a suponer que la función u no es nula al menos en un conjunto de medida positiva.

Sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Entonces Z_ϵ^u es un subespacio cerrado de $L^p(X)$, con lo cual, el operador inclusión $i_{Z_\epsilon^u} : Z_\epsilon^u \to L^p(X)$ es continuo o acotado.

Ahora se considera el operador $\hat{M}_u = M_u \circ i_{Z_\epsilon^u} : Z_\epsilon^u \to L^p(X)$, el cual se puede ver como la restricción del operador M_u al subespacio cerrado Z_ϵ^u. Este operador $\hat{M}_u$ es compacto, pues es un hecho conocido que la composición de un operador continuo con un compacto da como resultado un operador compacto (véase Proposición 1.5.6 en los preliminares). Todavía más, este operador $\hat{M}_u$ es inyectivo, pues si $f \in Z_\epsilon^u$ con $f \neq 0$ μ-c.t.p. y se tiene que $\hat{M}_u(f) = 0$ μ-c.t.p. en $L^p(X)$, entonces existe $F \subseteq X_\epsilon^u$ tal que $\mu(F) > 0$ y $f(x) \neq 0$ μ-c.t.p. en F, además $|u(x)| > \epsilon$ para $x \in F$, con lo cual

$$u(x)f(x) \neq 0 \quad \mu\text{- c.t.p. en } F$$

contradiciendo el hecho que $f \in \operatorname{Ker} M_u$, es decir $\operatorname{Ker} M_u = \{0\}$.

Ahora se va a demostrar que el rango del operador $\hat{M}_u = M_u \circ i_{Z_\epsilon^u} : Z_\epsilon^u \to L^p(X)$ es justamente Z_ϵ^u. En efecto, si $g \in \hat{M}_u(Z_\epsilon^u)$, entonces existe $f \in Z_\epsilon^u$ tal que

$$g(x) = u(x)f(x),$$

para casi todo $x \in X$. En particular, para cada $x \in X \setminus X_\epsilon^u$ se cumple $u(x)f(x) = 0$ y así g se anula en $X \setminus X_\epsilon^u$, excepto posiblemente en un conjunto de medida cero; así que redefiniendo la función g en ese conjunto de medida cero, se puede suponer que g se anula en todo $X \setminus X_\epsilon^u$ y por tanto $g \in Z_\epsilon^u$. Esto demuestra que $\hat{M}_u\left(Z_\epsilon^u\right) \subseteq Z_\epsilon^u$.

Ahora se va a establecer que $Z_\epsilon^u \subseteq \hat{M}_u\left(Z_\epsilon^u\right)$. Con este fin, para $g \in Z_\epsilon^u$, se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{u(x)}, & x \in X_\epsilon^u, \\ 0, & x \in X \setminus X_\epsilon^u. \end{cases}$$

Claramente $g = u \cdot f$ en X. Además, $f(x) = 0$ para cada $x \in X \setminus X_\epsilon^u$; así que falta verificar que $f \in L^p(X)$. En efecto, como $g \in L^p(X)$, se tiene

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \int_{X_\epsilon^u} \left|\frac{g(x)}{u(x)}\right|^p d\mu \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_{X_\epsilon^u} |g(x)|^p \, d\mu \leq \frac{1}{\epsilon^p} \|g\|_p^p < \infty,$$

donde se ha usado el hecho que $|u(x)| \geq \epsilon$ para cada $x \in X_\epsilon^u$. Con esto queda establecido que $Z_\epsilon^u \subseteq \hat{M}_u\left(Z_\epsilon^u\right)$.

En conclusión, el operador $\hat{M}_u = M_u \circ i_{Z_\epsilon^u} : Z_\epsilon^u \to Z_\epsilon^u$ es compacto y biyectivo y esto sólo ocurre, según el Teorema 1.5.5, si y sólo si el espacio Z_ϵ^u tiene dimensión finita. Esto demuestra la implicación directa.

Ahora se va a demostrar el recíproco; se asume que para cada $\epsilon > 0$, el espacio Z_ϵ^u tiene dimensión finita. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera la función símbolo $u_n = u \cdot \mathbf{1}_{X_{1/n}^u}$. Entonces

$$\|u_n\|_\infty \leq \|u\|_\infty < \infty$$

Así, cada operador $M_{u_n} : L^p(X) \to L^p(X)$ es continuo o acotado. Aún más, por definición de $X_{1/n}^u$ se tiene que

$$\|u - u_n\|_\infty = \left\|u - u \cdot \mathbf{1}_{X_{1/n}^u}\right\|_\infty = \left\|u \cdot \mathbf{1}_{X \setminus X_{1/n}^u}\right\|_\infty \leq \frac{1}{n}$$

pues $|u(x)| \leq \frac{1}{n}$ para todo $x \in X \setminus X_{1/n}^u$. Esto demuestra que

$$\lim_{n \to \infty} \|u - u_n\|_\infty = 0$$

y consecuentemente

$$\lim_{n \to \infty} \|M_{u_n} - M_u\| = \lim_{n \to \infty} \|M_{u_n - u}\| = \lim_{n \to \infty} \|u - u_n\|_\infty = 0,$$

donde se ha usado el Teorema 2.1.1 en la segunda igualdad. Con esto se puede decir que $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es el límite de los operadores M_{u_n}. La conclusión entonces será consecuencia del resultado comentado antes del Teorema 1.5.5 si se logra demostrar que los operadores $M_{u_n} : L^p(X) \to L^p(X)$ son compactos. De hecho, se va a establecer que estos operadores M_{u_n} tienen rango de dimensión finita, demostrando que $M_{u_n}\left(L^p(X)\right) = Z_{1/n}^u$, el cual tiene dimensión finita por hipótesis.

En efecto, si $g \in M_{u_n}(L^p(X)) \subseteq L^p(X)$, entonces existe $f \in L^p(X)$ tal que $g = u_n \cdot f$ μ-c.t.p. en X. Luego, por la definición de u_n se tiene que $g = u \cdot \mathbf{1}_{X^u_{1/n}} \cdot f$ μ-c.t.p. en X y por definición de función característica, $g = 0$ para $X \setminus X^u_{1/n}$, de donde $g \in Z^u_{1/n}$. Esto demuestra que $M_{u_n}(L^p(X)) \subseteq Z^u_{1/n}$.

Por otra parte, si se tiene una función $h \in Z^u_{1/n} \subseteq L^p(X)$, entonces $h(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus X^u_{1/n}$, con lo cual, definiendo la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h(x)}{u(x)}, & x \in X^u_\epsilon, \\ 0, & x \in X \setminus X^u_\epsilon, \end{cases}$$

se concluye, como antes, que $f \in L^p(X)$ y $h = u \cdot f$ en X. Esto demuestra que la inclusión $Z^u_{1/n} \subseteq M_{u_n}(L^p(X))$ es verdadera y la prueba del resultado está completa. □

Se ilustra el resultado anterior con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.3. Se considera el espacio de medida $((0,1), \mathcal{M}, m)$, donde $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra de los subconjuntos Lebesgue-medibles de $(0,1)$ y m es la medida de Lebesgue. Se considera la función medible $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \end{cases}$$

cuya gráfica es

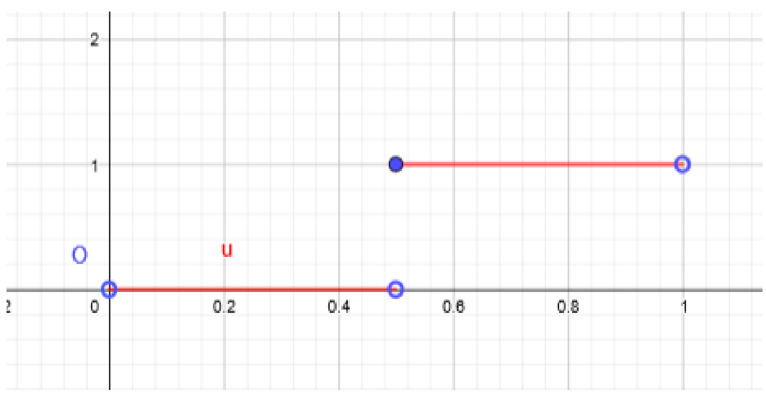

Figura **3.1.1**: Símbolo u

Se puede observar que $\|u\|_\infty = 1$ y por el Teorema 3.1.2, esta función u define un operador multiplicación $M_u \in \mathscr{B}(L^p(0,1))$. Todavía más, para $\epsilon > 0$ se tiene que

$$X^u_\epsilon = \{x \in (0,1) : |u(x)| > \epsilon\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \epsilon \geq 1, \\ \left[\frac{1}{2}, 1\right), & \text{si } 0 < \epsilon < 1. \end{cases}$$

Así que para $0 < \epsilon < 1$ se tiene que

$$Z^u_\epsilon = \left\{ f \in L^p(0,1) : f(x) = 0 \ m\text{-c.t.p. sobre } \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, se definen los conjuntos medibles

$$B_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Se tiene que $m(B_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que estos conjuntos son disjuntos dos a dos y por esta razón, las funciones $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{B_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1) \setminus B_n, \\ 1, & x \in B_n, \end{cases}$$

son linealmente independiente y como

$$\int_{(0,1)} |f_n|^p \, dm = m(B_n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} > 0,$$

entonces para valores de $\epsilon \in (0,1)$ se cumple que $\dim(Z_\epsilon^u) = \infty$ lo cual significa que este operador multiplicación $M_u : L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ no es compacto. ■

Revisando el ejemplo anterior, se puede ver que el operador $M_u : L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ no es compacto porque la medida exterior de Lebesgue en $(0,1)$ no es atómica y la función u no es la nula. De hecho el único operador multiplicación que es compacto en espacios de medidas no atómico es justamente el operador nulo (véase Corolario 2 en [4] Castillo, Rafeiro, Ramos-Fernández y Salas-Brown), tal como se muestra en el siguiente resultado.

Corolario 3.1.4. *Se supone que (X, Σ, μ) es un espacio de medida no atómica, que $u \in L^\infty(X)$ y que $p \geq 1$. El operador multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es compacto si y sólo si $u = 0$ μ-c.t.p. (con lo cual M_u es el operador nulo).*

Demostración. Se supone que el operador multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es compacto y que $u \neq 0$ μ-c.t.p., esto es $\|u\|_\infty > 0$. De esta manera, existe $\epsilon > 0$, tal que $\mu(X_\epsilon^u) > 0$. De lo contrario, se tendría que $\mu(X_\epsilon^u) = 0$ para todo $\epsilon > 0$ y de aquí que

$$\|u\|_\infty = \text{ínf}\{\epsilon \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |u(x)| > \epsilon\}) = 0\} = \text{ínf}\{\epsilon \geq 0 \mid \mu(X_\epsilon^u) = 0\} = 0.$$

Por tanto $\|u\|_\infty = 0$, contradiciendo el hecho que $u \neq 0$ μ-c.t.p.

Según el Teorema 3.1.2, para este valor de $\epsilon > 0$, se tiene que el espacio Z_ϵ^u tiene dimensión finita pues se está suponiendo que el operador $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es compacto.

Como μ es no atómica, existe $E_1 \subset X_\epsilon^u$ medible tal que $0 < \mu(E_1) < \infty$, y por el Teorema 1.2.23, es posible construir una sucesión $\{E_n\}$ de conjuntos medibles tales que $E_{n+1} \subsetneq E_n$ y $\mu(E_{n+1} \setminus E_n) > 0$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función medible $\mathbf{1}_{E_n}$ pertenece a Z_ϵ^u pues ciertamente $\mathbf{1}_{E_n} \in L^p(X)$ y como además $E_n \subseteq X_\epsilon^u$ se puede ver que $\mathbf{1}_{E_n}(x) = 0$ para todo $x \in X_\epsilon^u$.

Ahora se va a establecer que la sucesión $\{\mathbf{1}_{E_n}\}$ es linealmente independiente. En primer lugar, se observa que para n, m enteros positivos distintos tales que $n > m$, se tiene que $0 < \mu(E_n) < \mu(E_m)$ y que $\mu\left(E_m \setminus E_n\right) > 0$. Luego, si consideramos escalares c_1, c_2 tales que

$$c_1\mathbf{1}_{E_n} + c_2\mathbf{1}_{E_m} = 0, \quad \mu\text{-c.t.p.} \tag{3.1.1}$$

entonces, integrando sobre $E_m \setminus E_n$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{E_m \setminus E_n} c_1\mathbf{1}_{E_n} + c_2\mathbf{1}_{E_m}\, d\mu \\ &= c_2\mu(E_m \setminus E_n) \end{aligned}$$

ya que $\mu(E_m \setminus E_n) > 0$, entonces $c_2 = 0$. Sustituyendo c_2 en (3.1.1), e integrando sobre E_n, se obtiene

$$c_1\mu(E_n) = 0$$

y de esta manera $c_1, c_2 = 0$, esto muestra que $\mathbf{1}_{E_n}$ y $\mathbf{1}_{E_m}$ son linealmente independientes. Usando este argumento con cada cantidad finita de elementos de $\{\mathbf{1}_{E_n}\}$ se concluye que Z_ϵ^u tiene una cantidad infinita de elementos linealmente independientes y por esta razón $\dim\left(Z_\epsilon^u\right) = \infty$. Esto es una contradicción y se tiene la prueba de la primera implicación.

Finalmente, si $u = 0$ μ-c.t.p., entonces M_u es el operador nulo, el cual es compacto. Esto culmina la demostración del corolario. □

La demostración del corolario anterior también permite concluir lo siguiente:

Corolario 3.1.5. *Sea*

$$X = B \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

la descomposición de X en su parte atómica y no atómica, siendo B su parte no atómica y sea $M_u \in \mathscr{B}(L^p(X))$. Si el operador $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es compacto, entonces $u = 0$ en casi toda parte sobre B.

Demostración. Si $\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty > 0$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\mu\left(\{x \in B : |u(x)| > \epsilon\}\right) > 0.$$

Luego, como X es σ-finito, existe un conjunto medible $E_1 \subseteq B$ tal que $0 < \mu\left(E_1\right) < \infty$ y se puede construir la sucesión $\{E_n\}$ que aparece en la demostración del Corolario 3.1.4. Con esto, para este $\epsilon > 0$, se establece que $\dim\left(Z_\epsilon^u\right) = \infty$ y el operador $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ no es compacto. □

Finalmente, también se tiene la siguiente consecuencia.

Corolario 3.1.6. *Se supone que $p \geq 1$ y que $M_u \in \mathscr{B}(L^p(X))$ es un operador inyectivo. Si el operador $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es compacto, entonces μ es una medida atómica.*

Demostración. Se supone que μ no es una medida atómica; es decir, se supone que X contiene un subconjunto B que no es atómico. Por el Corolario 3.1.4 ya se sabe que $u = 0$ en casi todo B y por definición de conjuntos no atómicos se tiene que $\mu(B) > 0$. Con lo cual la función medible $\mathbf{1}_B$ no es la nula; pero satisfaces que

$$M_u(\mathbf{1}_B) = u \cdot \mathbf{1}_B = 0 \quad (\mu\text{-c.t.p.})$$

Lo que significa que $\operatorname{Ker}(M_u) \neq \{0\}$ y por tanto este operador M_u no es inyectivo. □

3.2. Un nuevo criterio para la compacidad

El Teorema 3.1.4 ciertamente caracteriza los símbolos $u \in L^\infty(X)$ que definen operadores de multiplicación compactos en $L^p(X)$; pero dicha caracterización depende en ver si el espacio

$$Z_\epsilon^u = \{f \in L^p(X) \mid f(x) = 0 \quad \mu\text{-c.t.p. sobre } X \setminus X_\epsilon^u\},$$

tiene o no dimensión finita para cada $\epsilon > 0$. En la práctica, establecer este hecho podría ser una tarea un poco difícil; por esta razón, en esta sección se aprovecha la descomposición atómica de un espacio de medida para establecer otro criterio (véase [2]) el cual podría ser más fácil de verificar que la condición dada por Singh y Kumar [12].

El criterio que se ofrece y que es uno de los aportes o resultados principales de esta investigación es el siguiente:

Teorema 3.2.1. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y completo con descomposición atómica*

$$X = B \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \right),$$

donde $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ son átomos de μ y B es un conjunto no atómico. Se supone que $u \in L^\infty(X)$ y que $p \geq 1$. El operador de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es compacto si y sólo si

$$\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty + \lim_{k\to\infty} |u(A_k)| = 0. \tag{3.2.2}$$

Demostración. Se supone que $\|u\|_\infty \neq 0$ μ-c.t.p. en X y

$$\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty + \lim_{k\to\infty} |u(A_k)| = 0.$$

De esta manera $u \cdot \mathbf{1}_B = 0$ μ-c.t.p. en B. Por otro lado, para cada $N \in \mathbb{N}$, se considera la función

$$u_N(x) = \sum_{k=1}^{N} u(A_k)\mathbf{1}_{A_k}(x), \quad x \in X.$$

Se puede ver que para cada $x \in X$ se cumple

$$|u(x) - u_N(x)| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} u(A_k)\, \mathbf{1}_{A_k}(x) \right|$$

y como los átomos A_k son disjuntos dos a dos y la función u es constante en esos conjuntos, se obtiene que

$$\|u - u_N\|_\infty = \sup_{k \geq N+1} |u(A_k)|,$$

así que la hipótesis implica que

$$\lim_{N\to\infty} \|u - u_N\|_\infty = \lim_{N\to\infty} \sup_{k\geq N+1} |u(A_k)| = \limsup_{N\to\infty} |u(A_N)| = 0.$$

Todavía más, $u_N \in L^\infty(X)$, ya que $\|u \cdot \mathbf{1}_N\|_\infty \leq \|u\|_\infty < \infty$ y por el Teorema 2.1.1, la función medible u_N define un operador de multiplicación $M_{u_N} \in \mathscr{B}(L^p(X))$. Así que también se tiene

$$\lim_{N\to\infty} \|M_u - M_{u_N}\| = \lim_{N\to\infty} \|M_{u-u_N}\| = \|u - u_N\|_\infty = 0$$

lo cual significa que M_u es el límite (uniforme) de los operadores M_{u_N}. Así que por el comentario anterior al Teorema 1.5.5, es suficiente mostrar que cada operador M_{u_N} es compacto; de hecho, se va a mostrar que cada operador M_{u_N} tiene rango de dimensión finita.

Para tal fin, se fija $N \in \mathbb{N}$ y se toma $g \in M_{u_N}(L^p(X))$, entonces existe $f \in L^p(X)$ tal que $g = u_N \cdot f$. En particular, se tiene que $g = 0$ en casi todo $B \cup \left(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} A_k\right)$. También, como g es medible, la Proposición 1.4.1 implica que esta función es constante en cada uno de los átomos; por tal motivo, para cada $k = 1, 2, \cdots, N$ se puede definir $c_k = g(A_k)$ y entonces se tiene que

$$g = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{1}_{A_k},$$

esto es, g es combinación lineal de las funciones $\{\mathbf{1}_{A_1}, \mathbf{1}_{A_2}, \cdots, \mathbf{1}_{A_N}\}$ los cuales son linealmente independientes pues los A_k son disjuntos dos a dos y tienen medidas positivas. Se puede suponer que $u(A_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, \cdots, N$, pues g vale cero en los átomos donde u se anula. Luego, con esta condición, para cada $k = 1, 2, \cdots, N$, las funciones

$$h_k = \frac{1}{u(A_k)} \mathbf{1}_{A_k}$$

pertenece a $L^p(X)$ pues $\mu(A_k) < \infty$ y además

$$\mathbf{1}_{A_k} = u_N \cdot h_k$$

en casi todo X; lo cual significa que $\mathbf{1}_{A_k} \in M_{u_N}(L^p(X))$ y por tanto

$$M_{u_N}(L^p(X)) = \operatorname{gen}(\{\mathbf{1}_{A_k} : k = 1, 2, \cdots, N\}).$$

Esto es, $\dim(M_{u_N}(L^p(X))) < \infty$ y los operadores M_{u_N} son compactos. En conclusión el operador $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es un operador compacto.

Ahora se va a mostrar el recíproco. Se supone que el operador $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es un operador compacto y que

$$\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty + \lim_{k\to\infty} |u\,(A_k)\,| > 0 \tag{3.2.3}$$

esto quiere decir que $\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty > 0$ o $\lim_{k\to\infty} |u\,(A_k)\,| > 0$.

Si $\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty > 0$, entonces por definición del supremo esencial, para $\epsilon_0 = \frac{1}{2}\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty$, se cumple que

$$\mu(B^u_{\epsilon_0}) = \mu(\{x \in\ B \mid \|u(x)\| > \epsilon_0\}) > 0.$$

Luego, como el conjunto B es no atómico entonces $B^u_{\epsilon_0}$ es un conjunto no atómico y por lo tanto, el Teorema 1.2.23, dice que es posible obtener una sucesión de subconjuntos de $B^u_{\epsilon_0}$, $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ tales que

$$B_{n+1} \subset B_n \text{ y } \mu(B_n \setminus B_m) > 0 \quad \text{para todo } m > n.$$

De esta manera, se puede considerar el conjunto $\{\mathbf{1}_{B_n}\}_{n=1}^\infty \subset Z^u_{\epsilon_0}$, el cual es un conjunto linealmente independiente. Por el Teorema 3.1.2 el espacio $Z^u_{\epsilon_0}$ tiene dimensión finita lo cual es una contradicción y de esta manera $\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty = 0$.

Similarmente, si $\lim_{k\to\infty} |u\,(A_k)\,| > 0$, entonces existe $\epsilon_1 > 0$ y una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{A_n\}$ tal que $|\mu(A_{n_k})| > \epsilon_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, el conjunto $\left\{\mathbf{1}_{A_{n_k}}\right\}_{k=1}^\infty \subset Z^u_{\epsilon_1}$, es linealmente independiente por que los átomos tiene medidas positivas y son disjuntos dos a dos. Pero por el Teorema 3.1.2 el espacio $Z^u_{\epsilon_1}$ tiene dimensión finita lo cual es una contradicción y de esta manera $\lim_{k\to\infty} |u\,(A_k)\,| = 0$.
Esto muestra el resultado deseado. $\square$

Se ilustra el uso del teorema anterior con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.2. Se consideran los espacios de medidas $((0,1), \mathscr{M}, m)$ y $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}), \#)$ y se define $X = (0,1) \cup \mathbb{N}$,

$$\Sigma = \{C \cup D : \ C \in \mathscr{M} \ \wedge \ D \in \wp(\mathbb{N})\}\,,$$

es una σ-álgebra de subconjuntos de X y para $F = C \cup D \in \Sigma$ con $C \in \mathscr{M}$ y $D \in \wp(\mathbb{N})$ se puede definir

$$\mu(F) := m(C) + \#(D).$$

Entonces (X, Σ, μ) es un espacio de medida con parte no atómica $B = (0,1)$ y siendo sus átomos los unitarios $A_n = \{n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Según el Teorema 3.2.1, la función

$$u_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1), \\ \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

cuya gráfica es

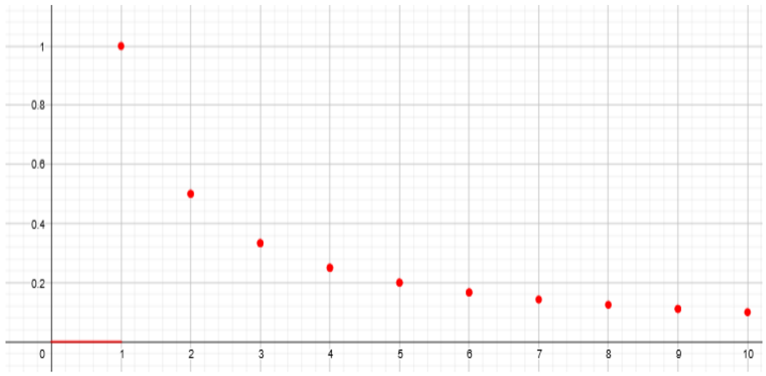

Figura **3.2.2**: Símbolo u_1

define un operador multiplicación M_{u_1} que es compacto en $L^p(X)$ para cualquier $p \geq 1$. Mientras que el operador M_{u_2} definido por el símbolo

$$u_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1), \\ \frac{x-1}{x}, & x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

cuya gráfica es

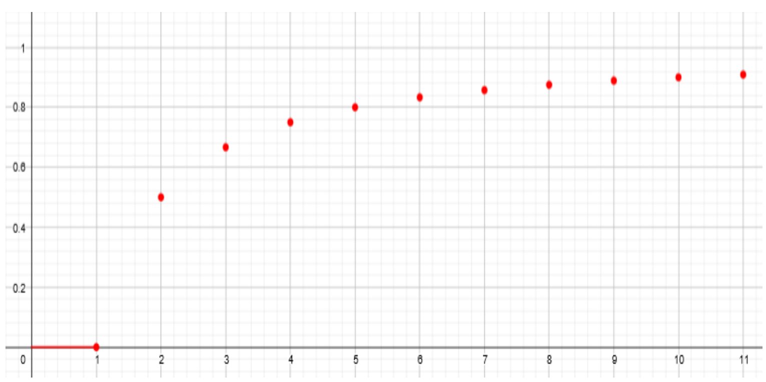

Figura **3.2.3**: Símbolo u_2

no es compacto en $L^p(X)$ pues

$$\lim_{k\to\infty} |u_2(A_k)| = 1 \neq 0.$$

En la Sección 3.4 se verá que "tan lejos" está el operador M_{u_2} de la clase $\mathscr{B}_0(L^p(X))$ de los operadores compactos en $L^p(X)$.

3.3. Operadores Multiplicación en $L^p(X)$ con rango de dimensión finita

La clave de la demostración del Teorema 3.2.1 fue considerar las funciones u_N las cuales se pueden ver como las restricciones del símbolo u a la unión de los primeros N átomos. Estas funciones u_N solamente son distintas de cero en una cantidad finita de átomos y por esta razón definen operadores multiplicación $M_{u_N} : L^p(X) \to L^p(X)$ con rango finito; es decir, tales que $\dim\left(M_{u_N}\left(L^p(X)\right)\right) < \infty$. El objetivo de esta sección es caracterizar aquellos símbolos $u \in L^\infty(X)$ que definen un operador multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ con rango finito. El resultado que se ha obtenido en esta investigación es el siguiente:

Teorema 3.3.1. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y completo con descomposición atómica*

$$X = B \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

donde $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ son átomos de μ y B es un conjunto no atómico. Se supone que $u \in L^\infty(X)$ y que $p \geq 1$. El operador de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ tiene rango finito si y sólo si $\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty = 0$ y $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} : \ u(A_n) \neq 0\}$ es finito.

Demostración. Se supone primero que el operador de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ tiene rango finito. En particular, por el Teorema 3.1.2, este operador también es compacto y por el Corolario 3.1.5 se obtiene que $u = 0$ en casi todo B; con lo cual $\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty = 0$. Luego, falta mostrar que $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} : \ u(A_n) \neq 0\}$ es finito.

Se supone entonces que $\mathcal{N}$ no es finito; entonces existe una sucesión de átomos $\{A_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tales que $u(A_{n_k}) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. El conjunto de las funciones medibles $\left\{\mathbf{1}_{A_{n_k}}\right\}$ es linealmente independiente, ya que los átomos son disjuntos dos a dos, tienen medida positiva y son elementos de $L^p(X)$ pues los átomos tienen medida finita. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$, la función $h_k = \frac{1}{u\left(A_{n_k}\right)}\mathbf{1}_{A_{n_k}}$ también pertenece a $L^p(X)$ y se cumple que

$$\mathbf{1}_{A_{n_k}} = u \cdot h_k, \qquad \mu\text{- c.t.p. sobre } X,$$

y esto muestra que $\operatorname{span}\left\{\mathbf{1}_{A_{n_k}} : \ k \in \mathbb{N}\right\} \subseteq M_u\left(L^p(X)\right)$, contradiciendo que el operador de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ tiene rango finito. Se concluye entonces que $\mathcal{N}$ es finito y se tiene lista la prueba de la implicación directa.

Se va a demostrar ahora el recíproco. Se supone que $\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty = 0$ y que

$$\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} : \ u(A_n) \neq 0\}$$

es finito, se va a mostrar que el operador de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ tiene rango finito. Sin perder generalidad, se puede suponer que $\mathcal{N} = \{1, 2, \cdots, N\}$, para algún

$N \in \mathbb{N}$. Para cada $h \in \operatorname{Ran}(M_u)$ se puede encontrar $f \in L^p(X)$ tal que $h = u \cdot f$. Luego, por hipótesis se puede ver que $\|h \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty = 0$ pues $u = 0$ μ-c.t.p. sobre B y también

$$h(A_k) = 0, \qquad \forall\, k = N+1, N+2, \cdots$$

pues justamente $u(A_k) = 0$ para esto valores de k. De aquí que, por la Proposición 1.4.2, la función h se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} h &= h \cdot \mathbf{1}_B + \sum_{k=1}^{\infty} h \cdot \mathbf{1}_{A_k} = \sum_{k=1}^{N} h \cdot \mathbf{1}_{A_k} \\ &= \sum_{k=1}^{N} h(A_k) \cdot \mathbf{1}_{A_k} = \sum_{k=1}^{N} c_k \, \mathbf{1}_{A_k}, \end{aligned}$$

donde $c_k = h(A_k)$ para todo $k = 1, 2, \cdots, N$; es decir, h es combinación lineal de las funciones $\{\mathbf{1}_{A_1}, \mathbf{1}_{A_2}, \cdots, \mathbf{1}_{A_N}\}$. Todavía más, como $u(A_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, \cdots, N$ y los átomos tiene medidas finitas, se cumple que $g_k = \frac{1}{u(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} \in L^p(X)$ y, por esta razón,

$$\mathbf{1}_{A_k} = u \cdot g_k$$

también es un elemento de $M_u(L^p(X))$. Con esto se concluye que

$$M_u(L^p(X)) = \operatorname{span}\{\mathbf{1}_{A_1}, \mathbf{1}_{A_2}, \cdots, \mathbf{1}_{A_N}\}.$$

En particular, $\dim(M_u(L^p(X))) = N$, lo cual completa la demostración del resultado. □

Ejemplo 3.3.2. Se considera el espacio de medida (X, Σ, μ) definido en el Ejemplo 3.2.2. La función

$$u_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1), \\ \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

define un operador multiplicación $M_{u_1} : L^p(X) \to L^p(X)$ compacto que no tiene rango finito ya que

$$\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} : \, u_1(A_n) \neq 0\} = \mathbb{N}$$

no es un conjunto finito.

3.4. La norma esencial del operador multiplicación en $L^p(X)$

En esta sección se presenta el otro aporte que se obtuvo en este trabajo de investigación (véase [2]) y que trata sobre una estimación de la norma esencial del operador multiplicación con símbolo u actuando sobre el espacio $L^p(X)$ con $p \in (1, \infty)$. Se recuerda que para una función medible $u \in L^\infty(X)$, la norma esencial de M_u se denota y define por

$$\|M_u\|_e = \inf\{\|M_u - K\| : \, K \in \mathscr{B}_0(L^p(X))\},$$

donde $\mathscr{B}_0\left(L^p(X)\right)$ denota el espacio de todos los operadores compactos en $L^p(X)$. Geométricamente, $\|M_u\|_e$ mide la distancia de M_u a la clase $\mathscr{B}_0\left(L^p(X)\right)$ de los operadores compactos en $L^p(X)$. El resultado que se ha obtenido es el siguiente.

Teorema 3.4.1. *Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y completo con descomposición atómica*

$$X = B \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \right),$$

donde $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ son átomos de μ y B es un conjunto no atómico. Se supone que $u \in L^\infty(X)$ y que $1 < p < \infty$. Existe una constante $C(p) > 0$, que depende sólo de p, tal que

$$C(p) \left(\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty + \limsup_{N\to\infty} |u(A_N)| \right) \leq \|M_u\|_e \leq \|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty + \limsup_{N\to\infty} |u\left(A_N\right)|. \quad (3.4.4)$$

Demostración. Primero se va a establecer la cota superior en (3.4.4). Para cada $N \in \mathbb{N}$, se considera la función medible

$$u_N = \sum_{I=1}^{N} u(A_k) \mathbf{1}_{A_k}.$$

Como antes, $u_N \in L^\infty(X)$ pues $\|u_N\|_\infty \leq \|u\|_\infty$ y además $u_N(x) = 0$ para todo $x \in B \cup \left(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} A_k \right)$. Por esta razón, se puede escribir

$$\|u_N \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty + \lim_{k\to\infty} |u_N(A_k)| = 0,$$

así que el Teorema 3.2.1 implica que el operador $M_{u_N} : L^p(X) \to L^p(X)$ es compacto. Luego, por definición de normal esencial de M_u, para todo $N \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\begin{aligned} \|M_u\|_e &\leq \|M_u - M_{u_N}\| \\ &= \|u - u_N\|_\infty \\ &= \max \left\{ \|(u - u_N) \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty, \sup_{n\in\mathbb{N}} |(u - u_N)(A_n)| \right\} \\ &\leq \|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty + \sup_{n\geq N+1} |u_N(A_n)|, \end{aligned}$$

donde se ha usado la Proposición 1.4.3. Por tanto, tomando límite cuando $N \to \infty$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|M_u\|_e &\leq \lim_{N\to\infty} \left(\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty + \sup_{n\geq N+1} |u_N(A_n)| \right) \\ &= \|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty + \limsup_{N\to\infty} |u_N(A_n)|. \end{aligned}$$

Esto da la cota superior de $\|M_u\|_e$ en (3.4.4).

Ahora se va a establecer la cota inferior $\|M_u\|_e$. Para ello se consideran dos casos, dependiendo del valor de $\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty$:

Caso I. Si $\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty > 0$, por definición del supremo esencial para $\epsilon_0 = \frac{1}{2}\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty$ se tiene que

$$\mu\left(B^u_{\epsilon_0}\right) := \mu\left(\{x \in B \mid |u(x)| > \epsilon_0\}\right) = \mu\left(\left\{x \in X \mid |u(x)\mathbf{1}_{B_{\epsilon_0}}(x)| > \epsilon_0\right\}\right) > 0.$$

Como B es no atómico, $B^u_{\epsilon_0}$ es un conjunto no atómico y, por tanto, el Teorema 1.2.23, permite construir una sucesión de subconjuntos medibles de $B^u_{\epsilon_0}$, $\{B_n\}_{n=1}^\infty$, tal que $\mu(B_1) < \infty$,

$$B_{n+1} \subseteq B_n \text{ y } \mu(B_n \setminus B_m) > 0 \quad \text{para todo } m > n$$

además $\mu(B_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Se considera entonces la sucesión de funciones medibles $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ definidas por

$$f_n = \frac{1}{\|\mathbf{1}_{B_n}\|_p}\mathbf{1}_{B_n} + \frac{1}{\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p}\mathbf{1}_{A_n}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_p &= \left(\int_X |f_n|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_X \frac{1}{\|\mathbf{1}_{B_n}\|_p^p}\mathbf{1}_{B_n} \, d\mu + \frac{1}{\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p^p}\mathbf{1}_{A_n} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{\|\mathbf{1}_{B_n}\|_p^p}\|\mathbf{1}_{B_n}\|_p^p + \frac{1}{\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p^p}\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

es decir, $f_n \in L^p(X)$ para todo $p > 1$. Se mostrará que para $p > 1$, la sucesión $\{f_n\}$ converge débilmente a la función nula. Con este fin, sea $g \in L^q(X)$ cualquiera, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\int_X g \cdot f_n d\mu\right| &\leq \int_X |g \cdot f_n| d\mu \\
&= \int_X |g| \cdot |f_n| d\mu \\
&= \int_X |g| \cdot \left(\frac{1}{\|\mathbf{1}_{B_n}\|_p}\mathbf{1}_{B_n} + \frac{1}{\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p}\mathbf{1}_{A_n}\right) d\mu \\
&\leq \int_X |g| \cdot \frac{1}{\|\mathbf{1}_{B_n}\|_p}\mathbf{1}_{B_n} d\mu + \int_X |g| \cdot \frac{1}{\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p}\mathbf{1}_{A_n} d\mu;
\end{aligned}$$

así que por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
\left|\int_X g \cdot f_n d\mu\right| &\leq \|g \cdot \mathbf{1}_{B_n}\|_q \left\|\frac{1}{\|\mathbf{1}_{B_n}\|_p}\mathbf{1}_{B_n}\right\|_p + \|g \cdot \mathbf{1}_{A_n}\|_q \left\|\frac{1}{\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p}\mathbf{1}_{A_n}\right\|_p \\
&= \|g \cdot \mathbf{1}_{B_n}\|_q + \|g \cdot \mathbf{1}_{A_n}\|_q.
\end{aligned}$$

Ya que $\|g\|_q^q$ se puede escribir como

$$\int_B |g|^q \, d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |g|^q \, d\mu,$$

Por el Corolario 1.4.5

$$\lim_{k\to\infty} \|g \cdot \mathbf{1}_{A_k}\|_q^q = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} |g|^q d\,\mu = 0.$$

También, por el Teorema 1.1.26 (continuidad de la integral),

$$\lim_{n\to\infty} \|g \cdot \mathbf{1}_{B_n}\|_q = 0.$$

Esto muestra que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_X g \cdot \, f_n \, d\mu \right| = 0, \tag{3.4.5}$$

y como el espacio dual de $L^p(X)$ se puede identificar con $L^q(X)$ se concluye entonces que $f_n \to 0$ débilmente.

Se considera ahora cualquier operador compacto $K : L^p(X) \to \, L^p(X)$; se mostrará que

$$\lim_{n\to\infty} \|K(f_n)\|_p = 0.$$

Con este fin, se supone lo contrario; suponga que existe $\epsilon_1 > 0$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que

$$\|K(f_{n_k})\|_p \geq \epsilon_1, \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.4.6}$$

Como K es un operador compacto, pasando a otra subsucesión, si es necesario, se puede suponer que existe $h \in \, L^p(X)$ de tal forma que

$$\lim_{k\to\infty} \|K(f_{n_k}) - h\|_p = 0. \tag{3.4.7}$$

Se debe ver que h es la función nula. En efecto, si T es cualquier funcional lineal acotado no nulo en $L^p(X)$, entonces la composición TK también es un funcional lineal acotado. De esta manera

$$\begin{aligned} T(h) &= T\left(\lim_{k\to\infty} K(f_{n_k})\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} TK(f_{n_k}) = 0 \end{aligned}$$

pues ya se había establecido que f_n converge débilmente a cero. Se tiene entonces que $T(h) = 0$ para todo funcional lineal acotado en $L^p(X)$ y esto ocurre si y sólo si h es la función nula; así que sustituyendo en (3.4.7) se obtiene

$$\lim_{k\to\infty} \|K(f_{n_k})\|_p = 0.$$

lo cual es una contradicción con (3.4.6) y, por tanto, es valido afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} K(f_n) = 0, \qquad \forall \, K \in \mathscr{B}_0\left(L^p(X)\right). \tag{3.4.8}$$

Se procederá ahora a estimar $\|M_u(f_n)\|_p$,

$$\begin{aligned}
\|M_u(f_n)\|_p^p &= \int_X |u|^p \cdot |f_n|^p \, d\mu \\
&= \int_X |u|^p \cdot \left(\frac{1}{\|\mathbf{1}_{B_n}\|_p^p} \mathbf{1}_{B_n} + \frac{1}{\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p^p} \mathbf{1}_{A_n} \right) d\mu \\
&= \int_X |u|^p \cdot \frac{1}{\|\mathbf{1}_{B_n}\|_p^p} \mathbf{1}_{B_n} \, d\mu + \int_X |u|^p \cdot \frac{1}{\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p^p} \mathbf{1}_{A_n} \, d\mu \\
&= \frac{1}{\|\mathbf{1}_{B_n}\|_p^p} \int_{B_n} |u|^p \, d\mu + \frac{1}{\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p^p} \int_{A_n} |u|^p \, d\mu
\end{aligned}$$

Ya que $B_n \subseteq B^u_{\epsilon_0}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $x \in B_n$, se cumple que

$$|u(x)| > \epsilon_0 = \frac{1}{2} \|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty$$

y de esta manera

$$\begin{aligned}
\|M_u(f_n)\|_p^p &\geq \frac{1}{\|\mathbf{1}_{B_n}\|_p^p} \int_{B_n} \left(\frac{1}{2} \|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty \right)^p d\mu + \frac{1}{\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p^p} \int_{A_n} |u|^p \, d\mu \\
&\geq \frac{1}{\|\mathbf{1}_{B_n}\|_p^p} \left(\frac{1}{2} \|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty \right)^p \mu(B_n) + \frac{1}{\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p^p} |u(A_n)|^p \mu(A_n) \\
&\geq \frac{1}{2^p} \|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty^p + |u(A_n)|^p.
\end{aligned}$$

Por tanto se determina

$$\|M_u(f_n)\|_p \geq \left(\frac{1}{2^p} \|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty^p + |u(A_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.4.9}$$

Pero para $a, b \in \mathbb{R}$ y $p > 1$, se cumple la siguiente desigualdad

$$(|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{2} (|a| + |b|);$$

así que sustituyendo en (3.4.9) se obtiene

$$\|M_u(f_n)\|_p \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty + |u(A_n)| \right) \geq \frac{1}{2^2} \left(\|u \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty + |u(A_n)| \right). \tag{3.4.10}$$

También para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada operador $K \in \mathscr{B}_0(L^p(X))$, se puede usar la definición de la norma de un operador y se obtiene

$$\|M_u - K\| \geq \left\| (M_u - K) \left(\frac{1}{\|f_n\|_p} f_n \right) \right\|_p;$$

así que por la desigualdad triangular se cumple que

$$\|M_u - K\| \geq \frac{1}{\|f_n\|_p} \left| \|M_u(f_n)\|_p - \|K(f_n)\|_p \right|,$$

y entonces, por la relación (3.4.10), se llega a la estimación

$$\begin{aligned}\|M_u - K\| &\geq \frac{1}{\|f_n\|_p}\left|\frac{1}{2^2}\left(\|u\cdot\mathbf{1}_B\|_\infty + |u(A_n)|\right) - \|K\left(f_n\right)\|_p\right| \\ &= \frac{1}{2^{1/p}}\left|\frac{1}{2^2}\left(\|u\cdot\mathbf{1}_B\|_\infty + |u(A_n)|\right) - \|K\left(f_n\right)\|_p\right|,\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho que $\|f_n\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$.

Finalmente, por definición de la norma esencial (es un ínfimo), para $\epsilon > 0$, se puede encontrar un operador compacto $K \in \mathscr{B}_0\left(L^p(X)\right)$ tal que

$$\begin{aligned}\|M_u\|_e + \epsilon &\geq \|M_u - K\| \\ &\geq \frac{1}{2^{1/p}}\left|\frac{1}{2^2}\left(\|u\cdot\mathbf{1}_B\|_\infty + |u(A_n)|\right) - \|K\left(f_n\right)\|_p\right|.\end{aligned}$$

Aplicando lím sup,

$$\begin{aligned}\|M_e\|_e + \epsilon &\geq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{2^{1/p}}\left|\ \frac{1}{2^2}\left(\|u\cdot\mathbf{1}_B\|_\infty + |u(A_n)|\right) - \|K\left(f_n\right)\|_p\right| \\ &\geq \frac{1}{2^p}\left|\frac{1}{2^2}\left(\|u\cdot\mathbf{1}_B\|_\infty + \limsup_{n\to\infty}|u(A_n)|\right) - \limsup_{n\to\infty}\|K\left(f_n\right)\|_p\right|\end{aligned}$$

y por la relación (3.4.8) se obtiene

$$\|M_e\|_e + \epsilon \quad \geq \quad 2^{-2-p}\left(\|u\cdot\mathbf{1}_B\|_\infty + \limsup_{n\to\infty}|u(A_n)|\right)$$

y como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, se concluye

$$C(p)\left(\|u\cdot\mathbf{1}_B\|_\infty + \limsup_{n\to\infty}|u(A_N)|\right) \leq \|M_u\|_e \leq \|u\cdot\mathbf{1}_B\|_\infty + \limsup_{n\to\infty}|u(A_N)|.$$

Esto culmina la demostración en este caso.

Caso II. Si $\|u\cdot\mathbf{1}_B\|_\infty = 0$, entonces para cada $n\in\mathbb{N}$, se define

$$f_n = \frac{1}{\|\mathbf{1}_{A_n}\|_p}\mathbf{1}_{A_n}.$$

Se observa que $\|f_n\|_p = 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como antes, se muestra que f_n converge débilmente a la función función nula y el argumento del Caso I establece que

$$\lim_{n\to\infty} K(f_n) = 0,$$

para cada operador $K\in\mathscr{B}_0(L^p(X))$; pero ahora en este caso se obtiene

$$\|M_u - K\| \geq \left|\|M_u\left(f_n\right)\|_p - \|K\left(f_n\right)\|_p\right|,$$

con lo cual

$$\|M_u - K\| \geq \left||u(A_n)| - \|K\left(f_n\right)\|_p\right|,$$

así que aplicando lím sup se obtiene

$$\|M_u - K\| \geq \left| \limsup_{n\to\infty} |u(A_n)| - \limsup_{n\to\infty} \|K(f_n)\|_p \right| = \limsup_{n\to\infty} |u(A_n)|.$$

Luego, por definición de la norma esencial, se concluye que

$$\|M_u\|_e + \epsilon \geq \|(M_u - K)\| \geq \limsup_{n\to\infty} |u(A_n)|.$$

Por tanto, en este caso, se establece que

$$\|M_u\|_e = \limsup_{n\to\infty} |u(A_n)|$$

Esto culmina la demostración del teorema. □

Ejemplo 3.4.2. Se considera el espacio de medida (X, Σ, μ) definido en el Ejemplo 3.2.2. El operador M_{u_2} definido por el símbolo

$$u_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1), \\ \frac{x-1}{x}, & x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

no es compacto en $L^p(X)$ pues

$$\lim_{k\to\infty} |u_2(A_k)| = \lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{k} = 1 \neq 0.$$

También se puede ver que

$$\|u_2 \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty = \sup\{|u_2(x)| : x \in (0,1)\} = 0.$$

Por tanto, el Teorema 3.4.1, implica que

$$\|M_{u_2}\|_e = \|u_2 \cdot \mathbf{1}_B\|_\infty + \lim_{k\to\infty} |u_2(A_k)| = 1;$$

es decir, para cualquier $p > 1$, el operador $M_{u_2} : L^p(X) \to L^p(X)$ está a una distancia 1 de la clase $\mathscr{B}_0(L^p(X))$ con la métrica definida a través de la norma de operadores.

Conclusiones

A partir del trabajo de investigación realizado durante un año, se pudo llegar a las siguientes conclusiones:

1. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finito, $p, q \geq 1$ y $p \neq q$, los operadores de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ de rango cerrado son operadores de rango finito (ver Teoremas 2.2.6 y 2.2.12) y por tanto son un tipo de operadores compactos, esto se debe principalmente a la siguiente relación de contenencia $\mathscr{B}_{00} \subseteq \mathscr{B}_0$.

2. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finito y completo $p \geq 1$, se logra establecer un nuevo criterio para determinar cuando el operador de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ es compacto, usando la descomposición atómica - no atómica del espacio de medida (X, Σ, μ) (ver Teorema 3.2.1).

3. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finito y completo, se logra establecer un nuevo criterio para determinar cuando el operador de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ tiene rango finito, usando la descomposición no atómica y atómica del espacio de medida (X, Σ, μ) (ver Teorema 3.2.1).

4. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finito y $p > 1$, se logra estimar la norma esencial del operador de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^p(X)$ usando las descomposición atómica y no atómica del espacio de medida (X, Σ, μ) (ver Teorema 3.4.1) [2].

Problemas abiertos

1. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finito y completo, $p, q \geq 1$ con $p \neq q$. Establecer criterios para saber cuando el operador de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$ es compacto.

2. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finito y completo, y $u \in L^\infty(X)$. Estimar o determinar la norma esencial del operador de multiplicación $M_u : L^1(X) \to L^1(X)$.

3. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finito, $p, q \geq 1$ con $p \neq q$. Estimar o determinar la norma esencial del operador de multiplicación $M_u : L^p(X) \to L^q(X)$.

4. Extender los resultados obtenidos en el Capítulo 3 a otros espacios de funciones, como por ejemplo, Orlicz, Lorentz y el caso más general de cualquier espacio tipo Köthe.

Bibliografía

[1] V. I. Bogachev, *Measure theory. Vol. I, II*, Springer-Verlag, Berlin, 2007. MR2267655

[2] R. E. Castillo, Y. A. Lemus-Abril, and J. C. Ramos-Fernández, *Essential norm estimates for multiplication operators on $l_p(\mu)$ spaces. Submitted.*

[3] R. E. Castillo and H. Rafeiro, *An introductory course in Lebesgue spaces*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Springer, [Cham], 2016. MR3497415

[4] R. E. Castillo, H. Rafeiro, J. C. Ramos-Fernández, and M. Salas-Brown, *Multiplication operator on Köthe spaces: measure of non-compactness and closed range*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **42** (2019), no. 4, 1523–1534. MR3963842

[5] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Second, Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1990. MR1070713

[6] G. De Barra, *Measure theory and integration*, Horwood Publishing Series. Mathematics and Its Applications, Horwood Publishing Limited, Chichester, 2003. Revised edition of the 1981 original. MR2052644

[7] R. A. Johnson, *Atomic and nonatomic measures*, Proc. Amer. Math. Soc. **25** (1970), 650–655. MR279266

[8] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989. MR992618

[9] J. C. Ramos-Fernández and M. Salas-Brown, *On multiplication operators acting on Köthe sequence spaces*, Afr. Mat. **28** (2017), no. 3-4, 661–667. MR3640765

[10] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Ann. **69** (1910), no. 4, 449–497. MR1511596

[11] H. L. Royden, *Real analysis*, Third, Macmillan Publishing Company, New York, 1988. MR1013117

[12] R. K. Singh and A. Kumar, *Compact composition operators*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **28** (1979), no. 3, 309–314. MR557280

[13] H. Takagi and K. Yokouchi, *Multiplication and composition operators between two L^p-spaces*, Function spaces (Edwardsville, IL, 1998), 1999, pp. 321–338. MR1678344

[14] A. E. Taylor and D. C. Lay, *Introduction to functional analysis*, second, Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 1986. MR862116

[15] J. Yeh, *Real analysis*, Second Edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006. Theory of measure and integration. MR2250344