



**UNA CRÍTICA AL MODELO DE INCENTIVOS GERENCIALES
PROPUESTO POR FERSHTMAN Y JUDD (1987) Y SKLIVAS (1987)**

ANDRÉS ALBERTO ANDRADE CEBALLOS
JAVIER AUGUSTO YHAMA VALERO

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS
MAESTRÍA EN ECONOMÍA

BOGOTÁ, 09 DE NOVIEMBRE DE 2012

UNA CRÍTICA AL MODELO DE INCENTIVOS GERENCIALES PROPUESTO POR FERSHTMAN Y JUDD (1987) Y SKLIVAS (1987)

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	3
1. EL PROBLEMA AGENTE PRINCIPAL	5
2. MODELO DE INCENTIVOS GERENCIALES PLANTEADO POR FERSHTMAN Y JUDD (1987) Y SKLIVAS (1987)	7
3. PROPUESTA DE AJUSTE AL MODELO DE INCENTIVOS GERENCIALES PLANTEADO POR FERSHTMAN Y JUDD (1987) Y SKLIVAS(1987).....	11
4. ANÁLISIS COMPARATIVO	15
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	27
BIBLIOGRAFÍA	30
ANEXOS	31

UNA CRÍTICA AL MODELO DE INCENTIVOS GERENCIALES PROPUESTO POR FERSHTMAN Y JUDD (1987) Y SKLIVAS (1987)

INTRODUCCIÓN

La teoría de contratos, plantea retos en el entendimiento de las relaciones entre los individuos y organizaciones. Analiza las características de los contratos óptimos y las variables que repercuten sobre estos. La teoría de los contratos óptimos con información asimétrica, considera una relación bilateral en la que una parte contrata a otra para que tome ciertas decisiones. Esta última se denomina “agente” y quien contrata se denomina “principal”.

El agente acepta la propuesta (contrato) del principal cuando la utilidad que obtiene es superior a la que se puede garantizar si no firma el contrato. En el caso particular de una empresa, el establecimiento de incentivos por parte del principal (dueño), que motiva la toma de decisiones óptimas por parte de un agente (gerente) componen el aspecto fundamental planteado en este trabajo.

En el año 1987 se publicaron de forma casi simultánea los trabajos de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987), que analizan el uso de incentivos gerenciales en un duopolio que compite a la Cournot o a la Bertrand¹. En los dos trabajos se establecen los mismos resultados principales: i) Los dueños pueden utilizar los contratos de incentivos gerenciales como herramienta estratégica para modificar la posición de sus rivales en el mercado. ii) En equilibrio, los gerentes nunca maximizan beneficios. iii) Cuando la competencia es a la Cournot, en equilibrio los gerentes son obligados a ser más agresivos en ventas.

¹ Contrario a la teoría estándar de microeconomía que estudia el supuesto del gerente como si fuera el mismo dueño de la empresa o viceversa.

En particular, a partir de 1987 se han desarrollado varios trabajos que toman como base el modelo y los resultados de los autores mencionados para analizar los contratos de incentivos gerenciales en mercados imperfectos. Sin embargo, tales resultados surgieron de una simplificación que, a criterio de los autores del presente trabajo, no es correcta en términos de los contratos entre dueños y gerentes de empresas en el mundo real.

En el modelo se determinan los incentivos gerenciales (y por tanto los salarios de los gerentes) de manera endógena. Sin embargo, cuando los dueños maximizan beneficios, asumen que el salario del gerente de la empresa es fijo (es decir exógeno), por lo cual este no incide en la determinación endógena de los incentivos gerenciales (y por tanto del salario de los gerentes). Esta simplificación genera una inconsistencia analítica que sesga de manera importante los resultados obtenidos en el mercado.

El propósito de este trabajo consiste en darle consistencia analítica a los modelos de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987), introduciendo el salario de los gerentes como un costo endógeno en el problema de maximización de beneficios de los dueños y analizar cómo se modifican los resultados obtenidos por los autores, que tiene también consecuencias importantes en los trabajos posteriores que otros autores han desarrollado o van a desarrollar con base en tales resultados.

Este documento presenta en el capítulo 1 el marco teórico, haciendo énfasis en el problema agente – principal. En el capítulo 2 se desarrolla el modelo originalmente propuesto con una simplificación en el sueldo de los gerentes en la estructura de costos de las empresas, que sigue los lineamientos básicos del modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987). En el capítulo 3 se desarrolla una variación al modelo de incentivos gerenciales propuesto por Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987), con la inclusión de los salarios (endógenos) de los gerentes en los costos de la empresa. Además, en el capítulo 4 se presenta una comparación de los resultados de estudio, con los obtenidos en el modelo original. Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones.

1. EL PROBLEMA AGENTE PRINCIPAL

Este trabajo se fundamenta en el análisis del problema principal-agente². Este surge de la interacción de dos o más individuos, en la que el principal delega la toma de decisiones en un agente, para actuar en representación de él. Según lo plantea Miller (2005), la razón para delegar esta autoridad está en que el agente tiene mayor experiencia, conocimiento del mercado, entre otros. Al tener mayor información el agente que el principal, existe el problema de si el agente trabajará preservando los intereses del principal o no.

El objetivo del agente depende de la estructura de incentivos que el principal escoge para motivarlo. Fershtman y Judd (1987) plantean, en el contexto de las empresas, que los dueños siempre darán compensaciones a los gerentes por los beneficios, las ventas, la producción o la calidad de los productos, entre otros. Debido a que el dueño y el gerente pueden tener distintos objetivos, estos llegan a un acuerdo a través de un contrato óptimo. En Salas (2007), los dueños toman decisiones dirigidas a alcanzar el objetivo de hacer máximo el beneficio bajo restricciones que resultan de la información limitada con la que cuentan sobre la conducta real de los gerentes en quienes delegan.

La compensación en los contratos gerenciales no depende solamente de los beneficios obtenidos. También se examinan las interacciones entre las estructuras internas dentro de una firma y la estructura de mercado externo a las empresas. Sklivas (1987), plantea que los incentivos inducen al agente a adoptar un tipo particular de comportamiento que afectará sus acciones así como las del agente que trabaje para la empresa rival.

En Fershtman (1985), se obtiene que las firmas no maximizadoras de beneficios obtienen mayores beneficios que las maximizadoras de beneficios en un duopolio.

² El principal para dicho caso particular hace referencia al dueño de una empresa, mientras que el agente se refiere al gerente de la empresa.

La delegación en un agente plantea el problema del riesgo moral. En Krugman (2009) este riesgo se define en el cambio de actitud del agente ante la exposición al riesgo. Esta delegación permite que no se afronte esta responsabilidad de forma individual, determinándose el riesgo moral como cualquier situación en donde un individuo toma una decisión acerca de cuánto riesgo debe tomar, mientras que alguien más afronta el costo de si las cosas van mal.

En la relación principal-agente Harris y Raviv (1978), plantean la existencia del riesgo de no tener eficiencia en aplicar los incentivos. Es por esto que en un contrato de incentivos ligado a la producción de la empresa en donde el agente es neutral al riesgo, es óptimo que este soporte todo el riesgo para asegurarse que el agente haga un esfuerzo óptimo.

La estructura de incentivos depende de la relación principal-agente. En Miller (2005), hay empresas que ponen alto énfasis en incentivos y dan a los empleados la libertad para tomar mayores riesgos en los negocios, mientras que otras tienen procedimientos establecidos que encaminan a sus trabajadores a seguir los conductos regulares y su estilo gerencial es de monitoreo de los empleados. Hay otra clase de firmas en donde se observan altos niveles de cooperación y de trabajo en equipo.

Lehn (1985) y Hansmann (1996) en su desarrollo de la teoría de contratos óptimos, plantean la relación entre propiedad y eficiencia de la empresa, que está focalizada en el problema técnico de diseñar esquemas de incentivos que permitan maximizar el beneficio de los dueños y de los gerentes.

2. MODELO DE INCENTIVOS GERENCIALES PLANTEADO POR FERSHTMAN Y JUDD (1987) Y SKLIVAS (1987)

A continuación se presenta el modelo desarrollado por Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987), el cual ha sido utilizado por una gran cantidad de autores para analizar situaciones que implican el uso de la teoría de incentivos (Anexo 1).

2.1. COMPETENCIA A LA COURNOT

Los autores suponen un duopolio que compite a la Cournot en un juego de dos etapas, en un mercado de bienes homogéneos. El dueño de cada empresa contrata un gerente. En la etapa 1 del juego, el dueño de la empresa i maximiza el beneficio $\pi_i = pq_i - c_i q_i$ escogiendo el valor del parámetro de incentivos de α_i . Este valor es el parámetro del contrato que determina el peso relativo que tienen los beneficios de la empresa en la remuneración total del gerente. Si $\alpha_i > 1$ el gerente será incentivado a ser menos agresivo en ventas. Si $\alpha_i = 1$ el gerente se comportará como si fuera el dueño, es decir, maximiza el beneficio. Si $\alpha_i < 1$ el gerente será incentivado a ser más agresivo en ventas. En la etapa 2 del juego, el gerente maximiza su remuneración total $v_i = A_i + B_i O_i$ escogiendo la cantidad q_i . En esta escogencia A_i y B_i son irrelevantes debido a que son constantes. Por tanto, maximizar v_i equivale a maximizar O_i .

Las empresas se enfrentan a una demanda lineal de la siguiente forma:

$$p = a - bQ, \text{ con } Q = q_1 + q_2 \quad (1)$$

Cada empresa produce con costo marginal constantes $c_i > 0$.

El juego se resuelve por el método usual de inducción hacia atrás.

- Etapa 2.

El problema que resuelve el gerente de la empresa i es:

$$\text{Max}_{q_i} O_i = \alpha_i \pi_i + (1 - \alpha_i) S_i \quad (2)$$

Donde $\pi_i = pq_i - c_i q_i$ y $S_i = pq_i$.

Reescribiendo se obtiene:

$$\text{Max}_{q_i} O_i = \alpha_i (a - bq_i - c_i) q_i + (1 - \alpha_i) (a - bq_i) q_i \quad (3)$$

De las condiciones de primer orden se obtiene el siguiente resultado:

$$q_i = \frac{a - bq_j}{2b} - \frac{\alpha_i c_i}{2b}, i, j = 1, 2; i \neq j \quad (4)$$

Se observa que α_i afecta la perspectiva de costos del gerente. Si $\alpha_i > 1$ el gerente será incentivado a ser menos agresivo en ventas. Si $\alpha_i = 1$ el gerente se comportará como si fuera el dueño, es decir, maximiza el beneficio. Si $\alpha_i < 1$ el gerente será incentivado a ser más agresivo en ventas.

El precio, las cantidades y los beneficios de equilibrio son:

$$p = \frac{1}{3} (a + \alpha_i c_i + \alpha_j c_j) \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (5)$$

$$q_i = \frac{1}{3b} (a - 2\alpha_i c_i + \alpha_j c_j) \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (6)$$

$$\pi_i = \frac{1}{9b} [(a + \alpha_i c_i + \alpha_j c_j - 3c_i)(a - 2\alpha_i c_i + \alpha_j c_j)] \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (7)$$

- Etapa 1.

A partir de los resultados de la segunda etapa, los dueños escogen α_i para maximizar sus beneficios. El problema que resuelve el dueño de la empresa i es:

$$\text{Max}_{\alpha_i} \pi_i = pq_i - c_i q_i, i = 1, 2 \quad (8)$$

Donde $p = \frac{1}{3} (a + \alpha_i c_i + \alpha_j c_j), i, j = 1, 2; i \neq j$ y

$$q_i = \frac{1}{3b} (a - 2\alpha_i c_i + \alpha_j c_j), i, j = 1, 2; i \neq j$$

De las condiciones de primer orden se obtiene:

$$\alpha_i = \frac{3}{2} - \frac{a}{4c_i} - \frac{\alpha_j c_j}{4c_i} \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (9)$$

El precio, las cantidades y los beneficios de equilibrio son:

$$\alpha_i = 1 - \frac{1}{5c_i} (a + 2c_j - 3c_i), \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (10)$$

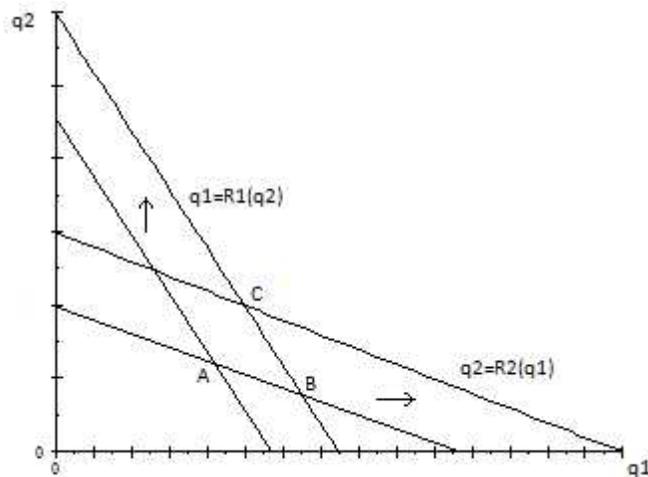
$$q_i = \frac{1}{5b} (2a - 6c_i + 4c_j), \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (11)$$

$$p = \frac{1}{5} (a + 2(c_i + c_j)), \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (12)$$

En este modelo la escogencia de α_i es conocida también por el gerente de la firma j . Esto hace que el dueño de la firma i actué como líder de Stackelberg del gerente j , lo cual permite bajo el supuesto de $c_i = c_j = c$, que cada dueño incentive a su gerente a ser más agresivo en ventas, dado que $\alpha_i < 1$.

En la Gráfica 1 se muestra el efecto de este valor α_i sobre las curvas de reacción.

Gráfica 1



Funciones de reacción

Se observan las dos funciones de mejor respuesta, $q_1 = R_1(q_2)$, $q_2 = R_2(q_1)$. Estas tienen pendiente negativa, lo que implica que si la cantidad producida de una firma aumenta, la cantidad producida por la otra empresa disminuye. Si el dueño de la firma 1 escoge $\alpha_1 < 1$ hace que la función de reacción $q_1 = R_1(q_2)$ se desplace a la derecha y el equilibrio de Nash se traslada de A a B . Debido a que la escogencia de α_i es conocida por el dueño de la firma 2, esto hace que también escoja el valor de $\alpha_2 < 1$ desplazando la curva de reacción $q_2 = R_2(q_1)$ a la derecha, modificando el equilibrio de Nash al punto C de la Gráfica 1.

Comparando los resultados con el problema de Cournot sin gerentes, en el equilibrio de incentivos se obtienen mayores cantidades producidas, precios y beneficios menores. Debido a que hay mayor oferta en el mercado, es probable que haya mayor eficiencia porque las cantidades disponibles en el mercado aumentan.

3. PROPUESTA DE AJUSTE AL MODELO DE INCENTIVOS GERENCIALES PLANTEADO POR FERSHTMAN Y JUDD (1987) Y SKLIVAS(1987)

Este artículo presenta una reinterpretación del contrato de incentivos entre el dueño y el gerente de una empresa, planteado en el modelo propuesto por Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987).

Los autores mencionados desarrollan el modelo con base en las siguientes consideraciones: La remuneración total del gerente es $v_i = A_i + B_i O_i$, donde $A_i > 0$, $B_i > 0$ y $O_i = \alpha_i \pi_i + (1 - \alpha_i) S_i$. Debido a que el gerente es neutral al riesgo, maximiza O_i dado que los valores de A_i y B_i son irrelevantes en esta maximización. Los autores suponen que $v_i = A_i + B_i O_i$ es igual al costo de oportunidad del gerente y que el valor de A_i se puede ajustar en una etapa previa, con el fin de mantener constante v_i . Este enfoque en muchos casos puede no corresponder a la realidad actual de las empresas. Por esta razón, se hace una reinterpretación de los componentes de v_i .

De acuerdo con esta reinterpretación la remuneración total del gerente de la empresa i es también $v_i = A_i + B_i O_i$, sin embargo A_i se asume como el costo de oportunidad del gerente, que es fijo y no se puede ajustar en una etapa previa. Tal es el caso de muchas empresas en las que $B_i O_i$ es la remuneración variable que depende de los incentivos α_i que el dueño proporcione al gerente en el contrato. $B_i > 0$ mide el peso que el dueño le da al componente variable del salario dentro de la remuneración total. Esta reinterpretación obliga a introducir el salario del gerente como un costo que afecta endógenamente los beneficios de la empresa. Por esta razón, no se puede considerar siempre que v_i es fijo y que no afecta la maximización de beneficios de las empresas.

En el modelo estudiado A y B son constantes relevantes en la solución del problema, toda vez que los salarios y compensaciones monetarias en el sector productivo se negocian entre los propietarios de las empresas y los gerentes. Estos dependen de factores como las

condiciones macroeconómicas del país, la actividad comercial de las empresas, el tipo de competencia, la productividad y los costos propios, entre otros.

A diferencia del modelo propuesto por Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987), la función de beneficios de la empresa en esta reformulación incluye el costo de contratar un gerente y viene dada por:

$$\pi_i = pq_i - cq_i - v_i, \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

Donde c es el costo marginal, p es el precio, q_i es la cantidad producida por la empresa i y v_i es la remuneración total del gerente de la empresa i .

Dado que

$$v_i = A + BO_i \quad (14)$$

Donde $O_i = \alpha_i \pi_i + (1 - \alpha_i) S_i$.

Entonces se obtiene:

$$v_i = A + B(\alpha_i \pi_i + (1 - \alpha_i) S_i), \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

Donde $\pi_i = pq_i - cq_i - v_i$ y $S_i = pq_i$.

De esta manera:

$$v_i = A + B(\alpha_i(pq_i - cq_i - v_i) + (1 - \alpha_i)pq_i), \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

Despejando v_i , se obtiene la siguiente expresión para el salario del gerente de la empresa i .

$$v_i = A + B \left(\frac{1}{B\alpha_i + 1} (q_i(a - q_i - q_j) - A\alpha_i - c\alpha_i q_i) \right), \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (17)$$

A continuación se presenta el desarrollo del modelo de incentivos utilizando esta reinterpretación del salario del gerente, en un contexto de competencia a la Cournot.

3.1. COMPETENCIA A LA COURNOT

Se supone un duopolio que compite a la Cournot, en un mercado de bienes homogéneos. El modelo se desarrolla en 2 etapas. En la etapa 1 el dueño de la empresa i contrata un gerente y maximiza el beneficio π_i escogiendo el valor del parámetro de incentivos gerenciales α_i . Este valor es el parámetro del contrato que determina el peso relativo que tienen los beneficios o las ventas de la empresa en la remuneración total del gerente. En la etapa 2 el gerente maximiza su remuneración total v_i , eligiendo la cantidad producida q_i en un contexto de competencia a la Cournot.

Las empresas enfrentan una demanda lineal de la siguiente forma:

$$p = a - bQ, \text{ con } Q = q_1 + q_2$$

Cada empresa produce con costo marginal constante $c > 0$. A diferencia del modelo propuesto por Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987).

El problema se resuelve por inducción hacia atrás.

- Etapa 2.

El problema que resuelve el gerente de la empresa i es:

$$\text{Max}_{q_i} v_i = A + B \left(-\frac{1}{\beta\alpha_i + 1} (A\alpha_i + q_i(bq_i - a + bq_j) + c\alpha_i q_i) \right) \quad (18)$$

Se supone $b = 1$, por simplicidad. De las condiciones de primer orden, se obtiene el siguiente resultado:

$$q_i = \frac{1}{2} [(a - q_j) - \alpha_i c], i, j = 1, 2; i \neq j \quad (19)$$

El precio, las cantidades y los beneficios de equilibrio son:

$$p = \frac{1}{3} (a + \alpha_i c + \alpha_j c) \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (20)$$

$$q_i = \frac{1}{3} (a - 2\alpha_i c + \alpha_j c) \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (21)$$

$$\pi_i = \frac{1}{9(\beta\sigma+1)} (c^2\alpha_2^2 - 9A - 2c^2\alpha_1^2 - Ba^2 + 6c^2\alpha_1 - 3c^2\alpha_2 - 3ac + a^2 + 2Bc^2\alpha_1^2 - 2Bc^2\alpha_1^3 - Bc^2\alpha_2^2 - ac\alpha_1 + 2aca_2 + Ba^2\alpha_1 - c^2\alpha_1\alpha_2 + Bac\alpha_1 - 2Bac\alpha_2 + Bc^2\alpha_1\alpha_2^2 - Bc^2\alpha_1^2\alpha_2 - Bac\alpha_1^2 + Bc^2\alpha_1\alpha_2 + 2Bac\alpha_1\alpha_2) \quad i, j = 1, 2; i \neq j \quad (22)$$

La forma de la función de reacción q_i de la empresa i es igual a la obtenida por Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987). Sin embargo como se detalla más adelante, su posición variará debido al valor de equilibrio del parámetro de incentivos α_i .

- Etapa 1.

A partir de los resultados de la segunda etapa, los dueños resuelven el siguiente problema:

$$\text{Max}_{\alpha_i} \pi_i = pq_i - cq_i - v_i, \quad i = 1, 2 \quad (23)$$

En equilibrio, se obtienen los siguientes resultados³:

$$\alpha_i = \sqrt[3]{Z} + \frac{X}{\sqrt[3]{Z}} - \frac{1}{15B^2c^2}Y \quad (24)$$

$$p = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c \left[\sqrt[3]{Z} + \frac{X}{\sqrt[3]{Z}} - \frac{1}{15B^2c^2}Y \right] \quad (25)$$

$$q_i = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}c \left[\sqrt[3]{Z} + \frac{X}{\sqrt[3]{Z}} - \frac{1}{15B^2c^2}Y \right] \quad (26)$$

$$\pi_i = \left[\frac{1}{9B \left(\frac{1}{15B^2c^2}Y \right) \sqrt[3]{Z} \frac{X}{\sqrt[3]{Z}}} \right] \left[9A + Ba^2 + 3ac - a^2 - 3c^2 \left(\frac{X}{\sqrt[3]{Z}} - \frac{Y}{15B^2c^2} + \sqrt[3]{Z} \right) - Ba^2 \left(\frac{X}{\sqrt[3]{Z}} - \frac{Y}{15B^2c^2} + \sqrt[3]{Z} \right) + \sqrt[3]{Z} \right) - Bac \left(\frac{X}{\sqrt[3]{Z}} - \frac{Y}{15B^2c^2} + \sqrt[3]{Z} \right)^2 + 2c^2 \left(\frac{X}{\sqrt[3]{Z}} - \frac{Y}{15B^2c^2} + \sqrt[3]{Z} \right)^2 - 2Bc^2 \left(\frac{X}{\sqrt[3]{Z}} - \frac{Y}{15B^2c^2} + \sqrt[3]{Z} \right)^2 + 2Bc^2 \left(\frac{X}{\sqrt[3]{Z}} - \frac{Y}{15B^2c^2} + \sqrt[3]{Z} \right)^3 - ac \left(\frac{X}{\sqrt[3]{Z}} - \frac{Y}{15B^2c^2} + \sqrt[3]{Z} \right) + Bac \left(\frac{X}{\sqrt[3]{Z}} - \frac{Y}{15B^2c^2} + \sqrt[3]{Z} \right) \right] \quad (27)$$

A diferencia del resultado de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987), en el que $\alpha_i < 1$ en equilibrio para todos los casos, en el modelo reinterpretado α_i puede ser mayor, menor o igual a 1 en equilibrio, permitiendo en los tres casos obtener beneficios, cantidades, precios y salarios de los gerentes positivos, tal como se ilustra en la siguiente sección.

³ En el Anexo 2 se presenta el valor de Y, X y Z.

4. ANÁLISIS COMPARATIVO

A continuación se presenta un análisis comparativo entre el modelo reinterpretado y el modelo desarrollado por Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) en un contexto de competencia a la Cournot.

Tal como se explicó anteriormente Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) obtienen que, en el caso de competencia a la Cournot, $\alpha_i < 1$ en equilibrio; es decir, el dueño incentiva al gerente a ser más agresivo en ventas. Esto significa que en equilibrio, el gerente no está alineado con los objetivos del dueño. Este resultado es robusto a la especificación de los parámetros del modelo, siempre que se cumpla la condición $a > c$, mediante la cual se asegura que las cantidades, los precios y los beneficios de equilibrio sean positivos.

Sin embargo en el modelo reinterpretado es posible en equilibrio obtener valores de $\alpha_i > 1$, $\alpha_i = 1$, o $\alpha_i < 1$ para los cuales las cantidades, el precio y los beneficios son positivos. Este resultado depende críticamente de los parámetros del modelo: a, c, A, B . Es decir, dependiendo del tamaño de la demanda, del costo marginal, del costo de oportunidad del gerente (A) y del peso relativo de los resultados del mercado (B) en el salario del gerente, en equilibrio los dueños pueden incentivar a este último a ser más agresivo en ventas ($\alpha_i < 1$), menos agresivo en ventas ($\alpha_i > 1$), o a sintonizarse con los objetivos del dueño ($\alpha_i = 1$) y en cualquiera de estos casos obtener beneficios positivos (los dueños) y utilidades positivas (los gerentes).

Dada la complejidad para resolver algebraicamente el modelo reinterpretado, se asignaron valores para ilustrar los tres casos mencionados, asumiendo valores concretos de los parámetros a, c, A y B . Se comparará el excedente del consumidor (CS) para cada caso.

4.1. $\alpha_i > 1$ EN EQUILIBRIO EN EL MODELO REINTERPRETADO

Para hacer la comparación de los resultados del modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) y del modelo reinterpretado, a continuación se presenta un caso en el cual se obtiene $\alpha_i > 1$ en equilibrio en el modelo reinterpretado, asumiendo los siguientes valores para los parámetros: $a = 25$, $c = 0.1$, $B = 0.1$ y $A = 1$.

En la tabla 1 se presentan los beneficios de las empresas π_i , la utilidad de los gerentes v_i , el valor del parámetro de incentivos gerenciales β_i , las cantidades q_i , los precios de equilibrio p_i , el excedente del consumidor CS y el bienestar social W para ambos modelos. Estos valores se obtienen resolviendo cada modelo como se expuso en los capítulos 2 y 3. En el caso del modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) se obtiene $\alpha_i < 1$. Sin embargo, con los parámetros utilizados en esta sección en el modelo reinterpretado, se obtiene $\alpha_i > 1$. Este resultado es contrario al encontrado en el modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) e implica que el gerente será incentivado a ser menos agresivo en ventas. El bienestar social es mayor en el modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) que en el modelo reinterpretado, esto debido a que los precios son menores en el primer modelo.

Tabla 1

	Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987)	Modelo Reinterpretado
π_1	-48.8	7.3691
π_2	49.6	66.22
β_i	1	4.3417
q_1	9.96	8.0877
q_2	9.96	8.0877
p_1	5.08	8.8246
CS	198.4	130.77
W	297.6	263.21

Resultados obtenidos en Fershtman y Judd y Modelo Reinterpretado

Las funciones de reacción del modelo de Fershtman y Judd(1987) y Sklivas (1987) y del modelo reinterpretado, son:

$$q_1 = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}ca_1 + \frac{1}{3}ca_2$$

$$q_2 = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}ca_1 - \frac{2}{3}ca_2$$

Reemplazando los parámetros y el valor de q_1 de equilibrio, se obtiene:

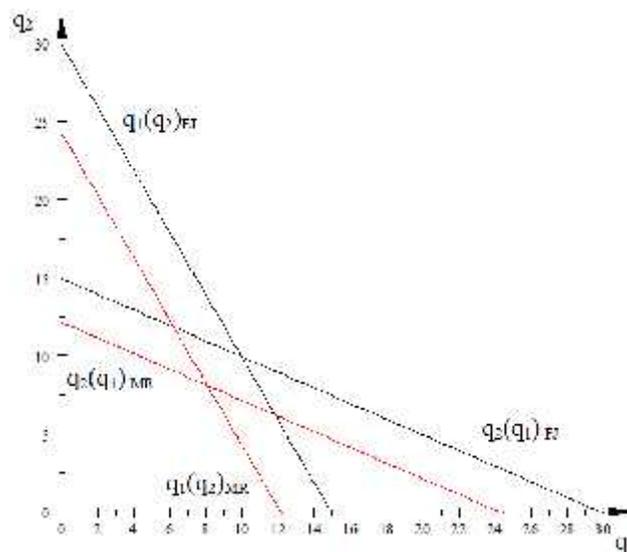
Tabla 2

	Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987)	Modelo Reinterpretado
Función de Reacción 1	$29.88 - 2 \frac{q_2}{q_1}$	$24.263 - 2 \frac{q_2}{q_1}$
Función de Reacción 2	$14.94 - \frac{1}{2} \frac{q_2}{q_1}$	$12.132 - \frac{1}{2} \frac{q_2}{q_1}$
Equilibrio	(9.96, 9.96)	(8.08, 8.08)

Funciones de reacción y cantidades de equilibrio en Fershtman y Judd y Modelo Reinterpretado

Las curvas de reacción del modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) y del modelo reinterpretado, se presentan en la Gráfica 2:

Gráfica 2



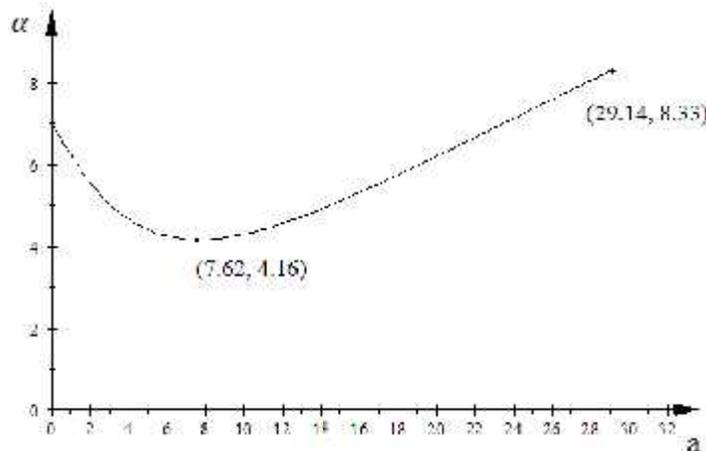
Curvas de reacción Fershtman y Judd (FJ) y Modelo Reinterpretado (MR)

Las curvas de reacción mantienen la misma forma funcional del modelo de Fershtman y Judd (1987) y mantienen también la misma pendiente.

Para los valores escogidos de los parámetros, se obtiene $\alpha_i > 1$ en el modelo reinterpretado, lo cual significa que al contrario de lo obtenido por Fershtman y Judd, el gerente de la empresa será menos agresivo en ventas. Para este caso las cantidades de equilibrio son menores que en el caso del modelo de Fershtman y Judd y las dos curvas de reacción se desplazan hacia abajo. Esto significa que los beneficios de la empresa son mayores en el modelo reinterpretado, debido a que si se produce menor cantidad el precio es superior y los ingresos de la empresa son más altos. Con respecto a los costos, si se produce una menor cantidad, serán inferiores y la utilidad del gerente aumentará, pero es mayor el efecto neto en el aumento en los ingresos de la empresa.

A continuación se presenta un análisis de sensibilidad del valor de equilibrio de α_i , cuando cambia la demanda. La variación de la demanda se hace modificando el parámetro a . Los demás parámetros conservan el valor asumido en esta sección.

Gráfica 3



Comportamiento de α_i con respecto a la demanda

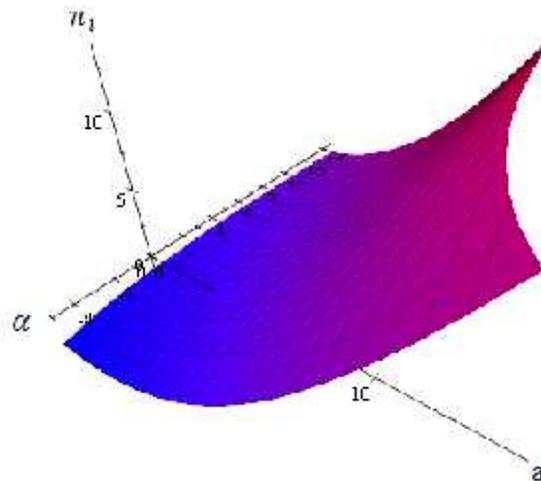
El valor de α_i disminuye para valores pequeños de la demanda $0 < a < 7.62$ y después crece. Valores más altos de la demanda producen mayores beneficios y mayor

remuneración total para el gerente. π_1 es creciente en el rango $7.62 < a < 29.14$ y siempre es mayor que 1 en todo el rango $0 < a < 29.14$.

Para valores de $a > 29.14$, el modelo no tiene solución en el ámbito de los números reales. En este rango de π_1 los beneficios de la empresa, la utilidad del gerente, las cantidades y el precio, son positivos.

A continuación se presenta el resultado de los beneficios, utilidad del gerente, cantidades y precio cuando varían simultáneamente los parámetros π_1 y a .

Gráfica 4

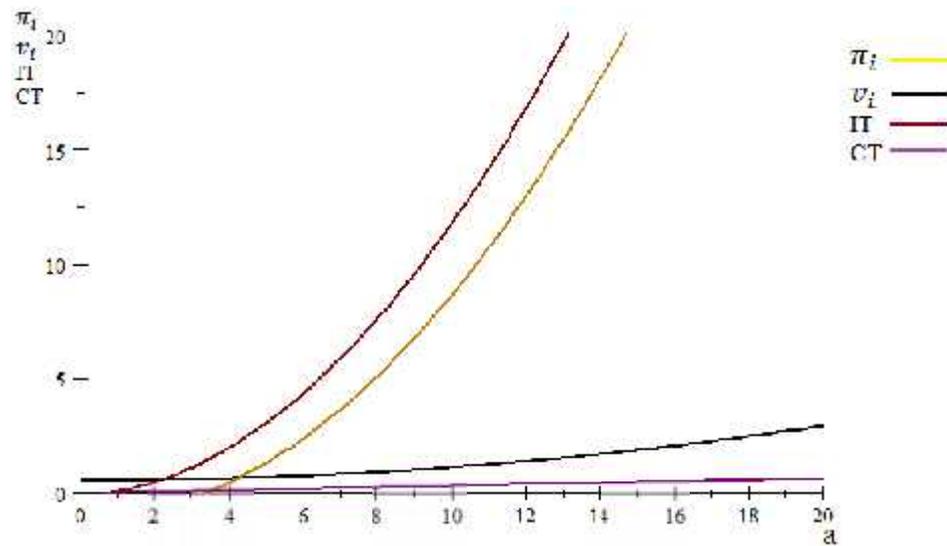


Comportamiento de los beneficios de la empresa, respecto a π_1 y a .

En la Gráfica 4, los beneficios de la empresa π_1 aumentan a medida que crece el valor de a y el valor de π_1 . Entre mayor sea el valor de a , el valor de los ingresos aumentará. Debido a esto, los beneficios crecen. Valores de $\pi_1 > 1$ conllevan a que el gerente sea incentivado a ser menos agresivo en ventas y entre mayor sea este valor, la cantidad producida será menor, por lo que el costo total de producción (sin el salario del gerente) disminuirá conforme aumenta π_1 .

A continuación se demuestra gráficamente que el costo total disminuye a pesar de que el gerente ve un costo marginal más alto

Grafica 5



Comportamiento de π_i , v_i , Costo total (CT), Ingreso total (IT) respecto al valor de a.

A continuación se presenta los valores de estas variables si $a = 25$ y $a = 20$.

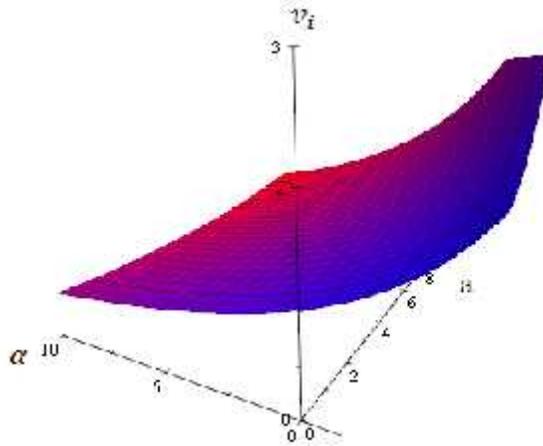
Tabla 3

Variables	Si $a = 25$	Si $a = 20$
π_i	66.21	42.37
v_i	4.34	2.94
CT	0.81	0.64
IT	71.37	45.96

Valor de las variables si $a = 25$ y $a = 20$

Se observa en la tabla 3, que al disminuir el valor de a, el costo total cae debido a que el gerente es menos agresivo en ventas y la cantidad producida será menor. El ingreso total de la empresa disminuye debido a menor producción. Los beneficios de la empresa caen por menor producción de la empresa, y se presenta el mismo comportamiento en la utilidad total del gerente.

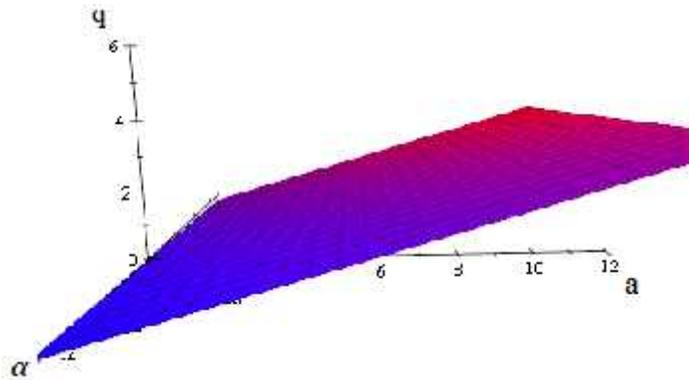
Gráfica 6



Comportamiento de la utilidad del gerente, respecto al valor de α y a .

En la Gráfica 6 se observa que la utilidad del gerente v_i , aumenta cuando el valor de a crece, esto se debe a que v_i depende de un componente fijo, que es el costo de oportunidad del gerente de trabajar en la empresa y un componente variable, que está ligado directamente al desempeño de la empresa en beneficios y ventas. Si a la empresa le va bien en sus beneficios el gerente obtendrá una mayor utilidad v_i , conforme crece α la producción de la empresa será menor, lo que llevará a menores niveles de beneficios y de v_i .

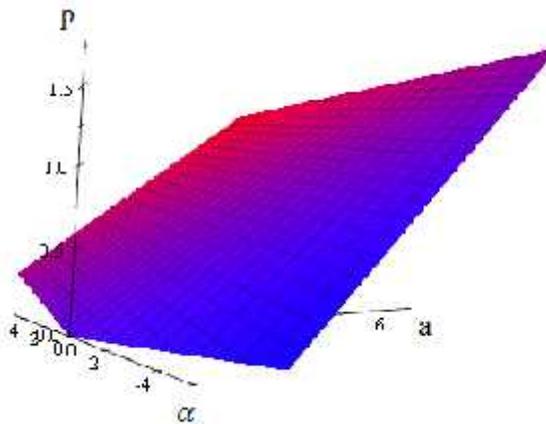
Gráfica 7



Comportamiento de la cantidad, respecto al valor de α y a .

La Gráfica 7 muestra que valores crecientes de a , producen aumentos en la cantidad producida por la empresa i . Sin embargo, al aumentar del valor de α_i la cantidad producida disminuye. Esto se debe a que valores de $\alpha_i > 1$ ocasionan que el gerente sea menos agresivo en ventas y la empresa produzca menor cantidad.

Gráfica 8



Comportamiento del precio, respecto al valor de α_i y a .

Se observa en la Gráfica 8 que cuando crece la demanda a , también aumenta el precio de equilibrio. Esto se debe a que la empresa va a ofrecer una mayor cantidad del bien en el mercado.

4.2. $\alpha_i = 1$ EN EQUILIBRIO EN EL MODELO REINTERPRETADO

A continuación se presenta un caso en el cual se obtiene en equilibrio en el modelo reinterpretado $\alpha_i = 1$, asumiendo los siguientes valores para los parámetros $a = 20$, $c = 0.1$, $B = 0.056043$ y $A = 1$.

En la tabla 4 se presentan los resultados de ambos modelos. En este caso el valor $\alpha_i = 1$ en el modelo reinterpretado es distinto al obtenido en el modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) ($\alpha_i < 1$).

El valor $\alpha_i = 1$ implica que el gerente se comportará como si fuera el dueño. Para este caso, el beneficio de la empresa es mayor al obtenido en el modelo de Fershtman y Judd, debido a que las cantidades en el mercado son menores y el precio es mayor, lo que incrementa el nivel de ingresos de la empresa con respecto al costo. Cantidades menores representan costos de producción menores. La utilidad del gerente es mayor debido a que se ve influenciado directamente por el aumento en los beneficios. Menores precios que se obtienen en el modelo de Fershtman y Judd permiten que el bienestar social sea mayor que en el modelo reinterpretado.

Tabla 4

	Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987)	Modelo Reinterpretado
	-38.8	1
	31.681	40.719
	0.91071	3.282
q	7.96	6.6333
q	7.96	6.6333
P	4.08	6.7334
CS	126.72	88.68
W	190.082	170.118

Resultado obtenidos en Fershtman y Judd y Modelo Reinterpretado

Las funciones de reacción del modelo de Fershtman y Judd(1987) y Sklivas (1987) y del modelo reinterpretado, son:

$$q_1 = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}ca_1 + \frac{1}{3}ca_2$$

$$q_2 = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}ca_1 - \frac{2}{3}ca_2$$

Reemplazando los parámetros y el valor de q_1 de equilibrio, se obtiene:

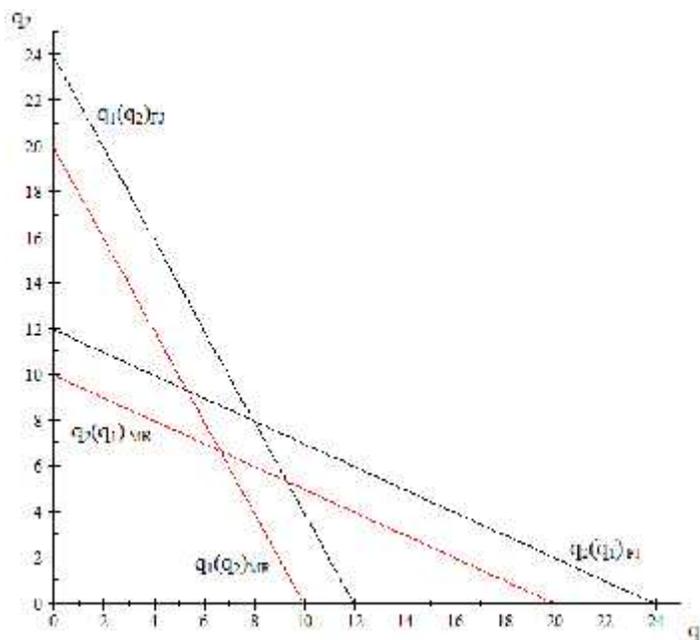
Tabla 5

	Fershtman y Judd(1987) y Sklivas (1987)	Modelo Reinterpretado
Función de Reacción 1	$23.88 - 2 \frac{q_2}{q_1}$	$19.9 - 2 \frac{q_2}{q_1}$
Función de Reacción 2	$11.94 - \frac{1}{2} \frac{q_1}{q_2}$	$9.95 - \frac{1}{2} \frac{q_1}{q_2}$
Equilibrio	(7.96, 7.96)	(6.63, 6.63)

Funciones de reacción y cantidades de equilibrio en Fershtman y Judd y Modelo Reinterpretado

Las curvas de reacción del modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) y del modelo reinterpretado, se presenta en la Gráfica 9:

Gráfica 9



Curvas de reacción Fershtman y Judd (FJ) y Modelo Reinterpretado (MR)

Las curvas de reacción mantienen la misma forma funcional del modelo de Fershtman y Judd (1987) pero se modifica el equilibrio de Nash.

Para los valores escogidos de los parámetros, se obtiene $\alpha_1 = 1$, lo cual significa que el gerente de la empresa maximiza los beneficios del dueño y se comporta como él. Para este

caso el equilibrio de cantidades es menor que en el caso del modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) y las dos curvas de reacción se desplazan hacia abajo. En este mercado los precios son mayores, las cantidades menores, los beneficios del dueño de cada empresa se incrementan así como también la remuneración total del gerente.

4.3. $\alpha_1 < 1$ EN EQUILIBRIO EN EL MODELO REINTERPRETADO

A continuación se presenta un caso en el cual se obtiene en equilibrio en el modelo reinterpretado $\alpha_1 < 1$, asumiendo los siguientes valores para los parámetros $a = 10$, $c = 0.1$, $B = 0.0001$ y $A = 1$.

En la Tabla 6, se presentan los resultados con los parámetros mencionados. Para este caso se obtiene en ambos modelos $\alpha_1 < 1$. En el modelo reinterpretado, el valor de beneficios de la empresa es menor que en el modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) debido a que los ingresos de la empresa son menores. Esto se debe a que las cantidades producidas son inferiores y menor producción genera un costo menor. La utilidad del gerente es mayor, debido a que cuando $\alpha_1 < 1$ éste es agresivo en ventas y dado que v_i es una combinación lineal entre beneficios y ventas, la utilidad del gerente aumenta debido al aumento en las ventas. El bienestar social es menor que en el modelo de Fershtman y Judd debido a que los precios son mayores en el modelo reinterpretado.

Tabla 6

	Fershtman y Judd(1987) y Sklivas (1987)	Modelo Reinterpretado
π	-18.8	-18.772
π_i	7.8408	6.8429
π_g	1	1.0035
q	7.293	7.292
q	7.293	7.292
P	2.08	2.0818
CS	57.76	57.73
W	73.44	71.42

Resultado obtenidos en Fershtman y Judd y Modelo Reinterpretado

Las funciones de reacción del modelo de Fershtman y Judd(1987) y Sklivas (1987) y del modelo reinterpretado, son:

$$q_1 = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}c\alpha_1 + \frac{1}{3}c\alpha_2$$

$$q_2 = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c\alpha_1 - \frac{2}{3}c\alpha_2$$

Reemplazando los parámetros y el valor de q_1 de equilibrio, se obtiene:

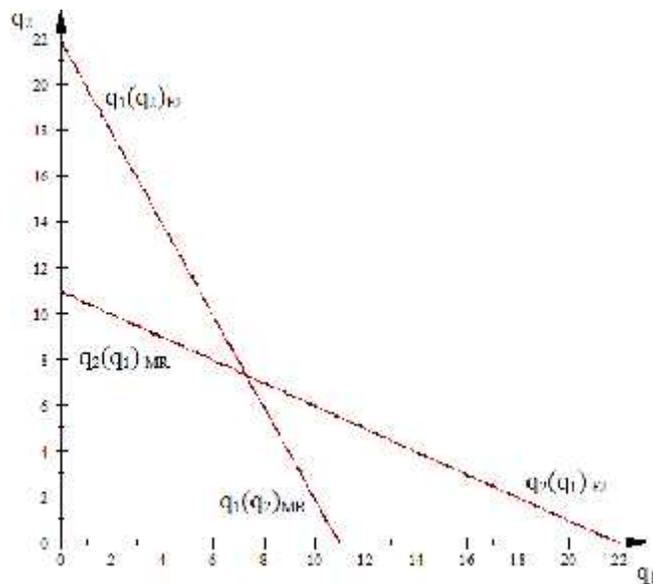
Tabla 7

	Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987)	Modelo Reinterpretado
Función de Reacción 1	$q_1 = 21.88 - 2 \frac{q_2}{22}$	$q_1 = 21.878 - 2 \frac{q_2}{22}$
Función de Reacción 2	$q_2 = 10.94 - \frac{1}{2} \frac{q_1}{22}$	$q_2 = 10.939 - \frac{1}{2} \frac{q_1}{22}$
Cantidades de equilibrio	(7.293, 7.293)	(7.292, 7.292)

Funciones de reacción y cantidades de equilibrio en Fershtman y Judd y Modelo Reinterpretado

Las curvas de reacción del modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) y del modelo reinterpretado, se presentan en la Gráfica 10:

Gráfica 10



Curvas de reacción Fershtman y Judd (FJ) y Modelo Reinterpretado (MR)

Las curvas de reacción mantienen la misma forma funcional del modelo de Fershtman y Judd (1987) pero se modifica ligeramente el equilibrio de Nash.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este documento se obtiene como resultado principal que la inclusión de la remuneración del gerente como un costo para la empresa, genera en equilibrio resultados diferentes a los obtenidos por Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987). La inclusión de la remuneración total de los gerentes en los costos de las empresas, permite ampliar el espectro de incentivos que una empresa ofrece a su gerente en equilibrio.

Los dueños influyen en los incentivos que otorgan a los gerentes por medio de α_i este parámetro permite establecer el peso relativo que un gerente dentro de su función de incentivos da a los beneficios y ventas de la empresa. Este parámetro es determinado endógenamente mediante competencia a la Cournot, en el modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) como en el modelo reinterpretado, α_i resulta un parámetro esencial para la determinación de factores de mercado, debido a que los incentivos de los gerentes son modificados por los dueños para buscar un comportamiento beneficioso en sus empresas.

A diferencia del modelo planteado por Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) en donde en equilibrio se obtienen resultados para $\alpha_i < 1$, el modelo reinterpretado encontró que es posible obtener valores de $\alpha_i > 1$, $\alpha_i = 1$, o, $\alpha_i < 1$ para los cuales en equilibrio las cantidades, el precio, los beneficios y la utilidad del gerente son positivos.

Para el caso donde $\alpha_i > 1$ los dueños incentivan al gerente de la empresa a ser menos agresivo en ventas. Los beneficios de la empresa son mayores a los del modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) debido a que la cantidad producida será menor y el costo de producción (sin el salario del gerente) disminuirá.

Si $\alpha_i = 1$ el gerente se comportará como si fuera el dueño. En este caso el beneficio de la empresa es mayor al obtenido en el modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987), debido a que las cantidades en el mercado son menores y el precio es mayor, lo que

incrementa el nivel de ingresos de la empresa con respecto al costo. Cantidades menores representan costos de producción menores.

En el caso de $\alpha_i < 1$, el beneficio de la empresa es inferior al del modelo Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987), debido a que los ingresos de la empresa son menores. Esto se debe al efecto que se da en los precios de equilibrio y menor producción genera un costo menor.

La utilidad del gerente se define como $v_i = A_i + B_i O_i$. En el modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) se supone que v_i es igual al costo de oportunidad del gerente y que el valor de A_i se puede ajustar en una etapa previa, con el fin de mantener constante v_i . Debido a que el gerente es neutral al riesgo, maximiza O_i dado que los valores de A_i y B_i son irrelevantes en esta maximización.

En el modelo reinterpretado se asume A_i como el costo de oportunidad del gerente, que es fijo y no se puede ajustar en una etapa previa. Tal es el caso de muchas empresas en las que $B_i O_i$ es la remuneración variable, que depende de los incentivos α_i que el dueño proporcione al gerente en el contrato. $B_i > 0$ mide el peso que el dueño le da al componente variable del salario dentro de la remuneración total. Esta reinterpretación obliga a introducir el salario del gerente como un costo que afecta endógenamente los beneficios de la empresa y la determinación de α_i .

Se observa que el excedente del consumidor CS en los tres casos analizados siempre es mayor en el modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987), por esta razón el bienestar social W que es la adición del excedente del consumidor y el excedente del productor es mayor que en el modelo reinterpretado. El mayor bienestar social se identifica en el primer caso cuando $\alpha_i > 1$ y es mayor en el modelo de Fershtman y Judd que en el modelo reinterpretado debido principalmente al efecto precios del primer modelo, que genera mayor excedente del consumidor.

Debido a la importante diferencia en los valores encontrados en competencia vía cantidades, se sugiere ampliar el análisis de los estudios que han utilizado la propuesta de incentivos gerenciales de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) tomando este nuevo resultado.

La constante B_i mide el peso que el dueño da al resultado de mercado. Se recomienda en futuros estudios analizar la posibilidad de que ésta sea determinada de forma endógena.

Se recomienda para futuras investigaciones, analizar el efecto de la modificación propuesta, cuando se consideran diferentes tipos de competencia como Bertrand o Stackelberg. Además, comprobar de manera robusta los resultados encontrados en este estudio para el caso donde $\alpha_i > 1$ y $\alpha_i = 1$ donde los beneficios, la utilidad del gerente, los precios y las cantidades son mayores en el modelo reinterpretado que en el de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987).

BIBLIOGRAFÍA

- Barcena J. C. y M. O. Espinosa (1995). “La organización interna como arma estratégica: descentralización y delegación”, *Estudios de Economía*, Vol. 25, No. 1, (Jun 1998), pp. 7-23.
- Cournot, A. (1897). “Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses”. Paris :Hachette [1838]. N. T. Bacon (trad.), *EconomicClassics*, Macmillan.
- Faulí-Oller R, M. Giralt. “Competition and Cooperation Within a Multidivisional Firm” *The Journal of Industrial Economics*, Vol. 43, No. 1 (Mar., 1995), pp. 77-99
- Fershtman, C y K. L. Judd (1987). “Equilibrium Incentives in Oligopoly”, *The American Economic Review*, Vol. 77, No. 5, (Dec., 1987), pp. 927-940.
- Macho I y D Pérez (1994). “Introducción a la economía de la información”, pp. 16-29.
- Ross, S. (1973). “The economic theory of agency: The principal’s problem”. *American EconomicReview*, Vol. 63, pp. 134-139.
- Salas, V (2007). “El siglo de la empresa”. Fundación BBVA
- Sklivas, S. (1987). “The strategic choice of managerial incentives”. *The Rand Journal of Economics*, Vol. 18, No. 3, pp. 452-458.
- Vickers, J (1985). “Delegation and the Theory of the Firm”, *Economic Journal Supplement*, 95, pp. 138-147.

ANEXOS

ANEXO 1

Autores que utilizan el modelo de Fershtman y Judd (1987) y Sklivas (1987) para resolver problemas de incentivos gerenciales.

Park (2002) “Vertical externality and strategic delegations”, las empresas utilizan un insumo que adquieren en el mercado no competitivo (mercado dominado por un monopolista), al introducir este insumo en su mercado competitivo se modifica los contratos de los administradores, y el equilibrio que se obtiene es el simple de Nash.

Zhang y Zhang (1997) “R&D in a strategic delegation game” introducen en el modelo el impacto de I+D (Investigación+Desarrollo) y lo que genera dependiendo de los efectos cruzados que existan entre los costos de las empresas. Cuando los efectos cruzados son bajos, la empresa invierte en I+D y tiene mayor producción y más bajos precios. Al ser los efectos cruzados altos se producirá un aumento en la cantidad producida por la empresa rival. Esto hace que en los contratos con los gerentes, los dueños decidan penalizar el I+D para ahorrarse los costos y aprovechar el I+D del rival.

Basu (1995) “An explanation based on managerial incentives” endogeniza la decisión de contratar administradores, realiza un modelo de tres etapas, en una etapa previa los dueños deciden si contratan o no a un administrador, los resultados cuando se contrata un administrador se mantienen igual que en el modelo estudiado.

Faulí y Motta (1994), “Why do owners let their managers pay too much for their acquisitions” analizan las fusiones empresariales y en algunos casos su ineficiencia, mencionan que esta se debe al contrato de incentivos gerenciales utilizado en el modelo analizado. Encuentran esquemas de incentivos que evitan que las fusiones no beneficiosas no se den mientras se mantengan estrategias características del contrato del gerente.

Brady (2002) “The incentive model of the firm: an analytical and simulation approach” describe los límites entre el agente y el dueño dados por diferentes motivaciones. Por medio de simulaciones de computador permite identificar un factor incentivo óptimo para los dueños al escoger los incentivos de los gerentes.

Manasakis, Mitrokostas y Petrakis (2006) “Endogenous strategic incentive contracts” analizan la estructura endógena de los contratos de incentivos que los dueños ofrecen a los gerentes cuando estos contratos son combinaciones lineales de los propios beneficios o ingresos de la empresa y de los beneficios o ingresos de la competencia. En el equilibrio cada dueño tiene una estrategia dominante en donde cada dueño remunera a su gerente con un contrato que tenga una combinación de sus propios ingresos y de los de su competidor.

ANEXO 2

VARIABLES utilizadas en la simplificación de α_i , el precio p , las cantidades q_i y los beneficios π_i del Capítulo 3.

Sea $Z = K + J$

Siendo K y J :

$$K = \sqrt{\begin{array}{l} \frac{2 a^2}{1875 c^2} + \frac{74 a^3}{16875 c^3} + \frac{527 a^4}{67500 c^4} - \frac{1 a^5}{16875 c^5} + \frac{2}{1875 B^2} + \frac{8}{675 B^3} + \frac{19}{540 B^4} + \frac{1}{135 B^5} + \frac{81 A^2}{100 B^2 c^4} \\ + \frac{116 a^2}{5675 B c^2} + \frac{1067 a^2}{11250 B^2 c^2} + \frac{701 a^3}{16875 B c^3} - \frac{3375 B^3 c^2}{16875 B^2 c^3} + \frac{13875 B c^4}{13875 B c^4} + \frac{9 A}{625 B c^2} \\ + \frac{18 A}{125 B^2 c^2} + \frac{21 A}{50 B^3 c^2} + \frac{1 A}{15 B^4 c^2} + \frac{4 a}{1875 B c} + \frac{158 a}{5625 B^2 c} + \frac{13 a}{135 B^3 c} + \frac{7 a}{675 B^4 c} + \frac{201 A a^2}{1275 B c^4} \\ + \frac{1 A a^2}{125 B^2 c^4} - \frac{1 A a^3}{1875 B c^5} + \frac{36 A a}{625 B c^3} + \frac{51 A a}{125 B^2 c^3} - \frac{1 A a}{25 B^3 c^3} \end{array}}$$

$$J = \frac{4 a}{125 c} + \frac{67 a^2}{750 c^2} - \frac{1 a^3}{3375 c^3} + \frac{2}{25 B} + \frac{7}{30 B^2} + \frac{1}{27 B^3} + \frac{1 a^2}{225 B c^2} + \frac{9 A}{10 B c^2} + \frac{17 a}{75 B c} - \frac{1 a}{45 B^2 c} + \frac{1}{125}$$

Además, X y Y :

$$X = \frac{8 a}{75 c} + \frac{1 a^2}{225 c^2} + \frac{4}{15 B} + \frac{1}{9 B^2} - \frac{2 a}{45 B c} + \frac{1}{25}$$

$$Y = 10 B c^2 - 3 B^2 c^2 + B^2 a c$$