Propiedades de los multiplicadores sobre espacios de sucesiones de Köthe

María Alejandra Rivera Sarmiento

TÉSIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE:
MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR:
JULIO CÉSAR RAMOS FERNÁNDEZ, Ph.D

Departamento de Matemáticas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá D.C., Colombia
2021

Propiedades de los multiplicadores sobre espacios de sucesiones de Köthe

María Alejandra Rivera Sarmiento

APROBADO:

Jhon Jairo Sutachan Rubio, Ph.D.

Director de posgrados

Facultad de ciencias

Alba Alicia Trespalacios Rangel, Ph.D.

Decana

Facultad de ciencias

Bogotá D.C., Colombia

2021

Propiedades de los multiplicadores sobre espacios de sucesiones de Köthe

María Alejandra Rivera Sarmiento

Héctor Camilo Chaparro, Ph.D
JURADO

Edm G Murcia R

Edwin Gonzalo Murcia Rodriguez, Ph.D
JURADO

Julio César Ramos Fernández, Ph.D
DIRECTOR TRABAJO DE GRADO

Bogotá D.C., Colombia
2021

Agradecimientos

A Dios agradezco por darme la fortaleza y guiarme durante el proceso de creación de este documento y por ser mi apoyo durante los momentos difíciles. A mi familia y en especial a mis padres por siempre estar ahí para apoyarme y por creer en mí.

Agradezco al profesor Julio César Ramos quien ha creído en mí desde el principio y me ha acompañado y guiado en mi proceso de formación, agradezco su paciencia y sabiduría así como sus consejos y recomendaciones que han hecho de mí una mejor persona y una mejor profesional.

Adicionalmente agradezco a la Pontificia Universidad Javeriana por darme la oportunidad de formarme en sus instalaciones, por la confianza depositada en mí y por ayudarme a crecer profesionalmente y retarme durante el proceso de formación, finalmente agradezco a cada uno de los profesores de la maestría con los cuales tuve la oportunidad de aprender y compartir.

Contenido

Introducción

El desarrollo del Análisis Funcional junto con su amplio rango de aplicaciones fue uno de los mayores logros matemáticos de la primera parte del siglo veinte. La organización rigurosa y la sistematización en gran medida del análisis sobre el concepto de espacio funcional tomó casi cincuenta años. Esta sistematización fue posible gracias al desarrollo de la teoría de conjuntos, la topología general, la aceptación de definiciones axiomáticas y estructuras abstractas. Conceptualmente esta área de la matemática le debe mucho al cálculo de variaciones, a la teoría de las ecuaciones diferenciales e integrales, a la evolución del álgebra moderna, a los problemas no resueltos y algunas generalizaciones del análisis clásico.

Algunos de los matemáticos más destacados por los aportes que realizaron al área del análisis funcional son, Frédéric Riesz, Henri Lebesgue, David Hilbert y Stefan Banach, diversos trabajos y resultados obtenidos por dichos matemáticos son: la tesis publicada en 1902 por Lebesgue sobre medida e integración, cuatro años después aparece el trabajo realizado por Hilbert sobre teoría espectral de formas cuadráticas acotadas y un año después Riesz descubre lo que hoy en día se conoce como teorema de Riesz-Fisher el cual lo hizo público cuatro días después de que E. Fischer presentara el mismo resultado. Sin embargo, fue el matemático Stefan Banach quien hizo los aportes más sobresalientes, ya que. por ejemplo, en 1922 publicó su tesis donde estudió completamente los espacios vectoriales normados y habló de la noción de completitud y una nueva caracterización para dicho concepto en los espacios lineales normados, dando origen a lo que hoy en día se denomina espacios de Banach.

En 1907 Fréchet y Riesz en trabajos realizados por separado obtuvieron la representación para cualquier operador lineal y acotado en el espacio de Hilbert L^2. Fréchet trabajó dicho espacio sobre el círculo unitario mientras que Riesz no hizo especificación alguna sobre el conjunto pero, probablemente lo hizo pensando en el intervalo $[a, b]$. Para 1909 Riesz hizo el mayor avance en la teoría de la dualidad, ya que dio la representación de los operadores lineales acotados definidos en el espacio $C[a, b]$ por medio de la integral de Stieltjes.

En 1910 Riesz inició y desarrolló la teoría de los espacios L^p, extendió los resultados de Schmidt para $p = 2$ al caso general $1 < p < \infty$. En su trabajo, se ocupó de encontrar la solución de una cantidad contable de ecuaciones de la forma

$$\int_a^b f_j(x)\xi(x)dx = c_j$$

donde $f_j \in L^p[a, b]$ y los escalares c_j son dados. Riesz estaba buscando una solución $\xi \in$

$L^q[a,b]$, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, para $p>1$. Aunque él no usó las palabras espacio dual o espacio conjugado, sí mostró que $L^p[a,b]$ y $L^q[a,b]$, con q el valor que cumple la igualdad anterior, son duales. Además, estableció y usó las desigualdades de Hölder y Minkowski para este contexto. Adicionalmente, indicó que los espacios de sucesiones l^p se podían tratar de forma similar. Si se desea más información sobre la historia del análisis funcional y los distintos aportes que se fueron dando de forma cronológica hasta la independencia de esta como un área de las matemática,s se recomienda el artículo de G. Birkhoff & E. Kreyszig [2].

En lo que respecta a los espacios de sucesiones l^p con $1 \leq p \leq \infty$, es posible enunciar ejemplos de espacios de sucesiones que generalizan a los mismos, tales como: los espacios de sucesiones de Orlicz, los cuales fueron introducidos en 1932 por el matemático W. Orlicz [15], los espacios de sucesiones de Lorentz definidos por el matemático G. G. Lorentz en 1950 [13] y los espacios de sucesiones de Cesàro que aparecieron en 1968 en un problema de la sociedad matemática holandesa para encontrar los duales y posteriormente fueron definidos por J. S. Shiue en 1970 [19].

Inevitablemente, la teoría desarrollada por Riesz ha sido extendida y generalizada a lo largo de los años; tal es el caso de los matemáticos Köthe y Toeplitz quienes en 1934 iniciaron un estudio sobre parejas de subespacios que se encontraban en dualidad débil. Dichos espacios se conocen hoy en día como espacios de Köthe y en el caso discreto como espacios de sucesiones de Köthe, estos últimos, se denotarán por medio de la letra X salvo que se diga lo contrario.

Los espacios de sucesiones de Köthe X, contienen a los espacios clásicos tales como; c_0, l^∞, l^p con $1 \leq p < \infty$ y en particular, los espacios $l^p(\boldsymbol{w})$ con $\boldsymbol{w} > 0$ una sucesión fija que se le denomina *peso*, para $p \in (1,\infty)$, entre otros. Estos espacios de sucesiones de Köthe se caracterizan porque cuentan con dos propiedades: la primera establece que el espacio es sólido, es decir, si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son sucesiones tales que $|a(n)| \leq |b(n)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{b} \in X$, entonces $\boldsymbol{a} \in X$ y $||\boldsymbol{a}||_X \leq ||\boldsymbol{b}||_X$. La segunda propiedad, asegura que para todo $A = \{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$, un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, la sucesión $\mathbb{1}_A$, definida por

$$\mathbf{1}_A(k) = \begin{cases} 1, & k \in A, \\ \\ 0, & k \notin A, \end{cases}$$

pertenece al conjunto X.

La anterior es la definición usual de espacio de sucesiones de Köthe, aunque en el desarrollo de la teoría se modificará la segunda propiedad de la definición debido a intereses propios para establecer un resultado importante en el estudio de los operadores multiplicación.

En la actualidad es común encontrar una amplia gama de textos y artículos que estudian operadores definidos sobre espacios de Banach, entre las distintas clases de operadores que se pueden encontrar se tienen los operadores multiplicación y composición. La importancia de estos operadores radica en que son una herramienta ampliamente utilizada en diferentes áreas de las matemáticas, como lo son los sistemas dinámicos, la teoría de semigrupos, las isometrías, entre otras.

En este trabajo se estudiará las propiedades que adquiere el operador multiplicación cuando se define sobre los espacios de sucesiones de Köthe. Es de interés la continuidad, la invertibilidad, el rango cerrado, la compacidad, entre otras propiedades. El operador multiplicación sobre espacios de sucesiones de Banach X se define como una multiplicación componente a componente de los términos de una sucesión fija $\boldsymbol{u}$ y cualquier sucesión perteneciente al espacio X; este hecho se denota como $M_u : X \to X$ tal que $M_u(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{ua}$.

En el Capítulo 1 se busca estudiar inicialmente el espacio normado de Köthe en su forma más general con el fin de establecer las propiedades más importantes del mismo, para luego estudiar el espacio de sucesiones y establecer la relación existente entre el dual y el dual de Köthe. La teoría que allí se desarrolla fue obtenida principalmente del texto de A. C. Zaanen [20].

En el Capítulo 2 se estudia las condiciones que se deben tener para garantizar que el operador multiplicación definido sobre el espacio de sucesiones de Köthe sea continuo, invertible, tenga rango cerrado y además sea Fredholm.

En el Capítulo 3 se estudia las condiciones para que el operador multiplicación tenga rango cerrado y sea compacto. Además, se establece el aporte a la teoría estudiada obteniéndose un resultado novedoso para el cálculo de la norma esencial de dicho operador generalizando los resultados obtenidos en los artículos de R. E. Castillo, J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [3], J. C. Ramos-Fernández, M. A. Rivera-Sarmiento & M. Salas-Brown [18] y J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [17].

Para finalizar, cabe resaltar que los resultados del capítulo 2 y 3 del presente trabajo se basan estrechamente en los artículos de J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [16] y R. E. Castillo, H. Rafeiro, J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [4] y en las referencias de los mismos.

Capítulo 1

Espacio de Köthe

En 1934 G. Köthe y O. Toeplitz en su trabajo [9] y posteriormente en 1948 y 1951 G. Köthe en sus trabajos [7] y [8] respectivamente, iniciaron un estudio sobre ciertas parejas de subespacios del espacio de sucesiones reales que estaban en dualidad débil. Hacia el año 1951 esta teoría fue generalizada por J. Dieudonné [6], M. J. Cooper [5], G. G. Lorentz y D. G. Wertheim [14]. Dieudonné consideró parejas (Λ, Λ^*) de subespacios de funciones localmente integrables sobre un espacio de Hausdorff medible E localmente compacto y $\sigma-$compacto con medida de Radon μ, donde (Λ, Λ^*) resulta ser un retículo localmente compacto y completo; como ejemplo de este tipo de parejas se tiene (L_p, L_q).

Este capítulo está dividido en cuatro secciones; en la primera sección se estudiarán los espacios normados de Köthe en su forma general y se mostrará por ejemplo, que este espacio es de Banach si y sólo si su norma cumple la propiedad de Riesz-Ficher. En las secciones siguientes se definirá el espacio de sucesiones de Köthe, se establecerán algunos ejemplos de éstos y adicionalmente se hablará del dual y del dual de Köthe con el fin de observar cuándo coinciden. Por último se establece la definición de normante para observar cómo recuperar la norma de un elemento del espacio mediante la norma de su dual.

1.1. Espacios de Köthe. Caso general

Esta sección tiene como propósito estudiar los espacios normados de Köthe en su forma más general junto con algunas de sus propiedades, razón por la cual se da inicio a la sección definiendo el concepto de seminorma, para posteriormente estudiar ciertos resultados y propiedades que se desprenden del mismo como lo son la propiedad de Riesz-Fischer y la propiedad de Fatou. La teoría que se estudiará en esta sección fue tomada del texto de A. C. Zaanen [20].

Se considera el espacio de medida (Ω, Σ, μ) que se supone $\sigma-$finito, con Ω no vacío; además, se define M como el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles y M^+ un subconjunto de M

que consiste de todas las funciones $f \in M$ no negativas en Ω. Los elementos del conjunto M se denotarán por $f, g, h, \ldots$ y los elementos en M^+ se denotarán por $u, v, w, \ldots$. Por último, la notación $f \leq g$ hace referencia a que tanto f como g son funciones a valor real tales que $f(x) \leq g(x)$, en casi todo punto en el conjunto Ω.

Definición 1.1.1 (Función seminorma). Asuma que a cada $u \in M^+$ le corresponde un número $\rho(u)$ para el cual

(a) $0 \leq \rho(u) \leq \infty$.

$\rho(u) = 0$, si $u = 0$ en casi todo punto.

$\rho(au) = a\rho(u)$ para toda constante finita $a \geq 0$.

$\rho(u + v) \leq \rho(u) + \rho(v)$ para todo $u, v \in M^+$.

(b) Si $u, v \in M^+$ y $u \leq v$, entonces $\rho(u) \leq \rho(v)$.

La función $\rho(u)$ así definida es llamada *función seminorma* que toma elementos de M^+ y los envía a números no negativos, incluido $+\infty$, salvo que ρ sea la función idénticamente cero. Si además, la función ρ tiene la propiedad: $\rho(u) = 0$ si y sólo si $u = 0$ en casi todo punto, entonces ρ recibe el nombre de *función norma*.

Para el desarrollo de este trabajo es conveniente definir la *función indicatriz o característica* de un subconjunto A de un conjunto X, como la función $\mathbf{1}_A : X \to \{0, 1\}$ tal que

$$\mathbf{1}_A(k) = \begin{cases} 1, & k \in A, \\ \\ 0, & k \notin A. \end{cases}$$

Teorema 1.1.2. *Si ρ es una función norma y $u \in M^+$ tal que $\rho(u) < \infty$, entonces $u(x) = \infty$ solo en un conjunto de medida cero.*

Demostración. Se define el conjunto $E = \{x \in \Omega : u(x) = \infty\}$, luego se tiene que $\mathbf{1}_E \leq n^{-1}u$ para $n = 1, 2, \ldots$ así, por propiedad de la *función seminorma* se tiene que

$$\rho(\mathbf{1}_E) \leq \rho(n^{-1}u) = n^{-1}\rho(u), \text{ para todo } n = 1, 2, \ldots$$

Por tanto, como $\rho(u) < \infty$, $n^{-1}\rho(u) \to 0$ cuando $n \to \infty$, así $\rho(\mathbf{1}_E) = 0$, luego $\mathbf{1}_E = 0$ en casi todo punto. □

Es posible observar que se puede extender el dominio de la *función seminorma* ρ al conjunto M definiendo $\rho(f) = \rho(|f|)$ para todo $f \in M$. En ese caso, se denota por L_ρ al conjunto de todas las funciones $f \in M$ que cumplen que $\rho(f) < \infty$.

En el teorema que se establecerá a continuación se busca ver que el conjunto L_ρ es un espacio vectorial.

Teorema 1.1.3. *El conjunto L_ρ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de todas las funciones finitas μ-ctp en Ω.*

Demostración. Sean f y g funciones finitas μ-ctp en Ω, tales que $\rho(f) < \infty$ y $\rho(g) < \infty$, luego $f + g$ es una función finita en μ-ctp en Ω y $\rho(f + g) = \rho(|f + g|) \leq \rho(f) + \rho(g) < \infty$, de donde $f + g \in L_\rho$.

Ahora sea α un escalar en $\mathbb{R}$ y f una función finita en $\mu-$ctp en Ω, entonces αf es una función medible en μ-ctp en Ω con $\rho(f) < \infty$, luego

$$\rho(\alpha f) = \rho(|\alpha f|) = \rho(|\alpha||f|) = |\alpha|\rho(|f|) = |\alpha|\rho(f) < \infty$$

por lo tanto $\alpha f \in L_\rho$. Así, queda demostrado el teorema. □

Teorema 1.1.4. *La función ρ es una norma en L_ρ.*

Demostración. Para mostrar que la función ρ es una norma en L_ρ, se debe ver lo siguiente;

1. Sea $f \in L_\rho$. Entonces $0 \leq \rho(f) = \rho(|f|) < \infty$ ya que ρ es una norma en M^+.

2. Suponga que $f = 0$ μ-ctp, para $f \in L_\rho$, entonces, $\rho(f) = \rho(|f|) = 0$ por ser ρ una función norma en M^+. Por otro lado, si $\rho(f) = \rho(|f|) = 0$ entonces, $f = 0$ μ-ctp ya que ρ es una función norma en M^+.

3. Sea $\alpha \in \mathbb{N}$ y $f \in L_\rho$, entonces $\rho(\alpha f) = \rho(|\alpha f|) = \rho(|\alpha||f|) = |\alpha|\rho(|f|) = |\alpha|\rho(f)$.

4. Tomando $f, g \in L_\rho$ entonces $\rho(f + g) = \rho(|f + g|) \leq \rho(|f|) + \rho(|g|) = \rho(f) + \rho(g)$.

Por lo tanto ρ es una norma en L_ρ. □

Observación. La norma ρ tiene la propiedad adicional de que si $f \in M$ y $g \in L_\rho$, $|f| \leq |g|$, entonces $f \in L_\rho$ y $\rho(f) \leq \rho(g)$.

Se va a denotar por $(L_\rho)^+$ al subconjunto de todas las funciones no negativas de L_ρ, es decir, $(L_\rho)^+ = L_\rho \cap M^+$.

Definición 1.1.5 (Espacio normado de Köthe). Todo espacio vectorial normado con las propiedades del espacio L_ρ es llamado espacio normado de Köthe. Más precisamente, un espacio de Banach real $(X, ||\cdot||_X)$ de funciones localmente integrables en Ω se dice un espacio de Köthe si se satisface:

(i) El espacio es sólido: Si $|f(t)| \leq |g(t)|$ a.e. en Ω, con f una función medible y $g \in X$, entonces $f \in X$ y $||f||_X \leq ||g||_X$

(ii) Para todo $A \in \Sigma$ con $\mu(A) < \infty$, la función $\mathbf{1}_A$ definida por

$$\mathbf{1}_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ 0, & t \notin A, \end{cases}$$

pertenece al conjunto X.

No todo espacio normado de Köthe resultará ser un espacio de Banach ya que su completitud va a depender de que la norma definida en el espacio cumpla la propiedad de Riesz-Fischer, de la cual se hablará más adelante.

El siguiente ejemplo muestra un espacio normado de Köthe que no resulta ser un espacio completo debido a la norma ρ con la cual se dota.

Ejemplo 1.1.6. Sea μ la medida de conteo en el conjunto $\Omega = \mathbb{N}$, tal que para toda sucesión $\boldsymbol{u} = (u(1), u(2), \cdots) \in M^+$, la función norma $\rho(\boldsymbol{u})$ se define por

$$\rho(\boldsymbol{u}) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} u(n) + \limsup_{n\to\infty} u(n).$$

Bajo estas condiciones, el espacio L_ρ no es completo.

Para ver que L_ρ no es un espacio normado completo sea $\boldsymbol{v_1} = (1, 0, 0, \cdots)$, $\boldsymbol{v_2} = (1, 1, 0, \cdots)$, $\boldsymbol{v_3} = (1, 1, 1, 0, \cdots)$ y así sucesivamente. Entonces, para $k > p$

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{v_k} - \boldsymbol{v_p}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \left(v_k(n) - v_p(n)\right) + \limsup_{n\to\infty} \left(v_k(n) - v_p(n)\right) \\ &= \sum_{n=p+1}^{k} 2^{-n}. \end{aligned}$$

Luego, como

$$\sum_{n=p+1}^{k} 2^{-n} \to 0 \ \text{cuando} \ k, p \to \infty,$$

se puede ver que $\boldsymbol{v_k}$ es una sucesión de Cauchy. Suponga que existe una función $\boldsymbol{f} \in L_\rho$ tal que $\rho(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v_k}) \to 0$, así se tiene que $\rho\left((\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v_k})\mathbf{1}_{\{n\}}\right) \to 0$ cuando $k \to \infty$, donde $\mathbf{1}_{\{n\}}$ es la función característica definida sobre el conjunto unitario $\{n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\rho(\mathbf{1}_{\{n\}}) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \mathbf{1}_{\{n\}}(k) + \limsup_{k\to\infty} \mathbf{1}_{\{n\}}(k) = 2^{-n}.$$

Así $v_k(n) \to f(n)$ cuando $k \to \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto implica que $f(n) = 1$ para todo n. Ahora, si $\boldsymbol{f}$ es de esa forma, entonces $f \in L_\rho$ ya que $\rho(f) < \infty$; en efecto,

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{f}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} f(n) + \limsup_{n\to\infty} f(n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} + 1 = 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

pero es posible observar que para k fijo

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v_k}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}(f(n) - v_k(n)) + \limsup_{n\to\infty}(f(n) - v_k(n))\\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} 2^{-n} + 1\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} 2^{-n} + 1 \to 1$$

cuando $k \to \infty$ ya que $\sum_{n=k+1}^{+\infty} 2^{-n} \to 0$ por ser la cola de una serie convergente, contradiciendo el hecho de que $\rho(\boldsymbol{f} - v_k) \to 0$ y por tanto, L_ρ no es completo bajo esta norma.

Definición 1.1.7 (Propiedad de Riesz-Fischer). La función norma ρ se dice que tiene la propiedad de Riesz-Fischer si para toda sucesión $\{\boldsymbol{u_n}\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq (L_\rho)^+$ tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \rho(\boldsymbol{u_n}) < \infty$$

se cumple que $\sum_{n=1}^{+\infty} \boldsymbol{u_n} \in L_\rho$, es decir,

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \boldsymbol{u_n}\right) < \infty.$$

Teorema 1.1.8. *La función norma ρ tiene la propiedad de Riesz-Fischer si y sólo si para toda sucesión $\{\boldsymbol{u_n}\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq (L_\rho)^+$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \rho(\boldsymbol{u_n}) < \infty$$

se tiene que

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \boldsymbol{u_n}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(\boldsymbol{u_n}). \tag{1-1}$$

Demostración. Sea la sucesión $\{\boldsymbol{u_n}\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq (L_\rho)^+$ tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \rho(\boldsymbol{u_n}) < \infty,$$

y además dicha sucesión satisface la ecuación (1-1). Entonces

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \boldsymbol{u_n}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(\boldsymbol{u_n}) < \infty$$

por lo tanto cumple la propiedad de Riesz-Fischer.

Por otro lado, si se asume que ρ tiene la propiedad de Riesz-Fischer, pero

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \boldsymbol{u_n}\right) > \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(\boldsymbol{u_n}),$$

para alguna sucesión $\{\boldsymbol{u_n}\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq (L_\rho)^+$, tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \rho(\boldsymbol{u_n}) < \infty,$$

existe un número $\epsilon > 0$ para el cual

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \boldsymbol{u_n}\right) > \epsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(\boldsymbol{u_n}).$$

Así

$$\frac{1}{\epsilon}\rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \boldsymbol{u_n}\right) > 1 + \frac{1}{\epsilon}\sum_{n=1}^{+\infty} \rho(\boldsymbol{u_n})$$

que es lo mismo que escribir

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{u_n}}{\epsilon}\right) > 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho\left(\frac{\boldsymbol{u_n}}{\epsilon}\right).$$

Luego se puede definir la sucesión $\boldsymbol{u_{n,1}} = \frac{\boldsymbol{u_n}}{\epsilon}$, $\boldsymbol{u_{n,2}} = \frac{2}{\epsilon}\boldsymbol{u_n}$, $\cdots$, $\boldsymbol{u_{n,k}} = \frac{k}{\epsilon}\boldsymbol{u_n}$, entonces para cada $k = 1, 2, \ldots$, la sucesión $\{\boldsymbol{u_{n,k}}\}_{n=1}^{+\infty}$, está contenida $(L_\rho)^+$ y se tiene que

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \boldsymbol{u_{n,k}}\right) > k + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(\boldsymbol{u_{n,k}}). \tag{1-2}$$

Entonces

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\boldsymbol{u_{n,k}}\right)=\rho\left(\sum_{n<r}\boldsymbol{u_{n,k}}+\sum_{n\geq r}\boldsymbol{u_{n,k}}\right)\leq\rho\left(\sum_{n<r}u\boldsymbol{u_{n,k}}\right)+\rho\left(\sum_{n\geq r}\boldsymbol{u_{n,k}}\right)$$

y así

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\boldsymbol{u_{n,k}}\right)-\rho\left(\sum_{n<r}\boldsymbol{u_{n,k}}\right)\leq\rho\left(\sum_{n\geq r}\boldsymbol{u_{n,k}}\right).$$

Luego por la Ecuación (1-2) se tiene que

$$k+\sum_{n=1}^{+\infty}\rho(\boldsymbol{u_{n,k}})-\rho\left(\sum_{n<r}\boldsymbol{u_{n,k}}\right)\leq\rho\left(\sum_{n\geq r}\boldsymbol{u_{n,k}}\right)$$

pero además dado que

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{k}\boldsymbol{u_{n,k}}\right)\leq\sum_{n=1}^{k}\rho\left(\boldsymbol{u_{n,k}}\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}k+\sum_{n=1}^{+\infty}\rho(\boldsymbol{u_{n,k}})-\sum_{n<r}\rho(\boldsymbol{u_{n,k}})&\leq\rho\left(\sum_{n\geq r}\boldsymbol{u_{n,k}}\right)\\ k+\sum_{n\geq r}\rho(\boldsymbol{u_{n,k}})&\leq\rho\left(\sum_{n\geq r}\boldsymbol{u_{n,k}}\right)\end{aligned}$$

y lo anterior se cumple para todo $r=1,2,\ldots$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty}\rho(\boldsymbol{u_n})<\infty$, dado que $\frac{k}{\epsilon}>0$, entonces

$$\frac{k}{\epsilon}\sum_{n=1}^{+\infty}\rho(\boldsymbol{u_n})<\infty,$$

y por tanto $\sum_{n=1}^{+\infty}\rho(\boldsymbol{u_{n,k}})<\infty$. Así, para un $r=r_k$ apropiado se tiene que

$$\sum_{n\geq r}\rho(u_{nk})<k^{-2}.$$

Ahora bien, reindexando para cada $k=1,2,\ldots$, se obtiene la sucesión $v_{nk}=u_{r_k k}$ con $(n=1,2,\ldots)$, en $(L_\rho)^+$ tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\rho(v_{nk})<k^{-2},\qquad\rho(\sum_{n=1}^{+\infty}v_{nk})>k.$$

Si se define $w_n = (v_{nk})_k$ para $n = 1, 2, \ldots$, entonces tomando $k = n$ se tiene que $w_n = v_{nn}$, así

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \rho(w_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(v_{nn}) < n^{-2},$$

y esto se tiene para todo $k = 1, 2, \ldots$, por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho(w_k) < \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2} < \infty,$$

luego, $\sum_{k=1}^{+\infty} w_k \in (L_\rho)^+$ debido a la propiedad de Riesz-Fischer. Pero

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty} w_n\right) \geq \rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_{nk}\right)$$

y esto se tiene para todo $k = 1, 2, \ldots$, así $\rho\left(\sum_{n=1}^{+\infty} w_n\right) = \infty$, es decir, $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} w_n\right) \notin (L_\rho)^+$, lo cual es una contradicción.

$\square$

Teorema 1.1.9. *El espacio vectorial normado L_ρ inducido por la función norma ρ es completo si y sólo si ρ tiene la propiedad de Riesz-Fischer.*

Demostración. Sea ρ una función norma con la propiedad de Riesz-Fischer y tome una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset L_\rho$ tal que $\lim \rho(f_m - f_n) = 0$ cuando $m, n \to \infty$. Entonces, existe una subsucesión $\{g_n\}$ de $\{f_n\}$ tal que, $g_k = f_{n_k}$con $\{n_k\}$ creciente, sin cota, por definición de límite, se puede suponer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \rho(g_{n-1} - g_n) < \infty.$$

Luego, por la propiedad de Riesz-Fischer 1.1.7, se sigue que

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} |g_{n+1} - g_n|$$

pertenece a L_ρ y además $0 \leq g(x) < \infty$ en casi todo punto en Ω. Esto implica que la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |g_{n+1}(x) - g_n(x)|$$

converge en μ-ctp en Ω y lo mismo se tiene para la serie

$$g_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(g_{n+1} - g_n\right)(x).$$

Entonces, se define $f(x)$ como el valor de la serie anterior y se obtiene que

$$f - g_p = \sum_{n=p}^{+\infty} (g_{n+1} - g_n) \, .$$

Así, por el Teorema 1.1.8 se tiene que

$$\rho(f - g_p) \leq \sum_{n=p}^{+\infty} \rho(g_{n+1} - g_n),$$

de donde $\rho(f - g_p) \to 0$ cuando $p \to +\infty$. Como consecuencia

$$\rho(f - f_n) \leq \rho(f - g_p) + \rho(g_p - f_n) \to 0$$

cuando $n, p \to \infty$, i.e., f es el límite en norma de la sucesión f_n. Esto concluye la primera parte de la prueba.

Por otro lado, suponga que L_ρ es completo y sea $u_n \in (L_\rho)^+$ para $n = 1, 2, \ldots$, tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \rho(u_n) < \infty.$$

Se debe ver que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \in L_\rho$. Para este fin, tome $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces para $m > n$ se tiene que

$$\rho(S_m - S_n) \leq \sum_{k=n+1}^{m} \rho(u_k) \to 0,$$

cuando $m, n \to \infty$. Debido a la completitud del espacio, existe una función $f \in L_\rho$, tal que $\rho(f - S_n) \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Ahora, sea $f = g + ih$ con h, g funciones reales. Como todos los S_n son reales por definición, se tiene que

$$f - S_n = (g - S_n) + ih,$$

luego $|h| \leq |f - S_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $h(x) = 0$ en casi todo punto. Luego f es real. Adicionalmente $f = f^+ + f^-$ y de la desigualdad $|f^-| \leq |f - S_n|$ se sigue que $\rho(f^-) = 0$ por lo cual f es no negativa. Para $n \geq k$ se tiene

$$|S_k - \text{mín}(f, S_k)| = |\,\text{mín}(S_n, S_k) - \text{mín}(f, S_k)| \leq |S_n - f|,$$

y como $\rho(S_n - f) \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces se sigue que

$$\rho(S_k - \text{mín}(f, S_k)) = 0,$$

luego $S_k = \text{mín}(f, S_k)$ en casi todo punto y esto se tiene para $k = 1, 2, \ldots$, así

$$f \geq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n,$$

más aún dado que $\rho(f) < \infty$ por ser L_ρ completo, se puede concluir que

$$\rho(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n) < \infty,$$

es decir, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \in L_\rho$. Mostrando así el teorema. $\square$

A continuación se definirán dos propiedades que puede tener la función seminorma ρ debido a que son bastante útiles para el desarrollo de la teoría.

Definición 1.1.10 (Propiedad de Fatou). La función seminorma ρ se dice que tiene la propiedad de Fatou si cuando $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \nearrow u$ para toda $u_n \in M^+$, entonces $\rho(u_n) \nearrow \rho(u)$.

Definición 1.1.11 (Propiedad débil de Fatou). La función seminorma ρ se dice que tiene la propiedad débil de Fatou si cuando $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \nearrow u$ para toda $u_n \in M^+$ y $\text{lím}\, \rho(u_n) < \infty$, entonces $\rho(u) < \infty$.

Comentario. Los espacios l_p con $(1 \leq p \leq \infty)$ tienen la propiedad de Fatou.

Teorema 1.1.12. *a) Si ρ es una función seminorma con la propiedad de Fatou entonces ρ tiene la propiedad débil de Fatou.*

b) Si ρ es una función seminorma con la propiedad débil de Fatou, entonces ρ tiene la propiedad de Riesz-Fischer y así L_ρ es un espacio de Banach.

Demostración. a) Sea $\{\boldsymbol{u_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ cualquier sucesión creciente no negativa en M^+ que converge a la sucesión $\boldsymbol{u}$, tal que, $\text{lím}_{n\to\infty} \rho(\boldsymbol{u_n}) < \infty$. Como ρ tiene la propiedad de Fatou $\rho(\boldsymbol{u_n}) \nearrow \rho(\boldsymbol{u})$, lo anterior implica que $\rho(\boldsymbol{u}) < \infty$.

b) Sea ρ una función norma con la propiedad débil de Fatou y sea $\{\boldsymbol{u_n}\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq M^+$, tal que $\sum \rho(\boldsymbol{u_n}) < \infty$; se definen las funciones $s_n = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} + \cdots + \boldsymbol{u_n}$ que satisfacen la siguiente desigualdad $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots$. Adicionalmente, se tiene que

$$\rho(s_n) = \rho\left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{u_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \rho(\boldsymbol{u_k}),$$

luego,

$$\text{lím}_{n\to\infty} \rho(s_n) < \infty.$$

Dado que ρ tiene la propiedad débil de Fatou la función

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \boldsymbol{u_n} = \lim_{n\to\infty} s_n$$

satisface

$$\rho\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \boldsymbol{u_n}\right) < \infty$$

y esto muestra que ρ tiene la propiedad de Riesz-Fischer.

□

Teorema 1.1.13. *La función seminorma ρ tiene la propiedad débil de Fatou si y sólo si existe una constante $k \geq 1$ tal que, para toda sucesión $u_n \nearrow u$ con $u_n \in M^+$ y $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n) < \infty$, se tiene que*

$$\rho(u) \leq k \lim_{n\to\infty} \rho(u_n).$$

Demostración. Se asume primero que existe una constante $k \geq 1$ tal que, para cada sucesión $u_n \nearrow u$ con $u_n \in M^+$ y $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n) < \infty$, se tiene que $\rho(u) \leq k \lim_{n\to\infty} \rho(u_n) < \infty$; así, ρ tiene la propiedad débil de Fatou.

Para mostrar la otra implicación, considere primero el caso cuando $u_n \nearrow u$ con $\rho(u_n) = 0$ para todo n; se va a mostrar que $\rho(u) = 0$. Dado que ρ tiene la propiedad débil de Fatou, en cualquier caso se tendrá que $\rho(u) < \infty$. Suponga que $0 < \rho(u) < \infty$ y tome $v_n = nu_n$; así $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \ldots$, donde $\rho(v_n) = 0$ ya que $\rho(u_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ así, la función $v = \lim v_n$ satisface que $\rho(v) < \infty$ por propiedad débil de Fatou. Por otro lado, $v \geq nv_n \geq pu_n$ para todo $n \geq p$ con p fijo pero arbitrario, así $v \geq pu_n$ para todo p; adicionalmente por propiedad de la seminorma ρ se tiene que

$$\rho(v) \geq \rho(pu_n) = p\rho(u_n)$$

para cada p. Lo anterior implica que $\rho(v) = \infty$ llegando así a una contradicción. Por tanto, si $u_n \nearrow u$ y $\rho(u_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\rho(u) = 0$.

Considere ahora el caso en el cual no existe una constante $k \geq 1$. Luego para cada $p = 1, 2, \ldots$, se puede encontrar una sucesión $u_{np} \nearrow u_p$ cuando $n \to \infty$ en M^+, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_{np})$ es finito y

$$\rho(u_p) > p^3 \lim_{n\to\infty} \rho(u_{np}). \tag{1-3}$$

Note que no es posible que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_{np}) = 0$ ya que esto implicaría que $\rho(u_p) = 0$ debido a lo demostrado en el caso anterior contradiciendo la ecuación (1-3). Así, multiplicando por constantes apropiadas, es posible asumir que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_{np}) = p^{-2}$ y por tanto, en virtud de

(1-3) se obtiene $\rho(u_p) > p$ para cada $p = 1, 2, \ldots$. Ahora defina $v_n = u_{n1} + u_{n2} + \ldots + u_{nn}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots$, y debido a que el espacio es sólido

$$\rho(v_n) \leq \rho(u_{n1}) + \rho(u_{n2}) + \cdots + \rho(u_{nn}) \leq 1 + 2^{-2} + \cdots + n^{-2}.$$

Luego se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(v_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty$. Por lo cual, $v = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ satisface que $\rho(v) < \infty$ debido a que ρ tiene la propiedad de Fatou. Pero es posible observar que para cada p fijo

$$v = \sup v_n \geq \sup u_{np} = u_p,$$

luego,

$$\rho(v) \geq \rho(u_p) > p$$

para cada p, lo cual contradice el hecho de que $\rho(v) < \infty$, finalizando así la demostración.

$\square$

1.2. Espacio de sucesiones de Köthe

Este trabajo de investigación trata de las propiedades del operador multiplicación actuando sobre espacios de sucesiones de Köthe, por eso es importante dar los preliminares de estos espacios y de su dual, ilustrando los conceptos y propiedades con ejemplos.

Los espacios de sucesiones de Köthe son espacios de Banach que surgen cuando se toma un espacio de medida (Ω, Σ, μ) con $\Omega \subseteq \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ y μ la medida de conteo, donde al asumir que dicho espacio es de Banach por el Teorema 1.1.7 su norma satisface la propiedad de Riesz-Fischer. Más formalmente, para X un espacio de sucesiones definidas en $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ se tiene la siguiente definición:

Definición 1.2.1 (Espacio de sucesiones de Köthe). Un espacio de sucesiones de Banach $X = (X, ||\cdot||_X)$ se dice que es un espacio de sucesiones de Köthe si cumple las siguientes propiedades:

(i) El espacio es sólido: si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son sucesiones tales que $|a(n)| \leq |b(n)|$ para todo $n \in \Omega$ y $\boldsymbol{b} \in X$, entonces $\boldsymbol{a} \in X$ y $||\boldsymbol{a}||_X \leq ||\boldsymbol{b}||_X$.

(ii) Para todo $A = \{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ subconjunto finito de Ω, la sucesión $\mathbf{1}_A$ definida por

$$\mathbf{1}_A(k) = \begin{cases} 1, & k \in A, \\ \\ 0, & k \notin A, \end{cases}$$

pertenece al conjunto X.

La condición (ii) en la definición anterior se puede reescribir diciendo que las sucesiones canónicas $\boldsymbol{e_k} = \mathbf{1}_{\{k\}}$ con $k \in \Omega$, pertenecen al conjunto X. En lo que sigue, y por comodidad, se asumirá que $\Omega = \mathbb{N}$. Adicionalmente, la sucesión $\boldsymbol{e_k}$ quedará definida por

$$e_n(k) = \begin{cases} 1, & si \quad k = n, \\ \\ 0, & \quad e.o.c, \end{cases} \tag{1-4}$$

con $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, se hace la distinción entre una sucesión numérica y una sucesión de sucesiones; la primera se denotará por $\boldsymbol{a} = \{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ y la segunda por $(\boldsymbol{a_n})$.

A continuación se listan diversos ejemplos de espacios de sucesiones que forman parte de los espacios de sucesiones de Köthe.

1.2.1. Ejemplos de espacios de sucesiones de Köthe

Esta sección tiene como objetivo mostrar ejemplos de espacios de sucesiones de Köthe iniciando por los espacios clásicos y luego listando los espacios de sucesiones más nuevos.

Como ejemplos importantes de espacios de sucesiones de Köthe se tienen los siguientes espacios:

- El espacio c_0 de las sucesiones complejas $\boldsymbol{a}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$$

  con la norma

$$||\boldsymbol{a}||_{\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a(n)|.$$

- Los espacios de sucesiones l_p $(1 \leq p < +\infty)$, con su norma usual

$$||\boldsymbol{a}||_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a(n)|^p\right)^{1/p}.$$

  Más generalmente, los espacios de sucesiones $l^p(\boldsymbol{\omega})$ con $(1 \leq p < +\infty)$ y $\boldsymbol{\omega}$ una sucesión positiva, equipado con la norma

$$||\boldsymbol{a}||_{l^p(\boldsymbol{\omega})} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a(n)|^p \omega(n)\right)^{1/p}.$$

- El espacio l^{∞} de todas las sucesiones reales acotadas $\boldsymbol{a}$ equipado con la norma

$$||\boldsymbol{a}||_{\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a(n)|.$$

- Los espacios de sucesiones de Cesàro, denotados por ces_p para $1 < p < \infty$, con norma

$$||\boldsymbol{a}||_{ces_p} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a(k)| \right)^p \right)^{1/p}$$

- Los espacios de sucesiones de Lorentz, los cuales se denotan por $l_{(p,q)}$ con $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq +\infty$, cuya norma es

$$\|a\|_{(p,q)} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (n^{1/p} a^*(n))^q n^{-1} \right)^{1/q}, & 1 < p < \infty,\ 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{n \geq 1} \quad n^{1/p} a^*(n), & 1 < p \leq \infty,\ q = \infty. \end{cases}$$

  Donde, para definir la norma de este espacio es necesario conocer la función de distribución de una sucesión $\boldsymbol{a}$, la cual se define como

$$\mu_a(s) = \mu\left(\{n \in \mathbb{N} : |a(n)| > s\}\right) \qquad s \geq 0.$$

  Adicionalmente se define el reordenamiento decreciente de una sucesión definido como sigue

$$a^*(n) = \text{ínf}\left\{s > 0 : \mu_a(s) \leq n - 1\right\}$$

  mientras que para $t \geq 0$, se define

$$a^*(t) = a^*(n_t),$$

  siendo n_t el natural tal que $n_t - 1 \leq t < n_t$.

- Los espacios de sucesiones de Orlicz, denotados por l^φ, donde se considera una función $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ denominada función de Orlicz, la cual es creciente, convexa y solo asume el valor cero en cero, además $\text{lím}_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Entonces la norma de este espacio se define por

$$||\boldsymbol{a}||_\varphi = \text{ínf}\left\{ \lambda > 0 : \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi\left(\frac{|a(n)|}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}.$$

Se reservará la letra X para referirnos a un espacio de sucesiones de Köthe. En la siguiente sección se realizará el estudio del espacio dual del espacio de sucesiones X y de su correspondiente espacio dual de Köthe.

1.3. Sobre el dual de un espacio de Köthe

Una vez definidos los espacios de sucesiones de Köthe, habiendo ilustrado ejemplos de estos espacios, se procede a realizar el estudio del espacio dual de dicho espacio así como la equivalencia entre el dual topológico y el dual de Köthe. Parte de la teoría desarrollada en esta sección se encuentra en los textos A. C. Zaanen [20] y P. K. Lin [11].

En primer lugar, para un espacio de Köthe de sucesiones X, se denota por X^* el dual topológico de todos los funcionales lineales y acotados en X. Como ejemplo importante de un elemento en X^*, se define, para $m \in \mathbb{N}$ fijo, el funcional evaluación $f_m : X \to \mathbb{C}$ por

$$f_m(\boldsymbol{a}) = a(m),$$

el cual posee la siguiente propiedad:

Proposición 1.3.1. *Para $m \in \mathbb{N}$, el funcional evaluación $f_m : X \to \mathbb{C}$ definido arriba satisface que*

$$||f_m|| = \sup_{\boldsymbol{a} \in X \setminus \{0\}} \frac{|f_m(\boldsymbol{a})|}{||\boldsymbol{a}||_X} = \frac{1}{||\boldsymbol{e_m}||_X},$$

donde $||f_m||$ denota la norma del funcional f_m.

Demostración. Dada la sucesión $\boldsymbol{a} \in X$ tal que $||\boldsymbol{a}||_X \leq 1$ y la sucesión canónica $\boldsymbol{e_m}$ definida como en (1-4), es posible obtener la desigualdad

$$|a(m)e_m(k)| \leq |a(k)|, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como X es un espacio sólido, entonces

$$\|a(m)\boldsymbol{e}_m\|_X \leq \|\boldsymbol{a}\|_X \leq 1,$$

con lo cual se obtiene la cota

$$|a(m)| \leq \frac{1}{\|\boldsymbol{e_m}\|_X}.$$

Tomando el supremo sobre todas las sucesiones $\boldsymbol{a} \in X$ tales que $\|\boldsymbol{a}\|_X \leq 1$, a ambos lados de la desigualdad anterior, se tiene

$$\|f_m\| \leq \frac{1}{\|\boldsymbol{e_m}\|_X}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|f_m\| &= \sup_{\boldsymbol{a} \in X \setminus \{0\}} \frac{|f_m(\boldsymbol{a})|}{\|\boldsymbol{a}\|_X} \\ &\geq \frac{|f_m(\boldsymbol{e_m})|}{\|\boldsymbol{e_m}\|_X} = \frac{1}{\|\boldsymbol{e_m}\|_X}, \end{aligned}$$

lo que culmina la demostración de la proposición. □

Se puede observar que f_m es un ejemplo de un funcional que se obtiene como "un producto interno" por el elemento $\boldsymbol{e_m}$ de la base canónica; es decir, para cualquier $\boldsymbol{a} \in X$ se tiene

$$f_m(\boldsymbol{a}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e_m} \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k) e_m(k).$$

A este tipo de funcionales se le denomina **integral**; más exactamente, un funcional lineal y acotado f_c definido en X se llama una *integral* si existe una sucesión $\boldsymbol{c} = \{c(n)\} \in X$ tal que

$$f_c(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k) c(k) < +\infty,$$

para toda $\boldsymbol{a} \in X$. El conjunto de las sucesiones $\boldsymbol{c} = \{c(n)\}$ que definen funcionales integrales f_c recibe el nombre de *dual de Köthe* y se denota por X'. Claramente X' es un espacio vectorial, el cual se puede dotar de una norma de la siguiente manera: para $\boldsymbol{c} \in X'$, la norma de $\boldsymbol{c}$ será la norma del funcional integral f_c, definido por $\boldsymbol{c}$; es decir,

$$\|\boldsymbol{c}\|_{X'} = \|f_c\| = \sup_{\boldsymbol{a} \in X \setminus \{0\}} \frac{|f_c(\boldsymbol{a})|}{\|\boldsymbol{a}\|_X} = \sup_{\boldsymbol{a} \in X \setminus \{0\}} \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|_X} \sum_{k=1}^{+\infty} |a(k)| \, |c(k)| \, .$$

En particular, para cualquier $\boldsymbol{a} \in X$ y $\boldsymbol{c} \in X'$ se cumple que

$$|f_c(\boldsymbol{a})| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a(k)| \; |c(k)| \leq \|\boldsymbol{a}\|_X \, \|\boldsymbol{c}\|_{X'} \, .$$

Debido a lo anterior y a la Proposición 1.3.1 se tiene el siguiente corolario

Corolario 1.3.2. *La sucesión $\boldsymbol{e_m} \in X'$, es tal que*

$$\|\boldsymbol{e_m}\|_{X'} = \|f_m\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{e_m}\|_X},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Observe que si $X = l^p$ con $1 < p < +\infty$, entonces por el teorema de representación de Riesz $X' = l^q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En este caso $\|\boldsymbol{e_m}\|_X = \|\boldsymbol{e_m}\|_{X'} = 1$; pero existen espacios donde la norma de $\boldsymbol{e_k}$ puede tender a cero o a infinito; por ejemplo, si tomamos $X = ces_p$ con $p > 1$, entonces

$$||\boldsymbol{e_m}||_{ces_p} = \left(\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \right)^{1/p},$$

donde es posible observar que $||\boldsymbol{e_m}||_{ces_p} \to 0$ cuando $m \to \infty$. Por lo cual $||\boldsymbol{e_m}||_{ces_p'} \to \infty$ cuando $m \to \infty$, debido al Corolario 1.3.2.

Todavía más, se tiene la siguiente propiedad.

Proposición 1.3.3. *El espacio* $(X^{'}, ||\cdot||_{X'})$ *es un espacio de sucesiones de Köthe.*

Demostración. 1. Sean $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ dos sucesiones tales que $\boldsymbol{c} \in X^{'}$ y $|b(k)| \leq |c(k)|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces, para cualquier sucesión $\boldsymbol{a} \in X$, se tiene que

$$|a(k)|\,|b(k)| \leq |a(k)|\,|c(k)|$$

por lo cual, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\sup_{\boldsymbol{a}\in X\setminus\{0\}} \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|_X} \sum_{k=1}^{+\infty} |a(k)|\,|b(k)| \leq \sup_{\boldsymbol{a}\in X\setminus\{0\}} \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|_X} \sum_{k=1}^{+\infty} |a(k)|\,|c(k)| = \|\boldsymbol{c}\|_{X'}$$

y dado que $\boldsymbol{c} \in X^{'}$, es posible concluir que

$$\|\boldsymbol{b}\|_{X'} = \sup_{\boldsymbol{a}\in X\setminus\{0\}} \frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|_X} \sum_{k=1}^{+\infty} |a(k)|\,|b(k)| < +\infty$$

por tanto, $\boldsymbol{b} \in X^{'}$. Mostrándose así que el espacio $X^{'}$ es sólido.

2. Por la Proposición 1.3.1 y el comentario posterior a su demostración, cada sucesión canónica $\boldsymbol{e_m}$ define un funcional evaluación que es una integral y por ende $\boldsymbol{e_m} \in X'$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

□

Claramente $X^{'}$ está contenido en X^{*}, en el sentido que cada sucesión $\boldsymbol{c} \in X^{'}$ define un funcional lineal y acotado $f \in X^{*}$; pero en general, la otra inclusión no es cierta. Para analizar cuándo el dual topológico coincide con el dual de Köthe, se requiere la siguiente caracterización de las integrales.

Teorema 1.3.4. El funcional lineal y acotado $f \in X$ es una integral si y sólo si para toda sucesión $(\boldsymbol{a_n}) \subseteq X$ tal que $0 \leq \boldsymbol{a_n} \searrow 0$ se cumple que $f(\boldsymbol{a_n}) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Se supone primero que el funcional f es una integral; entonces, existe una sucesión $\boldsymbol{c} \in X^{'}$ tal que

$$f\left(\boldsymbol{a}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n)c(n), \forall \boldsymbol{a} \in X.$$

Sea $(\boldsymbol{a_n}) \subseteq X$ tal que $0 \leq \boldsymbol{a_n} \searrow 0$; se debe mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{a_n}) = 0.$$

En efecto, la condición $0 \leq \boldsymbol{a_n} \searrow 0$ significa que $a_n(k) \leq a_1(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por esta razón, se tiene que

$$|a_n(k)c(k)| \leq |a_1(k)|\,|c(k)|$$

lo que implica que la sucesión $|\boldsymbol{a_n} \cdot \boldsymbol{c}|$ está dominada por $|\boldsymbol{a_1} \cdot \boldsymbol{c}| \in l^1$. También

$$\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{a_n} \cdot \boldsymbol{c}| = 0 \text{ puntualmente.}$$

Entonces, por el teorema de la convergencia dominada

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{a_n}) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_n(k)c(k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} a_n(k)c(k)\Big) = 0\end{aligned}$$

y esto muestra la implicación.

Por otro lado, suponga que $f \in X^*$ y que

$$\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{a_n}) = 0 \quad \forall\, (\boldsymbol{a_n}) \subseteq X \text{ tal que } 0 \leq \boldsymbol{a_n} \searrow 0.$$

Se va a mostrar que

$$f(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{+\infty} c(k)a(k) \tag{1-5}$$

para todo $\boldsymbol{a} \in X$ y con $c(k) = f(\boldsymbol{e_k})$. En efecto, se fija $\boldsymbol{a} \in X$ y para $n \in \mathbb{N}$ se considera la sucesión

$$\boldsymbol{a_n} := \sum_{k=1}^{n} a(k)\boldsymbol{e_k} = (a(1), a(2), \cdots, a(n), 0, 0, \cdots).$$

Se puede observar que $\boldsymbol{a_n} \in X$ pues $|\boldsymbol{a_n}| \leq |\boldsymbol{a}|$ y $\boldsymbol{a} \in X$. Si $a(k) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que $a_n(k) \leq a_{n+1}(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y también

$$\lim_{n\to\infty} a_n(k) = a(k), \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Luego, definiendo $\boldsymbol{b_n} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a_n}$, se puede ver que $\boldsymbol{b_n} \in X$ y $0 \leq \boldsymbol{b_n} \searrow 0$. Así que usando la hipótesis, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{b_n}) = 0$$

lo cual significa, por linealidad, que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(\boldsymbol{e_k})a(k) - f(a) \right) = 0,$$

que es justamente la expresión en (1-5) con $c(k) = f(\boldsymbol{e_k})$.

El caso general, donde $a(k) < 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$, se logra descomponiendo $\boldsymbol{a}$ en su parte positiva y negativa y aplicando el argumento anterior a cada una de sus partes. Esto culmina la demostración del teorema. $\square$

Finalmente se busca determinar cuándo $X^{'} = X^{*}$; para ello, se requiere la siguiente caracterización.

Definición 1.3.5 (Orden continuo). Un espacio de sucesiones de Köthe X se dice que tiene *norma orden continua*, si para toda sucesión positiva y decreciente $(\boldsymbol{a_n})$ de elementos de X, tales que $\boldsymbol{a_n} \searrow 0$ se cumple que $||\boldsymbol{a_n}||_X \to 0$.

Adicionalmente, se tiene que un espacio de Banach es orden continuo si y sólo si es separable, por tal motivo, es posible observar que el espacio l^{∞} no es un espacio orden continuo. De hecho, todo espacio de Banach que no sea orden continuo, contiene un subespacio isomorfo a l^{∞}; lo anterior fue tomado del texto de J. Lindenstrauss & L. Tzafriri [12]. Son ejemplos de espacios orden continuos los espacios l^p con $1 \leq p < \infty$.

La definición anterior es equivalente a que

$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{b_n} - \boldsymbol{b}\|_X = 0$$

para toda sucesión $(\boldsymbol{b_n}) \subseteq X$ tal que $0 \leq \boldsymbol{b_n} \nearrow \boldsymbol{b} \in X$.

El siguiente resultado fue tomado del texto de P. K. Lin [11], donde se realizaron las adaptaciones correspondientes:

Teorema 1.3.6. *El espacio de sucesiones de Köthe X tiene norma orden continua si y sólo si $X^{'} = X^{*}$.*

Demostración. Se supone primero que el espacio X es orden continuo. Se va a demostrar que $X^{*} \subseteq X^{'}$. Con este fin, sea f cualquier funcional lineal y acotado en X. Se debe ver que f es una integral. Para esto, según el Teorema 1.3.4, se considera $(\boldsymbol{a_n})$ cualquier sucesión en X tal que $0 \leq \boldsymbol{a_n} \searrow 0$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} |f(\boldsymbol{a_n})| \leq \lim_{n\to\infty} \|f\| \, \|\boldsymbol{a_n}\|_X = 0,$$

pues por ser X orden continuo se cumple que $||\boldsymbol{a_n}||_X \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto muestra que f es una integral.

Por otro lado, se supone que $X^{'} = X^{*}$ y se toma cualquier sucesión $(\boldsymbol{b_n})$ creciente y acotada de elementos positivos que converge a la sucesión $\boldsymbol{b} \in X$. Entonces, por hipótesis, para cualquier $f \in X^{*}$, existe $c \in X^{'}$ tal que

$$f(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k)c(k) < \infty, \;\; \forall \boldsymbol{a} \in X.$$

Por el teorema de la convergencia dominada, se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(\boldsymbol{b_n}) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} b_n(k)c(k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\lim_{n\to\infty} b_n(k)c(k) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} b(k)c(k) = f(\boldsymbol{b}),
\end{aligned}$$

y esto significa que $\boldsymbol{b_n} \to \boldsymbol{b}$ débilmente. Se debe mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{b_n} - \boldsymbol{b}\|_X = 0.$$

En efecto, si la afirmación anterior no es cierta, existe $\beta > 0$ y una subsucesión $(\boldsymbol{b_{n_k}})$ de $(\boldsymbol{b_n})$ tal que

$$\|\boldsymbol{b_{n_k}} - \boldsymbol{b}\|_X > \beta,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por un Corolario del Teorema de Hanh-Banach, para cada k, existe un funcional lineal positivo $f_k \in X^* = X'$, tal que $\|f_k\| = 1$ y además

$$f_k(\boldsymbol{b_{n_k}} - \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{b_{n_k}} - \boldsymbol{b}\|_X > \beta,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, usando el Teorema de Alaoglu, para cualquier funcional f que sea punto límite débil-$*$ de (f_k) se tendría $f(\boldsymbol{b_{n_k}} - \boldsymbol{b}) > \beta$, contradiciendo que $\boldsymbol{b_{n_k}}$ converge débilmente a $\boldsymbol{b}$. Esto culmina la demostración del teorema. $\square$

En lo que resta del trabajo se asumirá que el espacio de sucesiones de Köthe X tiene norma orden continua.

1.4. Dual normante

Es deseable, tal como ocurre con los espacios l^p, que se pueda recuperar la norma de los elementos de X a través de la norma de los elementos de X'. Es por esto que resulta pertinente la siguiente definición.

Definición 1.4.1. El espacio X' se dice **normante** para X, si para cada $\boldsymbol{a} \in X$ se tiene que

$$\|\boldsymbol{a}\|_X = \sup_{\|\boldsymbol{c}\|_{X'} \leq 1} |f_c(\boldsymbol{a})|.$$

La anterior definición establece que la norma de los elementos de X se puede definir a través de la norma de los elementos del dual de Köthe.

Ejemplo 1.4.2. Se sabe que $(l^p)^{'} = l^q$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $1 < p < +\infty$ ya que, si $f \in (l^p)^{'}$ entonces, por el Teorema de Representación de Riesz, existe una sucesión $\boldsymbol{c} \in l^q$ tal que

$$f(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{+\infty} c(k)a(k).$$

Adicionalmente se tiene que $\|\boldsymbol{c}\|_q = \|f\|$, por lo cual

$$\|\boldsymbol{c}\|_q = \sup_{\|\boldsymbol{a}\|_p \leq 1} |f(\boldsymbol{a})| = \sup_{\|\boldsymbol{a}\|_p \leq 1} \sum_{k=1}^{+\infty} |c(k)| \, |a(k)| \, .$$

Esto es, l^p es normante para l^q. Esto culmina el ejemplo.

Comentario. De la definición anterior se tiene que $X^{'}$ (un subespacio de X^*) es normante para X si y sólo si cada vez que se tenga una sucesión $(\boldsymbol{a_n})$ tal que $0 \leq \boldsymbol{a_n} \nearrow \boldsymbol{a}$ entonces $\|\boldsymbol{a_n}\|_X \to \|\boldsymbol{a}\|_X$.

Finalmente, es importante destacar que a pesar de que los elementos de la base canónica $\boldsymbol{e_m}$ pertenecen a cualquier espacio de Köthe de sucesiones, estos no siempre forman una base de Schauder para X; por ejemplo, si ponemos $X = l^\infty$, entonces $(\boldsymbol{e_m})$ no es una base para este espacio debido a que si para cada sucesión $\boldsymbol{a} \in l^\infty$ se tiene que

$$\boldsymbol{a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n)\boldsymbol{e_n},$$

es posible observar que la convergencia en norma infinito no se garantiza. Por ejemplo, si se toma la sucesión $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1, \ldots)$, entonces

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{N} a(k)\boldsymbol{e_n} - \boldsymbol{a} \right\|_\infty = 1.$$

Pero, en el caso en que $(\boldsymbol{e_m})$ sea una base de Schauder para $X^{'}$, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.4.3. *Sea X un espacio de sucesiones de Köthe tal que la sucesión canónica $(\boldsymbol{e_n})$ es una base de Schauder para $X^{'}$. Entonces para cualquier sucesión $\boldsymbol{c} = \{c(n)\} \in X^{'}$ se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|\boldsymbol{e_n}\|_X} |c(n)| = \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{e_n}\|_{X^{'}} \, |c(n)| = 0.$$

Demostración. Sea $\boldsymbol{c}$ cualquier sucesión del espacio $X^{'}$; entonces, dado que $(\boldsymbol{e_n})$ es una base de Schauder para $X^{'}$, la sucesión $\boldsymbol{c}$ puede escribirse como

$$\boldsymbol{c} = \sum_{m=1}^{+\infty} c(m)\boldsymbol{e_m}.$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\boldsymbol{c}-\sum_{m=1}^{n}c(m)\boldsymbol{e_m}\right\|_{X'}=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{m=n+1}^{+\infty}c(m)\boldsymbol{e_m}\right\|_{X'}=0.$$

Adicionalmente para $n\in\mathbb{N}$ fijo y para todo $k\in\mathbb{N}$ se tiene la siguiente desigualdad

$$|c(n)\boldsymbol{e_n}(k)|\leq\left|\sum_{m=n+1}^{+\infty}c(m)\boldsymbol{e_m}(k)\right|.$$

Como X' es un espacio de sucesiones de Köthe, es sólido, por tanto

$$|c(n)|\,\|\boldsymbol{e_n}\|_{X'}=\|c(n)\boldsymbol{e_n}\|_{X'}\leq\left\|\sum_{m=n+1}^{+\infty}c(m)\boldsymbol{e_m}\right\|_{X'}.$$

Tomando el límite en ambos lados de la desigualdad se obtiene el resultado.

□

Comentario. El resultado anterior establece que, bajo ciertas condiciones, el espacio dual de Köthe $X^{'}$ está contenido en cierto espacio de sucesiones con peso. De hecho, si definimos para $k\in\mathbb{N}$

$$\omega(k)=\frac{1}{\|\boldsymbol{e_k}\|_X}=\|\boldsymbol{e_k}\|_{X'},$$

entonces por el teorema anterior es válido decir que $X^{'}\subseteq c_0(\boldsymbol{\omega})$.

Capítulo 2

Operador multiplicación en espacios de sucesiones de Köthe

El operador multiplicación denotado por M_u, se define formalmente de la siguiente manera; dado un espacio de Banach X de sucesiones reales o complejas, tal que, el producto $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a} \in X$ para toda sucesión $\boldsymbol{a} \in X$ y $\boldsymbol{u}$ una sucesión fija. Entonces, se dice que la sucesión $\boldsymbol{u}$ induce un operador lineal $M_u : X \to X$ definido por $M_u(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}$, el cual recibe el nombre de operador multiplicación con símbolo $\boldsymbol{u}$. Hoy en día, existe una basta literatura donde se habla sobre las propiedades de este operador definido sobre distintos espacios. Además, los operadores multiplicación juegan un papel importante en áreas como álgebra de operadores, sistemas dinámicos y endomorfismos de álgebras de Banach.

En este capítulo se estudian las propiedades de los operadores multiplicación definidos sobre el espacio de sucesiones Köthe, donde se van a establecer las condiciones que se deben imponer al símbolo $\boldsymbol{u}$ para que existan operadores multiplicación no nulos definidos sobre dicho espacio que sean continuos, invertibles, tengan rango cerrado y sean Fredholm.

Se da inicio al capítulo estableciendo las condiciones bajo las cuales el operador multiplicación definido sobre el espacio de Köthe resulta ser continuo. A menos que se diga lo contrario, X denotará al espacio de sucesiones de Köthe. La teoría desarrollada en esta sección se basa en los artículos de J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [16] y de R. E. Castillo, R. Humberto, J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [4].

2.1. Operadores multiplicación continuos

Dado que los operadores multiplicación son en particular funciones, la definición de continuidad que se tiene para estas también aplica a los operadores y en especial a los operadores de multiplicación. Adicionalmente, si se tiene un operador lineal T entre espacios normados, entonces T es continuo si y sólo si T es acotado; es decir, las definiciones de ser acotado y ser continuo son equivalentes para operadores lineales. Por esta razón se recuerda que un operador lineal $T : X \to Y$ definido entre dos espacios normados X y Y se dice que es acotado si existe un número real $L > 0$ tal que, para todo $x \in X$, se tiene que

$$\|Tx\| \leq L\,\|x\|\,,$$

donde la norma a la izquierda es la norma en el espacio Y y la norma a la derecha es la norma en el espacio X. De la desigualdad anterior se desprende el hecho de que un operador lineal y acotado envía conjuntos acotados de X a conjuntos acotados en Y. Para conocer más sobre la teoría de los operadores continuos y acotados vea el texto de E. Kreyszig [10].

A continuación se enunciará y demostrará el teorema que permite establecer las condiciones para obtener un operador de multiplicación continuo definido sobre el espacio X.

Teorema 2.1.1. *Sea $\boldsymbol{u} = \{u(n)\}$ una sucesión compleja. El operador multiplicación M_u inducido por el símbolo $\boldsymbol{u}$ es continuo en el espacio de Köthe de sucesiones X si y sólo si $\boldsymbol{u} \in l^\infty$.*

Demostración. Sea M_u un operador multiplicación continuo en X. Entonces existe $K > 0$ tal que

$$||M_u\boldsymbol{a}||_X \leq K||\boldsymbol{a}||_X,$$

para toda $\boldsymbol{a} = \{a(n)\} \in X$. En particular, para un $n \in \mathbb{N}$ fijo, se define

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}}{\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}\|_X}, \tag{2-1}$$

donde la sucesión $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}$ es aquella definida en (1-4).

Por definición de espacios de Köthe de sucesiones, se tiene que $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}} \in X$; de aquí, también $\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}} \in X$. Luego, se puede decir que

$$\|M_u\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}\|_X \leq K\,\|\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}\|_X$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero además también se ve que

$$\begin{aligned}\|M_u\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}\|_X = \|\boldsymbol{u}\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}\|_X &= \left\|\boldsymbol{u}\frac{\boldsymbol{e}_n}{\|\boldsymbol{e}_n\|_X}\right\|_X \\ &= \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_n\|_X}\,\|\boldsymbol{u}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}\|_X\,. \end{aligned} \tag{2-2}$$

Todavía más, como la multiplicación se hace puntualmente, se tiene que

$$\|\boldsymbol{u}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}\|_X = \|u(n)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}\|_X = |u(n)|\,\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}\|_X\,.$$

Por lo cual, volviendo a la relación (2-2), reemplazando por la observación se tiene

$$\|M_u \tilde{\boldsymbol{e}}_n\|_X = |u(n)|.$$

Así, con lo realizado anteriormente y usando el hecho de que M_u se asumió continuo se obtiene que

$$|u(n)| = \|M_u \tilde{\boldsymbol{e}_n}\|_X \leq K \|\tilde{\boldsymbol{e}_n}\|_X = K,$$

mostrando que la sucesión u es acotada.

Por otro lado, sea $\boldsymbol{u}$ una sucesión en l^∞; entonces, existe $K_1 > 0$ tal que $|u(n)| \leq K_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, para toda sucesión $\boldsymbol{a} \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ se obtiene

$$|u(n)a(n)| = |u(n)||a(n)| \leq K_1|a(n)|$$

y dado que el espacio X es sólido se puede escribir

$$\|\boldsymbol{ua}\|_X \leq K_1 \|\boldsymbol{a}\|_X .$$

Esto es,

$$\|M_u\boldsymbol{a}\|_X \leq K_1 \|\boldsymbol{a}\|_X ,$$

para toda sucesión $\boldsymbol{a} \in X$ y el operador M_u es acotado, por tanto, continuo. □

Comentario. De la demostración anterior es posible observar que si $M_u : X \to X$ es un operador multiplicación continuo, entonces $\|M_u\| = \|\boldsymbol{u}\|_\infty$.

A continuación se establecerán algunos ejemplos que permiten visualizar la forma en que se usa el teorema anteriormente demostrado.

Ejemplo 2.1.2. Tome el espacio de sucesiones $X = l^p(\boldsymbol{\omega})$ de todas las sucesiones $\boldsymbol{a} = \{a(n)\}$ tales que

$$\|\boldsymbol{a}\|_{l^p(\boldsymbol{\omega})} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)|^p \, \omega(n)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

donde ω una sucesión positiva y $1 \leq p < \infty$. La sucesión $\boldsymbol{u}$ definida por

$$u(n) = \frac{1}{n}$$

con $n \in \mathbb{N}$ y cuya gráfica es

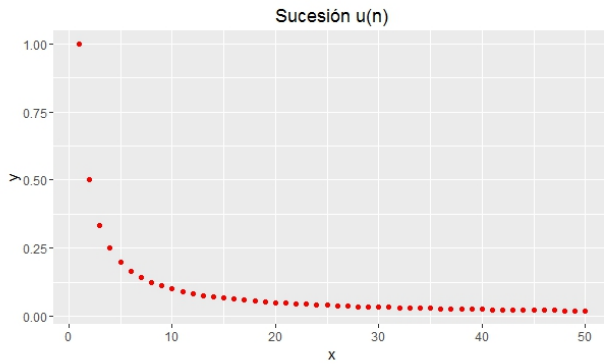

Figura 2-1: Gráfica de la sucesión $u(n) = \frac{1}{n}$

satisface $\|\boldsymbol{u}\|_\infty = 1$, por lo que $\boldsymbol{u} \in l^\infty$. Según el Teorema 2.1.1, el operador multiplicación $M_u : l^p(\boldsymbol{\omega}) \to l^p(\boldsymbol{\omega})$ es continuo. En efecto, note que para $\boldsymbol{a} \in X$, se puede escribir

$$\begin{aligned}
\|M_u \boldsymbol{a}\|_{l^p(\boldsymbol{\omega})} &= \|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}\|_{l^p(\boldsymbol{\omega})} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u(n)|^p \, |a(n)|^p \, \omega(n) \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|u\|_\infty^p \, |a(n)|^p \, \omega(n) \right)^{1/p} \\
&= \|\boldsymbol{u}\|_\infty \, \|\boldsymbol{a}\|_{l^p(\boldsymbol{\omega})} = \|\boldsymbol{a}\|_{l^p(\boldsymbol{\omega})} \, ,
\end{aligned}$$

mostrando así la afirmación.

Ejemplo 2.1.3. Sea $X = l_{(p,q)}$ con $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. La sucesión $\boldsymbol{u}$ definido por

$$u(n) = 2^n$$

con $n \in \mathbb{N}$ y cuya gráfica es

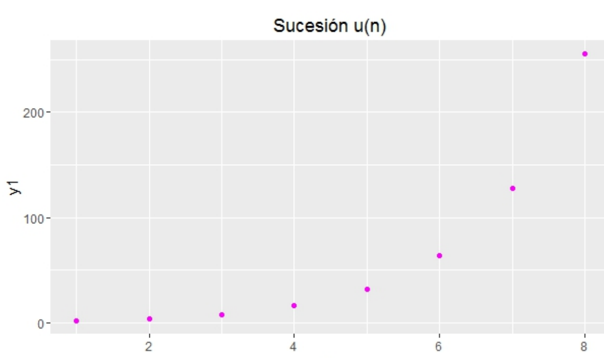

Figura 2-2: Gráfica de la sucesión $u(n) = 2^n$

satisface que $||\boldsymbol{u}||_\infty = \infty$ por lo cual $\boldsymbol{u} \notin l^\infty$, entonces por el Teorema 2.1.1 se puede concluir que el operador multiplicación $M_u : l_{(p,q)} \to l_{(p,q)}$ no es continuo.

2.2. Operadores multiplicación invertibles

En esta sección se establecerá la condición necesaria y suficiente para que un operador de multiplicación actuando sobre un espacio de sucesiones de Köthe X tenga inversa continua.

Teorema 2.2.1. *Sea X un espacio de sucesiones de Köthe y $\boldsymbol{u} \in l^\infty$. El operador multiplicación $M_u : X \to X$ tiene inversa continua si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que*

$$|u(n)| \geq \delta \tag{2-3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Se supone primero que $M_u : X \to X$ es un operador de multiplicación invertible. Se puede observar que $u(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u(n_0) = 0$, entonces la sucesión canónica $\boldsymbol{e_{n_0}} \in X$ definida como en (1-4) satisface $M_u \boldsymbol{e_{n_0}} = \mathbf{0}$ y entonces $\operatorname{Ker}(M_u) \neq \{\mathbf{0}\}$ con lo cual M_u no es inyectiva. Luego, se puede considerar la sucesión $\boldsymbol{v} = \{v(n)\}_{n=1}^{+\infty}$, donde

$$v(n) = \frac{1}{\boldsymbol{u}(n)}$$

y como $\boldsymbol{vua} = \boldsymbol{a}$ para todo $\boldsymbol{a} \in X$, se puede concluir que la inversa de $M_u : X \to X$ es el operador multiplicación $M_v : X \to X$ con símbolo $\boldsymbol{v}$. Así, por el Teorema 2.1.1, se sabe que este operador aplica X en sí mismo si y sólo si $\boldsymbol{v} \in l^\infty$; con lo cual existe $M > 0$ tal que

$$|v(n)| \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, poniendo $\delta = \frac{1}{M}$ se concluye que

$$|u(n)| \geq \delta,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. El recíproco es evidente pues la condición (2-3) establece que el símbolo $\boldsymbol{v} \in l^\infty$ y M_v es la inversa de M_u. □

A continuación se realizarán dos ejemplos para mostrar el uso del teorema enunciado anteriormente.

Ejemplo 2.2.2. Sea $X = l_{(p,q)}$ con $1 < p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ y considere la sucesión $\boldsymbol{u} = \{u(n)\} \in X$, definida por

$$u(n) = \frac{n+1}{n}$$

con $n \in \mathbb{N}$ cuya gráfica es

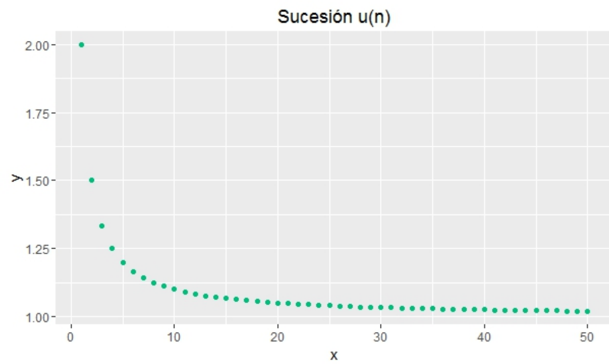

Figura 2-3: Gráfica de la sucesión $u(n) = \frac{n+1}{n}$.

Se puede observar que

$$|u(n)| \leq 2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y por esta razón, el operador $M_u : l_{(p,q)} \to l_{(p,q)}$ definido por el símbolo $\boldsymbol{u}$ es continuo (Teorema 2.1.1). Además, $|u(n)| \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$; así que tomando $\delta = 1$, se puede concluir que este operador es invertible (Teorema 2.2.1) y su inverso es el operador multiplicación $M_u^{-1} = M_v$ con símbolo $\boldsymbol{v}$ definido por

$$v(n) = \frac{n}{n+1},$$

tal como se pudo ver en la demostración del teorema anterior.

Ejemplo 2.2.3. Se toma el espacio $X = c_0$ y la sucesión $\boldsymbol{u} = \{u(n)\} \in X$ definida por

$$u(n) = \frac{1}{2^n},$$

con $n \in \mathbb{N}$ y cuya gráfica es

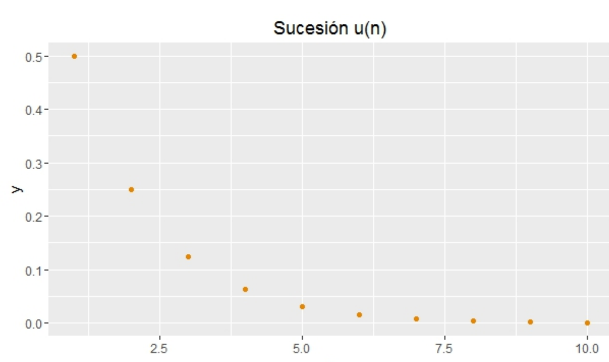

Figura 2-4: Gráfica de la sucesión $u(n) = 2^{-n}$,

Ciertamente

$$|u(n)| \leq \frac{1}{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que el operador multiplicación definido por este símbolo es continuo. También se puede observar que $u(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, este operador no es invertible pues no existe $\delta > 0$ tal que $|u(n)| \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, debido a que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

El problema aquí es que la sucesión $\boldsymbol{v}$ definida por

$$v(n) = \frac{1}{u(n)} = 2^n$$

con $n \in \mathbb{N}$ no es acotada y por el Teorema 2.1.1 el operador M_v no aplica c_0 en c_0; de hecho, si consideramos las sucesiones canónicas $\boldsymbol{e}_n \in c_0$, entonces $\|\boldsymbol{e_n}\|_{c_0} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$; mientras que

$$\|M_v \boldsymbol{e}_n\|_{c_0} = \|\boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_n\|_{c_0} = \|v(n)\boldsymbol{e}_n\|_{c_0} = |v(n)| = 2^n \to +\infty$$

cuando $n \to \infty$ y esto dice que M_v no es un operador continuo desde c_0 en sí mismo. Todavía más, la sucesión $\boldsymbol{a}$ definida por

$$a(n) = \frac{1}{n}$$

con $n \in \mathbb{N}$ es un elemento de c_0; pero el producto $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}$ no pertenece a c_0 pues

$$\lim_{n\to\infty} v(n)a(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty.$$

Así que M_v no aplica c_0 en sí mismo. Esto culmina el ejemplo.

2.3. Operadores multiplicación con rango cerrado

En esta sección se caracterizarán los símbolos $\boldsymbol{u} \in l^\infty$ que definen operadores multiplicación con rango cerrado en X. Dicha caracterización se basa en el trabajo realizado en el artículo de R. E. Castillo, H. Rafeiro, J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [4] haciendo las modificaciones correspondientes.

Se recuerda que un operador $T : X \to X$ se dice que tiene rango cerrado si se satisface que $\overline{Ran(T)} = Ran(T)$. Entre los resultados que se deben tener presente para el estudio que se realizará en la presente sección, se tienen:

1. Un operador $T : X \to X$ entre dos espacios normados se dice que es *acotado inferiormente* si existe una constante $\gamma > 0$ tal que

$$||Tx|| \geq \gamma ||x||.$$

   Para cada $x \in X$. Equivalentemente, T se dice que es *acotado inferiormente* si existe algún $\gamma > 0$ tal que para cada $x \in X$ con $||x|| = 1$, se cumple $||Tx|| \geq \gamma$.

2. Un operador continuo $T : X \to Y$ entre espacios de Banach es acotado inferiormente si y sólo si T es uno a uno y tiene rango cerrado.

Para conocer más sobre los resultados enunciados anteriormente vea el texto de Y. A. Abramovich & C. D. Aliprantis [1].

Con el fin de realizar la caracterización de los símbolos que definen operadores multiplicación con rango cerrado actuando sobre X, es necesario considerar para $\boldsymbol{u} \in l^\infty$

$$\mathcal{N}_u = \{n \in \mathbb{N} : u(n) = 0\}$$

y su complemento será $\mathcal{N}_u^c = \{n \in \mathbb{N} : u(n) \neq 0\}$. Luego se puede definir el conjunto

$$\tilde{X} = \left\{\tilde{\boldsymbol{a}} \in X : \tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c} \text{ para algún } \boldsymbol{a} \in X\right\}.$$

Claramente $\tilde{X}$ es un subespacio de X, también se puede ver que $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \tilde{X}$ si y sólo si $\tilde{\boldsymbol{a}} \in X$ y $\tilde{a}(k) = 0$ para todo $k \in \mathcal{N}_u$; y además se tiene la siguiente propiedad:

Proposición 2.3.1. *El espacio $\tilde{X}$ es un subespacio cerrado de X.*

Demostración. Sea $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \overline{\tilde{X}}$; entonces existe una sucesión $(\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}}) \subseteq \tilde{X}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} ||\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}} - \tilde{\boldsymbol{a}}||_X = 0.$$

Se va a demostrar que $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \tilde{X}$, es decir, $\tilde{a}(k) = 0$ para todo $k \in \mathcal{N}_u$. En efecto, se fija $k \in \mathcal{N}_u$ y entonces se puede escribir

$$|\tilde{a}(k)| = |\tilde{a}_n(k) - \tilde{a}(k)| \leq \frac{1}{\|\boldsymbol{e_k}\|} \|\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}} - \tilde{\boldsymbol{a}}\|_X ,$$

donde se ha usado que $\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}} \in \tilde{X}$ y la propiedad enunciada en la Proposición 1.3.1. Por tanto, tomando límite cuando $n \to \infty$ en la expresión anterior, se concluye que $|\tilde{a}(k)| = 0$. Esto muestra que $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \tilde{X}$ pues $\tilde{\boldsymbol{a}} = \tilde{\boldsymbol{a}}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}$. □

Proposición 2.3.2. *El espacio $(\tilde{X}, ||\cdot||_X)$ es un espacio de sucesiones de Köthe.*

Demostración. Para mostrar que el espacio es de sucesiones de Köthe, debemos mostrar las dos propiedades que lo caracterizan.

1) Sean $\tilde{\boldsymbol{a}}$ y $\tilde{\boldsymbol{b}}$ dos sucesiones tales que $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \tilde{X}$ y

$$|\tilde{a}(n)| \leq |\tilde{b}(n)|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. La expresión anterior y el hecho que $b(k) = 0$ para todo $k \in \mathcal{N}_u$ garantiza que $\tilde{a}(k) = 0$, para todo $k \in \mathcal{N}_u$. Todavía más, como $\tilde{\boldsymbol{b}} \in X$ y $(X, ||\cdot||_X)$ es un espacio de Köthe de sucesiones, entonces $\tilde{\boldsymbol{a}} \in X$ y $||\tilde{\boldsymbol{a}}||_X \leq ||\tilde{\boldsymbol{b}}||_X$. Esto muestra que $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \tilde{X}$ y el espacio $(\tilde{X}, ||\cdot||_X)$ es sólido.

2) Basta ver que las sucesiones canónicas $\boldsymbol{e}_n$ con $n \in \mathcal{N}_u^c$ son elementos de $\tilde{X}$ y esto ocurre pues $\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_n \mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}$.

Por lo tanto el espacio $\tilde{X}$ es de Köthe. $\square$

También será de utilidad la siguiente propiedad sobre el operador "restricción":

Proposición 2.3.3. *Si el operador $M_u : X \to X$ es continuo, entonces el operador M_v con $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}$ aplica $\tilde{X}$ en $\tilde{X}$, más aún $||M_v|| \leq ||M_u||$.*

Demostración. Sea el operador M_u continuo; tome una sucesión $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \tilde{X}$. Entonces, existe una sucesión $\boldsymbol{a} \in X$ tal que $\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}$. Por otro lado, tome la sucesión $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}$, así

$$\begin{aligned} M_v \tilde{\boldsymbol{a}} &= \boldsymbol{v}\tilde{\boldsymbol{a}} \\ &= \boldsymbol{u}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c} \cdot \boldsymbol{a}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c} \\ &= \boldsymbol{u}\boldsymbol{a}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}. \end{aligned}$$

Como el operador $M_u : X \to X$ es continuo, la sucesión $\boldsymbol{ua} \in X$, por lo que la sucesión $\boldsymbol{ua}\mathbf{1}_{\boldsymbol{\mathcal{N}_u^c}} \in \tilde{X}$, mostrándose así que el operador M_v aplica el espacio $\tilde{X}$ en el espacio $\tilde{X}$. Como también se cumple

$$|(v\tilde{a})|(n) \leq |(ua)|(n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, dado que el espacio X es sólido, se tiene $||\boldsymbol{v}\tilde{\boldsymbol{a}}||_X \leq ||\boldsymbol{ua}||_X$, concluyendo así que $||M_v|| \leq ||M_u||$. $\square$

Ahora se puede dar una caracterización de los operadores multiplicación con rango cerrado en términos de su operador "restricción".

Teorema 2.3.4. *Sea $\boldsymbol{u} \in l^\infty$. El operador $M_u : X \to X$ tiene rango cerrado si y sólo si $M_v : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tiene rango cerrado, donde $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\mathbf{1}_{\boldsymbol{\mathcal{N}_u^c}}$.*

Demostración. Se asumirá primero que $M_u : X \to X$ tiene rango cerrado; se considera una sucesión $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \overline{\operatorname{Ran}(M_v)} \subset \tilde{X}$; existen sucesiones $\tilde{\boldsymbol{a}}_n \in \operatorname{Ran}(M_v) \subset \tilde{X}$ con $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$||\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}} - \tilde{\boldsymbol{a}}||_X \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Como $\tilde{\boldsymbol{a}}_n \in \operatorname{Ran}(M_v)$ existe una sucesión $\tilde{\boldsymbol{b}}_n \in \tilde{X}$ tal que $\tilde{\boldsymbol{a}}_n = \tilde{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}$; es decir, $\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}} = \tilde{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{u}\mathbf{1}_{\boldsymbol{\mathcal{N}_u^c}}$. Luego $\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}} \in \operatorname{Ran}(M_u) \subset X$ y como $||\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}} - \tilde{\boldsymbol{a}}||_X \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \overline{\operatorname{Ran}(M_u)} = \operatorname{Ran}(M_u)$. Así, existe una sucesión $\boldsymbol{b} \in X$ tal que $\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{bu}$. Pero $\tilde{\boldsymbol{a}} = \tilde{\boldsymbol{a}}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}$, pues $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \tilde{X}$; por esta razón, también se puede escribir

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}\boldsymbol{u}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c};$$

esto es $\tilde{\boldsymbol{a}} = \tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{v}$ con $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \tilde{X}$. Por tanto $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \operatorname{Ran}(M_v)$ y esto muestra que el operador $M_v : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tiene rango cerrado.

Por otro lado, si el operador $M_v : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tiene rango cerrado y $\boldsymbol{a} \in \overline{\operatorname{Ran}(M_u)} \subset X$, entonces existen sucesiones $\boldsymbol{a_n} \in \operatorname{Ran}(M_u) \subset X$ tales que

$$||\boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{a}||_X \to 0$$

cuando $n \to \infty$, además $\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{b_n} \cdot \boldsymbol{u}$, con $\boldsymbol{b_n} \in X$. Luego, definiendo $\tilde{\boldsymbol{a}}_n = \boldsymbol{a}_n \mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}$ y $\tilde{\boldsymbol{b}}_n = \boldsymbol{b}_n \mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}$, se obtiene $\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}} = \tilde{\boldsymbol{b}}_n \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ran}(M_v) \subset \tilde{X}$. Adicionalmente, se observa que

$$\left|\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}} - \tilde{\boldsymbol{a}}\right|(k) \leq |\boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{a}|(k)\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ya que el espacio X es sólido, se obtiene $||\tilde{\boldsymbol{a}}_n - \tilde{\boldsymbol{a}}||_X \leq ||\boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{a}||_X$. En particular, $||\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}} - \tilde{\boldsymbol{a}}||_X \to 0$ cuando $n \to \infty$ y se puede concluir que $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \overline{\operatorname{Ran}(M_v)} = \operatorname{Ran}(M_v)$. Así existe una sucesión $\tilde{\boldsymbol{b}} \in \tilde{X}$, tal que $\tilde{\boldsymbol{a}} = \tilde{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{v}$.

Por otra parte, como $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}_n \cdot \boldsymbol{u}$, se obtiene que $\boldsymbol{a}_n(k) = 0$ para todo $k \in \mathcal{N}_u$. Entonces, por la propiedad enunciada en la Proposición 1.3.1, para un $k \in \mathcal{N}_u$ fijo se puede ver que

$$|a(k)| = |a_n(k) - a(k)| \leq \frac{1}{||e_k||_X} ||\boldsymbol{a_n} - \boldsymbol{a}||_X \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Esto significa que $a(k) = 0$ para todo $k \in \mathcal{N}_u$, de donde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c} &= \tilde{\boldsymbol{a}} = \tilde{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{v} \\ &= \tilde{\boldsymbol{b}}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

lo cual implica que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{b}}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c} \in X$, es decir, $\boldsymbol{a} \in \operatorname{Ran}(M_u)$, por lo tanto el operador $M_u : X \to X$ tiene rango cerrado. $\square$

Como consecuencia importante del resultado anterior, se tiene el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.3.5. *Sea $\boldsymbol{u} \in l^\infty$. El operador $M_u : X \to X$ tiene rango cerrado si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que $|u(n)| \geq \delta$ para todo $n \in \mathcal{N}_u^c$.*

Demostración. Se supone primero que existe $\delta > 0$ tal que $|u(n)| \geq \delta$ para $n \in \mathcal{N}_u^c$. Se define el operador $M_v : \tilde{X} \to \tilde{X}$ con el espacio $\tilde{X}$ definido como antes, tal que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}$. Para $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \tilde{X}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, es posible ver que

$$|M_v(\tilde{\boldsymbol{a}})(n)| = |v(n)| \cdot |\tilde{a}(n)| \geq \delta |\tilde{a}(n)|. \tag{2-4}$$

En efecto, si $n \in \mathcal{N}_u$, entonces

$$|M_v(\tilde{\boldsymbol{a}})(n)| = |(v\tilde{a})(n)| = |v(n)a(n)| = 0.$$

Además, $\delta|\tilde{a}(n)| = 0$, obteniéndose así la igualdad en (2-4), por otro lado, si $n \in \mathcal{N}_u^c$, entonces

$$|M_v(\tilde{\boldsymbol{a}})(n)| = |(v\tilde{a})(n)| = |v(n)\tilde{a}(n)| = |v(n)||\tilde{a}(n)| \geq \delta|\tilde{a}(n)|$$

mostrándose así la desigualdad (2-4). Por lo anterior y dado que $\tilde{X}$ es sólido, se obtiene que

$$||M_v \tilde{\boldsymbol{a}}||_X \geq \delta ||\tilde{\boldsymbol{a}}||_X$$

para toda $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \tilde{X}$. Esto significa que el operador $M_v : \tilde{X} \to \tilde{X}$ está acotado inferiormente; en particular, tiene rango cerrado. Así que por el Teorema 2.3.4 el operador $M_u : X \to X$ tiene rango cerrado. Esto demuestra la implicación.

Recíprocamente, asuma que el operador $M_u : X \to X$ tiene rango cerrado; entonces, por el Teorema 2.3.4, el operador $M_v : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tiene rango cerrado. Ahora, se debe ver que el operador M_v es inyectivo. En efecto, si $\tilde{\boldsymbol{a}} \in \tilde{X}$ es tal que $M_v \tilde{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0}$, entonces por definición del espacio $\tilde{X}$ se tiene $\tilde{a}(k) = 0$ para todo $k \in \mathcal{N}_u$. Ahora si $k \in \mathcal{N}_u^c$, entonces

$$v(k) = u(k)\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}(k) = u(k) \neq 0,$$

y como $M_v \tilde{\boldsymbol{a}}(k) = v(k)\tilde{a}(k) = 0$, entonces $\tilde{a}(k) = 0$. En conclusión, $\tilde{a}$ es la sucesión nula. Esto muestra que $\mathrm{Ker}(M_v) = \{\mathbf{0}\}$ y el operador $M_v : \tilde{X} \to \tilde{X}$ es inyectivo.

Dado que $M_v : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tiene rango cerrado y es inyectivo, se puede concluir que este operador está acotado inferiormente, por lo que existe $\delta > 0$ tal que

$$||M_v \tilde{\boldsymbol{a}}||_{\tilde{X}} \geq \delta ||\tilde{\boldsymbol{a}}||_{\tilde{X}}$$

para todo $\tilde{a} \in \tilde{X}$, adicionalmente si se toma la sucesión $\boldsymbol{e_n}$ definida como antes, con $n \in \mathcal{N}_u^c$, se tiene que $\boldsymbol{e_n} \in \tilde{X}$ ya que $\boldsymbol{e_n} = \boldsymbol{e_n}\mathbf{1}_{\mathcal{N}_u^c}$ donde, $\boldsymbol{e_n} \in X$ por ser X un espacio de sucesiones de Köthe. Además

$$||M_v \boldsymbol{e_n}||_{\tilde{X}} = ||\boldsymbol{v}\boldsymbol{e_n}||_{\tilde{X}} = |v(n)|\, ||\boldsymbol{e_n}||_{\tilde{X}} \geq \delta ||\boldsymbol{e_n}||_{\tilde{X}},$$

mostrando así que $|v(n)| \geq \delta$ para cada $n \in \mathcal{N}_u^c$, por lo que se puede concluir que $|u(n)| \geq \delta$ para todo $n \in \mathcal{N}_u^c$. Esto termina la mostración del teorema. $\square$

Para finalizar la sección se realizan ejemplos para mostrar la forma en la cual es posible utilizar el teorema principal.

Ejemplo 2.3.6. Sea $X = ces_p$ para $1 < p < \infty$ y la sucesión $\boldsymbol{u}$ definida por

$$u(n) = 5 - \frac{1}{n},$$

con $n \in \mathbb{N}$ y cuya gráfica es

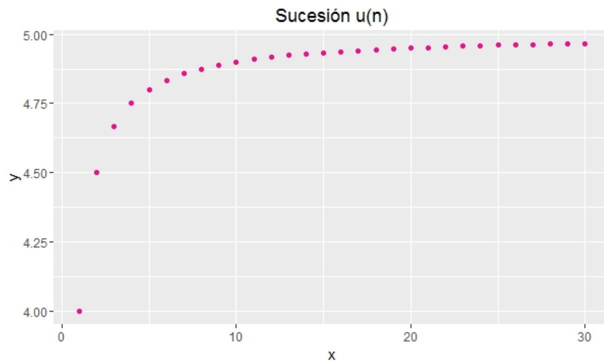

Figura 2-5: Gráfica de la sucesión $u(n) = 5 - \frac{1}{n}$.

Entonces $||\boldsymbol{u}||_\infty = 5$, por lo cual $\boldsymbol{u} \in l^\infty$. Luego, debido al Teorema 2.1.1, el operador multiplicación $M_u : ces_p \to ces_p$ es continuo. Adicionalmente, si se pone $\delta = 1/3$, entonces se cumple que $|u(n)| \geq \delta = 1/3$ para todo $n \in \mathbb{N} = \mathcal{N}_u^c$, por tanto, el Teorema 2.3.5 garantiza que en este caso M_u tiene rango cerrado.

Ejemplo 2.3.7. Sea $X = l^p$ con $1 \leq p < \infty$ y la sucesión

$$u(n) = e^{-n}\mathbf{1}_A,$$

con A el conjunto de los números naturales pares. La gráfica de esta sucesión es

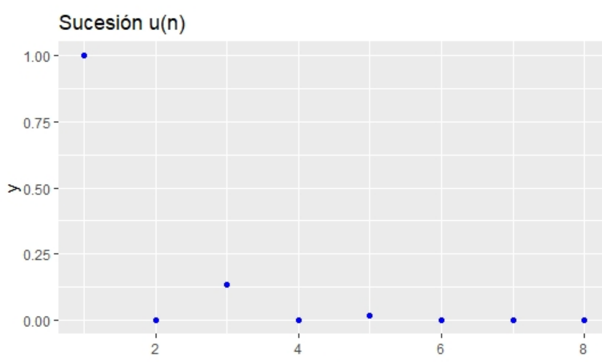

Figura 2-6: Gráfica de la sucesión $u(n) = u(n) = e^{-n}\mathbf{1}_A$.

Entonces se tiene que $||\boldsymbol{u}||_\infty = 1$, por el Teorema 2.1.1 el operador $M_u : l^p \to l^p$ es continuo, se tiene además que no existe $\delta > 0$ tal que $|u(n)| > \delta$ para todo $n \in \mathcal{N}_u^c$ ya que

$$\lim_{n\to\infty} u(n) = 0,$$

por lo que, debido al Teorema 2.3.5, el operador multiplicación inducido por el símbolo $\boldsymbol{u}$ no es un operador con rango cerrado.

2.4. Operadores multiplicación Fredholm

Los operadores Fredholm forman parte de la teoría espectral de operadores, en la cual se busca entender el espacio de soluciones para ecuaciones de la forma $Tf = g$, con $T : X \to X$ un operador continuo sobre un espacio de Banach X de dimensión infinita, donde la existencia y unicidad de la solución de dichas ecuaciones depende de si el operador T es inyectivo o sobreyectivo.

El estudio de los operadores Fredholm resulta bastante útil debido a que en ellos se puede hacer una extensión natural de resultados provenientes del álgebra lineal a espacios de dimensión infinita; por ejemplo, es en estos operadores donde se tiene una definición del índice de un operador $i(T) = n(T) - d(T)$ para espacios de dimensión infinita, donde $n(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$ se conoce como la nulidad y $d(T) = \mathrm{codim}(\mathrm{Ran}(T))$ se le denomina el defecto y estas cantidades son siempre finitas.

Es importante recordar que si se tiene un operador continuo $T : X \to X$ con X un espacio de Banach, entonces $\mathrm{codim}(\mathrm{Ran}(T)) = \dim(X/\mathrm{Ran}(T))$, además si este operador cumple que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) < \infty$ y $\mathrm{Ran}(T)$ es un subespacio cerrado de X entonces se dice que el operador es *semi-Fredholm superior*. El operador T se denomina *semi-Fredholm inferior* si $\mathrm{codim}(\mathrm{Ran}(T)) = \dim\left(X/\mathrm{Ran}\left(T\right)\right) < \infty$, donde esta condición implica que el operador T tiene rango cerrado. Por último, el operador T se dice que es *Fredholm* si es semi-Fredholm superior e inferior. Estas definiciones y notaciones fueron tomadas del libro escrito por Y. A. Abramovich & C. D. Aliprantis [1] sección 4.4 .

Adicionalmente se tienen los siguientes resultados.

Lema 2.4.1. *Sean $\boldsymbol{u} \in l^\infty$ y $M_u : X \to X$ un operador multiplicación.* $\dim(\mathrm{Ker}(M_u)) < \infty$ *si y sólo si $\mathcal{N}_u$ es un conjunto finito.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{N}_u = \{n_1, n_2, \cdots\}$ es un conjunto infinito; entonces, para cada $n \in \mathcal{N}_u$ se puede definir la sucesión canónica $\boldsymbol{e_n}$ como en (1-4). Claramente el conjunto $\{\boldsymbol{e_n} : n \in \mathcal{N}_u\}$ es linealmente independiente e infinito. Además, está contenido en $\mathrm{Ker}\left(M_u\right)$ ya que para cada $m \in \mathbb{N} - \{n\}$

$$\begin{aligned} M_u e_n(m) &= u(m) \cdot e_n(m) \\ &= 0, \end{aligned}$$

mientras que $M_u e_n\left(n\right) = u\left(n\right) = 0$ pues $n \in \mathcal{N}_u$. Esto muestra que $\dim(\mathrm{Ker}\left(M_u\right)) = \infty$.

Por otro lado, se supone que $\mathcal{N}_u = \{n_1, n_2, \cdots, n_m\}$ es un conjunto finito. Entonces, como antes, el conjunto $\mathbf{B} = \{\boldsymbol{e_n} : n \in \mathcal{N}_u\}$ es linealmente independiente y además está contenido en Ker (M_u). Se va a demostrar que $\mathbf{B}$ es una base para Ker (M_u). En efecto, si $\boldsymbol{a} \in$ Ker (M_u), entonces

$$M_u\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} = 0.$$

Si se considera el caso cuando $k \in \mathcal{N}_u^c$ es posible ver que si $u(k) \cdot a(k) = 0$, entonces $a(k) = 0$. Por tanto, $a(k) = 0$ para todo $k \in \mathcal{N}_u^c$, adicionalmente es posible ver que $a(k)$ puede tomar valores distintos de cero cuando $k \in \mathcal{N}_u$. Así, es posible escribir la sucesión $\boldsymbol{a}$ en la forma

$$\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \boldsymbol{e_{n_j}}.$$

Por tanto, cada elemento de Ker (M_u) se puede escribir como una combinación lineal de los elementos del conjunto $\{\boldsymbol{e_n} : n \in \mathcal{N}_u\}$, por lo que $\{\boldsymbol{e_n} : n \in \mathcal{N}_u\}$ es una base para Ker (M_u), mostrándose así que dim (Ker (M_u)) es finita. Esto demuestra el resultado. □

Lema 2.4.2. *Suponga que* $\boldsymbol{u} \in l^\infty$ *y* $M_u : X \to X$ *es un operador multiplicación. Si* $\dim(X/\mathrm{Ran}(M_u)) < \infty$ *entonces* $\mathcal{N}_u$ *es un conjunto finito.*

Demostración. Sea $X/\mathrm{Ran}(M_u)$ un espacio de dimensión finita, donde

$$X/\mathrm{Ran}(M_u) = \{[a] := \boldsymbol{a} + \mathrm{Ran}(M_u) : \boldsymbol{a} \in X\},$$

$[a] = [b]$ si y sólo si $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \mathrm{Ran}(M_u)$ y $\boldsymbol{c} \in [a]$ si y sólo si $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} \in \mathrm{Ran}(M_u)$. Además, como es usual, para $[a]$, $[b] \in X/\mathrm{Ran}(M_u)$ y λ escalar, se definen

$$\begin{aligned} [a] + [b] &= [a + b] \\ \lambda[a] &= [\lambda a]. \end{aligned}$$

Se considera el conjunto $\mathbf{B} = \{[e_n] : n \in \mathcal{N}_u\}$, donde $\boldsymbol{e_n}$ es la sucesión canónica definida en (1-4). Se va a mostrar que $\mathbf{B}$ es una base para $X/\mathrm{Ran}(M_u)$. En efecto, si $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ son escalares tal que

$$\alpha_1[e_{n_1}] + \alpha_2[e_{n_2}] + \cdots + \alpha_m[e_{n_m}] = [0],$$

entonces,

$$\left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_{n_k}\right] = [0];$$

con lo cual $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_{n_k} \in \mathrm{Ran}(M_u)$ y existe una sucesión $\boldsymbol{a} \in X$ tal que

$$\alpha_1 \boldsymbol{e_{n_1}} + \alpha_2 \boldsymbol{e_{n_2}} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{e_{n_m}} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}.$$

En particular, evaluando en $k = n_j \in \mathcal{N}_u$ se tiene

$$a_j = a_j e_{n_j}(n_j) = \alpha_1 e_{n_1}(k) + \alpha_2 e_{n_2}(k) + \cdots + \alpha_m e_{n_m}(k) = u(k) \cdot a(k) = 0$$

y esto se cumple para cada $j = 1, \cdots, m$. Así $\mathbf{B}$ es un conjunto linealmente independiente de $X/\mathrm{Ran}\,(M_u)$.

Ahora se demostrará que cada clase $[c] \in X/\mathrm{Ran}\,(M_u)$ es una combinación lineal de los vectores en $\mathbf{B}$. En efecto, dado que $\dim\,(X/\mathrm{Ran}\,(M_u)) < \infty$ el operador multiplicación tiene rango cerrado (veáse [1]). Luego, por el Teorema 2.3.5, existe $\delta > 0$ tal que $|u\,(k)\,| \geq \delta$ para todo $k \in \mathcal{N}_u^c$. De aquí que, para cualquier sucesión $\boldsymbol{c} \in X$, se pueden considerar los escalares $\alpha_j = c(n_j)$ con $n_j \in \mathcal{N}_u$ y se define la sucesión

$$a(k) = \begin{cases} \dfrac{c\,(k)}{u\,(k)}, & si \quad k \in \mathcal{N}_u^c, \\ \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Entonces

$$|a(k)| = \frac{|c(k)|}{|u(k)|} \leq \frac{1}{\delta}|c(k)| \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

pues $a(k) = 0$ cuando $k \in \mathcal{N}_u$. Teniendo en cuenta esto y el hecho de que $\boldsymbol{c} \in X$ se tiene que $\boldsymbol{a} \in X$, por definición de espacio de Köthe. Más aún, para $k \in \mathcal{N}_u^c$ se tiene $c(k) = u(k)a(k)$ y

$$c(k) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_{n_j}(k) = c(k) = u(k) \cdot a(k);$$

mientras que si $k \in \mathcal{N}_u$, entonces $k = n_j$ para algún $j = 1, 2, \cdots, m$ y así

$$\begin{aligned} c(k) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_{n_i}(k) &= c(k) - \alpha_j e_{n_j}(k) \\ &= c(n_j) - \alpha_j e_{n_j}(n_j) \\ &= \alpha_j - \alpha_j = 0 = u(k) \cdot a(k). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{c} - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \boldsymbol{e_{n_j}} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} \in \mathrm{Ran}\,(M_u)$$

lo cual significa que

$$[c] = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j [e_{n_j}].$$

Esto es, $\mathbf{B}$ es una base para $X/\mathrm{Ran}\,(M_u)$ y como $\dim\,(X/\mathrm{Ran}\,(M_u)) < \infty$ entonces $\mathbf{B}$ es finito y por tanto $\mathcal{N}_u$ es un conjunto finito. $\square$

Comentario. De la demostración del Lema anterior es posible observar que si el conjunto $\mathcal{N}_u$ es finito y adicionalmente el operador multiplicación $M_u : X \to X$ con $\boldsymbol{u} \in l^\infty$ tiene rango cerrado, entonces $\dim(X/\mathrm{Ran}(M_u)) < \infty$.

Ahora bien, como consecuencia de los resultados obtenidos en las secciones anteriores y los mencionados al inicio de la sección, se puede obtener el siguiente teorema, el cual fue tomado del artículo de J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [16].

Teorema 2.4.3. *Suponga que $\boldsymbol{u} \in l^\infty$ y sea X un espacio de sucesiones de Köthe. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El operador $M_u : X \to X$ es Fredholm,*
2. *El operador $M_u : X \to X$ es semi-Fredholm superior,*
3. *El operador $M_u : X \to X$ es semi-Fredholm inferior,*
4. *$\mathcal{N}_u = \{k \in \mathbb{N} : u(k) = 0\}$ es un conjunto finito y existe $\delta > 0$ tal que $|u(n)| \geq \delta$ para todo $n \in \mathcal{N}_u^c = \{k \in \mathbb{N} : u(k) \neq 0\}$.*

Demostración. Basta mostrar que (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3). Se demostrará primero que (2) $\Rightarrow$ (4), sea $M_u : X \to X$ un operador semi-Fredholm superior, entonces por definición $\mathrm{Ran}(M_u)$ es un subespacio cerrado de X. Por el Teorema 2.3.5, existe $\delta > 0$ tal que $|u(k)| \geq \delta$ para todo $k \in \mathcal{N}_u^c$ y adicionalmente $\dim(\mathrm{Ker}(M_u)) < \infty$. Por el Lemma 2.4.1, el conjunto $\mathcal{N}_u$ es finito y la implicación queda demostrada.

(4) $\Rightarrow$ (3): Esta implicación se tiene fácilmente debido al comentario realizado al final de la prueba del Lema 2.4.2.

El motivo por el cual en el teorema anterior bastaba ver que (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3), se debe a lo siguiente: si el operador es Fredholm entonces es semi-Fredholm superior y semi-Fredholm inferior, por otra parte, por Lema 2.4.1 se tiene que (4) $\Rightarrow$ (2), adicionalmente por el Lema 2.4.2 (3) $\Rightarrow$ (4) y por último (4) $\Rightarrow$ (1) por Lema 2.4.1 y porque se mostró anteriormente que (4) $\Rightarrow$ (3).

□

Para culminar la sección se establecen ejemplos sobre las equivalencias vistas en la sección y que están relacionadas con los operadores Fredholm.

Ejemplo 2.4.4. Sean $X = l_{(p,q)}$ para $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, el conjunto $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ y la sucesión $\boldsymbol{u}$ definida por

$$u(n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n+1}, & si \quad n \notin \mathcal{A}, \\ \\ 0, & si \quad n \in \mathcal{A} \end{cases}$$

con $n \in \mathbb{N}$ y cuya gráfica es

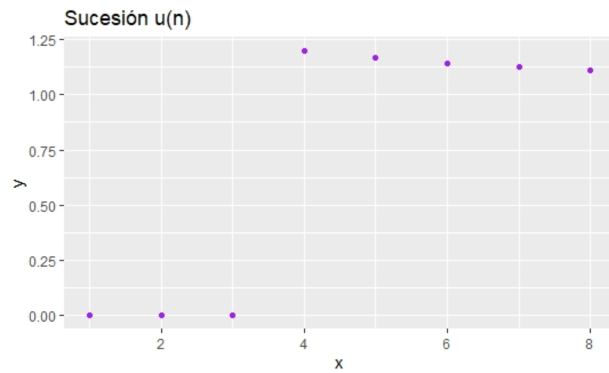

Figura 2-7: Gráfica de la sucesión $u(n)$.

Entonces $\boldsymbol{u} \in l^{\infty}$ ya que $||\boldsymbol{u}||_{\infty} = 1$. Luego, debido al Teorema 2.1.1, el operador multiplicación $M_u : l_{(p,q)} \to l_{(p,q)}$ es continuo. El conjunto $\mathcal{N}_u$ es finito y por el Teorema 2.3.5 el operador es de rango cerrado así, por el comentario al Lema 2.4.2 se tiene que $\dim(X/\text{Ran}(M_u)) < \infty$, mostrándose que el operador multiplicación M_u es semi-Fredholm inferior y por Teorema 2.4.3 el operador es Fredholm.

Ejemplo 2.4.5. Sea $X = l^p(\boldsymbol{\omega})$ para $1 \leq p < \infty$ y tome la sucesión $\boldsymbol{u}$ definida por

$$u(n) = \frac{1}{n}\mathbf{1}_A,$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $A = \{1, 2, 3, 4\}$, que tiene como gráfica

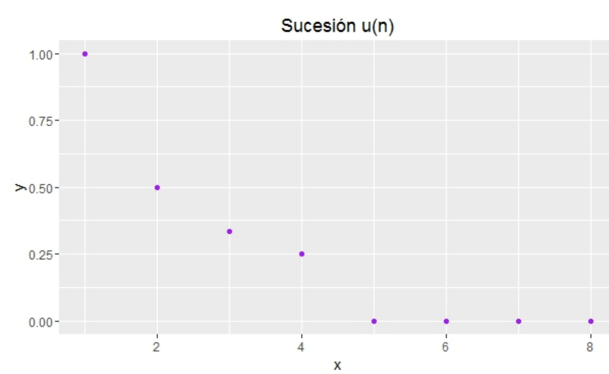

Figura 2-8: Gráfica de la sucesión $u(n) = \frac{1}{n}\mathbf{1}_A$.

Entonces $||\boldsymbol{u}||_{\infty} = 1$ y $\boldsymbol{u} \in l^{\infty}$, así que el operador multiplicación $M_u : l^p(\boldsymbol{\omega}) \to l^p(\boldsymbol{\omega})$ es continuo debido al Teorema 2.1.1. De la definición de la sucesión $\boldsymbol{u}$ es posible ver que el conjunto $\mathcal{N}_u$ es infinito y por Lema 2.4.1 se concluye que $\dim(\text{Ker}(M_u)) = \infty$, por lo que el operador $M_u : l^p(\boldsymbol{\omega}) \to l^p(\boldsymbol{\omega})$ no es semi-Fredholm superior.

Capítulo 3

Compacidad y la norma esencial

La compacidad es una de las propiedades más estudiadas y es una de las más importantes en el análisis funcional ya que es el estudio de esta propiedad lo que permite unir el análisis matemático con el álgebra lineal y dar origen a la teoría espectral de operadores compactos. Es de particular interés estudiar cuándo un operador multiplicación $M_u : X \to X$ es compacto, donde como en el capítulo anterior, la idea será caracterizar los símbolos $\boldsymbol{u} \in l^\infty$ que definan operadores multiplicación con esta propiedad, no sin antes estudiar las características que debe tener el símbolo $\boldsymbol{u}$ para que el operador multiplicación tenga rango finito, es decir, cuando $\dim(\mathrm{Ran}(M_u)) < \infty$. Los resultados que se expondrán en este capítulo con respecto a estas propiedades fueron estudiadas en el trabajo de J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown en [16].

Adicionalmente, en este capítulo se dan los resultados que se han obtenido en esta investigación y que busca estimar o calcular la norma esencial del operador multiplicación $M_u : X \to X$. El teorema, que se presenta en la Sección 3.3, está inspirado en los trabajos de R. E. Castillo, J. C. Ramos-Fernández, and M. Salas-Brow [3], J. C. Ramos-Fernández, M. A. Rivera-Sarmiento & M. Salas-Brown [18] y J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brow[17] donde se mostró cómo se calcula la norma esencial del operador multiplicación definida en los espacios de sucesiones de Lorentz, Cesàro y Orlicz respectivamente. Dado que estos espacios son ejemplos de espacios de sucesiones de Köthe, surge la pregunta: ¿es posible extender estas estimaciones de la norma esencial sobre un espacio X de sucesiones Köthe?. El Teorema 3.3.1 resuelve parcialmente este problema bajo ciertas condiciones y restricciones.

3.1. Operadores multiplicación con rango finito

Un operador $T : X \to X$ con X un espacio de Banach arbitrario se dice que tiene rango finito si $\dim(\mathrm{Ran}(T)) < \infty$. En está sección se estudia cuándo un operador multiplicación $M_u : X \to X$ tiene rango finito. De hecho, se caracterizan los símbolos $\boldsymbol{u} \in l^\infty$ que definen operadores de multiplicación con rango finito. El resultado que aquí se presenta se debe a el trabajo de J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [16].

Teorema 3.1.1. *Se supone que* $\boldsymbol{u} \in l^{\infty}$. *El operador* $M_u : X \to X$ *tiene rango finito si y sólo si* $\mathcal{N}_u^c = \{n \in \mathbb{N} : u(n) \neq 0\}$ *es un conjunto finito.*

Demostración. Se supone primero que $\mathcal{N}_u^c = \{n_1, n_2, \cdots\}$ es un conjunto infinito. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ se define la sucesión $\boldsymbol{e_m}$ tal y como se hizo en (1-4), donde esta sucesión claramente pertenece al conjunto X y por lo tanto la sucesión $\boldsymbol{b_m} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e_m} \in \mathrm{Ran}(M_u)$. Más aún, tomando los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$, con $p \in \mathbb{N}$ y suponiendo que

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j b_j = 0.$$

Es posible ver que si se evalúa la expresión anterior en n_k con $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j b_j(n_k) = \alpha_k b_k(n_k) = \alpha_k u(n_k) = 0,$$

con lo cual $\alpha_k = 0$ ya que $n_k \in \mathbb{N}_u^c$. Esto muestra que $\{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$ es linealmente independiente y como $p \in \mathbb{N}$ es arbitrario implica que el conjunto infinito $\{b_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{Ran}(M_u)$ es linealmente independiente, esto es $\dim(\mathrm{Ran}(M_u)) = \infty$.

Por otro lado, si $\mathcal{N}_u^c$ es un conjunto finito, entonces se puede escribir $\mathcal{N}_u^c = \{n_1, n_2, \cdots, n_m\}$. Luego, la sucesión $\boldsymbol{b_j} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e_{n_j}} \in \mathrm{Ran}(M_u)$ para todo $j = 1, 2, \cdots, m$ y así el conjunto $\mathbf{B} = \{b_j : j = 1, 2, \cdots, m\}$ es linealmente independiente. Se va a establecer que $\mathbf{B}$ es una base para $\mathrm{Ran}(M_u)$. En efecto, basta mostrar que cada $\boldsymbol{c} \in \mathrm{Ran}(M_u)$, se puede escribir como una combinación lineal de elementos de $\mathbf{B}$. Con este fin, sea $\boldsymbol{c} \in \mathrm{Ran}(M_u)$; es posible observar que existe $\boldsymbol{a} \in X$ tal que $M_u(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$. Luego para cada $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ se puede tomar el escalar $\alpha_j = a(n_j)$ y se tiene lo siguiente: si $k \in \mathcal{N}_u^c$, entonces $k = n_j$ para algún $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ y en este caso,

$$c(k) = c(n_j) = u(n_j) \cdot a(n_j) = u(n_j) \cdot \alpha_j = \alpha_j \cdot b_j(k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i(k),$$

pues $b_i(n_j) = 0$ para $j \neq i$. Mientras que si $k \notin \mathcal{N}_u^c$ se tiene que $b_j(k) = 0$ para todo $j = 1, 2, \cdots, m$ y se puede escribir

$$c(k) = u(k) \cdot a(k) = 0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_j(k) = 0.$$

Entonces

$$c(k) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_j(k)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\mathbf{B}$ es una base para $\mathrm{Ran}(M_u)$ y así $\dim(\mathrm{Ran}(M_u)) = m < \infty$. Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

A continuación se darán ejemplos con el fin de mostrar el uso del teorema establecido en la presente sección.

Ejemplo 3.1.2. Sea $X = ces_p$ con $1 \leq p < \infty$ y considere el símbolo $\boldsymbol{u}$ definido por

$$u(n) = \mathbf{1}_A(n),$$

para $n \in \mathbb{N}$, siendo el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ y cuya gráfica es

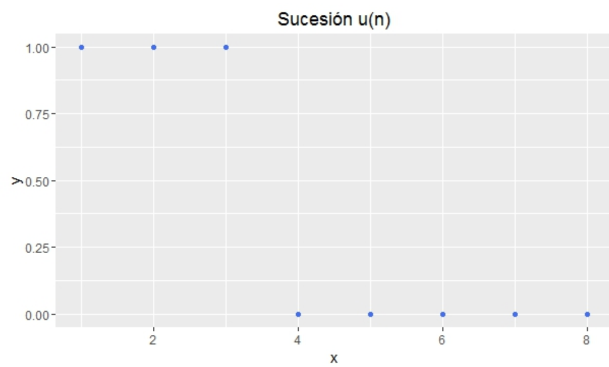

Figura 3-1: Gráfica de la sucesión $u(n) = \mathbf{1}_A(n)$.

Entonces $||\boldsymbol{u}||_\infty = 1$, por lo que $\boldsymbol{u} \in l^\infty$. Luego, por el Teorema 2.1.1, se tiene que el operador $M_u : ces_p \to ces_p$ es continuo; dado que el conjunto $\mathcal{N}_u^c$ es finito, por el Teorema 3.1.1 este operador tiene rango finito.

Ejemplo 3.1.3. Tome el espacio $X = l_{(p,q)}$ con $1 \leq p < \infty$ y $1 \leq q \leq p$. Sea la sucesión $\boldsymbol{u}$ definida por

$$u(n) = \frac{2}{3^n},$$

con $n \in \mathbb{N}$ y cuya gráfica es

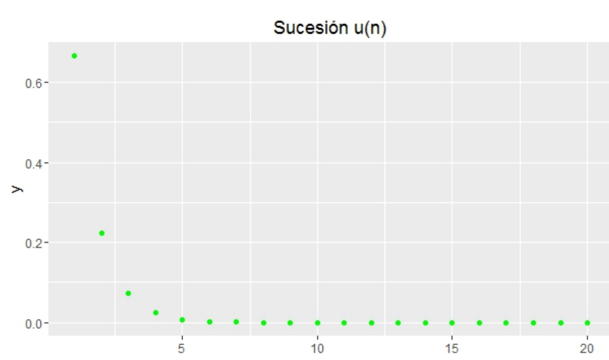

Figura 3-2: Gráfica de la sucesión $u(n) = \frac{2}{3^n}$.

Entonces $\|\boldsymbol{u}\|_\infty = \frac{2}{3}$, por lo que $\boldsymbol{u} \in l^\infty$. Luego, debido al Teorema 2.1.1, el operador multiplicación $M_u : X \to X$ definido por el símbolo $\boldsymbol{u}$ es continuo. Es posible observar, según la definición del símbolo $\boldsymbol{u}$, que el conjunto $\mathcal{N}_u^c$ es infinito así que, por el Teorema 3.1.1, el operador M_u no tiene rango finito.

3.2. Operadores multiplicación compactos

En esta sección se busca caracterizar al símbolo $\boldsymbol{u} \in l^\infty$ para que el operador multiplicación $M_u : X \to X$ sea compacto. Se recuerda que un operador lineal $T : X \to Y$ con X y Y espacios normados es compacto si y sólo si envía toda sucesión acotada $(\boldsymbol{x_n}) \subseteq X$ en una sucesión $(\boldsymbol{Tx_n}) \subseteq Y$ la cual tiene una subsucesión convergente. Además se tiene que:

- Si el operador lineal $T : X \to Y$ es acotado y $\dim(T(X)) < \infty$, entonces el operador es compacto.
- Si $(\boldsymbol{T_n})$ es una sucesión de operadores lineales compactos de un espacio normado X en un espacio de Banach Y tal que $(\boldsymbol{T_n})$ converge uniformemente al operador T, es decir, si se cumple que $\|\boldsymbol{T_n} - \boldsymbol{T}\| \to 0$ entonces el operador límite $\boldsymbol{T}$ es compacto.
- La composición de un operador continuo con uno operador compacto da como resultado un operador compacto.
- El operador identidad es un operador compacto si y sólo si el espacio sobre el cual está definido tiene dimensión finita.

La teoría enunciada anteriormente fue tomada del texto de E. Kreyszig [10].

Tal y como se hizo en el capítulo anterior, se denotará por X al espacio de sucesiones de Köthe. Se da inicio a la sección estableciendo las condiciones para obtener un operador multiplicación $M_u : X \to X$ compacto; este resultado fue establecido en J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [16].

Teorema 3.2.1. *Se supone que $\boldsymbol{u} \in l^\infty$. El operador $M_u : X \to X$ es compacto si y sólo si*

$$\lim_{k\to\infty} |u(k)| = 0. \tag{3-1}$$

Demostración. Suponga que la condición (3-1) es cierta. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, se considera el conjunto $A_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ y se define el símbolo $\boldsymbol{u_m} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{1_{A_m}}$. Entonces la sucesión $\boldsymbol{u_m} \in X$ para todo $m \in \mathbb{N}$, ya que $|u_m(k)| \leq \|\boldsymbol{u}\|_\infty \mathbf{1}_{A_m}(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\|\boldsymbol{u}\|_\infty \boldsymbol{1_{A_m}} \in X$, por ser X un espacio de sucesiones de Köthe. También, por el Teorema 3.1.1 para cada $m \in \mathbb{N}$, el operador M_{u_m} tiene rango finito en X, luego como el límite uniforme de operadores que tienen rango finito es compacto, basta mostrar que

$$\lim_{m\to\infty} \|M_{u_m} - M_u\| = 0.$$

En efecto, para $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u(k)| < \varepsilon \tag{3-2}$$

para todo $k \geq N$. Luego, para $m \geq N$ y para cualquier sucesión $\boldsymbol{a} \in X$, se tiene

$$|(u_m(k) - u(k)) \cdot a(k)| = \begin{cases} 0, & si \quad 1 \leq k \leq m, \\ \\ |u(k)|\,|a(k)|\,, & si \quad k \geq m+1, \end{cases}$$

de donde,

$$|(u_m(k) - u(k)) \cdot a(k)| \leq \varepsilon |a(k)|,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\varepsilon \boldsymbol{a} \in X$ ya que $\boldsymbol{a} \in X$ y además X es un espacio de Köthe, $\boldsymbol{(u_m - u) \cdot a} \in X$ y

$$\|\boldsymbol{(u_m - u) \cdot a}\|_X \leq \varepsilon \, \|\boldsymbol{a}\|_X$$

para todo $m \geq N$, esto es, $\|M_{u_m} - M_u\| \leq \varepsilon$ para todo $m \geq N$, concluyendo entonces que

$$\lim_{m \to \infty} \|M_{u_m} - M_u\| = 0$$

y el operador $M_u : X \to X$ es compacto.

Recíprocamente, se supone ahora que el operador $M_u : X \to X$ es compacto. Para probar que la condición (3-1) es cierta, basta ver que para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$B_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |u(k)| \geq \varepsilon\}$$

es finito. Sea $\varepsilon > 0$; se define el conjunto

$$X_\varepsilon = \{\boldsymbol{a} \in X : a(k) = 0, \quad para \quad todo \quad k \in \mathbb{N} \setminus B_\varepsilon\}\,.$$

El conjunto X_ε resulta ser un subespacio de X, más aún, si $\boldsymbol{a} \in \overline{X_\varepsilon}$, entonces existe una sucesión $(\boldsymbol{a_n}) \subset X$ tal que $\|\boldsymbol{a_n - a}\|_X \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego, si para $k_0 \in \mathbb{N}$ fijo, se considera la sucesión $\boldsymbol{e_{k_0}}$, entonces

$$|a_n(k_0) - a(k_0)|\, \boldsymbol{e_{k_0}} \leq |a_n(k) - a(k)|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$; esto ya que si $k \neq k_0$ entonces $0 \leq |a_n(k) - a(k)|$ y si $k = k_0$ entonces se tiene la igualdad. Por lo tanto

$$|a_n(k_0) - a(k_0)|\, \|\boldsymbol{e_{k_0}}\|_X \leq \|a_n(k) - a(k)\|_X \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Así se tiene que $|a_n(k_0) - a(k_0)| \to 0$ cuando $n \to \infty$ ya que $\boldsymbol{e_{k_0}}$ no es una sucesión nula. En particular, para cada $k_0 \in \mathbb{N} \setminus B_\varepsilon$ se tiene $a(k_0) = 0$ y $a \in X_\varepsilon$. Luego, el espacio X_ε es un subespacio cerrado de X.

Como X_ε es un subespacio cerrado de X, entonces la inclusión $i_\varepsilon : X_\varepsilon \to X$ dado por $i_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$ es lineal y continua. Así, se puede realizar la composición $M_u \circ i_\varepsilon : X_\varepsilon \to X$ que resulta ser un operador compacto ya que el operador $M_u : X \to X$ es compacto. Ahora se va a demostrar que $\mathrm{Ran}(M_u \circ i_\varepsilon) = X_\varepsilon$. En efecto, si $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Ran}(M_u \circ i_\varepsilon)$ entonces es posible encontrar una sucesión $\boldsymbol{c} \in X_\varepsilon$ tal que $b(k) = u(k) \cdot c(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. La sucesión $\boldsymbol{b}$ se anula cuando $\boldsymbol{c}$ se anula, así $\boldsymbol{b} \in X_\varepsilon$ y por lo tanto $\mathrm{Ran}(M_u \circ i_\varepsilon) \subset X_\varepsilon$. Ahora si $\boldsymbol{b} \in X_\varepsilon$, se define la sucesión

$$a(k) = \begin{cases} \dfrac{b(k)}{u(k)}, & k \in B_\varepsilon, \\[2em] 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Entonces $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}$ y hay que mostrar que $\boldsymbol{a} \in X_\varepsilon$. En efecto si $k \in B_\varepsilon$ entonces $|u(k)| \geq \varepsilon$ y así

$$|a(k)| = \frac{|b(k)|}{|u(k)|} \leq \frac{1}{\varepsilon} |b(k)| ;$$

mientras que si $k \in \mathbb{N} \setminus B_\varepsilon$ entonces $a(k) = 0$. Por lo tanto

$$|a(k)| \leq \frac{1}{\varepsilon} |b(k)|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y ya que $\boldsymbol{b} \in X_\varepsilon \subset X$ y X es de Köthe se obtiene que $\boldsymbol{a} \in X$. Más aún, $\boldsymbol{a} \in X_\varepsilon$ y debido a que $b(k) = u(k) \cdot a(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces se concluye que $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Ran}(M_u \circ i_\varepsilon)$, mostrando así la igualdad.

Con lo realizado anteriormente, se tiene que el operador $M_u \circ i_\varepsilon : X_\varepsilon \to X_\varepsilon$ es sobreyectivo y compacto. Más aún, si $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}(M_u \circ i_\varepsilon)$ entonces $\boldsymbol{a} \in X_\varepsilon$ y $u(k) \cdot a(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces $\boldsymbol{a} = 0$ es la sucesión nula. Por lo tanto el operador $M_u \circ i_\varepsilon : X_\varepsilon \to X_\varepsilon$ es inyectivo, esto es, el operador $M_u \circ i_\varepsilon : X_\varepsilon \to X_\varepsilon$ es biyectivo y compacto y esto es posible si y sólo si X_ε es de dimensión finita.

Por último suponga que el conjunto B_ε es infinito, sea este igual a $\{n_1, n_2, \cdots\}$ y defina para cada $m \in \mathbb{N}$ la sucesión $\boldsymbol{e_m}$, donde cada una de estás sucesiones $\boldsymbol{e_m} \in X_\varepsilon$, por ser X_ε un subespacio de X, además note que el conjunto conformado por las sucesiones $\boldsymbol{e_m}$ resulta ser un conjunto linealmente independiente de X_ε lo que implica que el espacio X_ε es de dimensión infinita, lo cual resulta ser una contradicción. Esto concluye la demostración del teorema. $\square$

Para finalizar la sección se muestran ejemplos donde es posible ver el uso del teorema enunciado y demostrado anteriormente.

Ejemplo 3.2.2. Sea $X = l^\varphi$ y tome la sucesión $\boldsymbol{u}$ definida por

$$u(n) = \frac{1}{n(n+1)},$$

con $n \in \mathbb{N}$ cuya gráfica es

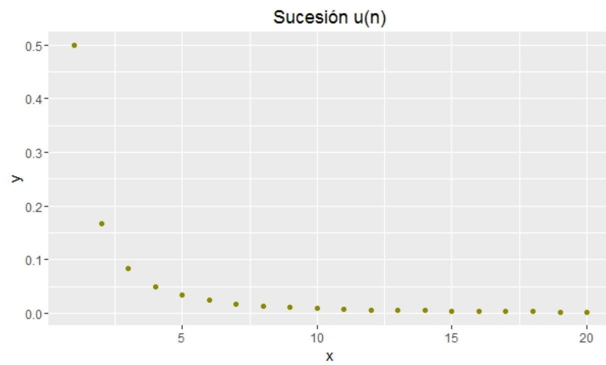

Figura 3-3: Gráfica de la sucesión $u(n) = \frac{1}{n(n+1)}$.

Se puede ver que $\|\boldsymbol{u}\|_\infty = \frac{1}{2}$, mostrando así que $\boldsymbol{u} \in l^\infty$ por lo cual el operador multiplicación $M_u : l^\varphi \to l^\varphi$ es continuo (Teorema 2.1.1). Además

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n(n+1)} \right| = 0,$$

así que por el Teorema 3.2.1 se puede decir que el operador $M_u : l^\varphi \to l^\varphi$ es compacto.

Ejemplo 3.2.3. Sea $X = l^p$ para $1 < p < \infty$ y la sucesión $\boldsymbol{u}$ definida por

$$u(n) = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

con $n \in \mathbb{N}$ y cuya gráfica es

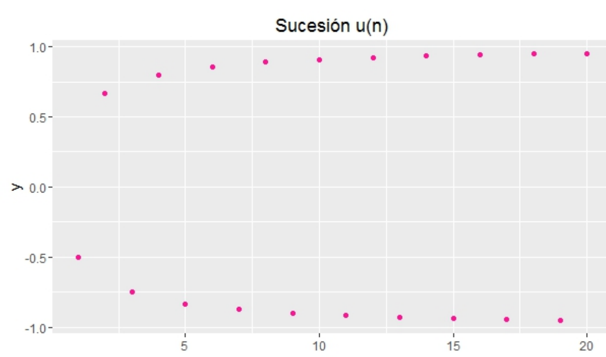

Figura 3-4: Gráfica de la sucesión $u(n) = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

Entonces $\|\boldsymbol{u}\|_\infty = 1$, por lo cual $\boldsymbol{u} \in l^\infty$. Luego debido al Teorema 2.1.1, el operador multiplicación $M_u : l^p \to l^p$ es continuo. Adicionalmente es posible observar que

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{(n+1)} \right| = 1,$$

por lo tanto el operador multiplicación M_u no es compacto.

El propósito de la próxima sección será estudiar qué tan lejos se encuentra este operador a la clase de los operadores compactos.

3.3. Norma esencial del operador multiplicación

En está sección se calcula la norma esencial de un operador multiplicación definido sobre el espacio de sucesiones de Köthe donde, dado un espacio de Banach X, la norma esencial de un operador lineal continuo $T : X \to X$ denotada por $||T||_e$ es la distancia de dicho operador a la clase $\mathcal{K}(X)$ de todos los operadores compactos en X; esto es,

$$\|T\|_e = \inf \{\|T - K\| : \ K \in \mathcal{K}(X)\},$$

donde $\|T\|$ denota la norma del operador T.

Para el desarrollo de la teoría que sigue a continuación es necesario recordar la definición de espacio orden continuo, para esto, vea la Definición 1.3.5 que se presenta en el primer capítulo del presente texto.

Teorema 3.3.1. *Sea $\boldsymbol{u} \in l^\infty$, $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Köthe orden continuo tal que la base canónica es una base de Schauder para el espacio dual de X. Entonces, para el operador multiplicación $M_u : X \to X$ se cumple que*

$$\|M_u\|_e = \limsup_{n\to\infty} |u(n)|.$$

Demostración. Por hipótesis la sucesión $\boldsymbol{u} = \{u(n)\}$ es acotada. Para cada $N \in \mathbb{N}$ se considera el conjunto $A_N = \{1, 2, \cdots, N\}$ y se define la sucesión $\boldsymbol{u_N} = \boldsymbol{u}\mathbf{1}_{\boldsymbol{A_N}}$; por el Teorema 3.2.1 el operador multiplicación $M_{u_N} : X \to X$ es compacto. Además

$$\|M_u\|_e \leq \|M_u - M_{u_N}\| = \|M_{u-u_N}\|.$$

pero si la sucesión $\boldsymbol{a} = \{a(n)\} \in X$ es tal que $\|\boldsymbol{a}\|_X = 1$, entonces

$$|(u(n) - u_N(n)) \cdot a(n)| \leq S_N |a(n)|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $S_N = \sup\{|u(k)| : k \geq N\}$. Así, como el espacio X es sólido, se concluye que la sucesión $\boldsymbol{(u - u_N) \cdot a} \in X$ y

$$\begin{aligned}\|M_u - M_{u_N}\| &\leq \|M_u(\boldsymbol{a}) - M_{u_N}(\boldsymbol{a})\|_X = \|(\boldsymbol{u - u_N})\boldsymbol{a}\|_X \\ &\leq S_N \|\boldsymbol{a}\|_X \\ &= S_N.\end{aligned}$$

Por tanto $\|M_u\|_e \leq S_N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Tomando límite en la desigualdad anterior se tiene que

$$\|M_u\|_e \leq \limsup_{n\to\infty} |u(n)|\,.$$

Por otro lado, sea $K : X \to X$ cualquier operador compacto. Se considera la sucesión $(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}) \subseteq X$, definida como se hizo en la sección 2.1 ecuación (2-1).

Se puede observar que $\|\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}\|_X = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y que además $(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}})$ es una sucesión acotada en X. El objetivo es mostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \|K(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}})\|_X = 0. \tag{3-3}$$

Si (3-3) es falso, entonces se puede encontrar un $\delta > 0$ y una subsucesión $(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k_m}})$ de $(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}})$ tal que

$$\|K(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k_m}})\|_X \geq \delta, \tag{3-4}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $K : X \to X$ es un operador compacto y la sucesión $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}\}$ es acotada en X entonces, pasando por una subsucesión (si es necesario), se puede suponer que $\{K(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k_m}})\}$ converge en X. Esto es, existe una sucesión $\boldsymbol{b} \in X$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \|K(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k_m}}) - \boldsymbol{b}\|_X = 0.$$

Ahora se quiere mostrar que $\boldsymbol{b} = 0$ y así contradecir la Ecuación (3-4). Por el teorema de Hahn-Banach, es suficiente probar que $h(\boldsymbol{b}) = 0$ para todos los funcionales lineales y acotados $h \in X$. Con este fin, sea h cualquier funcional lineal y acotado en X; entonces, la composición hK es un funcional lineal y acotado en X. Luego, por el teorema de representación de Riesz (X es orden continuo) para los espacios de Köthe X, existe una sucesión $\boldsymbol{a} = \{a(n)\}$ tal que

$$hK(c) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \cdot c(n)$$

para todo $\boldsymbol{c} = \{c(n)\} \in X$. En particular, evaluando en $\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k_m}}$, se tiene

$$|hK(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k_m}})| = \frac{|a(k_m)|}{\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k_m}}\|_X} \to 0$$

cuando $m \to \infty$, debido a que la base canónica es base de Schauder para X' (ver Proposición 1.4.3). Entonces

$$\begin{aligned}|h(\boldsymbol{b})| &\leq |h(\boldsymbol{b}) - hK(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k_m}})| + |hK(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k_m}})| \\ &\leq \|h\| \, \|\boldsymbol{b} - K(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k_m}})\|_X + |hK(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k_m}})| \to 0\end{aligned}$$

cuando $m \to \infty$ y esto prueba que $h(\boldsymbol{b}) = 0$. Ahora para cada $k \in \mathbb{N}$, se puede escribir

$$\begin{aligned}\|M_u - K\| &\geq \|M_u(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}) - K(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}})\|_X \\ &\geq \|M_u\left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}\right)\|_X - \|K\left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}\right)\|_X \\ &= \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}\|_X} \|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}\|_X - \|K(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}})\|_X \\ &= |u(k)| - \|K(\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}})\|_X .\end{aligned}$$

Entonces tomando el límite cuando $k \to \infty$ y usando (3-3), se concluye que

$$\|M_u - K\| \geq \limsup_{k\to\infty} |u(k)| ,$$

y por tanto $\|M_u\|_e \geq \limsup_{n\to\infty} |u(n)|$, ya que el operador compacto K en X se tomó arbitrario y esto finaliza la demostración. □

Como consecuencia importante del anterior teorema se obtienen los resultados de los artículos R. E. Castillo, J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [3], J. C. Ramos-Fernández, M. A. Rivera-Sarmiento & M. Salas-Brown [18] y J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [17].

Ejemplo 3.3.2. Se considera el espacio de Köthe de sucesiones $X = l^p$ con $1 < p < \infty$. Su espacio dual es l^q con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ciertamente el espacio l^q tiene como base de Schauder la sucesión canónica $(\boldsymbol{e_n})$. Luego, si se define la sucesión $\boldsymbol{u}$ como sigue

$$u(n) = (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

con $n \in \mathbb{N}$ y cuya gráfica es

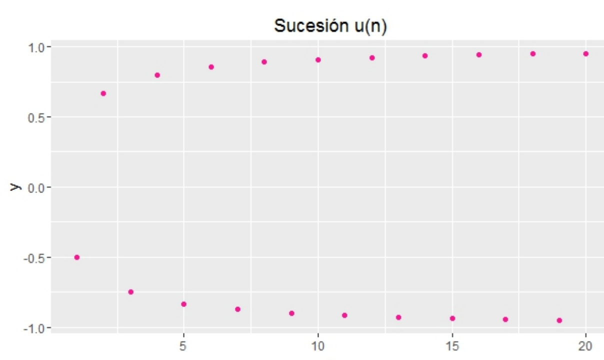

Figura 3-5: Gráfica de la sucesión $u(n) = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

Entonces $\boldsymbol{u} \in l^\infty$ ya que $||\boldsymbol{u}||_\infty = 1$; así, gracias al Teorema 2.1.1, el operador $M_u : l^p \to l^p$ es continuo; más aún, por Teorema 3.3.1 la norma esencial del operador multiplicación esta dada por

$$\|M_u\|_e = \limsup_{n\to\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{n+1}\right| = 1.$$

En particular, este operador multiplicación no es compacto ya que su norma esencial no es cero y de hecho, M_u se encuentra a una distancia 1 de $\mathcal{K}(X)$.

Comentario Final. Si bien es cierto que el Teorema 3.3.1 se puede aplicar a muchos espacios de sucesiones de Köthe, existen espacios para los cuales este resultado no es aplicable. Por ejemplo, si se pone $X = l^1$, entonces su dual es l^∞ y como este último espacio no es separable, entonces las sucesiones canónicas no constituyen una base de Schauder para X' y por tanto no se puede aplicar el Teorema 3.3.1 en este caso.

Conclusiones

- Los espacios de sucesiones de Köthe generalizan los espacios clásicos c_0 y l_p , l_φ, $l_{(p,q)}$, ces_p, entre otros.

- Los espacios de sucesiones de Köthe que son orden continuo satisfacen un teorema de representación de Riesz.

- Bajo ciertas condiciones impuestas al símbolo $\boldsymbol{u}$ se puede caracterizar los operadores multiplicación que resultan ser acotados, invertibles, tienen rango finito, son compactos y Fredholm.

- Como aporte de este trabajo, se logró calcular la norma esencial del operador multiplicación definido sobre espacios de sucesiones de Köthe siempre que dicho espacio sea orden continuo y tenga base de Schauder, generalizando resultados recientes de R. E. Castillo, J. C. Ramos-Fernández, and M. Salas-Brow [3], J. C. Ramos-Fernández, M. A. Rivera-Sarmiento & M. Salas-Brown [18] y J. C. Ramos-Fernández & M. Salas-Brown [17].

Bibliografía

[1] Y. A. Abramovich and C. D. Aliprantis. *An invitation to operator theory*, volume 50 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[2] G. Birkhoff and E. Kreyszig. The establishment of functional analysis. *Historia Math.*, 11(3):258–321, 1984.

[3] R. E. Castillo, J. C. Ramos-Fernández, and M. Salas-Brown. The essential norm of multiplication operators on Lorentz sequence spaces. *Real Anal. Exchange*, 41(1):245–251, 2016.

[4] R. E. Castillo, H. Rafeiro, J. C. Ramos-Fernández, and M. Salas-Brown. Multiplication operator on Köthe spaces: measure of non-compactness and closed range. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 42(4):1523–1534, 2019.

[5] J. L. B. Cooper. Coordinated linear spaces. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 3:305–327, 1953.

[6] J. Dieudonné. Sur les espaces de Köthe. *J. Analyse Math.*, 1:81–115, 1951.

[7] G. Köthe. Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume. *Math. Z.*, 51:317–345, 1948.

[8] G. Köthe. Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume. *Math. Nachr.*, 4: 70–80, 1951.

[9] G. Köthe and O. Toeplitz. Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen. *J. Reine Angew. Math.*, 171:193–226, 1934.

[10] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1978.

[11] P.-K. Lin. *Köthe-Bochner function spaces*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[12] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces. I.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92.

[13] G. G. Lorentz. Some new functional spaces. *Ann. of Math. (2)*, 51:37–55, 1950.

[14] G. G. Lorentz and D. G. Wertheim. Representation of linear functionals on Köthe spaces. *Canad. J. Math.*, 5:568–575, 1953.

[15] W. Orlicz. Über gewisse Klassen von Modularräumen. In *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Sympos., Prague, 1961)*, page p. 295. Academic Press, New York; Publ. House Czech. Acad. Sci., Prague, 1962.

[16] J. C. Ramos-Fernández and M. Salas-Brown. On multiplication operators acting on Köthe sequence spaces. *Afr. Mat.*, 28(3-4):661–667, 2017.

[17] J. C. Ramos-Fernández and M. Salas-Brown. The essential norm of multiplication operators acting on Orlicz sequence spaces. *Proyecciones*, 39(6):1407–1414, 2020.

[18] J. C. Ramos-Fernández, M. A. Rivera-Sarmiento, and M. Salas-Brown. On the essential norm of multiplications operators acting on Cesàro sequence spaces. *J. Funct. Spaces*, 2019.

[19] J. S. Shiue. On the Cesáro sequence spaces. *Tamkang J. Math.*, 1(1):19–25, 1970.

[20] A. C. Zaanen. *Integration.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.