



Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas

Facultad de Ciencias Políticas y Relaciones Internacionales

Trabajo de grado para optar por el título de Economista y Politólogo

Título:

Votos, Poder y Negociación: Dinámicas en el sistema legislativo colombiano

Autor:

Juan David Martinez Barreto

Asesor:

Cesar Atilio Ferrari

Bogotá D.C.

Noviembre, 2021.



Votos, Poder y Negociación: Dinámicas en el sistema legislativo colombiano.

Resumen

El presente documento realiza una aproximación al comportamiento del sistema legislativo y sus probabilidades de aprobación de proyectos de ley mediante un modelo que, en su primera fase, intrapartido, mediante el equilibrio en el mercado de cooperación se obtenga qué tan cooperativo es internamente. En la segunda parte del trabajo se aborda el comportamiento interpartido determinado por el poder que tiene el partido, su relación ideológica, su población a representar y qué tan dispuesto a ceder se encuentra el partido frente a exigencias de otros partidos políticos. Los resultados arrojaron que en promedio la probabilidad de aprobación de un proyecto de ley en la Comisión Tercera del Senado es de un 39,9%. Y si un partido desea tener al menos una probabilidad de aprobación de su proyecto en promedio en 50% debe ceder ante las exigencias de los otros partidos políticos en un 45%.

Palabras clave: Poder, Coaliciones, Partidos Políticos,

Clasificación JEL: D01, D02, D71, D72

Votes, Power and Negotiation: Dynamics in the Colombian Legislative System.

Abstract

This document makes an approximation to the behavior of the legislative system and its probabilities of the approval of bills through a model, which in the first phase, intra-party, through the equilibrium in the cooperation market and how cooperative is internally. The second part of the work is about the inter-party behavior determined by the power of the party, the ideological relationship, the population to represent, and how willing the party is to give in demands to other political parties. The results showed that on average the probability of approval of a bill in the Third Committee of the Senate is 39.9%. And if a party want to have at least a 50% probability of approval in the project, it must give in to the demands of other political parties by 45%.

Key Words: Power, Political Coalitions, Political Parties,

JEL Classification: D01, D02, D71, D72

I. Introducción

El análisis del poder es un debate central en la ciencia política. Resulta muy diverso y amorfo como Max Weber mencionara en su texto *Economía y sociedad* (2002). Esta consideración ha dejado la idea de que el análisis del poder debe dejarse a herramientas no cuantitativas.

Sin embargo, desde mediados del siglo XX, con el desarrollo de la teoría de juegos y su enfoque cooperativo se empezó a gestar nuevas teorías que afirman poder aproximar esa medición a algo mucho más cuantificado. Este enfoque ha crecido durante los últimos años, y la academia cada vez le abre más el espacio a este tipo de análisis. Existen diversas universidades de gran reconocimiento que tienden a utilizar esta metodología para analizar el poder de diferentes actores.

En Colombia este debate ha sido reciente y no se ha prestado la suficiente atención. Es por ello, que este trabajo propende agregar un nuevo paso al análisis al introducir una metodología cuantitativa que trate de entender las dinámicas del congreso con mayor precisión que solamente decir que los sucesos existen de forma espontánea. Busca también crear nuevos debates en la ciencia económica y política del país de tal modo que esta nueva metodología cada vez se utilice en mayor medida.

Es así que, con el fin de enriquecer el debate, se ha formulado la siguiente pregunta: ¿Cómo se desarrollan las dinámicas cooperativas en la rama legislativa?

Para el efecto, se analizó un caso específico, el de la Comisión Tercera Permanente del Senado, y se modeló sus comportamientos de forma computable para posteriores análisis. El presente modelo realiza la combinación de dos momentos: 1) intrapartido que recoge ideas del comportamiento consumidor y establece un desarrollo en un mercado de valores como es el de la cooperación. Esto con el fin de realizar un acercamiento a la realidad con el índice de poder. 2) interpartido, que utiliza el equilibrio del mercado de cooperación y lo incluye en una ecuación que establece cómo se relacionan los partidos políticos. Esta ecuación incluye el equilibrio del mercado de cooperación traducido en una tasa de cooperación y su índice de poder; incluye las relaciones ideológicas; la población a representar; como la disposición a ceder en aspectos de la propuesta de política.

Esta pregunta agrupa el comportamiento dentro y entre los partidos políticos teniendo en cuenta que para que un proyecto de ley pueda avanzar y convertirse en ley, la primera instancia que debe cumplir es su debate en las comisiones correspondientes.

En términos generales, se encontró que la probabilidad de que un proyecto de ley sea exitoso resulta más complejo de lo que se cree, ya que las probabilidades de aprobación se encuentran debajo del 50%. Por otra parte, el partido político que se considera de centro demuestra mayor relación con los demás partidos e incluso siendo el que tiene mayor probabilidad de apoyo.

II. Revisión de la Literatura

La presente revisión de literatura está distribuida en 4 temas: 1) índices de poder, 2) microfundamentación del modelo de mercado, 3) aproximación práctica de los índices de poder, 4) juegos de negociación y cooperativos. Esta división no es al azar, tiene un sentido evolutivo de la teoría, es decir desde el principio cómo se ha desarrollado el modelo inicial, para ir avanzando a la coalición donde ya interactúan los diferentes actores y así concluir con casos aplicados en el país y otras regiones.

El primer texto es *Power indices and coalition formation* de Holler & Owen (2001). En términos generales el texto busca exponer la gran variedad de índices de poder y las diferentes dinámicas de cooperación o de coalición, todo en el marco de la teoría de juegos. Este texto es una primera aproximación a la gran variedad de índices de poder y al entendimiento de la relevancia de estos.

El siguiente texto es *Índices de poder, Cómo evaluar el poder del voto* de Seijas Macías (2015), que es una descripción de los índices de poder, la evolución de los mismos, y de la relevancia en el sistema político. Ese es el factor adicional del texto ya que añade la relevancia en el análisis.

Otro texto relevante es el de Felsenthal & Machover (2004) *A priori Voting Power: What is all about?* Su discusión gira hacia el significado del término a priori voting power y expone cómo medirlo. Su fin último es responder a la cuestión sobre si es importante o inaplicable.

Este texto es de gran importancia porque muestra además la participación activa que tiene la London School of Economics con respecto al tema.

Adicionalmente al tema cooperativo a la teoría de juegos, una explicación que se desea realizar debe fundamentarse en modelos de oferta y demanda, si bien los textos básicos de economía como es el de Samuelson o Mankiw son una referencia más que intrínseca, el texto de *Política Económica. Teoría y Práctica desde los mercados* de César Ferrari (2019), expone precisamente el comportamiento que se da en la política económica desde un enfoque microfundamentado, como una relación de oferta y demanda que ofrecen ideas para la formulación de mercado del precio implícito de los valores. Otro texto del Profesor Ferrari (2010) que dio la primera puntada a la idea principal de este trabajo es *Valores, Bienes Públicos y Desarrollo Humano* que básicamente formula la pregunta sobre si dada la existencia de un precio explícito para bienes tangibles, se debe también revisar los precios implícitos para los bienes intangibles como son los valores humanos, por ejemplo.

Paralelamente entre los textos teóricos, los textos que utilizan la teoría y la aplican a temas prácticos, encontramos el texto *Modelos de negociación en el proceso legislativo de la Unión Europea*, de Arregui (2007). Este texto como su nombre lo dice analiza el tipo de mecanismos que estructuran los procesos de negociación y de toma de decisiones de la Unión Europea mediante el cálculo de índices de poder y un modelo de negociación de teoría de juegos.

Entre los textos prácticos pero enmarcados en Colombia se encuentran dos de gran relevancia que fueron una referencia para realizar este trabajo. El primer texto es *Poder regional y coaliciones en el plan nacional de inversiones* de Pallares & Galvis Restrepo (2007). Este texto analiza la formación de coaliciones regionales durante una de las fases de la votación del plan nacional de inversiones mediante herramientas de teoría de juegos simples.

Otro texto es el de Rodríguez Acosta (2005) el cual estudia desde un enfoque de teorías de juegos el consejo nacional de seguridad social en salud. Este texto es de carácter contextual y sirve para tener bases en el enfoque institucional a realizar.

La rama legislativa del poder público en Colombia es un texto descriptivo de Herrera Llanos (2003) que resume el apartado descriptivo del sistema legislativo de la constitución política de 1991.

Estos textos muestran el avance que ha tenido el tema de índice de poder y sus coaliciones. Sin embargo, ninguno de los textos anteriormente mencionados tiene un modelo como tal que refleje cómo se comportan los actores dentro de los partidos antes de formular una propuesta o realizar una votación, es decir el índice de poder supone que todos los votantes dentro del partido en el congreso votarán en conjunto a favor o en contra, lo que no muestra la afectación de los intereses de cada miembro hacia si deciden votar o no. Mediante el modelo que se propone es posible observar el comportamiento dado un mercado de intangibles que es la cooperación de los individuos.

Para comprender en un proceso de negociación qué tipo de variables pueden afectar el deseo de negociar, ceder o de desafiar, se utiliza el texto *Forecasting Political Events The Future of Hong Kong* escrito por Newman & Bueno de Mesquita (1985), el cual exponen de manera genérica el proceso de negociación como un proceso competitivo entre un agente que tiene la capacidad de ceder o de negociar, claramente a la luz de sus intereses que a su vez están determinados por su poder o capacidad de incidir en ese sistema. La mejor manera de obtener un resultado satisfactorio en el modelo es acercarse a los políticos con un interés similar y de cierta manera desafiar a aquellos quienes no coinciden ideológicamente.

El texto de Riker (1962) *The theory of political coalitions* es un gran texto para enmarcar el proceso de coaliciones que pueden estar en el Sistema legislativo bajo un análisis económico. Es por lo tanto un texto de suma importancia para los debates actuales, de hecho, el término del principio del tamaño (size principle) es una referencia al comportamiento de la coalición de forma racional y que ciertamente tiene mucha relación con los índices de poder anteriormente mencionados. El mismo libro expone algunos casos de evidencia empírica que muestra la validez del principio del tamaño.

Downs (1957) en su libro *An Economic Theory of Democracy*, muestra el comportamiento o las motivaciones de un sistema de partidos, como también la lógica detrás de sus intereses donde el fin último radica en la maximización de votos. Si bien este análisis es bastante

simplificado de la realidad, este texto es catalogado como uno de los más relevantes en el análisis de la política mediante un proceso racional y de teoría de juegos.

El libro *Legislative Leviathan* de Cox & McCubbins (2007), hace aproximaciones del comportamiento bajo un análisis económico del sistema legislativo mediante diversos modelos que dan cuenta del avance de la teoría económica y de juegos al proceso en el sistema legislativo.

III. Metodología

El presente modelo está dividido en dos momentos: 1) el equilibrio efectuado dentro del partido, es decir, intra-partido; 2) el equilibrio que resulta de un proceso de negociación entre los diversos partidos: inter-partido.

1. Modelo intra-Partido: oferta y demanda.

La teoría del consumidor explica el comportamiento de los agentes económicos (de las personas) a partir de considerar que estos tratan de maximizar su bienestar (su función de utilidad) adquiriendo bienes y servicios, dadas sus preferencias y un ingreso disponible. Estos bienes y servicios incluyen valores como seguridad o solidaridad, que no necesariamente tienen precios (César Ferrari, 2010). Este proceso implica un comportamiento racional, pero también emocional pues las preferencias son producto de la historia, cultura, pero también de las voliciones personales de los agentes. De este proceso de maximización se deriva un sistema de funciones de demanda para cada uno de dichos bienes y servicios.

La demanda del valor a considerar resulta de un proceso de maximización de la utilidad del consumidor expresada en términos de los valores sobre los cuales tiene preferencias:

$$\begin{aligned} \max U &= v_d^a v_2^b \\ \text{sujeta a: } &e_d v_d + v_2 \leq e \end{aligned}$$

Donde, v_d es la cantidad del valor a considerar del demandante. v_2 es un valor compuesto, es decir representa a los demás valores de su preferencia: “es un bien compuesto porque representa todo lo demás que podría consumir el individuo, aparte del bien”, (Varian, 2016, p.22). a y b son las preferencias del consumidor por ambos valores; $a + b = 1$. e_d representa el esfuerzo (costo de oportunidad) del demandante para obtener el valor v_d con relación a lo que requiere para obtener el otro valor que se considera numerario ($e_2 = 1$). La utilidad está restringida mediante el esfuerzo total e que dispone el agente para adquirir ambos valores.

Siguiendo a Ferrari (2010) se consideran los valores (V) en la función de utilidad pues “... más allá de consideraciones éticas, estos valores existen porque las personas los demandan, porque los incorporan en sus preferencias, y alguien los ofrece, o los debe ofrecer y satisfacer. Así, se pueden concebir como bienes o servicios para los que hay demanda y oferta, cuya “cantidad” y cuyo “precio” se definen en el “mercado” respectivo.” (p.267)

El resultado de la maximización previamente propuesta, resulta en v_d que es la demanda del agente del valor a analizar:

$$v_d = \frac{a e}{e_d}$$

La demanda por valores puede aproximarse a la demanda de bienes públicos los cuales tampoco tienen un precio dado o explícito. Como menciona Ferrari (2010) “Cuando no es explícito está dado por su costo de oportunidad en términos de otros bienes y servicios, es decir, por lo que se deja de comprar de otros bienes o servicios para adquirir los primeros” (p.270).

En este orden de ideas, la función de demanda total o agregada para cada uno de los valores de los diferentes agentes será:

$$v_t = \sum v_{dj}$$

Donde v_t es la demanda agregada de todos los agentes j por el valor v . Cabe resaltar que existe una demanda para cada uno de los valores; no cabe sumar demandas de valores distintos.

En el presente texto, la “cooperación” es considerada como uno de los valores principales que hacen parte de la negociación del sistema legislativo.

Por el lado de la oferta, en mercados en competencia perfecta la oferta se deriva mediante los costos totales, es decir, sus costos marginales. En este caso, el costo está dado por la suma del tiempo y la habilidad que posee el agente con su respectivo precio o esfuerzo. De tal modo se realiza un proceso de minimización de costos:

$$\text{Min } C = (e_t t + e_h h)$$

Sujeta a una función de producción:

$$v_i = h^\alpha t^\beta ;$$

con retornos a escala decrecientes ($\alpha + \beta < 1$)

C es el costo total que está dado por la suma de la habilidad y el tiempo a destinar, por su respectivo precio e_t y e_h . v_i es la cantidad que el ofertante realiza, la cual está sujeta a una función de producción determinada por la combinación de h y t , habilidad y tiempo, y los parámetros α, β que representan el peso de cada factor en la función de producción. En este orden de ideas, el agente tendrá mayor capacidad de ofrecer un valor determinado si tiene mayores habilidades y tiempo disponible. La explicación a los rendimientos decrecientes se da por la misma composición humana, el ser humano se agota y conforme más pasa el tiempo disminuirá el aporte que se da a medida aumenta el esfuerzo. En relación a la cooperación, el poder de cooperación disminuye progresivamente aumenta el esfuerzo. e

Para la determinación de la curva de oferta se realiza un proceso de minimización mediante la inclusión de la función de producción en los costos del productor donde $v_i = v_o$.

En el caso, la oferta resulta en:

$$v_o = e_d^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \beta^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} e_t^{-\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} e_h^{-\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

En el modelo completo intra partido es importante observar la cooperación efectuada dentro del partido para poder hablar de estrategias de negociación y coaliciones.

2. Modelo intra-partido: equilibrio.

Hasta el momento se ha expuesto la oferta y la demanda de forma diferenciada. No obstante, es relevante exponerla desde el equilibrio de mercado.

Samuelson & Nordhaus (2005) hacen una explicación sencilla y al mismo tiempo rigurosa del concepto de equilibrio en su libro Economía: “El equilibrio de mercado presenta al precio y cantidad en las que las fuerzas de oferta y demanda están en equilibrio. [...] La razón por la que esto se llama equilibrio es porque, cuando las fuerzas de oferta y demanda están balanceadas, no existe motivo alguno para que el precio suba o baje, siempre y cuando el resto se mantenga constante” (p.52).

Teniendo en cuenta la demanda (v_d) y la oferta (v_o):

$$v_d = v_o$$

$$e_d^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \beta^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} e_t^{-\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} e_h^{-\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} = \frac{a e}{e_d}$$

Mediante la igualación de cantidades, se obtiene el óptimo del esfuerzo y sus cantidades de equilibrio:

$$e_d^* = a^{1-\alpha-\beta} e^{1-\alpha-\beta} \beta^{-\beta} \alpha^{-\alpha} e_t^\beta e_h^\alpha$$

$$v^* = a^{\alpha+\beta} e^{\alpha+\beta} \beta^\beta \alpha^\alpha e_t^{-\beta} e_h^{-\alpha}$$

En el anexo matemático se expone a fondo la resolución matemática del modelo expuesto. En el presente modelo, el concepto es aplicado a la demanda y oferta de cooperación en el mercado respectivo. En el anexo 1 se muestra gráficamente (gráfico 1) el equilibrio en el mercado de

El equilibrio de la gráfica 1 presenta el caso de un partido político fragmentado donde el costo de su esfuerzo es alto y la “cantidad” cooperación es baja. En la medida que el equilibrio se encuentre más a la derecha, habría una mayor cooperación, es decir, un partido político cohesionado.

Teniendo en cuenta el tipo de equilibrio de mercado, es posible determinar una tasa de cooperación de “mercado” dada por la cantidad obtenida en el mercado dividida por el total de cooperación. En el Congreso, la cooperación se manifiesta cuando se acompaña a la propuesta con el voto. Es decir, el voto a favor de la propuesta determina si se cooperó o no:

$$Tasa\ cooperación = \frac{Equilibrio\ de\ cooperación}{Cooperación\ total} = \frac{v^*}{v^t}$$

Donde, $v^* = a^{\alpha+\beta} e^{\alpha+\beta} \beta^\beta \alpha^\alpha e_t^{-\beta} e_h^{-\alpha}$, y $v^t = \frac{ae}{e} = a$

La explicación de la segunda ecuación (v^t), resulta de e , que es el máximo valor de esfuerzo del demandante, por lo tanto, este tendría que ser la cantidad máxima del valor a analizar

Esta tasa de cooperación es la que permite la relación del modelo intra partido con el modelo inter partido.

3. Modelo inter-partido

Luego de determinar el equilibrio dentro del partido es posible expresar las relaciones entre los partidos. Estas relaciones están determinadas por su cohesión que, a su vez, está dada por su equilibrio en el mercado de cooperación y por el poder que tenga el partido político.

El poder es definido por Max Weber (1947) como “la probabilidad de imponer la propia voluntad dentro de una relación social aún contra toda resistencia y cualquiera sea el fundamento de su probabilidad.” (p.43).

En este orden de ideas y gracias a las herramientas conceptuales de la teoría de juegos es posible encontrar diferentes cálculos de poder, los llamados “índices de poder”.

A continuación, se expone de forma resumida los diferentes índices a considerar. El principal índice de poder considerado es el de Shapley-Shubik (\emptyset):

- Índice de poder Shapley-Shubik (1954): Basado en el valor de Shapley y utilizado en juegos simples. Su cálculo consiste en todas las permutaciones donde el votante “i” es decisivo:

$$\emptyset_i = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S/\{i\})]$$

- Índice de Banzhaf (1979): donde se tiene en cuenta todas las posibilidades que tiene, es decir su importancia en la coalición, este cálculo tiene en cuenta principalmente las mínimas coaliciones ganadoras:

$$\beta = \frac{\sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S/\{i\})]}{\sum_{j \in N} \sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S/\{j\})]}$$

- Índice preventivo de Coleman (1971): Mide las acciones del individuo o partido de “bloc a vote”, es decir que tenga la capacidad de cambiar de opinión y no permitir que se desarrolle el resultado inicial, decidiendo votar contrariamente a lo que inicialmente propuso:

$$P_i = \frac{\sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S/\{i\})]}{\sum_{S \subseteq N} [v(S)]}$$

Estos índices son los llamados “a priori”, es decir, antes de alteraciones o choques. Por lo tanto, miden la probabilidad máxima de ganancia o pérdida en situaciones perfectamente cooperativas.

Teniendo en cuenta tanto el equilibrio de la cooperación en el sistema legislativo, y su tasa de cooperación, es posible analizar y contrastar qué sucedería con el índice de poder cuando existe un equilibrio diferente al máximo posible, es decir, cuando no todos los miembros del partido cooperan.

Para analizar y unificar los dos aspectos, se multiplica el índice de cooperación (TC) con el índice de poder con el fin de estimar un “índice combinado cooperación-poder” que se acerque

a una situación donde no existe la total cooperación porque está sesgada por el poder. Por lo tanto, las ecuaciones correspondientes son:

- Índice combinado de cooperación-Shapley-Shubik = $TC * \phi_i$
- Índice combinado de cooperación-Banzhaf = $TC * \beta_i$
- Índice combinado de cooperación-Coleman = $TC * P_i$

La modificación del índice de poder afecta el resultado. Teniendo en cuenta su desarrollo se puede analizar y realizar una mayor predicción sobre la viabilidad de los proyectos y si tienen mayor probabilidad de pasar los diferentes debates en las diferentes comisiones.

En el mundo real, uno esperaría que luego de definir sus “poderes” un partido político, o agente como el Gobierno, proponga reformas o debates. Teniendo en cuenta su relevancia y sus relaciones en temas específicos (económicas, sociales y políticas) se puede construir una probabilidad de que el proyecto o el debate sea votado favorablemente, esto teniendo en cuenta su relación ideológica y la población representada.

$$Prob\ aprobación = \left(\frac{(TC * I) + RI + PR + CN}{4} \right)$$

Donde (TC) representa la Tasa de Cooperación, (I) es el índice de poder (ϕ_i, β_i, P_i), (RI) es la relación ideológica entre partidos, (PR) es la población a representar y (CN) es el cambio de la naturaleza del proyecto hacia el interés del partido no proponente. El cociente permite normalizar la probabilidad entre 0 y 100%.

4. Modelo computable

Con el fin de obtener la simplicidad suficiente para poder modelar la propuesta de forma computable, se asumieron los siguientes supuestos:

1. El partido de gobierno expresa la propuesta del ejecutivo. Por lo tanto, si el ejecutivo decide proponer algún proyecto, este se observará con los resultados del partido de Gobierno.
2. La relación ideológica (RI) resulta de las correlaciones obtenidas entre las preguntas ideológicas que se muestran en el anexo 8.

Con dichas consideraciones y teniendo en cuenta el planteamiento teórico, se realizó un análisis práctico con el modelo computable a fin de analizar el comportamiento del sistema legislativo, específicamente de la Comisión Tercera.

Para obtener el resultado del índice de cooperación se reemplazaron los siguientes valores en las ecuaciones:

$$\alpha = 0,5; \beta = 0,3; e = 1; a = 0,7; e_t = 0,7; e_h = 0,5$$

Estos valores arrojaron una cantidad de cooperación y de esfuerzo de $v^* = 0,56; e_d^* = 1,1$, lo que a su vez resulta en una tasa de cooperación del 80%.

Teniendo en cuenta que la tasa de cooperación resultó en 0,8 con el índice de poder Shapley-Shubik de cada partido político i :

- Índice combinado de cooperación-Shapley-Shubik (ICS)= $0,8 * \phi_i$

Con respecto a la relación entre partidos, esta fue resuelta estimando la posición ideológica de cada partido respecto a su par, la cual depende de la respuesta a 7 preguntas sobre la posición ideológica del partido que se explicitan a continuación:

1. ¿Tiene un pronunciamiento favorable frente al proceso de paz?
2. ¿Prima el interés individual sobre el interés colectivo?
3. ¿El trabajo es un eje fundamental en sus propuestas de partido?
4. ¿La seguridad y el orden es la prioridad en su propuesta?
5. ¿La inversión privada tiene mayor relevancia que la pública?
6. ¿El medio ambiente es un aspecto relevante en su propuesta?
7. ¿Es la intervención estatal un eje formulador de políticas?

La respuesta de cada partido se identificó a partir de los comunicados realizados y por las noticias publicadas en los diferentes medios de comunicación (periódicos, radio, televisión) relacionadas con el tema en cuestión. Si la respuesta es positiva se le dio un valor de 1, si no lo es un valor igual a 0. De tal manera, la estimación de la matriz de coeficientes de correlación arroja

un proxy de la posición ideológica del partido. Para mayor información ver los anexos 9 y 10 la matriz de realización ideológica y sus correlaciones.

Con referencia al poder del partido y la relación con otros partidos, adicionalmente se tuvo en cuenta la variable de población a representar con un valor de 100%, esto se explica ya que los partidos políticos no se enfocan en una población en particular, en cambio, se refieren a los colombianos en general.

El único factor faltante es el cambio de la naturaleza del proyecto a fin de que esta propuesta sea exitosa. Este valor es exógeno y depende de la máxima disposición a cambiar la naturaleza del proyecto, es decir del interés del partido de modificar su propuesta inicial. Por lo tanto, el valor 0 quiere decir que la propuesta sería formulada sin tener en consideración las eventuales exigencias de cambio de los otros partidos.

Con dichas consideraciones, la ecuación a utilizar en el modelo computable devino:

$$\begin{aligned} \text{Probabilidad aprobación por partido} &= \left(\frac{(ICS) + RI + PR + CN}{4} \right) \\ &= \left(\frac{(0,8 * \phi_i) + RI + 1 + 0}{4} \right) \end{aligned}$$

En términos agregados, para observar un resultado con todos los partidos políticos participantes, la probabilidad de aprobación está dada por:

$$\text{Probabilidad aprobación agregada} = \frac{\sum \left(\frac{(0,8 * \phi_i) + RI + PR + CN}{4} \right)}{n}$$

En la ecuación, el numerador está dado por la suma de las probabilidades de aprobación de cada partido, dividido por el número total de partidos.

IV. Datos y estadísticas descriptivas

El modelo fue aplicado al sistema legislativo colombiano para el periodo 2018-2022, específicamente para el análisis del comportamiento de la Comisión Tercera del Senado. Para el

uso del modelo es importante contar con el número de partidos políticos, de representantes, senadores, de votos que puede obtener cada partido, como también el número de comisiones. En este caso solo se empleó los datos del Senado.

Los datos se obtuvieron de las páginas oficiales del senado como también de la cámara de representantes. De forma agrupada se obtuvieron de la página web de Congreso Visible (2021).

Según el documento de la Misión de Observación Electoral (MOE, 2018) sobre la composición del congreso, en Colombia existen 279 congresistas, en 108 senadores y 171 representantes a la cámara.

Con relación al senado, 100 curules son de circunscripción nacional ordinaria, 5 curules directas a los desmovilizados de las FARC, 2 corresponden a la circunscripción nacional indígena, una curul corresponde al segundo en votos a las elecciones para la presidencia.

Los datos de la Cámara de Representantes fueron usados solamente para calcular el Índice de Poder. La Cámara está compuesta por 161 congresistas de circunscripción territorial ordinaria, 5 curules directas a los miembros de las FARC, 1 circunscripción especial para los colombianos en el exterior, 1 circunscripción especial nacional indígena, 2 circunscripción especial nacional afrodescendiente, como también 1 voto de segundo voto a la vicepresidencia.

En la aplicación del modelo se consideraron los resultados de las últimas votaciones correspondientes al Congreso de 2018 a 2022. Los resultados completos se muestran en los anexos 2 y 3. Los principales resultados de dichas elecciones fueron:

1) En el Senado, el partido con más curules (votos) obtenidos fue el Centro Democrático con 19 votos; los partidos con menores votos fueron el partido MIRA y Colombia Justas Libres con 3 votos cada partido.

2) El promedio del número de curules por partido fue 7, con una desviación estándar de 6. La mediana está ubicada en el partido FARC con 5 curules. El resultado fue de más de 10 curules para los partidos Centro Democrático, Cambio Radical, Conservador, Liberal y de la U. Estos partidos tienen el 35% del acumulado de votos.

3) En la Cámara de Representantes el mayor número de curules (votos) obtenidos correspondió al partido liberal con 35 votos, el menor número de curules correspondió a tres partidos con un voto cada uno: el partido MIRA, el Partido Colombia Justas Libres, y el Partido MAIS.

4) El número promedio de curules por partido es de 10 votos con una desviación estándar de 13 votos, la mediana de 2 votos con el partido Polo Democrático. Los resultados anteriores muestran que existe una acumulación de número de votos por parte de pocos partidos, ya que existe una gran diferencia entre la mediana y el promedio, y la desviación estándar es elevada respecto al promedio.

En la Comisión Tercera del Senado, hay un total de 17 curules, con un promedio de 2,6 por partido, una desviación estándar de 2,06 y una mediana de 2. Este resultado da a entender que a diferencia del análisis del congreso y del senado, no se observa acumulación ya que el promedio y la mediana concuerdan en el número de votos.

En dicha Comisión, los partidos con mayor número de curules son el partido Liberal, el partido de la U, el partido Centro Democrático y el partido Cambio Radical. Es decir, 4 partidos con el mayor número de votos acumulan el 37,5% del total de los votos. Los partidos con menores votos corresponden a Colombia Justa, Colombia Humana y el Partido Verde.

V. Resultados

Considerado los datos anteriores, las fórmulas y el modelo descrito permiten obtener determinados resultados sobre el ejercicio del poder en el sistema legislativo colombiano para el periodo 2018-2022.

Al estimar el índice de poder de Shapley-Shubik (ϕ) se obtuvieron los siguientes resultados:

1) En el Senado, el partido Centro Democrático ostentaba el 18,9% de poder y los partidos MAIS y AICO un 0,9% de poder cada una.

2) En la Cámara de Representantes, el partido con mayor poder es el Partido Liberal con 21,4%, con 35 votos, y los partidos ASI, Consejo Comunitario y las comunidades negras ostentan un poder del 0,4%. Por lo tanto, con base al 31% de votos acumulados entre los que ostentan el mayor número de votos (Liberal, Centro Democrático, Cambio Radical, Partido de la U, Conservador) tendrían un 90,6% del poder de la cámara. En el anexo 3 presenta el número de votos, el índice de poder y la estadística descriptiva.

3) Los partidos con mayores votos mencionados anteriormente (Liberal, U, Centro Democrático, Cambio Radical) ostentan un poder de 19% y los partidos con menores votos tienen un poder del 4%. Los 4 partidos con mayores votos tienen un 74% del poder total. En el anexo 4 se observa el número de votos, su índice de poder (\emptyset) y su estadística descriptiva.

Al realizar el análisis del poder en la tercera comisión en términos de número de votos por partido se observa que el poder es creciente. No obstante, este resultado es marginalmente decreciente. El anexo 5 presenta el mencionado resultado creciente donde el valor mínimo, teniendo en cuenta el índice de poder, es de 4%, que tiene un aumento al 8% con un voto adicional. En términos marginales el resultado es decreciente ya que en la medida que se agrega un voto adicional, este poder genera un cambio menor en el poder total.

Este comportamiento se debe a que hay partidos que resultan siendo pivotes, con pocos votos. Según el modelo, el cálculo de poder es dado con el punto donde ese partido es decisivo en la votación y muchas veces la victoria se da por un voto, como se observa gráficamente en los anexos 6 y 7. La tabla 8 expone el resultado marginal comenzando desde 1 voto hasta 9 votos, donde el cambio marginal de 1 voto a 2 votos da un resultado de 112%, y de 8 a 9 votos el aumento resultó de 21,6%.

Al investigar sobre los pilares del partido, como también en las principales noticias respecto al tema, se determinó la matriz que responde a las preguntas inicialmente planteadas. Una pregunta se refiere al pronunciamiento respecto al proceso de paz. Por ejemplo, el partido Verde ha velado por el mantenimiento de los acuerdos a diferencia del partido Centro Democrático que ha estado en contra del proceso. Esto se observa en la matriz de resultados donde el partido Verde tiene un valor de 1 y el partido Centro Democrático un valor de 0. En el anexo 9 se muestran los resultados de las preguntas.

Por otra parte, si se observa la correlación entre las preguntas y los partidos, por ejemplo, el Partido Verde y el Centro Democrático tienen una correlación -26%. Es decir, además de que las organizaciones difieran en términos ideológicos, habrá puntos de orden ideológico que serán contrarios. El anexo 10 muestra el resultado de la matriz de correlaciones como proxy a las relaciones ideológicas entre los partidos.

Teniendo en cuenta el resultado ideológico de los partidos, la tasa de coherencia interna, supuesta en 80% termina cambiando el índice de poder. Con respecto al partido con el valor más alto (Liberal) en términos de coherencia, el índice de poder es de 18,6% y su índice de coherencia-poder es de 15%, es decir que si el 80% de los miembros del partido deciden colaborar su poder resultante es de 15%. El anexo 11 presenta el resultado del índice coherencia-Shapley.

Según el modelo, un factor que modifica el resultado respecto a un proyecto de ley determinado es la incidencia de la población que representa dicho proyecto. Los partidos políticos no se centran únicamente en una población en específico; es decir, no representan únicamente el interés, por ejemplo, del joven o del adulto mayor. Es por este argumento que el modelo supone que la población a representar es del orden de 100% ya que todos los partidos afirman representar a la población colombiana en general y por lo tanto esto abarca la totalidad.

Con los supuestos mencionados anteriormente, así como con los índices calculados se determinó la probabilidad de aprobación de alguna iniciativa. El resultado supone que el partido no tiene la intención de ceder ante demandas de los demás partidos.

Por ejemplo, si el partido Liberal realiza una propuesta, el partido de la U respondería favorablemente en un 32%. El anexo 12 presenta la probabilidad de que una iniciativa sea aprobada por cada partido. En términos agregados, la probabilidad total de que un proyecto por parte del Partido Liberal sea aprobado es del 33,29%.

Con respecto a una iniciativa presentada por el partido Conservador, como se muestra en el anexo 13, el partido Colombia Justa y Libre tendría la mayor probabilidad de acceder a la aprobación de su propuesta con una probabilidad del 47%. Por otra parte, la probabilidad agregada o total es del 34,23%.

Respecto a iniciativas del partido de la U, el partido que tendría la mayor probabilidad de apoyar la propuesta es el partido Verde con el 48%. La probabilidad de aprobación total es del 42,10%. Todos los resultados se observan en el anexo 14

El Partido Verde, tal como se expone en el anexo 15, tiene 3 partidos con alta probabilidad de secundar sus iniciativas con un 45%; estos son el partido de la U, Colombia Humana y el partido Cambio Radical. La probabilidad total es del 41,96%

El partido Colombia Justa y Libre muestra que el partido Verde y el partido Conservador apoyarían sus propuestas con una probabilidad de aprobación del 45%, Esto se observa en el anexo 16. En términos agregados, la probabilidad de aprobación total es del 41,15%

En el caso de Colombia Humana, la probabilidad total de que sus iniciativas sean aprobadas es del 41,09%. El partido Verde es el partido que en promedio apoyaría en mayor medida sus propuestas con un 45%. Ver anexo 17.

Con respecto al Partido Cambio Radical, la probabilidad de aprobación total de sus propuestas es de 46,22% con un apoyo con mayor probabilidad del partido Verde con un 48%, Ver anexo 18

En el caso del partido Centro Democrático, el partido que lo apoyaría en mayor medida sería el partido Colombia Justas y Libre con un 40%. La probabilidad total de aprobación es del 39,23%.

El partido con mayor probabilidad de tener su propuesta aprobada es el partido Cambio Radical, con un 46%. Por su parte, el partido con menor probabilidad de tener propuesta aprobada sin ceder a exigencias de otros partidos es el Partido Liberal, con 33,29%. De acuerdo al modelo, su explicación se observa por las relaciones ideológicas que forman y su índice de poder.

En suma, la probabilidad de que un proyecto de ley sea aprobado cuando el partido no cede ante las exigencias de otros partidos, es de 39,90%. Por otra parte, el partido Verde al manejar un discurso de centro tiene concordancia con los resultados del modelo. En este caso, tanto partidos de derecha como de izquierda tienen una mayor probabilidad de apoyar sus propuestas.

VI. Conclusiones

A partir de los resultados anteriores, se puede concluir que:

1) A pesar de que pocos partidos tienen un índice de poder alto comparado con los otros partidos de la Comisión Tercera, y que a su vez acumulan el mayor número de votos, esto no determina el resultado definitivo. La probabilidad de aprobación en promedio es de 39,9%.

2) Un partido político que cuente con mayores votos a favor y, por lo tanto, con mayor poder, el incremento marginal de este poder será decreciente. Por tal razón, el partido debería enfocarse en tener votos hasta que logren el punto donde ya no generaría mayor poder. Es decir, al ser decreciente existe un punto mínimo donde ese poder no tendrá mayor relevancia a medida que aumenta el número de votantes en dicho partido político. Este resultado tiene concordancia con el principio del tamaño de Riker (1962).

3) La debilidad del partido político no está definida por el número de votos que tenga sino en las coaliciones en las que el partido resulta decisivo. Esto es expuesto con el índice de poder y con la probabilidad de que su proyecto sea exitoso en el debate en la Comisión.

4) En promedio, para que una propuesta tenga una probabilidad de al menos 50% de ser exitosa, cada partido proponente debe ceder en su propuesta en al menos un 45% a las exigencias de los otros partidos (CN).

VII. Referencias

Arregui, Javier. (2007). Modelos de negociación en el proceso legislativo de la Unión Europea (*).
Revista Española de Ciencia Política.

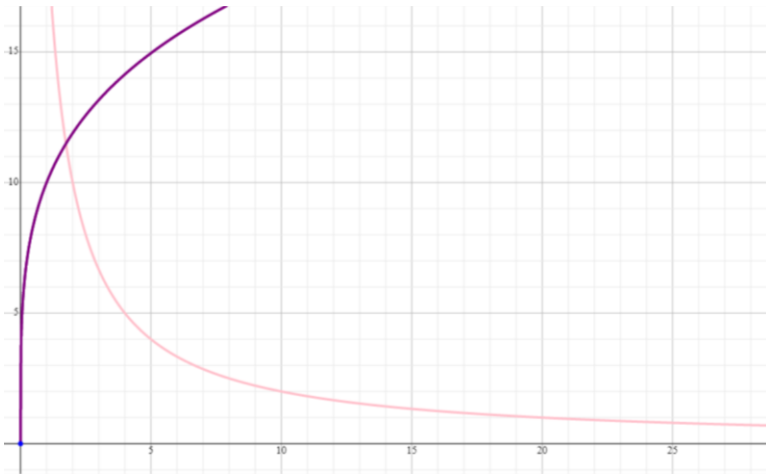
Bueno, Bruce & Newman, David & Rabush, Alvin. (2019). Forecasting Political Events The
Future of Hong Kong David Newman 208p 0300035195.

- Coleman, James S. (1971). "Control of Collectivities and the Power of a Collectivity to Act." In Lieberman (ed.) *Social Choice*. New York, Gordon & Breach. pp. 269-300
- Downs, A. (1957). *An economic theory of democracy*. Boston: Addison-Wesley.
- Dubey, Pradeep and Lloyd S. Shapley (1979). "Mathematical Properties of the Banzhaf Power Index." *Mathematics of Operations Research* 4(2): pp. 99-131
- Felsenthal DS, Machover M. A Priori Voting Power: What is it All about? *Political Studies Review*. 2004;2(1):1-23. doi:10.1111/j.1478-9299.2004.00001.x
- Ferrari, C. (2019). *Política económica: Teoría y práctica desde los mercados* (1st ed.). Bogotá: Universidad Javeriana.
- Ferrari, C. 2010. Valores, bienes públicos y desarrollo humano. *Revista de Economía Institucional*. 12, 22 (jul. 2010).
- Herrera Llanos, W. (2011). La Rama Legislativa del Poder Público en Colombia. *Revista De Derecho*, 20(20). Recuperado a partir de <https://rcientificas.uninorte.edu.co/index.php/derecho/article/view/2907>
- Holler, M. (2013). *Power, Voting, and Voting Power*. Heidelberg, Neckar: Physica.
- Holler, M., & Owen, G. *Power indices and coalition formation*.
- Nicholson, W., & Cole, J. (2008). *Teoría microeconómica*. México, D.F.: CENGAGE Learning.
- Nurmi H. (1981) Measuring Power. In: Holler M.J. (eds) *Power, Voting, and Voting Power*. Physica, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00411-1_20
- Nurmi H. (1981) The Problem of the Right Distribution of Voting Power. In: Holler M.J. (eds) *Power, Voting, and Voting Power*. Physica, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00411-1_14

- Packel, E., & Deegan, J. (1980). An Axiomated Family of Power Indices for Simple N-Person Games. *Public Choice*, 35(2), 229-239. Retrieved March 2, 2021, from <http://www.jstor.org/stable/30023798>
- Pajala, A., Meskanen, T. and T. Kause (2002): Powerslave Power Index Calculator: A Voting Body Analyser in the Voting Power and Power Index Website. [online]. Published 22.4.2002. Updated 31.5.2007. University of Turku. URL:<http://powerslave.val.utu.fi/>
- Pallares Delgado, César Orlando & Claudia, Medina & Galvis-Restrepo, Marcela. (2009). PODER REGIONAL Y COALICIONES EN EL PLAN NACIONAL DE INVERSIONES PÚBLICAS: 1998-2010. 10.13140/RG.2.2.20680.72966.
- Riker, W. (1962). *The theory of political coalitions*. New Haven: Yale university press.
- Samuelson, P., & Nordhaus, W. (2005). *Economía*. Madrid: ESIC.
- Sandra Milena Rodríguez Acosta, 2005. "Relaciones de agencia y relaciones de poder en el Consejo Nacional de Seguridad Social en Salud en Colombia. Un análisis del poder de voto a priori," Documentos IIEC 007290, Universidad del Norte. <https://ideas.repec.org/p/col/000383/007290.html>
- Seijas-Macias, Antonio. (2015). Índices de poder. Cómo evaluar el poder de voto. *Anales de ASEPUMA*. 23. 1-20.
- Shapley, Lloyd S. and Martin Shubik (1954). "A Method of Evaluating the the Distribution of Power in a Committee System." *American Political Science Review* 48(3): pp. 787-792.
- Varian, H. (1998). *Análisis microeconómico*. Barcelona: Antoni Bosch Editor.
- Weber, M., Winckelmann, J., & Medina Echavarría, J. (2002). *Economía y sociedad*. Madrid: F.C.E. de España.

VIII. Anexos:

1. Ejemplo de Gráfica de mercado de cooperación en equilibrio.



2. Votos, índice de poder en el Senado

Partido	Votos	Índice poder
Centro Democrático	19	18,90%
Cambio Radical	16	15,10%
Conservador	14	13,00%
Liberal	14	13,00%
Partido de la U	14	13,00%
Verde	9	7,40%
Polo	5	4,60%
FARC	5	4,60%
Decentes	3	2,70%
Colombia Justas	3	2,70%
Mira	3	2,70%
MAIS	1	0,90%
AICO	1	0,90%
Colombia Humana	1	0,90%
Promedio	7,71428571	
Varianza	40,989011	
desviación	6,40226608	

mediana	5
Curtosis	- 1,41469826

3. Votos, índice de poder y estadísticas descriptiva en la Cámara de Representantes.

Partido	Votos	Índice poder
Liberal	35	21,4%
Centro Democrático	32	19,7%
Cambio radical	30	18,7%
Partido de la U	25	15,7%
Conservador	21	15,1%
Verde	9	2,6%
Mira	1	0,4%
Polo	2	0,7%
Colombia justas	1	0,4%
MAIS	1	0,7%
Decentes	2	0,7%
Opción Ciudadana	2	0,7%
ASI	1	0,4%
FARC	5	1,9%
Consejo Comunitario	1	0,4%
Comunidades Negras	1	0,4%
Promedio	10,5625	
Varianza	170,2625	
Desviación Estándar	13,0484673	
Mediana	2	
Curtosis	-0,84529971	

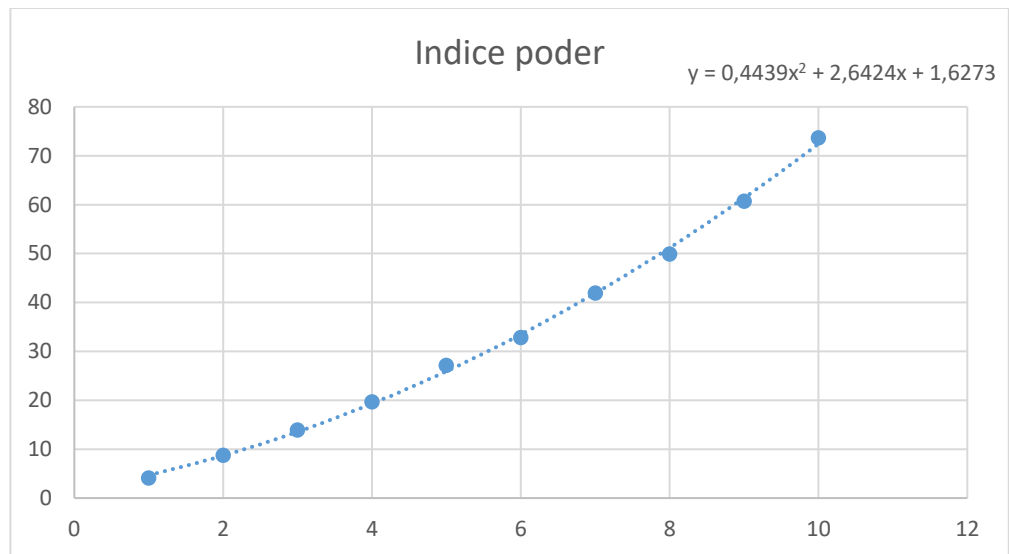
4. Votos, índice de poder y estadística descriptiva en Comisión Tercera en el Senado.

Partido	Votos	Índice poder
Liberal	3	18,60%
Partido de la U	3	18,60%
Cambio Radical	3	18,60%
Centro Democrático	3	18,60%
Conservador	2	12,90%
Verde	1	4,30%
Colombia Justas	1	4,30%
Colombia Humana	1	4,30%
Promedio	2,60606061	
Varianza	4,24621212	
desviación	2,06063391	
mediana	2	
Curtosis	3,00851753	

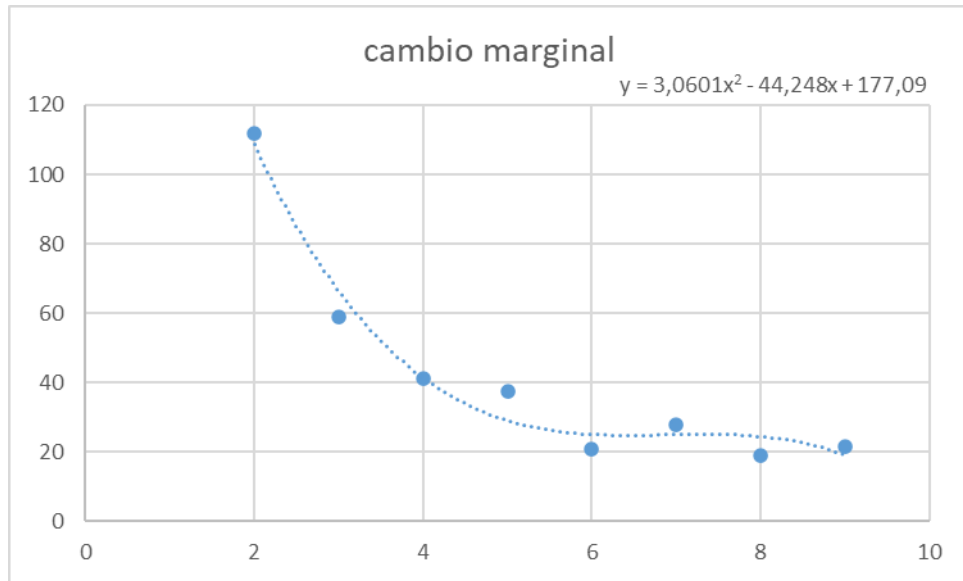
5. Tabla índice de poder de acuerdo al número de votos en el caso de la Comisión tercera.

Votos	Índice poder
1	4,11
2	8,74
3	13,93
4	19,69
5	27,1
6	32,8
7	41,9
8	49,9
9	60,71
10	73,64

6. Gráfica Índice de poder de acuerdo al voto.



7. Cambio marginal del poder de acuerdo al número de votos en la Comisión Tercera del Senado.



8. Cambio marginal índice de poder en la Comisión Tercera del Senado

voto	cambio marginal
1	-
2	112
3	59
4	41
5	37,6
6	21
7	27,7
8	19
9	21,6

9. Matriz de preguntas sobre la relación ideológica con su respectivo resultado

	Liberal	Consejador	Partido de la U	Verde	Colombia justas	Colombia humana	Cambio Radical	Centro Democrático
Pronunciamiento favorable frente al proceso de paz	1	0	1	1	0	1	1	0
Aspecto individual> aspe	1	0	1	0	0	0	0	1
Trabajo como base	1	1	0	0	1	1	0	0
Pronunciamientos a favor	0	1	0	0	1	0	0	1
Seguridad como eje prin	1	1	0	0	1	0	0	1
Inversión	1	0	1	1	1	1	1	1
Relevancia ambiental	1	0	1	1	0	1	0	0
intervención estatal	0	1	1	1	1	1	1	1

10. Matriz de coeficiente de correlación entre partidos

	Liberal	Consejador	Partido de la U	Verde	Colombia justas	Colombia humana	Cambio Radical	Centro Democrático
Liberal	100%	-58%	15%	0%	-45%	15%	-15%	-45%
Consejador	-58%	100%	-77%	-50%	77%	-26%	-26%	26%
Partido de la U	15%	-77%	100%	77%	-60%	47%	60%	-7%
Verde	0%	-50%	77%	100%	-26%	77%	77%	-26%
Colombia justas	-45%	77%	-60%	-26%	100%	-7%	7%	47%
Colombia humana	15%	-26%	47%	77%	-7%	100%	60%	-60%
Cambio Radical	-15%	-26%	60%	77%	7%	60%	100%	7%
Centro Democrático	-45%	26%	-7%	-26%	47%	-60%	7%	100%

11. Índice combinado de cooperación Shapley-Shubik en comisión tercera
senado

Índice de coherencia-Shapley	
Liberal	15%
Consevador	10%
Partido de la U	15%
Verde	3%
Colombia justas	3%
Colombia humana	3%
Cambio Radical	15%
Centro Democrático	15%

12. Probabilidad de aprobación en el Partido Liberal

Liberal	80%
Conservador	14%
Partido de la U	32%
Verde	29%
Colombia justas	18%
Colombia humana	18%
Cambio Radical	25%
Centro Democrático	18%

13. Probabilidad de aprobación Partido Conservador

Liberal	13%
Consevador	80%
Partido de la U	8%
Verde	15%
Colombia justas	47%
Colombia humana	21%
Cambio Radical	21%
Centro Democrático	34%

14. Probabilidad de aprobación Partido de la U

Liberal	32%
Consevador	9%
Partido de la U	80%
Verde	48%
Colombia justas	14%
Colombia humana	40%
Cambio Radical	44%
Centro Democrático	27%

15. Probabilidad de aprobación del Partido Verde

Liberal	26%
Consevador	13%
Partido de la U	45%
Verde	80%
Colombia justas	19%
Colombia humana	45%
Cambio Radical	45%
Centro Democrático	19%

16. Probabilidad de aprobación Partido Colombia Justas Libres

Liberal	15%
Consevador	45%
Partido de la U	11%
Verde	45%
Colombia justas	80%
Colombia humana	24%
Cambio Radical	28%
Centro Democrático	40%

17. Probabilidad de aprobación Colombia Humana

Liberal	30%
Consevador	19%
Partido de la U	38%
Verde	45%
Colombia justas	24%
Colombia humana	80%
Cambio Radical	41%
Centro Democrático	11%

18. Probabilidad de aprobación Cambio Radical

Liberal	25%
Consevador	22%
Partido de la U	44%
Verde	48%
Colombia justas	30%
Colombia humana	44%
Cambio Radical	80%
Centro Democrático	30%

19. Probabilidad de aprobación Centro Democrático

Liberal	18%
Consevador	35%
Partido de la U	27%
Verde	30%
Colombia justas	40%
Colombia humana	14%
Cambio Radical	30%
Centro Democrático	80%

Anexo matemático

Demanda:

La demanda del valor a considerar resulta de un proceso de maximización de la utilidad del consumidor expresada en términos de los valores sobre los cuales tiene preferencias:

$$\max U = v_d^a v_2^b$$

$$\text{sujeta a: } e_d v_d + v_2 \leq e$$

Donde, v_d es la cantidad del valor a considerar del demandante. v_2 es un valor compuesto, es decir representa a los demás valores de su preferencia (“es un bien (valor) compuesto porque representa todo lo demás que podría consumir el individuo, aparte del bien (valor)”, Varian (2016) p.22). a

y b son las preferencias del consumidor por ambos valores; $a + b = 1$. e_d representa el esfuerzo (costo de oportunidad) para obtener el valor v_d con relación a lo que requiere para obtener el otro valor que se considera numerario ($e_2 = 1$). La utilidad está restringida mediante el esfuerzo total e que dispone el agente para adquirir ambos valores.

El proceso de maximización se realiza mediante un lagrangiano de la siguiente manera:

$$L = v_d^a v_2^{1-a} - \lambda(e_d v_d + v_2 - e)$$

Al derivar el lagrangeano respecto a los dos valores se obtiene:

$$\frac{dL}{dv_d} = a v_d^{a-1} v_2^{1-a} - \lambda e_d = 0$$

$$\lambda = \frac{a v_d^{a-1} v_2^{1-a}}{e_d}$$

$$\frac{dL}{dv_2} = (1-a) v_d^a v_2^{-a} - \lambda = 0$$

$$\lambda = (1-a) v_d^a v_2^{-a}$$

Igualando los resultados obtenidos:

$$(1-a) v_d^a v_2^{-a} = \frac{a v_d^{a-1} v_2^{1-a}}{e_d}$$

$$\frac{a v_2}{e_d} = v_d (1-a)$$

$$v_d = \frac{a v_2}{e_d (1-a)}$$

Reemplazando el resultado en la restricción y cancelando valores se obtiene:

$$\frac{a v_2}{e_d (1-a)} + v_2 = e$$

$$\frac{a v_2}{(1-a)} + v_2 = v_2 \left(\frac{a}{(1-a)} + 1 \right) = e$$

$$v_2 = e (1-a)$$

$$v_d = \frac{a e}{e_d}$$

Por lo tanto, v_d es la demanda del agente del valor a analizar.

Oferta:

Para la determinación de la oferta se realiza un proceso de minimización de costos.

$$\text{Min } C = (e_t t + e_h h)$$

$$\text{Sujeta a una función de producción: } v_d = h^\alpha t^\beta ;$$

con retornos a escala constantes ($\alpha + \beta > 1$) de donde $\beta = 1 - \alpha$

C es el costo total que está dado por la suma de la habilidad y el tiempo a destinar, por su respectivo precio e_t y e_h . v_d es la cantidad que el ofertante realiza, la cual está sujeta a una función de producción determinada por la combinación de h y t , habilidad y tiempo, y los parámetros α, β que representan el peso de cada factor en la función de producción.

Siguiendo a Nicholson (2007), la expresión lagrangiana para la minimización es:

$$\mathcal{L} = e_t t + e_h h + \lambda(v_0 - v_i) = e_t t + e_h h + \lambda(v_0 - h^\alpha t^\beta)$$

Para minimizar se deriva \mathcal{L} respecto a cada factor de producción y se iguala a 0:

$$1. \frac{d\mathcal{L}}{dh} = e_h - \lambda(\alpha h^{\alpha-1} t^\beta) = 0; e_h = \lambda(\alpha h^{\alpha-1} t^\beta)$$

La derivada respecto a t:

$$2. \frac{d\mathcal{L}}{dt} = e_t - \lambda(\beta h^\alpha t^{\beta-1}) = 0; e_t = \lambda(\beta h^\alpha t^{\beta-1})$$

$$3. \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = v_d - h^\alpha t^\beta; v_d = h^\alpha t^\beta$$

Dividiendo la derivada 2 por la 1, se obtiene:

$$\frac{e_t}{e_h} = \frac{\lambda(\beta h^\alpha t^{\beta-1})}{\lambda(\alpha h^{\alpha-1} t^\beta)} = \frac{\beta h}{\alpha t}$$

$$h = \left(\frac{\alpha e_t}{\beta e_h}\right) t$$

$$t = \left(\frac{\beta e_h}{\alpha e_t}\right) h$$

Sustituyendo el valor de h en la función de producción, para luego despejar t y dejarlo en términos de v_d, e_h, e_t :

$$v_d = h^\alpha t^\beta = \left(\frac{\alpha e_t}{\beta e_h}\right)^\alpha t^{\alpha+\beta}$$

$$v_d \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha e_t^{-\alpha} e_h^\alpha = t^{\alpha+\beta}$$

$$t = v_d^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} e_t^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} e_h^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Realizando el mismo despeje con respecto a h , se obtiene:

$$h = v_d^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e_t^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e_h^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}}$$

Reemplazando lo obtenido en los costos totales:

$$C = (e_t t + e_h h)$$

$$C = \left(e_t \left(v_d^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} e_t^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} e_h^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right) + e_h \left(v_d^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e_t^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e_h^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} \right) \right)$$

$$C = \left(\begin{array}{l} \left(v_d^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} e_t^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e_h^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right) \\ + \left(v_d^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e_t^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e_h^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right) \end{array} \right)$$

$$C = \left(v_d^{\frac{1}{\alpha+\beta}} e_t^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e_h^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right) \left(\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right)$$

$$C = \left(v_d^{\frac{1}{\alpha+\beta}} e_t^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e_h^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right) \left(\frac{\alpha^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} + \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \beta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} \right)$$

$$C = v_d^{\frac{1}{\alpha+\beta}} e_t^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e_h^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} B$$

Donde $B = (\alpha + \beta) \beta^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$

Para la obtención de la curva de oferta, se derivan los costos totales para encontrar la curva de costos marginales y se igualan a el esfuerzo correspondiente (precio) (e_d) que define la cantidad que se ofrece considerando un “mercado” de valores que es competitivo.

Costos marginales $CMg = e_d$

$$\frac{dC}{dv_d} = \frac{1}{\alpha + \beta} v_d^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} e_t^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} e_h^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} (\alpha + \beta) \beta^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} = e_d$$

Despejando se obtiene la oferta del valor:

$$v_o = e_d^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \beta^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} e_t^{-\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} e_h^{-\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

Equilibrio

Para obtener el equilibrio del mercado en términos de precio (e_d^*) y cantidad (v_d^*) se iguala la oferta y la demanda:

$$v_d = v_o$$

$$e_d^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \beta^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} e_t^{-\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} e_h^{-\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} = \frac{a}{e_d}$$

$$e_d^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} * e_d = \frac{a e}{\beta^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} e_t^{-\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} e_h^{-\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}}$$

$$e_d^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} = a e \beta^{\frac{-\beta}{1-\alpha-\beta}} \alpha^{\frac{-\alpha}{1-\alpha-\beta}} e_t^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} e_h^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

$$e_d^* = a^{1-\alpha-\beta} e^{1-\alpha-\beta} \beta^{-\beta} \alpha^{-\alpha} e_t^{\beta} e_h^{\alpha}$$

$$v_d^* = \frac{a e}{a^{1-\alpha-\beta} e^{1-\alpha-\beta} \beta^{-\beta} \alpha^{-\alpha} e_t^{\beta} e_h^{\alpha}}$$

$$v_d^* = a^{\alpha+\beta} e^{\alpha+\beta} \beta^{\beta} \alpha^{\alpha} e_t^{-\beta} e_h^{-\alpha}$$