

**LA METACOGNICIÓN COMO ACTIVADOR DEL DESARROLLO
DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL APRENDIZAJE DE LA
NOCIÓN DE VARIABLE**

Yenny Rocío Niño Becerra

**Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de educación
Maestría en educación para la Innovación y las ciudadanías**

Bogotá, D.C. 2022

**LA METACOGNICIÓN COMO ACTIVADOR DEL DESARROLLO
DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL APRENDIZAJE DE LA
NOCIÓN DE VARIABLE**

Yenny Rocío Niño Becerra

**Trabajo de grado presentado para optar por el título de Magister en Educación
para la innovación y las ciudadanías**

Tutora del proyecto:

Lilián Parada Alfonso

Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Educación

Maestría en Educación para la innovación y las ciudadanías

**Línea de investigación: Aprendizaje y ambientes educativos innovadores
pensamiento, lenguaje, emoción y corporalidad.**

Bogotá, D.C. 2022

Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Educación
Maestría en Educación para la Innovación y las Ciudadanías

Rector: Padre Jorge Humberto Peláez. S.J.

Decano Académico: Félix Antonio Gómez Hernández

Director Posgrados: Ricardo Mauricio Delgado Salazar

Directora de Línea: Lilián Parada Alfonso

Tutora de Tesis: Lilián Parada Alfonso

Nota de advertencia

“La universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Sólo velará porque no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y porque las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vean en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia. ” Artículo 23, resolución No 14 el 6 de Julio de 1946, por la cual se reglamenta lo concerniente A Tesis Y Exámenes de grado en la Pontificia Universidad Javeriana.

Agradecimientos

A Dios por guiar mis pasos, por bendecirme cada día de mi vida y por acompañarme en este camino.

A mi familia por darme su amor y su tiempo. Por animarme y darme su apoyo incondicional

A mi tutora, la Doctora Lilián Parada por ayudarme a ser mejor cada día, por tener fe en mí, por orientarme con su conocimiento y sabiduría y por su apoyo en todo momento.

A las directivas y compañeros del Colegio San Pedro Claver de Bucaramanga por apoyarme en el logro de esta meta.

A los estudiantes que participaron en la investigación por su tiempo e interés

A mis padres y hermanos

A Nico

Tabla de contenido

Introducción	13
Justificación	14
Planteamiento del problema	18
Pregunta de investigación.....	20
Objetivos	20
<i>Objetivo general.....</i>	<i>20</i>
<i>Objetivos específicos.....</i>	<i>20</i>
Antecedentes	21
<i>Estudios que proponen una secuencia didáctica mediada por estrategias metacognitivas en el desarrollo del pensamiento variacional.....</i>	<i>30</i>
Marco teórico	36
<i>Lineamientos generales del currículo.....</i>	<i>36</i>
<i>Pensamiento variacional</i>	<i>37</i>
<i>Resolución de problemas matemáticos</i>	<i>42</i>
<i>Metacognición.....</i>	<i>44</i>
<i>Las estrategias cognitivas y metacognitivas.....</i>	<i>49</i>
<i>Conocimiento Metacognitivo</i>	<i>51</i>
<i>Control metacognitivo</i>	<i>54</i>
<i>La Metacognición en la enseñanza de las matemáticas</i>	<i>57</i>
Metodología	59
<i>Enfoque de estudio y tipo de investigación.....</i>	<i>59</i>
<i>Participantes de la investigación.....</i>	<i>59</i>
Participante 1	60
Participante 2	60
Participante 3	60
Etapas de investigación	61
.....	61
<i>Etapa 1: Revisión de antecedentes y marco teórico</i>	<i>62</i>
Categoría 1. Estudios que caracterizan los procesos metacognitivos de estudiantes en la resolución de situaciones matemáticas de tipo variacional.....	62

Categoría 2: Estudios que documentan la influencia de las estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas.	62
Categoría 3: Estudios que proponen una secuencia didáctica mediada por estrategias metacognitivas en el desarrollo del pensamiento variacional.	63
<i>Etapa 2: Diseño de la intervención</i>	64
Diseño de preguntas metacognitivas:.....	64
Diseño de la secuencia didáctica.....	64
Aplicación de la secuencia didáctica en un sujeto de prueba y ajuste	66
<i>Etapa 3: Aplicación de instrumento</i>	66
Clasificación de evidencias.....	67
<i>Etapa 4: Análisis de resultados</i>	67
Resultados	69
<i>Resultados participante 1</i>	69
<i>Resultados Participante 2</i>	78
<i>Resultados Participante 3</i>	87
Discusión de resultados	99
Conclusiones	101
Referencias	105
Anexos	108

Índice de Tablas

Tabla 1	42
Tabla 2	54
Tabla 3	68
Tabla 4	69
Tabla 6	72
Tabla 7	72
Tabla 8	77
Tabla 9	78
Tabla 12	81
Tabla 13	86
Tabla 14	87
Tabla 15	89
Tabla 18	94

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1	61
----------------------------	----

Resumen

La metacognición se relaciona con el aprendizaje regulado y las estrategias que están involucradas en su desarrollo (Mateos 2001). El fortalecimiento de estas estrategias favorece el aprendizaje significativo y la habilidad de aprender a aprender. Es así que se torna fundamental la reflexión sobre la práctica docente y su incidencia en el aprendizaje significativo. Considerando esto, la presente investigación se basa en la pregunta: ¿De qué manera intervienen las estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos para la comprensión de la noción de variable tres estudiantes que cursan octavo grado identificados en un nivel académico alto y medio? La investigación está guiada por el paradigma cualitativo e interpretativo y corresponde a un estudio de caso. La elección del enfoque dio cabida al diseño de la secuencia didáctica que se construyó tomando como base los indicadores de Robson. (2016) y traducción propia de Díaz, L (2018). La aplicación de la secuencia didáctica se realizó en tres estudiantes de octavo grado. Se logró concluir en coherencia con lo propuesto por Mateos (2001), Robson (2016) que el empleo de estrategias metacognitivas surge con mayor contundencia ante situaciones de mayor grado de dificultad y que se evidencia el uso en mayor proporción en las estrategias de planeación y evaluación, y con menos frecuencia en monitoreo y control.

El planteamiento de situaciones problema requiere de un proceso reflexivo en torno a cuáles conceptos están involucrados, cómo plantear la pregunta de forma que sea significativa para el estudiante, cómo acercarla a su contexto y cómo favorecer el desarrollo de estrategias metacognitivas. Las situaciones implican una reflexión en torno a las estrategias utilizadas para su solución y para reconocer el concepto aplicado.

El desarrollo de situaciones problemáticas configura el detonante de la actividad cognitiva y metacognitiva, ya que involucra el funcionamiento del ensamblaje cognitivo y las estrategias desarrolladas con anterioridad. Por otro lado, una pregunta sugestiva genera inquietud, curiosidad y moviliza el pensamiento. Las situaciones no convencionales se salen de un modelo de pensamiento mecánico. Este aspecto favorece el desarrollo de la reflexión metacognitiva.

Es importante que el estudiante salga de su zona de confort en la que repite procesos y algoritmos y se enfrente a preguntas desestabilizadoras que le permitan relacionar conceptos estudiados en contextos nuevos. Es indispensable incluir el manejo de situaciones en las secuencias didácticas en el salón.

El empleo de estrategias metacognitivas surge con mayor contundencia ante situaciones de mayor grado de dificultad y esto les permite a los estudiantes abordar situaciones de una manera significativa.

Estos resultados convocan a los docentes a que los estudiantes puedan tomarse un tiempo conveniente en descifrar los retos propuestos y expresen preguntas y rutas de resolución explícitas que le ayuden a un eficaz desarrollo de los problemas propuestos.

La secuencia didáctica planteada es una muestra de la forma como el maestro puede favorecer en el estudiante el desarrollo de habilidades metacognitivas. Las preguntas oportunas, los retos sugestivos y la mediación en el momento indicado pueden configurar una manera diferente de abordar la matemática. Es importante la aplicación de los conceptos en situaciones de diferentes contextos. Así como la integración con otras áreas. El papel del maestro en el diseño e implementación de estrategias que les puedan favorecer desde cada mirada a fin de que puedan desarrollar estrategias metacognitivas que le permitan aprender a aprender y adaptarse a las exigencias de la sociedad.

Abstract

Metacognition is related to regulated learning and the strategies involved in its development (Mateos 2001). The strengthening of these strategies favors meaningful learning and the ability to learn to learn. Thus, it is essential to reflect on teaching practice and its impact on meaningful learning. Considering this, the present research is based on the question: In what way do metacognitive strategies intervene in the resolution of mathematical problems for the understanding of the notion of variable in three eighth grade students identified in a high and medium academic level? The research is guided by the qualitative and interpretative paradigm and corresponds to a case study. The choice of the approach gave room for the design of the didactic sequence that was built based on the indicators of Robson (2016) and own translation of Diaz, L (2018). The application of the didactic sequence was carried out in three eighth grade students. It was possible to conclude that the use of metacognitive strategies emerges with greater forcefulness in situations of greater degree of difficulty. This allows students to approach situations in a meaningful way and to mobilize their thinking.

The posing of problem situations requires a reflective process about which concepts are involved, how to pose the question in a way that is meaningful to the student, how to bring it closer to its context and how to favor the development of metacognitive strategies. The situations imply a reflection on the strategies used to solve them and to recognize the concept applied.

The development of problem situations configures the trigger of cognitive and metacognitive activity, since it involves the functioning of the cognitive assembly and the strategies developed previously. On the other hand, a suggestive question generates restlessness, curiosity and mobilizes thought. Unconventional situations break out of a mechanical thinking model. This aspect favors creativity and the development of metacognitive reflection. It is important that the student leaves his comfort zone in which he repeats processes and algorithms and faces destabilizing questions that allow him to relate concepts studied in new contexts. It is essential to include the management of situations in the didactic sequences in the classroom.

The use of metacognitive strategies emerges more forcefully in situations of greater difficulty and this allows students to approach situations in a meaningful way.

These results call for teachers to allow students to take a convenient time in deciphering the proposed challenges and to express explicit questions and resolution routes that help them to effectively develop the proposed problems.

The didactic sequence proposed is a sample of the way in which the teacher can favor the development of metacognitive skills in the student. Timely questions, suggestive challenges and mediation at the right time can configure a different way of approaching mathematics. The application of concepts in situations of different contexts is important. As well as integration with other areas.

. The teacher's role in the design and implementation of strategies that can favor them from every point of view so that they can develop metacognitive strategies that allow them to learn to learn and adapt to the demands of society.

Introducción

La presente investigación nació de la búsqueda de herramientas para propiciar en los estudiantes el aprendizaje significativo de la matemática. Concretamente el aprendizaje del álgebra cuyo desarrollo está ligado al pensamiento variacional. La búsqueda de respuestas marcó el camino para reflexionar en la importancia de “aprender a aprender” y con ello profundizar en la actividad metacognitiva y sus implicaciones en el aprendizaje.

Tal como afirman Gravini e Iriarte (2003) en Mato-Vázquez et al. (2017) es posible aprender y enseñar el proceso metacognitivo según la edad, ligada al desarrollo. Esto implica un proceso reflexivo por parte de los maestros a fin de orientar los esfuerzos estratégicos y las propuestas de secuencias didácticas hacia el enriquecimiento de las habilidades metacognitivas de los estudiantes.

En torno a esta necesidad, la responsabilidad de los maestros en el aula de clase implica profundizar en la forma cómo aprende el estudiante y en la forma de favorecer su actividad metacognitiva. La matemática ha empleado la resolución de problemas como pretexto para favorecer el anclaje cognitivo que el estudiante requiere.

Por esta razón se propone una secuencia didáctica de cuatro fases. Los retos planteados están orientados de manera que aumenta el grado de dificultad a medida que avanza la secuencia. Las situaciones allí están planteadas con el fin de poder caracterizar en los participantes las estrategias metacognitivas que emplean para solucionarlas. Adicionalmente, el análisis sobre los hallazgos permitirá proponer herramientas y orientaciones para los maestros. Esto con el fin de aportar referencias didácticas a las experiencias de los docentes que orientan la disciplina matemática.

Justificación

La didáctica de las matemáticas ha sido un desafío continuo para profesores como para estudiantes y, también, para las diversas autoridades educativas. Aún resulta muy común escuchar que dicha asignatura es un dolor de cabeza para quien la debe enseñar. A lo anterior, se suma el hecho de que el pensamiento algebraico implica mayor abstracción y, por tanto, mayor maduración de los procesos de pensamiento. Así, el carácter abstracto del lenguaje matemático ha sido tomado como excusa para justificar los resultados deficientes en su enseñanza y aprendizaje. Frente a estas reticencias, Artigue (2004) exhorta a las instituciones a que la enseñanza de la matemática haga frente a problemas nuevos, es decir, a que vaya más allá de contar. Y en ese sentido, Domenech (2006) resalta la carencia de una cultura matemática que se enfoque en descifrar y analizar la información de manera crítica. Por eso, resolver problemas, analizar, representar, argumentar o desarrollar habilidades que van por encima de lo memorístico, implica desarrollar métodos. Al respecto, Kilpatrick, et al (1998) resaltan el estudio de la actitud y las creencias de los estudiantes hacia las matemáticas como foco de especial importancia para los investigadores educativos. Los autores destacan una tendencia a darle mayor atención a los problemas matemáticos y a su aplicación en problemas de la vida real.

Como respuesta a lo anterior, esta investigación muestra que la educación matemática es viable. Más aún, los hallazgos de este estudio estimulan a los maestros a proponer estrategias para que sus estudiantes accedan a la comprensión del contexto matemático, y para que los conceptos que se abordan a diario en las aulas, les resulten significativos. Ahora bien, antes de proponer estrategias, los docentes se enfrentan a reflexionar cómo estas deberían transformar las estructuras cognitivas de manera que movilicen el pensamiento y la manera en que los estudiantes abordan y solucionan situaciones problemáticas. De acuerdo con Silva (2006), el concepto de metacognición enmarca la indagación sobre cómo las personas piensan y controlan sus propios procesos de pensamiento. Esta sola idea deja clara la relevancia de la metacognición en el aprendizaje; sin embargo, el concepto ha sido discutido tan ampliamente en estudios que parece haberse relativizado. Con frecuencia, se ha asociado con el conocimiento que una persona tiene sobre sus propias elaboraciones mentales mientras resuelve una situación particular, en algún proceso de aprendizaje; aunque también, la metacognición ha sido relacionada con la regulación de procesos cognitivos tales como planeación, control y ejecución de tareas. Con todo esto, cada vez cobra mayor importancia en el aula -como en la vida- crear espacios y estrategias que favorezcan en el estudiante su propia reflexión cognitiva Lesh y Zawojewski (2007) en Mato Vásquez et al (2017) resaltan la necesidad de que, sumado al contenido, el estudiante aprenda cómo aprender la disciplina matemática. Al respecto, Tamayo (2006) en Mato-Vásquez et al (2017) destacan la función de los maestros como diseñadores y adaptadores del conocimiento a las actividades en el aula. Cuando esto sea común, los estudiantes contarán con docentes que les enseñen a desarrollar autonomía y autorregulación. A partir de este tipo de observaciones se caracterizaron las estrategias

metacognitivas de los estudiantes que participaron en este estudio de caso basado, a su vez, en una secuencia diseñada para tal fin.

Dado este panorama, surgió la cuestión sobre ¿cómo tres estudiantes que cursan octavo grado con niveles académicos alto y medio, asumen estrategias metacognitivas para comprender la noción de variable y cómo estas estrategias intervienen en el desarrollo de su pensamiento matemático? Así pues, esta investigación se ocupó de caracterizar las estrategias metacognitivas que tres estudiantes pusieron en funcionamiento cuando se les pidió solucionar una secuencia didáctica que permitía ir construyendo, paso a paso, el concepto de variable. La secuencia iniciaba en el contexto del estudiante y lo llevaba de la fase concreta a la abstracta. Por otra parte, le da relevancia a la verbalización del conocimiento en el camino de la maduración del pensamiento metacognitivo.

Del análisis de su desempeño, provienen las estrategias que propone este estudio para que los docentes ayuden a los estudiantes a movilizar su reflexión metacognitiva en la solución de situaciones problemáticas.

En ese sentido, la caracterización de estrategias metacognitivas beneficia a los profesores interesados en movilizar el pensamiento de sus estudiantes y favorece a aquellos que buscan una mediación eficaz para la maduración del pensamiento matemático en sus jóvenes.

Por otro lado, Artigue (2004) señala que, durante mucho tiempo, la didáctica de la matemática ha interpretado al estudiante como alguien que recibe conocimientos y no como protagonista de su aprendizaje; por eso, se hace ineludible ayudar a los estudiantes a que aprendan a aprender. La autora hace hincapié en que las situaciones matemáticas ofrecen mayores oportunidades de interacción entre el sujeto y la matemática. Además, la sociedad

de la información y del conocimiento exige a los estudiantes desarrollar habilidades para abordar el aprendizaje por sí mismos y de una forma significativa, como una herramienta de fortalecimiento intelectual que les ayude a adaptarse a las exigencias del mundo laboral y profesional. Más aún, para lograr mayor independencia intelectual y moverse en una sociedad cambiante.

En cuanto a la escuela como institución social, se espera que esta ayude a los niños a crear condiciones comunitarias para desarrollar sus capacidades de vivir en sociedad. Es entonces, cuando el individuo se prepara para afrontar las etapas de la vida; incluso, se espera que la escuela le prepare para su futuro productivo. La expectativa es que, con la preparación, el individuo avance gradualmente desde la etapa doméstica hasta la vivencia de las experiencias que le ofrece la escuela, para asegurar continuidad en su desarrollo. Por consiguiente, para que la educación escolar tenga éxito debe mantener como prioridad la vida en comunidad.

Todavía cabe destacar el carácter fundamental que se le ha otorgado a la matemática. Kilpatrick (1998) resalta que históricamente la matemática se ha etiquetado como un aprendizaje difícil, pero sin dejar de ser importante. Así, por ejemplo, continúa siendo un filtro para ingresar a la educación superior, la cual tiende a poner las matemáticas aplicadas en el centro.

En este punto, cabe reconocer la distancia que existe entre lo propuesto y aquello que los estudiantes aprenden. Al respecto, Robitaille et al (1992) en Kilpatrick (1998) mencionan tres clases de currículo: el propuesto, que es trabajado por los profesores en el aula y el currículo aprendido que representa la realidad de lo aprendido. Esta distancia implica una seria reflexión sobre la mediación y las secuencias didácticas que buscan lograr un aprendizaje más sólido y significativo. Se quiera o no en el aula de clase, diariamente, con cada estrategia de trabajo

propuesta se pone en funcionamiento el desarrollo de las estructuras cognitivas del estudiante. Pero ¿cómo encauzarlas de forma que se favorezca de forma significativa su habilidad de aprender a aprender?

Planteamiento del problema

En el ensayo Metacognición un camino para aprender a aprender, Osses y Jaramillo (2008) resaltan la necesidad de ayudar a jóvenes y adolescentes para que mejoren su potencial “aprendiendo a aprender “y “aprendiendo a pensar”. Esta habilidad debiera trascender más allá de las aulas y favorecer la solución de situaciones en la vida cotidiana [...] En otras palabras, los autores proponen lograr que los estudiantes sean capaces de autodirigir su aprendizaje y transferirlo a otros campos de la vida (Osses y Jaramillo, 2008). Pese a este tipo de propuestas, en muchas instituciones se puede evidenciar que buena parte de los estudiantes de octavo grado muestran dificultades al emplear el pensamiento variacional y el razonamiento lógico en la solución de situaciones matemáticas.

En el artículo Uso de la variable, sentido simbólico y metacognición: una propuesta didáctica para el aprendizaje del álgebra elemental, Marino e Isla (2018) mencionan la importancia de generar en los estudiantes un proceso de reflexión metacognitiva. Este aprendizaje se hace visible de mayor forma en la interiorización de la noción de variable, dado que su apropiación requiere abordar un proceso de reflexión frente a sus diferentes usos y sus implicaciones. Lo anterior con base en la premisa de que el aprendizaje del álgebra se relaciona con la noción de variable de forma directa.

Para ampliar este punto, se observan los resultados de la prueba estandarizada Habilmind, aplicada en agosto de 2020 a 125 estudiantes de octavo grado del Colegio San Pedro Claver, en Bucaramanga. Esta es una prueba internacional contratada por intermedio de Santillana. Hace parte del contrato con esta entidad por la adquisición de Sistema Uno Internacional. En sus resultados se aprecia que el 57.7% de los estudiantes presenta un desarrollo por debajo de lo esperado al utilizar conexiones entre objetos matemáticos y en habilidades del razonamiento para la solución de situaciones planteadas en el área. El 57.7% de los estudiantes presenta un desarrollo por debajo de lo esperado al utilizar conexiones entre objetos matemáticos y en habilidades del razonamiento para la solución de situaciones planteadas en el área. Según Flavell (1976) en (Osses et al. 2008), la metacognición es una referencia que las personas construyen sobre sus propios procesos y productos cognitivos; y lo más destacable es que estos procesos serán la base que configure su desarrollo intelectual. En otras palabras, la habilidad de aprender a aprender será utilizada a lo largo de toda la vida. En consecuencia, este proceso es susceptible de ser planificado, previniendo obstáculos y corrigiendo acciones y pensamientos durante el transcurso del mismo (Brown, 1987). De esta reflexión, surge la inquietud por investigar acerca de la metacognición; sobre todo, si se considera que en el transcurso de la vida las habilidades para aprender a aprender y para regular los propios procesos cognitivos son fundamentales en cualquier actividad cognitiva. A partir de estas observaciones, se formula la siguiente pregunta de investigación.

Pregunta de investigación

¿De qué manera intervienen las estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos para la comprensión de la noción de variable de tres estudiantes que cursan octavo grado identificados en un nivel académico alto y medio?

Objetivos

Objetivo general

Caracterizar las estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos para la comprensión de la noción de variable de tres estudiantes que cursan octavo grado identificados en un nivel académico alto y medio.

Objetivos específicos

Describir las estrategias metacognitivas que intervienen en la resolución de problemas matemáticos para la comprensión de la noción de variable, en tres estudiantes de octavo grado, de nivel académico alto y medio.

Diseñar una secuencia didáctica que favorezca el desarrollo de los procesos metacognitivos en el marco de la solución de situaciones matemáticas relacionadas con la comprensión de la noción de variable.

Formular sugerencias pedagógicas, de acuerdo con el análisis de resultados, con el fin de aportar referencias didácticas a las experiencias de los docentes que orientan la disciplina matemática.

Antecedentes

La búsqueda de antecedentes se llevó a cabo mediante la revisión de artículos de investigación en diferentes índices como Scielo, Google académico y Redalyc.org (Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal). Además, se incluyeron fuentes indexadas por Dialnet y World Wide; esto, con el fin de abarcar publicaciones académicas nacionales e internacionales. Por otro lado, se exploró el repositorio de la Pontificia Universidad Javeriana, así como los de otras universidades de Colombia.

De los hallazgos se procedió a analizar los aportes de los estudios y el estado actual del tema, los antecedentes seleccionados se organizaron en tres categorías que emergieron de los objetivos y de la pregunta de investigación. Dicho esto, en primer lugar, se presentan los estudios que documentan la influencia de las estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas. En segundo lugar, los estudios que caracterizan los procesos metacognitivos de estudiantes en la resolución de situaciones matemáticas de tipo variacional. Y finalmente, se abordan los estudios que proponen una secuencia didáctica mediada por estrategias metacognitivas en el desarrollo del pensamiento variacional.

Estudios que caracterizan los procesos metacognitivos de estudiantes en la resolución de situaciones matemáticas de tipo variacional

Este apartado inicia con la investigación de Pulido (2014) titulada: Procesos metacognitivos que llevan a cabo estudiantes de grado noveno con desempeños superior y bajo del colegio Agustín Fernández I.E.D durante la resolución de problemas matemáticos. Este trabajo de maestría pone de manifiesto los problemas que niños, niñas y jóvenes enfrentan al solucionar situaciones matemáticas. Como fundamento, la autora analiza algunos resultados en las pruebas nacionales estandarizadas del año 2013, y los compara:

para ello, contrasta el porcentaje de estudiantes que obtuvieron resultado Superior (36%) frente al porcentaje que obtuvo resultado Bajo (35.7%). Conforme a esta información, la autora se propuso “caracterizar los procesos metacognitivos que llevan a cabo estudiantes de grado noveno con desempeño superior y bajo en el área de matemáticas, en dicha institución, cuando resuelven problemas matemáticos” (p.37). Además, el estudio aporta una revisión bibliográfica sobre dos ejes principales: la metacognición y la resolución de problemas matemáticos. En ella, destaca autores cercanos al estudio de la metacognición como Mateos (2001). En cuanto a la resolución de problemas, incluye a Poyla (1981), Puig (1996), Rodríguez (2005), Pifarré y Sanuy (1998), Montague (2010) y Schoenfield (citado en Hernández & Socas,1994). En cuanto a lo metodológico, el estudio de Pulido fue cualitativo de tipo descriptivo y en él estableció tres categorías que permitieron diseñar instrumentos de observación y análisis: una entrevista semiestructurada, una escala de Likert para evaluación cognitiva, tres problemas matemáticos del contexto de los sistemas numérico y variacional. Y en cuanto a los resultados, los dos grupos observados coincidieron en que el proceso de evaluación sucedió de manera autónoma:

[...] los estudiantes de desempeño superior utilizaron su propio conocimiento de forma estratégica para solucionar la tarea asignada, [...] lo que les permitió planificar, regular y controlar su ejecución, apoyándose principalmente en dos elementos metacognitivos, el monitoreo de la comprensión y la interacción constante con las demandas de la tarea; mientras que los alumnos del desempeño bajo, aunque en ocasiones permitieron entrever algunos conocimientos y procesos de regulación cognitiva, no los utilizaron a favor de la resolución de la tarea, porque además no lograron comprenderla. (Pulido, 2014).

En suma, este trabajo aporta a la presente investigación una consideración acerca de la relevancia que tiene el pensamiento en voz alta al solucionar el reto planteado. En la secuencia didáctica de este estudio, se incluyeron elementos que permitían al estudiante verbalizar su pensamiento, como fase inicial para desencadenar y favorecer su proceso metacognitivo. Por otro lado, Pulido (2014) planteó en sus resultados que, en la etapa de planeación, los estudiantes de desempeño alto y bajo leen varias veces el problema para hacerse una idea global y tratan de comprender bien el enunciado. Además, enfatizó en que cada estudiante hizo un plan de trabajo con base en las incógnitas del problema.

Por otra parte, como el estudio consideró -y caracterizó- diferentes niveles de desempeño en los procesos metacognitivos, sugiere estimar varios grados de profundidad de metacognición. Adicionalmente, Pulido analizó información sobre el conocimiento que los estudiantes tienen para solucionar problemas matemáticos. Con respecto al conocimiento declarativo, en la variable persona, los resultados del estudio muestran que las personas del grupo de desempeño superior pueden distinguir entre aquello que comprenden y aquello que les representa dificultad. Y esto concuerda con lo que los estudiantes manifestaron en la entrevista: “Expresan que su calificación depende de la comprensión que logran de las situaciones que se les plantean” (Pulido 2014). En este nivel, los estudiantes pueden emitir juicios sobre cómo ejecutan la resolución de problemas con base en su comprensión.

De otra parte, los estudiantes con desempeño bajo logran identificar dificultades operativas, pero no las relacionan con las dificultades que tienen para comprender la situación. Dan datos arbitrarios cuando desconocen algún concepto matemático: “Reconocen que su principal fortaleza en la resolución de problemas se relaciona con la

ejecución de procedimientos aditivos, lo cual es coherente con lo observado durante la resolución de los tres problemas” (Pulido 2014).

Con relación al conocimiento declarativo en la variable tarea y estrategias, los estudiantes con desempeño superior “conocen y emplean estrategias de tipo operativo basadas en las cuatro operaciones básicas. Utilizan el razonamiento matemático como estrategia para establecer relaciones de variación” (Pulido, 2014, p.98). Este actuar, se opone al desempeño de los estudiantes de nivel bajo, en cuyo desempeño no se evidencia el empleo de estrategias matemáticas al momento de establecer relaciones de variación. Finalmente, Pulido (2014) concluye que los estudiantes de ambos grupos de desempeño reconocieron dificultades relacionadas con el dominio de ecuaciones y con la comprensión de algunos problemas (p.100).

En este punto, es necesario mencionar el Caso Víctor: dificultades metacognitivas en la resolución de problemas. En este estudio, Gusmao et. al (2014) observaron el papel de la metacognición en las prácticas de resolución de problemas. Para ello, le aplicaron un cuestionario de entrada sobre habilidades metacognitivas a un estudiante de 15 años. Los investigadores tomaron como base la prueba estandarizada del Instituto de Evaluación y Asesoramiento educativo (IDA). Esta prueba incluye problemas no rutinarios con el fin de que el estudiante no cuente con habilidades estandarizadas para resolverlo. Por tanto, los problemas incluidos generan en el estudiante un desequilibrio que lo lleva a utilizar pensamientos y acciones conscientes. Los resultados posibilitaron comprobar la hipótesis, y permitieron a los autores concluir que: para el caso de Víctor, en particular, el error parece no deberse a fallos en la configuración cognitiva del estudiante, puesto que sólo tiene dificultades con el componente argumentativo de la configuración epistémica. Al parecer, su respuesta errónea se debe, básicamente, a su configuración metacognitiva. Gusmao et. al

(2014). Los resultados también mencionan que las competencias metacognitivas permiten la evolución de las competencias cognitivas y permiten su evolución.

Estudios que documentan la influencia de las estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas.

Para ampliar la influencia de las estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas, se consideró la tesis de Moreno y Daza (2014) la cual se centró en la “incidencia de estrategias metacognitivas para la resolución de problemas en el área de matemáticas” Los investigadores se enfocaron en un análisis cualitativo para el cual emplearon una prueba de entrada que les permitió recoger la información; y también realizaron una prueba de salida. Por otro lado, Moreno y Daza (2014) emplearon una serie de pruebas estandarizadas que permitieron determinar la influencia de las diferentes estrategias metacognitivas en la habilidad de los estudiantes al resolver problemas matemáticos.

Así, se pusieron en la tarea de determinar la incidencia de diferentes estrategias metacognitivas en tres estudiantes de grado 7° del Gimnasio Los Portales de Bogotá que se enfrentaron a resolver problemas en el área de matemáticas. En este punto, se vio el interés por caracterizar los procesos metacognitivos de los estudiantes mientras resolvían los problemas, ya que cada estudiante configuraba un desarrollo mental particular. Estos datos constituyen un valioso punto de partida para proponer una secuencia didáctica que involucra ejercicios metacognitivos que, luego, pueden ayudar a evaluar el progreso de los estudiantes.

Los autores concluyeron que la incidencia de las estrategias metacognitivas es notable cuando identifican el problema a resolver. Por tanto, los estudiantes mejoraron las habilidades de resolución de problemas en aspectos como la predicción, la conciencia de la

estrategia, la misma identificación del problema, la planificación de las estrategias a emplear y, por último, la autorregulación y la supervisión. Todo ello conduce a que el estudiante vaya más allá de la repetición y la mecanización, y asuma la construcción de su conocimiento. Se pudo identificar que la planeación es la estrategia metacognitiva más empleada por los estudiantes para solucionar problemas, debido a que ésta se ve reflejada de forma directa en el control y la evaluación de la tarea. Por otro lado, para los autores:

Se resalta la importancia de utilizar el autocontrol y la supervisión de los procesos de resolución, pues esto permite que el estudiante esté consciente de que el proceso emprendido corresponde con la meta y si no es el caso, replantee la estrategia de resolución; a su vez esto genera que se cuente con más herramientas al enfrentar un reto nuevo o conocido que demande actividad cognitiva y metacognitiva lo cual dará mayor autonomía y capacidad de toma de decisiones al sujeto. Moreno y Daza (2014)

La segunda referencia de esta misma categoría corresponde al estudio de Martínez et. al (1996) quienes analizaron estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. Allí, los autores destacaron la importancia de la resolución verbal de problemas, porque brinda un momento en el cual es posible realizar la regulación metacognitiva. El estudio propone “sensibilizar a docentes de educación secundaria respecto al uso de dicha resolución (verbal) como recurso exploratorio de las estrategias metacognitivas que el estudiante pone en funcionamiento”. (Martínez et al., 1996). Para tal fin, los autores presentan un amplio marco teórico que resalta la resolución de problemas como recurso didáctico, y que orienta la atención de los estudiantes hacia las representaciones que ellos

mismos configuran como parte de su proceso de solución. De este modo, el docente obra como facilitador del proceso.

Los investigadores destacan las ventajas de la resolución verbal de problemas porque ésta implica el desarrollo de capacidades como el análisis y la síntesis, unidas a la argumentación además de la reflexión, entre otras habilidades. En consecuencia, la resolución de problemas se configura como herramienta efectiva para develar la forma en que el estudiante aprende y estructura su conocimiento. A la vez, valoran de forma teórica la metacognición desde dos orillas: la del conocimiento metacognitivo y la del control metacognitivo.

En este punto, la investigación de Martínez et al. (1996) una base teórica, a la vez que advierte sobre las principales dificultades que pueden experimentar los estudiantes al conceptualizar la variable. Al mismo tiempo, permite hacer un análisis a partir de la información estadística que reunieron; en un diagrama de barras presentaron los registros de representación que los estudiantes emplearon en la resolución de problemas. De allí, se concluyó que hay una clara dependencia entre el número de registros y el tipo de problema a resolver. Además, la investigación evidenció que “al relacionar la representación con el enunciado, la mayoría de los estudiantes no muestran comprensión del problema tipo B al presentar los resultados sin conocimiento matemático asociado o estrategia vinculada” (Marino et al 2018, p.47). Esto último sugiere que los estudiantes no utilizan de forma clara las representaciones que hacen frente a una situación.

Finalmente, Martínez et al. (1996) concluyeron que la resolución verbal de problemas es de gran relevancia en el aprendizaje de las matemáticas, porque facilita al maestro verificar el nivel de aplicación de conceptos que logra el estudiante, y a la vez, permite analizar las estrategias metacognitivas que cada cual emplea. Al revisar las

estrategias metacognitivas utilizadas por los estudiantes, la investigación destaca la relacionada con la planeación, pues los estudiantes identificaron la intención correcta para la pregunta de tipo geométrico. Sumado a esto, desde el punto de vista de la evaluación, la mayoría de los estudiantes relacionaron la pregunta con la respuesta, pero no lograron justificar la respuesta. Por lo tanto, esta respuesta puede configurarse como una dificultad para reconocer si la respuesta dada es coherente con la intención de la pregunta.

De otra parte, en esta segunda categoría se incluyó la investigación de Chamorro y Vecino (2003) en Matto et al. (2017) en la cual los autores muestran las implicaciones concretas de emplear estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas. Uno de los principales objetivos de enseñar matemáticas es lograr que los estudiantes desarrollen las habilidades necesarias para resolver problemas de la vida diaria. Al respecto, los investigadores recalcaron que este interés educativo es reciente en las escuelas pues, por lo general, los problemas se ubicaban al final de la secuencia didáctica y, aun así, no representaban un sentido integrador en el proceso de enseñanza. Por mucho tiempo, la resolución de problemas se añadió como un pretexto para el ejercicio de algoritmos. De un tiempo para acá, esta perspectiva se está replanteando en la enseñanza.

Con relación a este punto, Chamorro y Vecino (2003) en Matto et al. (2017) confirman que “resolver problemas enseña a matematizar”. Esto quiere decir que resolver problemas aumenta la confianza de los estudiantes, los vuelve más perseverantes y creativos lo cual, al mismo tiempo constituye uno de los objetivos básicos para la formación de los estudiantes (p.94).

En ese sentido, los autores reiteran la trascendencia del manejo de situaciones problemáticas en la enseñanza de las matemáticas. Ahora bien, respecto a este punto, los investigadores advierten que la resolución de problemas no es tarea fácil porque implica

desarrollar habilidades genéricas, lo cual depende del análisis que el estudiante logre hacer. Y sobre este aspecto, Troncoso (2013) en Matto-Vásquez et al. (2005) argumentan que quien aprende es quien debiera asumir un proceso consciente y reflexivo frente a su propio conocimiento, del cual son protagonistas. En particular, esta idea reitera que quien aprende debe estar en capacidad de elaborar su propio concepto de variable y de reconocer sus usos.

Con base en las reflexiones anteriores, se considera más que adecuado incluir en el diseño de la secuencia didáctica, situaciones que partan de contextos reales, a fin de que esta forma de pensamiento (matemático) adquiriera significado en la cotidianidad. Aquí, cabe la idea de Martín (2003), citado en Matto Vásquez (2005), quien reconoce que la movilidad de las estructuras mentales se da en el momento de enfrentarse al reto de resolver un problema, y para esto, el estudiante necesitará manejar algunos preconceptos.

Con respecto a la metodología de esta investigación, los autores emplearon el procedimiento de acuerdo con lo planteado por Mateos (2001). En ella involucraron la pregunta como aspecto fundamental para la implementación de las estrategias metacognitivas. En una primera etapa, los investigadores exploraron la capacidad de atención de los estudiantes al solicitarles elaborar una representación mental del problema. En este punto, les pidieron manifestar cómo entendían la pregunta planteada, para que así pudieran buscar información precisa. De acuerdo con la investigación, en esta secuencia es fundamental el acompañamiento a los estudiantes para orientarlos. Aquí falta agregar que parte del trabajo propuesto era que los estudiantes llegaran a un consenso para resolver el taller de manera colaborativa. Luego de un análisis cuantitativo, se aplicó un *pre test* y un *post test* para registrar los resultados.

Para concluir la revisión de esta fuente, los autores mencionan que “hay un destacable progreso en el aprendizaje de los estudiantes en todos los centros Matto-Vásquez et al. (2017).

Respecto a la comprensión de la pregunta, según los autores, los estudiantes muestran incoherencias que se reflejan al intentar explicar su elaboración mental sobre la intención de la pregunta. Por tal razón, necesitan cierto control sobre su propia comprensión para detectar los errores y explorar los saberes previos. Mediante la intervención en el aula, se pretendió que al finalizar el programa los jóvenes llegaran a regular el aprendizaje y examinar sus propios procesos de pensamiento en el desarrollo de la matemática (Matto-Vásquez et al., 2017).

Estudios que proponen una secuencia didáctica mediada por estrategias metacognitivas en el desarrollo del pensamiento variacional.

Para ejemplificar la tercera categoría, relacionada con los estudios que proponen una secuencia didáctica mediada por estrategias metacognitivas para el desarrollo del pensamiento variacional, se incluyó el estudio de Vásquez, Espiñeira y López (2017). Los autores se interesaron en cómo el uso de estrategias metacognitivas impacta la enseñanza de las matemáticas. El propósito del trabajo fue analizar qué implicaciones tendría incorporar estrategias metacognitivas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de sexto grado. Para lograrlo, los investigadores realizaron una práctica guiada, con trabajo cooperativo y trabajo individual. Más adelante, se realizó una prueba de entrada y otra de referencia, a fin de revisar el impacto de los procesos metacognitivos y se obtuvieron resultados positivos: [...] la utilización de estrategias metacognitivas juega un papel importante en la formación matemática, ya que permite que el estudiante controle la

comprensión, detecte errores, examine los saberes previos y explore sus propios procesos de pensamiento (Vásquez, Espiñeira y López, 2017, p.91).

La investigación resalta que tradicionalmente la enseñanza de la matemática se concentra en el desarrollo de algoritmos, y que éstos pueden resultar descontextualizados o carentes de sentido para los estudiantes. Citando a Osses y Jaramillo (2008) los autores de la investigación explican que el aprendizaje parte del interés del estudiante, ya que es él quien decide aprender y retomar los conocimientos que ha incorporado con anterioridad en su estructura mental para darle sentido a la situación planteada y buscar una solución. Este trabajo de investigación ratifica la importancia de reconocer el contexto del estudiante y la aplicabilidad de los conceptos trabajados. De esta forma, lograr que el contenido cobre sentido para él y se logre una enseñanza significativa. Adicionalmente, resalta el papel protagónico del estudiante en su propio conocimiento y destaca la resolución de problemas como elemento nuclear en el proceso de enseñanza aprendizaje.

En este punto, se puede observar un amplio campo de investigación sobre metacognición, al mismo tiempo que los avances significativos señalan la necesidad de dar continuidad a lo ya construido. En síntesis, la evidencia encontrada sobre los efectos positivos que atañen a la metacognición en el aprendizaje de las matemáticas indica que este tema de investigación guarda aún muchas posibilidades para la mediación de esta área del conocimiento.

Para enriquecer esta tercera categoría de antecedentes, se analizó la investigación de Marino y Zuvialde (2018) en la cual se recalca que el concepto de variable representa una dificultad al resolver planteamientos que involucran su uso y simbolización. A partir de esto, los investigadores propusieron una secuencia didáctica que favorece la identificación de los diferentes usos de la variable, en particular, cuando se emplea en la simbolización.

Los autores diseñaron la secuencia didáctica como un portafolio “cuyo propósito central es generar un proceso de reflexión metacognitiva en torno al uso de la variable y su simbolización en álgebra elemental” (Marino y Zuvalde, 2018, p.55).

Esta investigación marca una pauta en cuanto a la secuencia didáctica. En su propuesta, los autores resaltan los diferentes usos de la variable, pero, de forma implícita, logran que el estudiante tome la alternativa de usar símbolos para representar las variables. También, involucran situaciones que requieren la formulación de estrategias de tipo aritmético para su solución; esto con el fin de que el estudiante discrimine en qué casos usar variables para representar la situación. Entonces, el proceso de reflexión que se propone al terminar la solución de la situación planteada resulta interesante cuando se pide a los estudiantes que comparen sus trabajos entre sí “con el fin de establecer conclusiones y valoraciones sobre la propia producción y el conocimiento involucrado”. (Marino y Zuvalde, 2018, p.56). Al inicio de esta investigación, destacaron que, para los estudiantes, el concepto de variable está muy asociado con el uso de incógnitas. Pero después de la experiencia, llegaron a darse cuenta de que la variable podía tener varios usos y señalaron los casos en que se puede involucrar cada uso.

Dentro de la tercera categoría también se revisó la investigación de Benavides (2018) titulado: Transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico a través de estrategias metacognitivas con estudiantes de grado octavo. En este trabajo se describe la incidencia que tienen las estrategias metacognitivas en la transformación del lenguaje natural en lenguaje algebraico. Se percibe que los estudiantes aplicaron estrategias orientadas al conocimiento de la tarea, pero no se detienen en el manejo de la regulación. Por otra parte, se advirtió que el proceso de planeación aparece con mayor frecuencia, tal vez porque implica que el estudiante se detenga a identificar el problema que debe

solucionar. Finalmente, en cuanto al monitoreo y control, el 80% de los estudiantes logran identificar aquello que no entienden en los enunciados del problema y tampoco logran reconocer las variables. De acuerdo con esto, Benavides (2018), anota que “los procesos de regulación metacognitiva inciden positivamente en la transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico”, y adicionalmente, se debe tener en cuenta que esta habilidad favorece a quienes se detienen a realizar una planeación con anterioridad.

En la tercera categoría se incluyó el estudio titulado: La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. En ella Arteaga et al. (2020), presentan la solución de problemas de tipo algebraico y geométrico con estudiantes de primer y tercer curso de secundaria. La investigación se propuso:

Analizar el uso de diferentes registros de representación en la resolución de problemas para conocer si aportan información adicional sobre procesos de razonamiento seguidos por los alumnos en pro de estudiar con mayor precisión las diferencias en las estrategias metacognitivas utilizadas por los mismos durante la resolución. (p.266)

Para lograr este propósito los autores caracterizaron la situación problema basada en la comprensión del enunciado por parte de los estudiantes. También, analizaron las representaciones utilizadas y determinaron las estrategias metacognitivas utilizadas en la solución de la situación planteada.

Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes comprenden la pregunta en lo relacionado con geometría. En cuanto a los registros de representación, utilizan el icónico de forma mayoritaria en los problemas numéricos, y dejan el registro numérico como segunda opción. Y, en cuanto a estrategias de control, la mayoría de los estudiantes

llevan los pasos de resolución y encuentran pocos obstáculos durante esta. Adicionalmente el estudio señala que un 78% de los estudiantes no utilizan un plan previsto de resolución. Así, el cálculo de los niveles de contingencia se ubica por encima de 0.5 lo cual señala que las estrategias de evaluación son independientes del problema.

En las conclusiones, los autores destacan la resolución de problemas como una herramienta muy potente en el proceso enseñanza aprendizaje, ya que además de la apropiación de conceptos, ofrece conocimiento al analizar las estrategias metacognitivas que los estudiantes emplean. Por otra parte, el estudio concluye que la estrategia metacognitiva más utilizada y eficaz es la estrategia de planeación. Además, observan que en la estrategia de control los evaluados siguen los pasos sin que se presenten dificultades, pero, aunque en la evaluación sí logran relacionar la respuesta con la pregunta, en este punto tienen dificultad para justificar.

El estudio desarrollado por López et.al (2016) se ubica entre aquellos que observan el pensamiento variacional. Esta investigación analizó los resultados de la resolución de problemas en cuarenta y ocho (48) estudiantes de diferentes niveles del Bachillerato; es de destacar que los problemas analizados estaban relacionados con los procesos de generalización y modelación. De este modo, la investigación detectó dificultades para caracterizar las variables, lo que a su vez evidenció, en los estudiantes observados, la baja comprensión del concepto variable. Trigueros en López et al (2016).

En los resultados se observó que el 100% de los estudiantes de nivel básico y 64 % de nivel avanzado presentan dificultades para hallar el valor de X aun conociendo el intervalo en el que varía. Por otro lado, más del 80% de estudiantes que lograron hallar el valor desconocido no pueden hacerlo con base en condiciones específicas del problema. Sumado a esto, los resultados revelan cierto nivel de comprensión en la variación conjunta,

pero este nivel disminuye cuando observan las condiciones del problema. En las entrevistas se logró detectar que no logran traducir el enunciado del lenguaje natural al matemático. Al respecto, Ursini en López et al. (2016) pone de manifiesto que cursar más semestres no garantiza mejoría en esta comprensión. Por otro lado, se evidencia que la mayoría de las estudiantes logra identificar valores desconocidos, pero la comprensión de la relación entre variables no garantiza que la tarea se finalice con éxito.

Los antecedentes marcan una pauta de orientación para el diseño de la secuencia didáctica. En este sentido resalta la importancia de proponer situaciones que generen un desequilibrio en sus estructuras cognitivas y lleven al estudiante a utilizar pensamientos y acciones conscientes. Adicionalmente se destaca las ventajas de la verbalización en la solución de problemas, unido al desarrollo del análisis, síntesis y reflexión entre otras. Además se resalta que la resolución de problemas es una buena herramienta para reflejar la forma como el estudiante aprende de su propia forma de solucionar problemas y estructura su conocimiento, además enseña a matematizar situaciones de la realidad, es decir transforma el lenguaje común en lenguaje matemático para favorecer así su ensamblaje cognitivo. Por otra parte, valoran la metacognición y la importancia de aprender a aprender. Adicionalmente destaca la importancia de las estrategias de planeación, control y evaluación. A continuación se presenta el marco teórico.

Marco teórico

Lineamientos generales del currículo

En los lineamientos generales para la educación, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) se propone el desarrollo del pensamiento variacional como dominio en Educación Básica:

Presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos infraestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentra como sustrato de ellas. (p.48)

El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica; particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo.

Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. De la misma forma, en situaciones de la cotidianidad y en el contexto científico se menciona que la dependencia de variables facilita que el estudiante desarrolle “observación, registro y utilización del lenguaje matemático”

Ministerio de educación (p.48)

Los Lineamientos, también mencionan los diferentes sistemas de representación asociados a la variación:

- . Enunciados verbales
- . Representaciones tabulares
- . Las gráficas de tipo cartesiano o sagital

- . Las representaciones pictóricas e icónicas
- . Las fórmulas y las representaciones analíticas

En síntesis, el MEN plantea iniciar de manera temprana el estudio de la variación teniendo en cuenta que su sentido puede establecerse mediante situaciones matemáticas orientadas al cambio y variación pero en contextos de la vida práctica.

Pensamiento variacional

Actualmente, las matemáticas han pasado de ser consideradas como una asignatura estática a ser vistas como un conocimiento en construcción. Según Vasco (2010): “La pregunta es si las matemáticas que todos, incluidos los matemáticos puros, necesitamos en nuestro desempeño profesional, ciudadano y personal son esas matemáticas puras, estáticas y majestuosas, o más bien las matemáticas dinámicas y fluidas de una tradición ahora desvalorizada en la que se manejan e inventan modelos mentales y se ejercita el pensamiento variacional” (p.1).

Esta idea respalda la necesidad de ejercitar una matematización que se oriente al pensamiento variacional. Este énfasis ya se contempla en los lineamientos del MEN desde el año 1998 y allí se configura en cinco tipos de pensamientos: formulación y resolución de problemas, comunicación, modelación, razonamiento; elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Según Vasco (2010) de esta manera, el desarrollo de estos pensamientos se configura como objetivo central de la matemática. La propuesta de trabajar por tipos de pensamiento representó un paso adelante muy significativo, porque pone como propósito de las matemáticas escolares el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas y su uso, socialmente más poderoso: la modelación, sin limitar las matemáticas escolares a la mera aplicación de algoritmos ya conocidos para

“resolver problemas”, los cuales, más que problemas abiertos y retadores, son apenas ejercicios escolares (p.4).

El pensamiento variacional puede llegar a confundirse con otros aspectos de la matemática. Para Vasco (2003), “el pensamiento variacional no es aprenderse las fórmulas de área y volúmenes” refiriéndose al trabajo de aplicación de fórmulas que en muchas ocasiones puede ser mecánico. A esto, agrega que tampoco se trata del manejo y uso de gráficas, como por ejemplo la parábola, que al situarse en el origen del plano cartesiano no deja apreciar la variación cuadrática (Vasco, 2010).

Llegado este punto, por ello, es fundamental plantear lo que sí es el pensamiento variacional. Así pues, para Vasco (2010):

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera dinámica de pensar, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que co-varíen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (p.5).

Vasco (2010) le atribuye al pensamiento variacional un papel fundamental en el proceso para dar cuenta de lo variable, lo constante e identificar patrones. Con ello, se generan modelos mentales, que posteriormente sirven para ver los resultados que arrojan, y así revisar dicho modelo. Entonces es cuando surgen los sistemas de representación que permiten la objetivación del modelo para su reformulación.

En este punto y con relación al propósito de desarrollar este pensamiento, Vasco (2010) explica que:

El objeto del pensamiento variacional es la captación y modelación de la co-variación entre cantidades de magnitud, principalmente –pero no exclusivamente– las variaciones en el tiempo. Una manera equivalente de formular su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad. (p.6)

El pensamiento variacional es dependiente; esto quiere decir que se relaciona con los otros pensamientos de forma interdependiente. Así pues, el principal instrumento del pensamiento variacional es el análisis, sin desconocer otros sistemas de relaciones y transformaciones. De esta forma, la modelación está inmersa en el pensamiento Variacional (Vasco 2019).

Vasco (2010) esquematiza la fase de captación de patrones en los siguientes momentos:

- momento de creación de un modelo mental
- momento de echar a andar el modelo
- momento de comparar los resultados con el proceso modelado
- momento de revisión del modelo

Al incluir un sistema simbólico se agregan los momentos:

- de formulación simbólica
- de calcular con esa formulación
- de comparar los resultados con el proceso modelado
- de reformulación del modelo

El desarrollo del pensamiento variacional abarca muchas formas de ejercitarse. Para explicar su desarrollo, Vasco (2010) identifica los patrones en las secuencias numéricas.

Este aspecto también se puede desarrollar en el pensamiento espacial, al identificar cambios en los movimientos. Por ejemplo, cuando se observa un triángulo, al deducir cómo cambia

su área cuando la altura varía según la posición del vértice; este aspecto es distinto a lo relacionado con su fórmula.

La variable puede tener usos de forma general y como relación funcional. Los investigadores especifican que el manejo de la incógnita resultaría exitoso si el estudiante muestra capacidad para:

- Reconocer en una situación problemática la presencia del elemento desconocido.
- Interpretar los símbolos de la ecuación que representan valores específicos.
- Sustituir el valor de la variable para realizar la operación indicada.
- Determinar la incógnita presente en problemas y ecuaciones.
- Simbolizar cantidades desconocidas.

Así pues, para que un estudiante reconozca el uso de la variable como número general debe dar cuenta de:

- Reconocer patrones, reglas y secuencias:
- Interpretar el valor simbólico de una incógnita, dado que puede admitir cualquier valor.
- Deducir métodos generales en secuencias.
- Manipular la variable simbólica

En cuanto a la variable como relación funcional, el estudiante debe identificar:

- La correspondencia entre variables, es decir, que logre identificar aquellas que son independientes de las que no lo son.
- Los valores de la variable dependiente cuando has sido dados los valores de la independiente.
- Los valores de la variable independiente teniendo los valores de la dependiente
- La variación conjunta.

- El intervalo de variación de una de las variables.
- La representación simbólica de la relación funcional.

El álgebra escolar se relaciona con la habilidad de representar relaciones cuantitativas para formalizar el pensamiento matemático. De esta forma relaciones expresiones simbólicas con variables. Esta forma de emplear variables para relacionar características de figuras por medio de expresiones simbólicas, se puede apreciar en la secuencia didáctica creada para la presente investigación. Esta fue diseñada para avanzar de forma paulatina de menos a mayor grado de dificultad y para ir paso a paso del pensamiento concreto al pensamiento abstracto. Lo anterior se evidencia ya que participantes avanzan paulatinamente en el reconocimiento de patrones. En la sección 2 correspondiente a la torre de Hanoi ha de esperarse que los participantes descubran el patrón que se refleja en el movimiento de los discos. En otras palabras, hay cuatro discos de diferentes tamaño apilados uno sobre otro. El objetivo es realizar movimientos de los discos para que al final queden apilados en otra torre. Pero ellos solo cuentan con quince movimientos y deben conservar la regla de no colocar en ningún movimiento un disco de mayor tamaño sobre uno menor. En el ejercicio de la secuencia se espera que los participantes descubran el patrón que se refleja en los movimientos. Es decir, hay un orden determinado si es que se quiere llegar a la meta en quince pasos. Es posible que lleguen a formar la torre en 15 pasos por ensayo y error, pero se verifica la identificación del patrón cuando soluciona la secuencia con 5 discos en 31 pasos. En este caso el ensayo y error requeriría muchos movimientos a menos que descubra por el camino el patrón empleado. Lo primero que se espera que descubran es que al llegar a los quince pasos debe estar la secuencia completa con cuatro discos. El participante que se dé cuenta de ello sabrá que al iniciar cada intento puede empezar desde el paso quince y no desde el primero.

Resolución de problemas matemáticos

Arteaga et al (2020) analizan las estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria en la resolución de problemas. Sus hallazgos resaltan la aparición del componente representativo en la solución de situaciones, al mismo tiempo que aparecen el componente conceptual y el simbólico. Por tanto, las figuras geométricas, dibujos e imágenes icónicas, forman parte de los recursos más valiosos que se disponen para la enseñanza matemática. Sumado a esto, los autores destacan que la conexión entre los contenidos matemáticos y su representación se basa en los procesos cognitivos que se involucran en la resolución. Al respecto Duval en Arteaga et al. (2020) agrega que “la comprensión e interiorización que los alumnos desarrollan en torno a un determinado objeto matemático se ve fortalecida y consolidada en tanto se establezcan más conexiones entre los múltiples registros de representación que permiten trabajar con dicho objeto. (p.269)

A continuación, se presenta una tabla que muestra los diferentes registros de representación utilizados por un estudiante para semióticas para el pensamiento matemático-. Estos recursos son elementos que permiten manejar la información textual de una manera diferente con el fin de que sea más significativa.

Tabla 1
Registros de representación

Tipo de registro	Descripción

Lenguaje natural (RLN)	Se corresponde con la lengua materna. Facilita enunciar propiedades, definiciones, teoremas etc.
------------------------	--

Figural- icónico (RFI)	Engloba croquis, trazos, dibujos sencillos, material manipulativo, entre otros que facilitan visualizar los conceptos matemáticos a trabajar sin hacer referencia explícita de sus características y propiedades.
------------------------	---

Numérico (RN)	Se trata del sistema de numeración decimal el cual permite abordar el estudio de ciertas características y propiedades de los objetos matemáticos. Del mismo modo, permite realizar cambios de órdenes de unidades, composiciones y descomposiciones numéricas, así como realizar operaciones de cálculo.
---------------	---

Tabular(RT)	Facilita el estudio de los objetos matemáticos a los que representa mediante la organización de los datos en filas y columnas, lo que permite establecer relaciones y realizar comparaciones.
-------------	---

Algebraico (RA)	Registro de representación matemática por excelencia. Con este se expresan generalizaciones y propiedades, así como también permite realizar modelizaciones.
-----------------	--

Geométrico (RGe)	Formado por elementos lineales (puntos, líneas, segmentos etc) figuras planas (polígonos regulares e irregulares) y cuerpos en el espacio. Facilita operaciones de reconfiguración, descomposición y composición para la comprensión de las nociones puestas en juego.
------------------	--

Gráfico (RGr) Engloba al plano cartesiano y todos sus elementos, los cuales permiten analizar y estudiar el comportamiento de funciones, relación entre variables, así como el estudio de tratamientos propios de su registro entre ellas las traslaciones, reflexiones, simetrías, contracciones, dilataciones etc

Nota. Tomada de Arteaga et al. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria.

La construcción del pensamiento variacional va de la mano con el desarrollo de estrategias metacognitivas. En el siguiente apartado se presenta el fundamento conceptual relacionado con la metacognición y sus estrategias.

Metacognición

En relación con la metacognición, Flavell (1981) en Mateos (2001) aclara que su estudio se ha enfocado en los aspectos psicológicos, así como en su relación con otros procesos cognitivos: resolución de problemas, razonamiento e inteligencia. Por su parte, Brauer (1993) en Mateos (2001) subraya que la importancia de la metacognición en la educación radica en el valor de conocer la forma en que uno mismo aprende, y afirma que este autoconocimiento es una necesidad para que todo proceso de aprendizaje se dé de forma autónoma.

Por otro lado, es necesario tener presente que en cualquier situación en la que ejercemos nuestro intelecto, aparecen operaciones de cognición y que, por tanto, en esas experiencias, puede haber metacognición. Para Flavell (1981) en Mateos (2001) “La

cognición entra en un juego siempre que operamos intelectualmente en algún dominio, y donde hay cognición puede haber también Metacognición” (p.19).

Para el mismo autor, el control que una persona puede ejercer sobre su propia actividad cognitiva depende de las acciones e interacciones que logre entre los cuatro componentes: conocimiento metacognitivo, experiencias metacognitivas, metas cognitivas y estrategias metacognitivas. De acuerdo con el conocimiento metacognitivo, las personas desarrollamos conocimiento sobre tres aspectos: la persona, las estrategias y la tarea. La comprensión de las características de los individuos es relevante para la solución de la tarea señalada; su importancia radica en que el niño desarrolle la habilidad de aprender a aprender, ya que esta le acompañará durante toda su vida, por encima de cualquier conocimiento.

Flavell (1981) en Mateos (2001) confirma que la metacognición está involucrada en toda operación intelectual, independiente del campo de conocimiento. Y sobre el mismo punto, Gardner en Mateos (2001) distingue la actividad cognitiva que se requiere para solucionar el problema mediante la metacognición involucrada en la comprensión que sucede al elaborar la tarea. Por su lado, Mateos (2001) agrega que la metacognición se relaciona, en primer lugar, con el conocimiento de cada uno frente a su propio funcionamiento cognitivo; por ejemplo, con aquello que le facilita a un estudiante la recuperación posterior de información revisada. De otra parte, los procesos de metacognición involucran capacidades de regulación y control sobre la propia actividad cognitiva. Así pues, se distinguen dos componentes metacognitivos: el primero declarativo y el segundo procedimental.

El mismo autor (2001) reitera que el control de una persona sobre su actividad cognitiva se maneja desde su conocimiento metacognitivo, sus experiencias metacognitivas, sus metas metacognitivas y las estrategias que emplea.

Por su parte Burón (1988) en Burón (2004) utiliza la expresión “conocimiento autorreflexivo” para referirse a la metacognición puesto que para ganar capacidad en su implementación se refiere al conocimiento de la mente adquirido por autoobservación y afirma “la metacognición es el conocimiento que tenemos de todas estas operaciones mentales: Qué son, cómo se usan, cuándo hay que usar una u otra” (p.11). Burón (2004) señala unas facetas metacognitivas como operaciones implicadas en el aprendizaje: meta-atención, metamemoria, metalectura, metaescritura, metacompreensión y metaignorancia. Según el autor, la metaatención permite ignorar estímulos irrelevantes, reconocer las distracciones y proceder a solucionarlo. En la metalectura se involucran conocimientos sobre las operaciones mentales implicadas en la lectura, además, el autor señala que “el objetivo que se busca al leer determina cómo se lee”

Burón (2004) hace referencia a la expresión “aprender a aprender” como aquella usada desde hace décadas pero que no había claridad de cómo conseguirlo. El autor señala a la metacognición como la que ha planteado métodos que pueden contribuir a este fin.

Por otra parte, Burón (2004) menciona a la metaescritura como “conjunto de conocimientos que tenemos sobre la escritura” (p. 13) esto nos ayuda, por ejemplo, a reescribir un párrafo al tener conocimiento de la deficiencia en su escritura, pero para poder identificar tal cosa se requiere tener claridad sobre el objetivo al escribir.

La metacompreensión , señalada por Burón (2004) “ es el conocimiento de la propia comprensión y de los procesos mentales necesarios para conseguirla: ¿Qué es comprender? ¿Hasta qué punto comprendemos?,

Al respecto, en la solución de problemas matemáticos cobra gran relevancia la comprensión del texto en el que se expresa la situación problema. El estudiante necesita identificar la pregunta, reconocer información relevante e irrelevante y reconocer lo que no sabe para poder actuar al respecto. En torno a esto Burón (2004) menciona la “Metaignorancia” para referirse a la “Ignorancia de su propia ignorancia” (p.14).

Si un estudiante no reconoce que conceptos no conoce, pero debería saberlos, no planeará estrategias para solucionar tal deficiencia. Pero para identificar en una situación problema los conceptos que requiere y desconoce es necesario tener una claridad de la comprensión del texto, su contexto y su sentido. Burón (2004) menciona el carácter bimodal de la metacognición “como conocimiento de las operaciones mentales y metacognición como autorregulación de las mismas. Y la razón es que una función se deriva de las otras” (p.16). Por ejemplo, un niño puede reconocer que olvida con frecuencia las tablas o las propiedades de la potenciación, pero no sabe controlar la situación y no recurre a elementos o estrategias para potenciar su memoria al tener conciencia de cómo funciona su propio proceso de memorización, es decir reconocer elementos que le han funcionado, como repetir varias veces, utilizar mnemotecnias. etc.

El estudio de la metacognición surgió de la necesidad de entender los procesos mentales que realiza el estudiante cuando se enfrenta a tareas de aprendizaje escolar.

En términos concretos, se trata de hallar una respuesta a estas preguntas: ¿qué hace mal o qué deja de hacer mentalmente el estudiante poco eficaz, y cómo lo hace, para que su rendimiento sea positivo? (Burón 2004, p. 17)

Según Burón (2004) para los maestros el reto no termina, se hace imperante la necesidad de profundizar sobre las herramientas que pueden favorecer la observación del uso de estrategias metacognitivas en los estudiantes y su forma de potenciar su propia práctica reflexiva sobre sus procesos involucrados en la cognición. Suenan una tarea muy elevada, pero según Burón (2004) no es necesario que los alumnos entiendan científicamente la metacognición, basta que se les enseñe a aprender según indica la investigación metacognitiva para que en ellos se desarrolle la metacognición, lo mismo que sin explicarles la complejidad de la inteligencia se puede desarrollar en ellos modos inteligentes de aprender. (p.19)

Burón (2004) menciona que los estudiantes se esfuerzan por memorizar datos, pero no se les ha enseñado el uso eficiente de la memoria, no se les ha enseñado a identificar lo esencial y no han sido autodidactas en ello. No hacen resúmenes, subrayan o esquematizan, entre otras habilidades. Adicionalmente Burón (2004) menciona:

Con este sistema de enseñanza se deja que los alumnos sean autodidactas en aspectos tan fundamentales como saber pensar, deducir, razonar, memorizar y comprender o saber elaborar respuestas, esquemas o resúmenes. Si se admite esta definición tal vez podamos afirmar que en las aulas se desarrolla más la memoria mecánica que la inteligencia (p. 20).

Al respecto, en matemáticas es usual que los niños sigan patrones aprendidos y aprendan reglas de forma memorística, incluso el estudiante crea haber aprendido hasta el momento en que a la pregunta se le cambia un detalle, un sentido o una dirección para comprobar si se logra la aplicación de conceptos en situaciones concretas y de su propio contexto.

El fomento intencional del uso de estrategias metacognitivas en los estudiantes parte de un proceso reflexivo de los maestros de la intención de cada parte de la secuencia didáctica. Para ello es necesario detenerse a comprender más de cerca las estrategias metacognitivas con el fin de implementar en el trabajo diario de clase, mediaciones que fomenten la reflexión metacognitiva en los estudiantes.

Las estrategias cognitivas y metacognitivas

Según Pascual en Klimenko et al. (2009), el aprendizaje transforma la estructura morfológica del cerebro; este proceso se da gracias a la plasticidad neuronal y, a su vez, enlaza a la persona con el entorno; también, se ha reconocido que el aprendizaje siempre es mediatizado. Es así como para Goodwin en Klimenko et al. (2009), el proceso complejo del aprendizaje requiere elementos internos como los biológicos, cognitivos, metacognitivos, afectivo-emocionales y de personalidad; pero también involucra elementos externos como las condiciones socioculturales, económicas, ambientales e incluso históricas.

Enseguida se aborda el aprendizaje autorregulado; al respecto de éste, Klimenko et al. (2009), señalan dos dimensiones: primero, la dimensión cognitiva y metacognitiva y, en segundo lugar, la dimensión afectivo motivacional. Por su parte Pozo (2006) en Klimenko et al. (2009) menciona la necesidad de orientar la educación más allá de la información. Sobre todo, propiciando el fomento de habilidades para organizar e interpretar la información

Muria en Klimenko et al. (2009), menciona a las estrategias metacognitivas en su papel como reguladoras de la conciencia. Por otro lado, las estrategias cognitivas se refieren al campo de las acciones. La autora define estas últimas como “un conjunto de

actividades (conductas, operaciones) físicas y/o mentales (pensamientos, procesos cognitivos) que se llevan a cabo con un propósito puntual como resolver un problema, facilitar la asimilación de información o mejorar el aprendizaje” (p.18).

La necesidad de integrar la enseñanza de las estrategias cognitivas y metacognitivas en el currículo con el fin de que los estudiantes aprendan a organizar sus acciones de estudio y a ir conociendo particularidades propias de sus capacidades de memoria, de atención, de abstracción, entre otras.

Conviene señalar que, como orientación metodológica, el fomento de un aprendizaje autorregulado debe involucrar el desarrollo de las estrategias cognitivas tanto como el de las habilidades metacognitivas. Por esta razón, Klimenko (2009), enfatizan en la necesidad de integrar la enseñanza de las estrategias cognitivas y metacognitivas en el currículo con el fin de que los estudiantes aprendan a organizar sus acciones de estudio y a ir conociendo particularidades propias de sus capacidades de memoria, de atención, de abstracción, entre otras (p.19).

Siguiendo a Glaser en Osses y Jaramillo (2008), la metacognición representa uno de los intereses investigativos que más ha contribuido a la construcción de las nuevas concepciones de aprendizaje. Así pues, la metacognición se entiende como el conocimiento que una persona tiene sobre el funcionamiento de su cognición (Carretero en Osses y Jaramillo, 2008). Además, en el mismo concepto es necesario diferenciar entre conocimiento metacognitivo y control metacognitivo, el cual se enfoca en “saber qué “ y “saber cómo” Osses y Jaramillo (2008). Por otra parte, los autores destacan la relevancia de la metacognición en el ejercicio de la educación teniendo en cuenta que todo niño es un aprendiz constantemente, expuesto a nuevas tareas de aprendizaje. En todos los sentidos, es

necesario lograr que los alumnos “aprendan a aprender” y que lleguen a ser capaces de hacerlo en forma autónoma y autorregulada. (p.192).

Conocimiento Metacognitivo

Mateos (2001) entiende la metacognición como el aprendizaje autorregulado y las estrategias de aprendizaje que tienen una conexión. Este aprendizaje autorregulado es aquel en el cual la persona que aprende tiene un papel activo en su experiencia y establece una meta autocontrolada para su aprendizaje. Para Zimmerman (1989) en Mateos (2001) en el aprendizaje el sujeto busca optimizar el aprendizaje empleando estrategias que establece para su fin. Al respecto, Monereo (1994) en Mateos (2001) explica que las estrategias surgen cuando no se tiene claro el camino a seguir, por lo tanto: “[...] comienzan siendo procedimientos que se seleccionan y aplican de forma consciente y controlada, pero, con su práctica, pueden llegar a automatizarse” (Mateos, 2001, p 44) y, claramente, siempre estarán orientadas a una finalidad.

El mismo autor argumenta que el hecho de vincular estrategias de aprendizaje parece tener relación clara con el componente metacognitivo de control. Por tal razón, mientras las estrategias cognitivas (codificación, almacenamiento y recuperación de la información) mejoran los resultados en la actividad cognitiva y en la solución de situaciones, por su parte, las metacognitivas permiten al aprendiz la planeación, supervisión, regulación y evaluación de las estrategias cognitivas mencionadas arriba. Por esta razón, ambas estrategias son complementarias.

Con respecto a la evaluación de lo metacognitivo, Mateos (2001) comenta que ayuda a verificar el nivel de conocimiento metacognitivo que una persona adquiere frente al

desarrollo de sus capacidades en cuanto a su reflexión sobre la tarea y las estrategias que utiliza al enfrentarse a una situación concreta en su ejercicio de aprendizaje. De este modo, para evaluar se emplean preguntas como: *¿Qué aprendió sobre su forma de solucionar problemas? ¿Cuáles de estos elementos le pueden servir para la solución de cualquier otro problema? Escriba un párrafo sintetizando las respuestas, ¿Qué dificultad encontró en los experimentos realizados para su solución?* Mateos (2001). Cabe advertir además una crítica que el autor señala a este tipo de entrevistas; se refiere a la validez de la información recogida, ya que no sería posible determinar con precisión la cercanía entre lo que la persona verbaliza y el conocimiento que tiene sobre su actividad cognitiva. Esta dificultad puede depender de la edad, de sus capacidades comunicativas e incluso de las preguntas que se le plantean a los niños y de la claridad con la que se formulan. El autor plantea que la memoria es el aspecto que ha tenido mayor atención en el estudio de los procesos cognitivos.

Continuando con el conocimiento metacognitivo, es necesario señalar que está comprendido por tres categorías: la primera, el conocimiento de la persona; la segunda, el conocimiento de la tarea y, por último, el conocimiento de las estrategias. Así pues, el conocimiento de la persona incluye las capacidades y limitaciones cognitivas del sujeto para su aprendizaje y pensamiento, así como otros elementos que pueden influir o afectar la efectividad en el cumplimiento de sus tareas (Mateos, 2001).

Al respecto, el autor menciona uno de los hallazgos más relevantes en los estudios metacognitivos y es que los niños de 5 y 6 años, generalmente, tienden a subestimar sus capacidades y su rendimiento convencidos de que nunca olvidan nada; mientras que los niños de 9 y 11 años son más realistas: “reconocen que no siempre tienen un buen recuerdo de las cosas y que otras personas pueden tener un recuerdo menor o mayor que el suyo”. (Mateos, 2001, p.56)

La segunda categoría es el conocimiento de la tarea, el cual se relaciona con discernir los objetivos de la actividad o la labor que se va a emprender, así como se relaciona con la consciencia de los elementos que determinan su grado de dificultad. Conocer la tarea configura la elección de la estrategia; los estudios observan que, al parecer, este conocimiento se alcanza aproximadamente llegando a los 12 años.

Por último, el conocimiento sobre las estrategias involucra aspectos declarativos, procedimentales y condicionales. Para comprenderlo mejor, Mateos (2001) menciona que los estudiantes aprenden las posibles estrategias para llegar, de modo efectivo, al objetivo propuesto en la tarea, teniendo en cuenta las condiciones de la situación. Las estrategias de memoria se desarrollan hasta la adolescencia; es así como, a medida que crecen, van descubriendo estrategias que les ayuden a recuperar información, y en ellas emplean métodos de búsqueda más elaborados. Al mismo tiempo, el autor recalca que el conocimiento de estrategias para conseguir información desconocida evoluciona con la edad desde cuando busca fuentes hasta cuando tiene la confianza para usar sus presaberes. No obstante, también advierte que “muchos niños de 12 años no parecen ser conscientes de la necesidad de desplegar un comportamiento estratégico diferente para ajustarse a las demandas de la tarea” (p.60).

La visión actual del conocimiento metacognitivo ha tenido cambios en sus perspectivas debido a la influencia del constructivismo en las investigaciones del lenguaje y la instrucción. Para ilustrar este punto se presenta la tabla con las diferencias de la perspectiva tradicional y actual del conocimiento metacognitivo.

Tabla 2*Diferencias entre las perspectivas tradicional y actual del conocimiento.*

Aspectos de la metacognición	Perspectiva tradicional	Perspectiva actual
Relación con el objeto de conocimiento	Reflejo de hechos verdaderos	Construcción
Grado de estructuración	Colección de ideas discretas	Creencias integradas e teorías intuitivas
Grado de accesibilidad	Explícito y variable	Diferentes niveles de explicación
Naturaleza	Cognitiva	Cognitivo -motivacional

Tomado de Mateos (2001)

Control metacognitivo

El desarrollo del conocimiento metacognitivo no es suficiente para solucionar los problemas de modo efectivo. Siendo así, lo que marca la diferencia entre el estudiante con mayor o menor competencia es la habilidad para mantener el control sobre su aprendizaje. (Mateos, 2001). Sobre este aspecto, el mismo investigador observa que este control metacognitivo involucra los procesos de supervisión y auto-evaluación de la actividad cognitiva frente a una tarea de aprendizaje o solución de un problema. De esta manera, en el control metacognitivo se diferencian tres tipos de procesos: la planificación, el control y la evaluación. Es así como, antes de iniciar la solución en una situación de aprendizaje, el estudiante elabora un plan para la consecución de los objetivos; este plan compromete la identificación de los recursos y los procesos necesarios. Durante la ejecución del plan trazado, el estudiante comprueba su progreso en la dirección deseada, y esto involucra

reformular el plan de acción y hacer ajustes; hay estudiantes que se estancan en este punto. Por eso, los más avanzados aplican estrategias alternativas como eliminar pasos innecesarios.

En síntesis, respecto al control metacognitivo, los aprendices competentes planifican las estrategias que consideran más adecuadas para alcanzar las metas deseadas: parten del conocimiento que poseen acerca de sus propios recursos para aprender, acerca de las demandas de las tareas y de la efectividad de estrategias alternativas. Estos estudiantes se dan cuenta de cuándo no están aprendiendo, buscan remedio para superar las dificultades detectadas y evalúan los resultados de sus esfuerzos. (p.71)

En este punto, sobre los procesos de control que los aprendices activan al enfrentarse a la solución de problemas. Además del conocimiento, los estudiantes más avanzados en solucionar problemas: “disponen de una forma de actuar más autorregulada cuando se enfrentan a la solución de situaciones complejas para lo que no tiene un procedimiento estándar que pueda aplicar de antemano de forma automática.” (Mateos 2011). Además, los hallazgos coinciden en que, cuando estos estudiantes solucionan tareas que no son rutinarias, parecen caracterizarse no tanto por la ejecución automática de rutinas específicas aprendidas sino por emplear un rango amplio de procedimientos de control.

Pérez en Mateos (2001) distinguen los procesos de planificar y representar el problema, de planificar la solución y, además, de supervisar y evaluar esa solución. Sobre estos tres momentos se dice que “cuando se trata de resolver problemas nuevos, o poco familiares, estos procesos tienen un carácter metacognitivo” Davidson (en Mateos, 2011).

Respecto a los hallazgos sobre estrategias para definir el problema, Glaser (en Mateos, 2021) explican que los estudiantes más diestros identifican los elementos críticos de la situación, la información conocida, así como el objetivo; y con estos tres elementos

hacen una representación en su interior. En este punto, la diferencia entre los sujetos principiantes y aquellos con más pericia radica en que los últimos toman más tiempo para la representación del problema antes de iniciar una acción; en especial, con los problemas no rutinarios. Esto se explica porque van modificando sus representaciones en el trayecto a medida que va creciendo la comprensión que tienen del mismo: “precisamente los problemas no rutinarios son difíciles de resolver porque el sujeto no cuenta con una representación familiar y el conjunto de procedimientos de solución asociados a ella”. Lesgold (en Mateos, 2001). Por su parte, los expertos evidencian mayor precisión al determinar en dónde está la dificultad de los problemas dentro de su rango conceptual. Glasser (en Mateos, 2001).

Siendo así, Glaser y Chi (en Mateos, 2001) suponen que estas habilidades metacognitivas de los expertos pueden atribuirse a que logran una representación diferente de los problemas. Es decir, “mientras los expertos tienden a representar los problemas de acuerdo con los principios generales de dominio de conocimiento, las representaciones de los novatos se basan en los rasgos más concretos del problema, que son menos relevantes para su solución.” (p. 85)

En cuanto al momento de la planificación, este involucra descomponer el problema en subproblemas y definir pasos para enfrentarlos uno a uno. Entonces, la planeación se hace más visible en los expertos cuando se enfrentan a nuevos problemas, ya que ellos no disponen de métodos rutinarios. (Mateos, 2001). En suma, la investigación del autor, coincide en que los expertos evidencian mayor habilidad para evaluar el problema, seleccionar y aplicar estrategias, así como para supervisar. Esta diferencia se puede apreciar también en el proceso que hacen estudiantes más hábiles con respecto al de los menos hábiles.

La Metacognición en la enseñanza de las matemáticas

En la tradición popular, la matemática es vista como una de las asignaturas cuyo aprendizaje presenta mayores dificultades. Si bien, en las últimas décadas se han estudiado e implementado cambios metodológicos en cuanto la enseñanza, el aprendizaje de la matemática aún sigue cargando con tal percepción. Al respecto, Mato Vázquez (2017) plantea que en la investigación de los procesos de enseñanza aprendizaje, la tradición se ha centrado en procesos cognitivos y ha dejado de lado la motivación. En el caso de esta asignatura, su enseñanza se ha centrado en algoritmos y procesos con poca aplicabilidad en la cotidianidad. (Calvo en Mato Vázquez, 2017) Considerando que las matemáticas se encuentran inmersas en todos los ámbitos de la vida, resulta ineludible brindar a los estudiantes espacios en que puedan desarrollar estas habilidades proponiéndoles actividades significativas de enseñanza. (Obando en Mato Vázquez, 2017).

Es un hecho que el área de las matemáticas se mueve alrededor de la solución de problemas y que, adquirir esta competencia representa un reto tanto para estudiantes como para docentes. En consecuencia, autores Peralta en Mato Vázquez (2017) destacan como uno de los objetivos principales que los alumnos desarrollen competencias en la resolución de problemas; esto aumentaría el nivel de significado de los conceptos matemáticos. La resolución de problemas favorece la confianza en los estudiantes, la perseverancia y la creatividad, así como su interés investigativo. (Chamorro (2003) en Mato Vázquez et.al, 2017).

En la enseñanza de las matemáticas, los docentes ya tienen conciencia de que las estrategias metacognitivas intervienen en la regulación y control de la actividad cognitiva del individuo y de que contribuyen a optimizar los recursos disponibles. Este proceso

implica reflexionar sobre cómo se aprende e implementar estrategias que mejoren su aprendizaje. Como una respuesta consecuente, en la enseñanza de las matemáticas resulta ineludible introducir estrategias metacognitivas para fomentar la reflexión sobre el proceso de aprender; es decir, que las metodologías deben tener presentes las maneras en que los estudiantes se enfrentan a un ejercicio, deben promover sus procesos de control y regulación y deben señalarse, de manera continua, cómo están empleando este conocimiento para regular su cognición.

De acuerdo con lo expuesto en este apartado el proceso de aprendizaje se fortalece orientando esfuerzos para que el estudiante avance en el desarrollo de la reflexión metacognitiva. Adicionalmente el trabajo didáctico con base en situaciones de diferentes contextos permite que se logre el aprendizaje significativo.

El siguiente apartado refleja la metodología empleada para el desarrollo de la investigación.

Metodología

Enfoque de estudio y tipo de investigación

La presente investigación se fundamenta en el paradigma cualitativo e interpretativo y corresponde a un estudio de caso. Para el asunto de esta investigación, el estudio de caso ayuda a caracterizar las estrategias y procesos metacognitivos que se pueden evidenciar en la solución de problemas. La elección del enfoque dio cabida al diseño de la secuencia didáctica que se construyó tomando como base los indicadores de Robson (2016) y traducción propia de Díaz, L (2018). La aplicación de la secuencia didáctica con tres estudiantes se desarrolló de forma individual y permitió obtener evidencias del uso de estrategias metacognitivas.

Participantes de la investigación

Se seleccionaron tres participantes que cursan grado octavo en el Colegio San Pedro Claver de la ciudad de Bucaramanga. Uno de ellos, mostraba un desempeño académico alto y los otros dos mostraban un nivel medio, respectivamente. En esta muestra a conveniencia se consideró necesario hacer el ejercicio con una estudiante con asignaturas en juicio valorativo alto, dos estudiantes con algunas asignaturas en básico, es decir con algunos estándares no aprobados y así, favorecer el proceso de contraste de información y elaboración de conclusiones. Antes de describir el perfil de cada participante cabe destacar que, cuando se implementó la metodología, el colegio manejaba grupos con alternancia presencial y grupos completamente virtuales. Debido a los protocolos de seguridad por Covid 19.

Participante 1

Estudiante del grupo 8-C quien ha evidenciado dificultades académicas en el Colegio. Ha participado en planes de mejoramiento académico para fomentar el manejo de situaciones problema de diferentes contextos matemáticos.

Participante 2

Estudiante de octavo grado, del grupo 8D asistía al colegio en modalidad alternancia. Este estudiante se caracteriza por su dificultad para interpretar situaciones y para manejar pensamiento abstracto.

Participante 3

Estudiante que sobresale por sus habilidades en la resolución de problemas matemáticos. Hasta el momento, su habilidad le ha permitido aventajar a sus compañeros en cuanto a los niveles de desarrollo del material propuesto en las clases. Sus habilidades la ubican en el nivel de profundización. Sobresale por su nivel de análisis en situaciones cotidianas y por el dominio de algoritmos relacionados con expresiones algebraicas, así como de operaciones con conjuntos numéricos.

Etapas de investigación

Ilustración 1

Etapas de investigación



Fuente: Elaboración propia

Etapa 1: Revisión de antecedentes y marco teórico

La búsqueda de antecedentes se basó en dos aspectos: metacognición y resolución de problemas matemáticos clasificados en tres categorías:

Categoría 1. Estudios que caracterizan los procesos metacognitivos de estudiantes en la resolución de situaciones matemáticas de tipo variacional.

Este apartado inició con la investigación de Pulido (2014) titulada: Procesos metacognitivos que llevan a cabo estudiantes de grado noveno con desempeños superior y bajo del colegio Agustín Fernández I.E.D durante la resolución de problemas matemáticos. Por otra parte, la investigación de Gusmão (2014), observa el papel de la metacognición en la resolución de problemas.

Categoría 2: Estudios que documentan la influencia de las estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas.

La investigación de Moreno y Daza (2014) se centró en la “incidencia de estrategias metacognitivas para la resolución de problemas en el área de matemáticas”. Los investigadores emplearon una serie de pruebas estandarizadas que permitieron determinar la influencia de las diferentes estrategias metacognitivas en la habilidad de los estudiantes al resolver problemas matemáticos. Adicionalmente se revisó la tesis titulada: El análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria, realizado por Martínez (1996). Allí, los autores destacaron la importancia de la resolución verbal de problemas, porque brinda un momento en el cual es posible realizar la regulación metacognitiva. Por otro lado, la investigación de Martínez (1996) aporta una base teórica, a la vez que advierte sobre las

principales dificultades que pueden experimentar los estudiantes al conceptualizar la variable.

Categoría 3: Estudios que proponen una secuencia didáctica mediada por estrategias metacognitivas en el desarrollo del pensamiento variacional.

En esta categoría se incluyó el estudio de Vásquez, Espiñeira y López (2017). Los autores se interesaron en cómo el uso de estrategias metacognitivas impacta la enseñanza de las matemáticas.

Para enriquecer esta tercera categoría de antecedentes, se analizó la investigación de Marino y Zuvialde (2018) allí se menciona que el concepto de variable representa una dificultad al resolver planteamientos que involucran su uso y simbolización. Adicionalmente, la investigación de Benavides (2018) titulado: Transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico a través de estrategias metacognitivas con estudiantes de grado octavo se describe la incidencia que tienen las estrategias metacognitivas en la transformación del lenguaje natural en lenguaje algebraico.

Otro antecedente relacionado corresponde a : La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. En ella Arteaga (2020), presentan la solución de problemas de tipo algebraico y geométrico con estudiantes de primer y tercer curso de secundaria. Se propuso que el uso de diferentes registros de representación en la solución de situaciones aporta elementos para potenciar procesos de razonamiento. Finalmente, el estudio desarrollado por López (2016) se ubica entre aquellos que observan el pensamiento variacional. Destacó que los problemas analizados estaban relacionados con los procesos de generalización y modelación y detectó dificultades para caracterizar las variables, después del análisis de

investigaciones precedentes y la estructuración del marco teórico se inició el diseño de la secuencia didáctica.

Etapa 2: Diseño de la intervención

Diseño de preguntas metacognitivas:

A partir de los indicadores de Robson (2016) se diseñaron preguntas metacognitivas orientadas a favorecer la identificación del uso de las estrategias metacognitivas en el estudiante. Anexo 1 p.87

Diseño de la secuencia didáctica.

La secuencia didáctica está basada en cuatro fases. La primera se refiere a la etapa de verbalización en la que el participante debe dar instrucciones a un amigo con el fin de orientarlo para llegar a un lugar determinado. El elemento de dificultad del reto es considerar que el amigo es ciego. Este reto no es matemático, ni lleva incorporado un concepto algebraico. Sin embargo, se incluyó en la primera fase con el fin de generar en los participantes una movilización desde la resolución de un problema concreta que los lleve a generar soluciones particulares y ejercite la verbalización del pensamiento en voz alta.

La segunda fase se llama: Torre de Hanói, en esta, el participante tiene tres torres y tres discos apilados en la primera torre. Estos se ubican en orden de tamaño. El objetivo consiste en apilar los discos en otra torre, pasando uno por uno. Es necesario considerar que hay un número determinado de pasos y la regla fundamental consiste en no ubicar un disco mayor sobre uno menor en cada paso. Con este reto se favorece la recolección de evidencias en una situación que exige emplear patrones y secuencias, aspecto inicial del pensamiento

variacional. Este reto lleva intrínseca una fórmula matemática para determinar el número de pasos 2^{n-1} , siendo n el número de discos. Sin embargo, los participantes no se basarán en esta, sino en la reflexión metacognitiva que hagan sobre los movimientos de los discos para poder deducir la secuencia y encontrar patrones de recurrencia en los movimientos.

La tercera fase se llama: Elaboración de la caja. Su objetivo es calcular el material necesario para construir la caja que se ajuste a una vela con medidas determinadas. En esta fase se propicia la recolección de evidencias en el manejo de estrategias metacognitivas en un reto que involucra el pensamiento abstracto con base en material real. Es este reto los participantes relacionarán la altura de la vela con la altura de la caja, pero para ello deberán identificar en la caja abierta cuál de las aristas corresponde a la altura de la caja. En este reto se pone en marcha el pensamiento espacial. Un ejemplo de ello se evidencia en que deberán relacionar la base de la caja con la base de la vela y concluir que el diámetro de la vela corresponde a la medida de la arista de la base a la caja. De esta forma puedan relacionar por partes las dimensiones de la caja con las dimensiones de la vela. La última etapa se llama: Generalización. En esta etapa, los participantes deben considerar que el fabricante de las velas las ha hecho de diferentes tamaños. Ante esto, debe construir las cajas para empacarlas considerando que va a asignar a la altura de la vela la variable X que representa los diferentes valores que puede tomar la altura. Esta fase es continuidad de la anterior, ya que en esta el participante al reconocer X como la altura deberá tomar decisiones en cuanto a la forma de escribir las dimensiones de la caja empleando esta X. Este reto es de dificultad alta para estudiantes de nivel octavo. En este nivel se inicia la configuración del pensamiento abstracto y se debe estimar que en este caso las dimensiones deben estar dadas con expresiones algebraicas debido al empleo de la variable x.

Es necesario resaltar que la secuencia didáctica tiene un apartado paralelo a las actividades propuestas, que va dirigido a los maestros, con el fin de dar orientaciones frente a su aplicación.

Esta secuencia se sometió a validación por parte de la tutora y de la magistra Lorena Díaz quien desarrolló su trabajo de grado en esta temática. **Anexo 2.** P.112

Aplicación de la secuencia didáctica en un sujeto de prueba y ajuste

Una vez diseñada la secuencia didáctica, se aplicó en un participante. Esta se grabó con el fin de identificar los aspectos que requerían adaptación. Posteriormente, la secuencia didáctica se ajustó. Se realizó la redacción de las instrucciones para emplear el uso de expresiones más cercanas a los participantes. Además, se eliminaron algunas preguntas de la sección de Generalización para no dilatar el trabajo y se centrara en la pregunta fundamental.

Etapa 3: Aplicación de instrumento

Para la aplicación del instrumento se seleccionaron tres estudiantes del Colegio San Pedro Claver de Bucaramanga. Se empleó como criterio diferentes niveles de desempeño académico. De ahí que se hizo un diálogo con los papás para explicarles el propósito de la investigación y solicitar su consentimiento para la participación de los estudiantes.

Se aplicó la secuencia en los tres estudiantes de forma individual. El primero de ellos participó de forma mixta. La primera y segunda fase fueron virtuales y las tercera y cuarta presenciales.

A cada participante se le proporcionaron cuatro tarjetas, cada una contenía las instrucciones para la solución de cada reto. Adicionalmente se proporcionó el material necesario: tijeras. Cartulina, una vela de 12 cm de alto, lápiz, marcador, regla. Entre otros.

Clasificación de evidencias

Una vez aplicada la secuencia se realizó la transcripción de esta y se procedió a señalar con colores las expresiones que reflejaran evidencia del uso de estrategias metacognitivas según los criterios establecidos. Las evidencias se organizaron en una hoja de Excel para, posteriormente contarlas y graficarlas.

Caracterización de estrategias metacognitivas:

Como parte de la metodología, se definieron las categorías que permitieron analizar la verbalización de cada estudiante durante la secuencia didáctica. Los resultados se discriminan para cada una de las estrategias metacognitivas de planeación, supervisión y monitoreo, control y evaluación.

Etapa 4: Análisis de resultados

Se presenta la descripción de la evidencia de las características del uso de las estrategias metacognitivas de cada uno de los participantes y su correspondiente análisis, a continuación se presentan una síntesis de las categorías de análisis.

Tabla 3

Análisis del trabajo de cada uno de los participantes

Estrategias metacognitivas	Indicadores	
Planeación	Establece o aclara demandas de la tarea	Enunciaciones relacionadas con : Qué tengo que hacer? Enunciaciones o expresiones (gestos) al creer que encontró una estrategia de solución. Cómo le explicaría la tarea a un compañero del curso
	Establece metas y objetivos	Cómo le explicaría la tarea a un compañero del curso
Supervisión y monitoreo	Decide formas de proceder con la tarea	Frases que enuncia para llevar a cabo la tarea
	Auto comentarios	Expresiones que utiliza al considerar que va por buen camino o al equivocarse
	Revisa el progreso de la tarea haciendo un seguimiento de los procedimientos que se están llevando a cabo actualmente y los que se han realizado hasta el momento	Enunciaciones sobre el procedimiento con alguno empleado anteriormente Expresiones que usa al darse cuenta que se debe detener y revisar
	Califica o hace comentarios sobre la recuperación de la memoria	Expresiones verbales o corporales que evidencia búsqueda de información o experiencia anterior
	Verifica el comportamiento o el rendimiento incluida la detección de errores	Enunciaciones en el momento en que cree haber encontrado un error
Control	Autocorrecciones	Comentarios personales que realiza al corregir
	Cambia la estrategias como resultado de supervisiones anteriores	Enunciaciones al momento de tomar la decisión del cambio de estrategia.
	Sugiere y usa estrategias para resolver la tarea de manera más efectiva	Palabras que menciona al comprobar mayor efectividad de la nueva tarea
	Aplica una estrategia previamente aprendida a una nueva situación	Hace mención a situaciones anteriores que están relacionadas con la actual
	Repite una estrategia para verificar la precisión del resultado	Por qué realiza el nuevo procedimiento?
Evaluación	Busca ayuda	Expresiones verbales o gestuales en el momento que se da cuenta que debe buscar ayuda
	Utiliza el gesto no verbal como estrategia para apoyar la propia actividad cognitiva.	Observación
	copia o imita un modelo	De donde sacó la idea?
	Revisa el aprendizaje propio o revisa la tarea	Enunciaciones que sugieren que debe revisar el trabajo hasta el momento
	Evalúa las estrategias utilizadas	Cómo se da cuenta que la estrategia funcionó?
	Observa y comenta sobre el progreso de área.	Qué aprendió acerca se su forma para solucionar problemas? Cuáles de estos elementos le pueden servir para la solución de cualquier otro problema?

Tomado de: Robson Sue (2016). Self- regulation and metacognition in young children: Does it matter if adults are present or not? Traducción Ingrith Lorena Díaz. (2018). Caracterización de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas científicos con niños entre siete y doce años de Mitú (Vaupés).

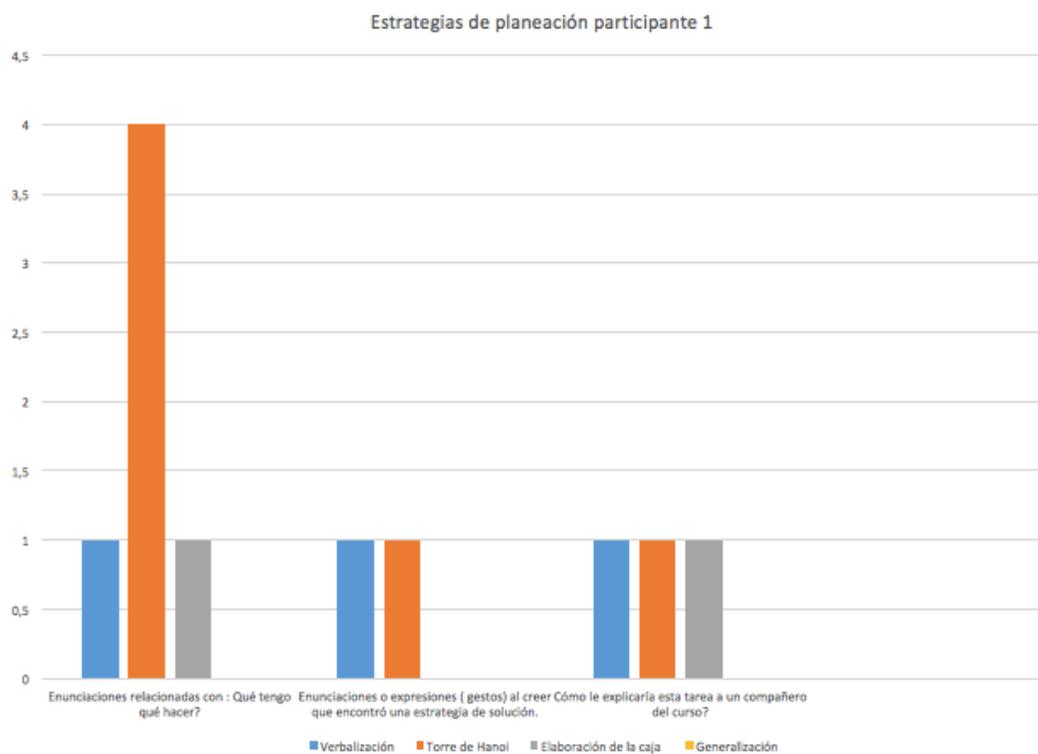
Resultados

A continuación, se presentan los resultados de la intervención en cada estudiante, bajo la siguiente organización. Al inicio, aparece a descripción y análisis del uso de las estrategias y a continuación aparecen las tablas que muestran el conteo de las evidencias del uso de estrategias metacognitivas. Esta información también aparece reflejada en tablas estadísticas.

Resultados participante 1

En cuanto a la finalización de la tarea, el participante 1 culminó los cuatro retos. Al llegar a la etapa de generalización manifestó que no se sentía en capacidad de continuar con el reto

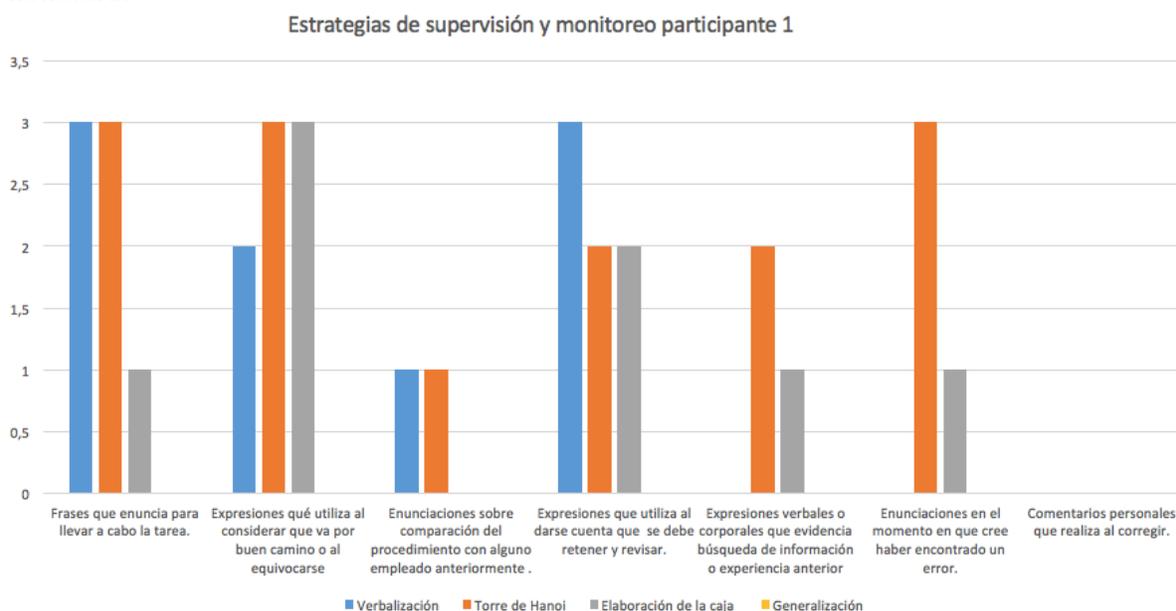
Tabla 4 Resultados participante 1 en la estrategia meta cognitiva de Planeación



Reto de verbalización:

Planeación: En la tabla 4 se puede apreciar que hay mayor número de evidencias de estrategias de planeación en el reto de la torre de Hanoi mientras que en los demás retos el resultado es similar. El participante hizo mención a las indicaciones dadas. Enseguida se aventuró a hacer un plano en su mente para configurar la ruta, pero no se tomó tiempo para considerar detalles. Al creer encontrar una solución dijo: “pues ya”. No hizo segunda lectura de las indicaciones y empezó a dar instrucciones a modo de ensayo y error. En el primer intento omitió el detalle de la ceguera de la persona que recibe las instrucciones. Esto evidencia que no se detuvo a considerar información relevante y planear con ello una estrategia. Fue solo después del primer intento que realizó la segunda lectura para verificar si había dejado de lado otro detalle. El participante procedió a corregir las instrucciones y se realizó la grabación con los ajustes.

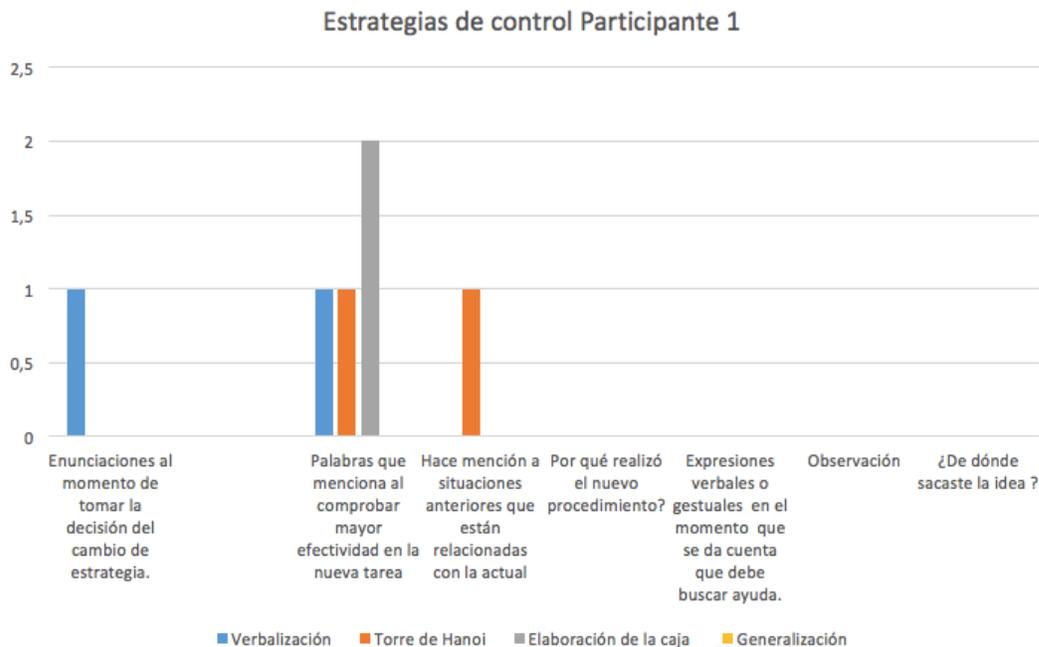
Tabla 5 Resultados participante 1 en la estrategia meta cognitiva de supervisión y monitoreo



Supervisión y monitoreo: En la tabla 5 se puede apreciar que no hay evidencia de estrategias de supervisión y monitoreo en todos los retos. El participante al escuchar las indicaciones registradas en la grabación se dio cuenta que debía detenerse y revisar: “Creo que está mal”. Con esto hizo referencia a su reflexión sobre lo que no funcionaba para llegar a la meta: “En las escaleras él no va a ver las escaleras”. Con esta expresión, el mismo estudiante consideró que está tomando una ruta inadecuada y debía revisar. Estos auto comentarios evidencian la supervisión de su trabajo.

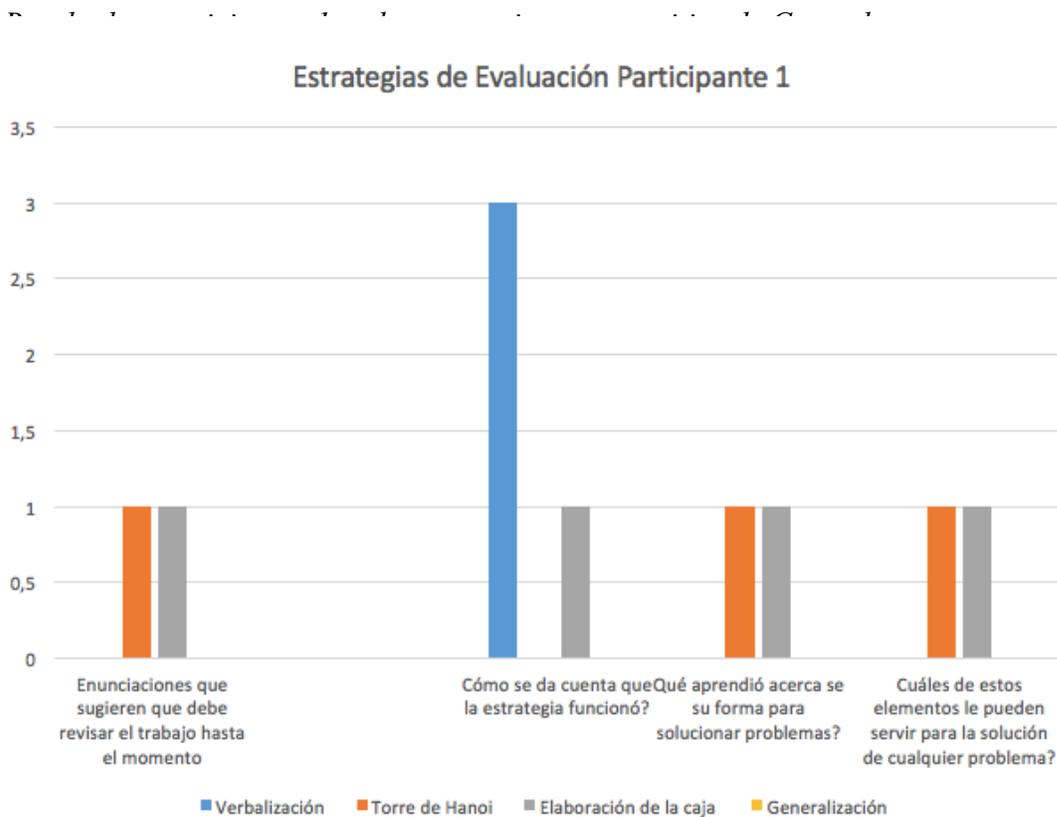
Cabe anotar, que la verbalización del participante fue pausada e incompleta, dejando espacios de silencio que no permiten evidenciar su propia supervisión. En esta categoría, se refleja que emplea expresiones bajo la consideración de creer haber encontrado un error. Sin embargo, fueron pocas. Estas expresiones le indicaban que debe detenerse y revisar. El número de evidencias en este ítem se equipará al número de frases expresadas al llevar a cabo la tarea. Por otro lado, sus expresiones faciales fueron limitadas, además se debe considerar que esta fase se aplicó en virtualidad y la cámara no podía captar detalles que podían ser importantes. Se reflejó ausencia de expresiones al considerar que encontró un error, aunque estas pueden ser confundidas con las expresiones que emplea al considerar que debe detenerse y revisar.

Tabla 5: Estrategias de control participante 1



Se puede notar el valor pedagógico del error ya que el participante se dio cuenta de momentos en los que debía detenerse y revisar y ajustó la toma de decisiones considerando el requerimiento. El ensayo y error no necesariamente es estéril si se realiza bajo reflexión de los cambios empleados con cada ensayo. Cuando regresó a las instrucciones, el participante se tomó su tiempo para verificar y manifestó: “estoy haciendo el recorrido en la mente”. Antes de continuar, se debe aclarar que esta secuencia didáctica se aplicó en virtualidad por la plataforma *Teams*, ya que era el único medio disponible en ese momento. En la intervención no se evidenció la estrategia metacognitiva de control.

Tabla 7: Estrategias de evaluación participante 1



Evaluación: El participante evidenció pocas expresiones referidas a este ítem. Las que reflejaron que debía detenerse y revisar. Se evidenció pocos elementos que muestran interés de revisar la efectividad de la tarea a la luz de las indicaciones iniciales.

Fase 2: las Torres de Hanoi.

En este, el participante debía pasar los discos de una torre a otra con ciertas restricciones y respetando un número determinado de pasos. Debido a que la secuencia se aplicó de forma virtual se cambiaron los discos por monedas y círculos dibujados en la hoja representando las torres.

Planeación: El participante realizó una breve descripción del requerimiento de la tarea. Enseguida, comenzó a hacer ensayos de prueba y error. Pero al hacerlo, se dio cuenta

que no entendía muy bien el propósito del reto: “Ahí me perdí porque no entiendo el objetivo”. Entonces, leyó de nuevo las instrucciones, pero persistieron las dudas respecto a las demandas de la tarea. En este punto, fue necesaria la intervención de la docente, quien lo orientó para que reconociera información relevante de la tarea y lo indujo a leer varias veces la instrucción. Sin embargo, releer cuando el texto no resulta significativo es repetir en vano. Presentó dificultad para describir un plan de acción. Empleó varios intentos para reconocer las demandas de la tarea, así como para buscar recursos para clarificarla.

Supervisión y monitoreo: Al reanudar, el participante intentó completar la tarea y lo hizo en cinco movimientos; pese a que debían emplearse siete. Eso evidenció que los discos regresaron al punto original, pero el objetivo era cambiarlos a una torre diferente. No obstante, él no se había dado cuenta de ello. Con el objetivo de intervenir la docente le preguntó: “¿Hizo algo que no estaban en las instrucciones”? A esto, el participante respondió: “mover dos a la vez”. Así pues, con esta pregunta se dinamizó el pensamiento del estudiante para que identificara los aspectos relevantes en las instrucciones, ya que, si repite el ejercicio sin cambiar algo en cada intento, llegará al mismo resultado y sería un ejercicio vacío, dejado a la suerte. De este modo, en un momento de la secuencia el participante identificó que debía cambiar la estrategia o revisar. Se dio cuenta de que debía prestar mayor atención a cada movimiento para decidir si ubica el disco en un espacio vacío o sobre otro disco. Fue después de una mediación de la profesora que decidió formas de proceder con la tarea. Expresiones utilizadas reflejaban que recurría a la experiencia anterior para emplear esa información en el movimiento de 4 discos. En esta fase las evidencia para el empleo de estrategias de control y evaluación fueron nulas. El participante, no se tomó un tiempo para evaluar la efectividad de las estrategias. Al considerar el reto terminado no optó por intentarlo con cinco discos.

En la fase: Elaboración de la caja

Se propuso a los estudiantes el reto de la caja. En este, los participantes debían hallar las dimensiones de una caja para empacar una vela de 12 cm de altura y 8 cm de diámetro.

Planeación: El participante 1 leyó las instrucciones una vez y concluyó que se debían respetar las dimensiones de la vela 12 cm. de altura y 8 cm. de diámetro, aunque reconoció que debía “leer antes de imaginar cómo meter una vela en una caja”. Se evidencia 1 enunciado para clarificar las demandas de la tarea. Posteriormente inició con el ensayo y error.

Supervisión y monitoreo: Al preguntarle al participante “¿Cuánto papel necesita para la tarea?” respondió: “pues 14 por 14” considerando la altura de la vela. Al observar que el participante dio respuestas sin evidencias de trabajo, fue necesaria la intervención de la investigadora. En este caso, la reflexión metacognitiva movilizó el pensamiento porque usó herramientas que le permitieron revisar el progreso de la tarea contrastando su estado con los datos iniciales.

Control: Luego de elaborar los dibujos y realizar trazo a ensayo y error el participante descubre que algo está mal: “Es que la estoy borrando porque me di cuenta que los lados deben ser exactos. Por ejemplo, esto debe encajar con lo de abajo para que no quede por fuera”. Al verbalizar “por fuera” el participante señalaba el espacio que sirve como base de la caja”. Esto indica que buscó una nueva palabra de su sistema de significación para concordar con lo que él creía que faltaba, aunque aquí la palabra “afuera” no sea la adecuada.

Evaluación: En su desempeño durante la secuencia, hay poca evidencia del uso de estrategias metacognitivas de evaluación. Hizo dos comentarios al darse cuenta que debía

detenerse y revisar: “Es que la estoy borrando porque me di cuenta que los lados deben ser exactos, por ejemplo, esto debe encajar con lo de abajo para que no quede por fuera” - dijo, señalando el espacio que sirve como base de la caja. Al finalizar la tarea evitó optar por comprobar si el resultado obtenido estaba en relación directa con las condiciones iniciales.

En suma, el menor número de evidencias en el uso de estrategias metacognitivas están en la categoría de control, seguido por el ítem de evaluación.

Tabla 7: Evidencias del participante 1 en la intervención

Estrategias			Participante 1			
	Indicadores		Verbalización	Torre de Hanoi	Elaboración de la caja	Generalización
Planificación	Establece demandas y expectativas de la tarea	Enunciaciones relacionadas con : Qué tengo que hacer?	1	4	1	El estudiante no llegó a esta parte
		Enunciaciones o expresiones (gestos) al creer que encontró una estrategia de solución.	1	1	0	
	Establece metas y objetivos	Cómo le explicaría esta tarea a un compañero del curso?	1	1	1	
Estrategias	Indicadores		Verbalización	Torre de Hanoi	Elaboración de la caja	Generalización
Supervisión y monitoreo	Decide formas de proceder con la tarea	Frases que enuncia para llevar a cabo la tarea.	3	3	1	
	Auto comentarios	Expresiones que utiliza al considerar que va por buen camino o al equivocarse	2	3	3	
	Revisa el progreso de la tarea haciendo un seguimiento de los procedimientos que se está llevando a cabo actualmente y los que se han realizado hasta el momento	Enunciaciones sobre comparación del procedimiento con alguno empleado anteriormente .	1	1	0	
		Expresiones que utiliza al darse cuenta que se debe retener y revisar.	3	2	2	
	Califica o hace comentarios sobre la recuperación de la memoria	Expresiones verbales o corporales que evidencia búsqueda de información o experiencia anterior	0	2	1	
	Verifica el comportamiento o el rendimiento incluida la detección de errores	Enunciaciones en el momento en que cree haber encontrado un error.	0	3	1	
	Auto correcciones	Comentarios personales que realiza al corregir.	0	0	0	
Estrategias	Indicadores		Verbalización	Torre de Hanoi	Elaboración de la caja	Generalización
Control	Cambia las estrategias como resultado de supervisiones anteriores	Enunciaciones al momento de tomar la decisión del cambio de estrategia.	1	0	0	
	Sugiere y usa estrategias para resolver la tarea de manera más efectiva	Palabras que menciona al comprobar mayor efectividad en la nueva tarea	1	1	2	
	Aplica una estrategia previamente aprendida a una nueva situación	Hace mención a situaciones anteriores que están relacionadas con la actual	0	1	0	
	Repite una estrategia para verificar la precisión del resultado .	Por qué realizó el nuevo procedimiento?	0	0	0	
	Busca ayuda	Expresiones verbales o gestuales en el momento que se da cuenta que debe buscar ayuda.	0	0	0	
	Utiliza el gesto no verbal como estrategia para anunciar la error	Observación	0	0	0	
Copia o imita un modelo	¿De dónde sacaste la idea ?	0	0	0		
Estrategias	Indicadores		Verbalización	Torre de Hanoi	Elaboración de la caja	Generalización
Evaluación	Revisa el aprendizaje propio o revisa la tarea	Enunciaciones que sugieren que debe revisar el trabajo hasta el momento	0	1	1	
	Evalúa las estrategias utilizadas	Cómo se da cuenta que la estrategia funcionó?	3	0	1	
	Observa y comenta sobre el progreso de la tarea	Qué aprendió acerca de su forma para solucionar problemas?	0	1	1	
Cuáles de estos elementos le pueden servir para la solución de cualquier problema?		0	1	1		

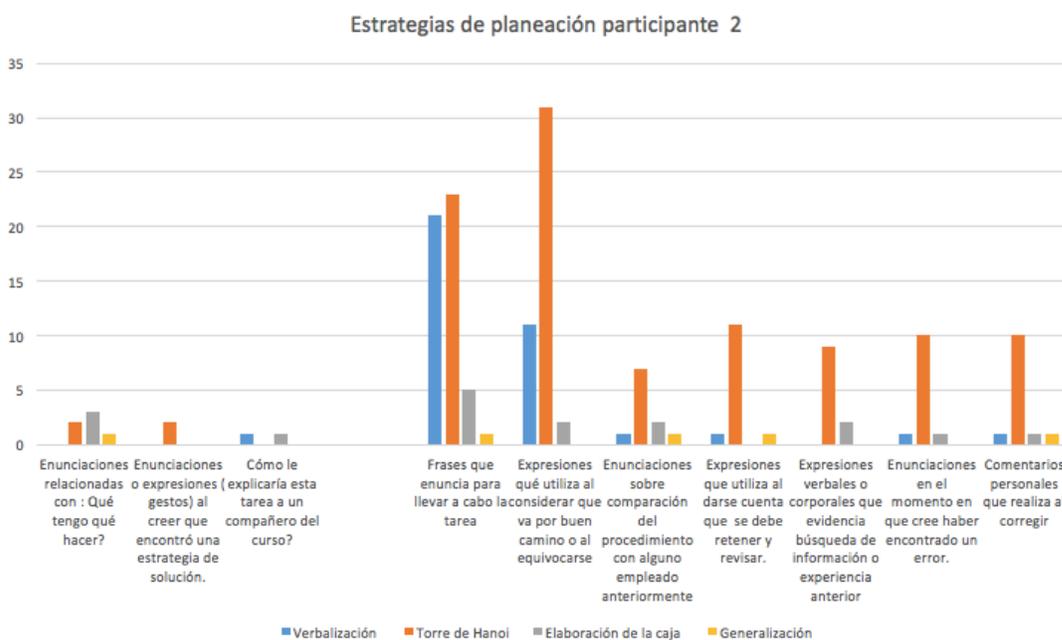
Resultados Participante 2

El segundo participante mostró mayor nivel de expresión verbal. En su trabajo, se observó un número considerable de evidencias de que usó de estrategias metacognitivas. A continuación, las analizo.

En la fase 1: verbalización

Tabla 8

Resultado del participante 2 Estrategia de planeación

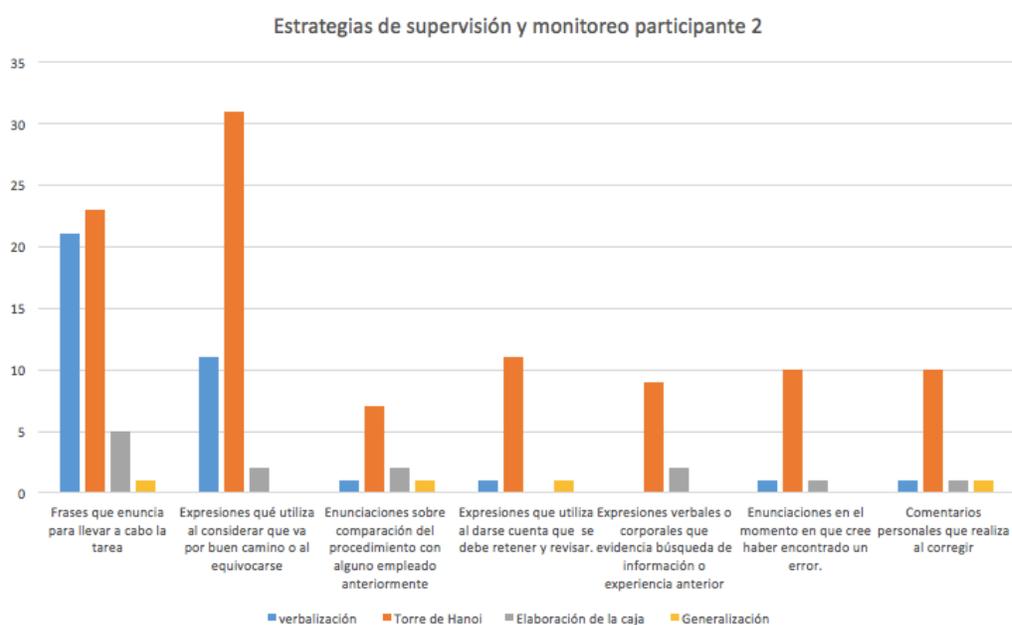


Estrategia de planeación: En la gráfica 9 se puede apreciar que sobresalen las enunciaciones para llevar a cabo una tarea. El estudiante dedicó poco tiempo a interpretar las condiciones de la situación y a planear una estrategia acorde con estas. Así, se lanzó a probar algunas instrucciones, pero, enseguida, se dio cuenta de que había omitido una característica determinante: que el receptor de las indicaciones era una persona invidente.

Al darse cuenta de este detalle, se tomó más tiempo para determinar los aspectos que debía tener en cuenta al explicarle a una persona que no podría valerse de referentes visuales: “se supone que un ciego tiene un palo” “Se supone que pueden leer esos puntitos y ahí saben dónde queda”; “Entonces si está con un compañero le daría unas instrucciones”.

Tabla 10

Resultado del participante 2 Estrategia de supervisión y monitoreo

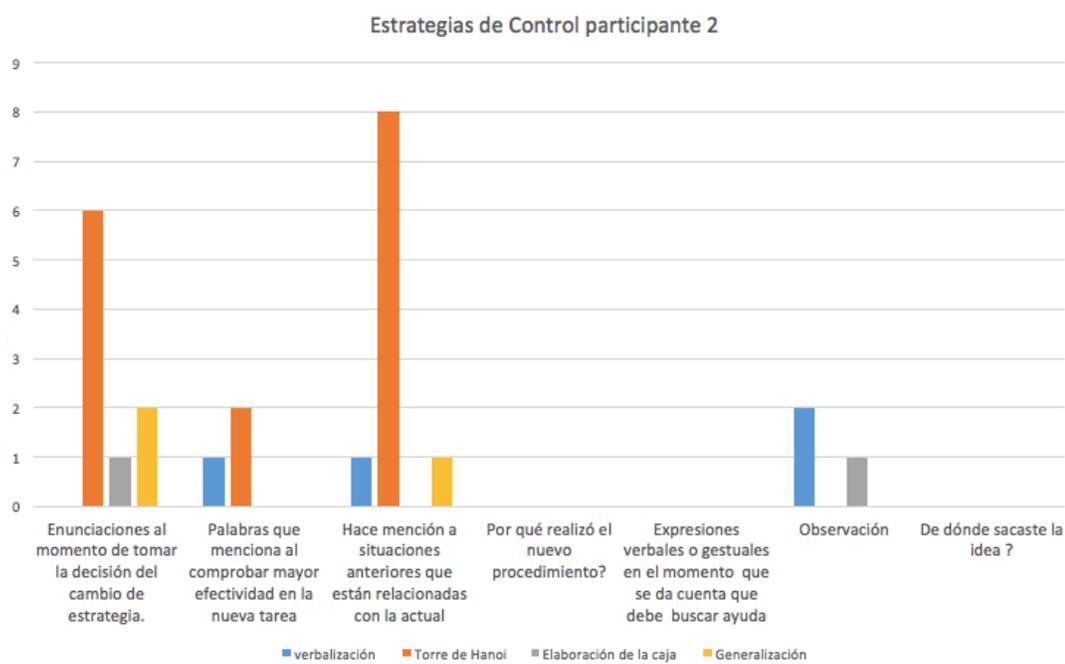


En este punto, el participante empleó un mayor número de expresiones relacionadas con la **supervisión y monitoreo**. Claramente, se observa que usó expresiones como esta, cuando consideró que iba por buen camino o al equivocarse: “El problema es cuando está solo porque es muy difícil explicarle a un ciego”. Allí, se observó un empleo mínimo de expresiones relacionadas con la identificación de algún error, por lo cual se infiere que el participante no empleó experiencias anteriores para la supervisión de la tarea. Esto notó sobre todo al darse cuenta de que había ignorado la discapacidad de la persona. El participante concluyó que sus instrucciones eran correctas sin hacer mucha reflexión en

torno a la comprobación. El participante consideró ajustar las instrucciones considerando situaciones como: - “Claramente, desde que esté dentro del colegio tiene ventajas”. - “¿Por qué tiene ventajas?” - “Porque el Colegio tiene letreros con puntos para ciegos, entonces se le puede explicar; se supone que pueden leer esos puntitos y ahí saben dónde queda”.

Tabla 11

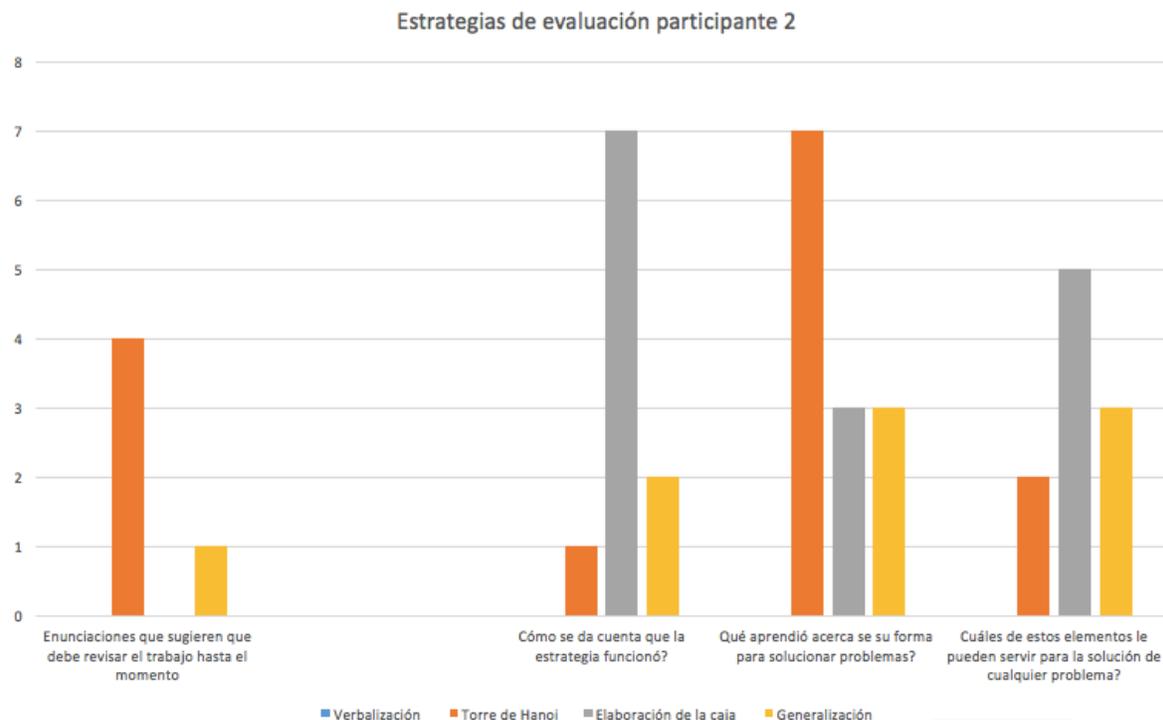
Resultado del participante 2 Estrategia de control



Se puede apreciar que las estrategias de control tiene pocas evidencias en este reto. Por otro lado se aprecia total ausencia de estrategias de evaluación. Esto se puede apreciar en la tabla 12.

Tabla 9

Resultado del participante 2 en Estrategia de Evaluación



Fase 2: La torre de Hanoi:

Planeación: El estudiante resumió con una frase corta en qué consiste la tarea: - “Trasladar unos discos de un lado a otro, ese es el objetivo”. Evitó iniciar con ensayo, error y decidió antes imaginar los movimientos en su mente: - “Por ahora estoy pensando en poner esta acá”. Se hace preguntas: - “Bueno, ¿qué es lo que tenemos qué hacer? Y se responde: - “poner estas acá”. Entonces, se propuso iniciar la tarea para lo que decidió una acción básica: - “Empecemos por lo fácil: aquí hay que sacar una por una. Pidió colaboración para contar los pasos: - “Tú los vas contando porque no quiero contar”.

Luego de algunos movimientos descubrió una estrategia inicial: “¡Eeh! Ahora lo mejor es sacar la pequeña acá para que no intervenga y esta para acá”. Y así inició la

prueba de ensayo y error. Se apreciaron numerosas evidencias de frases que el participante enunció para llevar a cabo la tarea: - “Acá es cuando me pongo a pensar cómo mover imaginariamente mis discos”. Se hizo preguntas y se respondió: - “¿Para qué toca mover esta acá?... Esta toca moverla acá”, enfatiza. -Pero me toca organizarla bien acá. - “*¡That means that we have to...*”.

Reconoció que debía iniciar de nuevo y clarificar la idea original: “Bueno. Empecemos desde el principio; más o menos ya tengo una idea de cómo es, más o menos. O sea, los primeros siete pasos ya me los sé”. Se aprecia cómo realizó los movimientos de los discos y cómo, al mismo tiempo, se fue formulando preguntas: “-Tengo que poner esta acá. ¿Cómo hago para poner esa acá?” El diálogo consigo mismo se observó a lo largo de la secuencia. También él mismo se invitó a pensar en lo que iba haciendo: “Pensemos, razonemos como diría yo”.

Supervisión y monitoreo: El mayor número de evidencias se percibió en el uso de estrategias de supervisión y monitoreo. Sobre todo, se escucharon expresiones cuando consideraba que iba por buen camino o cuando se equivocaba: “-Algo no me cuadra... tengo todavía seis movimientos” Y, nuevamente, usó auto cuestionamientos: “- ¿Por qué no los quiero mover acá, por qué? Y se respondió: “Pues porque no me puedo pasar de los 15 movimientos”. También, el participante expresó varias veces si creía que iba por mal camino y realizó ajustes: “No. Falso, falso” –reacomodó- “Íbamos acá en ocho, toca sacar esta, no la puedo mover acá”.

En este reto, el participante logró llegar a una conclusión importante para la solución: “-A los quince ya debo tener los cuatro hechos”. De ahí que el estudiante logró identificar que los movimientos hasta el paso 15 son iguales en la secuencia, sin importar el número de monedas que tenga. Este razonamiento resultó fundamental para ir configurando

el reconocimiento de patrones. Desde el movimiento 14 el participante debía identificar cómo continuaba el patrón de movimiento. Así pues, los cambios que hizo y el ensayo-error le permitieron llegar a una conclusión personal: “-De hecho, creo que ya hay un patrón, si no estoy mal, o ¿tal vez no hay un patrón?”. Sin embargo, no había suficiente información para tener seguridad al respecto.

Al continuar, el participante reconoce que la secuencia ya tiene errores sin necesidad de llegar hasta el último paso: “Sé que me estoy pasando, es que ya perdí la cuenta. Ya perdí la cuenta eso ya lo sé perfectamente”. -Mueve los discos despacio y observa- y asume que ha fallado: “Fallé, fallé, fallé “. Sin embargo, esto es momentáneo porque reanuda los movimientos y recuerda la posición de los discos a los 15 pasos. Esto le ayuda a no empezar desde cero. - “¿En qué paso íbamos cuando íbamos así? Esta pregunta muestra que el participante buscó información o experiencia anterior: - “A ver, aquí creo que fue cuando cometí el error anterior, no estoy seguro si fue por eso”.

Claramente, el participante enunció expresiones en el punto en el que creyó haber encontrado un error: “¡Shit!” “Así no era (dice mientras hace el siguiente movimiento). “Ok. Acabo de cagar el reto” Y expresó su confusión: “¡Espera! Es que ni siquiera sé si lo he hecho mal”. Se evidencia suficiente número de auto comentarios, sobre todo al corregir: - “¿Por qué se complica? Yo que voy a saber” y de nuevo se pregunta y se responde.

El participante identifica la dificultad del reto, los momentos en que cree que va por mal camino y reconoce que debe detenerse a pensarlo: - “No. ¡No sé si voy bien o mal! No hay manera, bueno si hay manera, ¡pero me tocaría pensarlo! Es que, pues, cada movimiento abre la oportunidad a un nuevo mundo”

Control y evaluación: El participante evidenció menor número de enunciaciones con el control y la evaluación. Sin embargo, las que expresó, redirigieron su trabajo: “¿Qué tengo que hacer? Sacar estas, eso es obvio. Para sacar esta ¿qué tengo que hacer? Ah pues pasarla acá, inteligente”. Y le permitieron darse cuenta si le funcionaba el nuevo rumbo: “No. Ahí me estoy devolviendo a lo mismo. Recordó las conclusiones a las que había llegado anteriormente: - “Yo siempre había dejado esta afuera y casi siempre me dio esto” “Ahí irían nueve pasos” “¿Yo cómo lo hice la anterior vez? Tampoco me acuerdo”. Fue evidente el uso de lenguaje no verbal, como tamborilear con los dedos, tocarse la cabeza al creer que iba por mal camino. Llegó a conclusiones sobre el alcance de la tarea: “Algo me dice que no voy a alcanzar”.

El participante expresó varias conclusiones sobre su forma de aprender y recomendaciones para futuras tareas: “Hagan las pruebas ilimitadas y no las hagan mentalmente. Como dije anteriormente: si tienen forma de practicarlo varias veces es lo mejor, pues se van a acordar de sus errores”

Fase 3:**Elaboración de la caja:**

Planeación: Esta fase va reflejando el manejo del pensamiento abstracto. En este punto, hubo menos evidencia del uso de estrategias metacognitivas si se compara con las anteriores etapas. Aquí, el participante no dedicó mucho tiempo a establecer las demandas de la tarea, ni a releer la situación, ni a reconocer información relevante o irrelevante.

Supervisión y monitoreo: hizo algunos auto comentarios; sobre todo relacionados con las dimensiones y con el uso del material real. Para la elaboración de la caja tomó medidas colocando la vela sobre el papel para deducir las dimensiones del material empleado. Utilizó recursos a su disposición como un cilindro ubicado en el laboratorio en el que se realizaba la secuencia. D

El participante hizo cuentas e hizo ajustes sobre las medidas. Borró y volvió a medir: “De aquí serían doce más ocho. ¡Aah! 32, 32, 32! ¡Porque es casi lo mismo”! Finalmente, identificó las medidas de la caja, aunque empleó sobre manera la comparación directa de medidas

Tabla 10

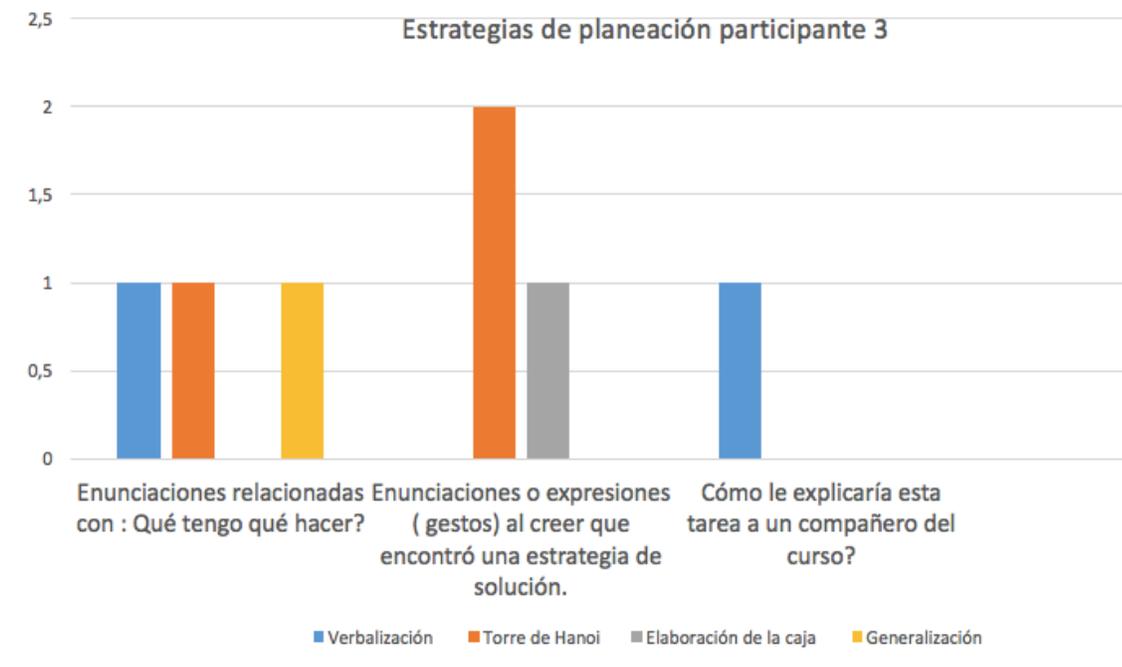
Resultado del participante 2

Estrategias	Indicadores		Participante 2				
			Verbalización	Torre de Hanoi	Elaboración de la caja	Generalización	
Planeación		Enunciaciones relacionadas con : Qué tengo que hacer?		2	3	1	
		Enunciaciones o expresiones (gestos) al creer que encontré una estrategia de solución.		2	0	0	
		Establece metas y objetivos	Cómo le explicaría esta tarea a un compañero del curso?	1	0	1	0
			verbalización	Torre de Hanoi	Elaboración de la caja	Generalización	
Supervisión y monitoreo		Decide formas de proceder con la tarea	Frases que enuncia para llevar a cabo la tarea	21	23	5	1
		Autocomentarios	Expresiones que utiliza al considerar que va por buen camino o al equivocarse	11	31	2	0
		Revisa el progreso de la tarea haciendo un seguimiento de los procedimientos que se están llevando a cabo actualmente y los que se han realizado hasta el	Enunciaciones sobre comparación del procedimiento con alguno empleado anteriormente	1	7	2	1
		Califica o hace comentarios sobre la recuperación de la memoria	Expresiones que utiliza al darse cuenta que se debe retener y revisar.	1	11	0	1
		Verifica el comportamiento o el rendimiento incluida la detección de errores	Expresiones verbales o corporales que evidencia búsqueda de información o experiencia anterior	0	9	2	0
			Enunciaciones en el momento en que cree haber encontrado un error.	1	10	1	0
			Comentarios personales que realiza al corregir	1	10	1	1
Estrategias							
	Indicadores		verbalización	Torre de Hanoi	Elaboración de la caja	Generalización	
Control		Cambia las estrategias como resultado de supervisiones anteriores	Enunciaciones al momento de tomar la decisión del cambio de estrategia.	0	6	1	2
		Sugiere y usa estrategias para resolver la tarea de manera Sugiere más efectiva	Palabras que menciona al comprobar mayor efectividad en la nueva tarea	1	2	0	0
		Aplica una estrategia previamente aprendida a una nueva situación	Hace mención a situaciones anteriores que están relacionadas con la actual	1	8	0	1
		Repite una estrategia para verificar la precisión del resultado	Por qué realizó el nuevo procedimiento?	0	0	0	0
		Busca ayuda	Expresiones verbales o gestuales en el momento que se da cuenta que debe buscar ayuda	0	0	0	0
		Utiliza el gesto no verbal como estrategia para apoyar la propia actividad cognitiva	Observación	2	0	1	0
		Copia o imita un modelo	De dónde sacaste la idea ?	0	0	0	0
Estrategia	Indicadores		Verbalización	Torre de Hanoi	Elaboración de la caja	Generalización	
Evaluación		Revisa el aprendizaje propio o revisa la tarea	Enunciaciones que sugieren que debe revisar el trabajo hasta el momento	0	4	0	1
		Evalúa las estrategias utilizadas	Cómo se da cuenta que la estrategia funcionó?	0	1	7	2
		Observa y comenta sobre el progreso de la tarea	Qué aprendió acerca de su forma para solucionar problemas? Cuáles de estos elementos le pueden servir para la solución de cualquier problema?	0	7	3	3
			0	2	5	3	

Resultados Participante 3

Tabla 11

Resultados Participante 3 Estrategias de planeación



Reto 1 : Verbalización:

En la tabla 14 se puede apreciar un bajo número de evidencias relacionadas con Qué tengo que hacer?. Por otra parte no se halla evidencia en cuanto a expresiones al creer que encontró una estrategia de solución.

Planeación: Los largos silencios y la escasa expresión oral en la intervención de la Participante 3 mostró pocas evidencias del uso de estrategias metacognitivas. En el reto 1, la participante leyó una vez las instrucciones y procedió a dar indicaciones, a modo de ensayo y error.

Supervisión y monitoreo: En este punto, la participante hizo una corrección luego de escuchar la grabación con las instrucciones dadas. La corrección se refería a un detalle: - “Si. Pues se me olvidó decirle que..” Hizo el ajuste y dio las indicaciones definitivas sin detenerse a analizar de nuevo las instrucciones dadas.

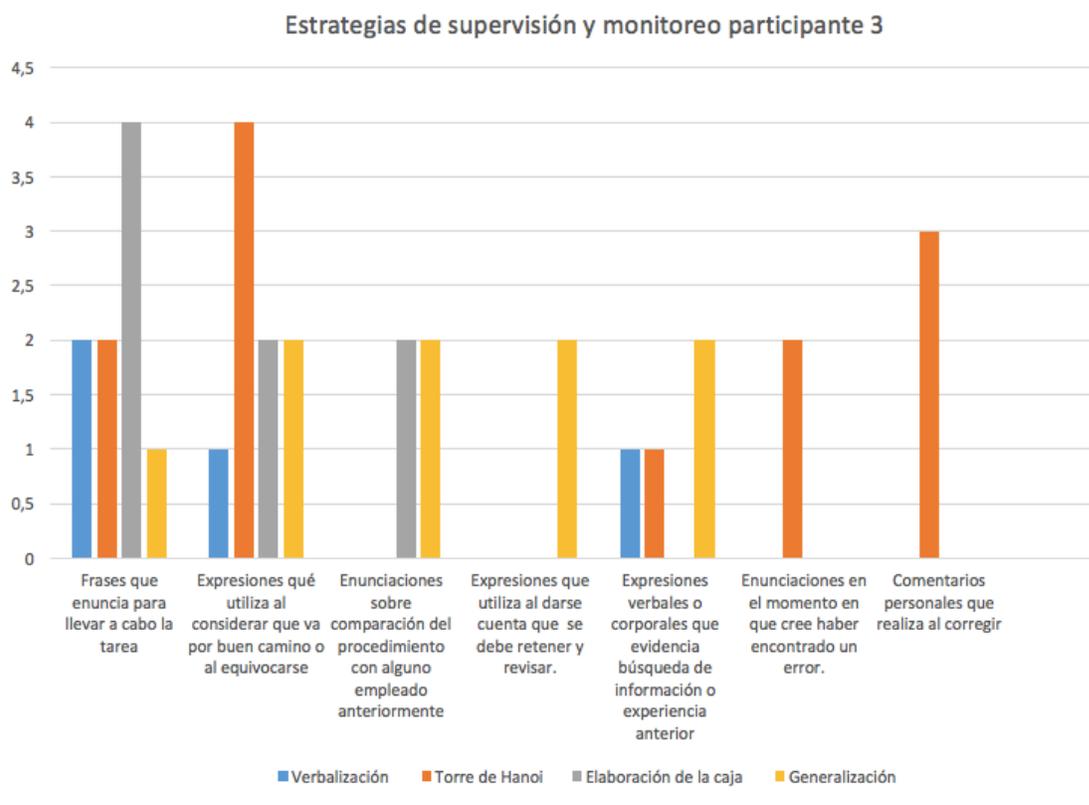
Control y evaluación: La participante razonó que debía usar expresiones más claras que fueran más significativas para el oyente e hizo un ajuste. Como un aspecto aprendido de la forma de solucionar problemas mencionó que debe ser más precisa con las indicaciones: - “Decir bien a la derecha, a la izquierda, darle señales o referentes como por ejemplo que hay carros o que hay unas escaleras”. Cabe señalar que la estudiante empleó dos expresiones parecidas: “derecho” y “a la derecha” y que ambas expresan dirección.

Reto 2: La torre de Hanoi:

Planeación: Según la tabla 14, el participante evidenció el mayor uso de expresiones al creer que encontró una solución en ese reto. En la torre de Hanoi, la participante definió con precisión el reto asignado: “Trasladar estos a otra de las dos torres”. Cumplió el reto con tres discos en un solo intento y, luego, procedió a hacer lo correspondiente con cuatro discos en 15 movimientos.

Tabla 12

Resultados Participante 3 Estrategias de supervisión y monitoreo



Supervisión y monitoreo: Su desempeño estuvo acompañado de murmuraciones, además de silencios largos durante los que la participante observaba los discos y los espacios vacíos. Al pedirle que expresara aquello que estaba pensando, respondió: -“Es que no se que estoy pensando”. Y procedió a hacer una consideración en voz alta: “Es que no debe quedar uno más grande, cinco, seis, siete, ocho”. Pero luego descubrió una salida: - “¡Aaah. Entonces, sí podría pasar esta aquí, ¡este aquí!”. Hizo un conteo, murmuró y se habló a sí misma en un volumen de voz casi imperceptible.

Al preguntarle de nuevo ¿Qué estaba pensando respondió: “Estoy leyendo las instrucciones para ver qué?” Enseguida, realizó movimientos y se anticipó al resultado: “O sea, va a estar mal ...nueve”. Descubrió la falla y se respondió: “NO, si, si, si. Quince” Con estas palabras finalizó el reto. Al plantearle la pregunta: ¿cómo descubrió el error? Dijo: “Empecé a jugar con los discos; para serte sincera, pensé que no lo iba a lograr”. Por este motivo, se le preguntó si quería repetirlo.

Control y evaluación: Entonces, inició de nuevo la secuencia, contó los pasos y descubrió: “Que tenía que separar creo que este, el mediano, y ponerlo aquí”. De esta forma cumplió el reto sin numerosos ajustes y retrocesos. En el momento de aplicación de la secuencia, la participante no aceptó hacer el reto con cinco discos. Cabe destacar que, en la hora de estudio del día siguiente, la participante solicitó prestado el juego y lo solucionó con los cinco discos en 31 pasos.

Reto 3

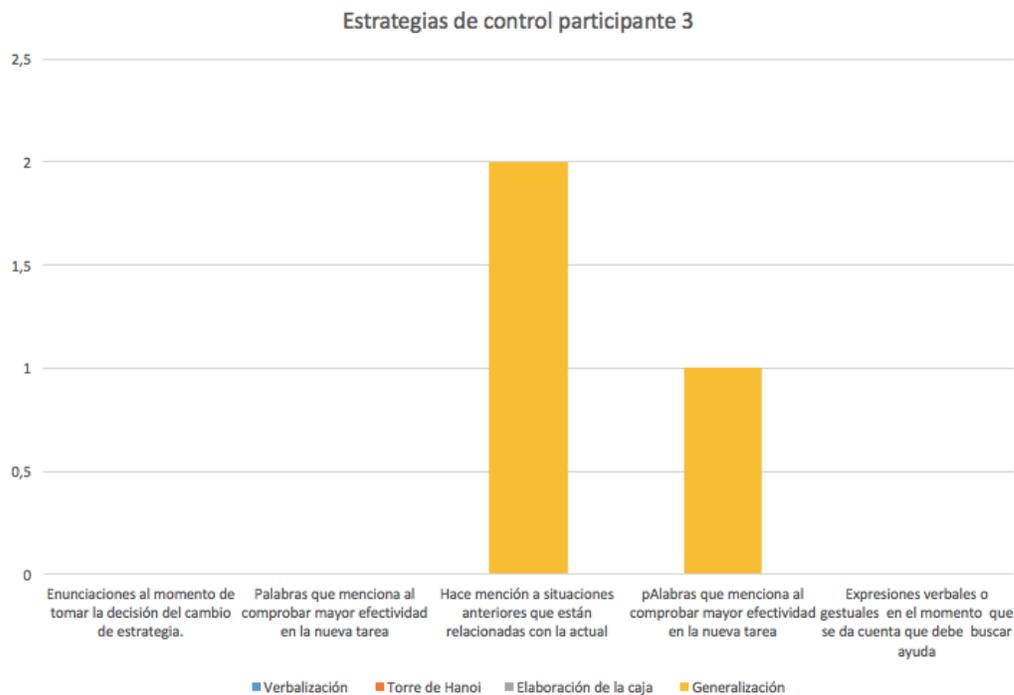
Planeación: al leer el reto 3, la participante procedió a identificar información relevante: - “Primero, voy a ver la altura de la vela, 12 cm y de diámetro 8.” De nuevo, leyó en voz baja y se habló a sí misma. Duró un lapso amplio de tiempo callada, observando y midiendo.

Supervisión y monitoreo: La participante estuvo callada por varios minutos, observando y midiendo. Al preguntarle ¿Qué estás pensando? expresó: “Estoy midiendo para hacer la base y luego hacer la caja como las venden en servicios de entrega”. Fue así como recordó un ejercicio anterior trabajado en clase en el cual se utilizó una caja. En ese punto dijo: “Tú hiciste la caja en el tablero pero no la lámina”. Este recuerdo la llevó a plantear una estrategia: - “La estoy dividiendo en dos centímetros y me di cuenta de que

aquí no alcanzó”. Luego de esto hubo un silencio prolongado y dijo: - “Esto es para medir la caja para ver cuánto de largo va a ser la altura en metros, o algo así”.

Tabla 16

Resultados Participante 3 Estrategias de control



Control y evaluación: Determinó las dimensiones halladas y dijo: “Esto sería la altura. Entonces esto (silencio) creo que así quedaría”. Y lo confirmó: “Creo que sí”. Escribió unas medidas y a partir de estas se le preguntó: -¿Cómo sabe si le funcionaron las medidas? -“Hice la caja en modelo en tres D. Esta sería una altura y esta sería otra altura; estas cuatro serían alturas; y estas son la tapa de la base”. Al finalizar esta fase se le preguntó: -“¿Cómo te enfocaste en lo que tenías que hacer? -“Pues, a veces me salto cosas, pero cuando me empiezo a imaginar las cosas van fluyendo.” Además, la participante identificó elementos en su forma de solucionar problemas de años anteriores: - “Para

enfocarme, normalmente yo me meto en la hoja y empiezo a hacer operaciones. Y como hicimos con el anterior: empiezo a jugar para empezar a meterme en la operación y ver otras formas o la forma correcta de hacerlo”

Reto 4

Planeación: El reto cuatro es la sección en la que se abarca de manera más profunda el pensamiento variacional. En este punto, después de leer la instrucción, la participante empezó a dibujar, pero desde el inicio requirió intervención por medio de preguntas desestabilizadoras.

Supervisión y monitoreo: El proceso de reconocimiento de la X requirió apoyo para propiciar la reflexión metacognitiva.

Control y evaluación: En una parte del proceso se enfrentó a decidir si usaba x^2 o $2x$ y entonces dijo: -“Cuando se suma se pone x^2 ” La participante se dio cuenta del error: “¡Ay profe, espera, como lo hice en las evaluaciones”. Y por medio del recuerdo pudo determinar la forma correcta de decirlo. “No. No. Es $2x$ porque recuerdo que Sebastián fue contigo y tu le dijiste que cuando se suma no se debe sumar los exponentes: solo cuando se está multiplicando. El pensamiento variacional requiere un anclaje cognitivo para poder dar el salto al otro nivel de formalidad en el pensamiento.

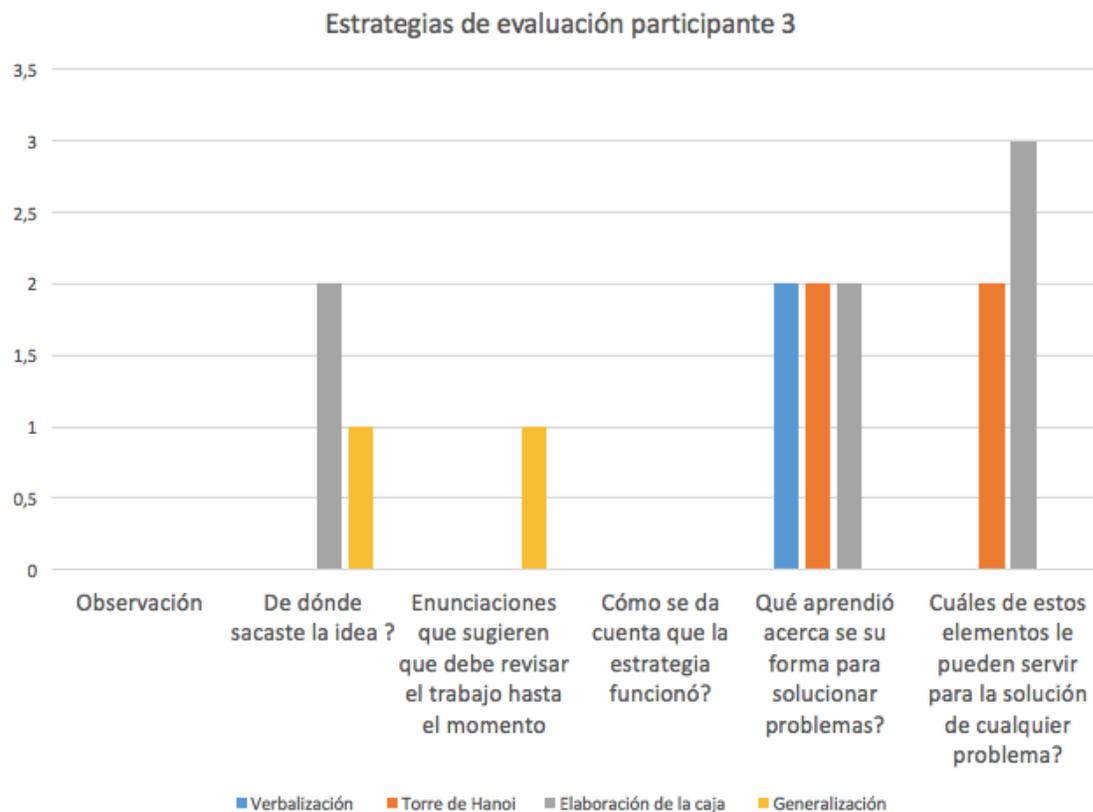
Tabla 17*Resultados Participante 3 Estrategias de Evaluación*

Tabla 13

Resultados Participante 3

	Indicadores		Verbalización	Torre de Hanoi	Elaboración de la caja	Generalización
Planeación		Enunciaciiones relacionadas con : Qué tengo que hacer?	1	1	0	1
		Enunciaciiones o expresiones (gestos) al creer que encontró una estrategia de solución.	0	2	1	0
	Establece metas y objetivos	Cómo le explicaría esta tarea a un compañero del curso?	1	0	0	0
	Indicadores		Verbalización	Torre de Hanoi	Elaboración de la caja	Generalización
Supervisión		Frases que enuncia para llevar a cabo la tarea	2	2	4	1
	Decide formas de proceder con la tarea	Expresiones que utiliza al considerar que va por buen camino o al equivocarse	1	4	2	2
	Autocomentarios	Enunciaciiones sobre comparación del procedimiento con alguno empleado anteriormente	0	0	2	2
		Expresiones que utiliza al darse cuenta que se debe retener y revisar.	0	0	0	2
	Califica o hace comentarios sobre la recuperación de la memoria	Expresiones verbales o corporales que evidencia búsqueda de información o experiencia anterior	1	1	0	2
	Verifica el comportamiento o el rendimiento incluida la detección de errores	Enunciaciiones en el momento en que cree haber encontrado un error.	0	2	0	0
	Autocorrecciones	Comentarios personales que realiza al corregir	0	3	0	0
Estrategias	Indicadores		Verbalización	Torre de Hanoi	Elaboración de la caja	Generalización
Control	Cambia las estrategias como resultado de supervisiones anteriores	Enunciaciiones al momento de tomar la decisión del cambio de estrategia.	0	0	0	0
	Sugiere y usa estrategias para resolver la tarea de manera Sugiere más efectiva	Palabras que menciona al comprobar mayor efectividad en la nueva tarea	0	0	0	0
	Aplica una estrategia previamente aprendida a una nueva situación	Hace mención a situaciones anteriores que están relacionadas con la actual	0	0	0	2
	Repite una estrategia para verificar la precisión del resultado	Palabras que menciona al comprobar mayor efectividad en la nueva tarea	0	0	0	1
	Busca ayuda	Expresiones verbales o gestuales en el momento que se da cuenta que debe buscar ayuda	0	0	0	0
			Verbalización	Torre de Hanoi	Elaboración de la caja	Generalización
	Utiliza el gesto no verbal como estrategia para apoyar la propia actividad cognitiva	Observación	0	0	0	0
	Copia o imita un modelo	De dónde sacaste la idea ?	0	0	2	1
Evaluación	Revisa el aprendizaje propio o revisa la tarea	Enunciaciiones que sugieren que debe revisar el trabajo hasta el momento	0	0	0	1
	Evalúa las estrategias utilizadas	Cómo se da cuenta que la estrategia funcionó?	0	0	0	0
	Observa y comenta sobre el progreso de la tarea	Qué aprendió acerca de su forma para solucionar problemas?	2	2	2	0
		Cuáles de estos elementos le pueden servir para la solución de cualquier problema?	0	2	1	0

Comparación de resultados

En cuanto a las estrategias de Planeación, según la tabla 19, se puede apreciar un mayor nivel de verbalización en el participante 1. Sin embargo, al llegar a la fase de mayor dificultad no se evidencia uso de estas estrategias. La gráfica muestra que los participantes 2 y 3 evidenciaron uso de estrategias de planeación en la fase de mayor dificultad, la fase 4: Generalización.

Tabla 19

Comparación resultados de los tres participantes en las estrategias de planeación

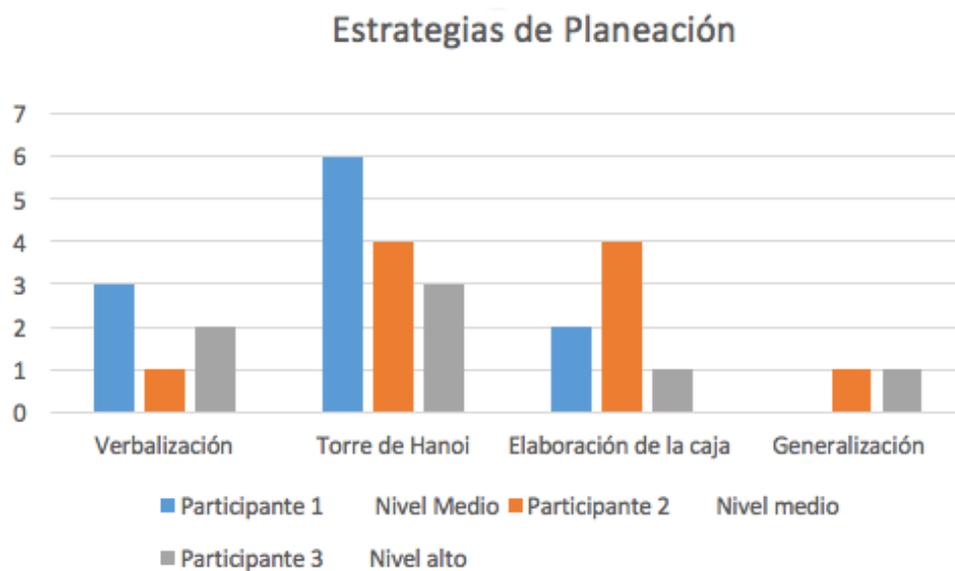
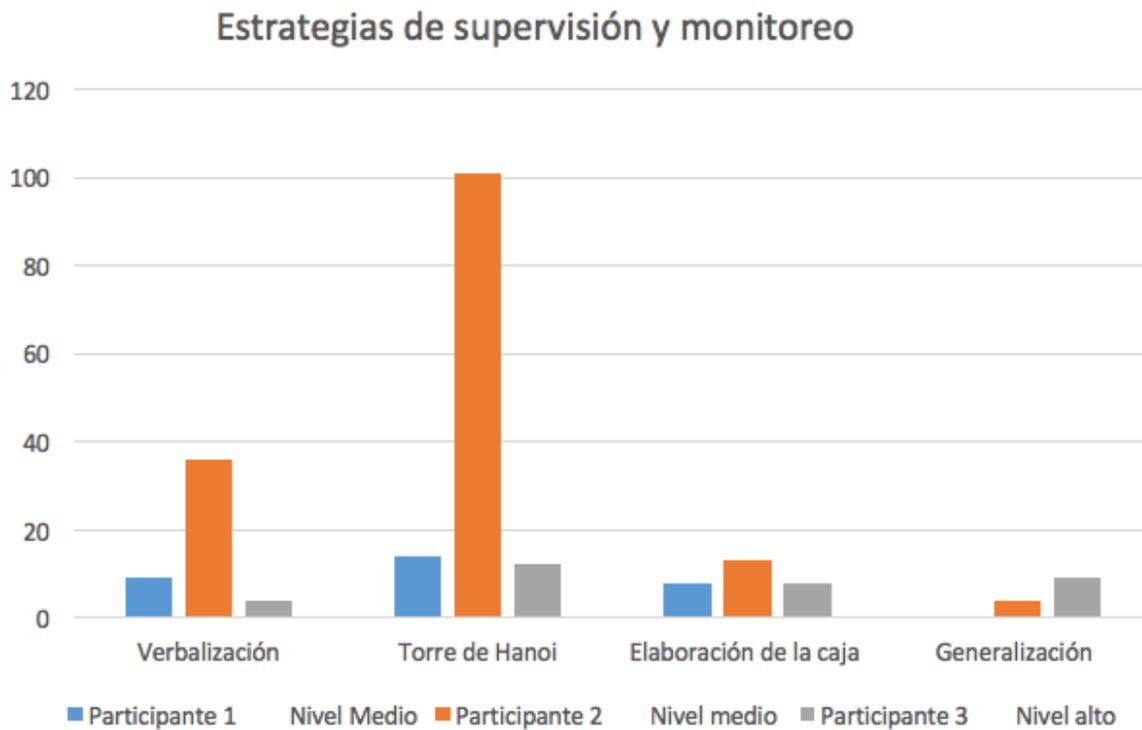


Tabla 20

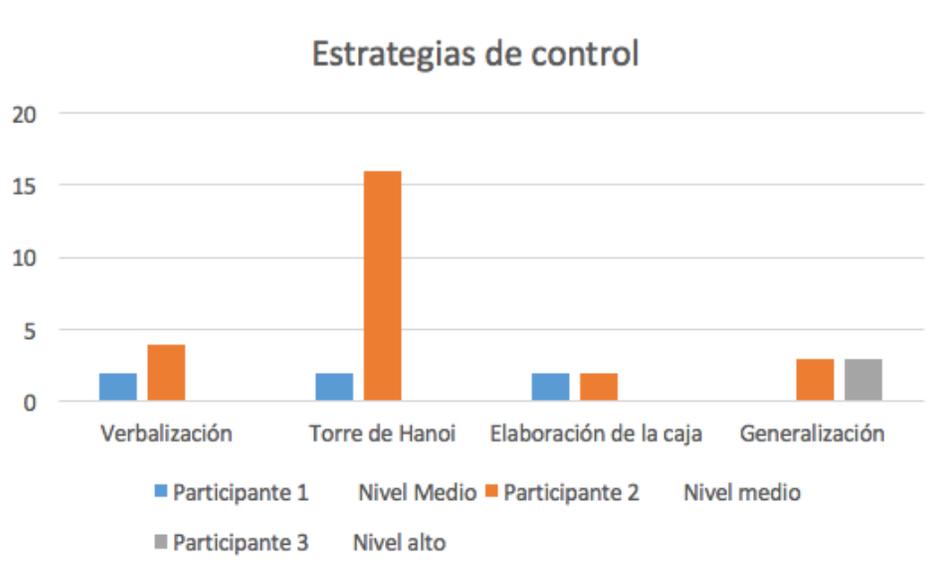
Comparación resultados de los tres participantes en las estrategias de supervisión y monitoreo



La tabla 20 evidencia mayor número de evidencias de verbalización en el participante 2 en cuanto a las estrategias de supervisión y monitorio. Hay una significativa diferencia con los demás. Sin embargo, en la experiencia se observó que en varias ocasiones estas expresiones se referían a aspectos apartados del reto que no contribuían al logro del objetivo. La participante 3, de nivel alto en rendimiento académico, evidencio poco uso de estrategias de supervisión y monitoreo. En la experiencia se notó que reflexionaba en voz baja, se hablaba a si misma y tomaba decisiones rápidas.

Tabla 21

Comparación resultados de los tres participantes en las estrategias de control

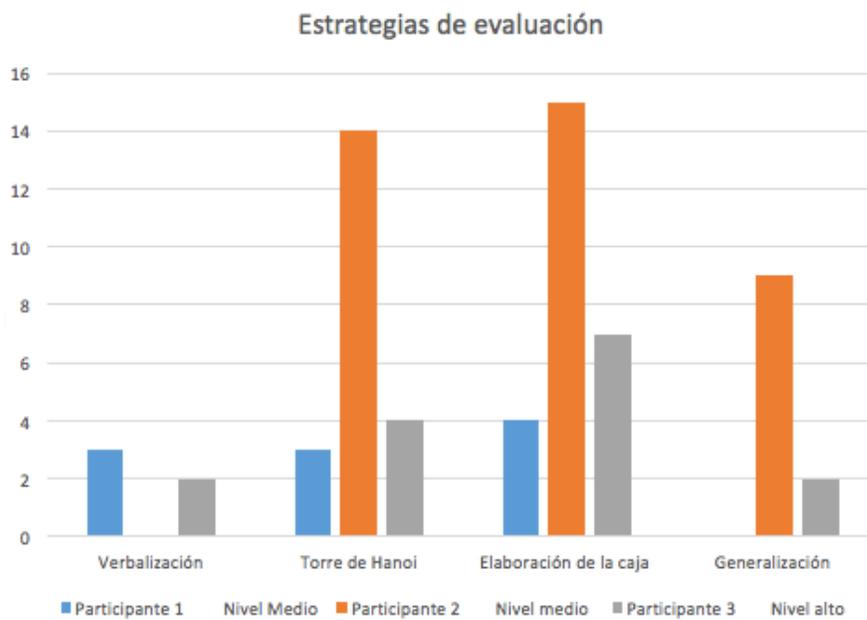


En la tabla 21 se puede apreciar mayor número de enunciaciones de control por parte del participante 2 principalmente en el reto de las torres de Hanoi. Por otra parte, la participante 3 solo evidencia enunciaciones de control en la fase de mayor grado de dificultad. Esto evidencia que puede haber una proporción directa en el uso de estrategias metacognitivas y el grado de dificultad del reto abordado.

Lo anterior se puede apreciar de forma similar en la tabla 22, ya que se puede ver mayor número de evidencias en las estrategias de evaluación en los participantes de mayor dificultad en los estudiantes de rendimiento medio y alto.

Tabla 22

Comparación resultados de los tres participantes en las estrategias de evaluación



Discusión de resultados

- 1- Se evidenció en el participante 1 pocas enunciaciones en cuanto a establecer las demandas de la tarea, excepto en el reto de la torre de Hanoi. Ya que en este reto hubo auto comentarios relacionados para establecer: “Qué tengo que hacer”. Por otra parte, sobresale el empleo de estrategias de supervisión y monitoreo con respecto a las de control y evaluación. Se destaca el uso de frases que enuncia para llevar a cabo la tarea, las expresiones que usa al considerar que va por buen camino y las que usa al darse cuenta de que debe revisar.
- 2- En el participante 1 no se evidencia explicitación del pensamiento para determinar la efectividad de la estrategia utilizada para cumplir con la tarea. Esto no se evidencia en ninguno de los retos planteados. Tampoco hay evidencia de enunciaciones que le permitan revisar estrategias previamente aprendidas o buscar ayuda de forma intencionada. El participante guardaba silencio y con la mirada buscaba el apoyo de la profesora. La explicitación del pensamiento matemático implica reconocer qué no entiende, qué debe profundizar y qué debe consultar.
- 3- En todos los participantes hay mayor evidencia en el uso de estrategias metacognitivas de supervisión y control. En este sentido sobresale el participante número 2. Se destacó la cantidad de evidencias correspondientes a autocomentarios y expresiones al realizar la tarea. El participante No 1 se hacía preguntas de forma recurrente, se respondía y se animaba a seguir. Todo ello en un monólogo metacognitivo”. Sin embargo, dicha verbalización del pensamiento no era garantía de la movilidad de su reflexión metacognitiva. Esto se refleja si se considera el número de

enunciaciones encontradas en el uso de estrategias de control, cuyo número es significativamente menor.

- 4- El reto número 4 fue abordado por dos de los participantes. Sin embargo, los dos requirieron ayuda en mayor o menor grado para realizar el paso del pensamiento concreto al abstracto. Esta ayuda fue una pregunta, una frase o una orientación. Algún ensamblaje cognitivo que le permitiera movilizar su reflexión metacognitiva frente a la formalidad del nuevo concepto. El participante que no abordó el reto leyó las instrucciones, realizó unos ensayos y tomó la decisión de desistir.
- 5- En pensamiento concreto, la altura de la vela es 12 cm, se puede graficar y medir. Pero al asumir que la altura de la vela es x debe realizar la transformación, no solo del concepto de altura sino el de longitud del lado de la lámina. Esta ya no podrá tener un valor en el conjunto de los números Enteros. La longitud del lado de la lámina estaría dada por la expresión $30 - 2x$.

Conclusiones

El planteamiento de situaciones problema requiere de un proceso reflexivo en torno a cuáles conceptos están involucrados, cómo plantear la pregunta de forma que sea significativa para el estudiante, cómo acercarla a su contexto y cómo favorecer el desarrollo de estrategias metacognitivas. Por su parte Agre (1982) en Iriarte (2011) explica que, para llamarse problema, una situación debe generar incomodidad, tanta que lleve al estudiante a querer liberarse de la situación y debe tener cierto nivel de dificultad, pero debe tener solución.

En matemática se distinguen las situaciones matemáticas y los ejercicios. Los últimos se fundamentan más en la mecanización y la repetición. Las situaciones implican una reflexión en torno a las estrategias utilizadas para su solución y para reconocer el concepto aplicado. Al respecto, Callejo (1998) en Iriarte (2022) define un problema como:

una situación que plantea una cuestión matemática y cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al sujeto, quien intenta responder porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o los datos y la conclusión y debe, por tanto, buscar, investigar, establecer relaciones, implicar sus afectos, entre otros; para hacer frente a una situación nueva. Es pues un concepto relativo al sujeto que intenta resolverlo y al contexto que se plantea la cuestión (p.49).

El desarrollo de situaciones problemáticas configura el detonante de la actividad cognitiva y metacognitiva, ya que involucra el funcionamiento del ensamblaje cognitivo y las estrategias desarrolladas con anterioridad. Por otro lado, una pregunta sugestiva genera inquietud, curiosidad y moviliza el pensamiento. Las situaciones no convencionales se

salen de un modelo de pensamiento mecánico. Este aspecto favorece la creatividad y el desarrollo de la reflexión metacognitiva. Al respecto Chamorro y Vecino en Matto (2017) confirman que “resolver problemas enseña a matematizar, lo cual constituye uno de los objetivos básicos para la formación de los estudiantes. Resolver problemas aumenta la confianza de los estudiantes, los vuelve más perseverantes y creativos”

Es importante que el estudiante salga de su zona de confort en la que repite procesos y algoritmos y se enfrente a preguntas desestabilizadoras que le permitan relacionar conceptos estudiados en contextos nuevos. Es indispensable incluir el manejo de situaciones en las secuencias didácticas en el salón. A la vez favorecer la mediación con el fin de llevar al estudiante a plantearse preguntas que le permitan descubrir su forma de aprender y las estrategias que le pueden ir favoreciendo en este proceso. Tárraga (2008) en Iriarte (2011) menciona la auto instrucción referida a las decisiones que toma antes y durante la solución de problemas. Para ello utiliza la pregunta ¿” Qué tengo que hacer”? y de esta manera pone en movimiento su “aprendizaje”. Además, utiliza la expresión: “auto cuestionamiento” o “monitoreo” que se refiere a las preguntas que acompañan el proceso de solución. ¿Esto para concentrarse en la tarea bajo la pregunta “Lo estoy haciendo bien?, ¿estoy siguiendo mi plan?

No hay que olvidar que en la solución de problemas se lleva al estudiante a realizar conexiones para buscar la forma de relacionar conceptos de su ensamblaje cognitivo con el concepto implicado en la solución de una situación. Al respecto Rodríguez (2006) señala que, en la solución de un problema, el proceso en parte del conocimiento matemático que los alumnos poseen o que lo van a adquirir.

El empleo de estrategias metacognitivas surge con mayor contundencia ante situaciones de mayor grado de dificultad y esto les permite a los estudiantes abordar situaciones de una

manera significativa. Al respecto Vásquez, Espiñeira y López (2017) resalta el papel de las estrategias metacognitivas en la formación matemática, así mismo señala su aporte a la consolidación en los procesos de comprensión, detección de errores y revisión de presaberes.

Estos resultados convocan a los docentes a que los estudiantes puedan tomarse un tiempo conveniente en descifrar los retos propuestos y expresen preguntas y rutas de resolución explícitas que les ayuden a un eficaz desarrollo de los problemas propuestos.

La secuencia didáctica planteada es una muestra de la forma como el maestro puede favorecer en el estudiante el desarrollo de habilidades metacognitivas. Las preguntas oportunas, los retos sugestivos y la mediación en el momento indicado pueden configurar una manera diferente de abordar la matemática. Es importante la aplicación de los conceptos en situaciones de diferentes contextos. Así como la integración con otras áreas.

En un aula de clase todos los estudiantes llegan con un ensamblaje cognitivo diferente. Además, los preconceptos tienen un nivel de profundidad diferente. Esto implica que cada uno aborda el nuevo conocimiento con herramientas. Esto no implica que los estudiantes no puedan alcanzar las metas esperadas. En un medio inclusivo cada estudiante ha de ser tenido en cuenta con todas sus potencialidades. El papel del maestro en el diseño e implementación de estrategias que les puedan favorecer desde cada mirada a fin de que puedan desarrollar estrategias metacognitivas que le permitan aprender a aprender y adaptarse a las exigencias de la sociedad.

La agudeza y la observación del maestro en la aplicación de la secuencia didáctica juegan un papel importante para determinar en qué momento intervenir, cual es la pregunta oportuna y cuales las situaciones más acertadas para desencadenar el movimiento cognitivo y la reflexión metacognitiva. La matemática escolar desde octavo se torna más abstracta y

así requiere de herramientas metacognitivas contundentes que le favorezcan enfrentar la tarea con éxito. Reflexionar sobre su propia actividad cognitiva y tomar decisión acertadas en torno a la formación de su conocimiento.

Referencias

- Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación matemática*, 16(3), 5-28.
- Benavides (2018). Transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico a través de estrategias metacognitivas con estudiantes de grado octavo.
- Burón, J. (2004). Enseñar a aprender Introducción a la metacognición
- Curotto, M. (2010) La metacognición en el aprendizaje de la matemática. *Revista Electrónica Iberoamericana en Educación de Educación en ciencias y tecnología*, 3(2), 11-27 Recuperado de <http://www.exactas.unca.edu.ar/riecyt/VOL%202%20NUM%202/Archivos%20Digitales/DOC%201%20RIECyT%20V2%20N2%20Nov%202010.pdf>
- Díaz, I. (2018). Caracterización de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas científicos con niños entre siete y doce años de Mitú (Vaupés). Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.
- Domenech M. (2004). *El papel de la inteligencia y de la metacognición en la resolución de problemas* (Doctoral dissertation, Universitat Rovira i Virgili).
- Espiñeira, E., Eva, & Mato-Vázquez, Dorinda, & López-Chao, Vicente A. (2017) Eva, & Mato-Vázquez, Dorinda, & López-Chao, Vicente A. (2017) Impacto del uso de estrategias metacognitivas en la enseñanza de las matemáticas. *Perfiles Educativos*, XXXIX (158), 91-111. [fecha de Consulta 13 de Mayo de 2022]. ISSN: 0185-2698. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=13253901006>
- Gómez, L., Sandoval, M. (2019). Alfabetización metacognitiva para el desarrollo de la comprensión auditiva en segundas lenguas: Fundamentos para la didáctica de ELE. *Doblele Revista de Lengua y literatura*. 5 <https://revistes.uab.cat/doblele/article/view/v5-gomez-sandoval>
- Gusmão, Tânia Cristina R. S, Cajaraville, José Antonio, Font, Vicenç, & Godino, Juan D. (2014). El Caso Victor: dificultades metacognitivas en la resolución de problema. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 255-275. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a13>

- Huertas Bustos, Adriana Patricia, Vesga Bravo, Grace Judith, & Galindo León, Mauricio. (2014). Validación del instrumento inventario de habilidades metacognitivas (MAI)' con estudiantes colombianos. *Praxis & Saber*, 5(10), 56-74. Retrieved July 25, 2021.
- Klimenko, Olena y Alvares, José Luis. (2009). Aprender cómo aprender: la enseñanza de estrategias metacognitivas. *Educación y Educadores*, 12 (2), 11-28. Recuperado el 13 de mayo de 2022, de http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0123-12942009000200003&lng=en&tlng=es.
- Kilpatrick, Jeremy; Gómez, Pedro; Rico, Luis (Eds.). (1998). *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. Bogotá: una empresa docente.
- Marino, T., & Isla Zuviale, D. (2018). Usos de la variable, sentido simbólico y metacognición: Una propuesta didáctica para el aprendizaje del álgebra elemental. *Paradigma*, 39(1), 246-266.
- Martínez et. al (1996). La representación en la resolución de problemas matemáticos.
- Masschelein, J., & Simons, M. (2014). *Defensa de la escuela*. Buenos Aires: Miño & Dávila.
- Mateos. (2001) Metacognición y educación. Aique.
- Mato-Vázquez, Dorinda, Espiñeira, Eva, López-Chao, Vicente A. (2017). Impacto del uso de estrategias metacognitivas en la enseñanza de las matemáticas. *Perfiles educativos*, 39(158), 91-111. Recuperado en 25 de julio de 2021
- Moreno, A. y Daza, B., (2014) Incidencia de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas en el área de matemáticas. Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, Colombia. <https://app.genial.ly/editor/5fc98ef3a5e1080d39308bd9>
- Negrete, P. (2013) La flexibilidad en la educación matemática
- Qué es comprender? hasta qué punto comprendemos?,
- Osses, Sonia & Jaramillo, Sandra. (2008). Metacognición: un camino para aprender a aprender. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 34(1), 187-197. <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052008000100011>

- Pulido, L. (2014). Procesos metacognitivos que llevan a cabo estudiantes de grado noveno con desempeños superior y bajo del colegio Agustín Fernández I.E.D durante la resolución de problemas matemáticos (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.
- Rico, Luis. (1997) El aprendizaje de las matemáticas.
- Rico, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Épsilon*, 38, 185-198.
- Robson,Sue (2016). Self-regulation and metacognition in young children: Does it matter if adults are present or not?
- Silva, C. (2006). Educación en matemática y procesos metacognitivos en el aprendizaje. *Revista del Centro de Investigación. Universidad de la Salle*, 7(26), 81 – 91.
Recuperado de: <http://www.redalyc.org/pdf/342/34202606.pdf>
- Trigueros et. al. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra.
- Vasco, Carlos Eduardo (2002). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas (8-10 May 2002). Bogotá, Colombia.
- Vasco, C.E. (2010). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau* (Vol. 9, pp. 2009-2010).
- Vásquez et al (2017) Impacto del uso de estrategias metacognitivas n la enseñanza de las matemáticas. *Perfiles educativos*, vol XXXIX. Núm 158,2017
<http://www.scielo.org.mx/pdf/peredu/v39n158/0185-2698-peredu-39-158-00091.pdf>

*Anexos***Anexo 1: Preguntas metacognitivas**

Conocimiento Metacognitivo			
Categorías	Subcategorías	Delimitación de las subcategorías	Preguntas para promover la indagación y la autorregulación del pensamiento desde el niño
Personas (1)	Yo	Fortalezas, habilidades y dificultades propias en el aprendizaje o trabajo académico.	1- ¿Se siente igual de motivado al solucionar esta situación comparado con el juego de la torre de Hanoi? 2- ¿Qué lo hace sentir desanimado con el reto o distraído? 3- ¿Requiere algún cambio externo o interno para enfocar su atención? 4- ¿Qué frase mental le ayuda a enfocar la atención? 5- ¿Cuáles cosas pasan por su cabeza? ¿De estos pensamientos cuál le distrae más? 6- ¿Qué cambios haría para sentirse más cómodo o concentrado?
	Otros		
Tareas (2)	Verbalización que demuestra la expresión explícita del propio conocimiento de la memoria a largo plazo en relación con los elementos de la tarea	a. Compara entre tareas que identifican similitudes y diferencias. b. Hace un juicio sobre el nivel de dificultad de las tareas cognitivas o clasifica las tareas sobre la base de criterios preestablecidos o de conocimiento previo.	7- ¿Desea probar el reto con CUATRO monedas?
			8- ¿Cuál cree que es la mayor dificultad que encontrará para dar las indicaciones? 9- ¿Qué piensa acerca de las indicaciones dadas? 10- ¿Cuáles son las palabras que no pueden faltar al dar una indicación similar? 11- ¿Qué pensamientos llegan a su mente antes de enfrentar el reto con CUATRO monedas? 12- Califique este nuevo reto de 1 a 5, siendo 5 el valor asignado a una tarea de mayor dificultad.
Estrategias	Una verbalización que demuestra la expresión explícita del propio conocimiento en	a. Define, explica o enseña a otros como ha hecho o aprendido algo.	A 13- Explique la estrategia que va a seguir para hallar la solución

	relación con las estrategias utilizadas o la realización de una tarea cognitiva, donde una estrategia es una actividad cognitiva o de comportamiento que se emplea para mejorar el rendimiento o alcanzar un objetivo.	<p>b. Explica los procedimientos involucrados en una tarea particular</p> <p>c. Evalúa la efectividad de una o más estrategias en relación con el contexto o la tarea cognitiva.</p>	<p>B</p> <p>14- Explique de forma verbal los retos de esta situación a otra persona?</p>
Regulación metacognitiva			
Planeación	Cualquier verbalización o comportamiento relacionado con la selección de procedimientos necesarios para realizar la tarea individualmente o con otros.	<p>a. Establece o aclara las demandas y expectativas de la tarea</p> <p>b. Establece metas y objetivos.</p> <p>c. Asigna roles individuales y negocia responsabilidad es.</p> <p>d. Decide formas de proceder con la tarea.</p>	<p>A</p> <p>15-Cuál es el primer pensamiento que llega a su mente luego de leer la situación.</p> <p>16- ¿Cuál cree que es la mayor dificultad que puede llegar a encontrar?</p> <p>17- Qué piensa acerca de las indicaciones dadas?</p> <p>18-Explique con sus palabras, en voz alta en qué consiste el juego.</p> <p>19- ¿Cuál cree que es el nivel de dificultad para la solución del reto?</p> <p>20- ¿Cuál es la primera alternativa de trabajo que llega a su mente?</p> <p>21-Se le ocurre algún procedimiento?</p>
			<p>B</p> <p>22-Explique con sus palabras la meta a alcanzar</p> <p>23-Separe en tres metas más pequeñas la meta que explicó anteriormente. ¿Cuáles serán estas metas?</p>
			<p>D –</p> <p>24- ¿Cuál es la primera alternativa de trabajo que llega a su mente?</p>

			<p>25- ¿Qué palabras se dice a sí mismo en su cabeza en los momentos que explora la situación y busca estrategias?</p> <p>26- ¿Qué preguntas se hace a sí mismo para orientar la búsqueda de la solución?</p>
Supervisión- monitoreo	Cualquier verbalización o comportamiento relacionado con la evaluación continua de la calidad del desempeño de la tarea (de uno mismo o con otros) y el grado en que el rendimiento avanza hacia un objetivo deseado.	<p>a. Auto comentarios</p> <p>b. Revise el progreso de la tarea haciendo un seguimiento de los procedimientos que se están llevando a cabo actualmente y los que se han realizado hasta el momento.</p> <p>c. Califica el esfuerzo en la tarea o califica el rendimiento real.</p> <p>d. Califica o hace comentarios sobre la recuperación de memoria (sic).</p> <p>e. Verifica el comportamiento o el rendimiento, incluida la detección de errores</p> <p>f. Autocorrecciones</p> <p>g. Controla y/o corrige el rendimiento de los compañeros</p>	<p>A-</p> <p>27- ¿Cuáles frases mentales utilizó para darse cuenta si había hallado la solución?</p>
			<p>B</p> <p>28- ¿Qué preguntas puede hacerse a sí mismo para darse cuenta si llegó a la solución según las condiciones del problema?</p>
			<p>C</p> <p>29- ¿Cuáles elementos de la situación le permitieron valorar el grado de dificultad?</p> <p>30- Fue efectiva la solución planteada?</p>
			<p>D</p> <p>31- ¿Qué frase mental le facilita buscar la estrategia adecuada?</p> <p>32- ¿Cuál es su principal recurso para evocar ideas y proponer estrategias?</p> <p>33- ¿Qué comentarios personales le permiten recordar datos útiles para solucionar un problema?</p>
			<p>E-</p> <p>34- ¿Luego de varias pruebas, reconoce en qué parte de la secuencia se desvía?</p> <p>35- ¿Qué pensamiento llega a su mente en el momento de reconocer esta falla en la secuencia?</p>
			<p>F</p> <p>36- ¿Qué frases le facilitan recordar la meta planteada desde un inicio</p> <p>37- ¿Qué expresiones se dice a sí mismo para felicitarse o corregirse?</p>

Control	Cualquier verbalización o comportamiento relacionado con un cambio en la forma en que una tarea había sido llevada a cabo, como resultado de la supervisión cognitiva.	<p>a. Cambia las estrategias como resultado de supervisiones anteriores.</p> <p>b. Sugiere y usa estrategias para resolver la tarea de manera más efectiva.</p> <p>c. Aplica una estrategia previamente aprendida a una nueva situación.</p> <p>d. Repite una estrategia para verificar la precisión del resultado.</p> <p>e. Busca ayuda.</p> <p>f. Utiliza el gesto no verbal como estrategia para apoyar la propia actividad cognitiva.</p> <p>g. Copia o imita un modelo.</p> <p>h. Ayuda o guía a otro niño usando un gesto.</p>	<p>A</p> <p>37-Luego de esta explicación, ¿cuáles nuevas ideas llegan a su mente?</p> <p>38- Lea de nuevo la situación inicial: ¿qué le cambiaría a la estrategia ya utilizada?</p>
			<p>B</p> <p>39- ¿Qué frase mental le facilita buscar la estrategia adecuada?</p> <p>40-Lea de nuevo la situación inicial: ¿qué le cambiaría a la estrategia utilizada?</p>
			<p>C</p> <p>41- ¿Qué elementos de su forma de resolver la situación anterior los puede utilizar para resolver la actual</p> <p>42- ¿Qué estrategias de las recogidas en su caja le sirven para emplear en estas situaciones?</p> <p>4- ¿Qué elementos de su forma de resolver la situación anterior los puede utilizar para resolver la actual</p>
			<p>D</p> <p>44- ¿Qué necesita para comprobar si la secuencia es correcta</p>
			<p>E</p> <p>45- ¿En qué momento sabe que necesita ayuda de otra persona?</p>
			<p>F (Con base en la observación)</p>
Evaluación	Cualquier verbalización o comportamiento relacionado con revisar el desempeño de la tarea y evaluar la calidad del	<p>a. Revisa el aprendizaje propio o explica la tarea.</p>	<p>A</p> <p>46- Está preparado para explicar cómo llega a la meta a una persona que quiere conocer la solución?</p> <p>47-Explique con sus palabras la secuencia hallada para formar la caja a partir de la lámina?</p>

	rendimiento (por uno mismo o por otros).	b. Evalúa las estrategias utilizadas.	48- ¿Qué pensamiento cruzó por su mente cuando en el momento que explicó la estrategia utilizada?
			B 49- ¿Qué estrategias, pasos, o herramientas le sirvieron para la solución de las situaciones presentadas hasta el momento: 50- ¿Qué comentarios personales se hace para comprobar si la estrategia planteada es la correcta?
		c. Califica la calidad del rendimiento.	51- ¿Cómo cree que fue su desempeño comparado con el reto anterior?
			D 52- ¿Qué aprendió sobre su forma de solucionar problemas? ¿Cuáles de estos elementos le pueden servir para la solución de cualquier otro problema? Escriba un párrafo sintetizando la respuesta 53- ¿Qué dificultad encontró en los experimentos realizados para su solución?
		d. Observa o comenta sobre el progreso de la tarea. e. Prueba el resultado o la efectividad de una estrategia para lograr un objetivo.	E 54- ¿Qué estrategia le dio resultado para llegar a la meta?

Tomado de: Robson Sue (2016). *Self-regulation and metacognition in young children: Does it matter if adults are present or not?*

Traducción: Díaz. (2018). Caracterización de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas científicos con niños entre siete y doce años de Mitú (Vaupés)

Elaboración personal de Preguntas metacognitivas Yenny Rocío Niño (2022)

ANEXO 2: Secuencia didáctica

La siguiente secuencia didáctica esta propuesta para caracterizar las estrategias Metacognitivas en el desarrollo del pensamiento matemático. En la columna izquierda se describe la secuencia dirigida al estudiante con aclaraciones señaladas el subrayado. Por otra parte, en la columna derecha aparece la sección dirigida a profesores con la precisión de los elementos que están involucrados en el desarrollo de dichas estrategias y lo que puede ocurrir en el proceso. Cabe anotar que las preguntas planteadas surgen del diálogo con el estudiante y se aplican según el proceso que lleve cada uno.

<p>Secuencia didáctica dirigida al estudiante</p> <p>Actividad de verbalización – anterior a la secuencia didáctica</p>	<p><i>Secuencia didáctica dirigida al profesor.</i></p> <p><i>Aclaraciones e indicadores que permitirán orientar la observación del empleo de estrategias metacognitivas.</i></p>
<p>Preparación</p> <p>Explique como realiza</p> <ul style="list-style-type: none"> - Colocarse los zapatos - Crea un personaje (eso dependiendo del interés de cada participante y sus actividades de tiempo libre <p>Fase 2 Verbalización</p> <p>Si Felipe, un amigo ciego, quiere visitarlo en el Colegio San Pedro y lo llama al celular desde OXXO, Qué orientaciones le da para llegar hasta el salón de 8-B en el Colegio. Tenga en cuenta que en el momento de la llamada, Felipe está ubicado en la esquina de OXXO en dirección al Colegio.</p> <p><i>(El estudiante dirá estas indicaciones en voz alta y se grabarán utilizando el programa speech notes. Esta es una herramienta para hacer dictado)</i></p> <p>a- <i>Cuál cree que es la mayor dificultad que encontrará para dar las indicaciones?</i></p> <p>b- <i>Al finalizar las indicaciones, lea lo escrito en speech notes y con el lápiz</i></p>	<p><i>Autores como Gómez en Florez (20013) menciona que la verbalización de los pensamientos favorece los aspectos metacognitivos y meta-efectivos en los estudiantes.</i></p> <p><i>Con este ejercicio inicial se activa la imaginación y se promueve el empleo de expresiones verbales y no verbales, ya que con seguridad al dar indicaciones utilizará expresiones con sus manos para reemplazar las palabras precisas.</i></p> <p>Regulación y control</p> <p><i>El estudiante haciendo uso de la flexibilidad del pensamiento hace revisión de las instrucciones dadas y decide hacer ajustes para mejorar su precisión.</i></p> <p><i>El observador nota si el estudiante identifica la efectividad de las instrucciones y las palabras que usa para hablarse a si mismo.</i></p>

marque la ruta recorrida por Felipe desde Oxxo hasta 8-B

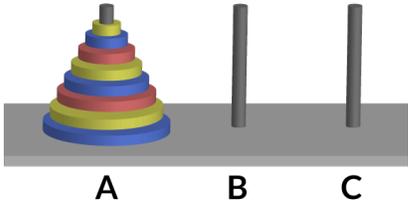
OXXO

Salón 8-B

A- *Qué piensa acerca de las indicaciones dadas?*

B- *Cambiaría algo de las indicaciones dadas?*

C- *Cuáles son las palabras que no pueden faltar al dar una indicación similar?*

<p>Secuencia didáctica dirigida al estudiante</p> <p>Actividad propuesta para favorecer el empleo de estrategias ante una situación problema</p>	<p><i>Secuencia didáctica dirigida al profesor. Aclaraciones e indicadores que permitirán orientar la observación del empleo de estrategias metacognitivas.</i></p>
<p>Fase 2: Torre de Hanoi</p> <p>La torre de Hanoi: La torre está formada por discos de diferente tamaño apilados en una sola columna (A). El objetivo del juego es trasladar la torre a una de las otras dos columnas (B, C) siguiendo unas reglas: Sólo puede trasladar un disco en cada movimiento, no puede quedar en cada jugada un disco mayor sobre uno menor. Según el número de discos hay un número máximo de movimientos.</p> <p>Es aconsejable empezar con la cantidad mínima de discos, es decir con 3 discos y trasladar la torre en máximo 7 movimientos. Una alternativa es formar la torre con monedas de diferente tamaño y dibujar los círculos en lugar de las barras.</p>  <p style="text-align: center;">A B C</p>	<p>La actividad propuesta favorece el manejo de preconcepciones y la agilidad mental como preparación para asumir la solución de la situación algebraica.</p> <p>En el diálogo previo con el estudiante se le invita a pensar en voz alta, a hablar consigo mismo. La observación se basa también en expresiones, gestos, sonidos, movimientos que pueden dar a conocer mucho acerca del proceso interior. Todo lo anterior permite identificar la forma como él se corrige, las expresiones que emplea para descartar posibilidades y los anclajes que utiliza para generar diferentes caminos de solución y la manera que utiliza para animarse a seguir.</p> <p>En la secuencia se invita al estudiante, según su progreso, a intentar el reto con 5 monedas en 31 pasos dependiendo de su progreso.</p> <p>Conocimiento Metacognitivo El estudiante hace un juicio sobre la tarea, incluso sin haberlo intentado. Con los primeros intentos va reevaluando la calificación que le dio inicialmente al grado de dificultad.</p> <p>Regulación y control metacognitivo El estudiante luego de reconocer el problema intenta probar diferentes opciones o caminos sin</p>

<p><u>Luego de realizar algunas pruebas ...</u></p> <p>¿Logró el reto con tres monedas?</p> <p><u>Al responder si:</u> ¿Desea probar el reto con CUATRO monedas?</p> <p><u>Al responder No:</u> Qué dificultad encontró en los experimentos</p> <p>Escríbalas en las tarjetas asignadas y guárdelas en la caja llamada: Estrategias personales para la solución de situaciones</p>	<p>haber establecido un plan. Luego de varios intentos empieza a configurar en su mente una estrategia. En este punto, se observa si mantiene el interés en el reto y sostiene su atención en la meta. Por otro lado, un indicio de dificultades metacognitivas se evidencian si el estudiante intentar varias veces la misma secuencia y persiste en ella aunque sepa que no le ha funcionado anteriormente.</p> <p>Una evidencia de buen manejo metacognitivo se refiere a la búsqueda una nueva estrategia o detectar en la ruta utilizada el punto en donde desvía el movimiento.</p> <p>En este punto se puede observar si el estudiante controla la ansiedad, la angustia o la frustración para registrar las señales de ello.</p> <p>Es posible detenerse a observar si el estudiante se esfuerza en buscar soluciones con base en una estrategia o sólo realiza pruebas al azar, si desiste rápido y pregunta a l profesor la solución El estudiante planifica estrategias que le sirven para procesar la información en su experimentación o recurre al ensayo y error. En todo el proceso el estudiante está tomando decisiones y organizando mentalmente sus estrategias</p>
---	---

<p>Secuencia didáctica dirigida al estudiante</p>	<p>Secuencia didáctica dirigida al profesor. <i>Aclaraciones e indicadores que permitirán orientar la observación del empleo de estrategias metacognitivas.</i></p>
<p>Fase 3 Elaboración de la caja</p> <p>Una vez realizado el calentamiento, me detengo a examinar el reto planteado</p>  <p>Felipe es el dueño de la fábrica de velas cilíndricas: La luz. Con el fin de venderlas de una forma higiénica construye cajas de cartón rectangulares para empacarlas. Teniendo en cuenta que todas las velas se fabrican en tres tamaños y que la fabricación incluye las cajas.</p> <p>a- Describa una secuencia que debe realizar Felipe para la elaboración de la caja rectangular a partir de una lámina de cartón. Esta sebe servir para empacar una vela de 12cm de altura y 8 cm de diámetro.</p> <p>a- ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la lámina utilizada para la construcción de la caja?</p>	<p>Esta pregunta se plantea para favorecer la experimentación con material real con el fin de que relacione las dimensiones de un sólido curvo con las dimensiones de la caja rectangular que debe armar. Por ejemplo relacionar el diámetro de la vela con el largo de la caja, esto favorecerá el desarrollo del pensamiento espacial y será un puente que permita dar el paso al pensamiento abstracto de una manera más formal. Para ello, la situación de la fase 4 se propone como punto culmen de la secuencia. Se le pide al estudiante que en la fase de exploración con el material real hable consigo mismo, con el fin de identificar las expresiones utilizadas, gestos, emociones, actitudes y registrar frases específicas.</p> <p>Conocimiento Metacognitivo En este punto el estudiante caracteriza los elementos que para él mismo configuren el grado de dificultad en una situación. Es más</p>

<p>Materiales: Rectángulo de cartón, hojas de papel del mismo tamaño del cartón y una vela cilíndrica.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1- Cuáles elementos de la situación le permitieron valorar el grado de dificultad? 2- Explique con sus palabras la secuencia hallada para formar la caja a partir de la lámina 3- Considera que la solución se hubiera dado de forma más fácil secuencia la hubiera podido plantear de otra forma? 4- Que estrategias agrega a la caja de Estrategias personales para la solución de situaciones 	<p>consciente de los factores que lo motivan o los que le distraen.</p> <p>Regulación y control metacognitivo</p> <ul style="list-style-type: none"> - El estudiante explora con material real la posible solución para la elaboración de la caja. Hace pruebas, genera alternativas de solución y en el dialogo consigo mismo identifican las expresiones con las que se anima a seguir o se castiga. Además expresiones o preguntas que se hace a si mismo para analizar si funciona o no la experimentación realizada con el material real. - El estudiante modifica la estrategia de solución que no le ha funcionado y para ello emplea palabras de recuperación de la información e de evocación de conceptos. - Mantiene el interés y se anima a si mismo, identifica elementos del entorno o internos que le general distracción. - El estudiante planifica la estrategia con base en información y conceptos o prueba alternativas al azar sin un fundamento conceptual o una secuencia progresiva. - El estudiante encuentra una ruta que le permite darse cuenta si va por ben camino o debe detenerse a revisar el texto de la a situación inicial. - El estudiante verbaliza la secuencia empleada para la elaboración de la caja usando términos precisos o gestos y señales.
--	--

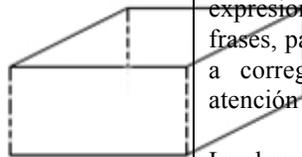
Secuencia didáctica dirigida al estudiante	Secuencia didáctica dirigida al profesor
<p>UN ALTO EN EL CAMINO</p> <p><i>Resume una rutina que pueda utilizar al enfrentarse a una situación nueva</i></p>	<p>En el diálogo con el estudiante, además de las respuestas concretas, se tienen en cuenta sus gestos, expresiones y emociones. El estudiante en este punto va enlazando elementos que le permitan caracterizar su forma de solucionar situaciones problemas, así como los elementos que le permitan regular y controlar este proceso.</p>

Secuencia didáctica dirigida al estudiante	Secuencia didáctica dirigida al profesor
<p>Fase 4: Generalización</p>	<p>En la fase cinco de la secuencia se propone una situación similar a la anterior, pero en esta el</p>

Felipe se da cuenta que el proceso de elaboración de la caja se repite muchas veces para diferentes tamaños. La fabrica elabora velas con el mismo diámetro, pero la altura varía por ello puede recurrir al empleo de la x como elemento que reemplace el valor de la altura.

Se compraron láminas de a utilizar láminas de cartón de 30×30 cm para elaborar las cajas. Para formar las paredes de la caja se recorta un cuadrado en las esquinas con el fin de doblar la parte restante.

- Elabore el dibujo de la lámina de 30×30 y trace en cada esquina un cuadrado cuyo lado sea x , esta variable representa la altura de la vela.
- Elabore un dibujo en el que se haya recortado los cuadrados de las esquinas.
- Al doblar las partes de la lámina para formar la caja, es posible saber las dimensiones del largo ancho y alto de la caja?



- Halle la expresión algebraica correspondiente al volumen de la caja?
 $V =$ _____
- Con las dimensiones de esta lámina es posible construir una caja para una vela de 15 cm de altura?

Luego del proceso de exploración inicial de la situación

Califique el nivel de dificultad de la tarea planteada de 1 a 5, teniendo en cuenta que 5 representa el nivel de mayor dificultad.

- Necesita recurrir alguna fuente como apoyo a su solución?
- Explique de forma verbal los obstáculos encontrados?
- Explique con sus palabras la meta a alcanzar
- Lea de nuevo la situación inicial, qué le cambiaría a la estrategia ya utilizada?

estudiante interpreta constantes y variables. Con el fin de acercarlo al manejo de la generalización. De esta forma el estudiante entra a la exploración del pensamiento de mayor abstracción.

La pregunta problema se centra en la que se plantea en la parte e.

Conocimiento Metacognitivo

El estudiante identifica los elementos de una situación que hacen aumentar su grado de dificultad. Adicionalmente busca desglosar dicha situación en expresiones o palabras más familiares para él o intenta una solución idéntica a la situación anterior sin notar la diferencia de las situaciones.

El estudiante reconoce las limitaciones frente a sus propias estrategias de solución, busca alternativas para comprenderla mejor o pedirá explicación inmediata a la profesora.

Regulación y control metacognitivo

Durante el proceso de solución de la parte D, E se le pide al estudiante que piense en voz alta, que hable consigo mismo, de esta manera se puede apreciar las expresiones utilizadas para regular su trabajo. Estas frases, palabras o preguntas pueden estar orientadas a corregirse, animarse, hallar errores, mantenerla atención o para divagar.

La observación del trabajo del estudiante y su propio diálogo personal, permite observar si persiste en la tarea o quiere abandonarla, si identifica frases de evocación o recuperación de la memoria. Además permite reconocer las correcciones que se hace y la estrategia de recuperación de la información.

En esta fase de la secuencia se observa si ha configurado una rutina o secuencia personal para enfrentar una situación, hallar estrategias de solución, reconocer fallas, mantener la atención y recuperar información.

Dibuje o diseñe un avatar que lo puede representar. Con este avatar elabore una infografía, caricatura o monólogo en la que incluya sus propias palabras o frases mentales, palabras de autocorrección o de ánimo, palabras de recuperación de la información o preguntas realizadas a si mismo que fueron recurrentes en la solución de toda la secuencia didáctica y que le facilitaron el logro de la tarea



Dibujo elaborado por Nicolás Prada Niño

Anexo 3.

Sistematización de las enunciaciones alusivas a las estrategias metacognitivas de los participantes.

https://livejaverianaedu-my.sharepoint.com/personal/yenny_nino_javeriana_edu_co/_layouts/15/onedrive.aspx?id=%2Fpersonal%2Fyenny%5Fnino%5Fjaveriana%5Fedu%5Fco%2FDocuments%2FEvidencias%20%20Yenny%20Roci%CC%81o%20Nin%CC%83o%20Becerra