Pontificia Universidad
JAVERIANA
Bogotá

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS DISTRIBUCIONES

Liz Andrea Escobar Vargas

Tesis presentada al Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Javeriana para optar por el grado de Matemáticas

Dirigida por:
Humberto Gil Silva Rafeiro Ph.D.

Noviembre, 2012
Bogotá - Colombia

Índice general

1. Introducción **11**

2. Preliminares **15**
2.1. Enfoque Axiomático 15
2.2. Delta de Dirac 17
2.3. Teoría Inicial 20
2.4. Algunos Resultados Sobre Integración 24

3. Distribuciones Sobre el Espacio $\mathcal{D}$ **27**
3.1. Funciones Prueba en $\mathcal{D}$ 27
3.2. Espacio de las Distribuciones $\mathcal{D}'$ 31

4. Distribuciones Sobre el Espacio $\mathcal{S}$ **37**
4.1. Funciones Prueba en $\mathcal{S}$ 37
4.2. Espacio de las Distribuciones Temperadas 41

5. Derivada y Propiedades de las Distribuciones **53**
5.1. Derivada de las Distribuciones 53
5.2. Propiedades y Relaciones entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{D}$ 61

6. Transformada de Fourier **69**
6.1. Definición y Propiedades 69
6.2. Transformada de Fourier de una Distribución Temperada . . . 82

7. Convoluciones **85**
7.1. Definición y Propiedades 85
7.2. Convoluciones con Distribuciones 89

8. Teoremas de Estructura para las Distribuciones **105**

9. Aplicaciones **109**
9.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) 109
9.2. Soluciones Fundamentales y Ecuaciones Diferenciales 120
9.3. Espacios de Sobolev 124
9.4. Cálculo Fraccional 129

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme la oportunidad de cumplir uno de mis sueños, a mis padres por darme los medios y la fuerza para alcanzarlos y a todos aquellos que estuvieron a mi lado en el proceso.
A la Pontificia Universidad Javeriana, la Carrera de Matemáticas particularmente a Humberto Gil Silva Rafeiro Ph.D. por la paciencia y la disposición para trabajar conmigo.

Notación

Se determina la siguiente notación que será valida en todo este trabajo

1.
$$\mathrm{supp}(f) = \{\overline{x \in \Omega : f(x) \neq 0}\}$$

2.
$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mid f(x) \mid$$

3. Se define la siguiente notación de multi-índices, sea $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, tal que $\alpha = \alpha_1, ..., \alpha_n$, donde $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, para todo $1 \leq i \leq n$ y $x \in \mathbb{R}^d$ tal que $x = x_1, ..., x_n$

   - $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.
   - $D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.
   - $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$.
   - sea $c \in \mathbb{C}$, entonces, se define $c^\alpha = c^{\alpha_1} c^{\alpha_2} \cdots c^{\alpha_d} = c^{|\alpha|}$.
   - sea $\beta \in \mathbb{Z}_+$, entonces

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d}$$

4. Se define el conjunto de las funciones continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{C}(I)$$

5. De forma análoga, se define el conjunto de las funciones continuas, en I, cuyas n primeras derivadas son continuas, en I
$$\mathcal{C}^n(I).$$
Por lo tanto, el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables se denotará por
$$\mathcal{C}^\infty(I).$$

6. La bola abierta de centro a y radio r
$$D_r(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}.$$

7. Sea (x_n) una sucesión se define
   - El límite inferior de (x_n), como
   $$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup\{\inf\{x_k : k \geq n\} : n \geq 0\} = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right)$$
   - El límite superior de (x_n), como
   $$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf\{\sup\{x_k : k \geq n\} : n \geq 0\} = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right)$$

8. Se notará
$$\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g) = \{x+y \mid x \in \operatorname{supp}(f) \ \wedge \ y \in \operatorname{supp}(g)\}$$

9. El Laplaciano se notará Δ, donde
$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

10. Sea $P(x_1, \cdots, x_d)$ un polinomio en d-variables. Entonces se notará $P(D)$ el operador parcial diferencial obtenido de reemplazar: $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ para cada x_j en la expresión polinomial de $P(x_1, \cdots, x_d)$. Por ejemplo, sea $P(x) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1$, entonces $P(D) = \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}$

11. Se notará $\mathcal{P}_d$ el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a d.

12. Sea (f_n) una sucesión de funciones, notará

$$f_n \rightrightarrows f$$

si f_n converge uniformemente a f.

13. Sea φ_n un sucesión:

- Si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}$, notará $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$.
- Si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{S}$, notará $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$.
- Si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}'$, notará $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}\text{'}} \varphi$.
- Si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{S}'$, notará $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}\text{'}} \varphi$.

Capítulo 1

Introducción

I am sure that something must be found.
There must exist a notion of generalized functions
which are to functions what real numbers are to the rationals.
(G. Peano, 1912) [4]

Los siglos XIX y XX se caracterizaron por un impresionante desarrollo del análisis funcional, en particular a través del estudio de los espacios duales. Así, desde 1913 con la implementación y demostración de los teoremas de representación de Riesz se puede intuir el concepto de funciones generalizadas: el teorema de Riesz (2.22) demuestra que algunos funcionales pueden ser representados por funciones ordinarias (obtienendo unos objetos "más generales" que las funciones) [7].

A pesar de la temprana intuición del concepto de funciones generalizadas, estas no se desarrollaron hasta mediados del siglo XX debido a la falta de motivación y ciertos vacios en el entendimiento de los espacios duales. Pero, las dificultades que se presentaban en la solución de algunas ecuaciones diferenciales impulsó una teoría que permitiría la búsqueda de soluciones que no tuvieran que satisfacer la regularidad de la ecuación planteada: las distribuciones se desarrollaron en paralelo a la búsqueda de soluciones "generalizadas" (o débiles).

Uno de los problemas que llevaron al desarrollo de las funciones generalizadas es el de la vibración de cuerdas (planteado inicialmente por d'Alembert): este podría tomarse como el primer ejemplo de utilización de soluciones generalizadas. El problema anterior generó controversia debido a la solución que algunos matemáticos utilizaron como las soluciones débiles, a tráves de funciones prueba.

Al estudio de este problema se sumó Lagrange, quien, además de otros argumentos, proporcionó uno de los conceptos centrales de las funciones prueba: utilizar la integración por partes para pasar el operador diferencial de la "función desconocida" a la función prueba (esto permitirá definir la derivada para las funciones generalizadas) cuya regularidad es impuesta desde el inicio (cabe resaltar que d'Alembert no estaba de acuerdo con la utilización de soluciones generalizadas). La ecuación integro-diferencial, que se debe cumplir para todas las funciones prueba, no supone diferenciabilidad de la solución; este método fue explícitamente formulado y aplicado por Wiener en 1926, y es conocido como derivada débil.
A pesar que se evidenció la utilidad de las soluciones generalizadas estas tuvieron un largo tiempo de inactividad, pero volvieron a entrar en vigencia gracias a las ecuaciones elípticas de Laplace y Poisson: Sobolev utilizó esta herramienta para la solución de ecuaciones hiperbólicas y elípticas [9]. Más aun, Sobolev definió la solución generalizada de la ecuación de onda, como una función u para la cual existe una sucesión $u_n \in \mathcal{C}^\infty$ de soluciones ordinarias y que converge en $\mathcal{L}^1(x, y, t)$ a u. A esta definición le debemos el enfoque *secuencial* de solución generalizada.
Así, Sobolev establece las bases de las soluciones generalizadas, y prueba en un ejemplo la aplicación de dicho concepto, lo que marca el "renacimiento" de este y el inicio de las funciones generalizadas [9, 12].

Posteriormente las funciones generalizadas tomarían el nombre de distribuciones, nombre que les dio el matemático francés Schwartz, y que, debido a la aceptación y difusión de su teoría es el nombre utilizado actualmente [8]. Al igual que en el caso de Sobolev, la motivación para el desarrollo de la teoría de las distribuciones por parte de Schwartz, se debió al estudio de las soluciones débiles de ecuaciones diferenciales parciales. Pero a diferencia de los trabajos anteriores, Schwartz contaba con un avance en el estudio del análisis funcional antes de utilizar esta herramienta en las aplicaciones. Así, inicialmente, Schwartz concibió las "distribuciones" como operadores, pero gracias a los precedentes que había establecido en la teoría de la dualidad de los espacios de Banach, la de los espacios de Fréchet y a los beneficios de trabajar con los espacios duales, Schwartz definió las distribuciones como un funcional lineal continuo sobre un espacio vectorial de funciones (llamadas funciones prueba) [11].

A pesar de la importancia del trabajo de Schwarzt en el estudio de las distribuciones, estas no fueron muy utilizadas, por el conocimiento de análisis funcional previo necesario para desarrollar esta teoría. Por esta razón, se desarrolló posteriormente el *enfoque axiomático* de las distribuciones. En este enfoque se trabaja con un concepto "intuitivo" de las distribuciones: estas son abordadas como las derivadas de funciones continuas usuales, donde la derivación es interpretada en un sentido muy general. Entre los precursores de una nueva forma de estructurar las distribuciones, está el matemático portugués José Sebastião e Silva, [3].

A pesar de la "sencillez" del enfoque axiomático este no es muy utilizado, el desarrollo de la estructura de las distribuciones bajo los teoremas básicos del análisis funcional es particularmente interesante, pues permite la interdisciplinaridad entre diferentes áreas de las matemáticas entre las que se destacan el análisis de Fourier, las ecuaciones diferenciales parciales, la teoría de la medida y por supuesto el análisis funcional. Por esta razón, en este trabajo se hará un estado del arte sobre la teoría de las distribuciones enfocándose en sus aplicaciones en la transformada de Fourier, las convoluciones y las ecuaciones diferenciales, entre otras.

En los tres primeros capítulos se expondrán las definiciones y propiedades presentes en los principales espacios de distribuciones, de forma similar a lo desarrollado en [13, 10]. Los capítulos 5,6 y 7 incluyen aplicaciones de las distribuciones en la transfromada de Fourier y las convoluciones, propiedades que serán utilizadas en el capítulo 9 como herramientas para soluciones de ecuaciones diferenciales parciales y el cálculo fraccionario, utilizando como referencia lo desarrallado en [13, 10, 4]. Inicialmente se hará una breve descripción del enfoque axiomático y de los teoremas necesarios para desarrollar la estructura de las distribuciones.

Capítulo 2

Preliminares

Debido a que el enfoque axiomático no es muy conocido, se iniciará presentando los axiomas bajo los cuales José Sebastião e Silva estructuró las distribuciones [3].

2.1. Enfoque Axiomático

A través de este modelo axiomático, las distribuciones generalizan el concepto de función, al igual que la noción de número real generaliza la noción de número racional. Uno de los objetivos princiaples de esta generalización de las funciones es lograr la derivación en condiciones más generales que en el análisis clásico. Una de las consecuencias de esto es darle explicación a algunos métodos del cálculo operacional utilizados ampliamente por físicos e ingenieros.

Antes de definir los axiomas que sustentarán este enfoque de la teoría de las distribuciones, es necesario observar que en $\mathcal{C}(I)$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$, no siempre se puede efectuar la operación de derivación, sin embargo, siempre es posible definir la primitiva de una función continua. Más aun, se tiene la siguiente cadena

$$\mathcal{C}^1 \supset \mathcal{C}^2 \supset \cdots \mathcal{C}^\infty.$$

Así, el objetivo es definir una cadena de la forma

$$\mathcal{D}_\infty \supset \cdots \mathcal{D}_2 \supset \mathcal{D}_1,$$

donde $\mathcal{D}_1$ designará el conjunto de las primeras derivadas (generalizadas) de las funciones $f \in \mathcal{C}$ y en general, $\mathcal{D}_k$ el conjunto de las derivadas de orden k de $f \in \mathcal{C}$, así

$$\mathcal{D}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{D}_n$$

será el conjunto de *todas las distribuciones*.
A partir de lo anterior, se derivan cuatro axiomas que serán la base de la teoría [3]:

Axioma 1. Las distribuciones definidas en I, $\mathcal{D}_\infty(I)$, forman un conjunto que contiene al conjunto $\mathcal{C}(I)$ de las funciones continuas en I.

Por lo tanto, toda función continua es una distribución.

Axioma 2. La derivación, D, es una aplicación de $\mathcal{D}_\infty$ en $\mathcal{D}_\infty$ tal que, si $f \in \mathcal{C}^1$, entonces

$$Df = f',$$

donde f' designa la derivada usual de f.

Axioma 3. Para todo $F \in \mathcal{D}_\infty$, existen $n \in \mathbb{Z}_+$ y un $f \in \mathcal{C}$ tales que

$$F = D^n f.$$

Axioma 4. Sea $f, g \in \mathcal{C}$ y $r \in \mathbb{Z}_+$, la igualdad $D^r f = D^r g$ se cumple, si y solo si $f - g \in \mathcal{P}_r$.

Vemos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1 (Funciones con integrales indefinidas)**.** Sea f una función con integral indefinida en I (es decir f es integrable en cualquier intervalo compacto de contenido en I) y $a \in I$ un punto arbitrario en I, la integral indefinida de f con origen en el punto a es la función continua en I definida por la fórmula

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Así, lo más natural (en particular para asegurar el cumplimiento del axioma 2) es definir: $f = D\Phi$ (donde D es la derivada en el sentido de las distribuciones).
Considere la función (con integral indefinida en $\mathbb{R}$)

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

eligiendo $a = 0$ y definiendo

$$J(x) = \int_0^x H(t)dt,$$

se obtiene $J(x) = x$ si $x \geq 0$ y $J(x) = 0$ si $x < 0$. Por lo tanto, hemos identificado H, función escalonada de Heaviside, con la distribución DJ, que llamaremos distribución de Heaviside .
La función H tiene una derivada H' en el sentido clásico, definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($H'(x) = 0$ para todo $x \neq 0$) la cual se identifica con la distribución nula (en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$), llamada distribución de Dirac : $D^2 J = \delta$. De forma similar, se definen las derivadas de la distribución de Dirac: $\delta^{(k)} = D^{k+2}J$.

Definición 2.2 (Grado de una Distribución)**.** Sea $F \in \mathcal{D}_\infty$ tal que

$$F = D^n f,$$

donde, $f \in \mathcal{C}$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Se llamará el grado de la distribución F el menor entero n tal que $F \in \mathcal{D}_n$, así mismo, $\mathcal{D}_n$ es el conjunto de las distribuciones de grado n.

Observación 2.3. Las distribuciones de grado 0 son las funciones continuas.

Ejemplo 2.4. La distribución de Heaviside es de grado 1, mientras que δ será una distribución de grado 2.

Así, a partir de los axiomas anteriores, se construye una teoría más sencilla de las distribuciones y estos axiomas tienen resultados similares en el enfoque que se tratará en este trabajo.
Vale la pena resaltar que tanto en el enfoque axiomático como en el que se tratará a continuación, uno de los elementos centrales es la "función Delta de Dirac".

2.2. Delta de Dirac

Una de las primeras distribuciones en surgir fue la llamada "función δ de Dirac" (o "función impulso unitario"). Veamos una manera natural de introducirla:

Suponga una **distribución** de masa en $\mathbb{R}$. Así, a cada intervalo acotado,

$I \subset \mathbb{R}$ se le asociara un número, no negativo, $m(I)$, que representa la cantidad de masa contenida en dicho intervalo. En muchos casos prácticos, es importante que exista una función ρ, tal que

$$m(I) = \int_I \rho(x)\,\mathrm{dx},$$

para cada intervalo acotado I. Bajo el supuesto que dicha función es continua se tiene

$$\rho(x) = \lim_{h \to 0} \frac{m\left[x - \frac{h}{2}; x + \frac{h}{2}\right]}{h}. \tag{2.1}$$

Donde el valor de $\rho(x)$ es llamado la densidad de la distribución de masa en el punto x. Consideremos ahora la distribución de masa

$$m(I) = \begin{cases} 1, & 0 \in I \\ 0, & 0 \notin I. \end{cases}$$

Suponga que la densidad para esta distribución de masa existe y es continua, se notará $\delta(x)$. Entonces

$$\int_a^b \delta(x)\,\mathrm{dx} = m([a;b]) = 1$$

siempre que $a < 0 < b$. Suponiendo la continuidad, la densidad $\delta(\cdot)$ satisface la ecuación 2.1, por lo tanto

$$\delta(x) = \lim_{h \to 0} \frac{m\left[x - \frac{h}{2}; x + \frac{h}{2}\right]}{h} = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

Así, se asumió la existencia de una función tal que

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

y para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < 0 < b$

$$\int_a^b \delta(x)\,\mathrm{dx} = 1. \tag{2.3}$$

Observe que la ecuación (2.2) define una función (pues a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna un único $\delta(x)$). Sin embargo, la ecuación (2.3) es una contradicción de la definición de la ecuación (2.2) bajo cualquier teoría aceptable de medida, pues en particular, bajo la integral de Lebesgue

$$\int_a^b \delta(x)\,\mathrm{dx} = 0$$

pues $x = 0$ tiene medida 0; pero esto contradice la ecuación (2.3). Más aun, se podría pensar en la "expansión" del concepto de integral, pero esta perdería las propiedades básicas de la integral (como la linealidad). Por la ecuación (2.2), se obtiene $2\delta = \delta$, por lo tanto

$$\int_a^b 2\delta(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \delta(x)\,\mathrm{dx} = 1$$

tomando como referencia (2.2), sin embargo, al suponer la linealidad en la integral se obtendría

$$\int_a^b 2\delta(x)\,\mathrm{dx} = 2\int_a^b \delta(x)\,\mathrm{dx} = 2.$$

Todo lo anterior sugiere que no existe la función de densidad δ que satisfaga las condiciones (2.3) y (2.2). A pesar de esto, los físicos e ingenieros no paran de construir esquemas para los cuales es indispensable considerar funciones "generalizadas" como la función de Dirac o incluso sus derivadas: considere el sistema compuesto por dos cargas eléctricas puntuales, q y $-q$, ubicadas en $-h$ y h (de $\mathbb{R}$) respectivamente. Se fija una distribución de carga a la cual se le atribuye la densidad

$$q\delta(x+h) - q\delta(x-h).$$

Ahora, al suponer que $h \to 0$ y $q \to \infty$, de modo que $2qh$ tenga límite finito, digamos p, entonces, la densidad de carga sería

$$\lim_{h\to 0}\left[2hq\frac{\delta(x+h)-\delta(x-h)}{2h}\right] = p\delta'(x).$$

Esta carga es llamada por los físicos dipolo (eléctrico) de momento p (en el origen). De forma análoga, se podría definir la segunda derivada δ'' como el límite de un sistema de dos dipolos

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{\delta'(x+h)-\delta'(x)}{h}\right] = \delta''(x).$$

Así, la utilización de la función de Dirac fue uno de los factores impulsores de la teoría de las distribuciones.

Finalmente, para el desarrollo de los conceptos que se tratarán a continuación, es necesario tener en cuenta los siguientes teoremas básicos del análisis funcional, estos resultados se pueden encontrar en [2, 6]

2.3. Teoría Inicial

Para el desarrollo de la teoría de las distribuciones se tendrán en cuenta las siguientes definiciones y teoremas preliminares. Debido a que muchos de estos se tratan en cursos de análisis funcional, se hará referencia a los libros más reconocidos que se siguen en estos cursos y se obviará la demostración de estos teoremas.

Definición 2.5 (Exponentes Conjugados)**.** Sea $p, q \in [1; \infty)$, p, q se dicen exponentes conjugados si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Definición 2.6. Se definen los espacios de Lebesgue L^p, como los espacios vectoriales normados sobre un espacio de medida (X, Σ, μ), donde $p \in [1; \infty)$ como el espacio de todas las funciones medibles f que cumplen

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

Es decir

$$L^p(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} | f \; es \; medible \; y \; |f|^p \in L^1(X) \right\}$$

(donde L^1 son las funciones medibles y abolutamente integrables). En particular, se define: L^∞ como el espacio de las funciones medibles f tales que

$$\inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq a\}) = 0\} < \infty$$

Esto es equivalente a

$$L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} | f \, es \, medible \, y \, \exists C : |f(x)| \leq C \, en \, c.t.p\}$$

(donde c.t.p se refiere a en casi todo punto).
Se define una norma en L^p como

$$\| f \|_{L^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

siempre que $p < \infty$ y en el caso de $p = \infty$, se define

$$\| f \|_{L^\infty} = \text{ínf}\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq a\}) = 0\}$$

Observación 2.7. La norma $\| \cdot \|_{L^\infty}$ es equivalente a $\sup \text{ess}_{\{x \in \mathbb{R}^d\}} |\cdot| = \| \cdot \|_\infty$.

Definición 2.8. Un operador lineal U^*, en un espacio de Hilbert, H, se dice el operador adjunto del operador lineal U si, para todo $x, y \in H$, $\exists z \in H$ tal que

$$\langle x, Uy \rangle = \langle U^* z, y \rangle.$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno.

Definición 2.9. Un operador lineal $U : H \to H$ en un espacio de Hilbert, H, se dice unitario si

$$U^* U = U U^* = I$$

donde U^* es el operador adjunto de U.

Definición 2.10. Un operador U en un espacio de Banach X, se dice isométrico si para todo $x \in X$, se tiene

$$\| Ux \|_{U(X)} = \| x \|_X$$

Definición 2.11. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, una función s se dice simple siempre que

$$s(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$$

donde $b_j \in \mathbb{R}$, para todo j, B_j es medible y χ_{B_j} su respectiva función característica.

Definición 2.12 (Funcional Sublineal)**.** Un funcional lineal p en un espacio vectorial X se dice sublineal si:

1. es subaditivo
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$
para todo $x, y \in X$,

2. es homogéneamente positivo
$$p(\alpha x) = \alpha p(x)$$
para todo $\alpha \geq 0$ en $\mathbb{R}$ y $x \in X$.

Para la demostración de los siguientes teoremas refierase a [2, 6].

Teorema 2.13. *Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas en S, tales que $f_n \rightrightarrows f$ en S, entonces f es continua.*

Observación 2.14 (Regla de Pascal)**.** Para todo $m, k \in \mathbb{Z}_+$, tales que $1 \leq k \leq m$
$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}.$$

Teorema 2.15. *Sean f, g funciones derivables de orden m en x, entonces $(fg)(x) := f(x)g(x)$ es también derivable de orden m en x, más aun*
$$(fg)^m(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{(m-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

Para el caso de $d > 1$

Teorema 2.16 (Fórmula de Leibniz)**.** *Sean $f, g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^d)$, entonces*
$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g),$$
donde $\beta \leq \alpha$, si para todo $1 \leq j \leq d$ $\beta_j \leq \alpha_j$.

Teorema 2.17. *L^p es espacio de Banach.*

Teorema 2.18 (Teorema de Rolle)**.** *Sea f un función tal que*

1. *f es continua en el intervalo cerrado $[a; b]$.*
2. *f es derivable en el intervalo abierto $(a; b)$.*

3. *$f(a) = f(b) = 0$.*

Entonces, existe un $c \in (a;b)$ tal que: $f'(c) = 0$.

Teorema 2.19. *Sea f una función con las siguientes propiedades:*

1. *f es continua en el intervalo cerrado $[a;b]$.*

2. *f es derivable en el intervalo abierto $(a;b)$.*

Entonces, existe un $c \in (a;b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{b - a}$$

En el caso $d > 1$

Teorema 2.20 (Teorema del Valor Medio)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, $a, b \in \mathbb{R}^d$, entonces, existe un $c \in \mathbb{R}^d$ tal que*

$$f(b) - f(a) = \bigtriangledown f(c) \cdot (b - a),$$

donde $\bigtriangledown$ es el gradiente de la función f y $\cdot$ denota el producto interno,

$$\bigtriangledown f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x) \right)$$

Teorema 2.21 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sean X un espacio vectorial real, p un funcional sublineal en X, f un funcional lineal definido en un subespacio Z de X que satisface*

$$f(x) \leq p(x)$$

para todo $x \in Z$.
Entonces f tiene una extensión $\tilde{f}$ de Z a X que satisface

$$\tilde{f}(x) \leq p(x)$$

para todo $x \in X$ y $f(x) = \tilde{f}(x)$ para todo $x \in Z$.

Teorema 2.22 (Teorema de Representación de Riesz)**.** *Sea* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $\phi \in (L^p)^*$. *Entonces existe una única función* $u \in L^q$ *tal que*

$$\phi(f) = \int uf$$

para todo $f \in L^p$. *Más aun*

$$\| u \|_p = \| \phi \|_{(L^q)^*} .$$

La prueba de este teorema se puede encontrar en [2].

Teorema 2.23 (Desigualdad de Young)**.** *Sean* $a, b, p, q > 0$ *y* p, q *exponentes conjugados, entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Teorema 2.24 (Desigualdad de Hölder)**.** *Suponga* $f \in L^p(\Omega)$ *y* $g \in L^q(\Omega)$, *donde* p, q *son exponentes conjugados y* $1 \leq p \leq \infty$. *Entonces* $fg \in L^1(\Omega)$ *y*

$$\int |fg| \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q} .$$

Lema 2.25 (Lema de Zorn)**.** *Sea* A *un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada cadena* C *en* A *admite una cota superior en* A *(es decir existe* $\alpha \in A$ *tal que* $x \leq \alpha$, *para todo* $x \in C$*). Entonces,* A *admite un elemento máximo (exite un* $\gamma \in A$ *tal que* $x \in A$ *y* $x \geq \gamma$ *implica* $\gamma = x$*).*

2.4. Algunos Resultados Sobre Integración

Los siguientes teoremas se desarrollan bajo (X, Σ, μ) un espacio de medida. La demostración de estos teoremas se puede encontrar en [5].

Definición 2.26 (Función Medible)**.** Sean X, Y espacios de medida, una función f se dice medible, si para todo conjunto medible $A \in Y$, $f^{-1}(A) \in X$ es medible.

Teorema 2.27 (De la Convergencia Monótona)**.** *Sea* (f_n) *una sucesión monótona de funciones medibles, entonces existe* $f = \lim f_n$ *medible y*

$$\lim \int f_n = \int f.$$

Teorema 2.28 (Lema de Fatou). *Sea (f_n) un sucesión de funciones no negativas medibles, entonces*

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Si (f_n) es una sucesión de funciones medibles no positivas, entonces

$$\int \limsup f_n \leq \limsup \int f_n.$$

Teorema 2.29 (Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles tal que:*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ en c.t.p en X*
2. *Existe un función g integrable tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ en c.t.p en X.*

Entonces f es integrable y $\int f = \lim \int f_n$.

Corolario 2.30. *Sean $(f_n), f, g$ como el teorema anterior. Entonces*

$$\lim \int |f_n - f| = 0$$

El siguiente corolario es válido, siempre que $\mu(X) < \infty$.

Corolario 2.31. *Si $|f_n(x)| \leq M$ y $f_n(x) \to f(x)$, entonces*

$$\int f_n(x) \to \int f(x).$$

Capítulo 3

Distribuciones Sobre el Espacio $\mathcal{D}$

Antes de introducir las distribuciones, es necesario estudiar las llamadas funciones prueba. Nos interesaremos inicialmente en el espacio $\mathcal{D}$ que da origen a las distribuciones.

3.1. Funciones Prueba en $\mathcal{D}$

Este espacio se compone de funciones " que se comportan bien", lo que permitirá en particular la definición generalizada y de cualquier orden de la derivada en el caso de las distribuciones.

Definición 3.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, un abierto, donde $d \in \mathbb{Z}_+$, se define $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ como el espacio de todas las funciones infinitamente diferenciables, con soporte compacto en Ω.

Definición 3.2. Sea $(\varphi_n) \subset \mathcal{C}_c^\infty$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, se define $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{C}} \varphi$ siempre que

1. Existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset K$, para todo n.

2. $D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows D^\alpha \varphi$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, siempre que $n \to \infty$.

Por lo tanto, se define:

Definición 3.3. $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

Y así se obtiene una definición de convergencia en $\mathcal{D}(\Omega)$.

A través de lo anterior, se puede definir una sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}(\Omega)$ como sigue:

Definición 3.4. Sea φ_n una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$, esta se dice de Cauchy, siempre que exista un compacto K tal que $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, para todo n y $\| D^\alpha(\varphi_n - \varphi_m) \|_\infty \to 0$, siempre que $n, m \to \infty$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.

Se tiene además el siguiente resultado:

Teorema 3.5. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es completo.*

Demostración. Suponga $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ sucesión de Cauchy, por lo tanto

$$\| \varphi_n - \varphi_m \|_\infty \to 0$$

siempre que $n, m \to \infty$. Es necesario demostrar $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$$

si $n \to \infty$.
Observe que para todo $x \in \mathbb{R}^d$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \| \varphi_n - \varphi_m \|_\infty \to 0$$

por lo tanto $(\varphi_n(x)) \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio completo; para cada $x \in \mathbb{R}^d$ existe $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$. Más aun, $\varphi(x) = 0$, si $x \notin K \subset \text{supp}(\varphi_n)$; por lo tanto $\text{supp}(\varphi) \subset K$. Basta demostrar que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.
En primer lugar veamos que φ es continua. Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}^d$

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \| \varphi_n - \varphi_m \|_\infty < \frac{1}{2}\epsilon$$

siempre que $n, m \geq N(\epsilon)$, así, tomando $m \to \infty$,

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

para todo $n > N(\epsilon)$, así ϵ no depende de x y por lo tanto $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ en $\mathbb{R}$. Como (φ_n) es continua, por el teorema 2.13 demostrado en los preliminares φ es continua. Como además, para todo $x \in \mathbb{R}^d$

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon$$

en particular

$$\| \varphi_n - \varphi \|_\infty < \epsilon$$

siempre que $n \geq N$ y por lo tanto $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, con respecto a $\| \cdot \|_\infty$.
Falta ver que φ es infinitamente diferenciable. Por la definición de convergencia en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ se tiene, para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\| D^\beta \varphi_n - D^\beta \varphi_m \|_\infty \to 0$$

siempre que $n, m \to \infty$. Por un argumento análogo al anterior, la sucesión $(D^\beta \varphi_n(x)) \subset \mathbb{R}$ converge a una función g_β.
Suponga $d = 1$. Observe que por la igualdad

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + \int_0^x \varphi_n'(t)dt$$

$\varphi_n' \to g_1$ en $\mathbb{R}$ haciendo $n \to \infty$ se obtiene

$$g_0(x) = g_0(0) + \int_0^x g_1(t)dt,$$

lo anterior es cierto, pues como $\varphi_n \in \mathcal{D}$, entonces, existe un $M > 0$, tal que $|\varphi_n'(x)| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}$ más aun, como φ_n' es compacto: $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n'(x)\,\mathrm{dx} = \int_K \varphi_n'(x)\,\mathrm{dx}$, donde K es un compacto y por lo tanto tiene medida finita, al utilizar el corolario 2.31, se obtiene la igualdad. Por lo tanto, g_0 es continuamente diferenciable y $g_0' = g_1$ (pues $\varphi_n' \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ y como este último es completo y $\varphi_n' \to g_1$, entonces $g_1 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$)

$$\varphi_n'(x) = \left(\int_0^x \varphi_n'(t)dt \right)' \to \left(\int_0^x g_1(t)dt \right)' = g_1(x)$$

Repitiendo el argumento anterior, se obtiene que

$$g_0(x) \leftarrow \varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{\beta} \varphi_n^{(i-1)}(0) \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} + \int_0^x \cdots \int_0^s \varphi_n^{(\beta)}(t)dt \cdots dp$$

para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+$. Por lo anterior, g_0 es infinitamente diferenciable y $D^\beta g_0 = g_\beta$.
Más aun, $D^\beta \varphi_n \rightrightarrows g_\beta = D^\beta g_0$

$$\| D^\beta \varphi_n - D^\beta g_0 \|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(\beta)}(x) - g^{(\beta)}(x)| < \epsilon.$$

Lo anterior es cierto pues $\mathcal{C}_c$ es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$. Así, $g_0 = \varphi$ es continua e infinitamente diferenciable, y todas sus derivadas $D^\beta g_0 = g_\beta$ son continuas, por lo tanto se ha demostrado que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Veamos el caso $d > 1$, sea $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ sucesión de Cauchy. Entonces, para cada $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ la sucesión $D^\beta \varphi_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto converge a algún $g_\beta \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ (por una razón análoga al caso anterior). Más aun $D^\beta \varphi_n \rightrightarrows g_\beta$

$$\| D^\beta \varphi_n - D^\beta g_0 \|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D^\beta \varphi_n - D^\beta g| < \epsilon$$

siempre que $n \to \infty$, en particular para todo $x \in \mathbb{R}^d$.
Ahora fije $x_2, x_3, \cdots, x_d$, por el mismo argumento utilizado en la demostración del caso anterior, se sabe que para todo $\beta_1 \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^{\beta_1} \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_d) &\to g_{(\beta_1, 0, \cdots, 0)}(x_1, x_2, \cdots, x_d) \\ &= \partial_{x_1}^{\beta_1} g_0(x_1, x_2, \cdots, x_d) \end{aligned}$$

Considere la función $x_2 \mapsto \partial_{x_1}^{\beta_1} f_n(x_1, x_2, \cdots, x_d)$, por un argumento análogo al anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \partial_{x_2}^{\beta_2} \partial_{x_1}^{\beta_1} \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_d) &\to g_{(\beta_1, \beta_2, 0, \cdots, 0)}(x_1, x_2, \cdots, x_d) \\ &= \partial_{x_2}^{\beta_2} \partial_{x_1}^{\beta_1} g_0(x_1, x_2, \cdots, x_d) \end{aligned}$$

para todo $\beta_2 \in \mathbb{Z}_+$.
Con un procedimiento análogo, se define la función

$$x_i \mapsto \partial_{x_{(i-1)}}^{\beta_{(i-1)}} \cdots \partial_{x_1}^{\beta_1} \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_d)$$

obteniendo

$$\begin{aligned} \partial_{x_i}^{\beta_i} \cdots \partial_{x_1}^{\beta_1} \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_d) &\to g_{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_i, 0, \cdots, 0)}(x_1, x_2, \cdots, x_d) \\ &= \partial_{x_i}^{\beta_i} \cdots \partial_{x_1}^{\beta_1} g_0(x_1, x_2, \cdots, x_d) \end{aligned}$$

para todo $\beta_i \in \mathbb{Z}_+$.
Continuando dicho procedimiento, se obtiene

$$g_\beta = D^\beta g_0$$

para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ y $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} g_0$. $\square$

3.2. Espacio de las Distribuciones $\mathcal{D}'$

La definición de distribuciones sobre espacios como el definido anteriormente, $\mathcal{D}$, permite que estos objetos "hereden" las buenas propiedades de las funciones prueba. Así, se define:

Definición 3.6. Un funcional lineal $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ se dice continuo si $F(\varphi_n) \longrightarrow F(\varphi)$, siempre que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \varphi$. Dicho funcional lineal continuo es llamado distribución. El espacio de todas las distribuciones en $\mathcal{D}$ se notará $\mathcal{D}'$.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.7. Sea u una función localmente integrable ($u \in L^1(K)$, para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^d$). Entonces el mapa

$$F_u : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)u(x)\,\mathrm{dx}$$

es una distribución.
Por las propiedades de la integral, claramente F_u es lineal.
Suponga $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$.

$$\begin{aligned} F_u(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)u(x)\,\mathrm{dx} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_n \varphi_n(x)u(x)\,\mathrm{dx} \\ &= \lim_n \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)u(x)\,\mathrm{dx} \\ &= \lim_n F_u(\varphi_n) \end{aligned}$$

Lo anterior es cierto, pues $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$. Así, $F_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Definición 3.8 (Distribuciones Regulares y Singulares)**.** Las distribuciones de la forma

$$F_u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx},$$

son llamadas distribuciones regulares.
Más aun, toda distribución que no sea regular es llamada distribución singular.

Se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 3.9. *Un funcional lineal F en $\mathcal{C}_c^\infty$ es distribución si y solo si para todo compacto $K \subset \Omega$ existe una constante C y un entero N tales que*

$$|F(\varphi)| \leq C \parallel\!| \varphi \parallel\!|_N,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$, donde

$$\parallel\!| \varphi \parallel\!|_N = \sum_{|\beta| \leq N} \| D^\beta \varphi \|_\infty$$

Demostración. $\Longleftarrow$ Suponga $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, con $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, veamos que F es continua, en el sentido definido anteriormente.

$$|F(\varphi_n) - F(\varphi)| = |F(\varphi_n - \varphi)| \leq C \parallel\!| \varphi_n - \varphi \parallel\!|_N = C \sum_{|\beta| \leq N} \| D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \|_\infty$$

Pero como por hipótesis $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, $\| D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \|_\infty \longrightarrow 0$, para todo α, es decir

$$F(\varphi_n) \longrightarrow F(\varphi)$$

siempre que $n \longrightarrow \infty$.
$\Longrightarrow$ Veamos la demostración por contradicción, suponga $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que F no cumple la desigualdad inicial. Luego, existe un $K_0 \subset \Omega$ y una sucesión $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(K_0)$, tal que

$$|F(\varphi_j)| > j \parallel\!| \varphi_j \parallel\!|_j,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.
Suponga $f_j = \varphi_j / F(\varphi_j)$, entonces

$$F(f_j) = F(\varphi_j / F(\varphi_j)) = F(\varphi_j)/F(\varphi_j) = 1,$$

para todo j.
Sin embargo, para cualquier $\beta \in \mathbb{N}^d$,

$$\begin{aligned} \| D^\beta f_j \|_\infty &= \frac{\| D^\beta \varphi_j \|_\infty}{|F(\varphi_j)|} \\ &\leq \frac{\parallel\!| \varphi \parallel\!|_j}{|F(\varphi_j)|}, \end{aligned}$$

para todo $j > |\beta|$, pues

$$\begin{aligned} \| D^\beta \varphi_j \|_\infty &\leq \sum_{|\beta|\leq j} \| D^\beta \varphi_j \|_\infty \\ &\leq \| \varphi_j \|_j \longrightarrow \| \varphi \|_j \end{aligned}$$

Lo anterior es válido siempre que $j > |\beta|$. Así, considerando la hipótesis inicial

$$\frac{1}{|F(\varphi_j)|} < \frac{1}{j \| \varphi_j \|_j}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\| D^\beta \varphi_j \|_\infty}{|F(\varphi_j)|} \leq \frac{\| \varphi_j \|_j}{|F(\varphi_j)|} < \frac{\| \varphi_j \|_j}{j \| \varphi_j \|_j}$$

Así

$$\| D^\beta f_j \| < \frac{1}{j} \longrightarrow 0$$

siempre que $j \longrightarrow \infty$.
Por lo tanto, $f_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, lo que implica, $F(f_j) \longrightarrow 0$. Lo anterior es una contradicción, pues por construcción, $F(f_j) = 1$, para todo j. Obteniendo así el resultado. $\square$

Observación 3.10. Al cambiar la definición inicial de $\| \varphi \|_N$ por

$$\| \varphi \|_N = \max_{|\beta|\leq N} \| D^\beta \varphi \|_\infty$$

la prueba anterior es válida.

Definición 3.11 (Orden de una Distribución)**.** Si el entero N en el anterior teorema puede ser escogido independientemente de K ($K \subset \Omega$ compacto, tal que $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$), que contiene el soporte de F, entonces la distribución se dice de orden finito. El menor N que cumpla dicha propiedad es llamado el orden de F.

Antes de continuar, es necesario definir:

Definición 3.12. Sea $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y G un abierto de $\mathbb{R}^d$. Se dice que F desaparece en G si $F(\varphi) = 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset G$.

Sea W la unión de todos los conjuntos abiertos en los cuales F desaparece; entonces se define el soporte de F como

$$\operatorname{supp}(F) = W^c$$

el complemento de W en $\mathbb{R}^d$.

Teorema 3.13. *Suponga que $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\operatorname{supp}(F)$ un compacto, entonces F tiene orden finito. Más aun, existe $C > 0$ y $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que*

$$|F(\varphi)| \leq C \parallel \varphi \parallel_N,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Así, C no depende de φ o de $\operatorname{supp}(\varphi)$.

Demostración. Suponga, $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\operatorname{supp}(F)$ compacto. Sea W el conjunto abierto con $\operatorname{supp}(F) \subset W$ y sea $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$, tal que $\psi = 1$ en W, esto se puede asegurar por el teorema 5.13.
Así, para cualquier $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, se tiene

$$F(\varphi) = F(\psi\varphi + (1-\psi)\varphi) = F(\psi\varphi) + F((1-\psi)\varphi)$$

Pero observe que, como $(1-\psi)\varphi = 0$ en W y por lo tanto, $F(\varphi) = F(\psi\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Por el teorema 3.9, existe un $C' > 0$ y $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$|F(\varphi)| = |F(\varphi\psi)| \leq C' \parallel \varphi\psi \parallel_N$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (pues F es una distribución), más aun, aplicando la fórmula de Leibniz se obtiene

$$\begin{aligned}
|F(\varphi)| &\leq C' \parallel \varphi\psi \parallel_N \\
&= C' \sum_{|\beta| \leq N} \parallel D^\beta \varphi\psi \parallel_\infty \\
&= C' \sum_{|\beta| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |D^\beta \varphi(x)\psi(x)| \\
&= C' \sum_{|\beta| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \sum_{i \leq \beta} \binom{\beta}{i} \varphi^{(\beta-i)}(x)\psi^i(x) \right| \\
&= C' \sum_{|\beta| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \binom{\beta}{0} \varphi^{(\beta)}(x)\psi^{(0)}(x) \right| \\
&= C' \sum_{|\beta| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi^{(\beta)}(x)| \\
&= C \parallel \varphi \parallel_N
\end{aligned}$$

Para algun $C > 0$ (donde $C = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\psi(x)|$), que depende de ψ, pero no depende de φ o de $\operatorname{supp}(\varphi)$, obteniendo el resultado. $\square$

Observación 3.14. El recíproco del teorema anterior no es cierto, en particular, suponga $F(x) = c \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\operatorname{supp}(F) = \mathbb{R}$, y por lo tanto no es compacto. Sin embargo, para cualquier compacto K y cualquier $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$, tenemos

$$|F(\varphi)| = \left| \int c\varphi(x)\,\mathrm{dx} \right| \leq |c| \operatorname{diam} K \, \| \varphi \|_\infty$$

donde $\operatorname{diam} K = \sup\limits_{x,y\in K} (d(x,y))$. y por lo tanto F tiene orden 0 pero su soporte no es compacto.

Definición 3.15. Para cualquier $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$ y $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$, el producto, ψF es el funcional lineal

$$\psi F : \varphi \longmapsto F(\psi\varphi), \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Teorema 3.16. *Para todo $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, el producto $\psi F \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, el producto $\psi\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ y por lo tanto $\psi F = F(g)$, con $g = \psi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y como F está definida en dicho espacio, ψF está bien definida. Suponga que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces, aplicando la fórmula de Leibniz para todo $k \in \mathbb{Z}_+^d$,

$$\begin{aligned} |D^k\varphi_n(x)\psi(x)| &= \sum_{i\leq k} \binom{k}{i} \varphi_n^{(k-1)}(x)\psi^{(i)}(x) \\ &\to \sum_{i\leq k} \binom{k}{i} \varphi^{(k-1)}(x)\psi^{(i)}(x) \\ &= |D^k\varphi(x)\psi(x)|. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi_n\psi \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi\psi$ y como F es distribución, $\psi F \in \mathcal{D}'(\Omega)$. $\square$

Observación 3.17. Es necesario resaltar que no se puede definir correctamente la multiplicación entre distribuciones (de forma que el producto de distribuciones sea a su vez distribución), la definición 3.15 es lo más cercano a multiplicación que se puede llegar en distribuciones (lo cual no resuelve el problema totalmente): *el producto de dos distribuciones arbitrarias no*

está definido.
Veamos un ejemplo, se define la distribución, δ

$$\delta(\varphi) = \varphi(0).$$

Suponga $m(x) = \operatorname{sgn}(x)$, es decir

$$m(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

entonces, en teoría se debería definir

$$\delta \cdot m(\varphi) = m(0)\varphi(0)$$

sin embargo, no se puede definir m en $x = 0$. Observe que lo anterior es válido para cualquier función discontinua.

Una vez definido el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'$, se estudiará otro espacio interesante que permitirá desarrollar nuevas propiedades.

Capítulo 4

Distribuciones Sobre el Espacio $\mathcal{S}$

Veamos las funciones de prueba definidas sobre el espacio de Schwartz ($\mathcal{S}$).

4.1. Funciones Prueba en $\mathcal{S}$

Este espacio será particularmente importante en el estudio de la transformada de Fourier.

Definición 4.1. Se notará $\mathcal{C}_a(\mathbb{R}^d)$ el espacio lineal de las funciones continuas acotadas con valores en $\mathbb{R}^d$.

Teorema 4.2. *Para todo $d \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{C}_a(\mathbb{R}^d)$ es un espacio normado completo, con respecto a la norma, $\| \cdot \|_\infty$.*

Demostración. Sea $(f_n) \subset \mathcal{C}_a(\mathbb{R}^d)$, sucesión de Cauchy. Observe que la desigualdad $|f(x)| \leq \| f \|_\infty$ implica que la sucesión $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ es convergente (pues es de Cauchy), para todo $x \in \mathbb{R}^d$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \| f_n - f_m \|_\infty \to 0$$

siempre que $n, m \to \infty$.
Suponga $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, veamos que efectivamente, $f \in \mathcal{C}_a(\mathbb{R}^d)$ y que $\| f_n - f \|_\infty \to 0$. Sea $\epsilon > 0$ dado, luego, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$\| f_n - f_m \|_\infty < \frac{1}{2}\epsilon$$

para todo $n, m \geq N$. Asi, para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|f_{N+k}(x)| \leq |f_{N+k}(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| < \frac{1}{2}\epsilon + \| f_N \|_\infty$$

Más aun, haciendo $k \to \infty$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon + \| f_N \|_\infty .$$

Y por lo tanto f es acotado en $\mathbb{R}^d$. Veamos ahora que f es continua

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| & \underset{m\to\infty}{\leq} \frac{1}{2}\epsilon \\ |f_n(x) - f(x)| & \leq \frac{1}{2}\epsilon \end{aligned}$$

lo anterior es válido para todo $x \in \mathbb{R}^d$, siempre que $n, m \geq N$. Así $f_n \rightrightarrows f$ y por el teorema 2.13 (demostrado en los preliminares), f es continua. Así queda demostrado que $f \in \mathcal{C}_a$. Basta demostrar que $\| f_n - f \|_\infty \to 0$, como para todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene la desigualdad $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon$, en particular

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)| = \| f_n - f \|_\infty \leq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$$

siempre que $n \geq N$. Por lo tanto $f_n \to f$ con respecto a $\| \cdot \|_\infty$. □

Definición 4.3. El espacio lineal de las funciones acotadas e infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}^d$ se notará $\mathcal{C}_a^\infty(\mathbb{R}^d)$, observe que

$$\mathcal{C}_a^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_a(\mathbb{R}^d)$$

A partir de lo anterior se define:

Definición 4.4. El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ como el subespacio de $\mathcal{C}_a^\infty(\mathbb{R}^d)$ que contiene todas las funciones φ de $\mathbb{R}^d$ tales que $x^\alpha D^\beta \varphi(x)$ es acotado en $\mathbb{R}^d$ para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$.

Definición 4.5. Se define la familia de normas para $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\| \varphi \|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|.$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$.

Se dice que los elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ decrecen rápidamente.

Definición 4.6. Una sucesión $(\varphi_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ converge a φ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ($\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$) si, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\| \varphi_n - \varphi \|_{\alpha,\beta} \to 0$$

Siempre que $n \to \infty$.

Definición 4.7. La sucesión anterior se dice de Cauchy en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, si

$$\| \varphi_n - \varphi_m \|_{\alpha,\beta} \to 0$$

siempre que $n, m \to \infty$, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$.

Teorema 4.8. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *es completo.*

Demostración. La demostración de este teorema es análoga a la demostración del teorema 3.5, por lo tanto se obviarán algunos detalles.
Suponga $d = 1$, (φ_n) sucesión de Cauchy en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ fijos, pero arbitrarios. Entonces, la sucesión $x^\alpha D^\beta \varphi_n(x)$ es una sucesión de Cauchy, con respecto a la norma $\| \cdot \|_\infty$

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \| \varphi_n - \varphi_m \|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} &= \| \varphi_n - \varphi_m \|_{\alpha,\beta} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha D^\beta \varphi_n(x) - x^\alpha D^\beta \varphi_m(x)| \\ &= \| x^\alpha D^\beta \varphi_n(x) - x^\alpha D^\beta \varphi_m(x) \|_\infty . \end{aligned}$$

Como $(\varphi_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_a^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_a(\mathbb{R})$ y se demostró, en el Teorema 4.2 que $\mathcal{C}_a(\mathbb{R})$ era completo bajo la norma $\| \cdot \|_\infty$, entonces la sucesión (φ_n) converge en $\mathcal{C}_a(\mathbb{R})$ a una función $g_{\alpha,\beta}$. Veamos que $x^\alpha D^\beta g = g_{\alpha,\beta}$

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + \int_0^x \varphi_n'(t)dt$$

Así $\varphi_n' = D^1 \varphi_n \to g_{0,1}$ en $\mathcal{C}_a(\mathbb{R})$ y haciendo $n \to \infty$

$$g_{0,0}(x) = g_{0,0}(0) + \int_0^x g_{0,1}(t)dt$$

pues, utilizando un procedimiento análogo al utilizado en el teorema 4.16, $\varphi_n' \in L^1$ así, por el teorema de Lebesgue 2.29, se pueden cambiar la integral y el límite.Observe que $g_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}_a(\mathbb{R})$, en particular para $\alpha = 0; \beta = 0; \beta = 1$, por lo tanto, $g_{0,1} = g'_{0,0}$ es continua y $g_{0,0}$ es continuamente diferenciable. Repitiendo el argumento anterior, se obtiene que

$$g_{0,0}(x) \leftarrow \varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{\beta} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \varphi_n^{(i-1)}(0) + \int_0^x \cdots \int_0^s \varphi_n^{(\beta)}(t) dt \cdots dp$$

para todo $\beta \in \mathbb{N}$. Por lo anterior, $g_{0,0}$ es infinitamente diferenciable y $D^\beta g_{0,0} = g_{0,\beta}$.
Más aun, $D^\beta \varphi_n \to g_{0,\beta} = D^\beta g_{0,0}$ uniformemente

$$\| D^\beta \varphi_n - D^\beta g \|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n^\beta(x) - g^\beta(x)| < \epsilon$$

(como se cumple para el $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}$ se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$). Además

$$\| x^\alpha D^\beta \varphi_n - x^\alpha D^\beta g_{0,0} \|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha (D^\beta \varphi_n - D^\beta g_{0,0})|$$

Pero como $\varphi_n, g_{0,0} \in \mathcal{C}_a(\mathbb{R})$, existe un $A \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \| x^\alpha D^\beta \varphi_n - x^\alpha D^\beta g_{0,0} \|_\infty &= \sup_{x\in A} |x^\alpha (D^\beta \varphi_n - D^\beta g_{0,0})| \\ &< C\epsilon \end{aligned}$$

Siempre $n \to \infty$. Por lo tanto $x^\alpha D^\beta \varphi_n \to x^\alpha D^\beta g_{0,0}$.
Por todo lo demostrado anteriormente se obtiene: $g_{0,0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y por lo tanto $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} g_{0,0}$; obteniendo el resultado.

Sea, $d > 1$, $(\varphi_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sucesión de Cauchy. Entonces, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ la sucesión $x^\alpha D^\beta \varphi_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}_a(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto converge a algún $g_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ (por una razón análoga a lo demostrado anteriormente). Más aun $x^\alpha D^\beta \varphi_n \rightrightarrows g_{\alpha,\beta}$, pues

$$\| x^\alpha D^\beta \varphi_n - x^\alpha D^\beta g_{0,0} \|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha (D^\beta \varphi_n - D^\beta g)| < \epsilon$$

siempre que $n \to \infty$, en particular para todo $x \in \mathbb{R}^d$.
Ahora fije $x_2, x_3, \cdots, x_d$, por el argumento anterior, se sabe que para todo $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\beta_1} \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_d) &\to g_{(\alpha_1,0,\cdots,0),(\beta_1,0,\cdots,0)}(x_1, x_2, \cdots, x_d) \\ &= x_1^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\beta_1} g_{0,0}(x_1, x_2, \cdots, x_d) \end{aligned}$$

Considere la función $x_2 \mapsto x_1^{\alpha_1}\partial_{x_1}^{\beta_1} f_n(x_1, x_2, \cdots, x_d)$, se tiene

$$\begin{aligned} x_2\partial_{x_2}^{\beta_2} x_1\partial_{x_1}^{\beta_1}\varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_d) &\to g_{(\alpha_1,\alpha_2,0,\cdots,0),(\beta_1,\beta_2,0,\cdots,0)}(x_1, x_2, \cdots, x_d) \\ &= x_2^{\alpha_2}\partial_{x_2}^{\beta_2} x_1^{\alpha_1}\partial_{x_1}^{\beta_1} g_{0,0}(x_1, x_2, \cdots, x_d) \end{aligned}$$

para todo $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{Z}_+$.
En general, se define la función

$$x_i \mapsto x_{(i-1)}^{\alpha_{(i-1)}}\partial_{x_{(i-1)}}^{\beta_{(i-1)}} \cdots x_1^{\alpha_1}\partial_{x_1}^{\beta_1}\varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_d)$$

obteniendo

$$\begin{aligned} x_i\partial_{x_i}^{\beta_i} \cdots x_1\partial_{x_1}^{\beta_1}\varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_d) & \\ \to g_{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i,0,\cdots,0),(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_i,0,\cdots,0)}(x_1, x_2, \cdots, x_d) & \\ = x_i^{\alpha_i}\partial_{x_i}^{\beta_i} \cdots x_1^{\alpha_1}\partial_{x_1}^{\beta_1} g_{0,0}(x_1, x_2, \cdots, x_d) & \end{aligned}$$

para todo $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}_+$.
Continuando dicho procedimiento, se obtiene

$$g_{\alpha,\beta} = x^\alpha D^\beta g_{0,0}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ y $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} g_{0,0}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

□

4.2. Espacio de las Distribuciones Temperadas

Gracias a las propiedades del espacio $\mathcal{S}$, las distribuciones temperadas tendrán resultados importantes en el análisis de Fourier, veamos la defición de estos objetos matemáticos:

Definición 4.9. Los funcionales lineales continuos en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ son llamados distribuciones temperadas. El espacio lineal de las distribuciones temperadas se nota $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

En resumen, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ si y solo si: $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ es lineal y $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, implica $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4.10. Sea $a \in \mathbb{R}^d$, se define δ_a el mapa en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dado por

$$\delta_a : \varphi \mapsto \varphi(a) \tag{4.1}$$

Veamos que $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
Claramente, δ_a es lineal.
Suponga $(\varphi_n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tal que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, luego

$$\delta_a(\varphi_n) = \varphi_n(a) \to \varphi(a) = \delta_a(\varphi),$$

siempre que $n \to \infty$.
Así, se llamará "función" delta de Dirac (o distribución de Dirac) en $a \in \mathbb{R}^d$ a la distribución $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Observación 4.11. Como $T(\varphi_n) - T(\varphi) = T(\varphi_n - \varphi)$ y $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ si y solo si $(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, entonces un mapa lineal en $\mathcal{S}$ es continuo si y solo si es continuo en $0 \in \mathcal{S}$ (lo anterior es válido también para $\mathcal{D}'$).

Proposición 4.12. *Suponga $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ lineal y $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$, tal que*

$$|T(\varphi)| \leq \interleave \varphi \interleave_{\alpha,\beta}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Gracias a la observación anterior, basta con demostrar la continuidad de T en 0. Pero, si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, entonces $\interleave \varphi_n \interleave_{\alpha,\beta} \to 0$

$$\interleave \varphi_n \interleave_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta \varphi_n| \to \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta 0| = 0.$$

Por lo tanto

$$|T(\varphi_n)| \leq \interleave \varphi_n \interleave_{\alpha,\beta} \to 0$$

siempre que $n \to \infty$. Obteniendo el resultado. □

Para demostrar el recíproco, se introducirá otra familia de normas en $\mathcal{S}$.

Definición 4.13. Para cada $k, m \in \mathbb{Z}$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\| \varphi \|_{k,m} = \sum_{|\alpha| \leq k; |\beta| \leq m} \interleave \varphi \interleave_{\alpha,\beta} \tag{4.2}$$

Esta familia de normas en $\mathcal{S}$ tiene la propiedad de ser directa, es decir: para todo $(k',m'),(k'',m'')$, existe (k,m), tal que

$$\text{máx}\{\|\,\varphi\,\|_{k',m'},\|\,\varphi\,\|_{k'',m''}\}\leq\|\,\varphi\,\|_{k,m},$$

para todo $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, más aun cualquier (k,m) con $k\geq\text{máx}\{k',k''\}$ y $m\geq\text{máx}\{m',m''\}$ servirá.

Observación 4.14. $\|\,\varphi_n-\varphi\,\|_{\alpha,\beta}\to 0$ para cada $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^d$ si y solo si $\|\,\varphi_n-\varphi\,\|_{k,m}\to 0$, para cada $k,m\in\mathbb{Z}_+$.

$$\|\,\varphi_n-\varphi\,\|_{k,m}=\sum_{|\alpha|\leq k;|\beta|\leq m}\|\,\varphi_n-\varphi\,\|_{\alpha,\beta}\to\sum_{|\alpha|\leq k;|\beta|\leq m}0=0.$$

Por lo tanto un funcional lineal T en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es una distribución temperada si y solo si $T(\varphi_n)\to 0$, siempre que $\|\,\varphi_n\,\|_{k,m}\to 0$, para todo $k,m\in\mathbb{Z}_+$.

Teorema 4.15. *Sea T un funcional lineal en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. T es una distribución temperada si y solo si, existen $C>0$ y $k,m\in\mathbb{Z}_+$, tales que;*

$$|T(\varphi)|\leq C\,\|\,\varphi\,\|_{m,k}$$

para todo $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. $\Longleftarrow$ Suponga que el acotamiento anterior existe, más aun, suponga $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{S}}0$, entonces

$$|T(\varphi_n)|\leq C\,\|\,\varphi_n\,\|_{k,m}\to 0$$

siempre que $n\to\infty$, por lo tanto T es continua en 0 y por la observación 4.11 se obtiene el resultado.
$\Longrightarrow$ Veamos la demostración por contradicción. Suponga $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y el acotamiento anterior no existe. Por lo tanto, para todo $n\in\mathbb{Z}_+$, no se tiene

$$|T(\varphi)|\leq n\,\|\,\varphi\,\|_{n,n}$$

para algún $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Es decir, existe una sucesión (ψ_n) en $\mathcal{S}$ tal que

$$|T(\psi_n)|>n\,\|\,\psi_n\,\|_{n,n}$$

Suponga $\varphi_n = \psi_n/(n \parallel \psi_n \parallel_{n,n})$, tal que $|T(\varphi_n)| > 1$. Sin embargo

$$\parallel \varphi_n \parallel_{k,m} = \frac{\parallel \psi_n \parallel_{k,m}}{n \parallel \psi_n \parallel_{n,n}} \leq \frac{1}{n}$$

Siempre que $n \geq \text{máx}\{k, m\}$. Por lo tanto, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$; pero por construcción $|T(\varphi_n)| > 1$, lo que es una contracción, obteniendo así el resultado. $\square$

Proposición 4.16. *Sea $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces el mapa lineal*

$$T_g : \varphi \mapsto \int g(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}$$

en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ define una distribución temperada.

Demostración. Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, se tiene

$$|T_g(\varphi)| = \left| \int g(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} \right| \leq \parallel g \parallel_{L^2} \parallel \varphi \parallel_{L^2}$$

lo anterior se tiene por la desigualdad de Hölder (demostrada en los preliminares, teorema 2.24, que en este caso es igual a la de Cauchy-Schwartz). Sin embargo

$$\begin{aligned}
\parallel \varphi \parallel_{L^2}^2 &= \int |\varphi(x)||\varphi(x)|\,\mathrm{dx} \\
&\leq \parallel \varphi \parallel_{0,0} \int |\varphi(x)|\,\mathrm{dx} \\
&= \parallel \varphi \parallel_{0,0} \int \left(\prod_{j=1}^{d} (1 + x_j^2) \right) |\varphi(x)| \frac{1}{\prod_{k=1}^{d}(1 + x_k^2)}\,\mathrm{dx} \\
&\leq \parallel \varphi \parallel_{0,0} \parallel \varphi \parallel_{2d,0} \int \frac{1}{\prod_{k=1}^{d}(1 + x_k^2)}\,\mathrm{dx}_1\,\mathrm{dx}_2 \cdots \mathrm{dx}_d \\
&= \pi^d \parallel \varphi \parallel_{0,0} \parallel \varphi \parallel_{2d,0} \\
&< \pi^d \parallel \varphi \parallel_{2d,0}^2
\end{aligned}$$

pues

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\prod_{k=0}^{d}(1+x_k^2)}\,\mathrm{dx}_1\cdots\mathrm{dx}_d &= \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x_1^2)}\frac{1}{(1+x_d^2)}\,\mathrm{dx}_1\cdots\mathrm{dx}_d \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x_1^2)}\,\mathrm{dx}_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x_2^2)}\,\mathrm{dx}_2 \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x_d^2)}\,\mathrm{dx}_d \\
&= (\arctan(x)|_{-\infty}^{\infty})^d = \left(\frac{\pi}{2} - -\frac{\pi}{2}\right)^d = \pi^d,
\end{aligned}
$$

observe que en este caso se puede utilizar el teorema de Fubinni, pues $\frac{1}{\prod_i(1+x_i^2)} \leq \frac{1}{\|x\|} = f(x)$, donde $f \in L^1$ y por lo tanto $\frac{1}{\prod_i(1+x_i^2)}$ es integrable.
Lo que lleva al estimado

$$T_g(\varphi)| \leq \|g\|_{L^2}\,\pi^{d/2}\,\|\varphi\|_{2n,0}$$

lo anterior es válido para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, por lo tanto, reemplazando φ por la sucesión $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \supset (\varphi_n) \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, T es continua en 0 y utilizando la observación 4.11, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Teorema 4.17. *Suponga $g(x)$ (medible) tal que $\exists m \in \mathbb{Z}_+$ para el cual $\prod_{j=1}^{d}(1+x_j^2)^{-m}g(x)$ es acotado en $\mathbb{R}^d$. Entonces, el mapa*

$$T_g : \varphi \mapsto \int g(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}$$

es una distribución temperada.

Demostración. Sea $p(x) = \displaystyle\prod_{j=1}^{d}(1+x_j^2)$, por hipótesis se tiene, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$
\begin{aligned}
|g(x)\varphi(x)| &= p(x)^{-m}|g(x)|p(x)^m|\varphi(x)| \\
&< Mp(x)^m|\varphi(x)|
\end{aligned}
$$

Para algún $M > 0$. De lo anterior se puede concluir que $g(x)\varphi(x)$ es integrable

$$\int |g(x)\varphi(x)|\,\mathrm{dx} < M\int p(x)^m|\varphi(x)|\,\mathrm{dx}$$

por un procedimiento análogo al utilizado en el teorema 4.16, la integral anterior es finita. Así T_g está bien definido en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Veamos que efectivamente $T_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} |T_g(\varphi)| &< M \int p(x)^m |\varphi(x)| \,\mathrm{dx} \\ &= M \int p(x)^{m+1} |\varphi(x)| \frac{1}{p(x)} \,\mathrm{dx} \\ &\leq M \parallel \varphi \parallel_{2d(m+1),0} \int \frac{1}{p(x)} \,\mathrm{dx} \\ &= M \parallel \varphi \parallel_{2d(m+1),0} \pi^d \end{aligned}$$

Lo anterior es válido para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, por lo tanto reemplazando φ por la sucesión $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \supset (\varphi_n) \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, T_g es continuo en 0 y por la observación 4.11, $T_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. □

Teorema 4.18 (Parte Principal Integral de Cauchy)**.** *El funcional*

$$P\left(\frac{1}{x}\right) : \varphi \mapsto \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) \,\mathrm{dx}$$

pertenece a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Demostración. Veamos que $P\left(\frac{1}{x}\right)$ está bien definido en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) \,\mathrm{dx} = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \,\mathrm{dx}\,.$$

Sin embargo

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = \frac{\varphi(x)}{x} + \frac{\varphi(-x)}{(-x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} + \frac{\varphi(-x) - \varphi(0)}{(-x)}$$

así $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} \to 2\varphi'(0)$, siempre que $x \to 0$, por lo tanto $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ es integrable en $[0; \infty)$ (en $x \to \infty$ se utiliza un procedimiento análogo a la demostración del teorema 4.16) y $P\left(\frac{1}{x}\right)$ esta bien definido.
Por las propiedades de la integral $P\left(\frac{1}{x}\right)$ es lineal, por lo tanto, basta demos-

trar que es continuo en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Sea $x > 0$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right| &= \left|\frac{1}{x}\int_{-x}^{x}\varphi'(t)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{x}\int_{-x}^{x}\left|\varphi'(t)\right| dt \\
&\leq \frac{1}{x}\sup_{t\in[-x;x]}\left|\varphi'(t)\right|\int_{-x}^{x} dt \\
&\leq 2\parallel \varphi' \parallel_{\infty}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left|P\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi)\right| &= \left|\int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{dx} + \int_1^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{dx}\right| \\
&\leq \int_0^1 2\parallel \varphi' \parallel_{\infty}\mathrm{dx} + \int_1^{\infty}(|\varphi(x)|+|\varphi(-x)|)x\frac{\mathrm{dx}}{x^2} \\
&\leq 2\parallel \varphi' \parallel_{\infty} + 2\parallel x\varphi \parallel_{\infty}\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{dx}}{x^2} \\
&\leq 2\parallel \varphi \parallel_{0,1} + 2\parallel \varphi \parallel_{1,0}.
\end{aligned}$$

Como lo anterior se cumple para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, basta con reemplazar φ por la sucesión de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ y por la observación 4.11 se obtiene el resultado. □

Definición 4.19. Una sucesión $(T_n) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ se dice convergente en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, si $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Se dice que T_n converge, en el sentido de las distribuciones $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$.

Teorema 4.20. *Sea $g_\epsilon(x) = \frac{x}{x^2+\epsilon^2}$, entonces $T_{g_\epsilon} \xrightarrow{\mathcal{S}'} P\left(\frac{1}{x}\right)$, siempre que $\epsilon \to 0$.*

Demostración. Suponga $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\delta > 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\left|P\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi) - T_{g_\epsilon}(\varphi)\right| &= \left|P\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\epsilon^2}\,\mathrm{dx}\right| \\
&= \left|\int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{dx} - \int_0^\infty \frac{x\varphi(x)-x\varphi(-x)}{x^2+\epsilon^2}\,\mathrm{dx}\right| \\
&= \left|\int_0^\infty \frac{\epsilon^2}{x^2+\epsilon^2}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{dx}\right| \\
&\leq \left|\int_0^\delta \frac{\epsilon^2}{x^2+\epsilon^2}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{dx}\right| + \left|\int_\delta^\infty \frac{\epsilon^2}{x^2+\epsilon^2}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{dx}\right| \\
&\leq \int_0^\delta \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right|\mathrm{dx} + \int_\delta^\infty \frac{\epsilon^2}{\delta^2}\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right|\mathrm{dx}
\end{aligned}
$$

Más aun, en el teorema anterior (4.18) se demostró que $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} \to 2\varphi'(0)$, si $x \to 0$ y por lo tanto:$\int_0^\delta \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right| \mathrm{dx}$ se puede hacer tan pequeño como se quiera simplemente tomando δ suficientemente pequeño. Como además $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ es integrable (como se demostró en 4.18), implica que $\int_\delta^\infty \frac{\epsilon^2}{\delta^2}\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right| \mathrm{dx} \to 0$, si $\epsilon \to 0$. Obteniendo así el resultado. $\square$

En este punto vale la pena resaltar que la función definida en 4.20 es el caso particular del núcleo de Poisson cuando $d = 1$. Se define el *núcleo de Poisson* como

$$P(x,y) = \frac{c_d x}{(|y|^2 + x^2)^{(d+1)/2}},$$

donde

$$c_d = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d+1}{2}}}.$$

Teorema 4.21. *Sea (φ_n) una sucesión de funciones en $\mathbb{R}$ tal que:*

1. $\varphi_n(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
2. $\int \varphi_n(x)\,\mathrm{dx} = 1$, *para todo* n.
3. *Para cualquier* $a > 0$, $\displaystyle\int_{|x|>a} \varphi_n(x)\,\mathrm{dx} \to 0$, *siempre que* $n \to \infty$

Entonces $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta$, *siempre que* $n \to \infty$ *(es decir* $T_{\varphi_n} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta$*).*

La sucesión anterior es llamada *sucesión de Dirac* [6].

Demostración. Suponga $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, (con $\psi \neq 0$); veamos que efectivamente, $\int \varphi_n(x)\psi(x)\,\mathrm{dx} \to \psi(0)$, si $n \to \infty$. Sea $\epsilon > 0$ fijo, para todo $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int \varphi_n(x)\psi(x)\,\mathrm{dx} - \delta(\psi)\right| &= \left|\int \varphi_n(x)(\psi(x)-\psi(0))\,\mathrm{dx}\right| \\ &\leq \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(x)\,|\psi(x)-\psi(0)|\,\mathrm{dx} \\ &+ \int_{|x|\geq\eta} \varphi_n(x)\,|\psi(x)-\psi(0)|\,\mathrm{dx}\end{aligned}$$

Fije $\eta > 0$ tal que $|\psi(x)-\psi(0)| < \frac{1}{2}\epsilon$, para todo $|x| \leq \eta$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(x)\,|\psi(x)-\psi(0)|\,\mathrm{dx} &\leq \frac{1}{2}\epsilon \int_{\eta}^{\eta} \varphi_n(x)\,\mathrm{dx} \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon\end{aligned}$$

para todo n. Más aun, por hipótesis, existe un $N \in \mathbb{Z}_+$, tal que si $n > N$, entonces

$$\int_{|x|\geq\eta} \varphi_n(x)\,\mathrm{dx} < \frac{\epsilon}{4\,\|\,\psi\,\|_\infty}$$

Por lo tanto, para $n > N$, se puede estimar

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq\eta} \varphi_n(x)\,|\psi(x)-\psi(0)|\,\mathrm{dx} &\leq 2\,\|\,\psi\,\|_\infty \int_{|x|\geq\eta} \varphi_n(x)\,\mathrm{dx} \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon\end{aligned}$$

Así, para todo $n > N$

$$\left|\int \varphi_n(x)\psi(x)\,\mathrm{dx} - \psi(0)\right| < \epsilon$$

obteniendo el resultado. $\square$

Observación 4.22. Al reemplazar el requerimiento (3) del teorema anterior por

$$\int_{|x-x_0|\geq a} \varphi_n(x)\,\mathrm{dx} \to 0$$

si $n \to \infty$. Se obtendría el resultado: $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta_{x_0}$.

Corolario 4.23. *Sea $\epsilon > 0$, $g_\epsilon = \frac{\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}$. Entonces, $g_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{S}'} \pi\delta_{x_0}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si $\epsilon \to 0$.*

Demostración. Observe que $g_\epsilon(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\int g_\epsilon(x)\,\mathrm{dx} = \pi$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}\,\mathrm{dx} &= \epsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(u)^2+\epsilon^2} du \\
&= \frac{\epsilon}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(u/\epsilon)^2+1} du \\
&= \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x)^2+1} dx \\
&= (\arctan(x))|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - -\frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto para algún $a > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{|x-x_0|\geq a} g_\epsilon(x)\,\mathrm{dx} &= 2\int_a^\infty \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}\,\mathrm{dx} \\
&= 2\left[\arctan\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right]_a^\infty \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{a}{\epsilon}\right)\right) \\
&\to 0
\end{aligned}$$

siempre que $\epsilon \to 0$. Utilizando el teorema 4.21 para la sucesión $\frac{1}{\pi}g_\epsilon$, se obtiene el resultado. $\square$

Teorema 4.24. *Para $\epsilon > 0$, sea $h_\epsilon = \frac{1}{x-x_0+i\epsilon}$. Entonces*

$$h_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{S}'} P\left(\frac{1}{x-x_0}\right) - i\pi\delta_{x_0}$$

en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si $\epsilon \to 0$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
h_\epsilon(x) &= \frac{1}{x - x_0 + i\epsilon} = \frac{x - x_0 - i\epsilon}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} \\
&= \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} - \frac{i\epsilon}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2} \\
&\xrightarrow{\mathcal{S}\text{'}} P\left(\frac{1}{(x - x_0)}\right) - i\pi\delta_{x_0}
\end{aligned}
$$

en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Lo anterior utilizando, el corolario 4.23 y el teorema 4.20, siempre que $\epsilon \to 0$. $\square$

Capítulo 5

Derivada y Propiedades de las Distribuciones

Veamos las propiedades de los dos espacios definidos en los capítulos anteriores.

5.1. Derivada de las Distribuciones

Considere la integral $\int \psi'(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}$, donde $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Integrando por partes

$$\begin{aligned}
\int \psi'(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} &= [\psi(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int \psi(x)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \psi(\infty)\varphi(\infty) - \psi(-\infty)\varphi(-\infty) - \int \psi(x)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\
&= 0 - 0 - \int \psi(x)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\
&= -\int \psi(x)\varphi'(x)\,\mathrm{dx}
\end{aligned}$$

Utilizando la notación de distribuciones

$$T_{\psi'}(\varphi) = -T_{\psi}(\varphi').$$

Lo anterior lleva a la siguiente definición:

Definición 5.1. Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (o $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$) y $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$. La derivada en el sentido de las distribuciones $D^\alpha T$ se define como

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \tag{5.1}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Observación 5.2. En el caso de las distribuciones regulares (3.8), la derivada en el sentido de distribuciones para este caso particular es equivalente a la definición de derivada débil

$$\begin{aligned} D^\alpha T_g(\varphi) = \int D^\alpha(g(x))\varphi(x)\,\mathrm{dx} &= (-1)^\alpha \int g(x) D^\alpha(\varphi(x))\,\mathrm{dx} \\ &= (-1)^\alpha T_g(D^\alpha \varphi). \end{aligned}$$

Observe que, por la propiedades de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, toda distribución, T, siempre tiene derivada en el sentido de las distribuciones (más aun de todos los órdenes). Veamos que la derivada de una distribución es también distribución.

Teorema 5.3. *Para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, $D^\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es continua. En particular, para cualquier $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

El teorema anterior es válido también para $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Suponga $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}_+^d$, entonces

$$\begin{aligned} \| D^\alpha \varphi_n \|_{\gamma,\delta} &= \| x^\gamma D^\delta D^\alpha \varphi_n \|_\infty \\ &= \| x^\gamma D^{\delta+\alpha} \varphi_n \|_\infty \\ &= \| \varphi_n \|_{\gamma,\delta+\alpha} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

siempre que $n \to \infty$. Por lo tanto $D^\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es continua (utilizando la observación 4.11).
Suponga ahora que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $D^\alpha T$ está bien definido (pues todas las derivadas pasan a la función prueba $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$), es un mapa lineal en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, entonces $D^\alpha \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$; por lo tanto

$$D^\alpha T(\varphi_n) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi_n) \to 0$$

es decir $D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, por la observación 4.11. $\square$

Teorema 5.4. *1. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})^d$ tal que f es absolutamente continua en x_1 para casi todo $\hat{x} = (x_2, x_3, \cdots, x_d)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ es igual a una función Lebesgue integrable $g_1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ en c.t.p. Entonces, la derivada en distribuciones $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ y la derivada parcial usual $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ coinciden*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = g_1$$

en c.t.p.

2. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ y $\frac{\partial f}{\partial x_1} = g_1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ la derivada en distribuciones de f. Entonces, f es absolutamente continua en x_1 y tiene derivada parcial usual $\frac{\partial f}{\partial x_1} = g_1(x)$ en c.t.p.

Los detalles de la siguiente demostración se pueden encontrar en [8] y [1]

Demostración. 1. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ absolutamente continua en x_1, tal que la derivada usual $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = g_1(x)$ en c.t.p. en $\mathbb{R}^d$, con $g_1 \in L^1_{\text{loc}}$. Más aun, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $f\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, así $C = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi)$

$$\begin{aligned}
C &= -f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \left(-\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\hat{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1,\hat{x})\,\mathrm{dx}_1\right)\mathrm{dx}_2\cdots\mathrm{dx}_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial(f\varphi)}{\partial x_1}(x_1,\hat{x})\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\hat{x})\varphi(x_1,\hat{x})\right)\mathrm{dx}_1\right)d\hat{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(f\varphi(x_1,\hat{x})|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1,\hat{x})\varphi(x_1,\hat{x})\,\mathrm{dx}_1\right)d\hat{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} g_1(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}_1\right)\mathrm{dx}_2\cdots\mathrm{dx}_d \quad \textit{pues} \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g_1(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} \\
&= g_1(\varphi)
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = g_1$$

en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

2. Como $g_1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, se puede definir

$$f_1(x) = \int_{a_1}^{x_1} g_1(\xi_1, \hat{x}) d\xi_1.$$

Se obtienen las siguientes propiedades:

a) f_1 esta definida en c.t.p.

b) f_1 es absolutamente continua.

c) $f_1 \in L^1_{\text{loc}}$

$$\begin{aligned}\int_k |f_1(x)|\,\mathrm{dx} &\leq \int_K \int_{a_1}^{x_1} |g_1(\xi, \hat{x}| d\xi\,\mathrm{dx} \\ &\leq \int_K M = m(K)M\end{aligned}$$

pues $g_1 \in L^1_{\text{loc}}$.

d) $\partial_{x_1} f_1 = g_1(x)$ en c.t.p. pues

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} f_1(x) &= \partial_{x_1} \int_{a_1}^{x_1} g_1(\xi_1, \hat{x}) d\xi_1 \\ &= \int_{a_1}^{x_1} \partial_{x_1} g_1(\xi_1, \hat{x}) d\xi_1 \\ &= g_1(x)\end{aligned}$$

pues f_1 es absolutamente continua.

Se define $f = f_1 + Z$, donde Z es una distribución independiente de x_1, es decir

$$D_{x_1} Z = 0.$$

Pero como f, f_1 son funciones, Z es función y por lo tanto

$$\partial_{x_1} Z = 0$$

como función, así Z es independiente de x_1 en c.t.p.
Por lo tanto, basta con modificar Z en un conjunto de medida 0 (conjunto donde $\partial_{x_1} Z \neq 0$) para obtener que Z es absolutamente continua en x_1. De lo anterior, y como se definió $f = f_1 + Z$, f es absolutamente continua en x_1.

Obteniendo los resultados. $\square$

Observación 5.5. Suponga que se tienen las hipótesis del teorema 5.4, en particular, si f y su derivada en distribuciones g_1 son funciones continuas en $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = g_1(x)$ en todo Ω.

Ejemplo 5.6. Veamos algunas derivadas de distribuciones:

1. Considera la distribución δ,

$$\delta_a'(\varphi) = -\delta_a(\varphi') = -\varphi'(a).$$

2. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Entonces, $T_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, pues $g \in L^1_{\text{loc}}$ (por el ejemplo 3.7), además

$$\begin{aligned} T_g'(\varphi) &= -T_g(\varphi') \\ &= -\int_0^\infty x\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\ &= -[x\varphi(x)]_0^\infty + \int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{dx} \\ &= \int_0^\infty \varphi(x)\,\mathrm{dx} \\ &= \int_{-\infty}^\infty H(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} \end{aligned}$$

donde

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

es conocida como la función escalonada de Heaviside . En resumen, se demostró que

$$T_g' = T_H$$

Más aun

$$\begin{aligned} T'_H(\varphi) &= -T_H(\varphi') \\ &= -\int_0^\infty \varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\ &= -[\varphi(x)]_0^\infty \\ &= \varphi(0) \\ &= \delta(\varphi) \end{aligned}$$

por lo tanto $T'_H = \delta$ y $T''_g = T'_H = \delta$. Así se dirá que $g' = H$ y $g'' = \delta$, en el sentido de las distribuciones.

Observación 5.7. Es necesario resaltar que a pesar que δ no es función, esta es la segunda derivada (en el sentido de las distribuciones) de una función continua, en particular g. Posteriormente se demostrará que toda distribución es una derivada (de un orden adecuado) de alguna función continua.

Más aun se tiene el siguiente resultado:

Lema 5.8. *Sea $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ tal que* $\operatorname{supp}(F) = \{0\}$. *Entonces, si $\varphi^{(j)}(0) = 0$, para todo j, $0 \le j \le N$, entonces $F(\varphi) = 0$.*
Con $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ y $N < \infty$ el orden de F.

Demostración. Sea $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, tal que $h(x) = 1$, para $|x| \le 1$ y tal que $h(x) = 0$, si $|x| \ge 2$ (teorema 5.13). Sea $h_n(x) = h(nx)$ tal que $h_n(x) = 1$ si $|x| \le \frac{1}{n}$, por lo tanto $h_n(x) = 1$, si $|x| \le \frac{1}{n}$, y $h_n(x) = 0$, si $|x| \ge \frac{2}{n}$. Suponga además que $\varphi_n = h_n(x)\varphi(x)$, por lo tanto, $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq \{x : |x| \le 2\}$ (pues $\{x : |x| \le \frac{2}{n}\} \subseteq \{x : |x| \le 2\}$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$). Veamos que $\|\!| \varphi_n |\!\|_N \to 0$, siempre que $n \to \infty$ (observe que lo anterior implica que $|F(\varphi)| \to 0$, pues F es distribución de orden finito y por un teorema anterior (3.13) $|F(\varphi)| \le C \|\!| \varphi |\!\|_N$, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K)$). Sea $k \in \mathbb{Z}_+$, fijo tal que $0 \le k \le N$ y $\epsilon > 0$ dado. Como $\varphi^{(k)}(0) = 0$, existe un $\rho > 0$ tal que $|\varphi^{(k)}(x)| < \epsilon$, para todo $|x| < \rho$, por lo tanto

$$|\varphi^{(k-1)}(x)| = \left| \int_0^x \varphi^{(k)}(t)dt \right| \le |x|\epsilon$$

para todo $|x| < \rho$, continuando de esta forma, se obtiene

$$\begin{aligned} |\varphi^{(k-2)}(x)| &\leq \frac{|x|^2}{2!}\epsilon \\ &\vdots \\ |\varphi^{(k-r)}(x)| &\leq \frac{|x|^r}{r!}\epsilon \end{aligned}$$

para todo $|x| < \rho$. Utilizando la fórmula de Leibniz, se tiene

$$\begin{aligned} |D^k\varphi_n(x)| &= |D^k(h_n(x)\varphi(x))| \\ &= \left|\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}D^r h_n(x)D^{k-r}\varphi(x)\right| \\ &= \left|\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}n^r h^{(r)}(nx)\varphi^{(k-r)}(x)\right| \\ &\leq \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\frac{|nx|^r}{r!}|h^{(r)}(nx)|\epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sup_x |D^k\varphi_n(x)| = \sup_{|x|\leq 2/n}|D^k\varphi_n(x)| \leq C'\epsilon$$

Para alguna constante $C' > 0$, que puede depender de k mas no de φ_n, siempre que $2/n < \rho$, es decir $n > 2/\rho$. Por lo tanto, $\sup_x |D^k\varphi_n(x)| \to 0$, siempre que $n \to \infty$, para cada $0 \leq k \leq N$.
Así, $\| \varphi_n \|_N \to 0$.
Observe que el acotamiento de F, implica que $F(\varphi_n) \to 0$. Sin embargo, $\varphi(x) - \varphi_n(x) = 0$, si $|x| < 1/n$ (pues $\varphi(x) - \varphi_n(x) = \varphi(x) - h_n(x)\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x)$, siempre que $|x| < 1/n$) y por lo tanto, $\text{supp}(\varphi - \varphi_n) \subset \{x : |x| \geq 1/n\}$. Como $\text{supp}(F) = \{0\}$, se sigue que $F(\varphi - \varphi_n) = 0$, así $F(\varphi) = F(\varphi_n)$, para todo n es decir $F(\varphi) = 0$ (pues $F(\varphi_n) \to 0$), obteniendo el resultado. $\square$

Teorema 5.9. *Sea $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ tal que* $\text{supp}(F) = \{0\}$. *Entonces existe un $N \in \mathbb{Z}_+$ y constantes a_j tales que*

$$F = \sum_{|j|\leq N} a_j D^j \delta$$

Demostración. Veamos la demostración para $d = 1$; sea $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ con $\mathrm{supp}(F) = \{0\}$. Como $\mathrm{supp}(F)$ es un compacto, por el teorema 3.13, F tiene orden finito, suponga que sea N. Entonces existe $C > 0$ tal que

$$|F(\varphi)| \leq C \parallel \varphi \parallel_N . \tag{5.2}$$

Lo anterior es válido para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dada y se define ψ

$$\varphi(x) = \underbrace{\varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2!}\varphi^{(2)}(0) + ... + \frac{x^N}{N!}\varphi^{(N)}(0)}_{=p(x)} + \psi(x)$$

Observe que ψ es infinitamente diferencialble y $\psi^{(k)}(0) = 0$, para todo $0 \leq k \leq N$. Sin embargo que $\psi \notin \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, pues no tiene soporte compacto.
Ahora, considere $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $g(x) = 1$ siempre que $|x| \leq 1$ (y $g(x) = 0$ para todo $|x| > 1$, teorema 5.13). Por lo tanto, $F(\varphi) = F(\varphi g)$ y

$$\varphi g = pg + \psi g$$

Además, $\psi g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ y (por la fórmula de Leibniz) se tiene que $(\psi g)^{(k)}(0) = 0$, para todo $0 \leq k \leq N$ y por el lema anterior (5.8) $F(\psi g) = 0$, es decir

$$\begin{aligned} F(\varphi) = F(\varphi g) &= F(pg) + F(\psi g) = F(pg) \\ &= \varphi(0)F(g) + \varphi'(0)F(xg) + ... + \varphi^{(N)}(0)F(x^N g/N!) \\ &= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{F(x^k g)}{k!} D^k \delta(\varphi). \end{aligned}$$

Basta tomar $a_k = (-1)^k \frac{F(x^k g)}{k!}$ para obtener el resutado. La demostración para $n > 1$ es análoga. □

Veamos una aplicación de este teorema.

Ejemplo 5.10. Considere la ecuación

$$x^m f(x) = 0,$$

con $m \in \mathbb{Z}_+$. Entonces, toda distribución que verifique esta ecuación tiene soporte en $\{0\}$ y por lo tanto será una combinación lineal de derivadas de δ.

5.2. Propiedades y Relaciones entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{D}$

Al determinar la relación entre los dos espacios de funciones pruebas, se podrá concluir la relación de contenencia de los espacios de distribuciones, en particular gracias a las propiedades de los espacios duales.

Lema 5.11. *Se tiene que*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Demostración. Se define

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2}$$

Observe que para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, $D^\alpha\varphi(x) = p(x, \mathrm{e}^{-|x|^2})$, por lo tanto, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$. Más aun, por las propiedades de e^x, para todo $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$, $x^\beta\,\mathrm{e}^{-|x|^2} \to 0$, siempre que $x \to \infty$. Por la forma de las derivadas de φ, $D^\alpha\varphi \to 0$, siempre que $x \to \infty$, por lo tanto $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Sin embargo, $\mathrm{e}^x \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, es decir $\mathrm{supp}(\varphi) = \mathbb{R}^d$ esto implica $\varphi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Obteniendo el resultado. □

Ejemplo 5.12. Para $x \in \mathbb{R}$, sea

$$h(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/(1-x^2)}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Entonces, h es infinitamente diferenciable, más aun, la n-ésima derivada es de la forma $h^{(n)}(x) = p_n(x, 1/(1-x^2))h(x)$ para algún polinomio $p_n(s,t)$ y por lo tanto $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.
Definiendo $g(x) = \int_{-\infty}^x h(t)dt$, entonces, g es infinitamente diferenciable y $g(x) = 0$ para $x < -1$ y es constante para $x > 1$.
Así, haciendo $g_\lambda(x) = g(x\lambda)$, donde $\lambda > 0$, entonces $g_\lambda = 0$ para $x < -1/\lambda$ y constante para $x > 1/\lambda$. Ahora, definiendo $g_{\lambda,a} = g(\lambda(x-a))$, entonces $g_{\lambda,a} = 0$ para $x < a - \frac{1}{\lambda}$ y constante para $x > a + \frac{1}{\lambda}$.
Siendo $a < b$ y λ, μ tales que $a < a + \frac{1}{\lambda} < b - \frac{1}{\mu} < b$, sea $f(x) = g_{\lambda,a}(x)g_{\mu,-b}(-x)$. Entonces $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y $f(x) = 0$ para $x < a - \frac{1}{\lambda}$ y para $x > b + \frac{1}{\mu}$ y f es constante para $a + \frac{1}{\lambda} < x < b - \frac{1}{\mu}$. Por defición, $f \in \mathcal{C}_c^\infty$ y $\mathrm{supp}(f) \subset \left[a - \frac{1}{\lambda}; b + \frac{1}{\mu}\right]$.

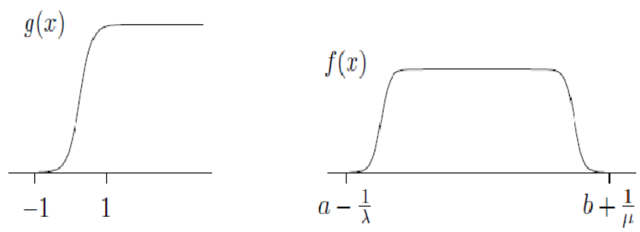

Figura 5.1: funciones f y g

En el caso de d dimensiones, basta definir $f(x_1, x_2, \cdots, x_d) = g(|x|^2)$, donde $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ es tal que $g(t) = 1$ para $1 \leq t \leq a$ y $g(t) = 0$ para $x \geq b$, donde $0 < a < b$. Entonces $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp}(f) \subset \{x \in \mathbb{R}^d : |x|^2 \leq b^2\}$ y $f(x) = 1$ para $|x|^2 \leq a^2$.
En particular si $D_r(x_0)$ es la bola abierta de radio r centrada en x_0, entonces existe una función $f \in \mathcal{C}_c^\infty$ tal que $f = 1$ en $D_r(x_0)$ y $f = 0$ fuera de $D_r(x_0)$.

Teorema 5.13. *Sea K un compacto y A un conjunto abierto en $\mathbb{R}^d$, con $K \subset A$. Entonces existe una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in K$ y $\varphi(x) = 0$, para todo $x \notin A$.*

Demostración. Para cada $x \in K$, existe un $r(x) > 0$, tal que $D_{r(x)}(x) \subset A$. La colección $\{D_{r(x)/2}(x) : x \in K\}$, es una cobertura abierta del compacto K: por definición $D_{r(x)}(x)$ es abierto, además, para todo $x \in K$ en particular $x \in D_{r(x)}(x)$ y por lo tanto $K \subset \bigcup_{x \in K} D_{r(x)}(x)$. Más aun como K es compacto, toda cobertura abierta de K tiene una subcobertura finita, por la tanto existen $x_1, x_2, \cdots, x_m \in K$ tal que

$$K \subset D_{r_1/2}(x_1) \cup \cdots \cup D_{r_m/2}(x_m)$$

donde $r_i = r(x_i)$.
Suponga $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty$ (construidas como en el ejemplo 5.12), $\varphi_i(x) = 0$, si $x \notin D_{r_i}(x)$ y $\varphi_i(x) = 1$, si $x \in D_{r_i}(x)$; se establece

$$\varphi(x) = 1 - (1 - \varphi_1(x))(1 - \varphi_2(x)) \cdots (1 - \varphi_m(x))$$

Entonces $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $0 \leq \varphi \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Más aun para cualquier $x \in K$, existe un $1 \leq i \leq m$ tal que $x \in D_{r_i/2}(x_i)$ y por lo tanto $\varphi_i(x) = 1$ y $\varphi(x) = 1$.
Por otro lado, $x \notin A$, entonces $x \notin D_{r_i}(x_i)$ para todo $1 \leq i \leq m$ (pues $D_{r_i}(x_i) \subset A$). Por lo tanto $\varphi_i(x) = 0$ para todo i y $\varphi(x) = 1 - 1 = 0$. Así, φ satisface lo requerido. □

Observación 5.14 (Lema de Urysohn)**.** El teorema anterior es análogo al **Lema de Urysohn**:
Un espacio topológico es normal si para cualquier par de espacios cerrados A, B, existe una función continua en el intervalo $[0;1]$ que es exactamente 1 en A y 0 en B.

Teorema 5.15. *$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y $\psi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ una sucesión de funciones tal que $\operatorname{supp}(\psi_n) \subset \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < n+1\}$, $\psi_n(x) = 1$ para $|x| \leq n-1$ y el gráfico de ψ_n es independiente de n para $n-1 \leq |x| \leq n+1$; es decir, $\psi_k(x) = \psi_{k+1}(x-1)$, para $k+1 < |x| < k+2$. Lo anterior implica que para un multi-índice $\gamma \in \mathbb{Z}_+^d$, $D^\gamma \psi_n(x)$ está acotado uniformemente (es decir para todo n).
Sea $\varphi_n = \varphi\psi_n$, entonces $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ y

$$\begin{aligned} \| \varphi - \varphi_n \|_{\alpha,\beta} &= \| \varphi(\psi_n - 1) \|_{\alpha,\beta} \\ &= \sup_{x \leq n-1} \left| x^\alpha D^\beta (\varphi(x)(\psi_n(x) - 1)) \right|. \end{aligned}$$

Pero, para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_+^d$, si $n \to \infty$, $(\psi_n(x) - 1) \to 0$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$ y por la fórmula de Leibniz, $\| \varphi_n - \varphi \|_{\alpha,\beta} \to 0$ si $n \to \infty$, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$. □

Observación 5.16. Si $\psi \in \mathcal{S}$ se desvanece en un abierto G (como función), entonces $\int \psi(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset G$, es decir T_ψ desaparece en G como distribución.

Observación 5.17. Suponga $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ desaparece en G_1, G_2 abiertos, donde $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, entonces T desaparece en $G_1 \cup G_2$.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{S}$, tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset G_1 \cup G_2$, observe que $\operatorname{supp}(\varphi) \cap G_1$ es un conjunto cerrado, en G_1 y por el teorema 5.13, existe una función

infinitamente diferenciable h_1 tal que $h_1 = 1$ en $\operatorname{supp}(\varphi) \cap G_1$ y $h_1 = 0$ fuera de un conjunto cerrado $F_1 \supset \operatorname{supp}(\varphi) \cap G_1$. Por lo tanto $h_1\varphi$ tiene soporte en G_1. De forma análoga, se construye un h_2 tal que φh_2 tiene soporte contenido en G_2.
Sin embargo, $\varphi = h_1\varphi + h_2\varphi$ y por lo tanto $T(\varphi) = T(h_1\varphi) + T(h_2\varphi) = 0$ pues la distribución se desvanece en ambos conjuntos G_1, G_2. □

Ejemplo 5.18.

1. Considere la distribución Delta, entonces $\operatorname{supp}(\delta_a) = \{a\}$, con $a \in \mathbb{R}^d$.
2. Sea H la función de Heaviside, entonces $\operatorname{supp}(H) = \operatorname{supp}(T_H) = [0, \infty)$.

Se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 5.19. *Se tiene*

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \supsetneq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

Demostración. Veamos que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. Sea

$$\begin{aligned} T \in \mathcal{S}' &\longrightarrow T : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \textit{ es acotada} \\ &\longleftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{S} : |T\varphi| \leq C \parallel \varphi \parallel_{\alpha,\beta} \\ &\longrightarrow \forall \phi \in \mathcal{D} : |T\phi| \leq C \parallel \phi \parallel \\ &\longleftrightarrow T \in \mathcal{D}' \end{aligned}$$

Veamos que $\mathcal{S}' \neq \mathcal{D}'$, ya que la linealidad y la continuidad están aseguradas. Sea $u(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ y $d = 1$, por el teorema 3.7, $F_u(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}$ es una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (pues $u \in L^1_{\text{loc}}$). Sin embargo $F_u \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, pues F_u no está definido en todos los elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, en particular para $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ □

Teorema 5.20. *Suponga $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, entonces, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ es una distribución de orden finito.*

Demostración. Veamos que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ tiene orden finito. Como $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, existe un $C_0 > 0$ y enteros $q, k \in \mathbb{Z}_+$ tales que

$$|T(\varphi)| \leq C_0 \parallel \varphi \parallel_{q,k}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Sin embargo, si $K \subset \mathbb{R}^d$ es compacto, existe un $M > 0$ tal que $|x^\alpha| \leq M$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ con $|\alpha| \leq q$ y para todo $x \in K$. Por lo tanto existe un $C' > 0$ tal que

$$|T(\varphi)| \leq C' \parallel\!\mid \varphi \parallel\!\mid_k$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(K) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pues

$$\begin{aligned}
|T(\varphi)| &\leq C_0 \parallel \varphi \parallel_{d,k} \\
&= C_0 \sum_{|\alpha|\leq d; |\beta|\leq k} \parallel x^\alpha D^\beta \varphi \parallel_\infty \\
&\leq C_0 M \sum_{|\beta|\leq k} \parallel D^\beta \varphi \parallel_\infty \\
&= C' \parallel\!\mid \varphi \parallel\!\mid_k
\end{aligned}$$

por lo anterior se sigue que

$$|T(\varphi)| \leq C' \parallel\!\mid \varphi \parallel\!\mid_k$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ donde k no depende de K y por lo tanto el orden de T en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ es finito (y no mayor a k). $\square$

Observación 5.21. El recíproco del teorema anterior es falso. Suponga

$$F : \varphi \mapsto \int \mathrm{e}^{x^2} \varphi(x) \,\mathrm{dx}$$

Define un elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lo cual no se extiende a un funcional continuo en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (no existe $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tal que $F = T$). Sin embargo, para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$

$$|F(\varphi)| \leq C \parallel\!\mid \varphi \parallel\!\mid_0$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ por lo tanto el orden de F es 0.
Veamos que de verdad no existe $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tal que $T = F$. Suponga que existe un funcional que cumpla dichas condiciones, entonces, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$T(\varphi) = F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{x^2} \varphi(x) \,\mathrm{dx}\,.$$

Como además $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{S}$ (por 5.15), entonces, para todo $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ existe una sucesión $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} T(\psi) &= \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{x^2}\, \varphi_n(x)\, \mathrm{dx} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{x^2}\, \psi(x)\, \mathrm{dx} \end{aligned}$$

pues, como $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, se puede utilizar el corolario 2.31 (pues la integral sería sobre un conjunto compacto). Por lo tanto T es de la forma

$$T(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, \mathrm{e}^{x^2}\, \mathrm{dx}\,.$$

En particular para $\psi(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, luego

$$T(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-x^2+x^2}\, \mathrm{dx} = \infty$$

así, hay un elemento de $\mathcal{S}$ para el cual T no esta bien definida, por lo tanto $T \notin \mathcal{S}'$.

Teorema 5.22. *Sea $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ tal que* $\operatorname{supp}(F)$ *es compacto. Entonces $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Suponga W una bola abierta en $\mathbb{R}^d$ tal que $\operatorname{supp}(F) \subset W$ y $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ con $W \subset \operatorname{supp}(\psi)$, $\psi = 1$ en W (teorema 5.13). Así, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\varphi\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto se puede definir el mapa lineal T en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ como

$$T(\varphi) = F(\varphi\psi)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Ahora para todo $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ $\psi\phi = \phi$ en W y por lo tanto $\operatorname{supp}(\phi\psi - \phi) \subseteq W^c$, $F(\phi\psi) = F(\phi)$. De lo anterior se obtiene $T(\phi) = F(\phi)$, para todo $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Más aun, suponga $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, entonces, utilizando la fórmula de Leibniz, se sigue $\varphi_n\psi \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$

$$\begin{aligned} D^\alpha \varphi_n \psi &= \sum_{k\leq\alpha} \binom{\alpha}{k} \varphi_n^{(\alpha-k)}(x)\psi^{(k)} \\ &\to 0. \end{aligned}$$

Esto significa que $T(\varphi_n) = F(\varphi_n \psi) \to 0$ siempre que $n \to \infty$ y por lo tanto T es continua en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (observación 4.11), es decir $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
Veamos que T es única. Suponga que existe $Q \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $Q = F$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, por lo tanto $Q - T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y desaparece en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (que es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, por el teorema 5.15). Por la continuidad se sigue que $T = Q$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\square$

Teorema 5.23. *Suponga ψ y sus derivadas son polinómicamente acotados, es decir, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ $\exists N_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ y $C_\alpha > 0$ constante tales que $|D^\alpha \psi(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|^2)^{N_\alpha}$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Entonces, para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la función $\psi\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y el mapa*

$$\psi T : \varphi \mapsto T(\psi\varphi)$$

define una distribución temperada, para cualquier $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Observe que si ψ y sus derivadas son polinómicamente acotadas, entonces, $\psi\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Más aun, por la fórmula de Leibniz, si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces $\psi\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi\varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto $\psi T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Capítulo 6

Transformada de Fourier

La teoría de distribuciones es particularmente útil en el desarrollo de la transformada de Fourier. A continuación nos interesaremos en dichas aplicaciones.

6.1. Definición y Propiedades

En primer lugar es necesario definir la transformada de Fourier y su inversa:

Definición 6.1. La transformada de Fourier de una función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es la función $\mathcal{F}\varphi$ dada por

$$\mathcal{F}\varphi(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\lambda x}\, \varphi(x)\, \mathrm{dx}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}^d$ y $\lambda x = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \lambda_j x_j$, para $x \in \mathbb{R}^d$.
Por sencillez se notará, $\hat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$

Definición 6.2. La inversa de la transformada de φ, $\mathcal{F}^{-1}\varphi$, se define como

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\lambda x}\, \varphi(x)\, \mathrm{dx}\,.$$

Veamos un ejemplo de transformada de Fourier:

Ejemplo 6.3. Suponga $d = 1$, se define $1_{[a,b]}$ como la función característica del intervalo $[a, b]$, luego

$$\mathcal{F}(1_{[a,b]}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-ix\xi}\, \mathrm{dx} = c\frac{\mathrm{e}^{-ia\xi} - \mathrm{e}^{-ib\xi}}{i\xi}$$

donde $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Observe que si $b = -a = 1$, entonces

$$\mathcal{F}(1_{[a,b]}) = c\frac{\mathrm{e}^{i\xi} - \mathrm{e}^{-i\xi}}{i\xi} = 2c\frac{\sin(\xi)}{\xi} =: 2c\,\mathrm{sinc}(\xi)$$

donde la función sinc es llamada " *seno cardinal*" .

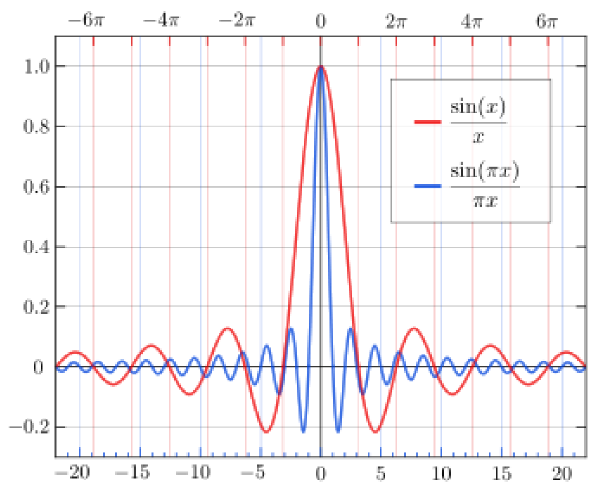

Figura 6.1: Seno Cardinal

Veamos algunas propiedades de la transformada de Fourier que nos serán útiles más adelante

Proposición 6.4. *Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $y \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{C}$ y α multi-índice, entonces:*

1. $\|\hat{\varphi}\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^1}$,
2. $\widehat{\varphi + \psi} = \widehat{\varphi} + \widehat{\psi}$,

3. $\widehat{b\varphi} = b\hat{\varphi}$,

4. $\widehat{\tilde{\varphi}} = \tilde{\hat{\varphi}}$,

5. $\widehat{\overline{\varphi}} = \overline{\tilde{\hat{\varphi}}}$,

6. $\widehat{\tau_y(\varphi)}(\xi) = \mathrm{e}^{-iy\xi}\,\hat{\varphi}(\xi)$,

7. $\widehat{\mathrm{e}^{ixy}\,\varphi(x)}(\xi) = \tau_y\hat{\varphi}(\xi)$,

8. $\widehat{\partial^\alpha\varphi}(\xi) = (i\xi)^\alpha\hat{\varphi}(\xi)$,

9. $\partial^\alpha\hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}((-i\xi)^\alpha\varphi(x))(\xi)$,

10. $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$,

11. $\widehat{\varphi * \psi} = c\hat{\varphi}\hat{\psi}$.

Demostración. Muchas de las propiedades enunciadas en este teorema se demostrán a lo largo del capítulo, o en el capítulo 7.
Suponga $c = (2\pi)^{d/2}$, entonces,

1. Observe que

$$\begin{aligned}
\|\,\varphi\,\|_{L^\infty} &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\hat{\varphi}(\xi)| \\
&= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-ix\xi}\,\mathrm{dx} \right| \\
&\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|\,\mathrm{dx} \\
&= \|\,\varphi\,\|_{L^1}\,.
\end{aligned}$$

2. Se obtiene por la linealidad de la integral.

3. Se obtiene por la linealidad de la integral.

4. Observe que

$$\begin{aligned}
\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi) &= c\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\xi}\,\varphi(x)\,\mathrm{dx} \\
&= c\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{iy\xi}\,f(y)dy \\
&= \hat{\varphi}(-\xi) \\
&= \widetilde{\hat{\varphi}}(\xi)
\end{aligned}$$

5. Observe que

$$\begin{aligned}
\widehat{\overline{\varphi}}(\xi) &= c\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\xi}\,\overline{\varphi}(x)\,\mathrm{dx} \\
&= c\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathrm{e}^{ix\xi}\,\varphi(x)}\,\mathrm{dx} \\
&= \overline{\hat{\varphi}(-\xi)} \\
&= \overline{\widetilde{\hat{\varphi}}}(\xi)
\end{aligned}$$

6. Por definición

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau_y(\varphi)}(\xi) &= c\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\xi}\,\varphi(x-y)\,\mathrm{dx} \\
&= c\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i(z+y)\xi}\,\varphi(z)dz \\
&= c\,\mathrm{e}^{-iy\xi}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-iz\xi}\,\varphi(z)dz \\
&= \mathrm{e}^{-iy\xi}\,\hat{\varphi}(\xi)
\end{aligned}$$

7. Por defínción

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{e}^{ixy}\,\varphi(x)}(\xi) &= c\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\xi}\,\mathrm{e}^{ixy}\,\varphi(x)\,\mathrm{dx} \\
&= c\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix(\xi-y)}\,\varphi(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \hat{\varphi}(\xi-y) \\
&= \tau_y\hat{\varphi}(\xi)
\end{aligned}$$

8. Se demostrará en 6.5
9. Se demostrará en 6.5
10. Se demostrará en 6.6.
11. Se demostrará en 7.2.

□

Proposición 6.5. *Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$*

$$((i\lambda)^\alpha D^\beta \hat{\varphi})(\lambda) = \mathcal{F}(D^\alpha((-ix)^\beta \varphi(x)))(\lambda)$$

En particular, $i\lambda_j \hat{\varphi}(\lambda) = \widehat{(D_j\varphi)}(\lambda)$ y $(D_j\hat{\varphi})(\lambda) = \mathcal{F}(-ix_j\varphi(x))(\lambda)$.

Demostración. Sea $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_d = (0, 0, \cdots, 0, 1)$ la base canónica de $\mathbb{R}^d$. Para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y $h \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\left|(i\lambda_j)^0 (D^1\hat{\varphi})(\lambda) + \mathcal{F}(D^0(ix_j)^1\varphi(x))\right| \\
&\qquad = \left|\frac{\hat{\varphi}(\lambda + he_j) - \hat{\varphi}(\lambda)}{h} + \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} ix_j \, \mathrm{e}^{-i\lambda x} \varphi(x) \, \mathrm{dx}\right| \\
&\qquad = \left|\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{(\mathrm{e}^{-i(\lambda+he_j)x} - \mathrm{e}^{-i\lambda x})}{h} + ix_j \, \mathrm{e}^{-i\lambda x} \right\} \varphi(x) \, \mathrm{dx}\right| \to 0,
\end{aligned}$$

siempre que $h \to 0$, lo anterior es cierto pues

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \left|\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{(\mathrm{e}^{-i(\lambda+he_j)x} - \mathrm{e}^{-i\lambda x})}{h} + ix_j \, \mathrm{e}^{-i\lambda x} \right\} \varphi(x) \, \mathrm{dx}\right| \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{(\mathrm{e}^{-i(\lambda+he_j)x} - \mathrm{e}^{-i\lambda x})}{h} + ix_j \, \mathrm{e}^{-i\lambda x} \right\} |\varphi(x)| \, \mathrm{dx}
\end{aligned}$$

Observe que, por un procedimiento análogo a 4.16 se obtiene que $|\varphi(x) \, \mathrm{e}^{-ix(\lambda+he_j)}| \in L^1$, por lo tanto por el teorema de la convergencia dominada (2.29),

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \, \mathrm{e}^{-ix(\lambda+he_j)} \, \mathrm{dx} \to \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{h\to 0} \varphi(x) \, \mathrm{e}^{-ix\lambda+he_jx} \, \mathrm{dx}$$

obteniendo

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \lim_{h\to 0} \frac{(\mathrm{e}^{-i(\lambda+he_j)x} - \mathrm{e}^{-i\lambda x})}{h} + ix_j\, \mathrm{e}^{-i\lambda x} \right\} |\varphi(x)|\, \mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2})} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{\partial\, \mathrm{e}^{-i\lambda x}}{\partial \lambda_j} + ix_j\, \mathrm{e}^{-i\lambda x} \right\} |\varphi(x)|\, \mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2})} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ -ix_j\, \mathrm{e}^{-i\lambda x} + ix_j\, \mathrm{e}^{-i\lambda x} \right\} |\varphi(x)|\, \mathrm{dx} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Además, como $x_j\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (y utilizando un argumento análogo al anterior) a través de la derivación iterada se obtiene

$$(D^\beta \hat{\varphi})(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (-ix)^\beta\, \mathrm{e}^{-i\lambda x}\, \varphi(x)\, \mathrm{dx} = \mathcal{F}((-ix)^\beta \varphi(x))(\lambda).$$

Más aun,

$$\begin{aligned}
(\lambda^\alpha D^\beta \hat{\varphi})(\lambda) &= \lambda^\alpha \mathcal{F}((-ix)^\beta \varphi(x))(\lambda) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^\alpha (-ix)^\beta\, \mathrm{e}^{-i\lambda x}\, \varphi(x)\, \mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^\alpha \frac{(-i\lambda)^\alpha\, \mathrm{e}^{-i\lambda x}}{(-i\lambda)^\alpha} (-ix)^\beta \varphi(x)\, \mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (-i)^{-\alpha} (D_x^\alpha\, \mathrm{e}^{-i\lambda x}) (-ix)^\beta \varphi(x)\, \mathrm{dx} \\
&= \frac{(-1)^\alpha}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (-i)^{-\alpha}\, \mathrm{e}^{-i\lambda x}\, D_x^\alpha \{(-ix)^\beta \varphi(x)\}\, \mathrm{dx} \\
&= \frac{(-i)^\alpha}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\lambda x}\, D_x^\alpha \{(-ix)^\beta \varphi(x)\}\, \mathrm{dx}
\end{aligned}$$

el penúltimo paso se obtiene integrando por partes (teniendo en cuenta que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto en $|x| \to \infty$, $\varphi(x) \to 0$). De lo anterior se tiene

$$((i\lambda)^\alpha D^\beta \hat{\varphi})(\lambda) = \mathcal{F}(D^\alpha((-ix)^\beta \varphi(x)))(\lambda)$$

Obteniendo el resultado. □

Teorema 6.6. *Tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F}^{-1}$ son mapas continuos en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Veamos que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces $\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}^{-1}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$, se tiene, por la proposición 6.5,

$$\begin{aligned}
\left|(\lambda^\alpha D^\beta \hat{\varphi}(\lambda))\right| &= \left|\frac{(-i)^\alpha}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\lambda x}\, D^\alpha((-ix)^\beta \varphi(x))\, \mathrm{dx}\right| \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left|D^\alpha(x^\beta \varphi(x))\right| \mathrm{dx} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

pues $x^\alpha \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (utilizando un procedimiento análogo al utilizado en el teorema 4.16). De lo anterior, se tiene que $\| \hat{\varphi} \|_{\alpha,\beta} = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} |(\lambda^\alpha D^\beta \hat{\varphi})(\lambda)|$ es finito y por lo tanto $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Observe que además $(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\lambda) = (\mathcal{F}\varphi)(-\lambda)$, por lo tanto de la prueba anterior se puede inferir $\mathcal{F}^{-1}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Para ver que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es continua se utiliza el acotamiento anterior, así al definir $A = \| \hat{\varphi} \|_{\alpha,\beta}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
A &\leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left|D^\alpha(x^\beta \varphi(x))\right| \mathrm{dx} \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(1+x_1^2)(1+x_2^2)\cdots(1+x_d^2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)\cdots(1+x_d^2)} \left|D^\alpha(x^\beta \varphi(x))\right| \mathrm{dx} \\
&\leq \sup_x |(1+x_1^2)(1+x_2^2)\cdots(1+x_d^2) D^\alpha(x^\beta \varphi(x))| \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^2)} dt\right)^d \\
&\leq C \| \varphi \|_{m,n}
\end{aligned}$$

por la fórmula de Leibniz, para alguna constante $C > 0$ y enteros m, n que dependen de α, β. De esto se sigue que si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces $\hat{\varphi_n} \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\varphi}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, obteniendo así el resultado. En el caso de $\mathcal{F}^{-1}$ la demostración es análoga. □

Veamos que efectivamente, la terminología presentada anteriormente es correcta:

Teorema 6.7 (Teorema de Inversión de Fourier)**.** *Para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)$$

Lo anterior implica que la transformada de Fourier, $\mathcal{F}$, en una biyección lineal bicontinua de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ con inversa $\mathcal{F}^{-1}$.

Demostración. Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\lambda)\hat{\varphi}(\lambda)\, \mathrm{e}^{i\lambda y}\, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\lambda) \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\lambda x}\, \varphi(x)\, \mathrm{dx} \right\} \mathrm{e}^{i\lambda y}\, d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\lambda)\, \mathrm{e}^{-i\lambda(x-y)}\, d\lambda \right\} \varphi(x)\, \mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(x-y)\varphi(x)\, \mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(x)\varphi(x+y)\, \mathrm{dx}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

para la última igualdad basta hacer un cambio de variables $(x = x - y)$.
Se define $\psi_\epsilon(\lambda) = \psi(\epsilon\lambda)$, tal que

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_\epsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\lambda}\, \psi(\epsilon\lambda) d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \epsilon^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ixu/\epsilon}\, \psi(u) du \\
&= \epsilon^{-d} \hat{\psi}(x/\epsilon),
\end{aligned}$$

de nuevo haciendo un cambio de varibles $(u = \epsilon\lambda)$.
Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\epsilon\lambda)\hat{\varphi}(\lambda)\, \mathrm{e}^{i\lambda y}\, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y+x)\hat{\psi}_\epsilon(x)\, \mathrm{dx} \\
&= \frac{1}{\epsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(x/\epsilon)\varphi(y+x)\, \mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(x)\varphi(y+\epsilon x)\, \mathrm{dx}\,.
\end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon \to 0$, se obtiene

$$\psi(0) \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\lambda)\, \mathrm{e}^{iy\lambda}\, d\lambda = \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(x)\, \mathrm{dx}$$

Lo anterior es cierto, pues $|\psi_\epsilon(\lambda)\hat{\varphi}\, \mathrm{e}^{i\lambda y}| < M$, para algún $M > 0$ pues $\psi, \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y aplicando el corolario demostrado en los preliminares (2.31), igual que $|\hat{\psi}(x)\varphi(y+\epsilon x)| < M'$.
Definiendo $\psi(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$, entonces $\psi(0) = 1$ además $\hat{\psi}(u) = \mathrm{e}^{-u^2/2}$ y

$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(u)du = (2\pi)^{d/2}$(lema 6.8).

Sustituyendo

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi})(y) = \varphi(y)$$

esto es, $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi$. De forma análoga se demuestra que $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi) = \varphi$. Obtiendo el resultado. □

Lema 6.8. *Veamos la demostración de lo afirmado en la demostración del teorema.*

1. $\hat{f}(u) = \mathrm{e}^{-u^2/2}$, *para* $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$.
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(u)du = (2\pi)^{d/2}$.

Demostración. Veamos el caso general: para $t > 0$, sea $f(x) = \mathrm{e}^{-tx^2}$. Observe que

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-tx^2 - ixu}\,\mathrm{dx}\,.$$

Más aun, al definir $A = \hat{f}(u)$

$$\begin{aligned} A = C\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-tx^2-ixu}\,\mathrm{dx} &= C\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx_1^2-ix_1u_1}\cdots \mathrm{e}^{-tx_d^2-ix_du_d}\,\mathrm{dx}_1\cdots\mathrm{dx}_d \\ &= C\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx_1^2-ix_1u_1}\,\mathrm{dx}_1\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx_d^2-ix_du_d}\,\mathrm{dx}_d\right) \end{aligned}$$

por lo tanto basta considerar el problema en una dimensión. Así, al completar el cuadrado en el exponente se obtiene

$$-t\left(x + \frac{iu}{2t}\right)^2 - \frac{u^2}{4t} = -tx^2 - 2t\frac{xiu}{2t} + \frac{tu^2}{4t^2} - \frac{u^2}{4t} = -tx^2 - iux.$$

Obteniendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx^2-ixu}\,\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\left(x+\frac{iu}{2t}\right)^2 - \frac{u^2}{4t}}\,\mathrm{dx} = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t\left(x+\frac{iu}{2t}\right)^2}\,\mathrm{dx}\,.$$

Observe que no se puede hacer un simple cambio de variables, por que se está trabajando con variables complejas.
Sea C_R el contorno de la figura con $u > 0$.

Veamos que e^{-tz^2} es analítica, se define $u(x,y) = \mathrm{e}^{-t(x^2-y^2)}\cos(2txy)$ y $u(x,y) = -\,\mathrm{e}^{-t(x^2-y^2)}\sin(2txy)$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -2t\,\mathrm{e}^{-t(x^2-y^2)}(x\cos(2txy) + y\sin(2txy))\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= -2t\,\mathrm{e}^{-t(x^2-y^2)}(x\cos(2txy) + y\sin(2txy))\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 2t\,\mathrm{e}^{-t(x^2-y^2)}(y\cos(2txy) - x\sin(2txy))\\
-\frac{\partial v}{\partial x} &= -2t\,\mathrm{e}^{-t(x^2-y^2)}(x\cos(2txy) + y\sin(2txy))
\end{aligned}$$

Satisfaciendo así las ecuaciones de Cauchy y obteniendo el resultado. Como e^{-tz^2} es analítica, por la fórmula de Cauchy, se tiene

$$\int_{C_R} \mathrm{e}^{-tz^2}\,dz = 0$$

Más aun

$$\int_{C_R} \mathrm{e}^{-tz^2}\,dz = \int_{C_1} \mathrm{e}^{-tz^2}\,dz + \int_{C_2} \mathrm{e}^{-tz^2}\,dz + \int_{C_3} \mathrm{e}^{-tz^2}\,dz + \int_{C_4} \mathrm{e}^{-tz^2}\,dz$$

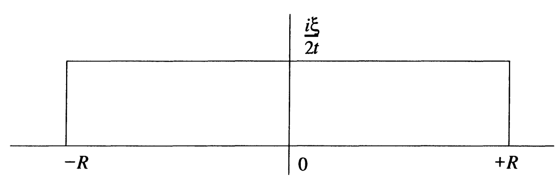

Figura 6.2: C_R

Donde, $C_1 = [-R; R]$, $C_2 = [R; R + \frac{iu}{2t}]$, $C_3 = [R + \frac{iu}{2t}; -R + \frac{iu}{2t}]$ y $C_4 = [-R + \frac{iu}{2t}; -R]$. Así, haciendo la parametrización $z = x$, para C_1, $z = R + \frac{ix}{2t}$, para C_2, $z = x + \frac{iu}{2t}$, para C_3 y $z = -R + \frac{ix}{2t}$ para C_4. Se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} \mathrm{e}^{-tz^2}\,dz &= \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{dx} - \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-t(x+\frac{iu}{2t})^2}\,\mathrm{dx}\\
&\quad + \int_0^u \mathrm{e}^{-t(R^2+\frac{ixR}{t}-\frac{x^2}{4t^2})}\,\frac{i\,\mathrm{dx}}{2t} - \int_0^u \mathrm{e}^{-t(R^2-\frac{ixR}{t}-\frac{x^2}{4t^2})}\,\frac{i\,\mathrm{dx}}{2t}.
\end{aligned}$$

Pero, los dos últimos términos tienden a 0 siempre que $R \to \infty$, pues

$$\int_0^u \mathrm{e}^{-t(R^2+\frac{ixR}{t}-\frac{x^2}{4t^2})}\,\frac{i\,\mathrm{dx}}{2t} - \int_0^u \mathrm{e}^{-t(R^2-\frac{ixR}{t}-\frac{x^2}{4t^2})}\,\frac{i\,\mathrm{dx}}{2t}$$
$$= \mathrm{e}^{-tR^2}\left(\int_0^u \mathrm{e}^{-t(\frac{ixR}{t}-\frac{x^2}{4t^2})}\,\frac{i\,\mathrm{dx}}{2t} - \int_0^u \mathrm{e}^{-t(-\frac{ixR}{t}-\frac{x^2}{4t^2})}\,\frac{i\,\mathrm{dx}}{2t}\right) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo tanto

$$\int_{C_R} \mathrm{e}^{-tz^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{dx} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t(x+\frac{iu}{2t})^2}\,\mathrm{dx} = 0$$

Basta evaluar $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{dx}$.

$$\begin{aligned}
(g(t))^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{dx}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ty^2}\,dy\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t(x^2+y^2)}\,\mathrm{dx}\,dy \;\; \textit{Cambiando a coordenadas polares} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-tr^2}\,r dr d\theta \\
&= -2\pi\frac{\mathrm{e}^{-tr^2}}{2t}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{t}.
\end{aligned}$$

Así $g(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$. Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{e}^{-iux}\,\mathrm{dx} = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\mathrm{e}^{-u^2/4t}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{e}^{-iux}\,\mathrm{dx} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{d/2}\mathrm{e}^{-u^2/4t}$$

En particular, si $t = 1/2$ se obtiene, $\hat{f} = f$. $\square$

Observación 6.9.

$$(\mathcal{F}^2\varphi)(x) = (\mathcal{F}\hat{\varphi})(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{\varphi})(-x) = \varphi(-x).$$

De lo anterior se infiere: $\mathcal{F}^4\varphi = \varphi$ y por lo tanto $\mathcal{F}^{-1}$ tiene periodo 4. Es decir, $\mathcal{F}$ es un operador involutivo de orden 4.

Más aun, utilizando la identidad $i\lambda_j\hat{\varphi}(\lambda) = \widehat{(D_j\varphi)}(\lambda)$ y reemplazando φ por $\mathcal{F}^{-1}\varphi$ se obtiene

$$i\lambda_j\varphi(\lambda) = \mathcal{F}(D_j\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\lambda)$$

lo cual se puede simplificar

$$i\lambda_j = \mathcal{F}D_j\mathcal{F}^{-1} \tag{6.2}$$

como operadores en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Además, $\mathcal{F}^{-1}(-i\lambda)\mathcal{F} = D_j$ y $\mathcal{F}(i\lambda_j)\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^2D_j\mathcal{F}^{-2} = -D_j$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 6.10 (Fórmula de Parseval)**.** *para todo* $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{\varphi}(x)}\hat{\psi}(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi(x)}\psi(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Demostración. Como, por la ecuación (6.1)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\lambda)\hat{\varphi}(\lambda)\,\mathrm{e}^{iy\lambda}\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(x)\varphi(x+y)\,\mathrm{dx}\,.$$

Por lo tanto tomando $y = 0$, se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\lambda)\hat{\varphi}(\lambda)d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Reemplazando φ por $\mathcal{F}^{-1}\varphi$ y utilizando la identidad $\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = \hat{\varphi}(-x)$, se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(x)\hat{\varphi}(-x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Sin embargo, $\overline{\hat{\varphi}(x)} = \hat{\overline{\varphi}}(-x)$, pues

$$\begin{aligned}
\overline{\hat{\varphi}(x)} &= \overline{c\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\lambda)\,\mathrm{e}^{-ix\lambda}\,d\alpha} \\
&= c\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi(\lambda)}\,\mathrm{e}^{ix\lambda}\,d\alpha \\
&= \mathcal{F}^{-1}\overline{\varphi}(x) = \hat{\overline{\varphi}}(-x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto definiendo $\phi = \overline{\varphi}$, se tiene $\hat{\varphi}(-x) = \hat{\overline{\phi}}(-x) = \overline{\hat{\phi}(x)}$

$$\begin{aligned}
\hat{\overline{\phi}}(-x) &= \overline{\overline{\widehat{\varphi(-x)}}} = \overline{\overline{\widehat{\varphi(x)}}} = \overline{\overline{\hat{\varphi}(-x)}} = \hat{\varphi}(-x) \\
\overline{\hat{\phi}(x)} &= \overline{\overline{\widehat{\varphi(x)}}} = \overline{\overline{\hat{\varphi}(-x)}} = \hat{\varphi}(-x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\overline{\phi(x)}\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(x)\overline{\hat{\phi}(x)}\,\mathrm{dx},$$
obteniendo el resultado. $\square$

Corolario 6.11 (Fórmula de Plancherel)**.** $\|\,\hat{\varphi}\,\|_{L^2} = \|\,\varphi\,\|_{L^2}$.

Veamos que la transformada de Fourier es un operador unitario en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 6.12 (Plancherel)**.** *La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ se extiende de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a un operador unitario en $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Por la fórmula de Plancherel, hemos demostrado que la transformada de Fourier es isométrica con respecto a la norma $\|\cdot\|_{L^2}$, más aun, se ha demostrado que
$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$
Como, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$ (refierase al resultado del teorema 7.22). Sea $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces $\exists(\varphi_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|\,\varphi_n - \phi\,\|_2 \to 0$. En particular (φ_n) es sucesión de Cauchy en L^2
$$\|\,\varphi_n - \varphi_m\,\|_2 = \|\,\varphi_n - \varphi_m + \phi - \phi\,\|_2 \leq \|\,\varphi_n - \phi\,\|_2 + \|\,\phi - \varphi_m\,\|_2 \to 0 + 0 = 0.$$
Pero como además, $\|\,\hat{\varphi}\,\|_2 = \|\,\varphi\,\|_2$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\hat{\varphi_n}$ es también una sucesión de Cauchy en L^2 y por lo tanto converge a algún elemento Ψ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Así se define: $\mathcal{F}\phi = \Psi$, entonces
$$\|\,\hat{\phi}\,\|_2 = \lim_n \|\,\hat{\varphi}_n\,\|_2 = \lim_n \|\,\varphi_n\,\|_2 = \|\,\phi\,\|_2\,.$$
Veamos que Ψ es independiente de la sucesión (φ_n), suponga que existe otra sucesión (ψ_n) en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|\,\psi_n - \phi\,\|_2 \to 0$. Se define una nueva sucesión $(\omega_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,
$$\omega_n(x) = \begin{cases} \varphi_n, & si\, n\, es\, par \\ \psi_n, & si\, n\, es\, impar. \end{cases}$$
Por un argumento análogo al utilizado anteriormente $(\hat{\omega}_n)$ converge en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pero,
$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \lim_{n\to\infty} \hat{\omega}_n \\ &= \lim_{n\, impar \to\infty} \hat{\omega}_n = \lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n \\ &= \lim_{n\, par \to\infty} \hat{\omega}_n = \lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{F}\phi$ está bien definido y $\| \mathcal{F}\phi \|_2 = \| \phi \|_2$.
Un argumento análogo es válido para $\mathcal{F}^{-1}$. Más aun, se demostró que $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = I$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pero como este último es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$ se obtiene el resultado. □

Corolario 6.13. *Para todo $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ se tiene*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(x)\psi(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\hat{\psi}(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Demostración.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{\varphi}}\hat{\psi}\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\varphi}\psi\,\mathrm{dx},$$

por la Fórmula de Parseval (6.10) y utlizando el hecho que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$.
Reemplazando φ por $\overline{\varphi}$ y ψ por $\hat{\psi}$ y utilizando el hecho que $\overline{\mathcal{F}\overline{\varphi}(x)} = (\mathcal{F}\varphi)(-x)$ y $(\mathcal{F}\mathcal{F}\psi)(x) = \psi(-x)$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(-x)\psi(-x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\hat{\psi}(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Obteniendo el resultado. □

6.2. Transformada de Fourier de una Distribución Temperada

Como se dijo anteriormente, muchas de las propiedades del espacio de Schwartz son heredadas por las distribuciones temperadas, en particular por la definición de transformada de Fourier para distribuciones:

Definición 6.14. La transformada de Fourier $\mathcal{F}T$ de una distribución temperada, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ esta dada por

$$\mathcal{F}T(\varphi) = T(\mathcal{F}\varphi),$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
De forma análoga

$$\mathcal{F}^{-1}(T\varphi) = T(\mathcal{F}^{-1}\varphi),$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Observación 6.15. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es continua y por lo tanto, $\mathcal{F}$ envía $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Igualmente, $\mathcal{F}^{-1}$ envía $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Más aun se obtiene el resultado

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = T = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T.$$

Si T es un elemento $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, con $T = T_\phi$, entonces

$$\hat{T}_\phi(\varphi) = T_\phi(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\phi}(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} = T_{\hat{\phi}}(\varphi).$$

Ejemplo 6.16. 1. Veamos $\hat{\delta}_b(\varphi)$, para $b \in \mathbb{R}^d$. Para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_b(\varphi) &= \delta_b(\hat{\varphi}) \\ &= \hat{\varphi}(b) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ibx}\,\varphi(x)\,\mathrm{dx} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{e}^{-ibx}}{(2\pi)^{d/2}} \varphi(x)\,\mathrm{dx} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\widehat{\delta_b} = T_\psi$, donde $\psi(x) = \mathrm{e}^{-ibx}/(2\pi)^{d/2}$. En particular si $b = 0$, $\hat{\delta} = (2\pi)^{-d/2}$.

2. Ahora, considere $\hat{\delta}'_b$

$$\begin{aligned} \widehat{\delta'_b}(\varphi) &= \delta'_b(\hat{\varphi}) \\ &= \delta_b(-\hat{\varphi}') \\ &= -\hat{\varphi}'(b) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{ix\,\mathrm{e}^{-ixb}}{(2\pi)^{d/2}} \varphi(x)\,\mathrm{dx}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{\delta}'_b = ix\,\mathrm{e}^{-ibx}/(2\pi)^{d/2}$.

Teorema 6.17. *$\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son continuos en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Suponga $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Entonces $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Por lo tanto

$$\hat{T}_n(\varphi) = T_n(\hat{\varphi}) \to T(\hat{\varphi}) = \hat{T}(\varphi)$$

Así, $\hat{T}_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \hat{T}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Con un argumento análogo se demuestra la continuidad de $\mathcal{F}^{-1}$. $\square$

Teorema 6.18. *Para todo $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$,*

$$(ix)^\alpha \hat{T} = \widehat{(D^\alpha T)} \ \text{ y } \ D^\beta \hat{T} = \mathcal{F}((-ix)^\beta T).$$

En general, $(ix)^\alpha D^\beta \hat{T} = \mathcal{F}(D^\alpha((-ix)^\beta T))$.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\begin{aligned} (ix)^\alpha \hat{T}(\varphi) &= \hat{T}((ix)^\alpha \varphi) \\ &= T(\widehat{(ix)^\alpha \varphi}) \\ &= T((-D)^\alpha \hat{\varphi}) \\ &= D^\alpha T(\hat{\varphi}) \\ &= \widehat{D^\alpha T}(\varphi). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} D^\beta \hat{T}(\varphi) &= \hat{T}((-D)^\beta \varphi) \\ &= T(\widehat{(-D)^\beta \varphi}) \\ &= T((-ix)^\beta \hat{\varphi}) \\ &= (-ix)^\beta T(\hat{\varphi}) \\ &= (\widehat{(-ix)^\beta T})(\varphi). \end{aligned}$$

Para el caso general

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{D^\alpha((-ix)^\beta T)\}(\varphi) &= D^\alpha((-ix)^\beta T)(\hat{\varphi}) \\ &= (-ix)^\beta T((-D)^\alpha \hat{\varphi}) \\ &= (-ix)^\beta T(\widehat{(ix)^\alpha \varphi}) \\ &= T((-ix)^\beta (\widehat{(ix)^\alpha \varphi})) \\ &= T(\mathcal{F}\{D^\beta (ix)^\alpha \varphi\}) \\ &= \hat{T}(D^\beta (ix)^\alpha \varphi) \\ &= (ix)^\alpha D^\beta \hat{T}(\varphi) \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 7

Convoluciones

Al igual que en el caso de la derivada y la tranformada de Fourier, las convoluciones en distribuciones permiten pasar la operación a las funciones prueba conservando así las buenas propiedades de estos objetos.

7.1. Definición y Propiedades

La convolución es una operación cerrada sobre los espcaicos de prueba definidos anteriormente, lo que permite demostrar resultados que serán utiles en particular para la aproximación, a través de funciones infinitamente diferenciables, de las funciones prueba.

Definición 7.1. Sea $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la convolución de φ y ψ, notada por $\varphi * \psi$, es la función

$$\varphi * \psi(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y-x)\psi(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Teorema 7.2. *Sean $\psi, \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Más aun*

1. $(2\pi)^{d/2}\widehat{\varphi\psi} = \hat{\varphi} * \hat{\psi}$ *y* $(2\pi)^{d/2}\hat{\varphi}\hat{\psi} = \widehat{\varphi * \psi}$
2. $\varphi * \psi = \psi * \varphi$ *y* $\varphi * (\psi * \phi) = (\varphi * \phi) * \psi$.

Demostración. Por definición

$$(2\pi)^{d/2}\widehat{\varphi\psi}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ixy}\,\varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Pero se sabe que $\int \widehat{\omega}\chi \,\mathrm{dx} = \int \omega\widehat{\chi}\,\mathrm{dx}$, para todo $\omega, \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Denotando $\check{\omega} = \mathcal{F}^{-1}(\omega)$, entonces al reemplazar ω por $\check{\omega}$, se obtiene

$$\int \omega\chi \,\mathrm{dx} = \int \check{\omega}\hat{\chi}\,\mathrm{dx}\,.$$

Ahora, fijando $y \in \mathbb{R}^d$, suponga $\omega(x) = \mathrm{e}^{-ixy}\,\varphi(x)$ y $\chi = \psi(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{d/2}\widehat{\varphi\psi}(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ixy}\,\varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \omega(x)\chi(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \check{\omega}(x)\hat{\chi}(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{e}^{-iyt}\,\varphi(t)dt\right\}\hat{\psi}(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{it(y-x)}\,\varphi(t)dt\right\}\hat{\psi}(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(y-x)\hat{\psi}(x)\,\mathrm{dx} \\
&= (\hat{\varphi} * \hat{\psi})(y).
\end{aligned}$$

Ahora, reemplazando $\varphi = \check{\varphi}$ y $\psi = \check{\psi}$ en la identidad anterior se obtiene

$$(2\pi)^{d/2}\mathcal{F}(\check{\varphi}\check{\psi}) = \varphi * \psi$$

lo anterior implica que $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, más aun

$$\psi * \varphi = (2\pi)^{d/2}\mathcal{F}(\check{\psi}\check{\varphi}) = (2\pi)^{d/2}\mathcal{F}(\check{\varphi}\check{\psi}) = \varphi * \psi$$

por lo tanto

$$\varphi * \psi = \varphi * \psi.$$

Ahora, tomando la transformada de Fourier, se obtiene

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi * \psi}(y) &= (2\pi)^{d/2}\mathcal{F}\mathcal{F}(\check{\varphi}\check{\psi})(y) \\
&= (2\pi)^{d/2}(\check{\varphi}\check{\psi})(-y) \\
&= (2\pi)^{d/2}\check{\varphi}(-y)\check{\psi}(-y) \\
&= (2\pi)^{d/2}\hat{\varphi}(y)\hat{\psi}(y).
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\varphi * (\psi * \phi)) &= (2\pi)^{d/2}\hat{\varphi}\widehat{\psi * \phi} \\
&= (2\pi)^{d}\hat{\varphi}\hat{\psi}\hat{\phi} \\
&= \mathcal{F}((\varphi * \psi) * \phi).
\end{aligned}$$

Tomando la transformada inversa

$$\varphi * (\psi * \phi) = (\varphi * \psi) * \phi.$$

□

Corolario 7.3. *Sea $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, entonces $\varphi * \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, más aun:*

$$\operatorname{supp}(\varphi * \psi) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(\psi).$$

Demostración. Observe que como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, por el teorema anterior podemos concluir que $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ahora

$$(\varphi * \psi)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y - x)\psi(x)\,\mathrm{dx}$$

Como $\operatorname{supp}(\varphi), \operatorname{supp}(\psi)$ son compactos, $\operatorname{supp}(\varphi * \psi)$ también lo es y por lo tanto $\varphi * \psi \in \mathcal{C}_c$. Más aun

$$D_y^\alpha(\varphi * \psi) = D^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y - x)\psi(x)\,\mathrm{dx} = \int_K D_y^\alpha(\varphi(y - x)\psi(x))\,\mathrm{dx}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, pues como $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y - x)\psi(x)\,\mathrm{dx} = \int_K \varphi(y - x)\psi(x)\,\mathrm{dx}$, donde K es un compacto y por lo tanto tiene medida finita, así, utilizando el corolario 2.31 se obtiene lo afirmado. Por lo tanto, $\varphi * \psi$ tiene derivadas continuas de todos los órdenes, así $\varphi * \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.
Más aun, observe que $\varphi * \psi$ es 0 si es falso que $y - x \in \operatorname{supp}(\varphi)$ para algún $x \in \operatorname{supp}(\psi)$, por lo tanto, basta con definir $y = x_1 + x$, luego $\varphi * \phi$ es 0 si es falso que $x_1 \in \operatorname{supp}(\varphi)$ y $x \in \operatorname{supp}(\psi)$ es decir

$$\operatorname{supp}(\varphi * \psi) \subset \operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(\psi).$$

□

Corolario 7.4. *Para un $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ fijo, el mapa $\psi \mapsto \varphi * \psi$ es continuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Fije $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y suponga $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces $\widehat{\psi_n} \to 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (pues se ha demostrado que la transfromada de Fourier es continua en este espacio) y (por la fórmula de Leibniz) $\hat{\varphi}\hat{\psi_n} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pero, como además se tiene la igualdad (7.2)

$$\varphi * \psi_n = \mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi * \psi_n} = (2\pi)^{d/2}\mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}\hat{\psi_n}) \to 0$$

en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, obteniendo el resultado. □

Definición 7.5. Para cualquier función $u \in \mathbb{R}^d$, se define la translación $\tau_x u$ y la inversión $\tilde{u}$ como

$$(\tau_x u)(y) = u(y - x) \;\; y \;\; \tilde{u}(y) = u(-y).$$

Por lo tanto $(\tau_x \tilde{u})(y) = u(x - y)$ y para $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, se tiene

$$(u * v)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(y - x)\,\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)(\tau_y \tilde{v})(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

Observación 7.6. Para un $x \in \mathbb{R}^d$ fijo, los mapas $\tau_x, \tilde{\cdot}$ son continuos de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ y de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración.

1. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, entonces, para todo $y \in \mathbb{R}^d$, se cumple

   a) $\varphi(y)$ es infinitamente diferenciable.

   b) φ tiene soporte compacto.

   En particular, para $y_1 = y - x$ y $y_2 = -y$, el primer punto se cumple, más aun, al hacer la translación $x \mapsto x - y$, $\mathrm{supp}(\varphi)$ se desplaza a la izquierda, pero sigue siendo compacto.

2. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces, para todo $y \in \mathbb{R}^d$, se cumple

   a) $\varphi(y)$ es infinitamente diferenciable.

   b) φ se desvanece en ∞.

   En particular, para $y_1 = y - x$, $y_2 = -y$, el primer punto se cumple, más aun, $\varphi(y - x) \underset{y\to\infty}{\to} \varphi(\infty) \to 0$ y $\varphi(-y) \underset{y\to\infty}{\to} \varphi(-\infty) \to 0$; por lo tanto $\tau_x\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Obteniendo el resultado. □

7.2. Convoluciones con Distribuciones

Gracias a las propiedades de las convoluciones, se puede demostrar resultados tan utilizados como la densidad de las funciones infinitamente diferenciables en las funciones L^p.

Definición 7.7. Para $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ la convolución, $F * \varphi$, es la función

$$(F * \varphi)(x) = F(\tau_x \tilde{\varphi}) = F(\varphi(x - \cdot)).$$

Para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ la convolución, $T * \psi$, es la función

$$(T * \psi)(x) = T(\tau_x \tilde{\psi}) = T(\psi(x - \cdot)).$$

Ejemplo 7.8. Considere la distribución δ, entonces

$$(\delta * \varphi)(x) = \delta(\tau_x \tilde{\varphi}) = \delta(\varphi(x - \cdot)) = \varphi(x - 0) = \varphi(x).$$

Observación 7.9. $F(\varphi)$ se puede expresar como una convolución, pues $\tau_0(\tilde{\tilde{\varphi}})(x) = \tilde{\tilde{\varphi}}(x - 0) = \tilde{\varphi}(-x) = \varphi(x)$, por lo tanto

$$F(\varphi) = F(\tau_0(\tilde{\tilde{\varphi}})) = (F * \tilde{\varphi})(0).$$

De forma análoga

$$T(\psi) = T(\tau_0(\tilde{\tilde{\psi}})) = (T * \tilde{\psi})(0).$$

Lema 7.10. *Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, y $\kappa \neq 0$, se define*

$$\varphi_\kappa(x) = \frac{\varphi(x + \kappa e_j) - \varphi(x)}{\kappa},$$

donde $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ son los vectores que componen la base canónica de $\mathbb{R}^d$. Entonces $\varphi_\kappa \xrightarrow{\mathcal{S}} \partial_j \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, siempre que $\kappa \to 0$.

Demostración. Veamos que $\| \varphi_\kappa - \partial_j \varphi \|_{\alpha,\beta} \to 0$, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$. Sin perdida de generalidad, suponga $\beta = 0$.

Sea $\phi = \partial_j \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y $\| x \|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} |x_i|$ para $x \in \mathbb{R}^d$. Si $\kappa < 1$, por el teorema del valor medio (2.20), para cada $x \in \mathbb{R}^d$ existe un $\theta \in \mathbb{R}$ (que depende de x) con $|\theta| < 1$, tal que $\varphi_\kappa(x) = \phi(x + \theta\kappa e_j)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha(\varphi_\kappa(x) - \phi(x))| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha(\phi(x+\theta\kappa e_j) - \phi(x))| \\
&\leq \sup_{\|x\|_1 \leq M} |x^\alpha(\phi(x+\theta\kappa e_j) - \phi(x))| \\
&+ \sup_{\|x\|_1 > M} |x^\alpha\phi(x+\theta\kappa e_j)| + \sup_{\|x\|_1 > M} |x^\alpha\phi(x)|.
\end{aligned}$$

Estudiemos de forma separada los 3 términos anteriores.
Sea $\epsilon > 0$ fijo. Como $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, para M suficientemente grande se tiene

$$\sup_{\|x\|_1 > M} |x^\alpha \phi(x)| < \frac{1}{3}\epsilon.$$

Observe que $|x_j| \leq |x_j + \theta\kappa| + |\theta\kappa| \leq |x_j + \theta\kappa| + 1$, por lo tanto

$$|x^\alpha| \leq \left(\prod_{i\neq j} |x_i|^{\alpha_i}\right)(1 + (x_j + \theta\kappa))^{\alpha_j}.$$

Si $\|x\|_1 > M$, entonces $\|x + \theta\kappa e_j\|_1 > M - 1$ ($\|x + \theta\kappa e_j\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i + \theta\kappa e_j| \geq \sum_{i=1}^d |x_i| - |\theta\kappa e_j| > M-1$). Combinando los dos resultados anteriores, al definir $A = \sup_{\|x\|_1 > M} |x^\alpha\phi(x+\theta\kappa e_j)|$ se obtiene

$$\begin{aligned}
A &\leq \sup_{\|x\|_1 > M} \left(\prod_{i\neq j} |x_i|^{\alpha_i}\right)(1 + |x_j + \theta\kappa|)^{\alpha_j} |\phi(x+\theta\kappa e_j)| \\
&\leq \sup_{\|x\|_1 > M-1} \left(\prod_{i\neq j} |x_i|^{\alpha_i}\right)(1 + |x_j|)^{\alpha_j} |\phi(x)| \\
&< \frac{1}{3}\epsilon,
\end{aligned}$$

(pues $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$) siempre que M sea lo suficientemente grande.
Dado un M fijo lo suficientemente grande para que se cumpla las dos desigualdades anteriores, como ϕ es uniformemente continua en el conjunto

$\{x \in \mathbb{R}^d : \| x \|_1 \leq M\}$ y por lo tanto

$$\sup_{\| x \|_1 \leq M} |x^\alpha(\phi(x + \theta\kappa e_j) - \phi(x))| < \frac{1}{3}\epsilon$$

siempre que $|\kappa|$ sea suficientemente pequeño. Obteniendo el resultado. $\square$

Observación 7.11. Veamos que efectivamente, para M fijo, todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es uniformemente continua en $\{x \in \mathbb{R}^d : \| x \|_1 \leq M\}$.

Demostración. Suponga que para un $\epsilon > 0$ dado

$$0 < \delta < \frac{\epsilon}{\| \varphi' \|_\infty}$$

entonces, por el teorema del valor medio 2.20, para todo x, y, con $\| x \|_1 < M$ y $\| y \|_1 < M$, se tiene, que existe un c tal que $\| c \|_1 < M$ y

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(c)||x - y|$$

por lo tanto, si $|x - y| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &= |\varphi'(c)||x - y| \\ &< |\varphi'(c)|\delta \\ &< |\varphi'(c)|\frac{\epsilon}{\| \varphi' \|_\infty} \\ &< \| \varphi' \|_\infty \frac{\epsilon}{\| \varphi' \|_\infty} = \epsilon \end{aligned}$$

donde δ no depende de los punto elegidos x, y. $\square$

Lema 7.12. *Para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\tau_a(\varphi) \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ siempre que $a \to 0$ en $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Suponga $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ fijo y $\| a \|_1 < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \sup_x |x^\alpha(\varphi(x - a) - \varphi(x))| &\leq \sup_{\| x \|_1 \leq M} |x^\alpha(\varphi(x - a) - \varphi(x))| \\ &+ \sup_{\| x \|_1 > M} |x^\alpha \varphi(x - a)| + \sup_{\| x \|_1 > M} |x^\alpha \varphi(x)|, \end{aligned}$$

para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Para un $\epsilon > 0$ dado, se fija M lo suficientemente grande para que

$$\sup_{\|x\|_1 > M} |x^\alpha \varphi(x-a)| < \frac{1}{3}\epsilon$$

y

$$\sup_{\|x\|_1 > M} |x^\alpha \varphi(x)| < \frac{1}{3}\epsilon$$

(pues $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).
Más aun, como φ es uniformemente continua en $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq M\}$, para a lo suficientemente pequeño se tiene

$$\sup_{\|x\|_1 \leq M} |x^\alpha (\varphi(x-a) - \varphi(x))| < \frac{1}{3}\epsilon.$$

Por lo tanto, basta con reemplazar φ por $D^\beta \varphi$ y todo lo anterior es cierto; obteniendo

$$\| \tau_a \varphi - \varphi \|_{\alpha,\beta} \underset{a\to 0}{\rightarrow} 0,$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ y por lo tanto $\tau_a \varphi \xrightarrow[a\to 0]{\mathcal{S}} \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Corolario 7.13. *Suponga $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, entonces*

1. $\varphi_\kappa \xrightarrow[\kappa\to 0]{\mathcal{D}} \partial_j \varphi$ *en* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

2. $\tau_a \varphi \xrightarrow[a\to 0]{\mathcal{D}} \varphi$ *en* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Observe que las demostraciones anteriores son válidas, solo resta demostrar que el soporte es compacto. Sea $|\kappa| < 1$, entonces, existe un compacto, K, fijo, tal que $\mathrm{supp}(\varphi_\kappa) \subset K$ y $\mathrm{supp}(\partial_j \varphi) \subset K$, obteniendo el primer resultado.
De forma análoga, para todo $\| a \|_1 < 1$, el soporte de φ y $\tau_a \varphi$, es tal que, para un compacto K (no necesariamente el mismo anterior)

$$\mathrm{supp}(\tau_a \varphi), \mathrm{supp}(\varphi) \subset K.$$

Obteniendo el resultado. □

Teorema 7.14. *Sea* $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *y* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, *entonces* $F * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *y*

$$D^\alpha(F * \varphi) = (D^\alpha F) * \varphi = F * (D^\alpha \varphi)$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^d_+$. *Más aun* $\operatorname{supp}(F * \varphi) \subseteq \operatorname{supp}(F) + \operatorname{supp}(\varphi)$.

Demostración. Por el corolario 7.13, se tiene que $\tau_y\tilde{\varphi} \to \tau_x\tilde{\varphi}$, siempre que $y \to x$ en $\mathbb{R}^d$. Por lo tanto, $F(\tau_y\tilde{\varphi}) \to F(\tau_x\tilde{\varphi})$, esto es, por la definición de convolución en distribuciones, $(F * \varphi)(y) \to (F * \varphi)(x)$, si $y \to x$ y así, $F * \varphi$ es continuo en $\mathbb{R}^d$.
Utilizando de nuevo el corolario y fijando $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \frac{(F * \varphi)(x + \kappa e_j) - (F * \varphi)(x)}{\kappa} &= \frac{F(\tau_{x+\kappa e_j}\tilde{\varphi} - \tau_x\tilde{\varphi})}{\kappa} \\ &= F\left(\frac{\tau_x(\tau_{\kappa e_j}\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi})}{\kappa}\right) \\ &\to F(\tau_x(D_j\tilde{\varphi})), \;\; \textit{siempre que} \;\; \kappa \to 0, \\ &= F(\tau_x(\widetilde{D_j\varphi})) \\ &= (F * D_j\varphi)(x). \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene que $D_j(F * \varphi)(x)$ existe para cada $x \in \mathbb{R}^d$ y que es igual a $(F * D_j\varphi)(x)$. Más aun, para un x fijo

$$\begin{aligned} F(\tau_x(-D_j\tilde{\varphi})) &= -F(D_j\tau_x\tilde{\varphi}) \\ &= (D_jF)(\tau_x\tilde{\varphi}) \\ &= ((D_jF) * \varphi)(x) \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$D_j(F * \varphi) = F * D_j\varphi = (D_jF) * \varphi.$$

El caso general se hace por inducción.
Observe que $(F * \varphi)(x) = 0$ si $\operatorname{supp}(F) \cap \operatorname{supp}(\tau_x\tilde{\varphi}) = \emptyset$, esto es, si $\operatorname{supp}(F) \cap \operatorname{supp}(\varphi(x - \cdot)) = \emptyset$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(F * \varphi) &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : \operatorname{supp}(F) \cap \operatorname{supp}(\varphi(x - \cdot) \neq \emptyset\} \\ &= \{x : \exists y \in \operatorname{supp}(F) : x - y \in \operatorname{supp}(\varphi)\} \\ &= \{x : x \in \operatorname{supp}(F) + \operatorname{supp}(\varphi)\} \end{aligned}$$

completando la prueba. □

Corolario 7.15. *Para $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $F * \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Por el teorema anterior, se tiene que $F*\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ y por lo tanto es acotado en cada conjunto compacto de $\mathbb{R}^d$. Así: $\psi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} (F*\varphi)(x)\psi(x)\,\mathrm{dx}$ es un mapa lineal continuo en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto una distribución. □

Veamos un resultado similar para $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 7.16. *Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces, $T * \varphi \in \mathcal{C}^\infty$ y*

$$D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi)$$

para cualquier $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$. Más aun, $T*\varphi$ determina una distribución temperada.

Demostración. Observe que la primera parte es análoga a la demostración en el caso de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Veamos que efectivamente, $T*\varphi$ define una distribución temperada. Como $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, existe una constante $C > 0$ y enteros k, n tales que

$$|T(\psi)| \leq \| \psi \|_{k,n}$$

para todo $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Por lo tanto, para $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
|(T * \varphi)(x)| &= |T(\tau_x \tilde{\varphi})| \\
&\leq C \| \tau_x \tilde{\varphi} \|_{k,n} \\
&= C \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq n}} \sup_y |y^\alpha| |D_y^\beta \varphi(x-y)| \\
&= C \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq n}} \sup_y |(-y+x)^\alpha| |D^\beta \varphi(y)|
\end{aligned}$$

pero como $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ lo anterior está "polinómicamente acotado" y por lo tanto, $(T * \varphi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (por el teorema 5.23). □

Proposición 7.17. *Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces, $(T * \varphi_n)(x) \rightrightarrows (T * \varphi)(x)$ uniformemente en los compactos de $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Suponga, sin pérdida de generalidad que $\varphi = 0$ (basta reemplazar: $\varphi_n = \phi_n - \phi$). Como $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, existe un $C > 0$ y enteros k, n tales que

$$|T(\psi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq n}} \| \psi \|_{\alpha,\beta}$$

para todo $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Por lo tanto

$$|(T * \varphi_n)(x)| = |T(\tau_x \tilde{\varphi}_n)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq n}} \| \tau_x \tilde{\varphi}_n \|_{\alpha,\beta} .$$

Sin embargo, si $\| x \|_1 \leq M$, entonces

$$\begin{aligned} \| \tau_x \tilde{\varphi}_n \|_{\alpha,\beta} &= \sup_y |y^\alpha D_y^\beta \varphi_n(x-y)| \\ &\leq \sup_y |(-y+x)^\alpha||D^\beta \varphi_n(y)| \\ &\leq \sup_y \left(\sum_{i=1}^d (M + |y_i|)^{\alpha_i} \right) |D^\beta \varphi_n(y)| \\ &\to 0 \end{aligned}$$

siempre que $n \to \infty$ (pues $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$)

$$\begin{aligned} |(-y+x)^\alpha| &= \sqrt{\sum_{i=1}^d (-y_i + x_i)^{2\alpha_i}} \\ &\leq \sum_{i=1}^d (-y_i + x_i)^{\alpha_i} \\ &\leq \sum_{i=1}^d (|y_i| + |x_i|)^{\alpha_i} \\ &\leq \sum_{i=1}^d (|y_i| + M)^{\alpha_i} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(T * \varphi_n)(x) \rightrightarrows 0$$

uniformemente en $\{x : \| x \|_1 \leq M\}$, para M fijo pero arbitrario, obteniendo el resultado. $\square$

Teorema 7.18. *Sea $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, entonces*

$$(F * \varphi) * \psi = F * (\varphi * \psi).$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y

$$f_\epsilon(x) = \epsilon^d \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^d} \varphi(x - \kappa\epsilon)\psi(\kappa\epsilon).$$

Observe que la suma anterior siempre es finita, pues φ, ψ tienen soporte compacto. Más aun, $\operatorname{supp}(f_\epsilon) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(\psi)$ y $f_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (la derivación se obtiene de la fórmula de Leibniz). Más aun, utilizando la continuidad uniforme de $D^\alpha\varphi$, se obtiene que

$$D^\alpha f_\epsilon(x) = \epsilon^d \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^d} D^\alpha\varphi(x - \kappa\epsilon)\psi(\kappa\epsilon) \rightrightarrows ((D^\alpha\varphi) * \psi)(x) = D^\alpha(\varphi * \psi)(x)$$

uniformemente, siempre que $\epsilon \to 0$. Basta con tomar $\epsilon = \triangle x$ en las sumas de Riemman

$$\sum f(y_i)(x_i - x_{i-1}) \longrightarrow \int f(x)\,\mathrm{dx}$$

Obteniendo (para $d = 1$, pues en general es análogo)

$$\epsilon \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}} D^\alpha\varphi(x - \epsilon\kappa)\psi(\kappa\epsilon) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \int D^\alpha\varphi(x - y)\psi(y)dy$$

Por lo tanto $f_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi * \psi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ si $\epsilon \to 0$ y $\tau_x\tilde{f}_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}} \tau_x(\widetilde{\varphi * \psi})$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ si $\epsilon \to 0$. De lo anterior se concluye

$$\begin{aligned}
F * (\varphi * \psi)(x) &= F(\tau_x(\widetilde{\varphi * \psi})) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} F(\tau_x\tilde{f}_\epsilon) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^d \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^d} F(\varphi(x - \cdot - \kappa\epsilon)\psi(\kappa\epsilon)) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^d \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^d} (F\tau_{x-\kappa\epsilon}\tilde{\varphi})(\psi(\kappa\epsilon)) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^d \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^d} (F * \varphi)(x - \kappa\epsilon)\psi(\kappa\epsilon) \\
&= ((F * \varphi) * \psi).
\end{aligned}$$

Completando la demostración. $\square$

Corolario 7.19. *Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces*

$$(T * \varphi) * \psi = T * (\varphi * \psi)$$

Demostración. Como $\mathcal{C}_c^\infty$ es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$(teorema 5.15), entonces, existen sucesiones (ϕ_n) y (χ_n) en $\mathcal{C}_c^\infty$ tales que

$$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \ \ y \ \ \chi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi.$$

Más aun, como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, observación 5.19, $(T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$ y por el teorema anterior se obtiene

$$(T * \phi_n) * \chi_k = T * (\phi_n * \chi_k).$$

Sin embargo, $(T * \phi_n)(x) \rightrightarrows (T * \varphi)(x)$ en cualquier conjunto compacto de $\mathbb{R}^d$ y por lo tanto, para $y \in \mathbb{R}^d$ fijo

$$\begin{aligned}
((T * \phi_n) * \chi_k)(y) &= (T * \phi_n)(\tau_y \tilde{\chi_k}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (T * \phi_n)(x)\chi_k(y-x)dx \\
&\to \int_{\mathbb{R}^d} (T * \varphi)(x)\chi_k(y-x)dx \\
&\to (T * \varphi) * \chi_k(y).
\end{aligned}$$

Por otro lado, $\phi_n * \chi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi * \chi_k$ si $n \to \infty$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto

$$(T * \phi_n) * \chi_k = T * (\phi_n * \chi_k) \xrightarrow{\mathcal{S}} T * (\varphi * \chi_k).$$

Así, para cada k se tiene $(T * \phi_n) * \chi_k = T * (\varphi * \chi_k)$. Pero como $\chi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(T * \varphi) * \chi_k(y) = (T * \varphi)(\tau_y \tilde{\chi_k}) \to (T * \varphi)(\tau_y \tilde{\psi}) = (T * \varphi) * \psi(y)$$

y

$$T * (\varphi * \chi_k)(y) = T(\tau_y(\widetilde{\varphi * \chi_k})) \to T(\tau_y(\widetilde{\varphi * \psi})) = T * (\varphi * \psi)(y)$$

Por lo tanto

$$(T * \varphi) * \psi = T * (\varphi * \psi).$$

Completando la demostración. $\square$

Lema 7.20. *Se tiene la acotación:* $|\,\mathrm{e}^{-i\epsilon\lambda x} - 1| \leq |\epsilon\lambda x|$.

Demostración. Se define $y = \lambda\epsilon x$, luego

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{e}^{-iy} - 1|^2 &= ((1-\cos(y))^2 + \sin^2(y) \\ &= (1 + \cos^2(y) + \sin^2(y) - 2\cos(y)) \\ &= (2 - 2\cos(y)) \end{aligned}$$

Se define $f(y) = 2(1-\cos(y)) - y^2$, queremos demostrar que $f(y) \leq 0$. Luego

$$f'(y) = 2\sin(y) - 2y = 2\frac{\sin(y)}{y} - 2 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

y

$$f''(y) = 2(\cos(y) - 1) \leq 0.$$

Por lo tanto f es cóncava y como el único máximo de f es $y = 0$, $f(0) = 0$, entonces $f \leq 0$, obteniendo el resultado. □

Teorema 7.21. *Sea* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,\mathrm{dx} = 1$ *y para* $\epsilon \neq 0$ *se define* $\psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\psi(x/\epsilon)$. *Entonces, para todo* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\psi_\epsilon * \varphi \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ *en* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, *siempre que* $\epsilon \to 0$.

Demostración. Basta con demostrar que $(\widehat{\psi_\epsilon * \varphi}) \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\varphi}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (pues el resultado se obtiene tomando la inversa de Fourier). Sin embargo, se tiene

$$(\widehat{\psi_\epsilon * \varphi}) = (2\pi)^{d/2}\hat{\psi}_\epsilon\hat{\varphi}$$

por lo tanto, basta con demostrar

$$((2\pi)^{d/2}\hat{\psi}_\epsilon - 1)\hat{\varphi} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$$

en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, siempre que $\epsilon \to 0$.
Utilizando la fórmula de Leibniz y el hecho que $\lambda^\alpha D^\beta\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$, es suficiente con demostrar que

$$(D^\alpha((2\pi)^{d/2}\hat{\psi}_\epsilon - 1))\phi \rightrightarrows 0$$

uniformemente en $\mathbb{R}^d$, siempre que $\epsilon \to 0$, para cualquier $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$.
Observe que

$$\hat{\psi}_\epsilon(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\lambda x}\psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\frac{1}{\epsilon^d}\,\mathrm{dx} = \hat{\psi}(\epsilon\lambda).$$

Por lo tanto $\hat{\psi}_\epsilon(\lambda) \to \hat{\psi}(0) = (2\pi)^{-d/2}$, siempre que $\epsilon \to 0$.
Se consideran dos casos:

1. Suponga $|\alpha| = 0$, fijando $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\begin{aligned}
|(D^\alpha (2\pi)^{d/2}\hat{\psi}_\epsilon(\lambda) - 1)\phi(\lambda)| &= |((2\pi)^{d/2}\hat{\psi}(\epsilon\lambda) - 1)\phi(\lambda)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)(\mathrm{e}^{-i\epsilon\lambda x} - 1)\,\mathrm{dx}\,\phi(\lambda) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(x)||\epsilon\lambda x|\,\mathrm{dx}\,|\phi(\lambda)| \\
&= \epsilon \int_{\mathbb{R}^d} |x\psi(x)|\,\mathrm{dx}\,|\lambda\phi(\lambda)| \\
&< \epsilon M
\end{aligned}$$

   para una constante $M > 0$ independiente de λ y por lo demostrado en 7.20. Por lo tanto
   $((2\pi)^{d/2}\hat{\psi}_\epsilon(\lambda) - 1)\phi(\lambda) \to 0$ uniformemente en λ, siempre que $\epsilon \to 0$.

2. Suponga $|\alpha| > 0$. Para un $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, se tiene

$$\begin{aligned}
|(D^\alpha((2\pi)^{n/2}\hat{\psi}_\epsilon - 1))(\lambda)\phi(\lambda)| &= |(2\pi)^{d/2}\epsilon^{|\alpha|}(D^\alpha\hat{\psi})(\epsilon\lambda)\phi(\lambda)| \\
&< \epsilon^{|\alpha|}M'
\end{aligned}$$

   para una constante $M' > 0$, dado que $D^\alpha\hat{\psi}, \phi$ están acotados en $\mathbb{R}^d$.

Obteniendo el resultado. □

Teorema 7.22. *Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ con $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathrm{dx} = 1$. Entonces, $T * \varphi_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ siempre que $\epsilon \to 0$, donde*

$$\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\varphi(x/\epsilon).$$

Si $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ y $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ con $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,\mathrm{dx} = 1$, entonces $F * \psi \xrightarrow{\mathcal{D}'} F$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ siempre que $\epsilon \to 0$, donde

$$\psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\psi(x/\epsilon).$$

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} (T * \varphi_\epsilon)(\phi) & = & (T * \varphi_\epsilon) * \tilde{\phi}(0) \\ & = & T * (\varphi_\epsilon * \tilde{\phi})(0) \\ & \underset{\epsilon \to 0}{\to} & T * \tilde{\phi}(0), \textit{ por el teorema anterior,} \\ & = T(\phi). & \end{array}$$

Obteniendo la primera parte del teorema.

Observe que para un $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dado y $0 < \epsilon < 1$, el soporte de $\psi_\epsilon * \chi$ y el de χ estan en el mismo conjunto compacto (independiente de ϵ). Pues, para $\epsilon \to 0$, $\operatorname{supp}(\psi_\epsilon) \subset \operatorname{supp}(\psi)$, por lo tanto: $\operatorname{supp}(\chi * \psi_\epsilon) \subset \operatorname{supp}(\chi * \psi) \subset \operatorname{supp}(\chi) + \operatorname{supp}(\psi) \subset K$ (con K independiente de ϵ).
Por lo tanto $\psi_\epsilon * \chi \to \chi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ siempre que $\epsilon \to 0$. Con un argumento análogo al anterior, se obtiene, que para cualquier $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ y $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $(F * \psi_\epsilon)(\chi) \to F(\chi)$ siempre que $\epsilon \to 0$, lo que implica $F * \psi_\epsilon \xrightarrow{\mathcal{D}'} F$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. □

Observación 7.23. La función infinitamente diferenciable $T * \varphi_\epsilon$ es llamada la *regularización* de T. En ocasiones es más sencillo trabajar con la regularización que con T, sin embargo al final es necesario tomar el límite $\epsilon \to 0$ para recuperar la distribución.

En este punto vale la pena observar que, para todo $u \in L^p$, u define una distribución temperada, y por el teorema 7.22, las funciones infinitamente diferenciables son densas en L^p. La demostración que $u \in \mathcal{S}'$ si $u \in L^p$ es análoga al caso $u \in L^2$ (teorema 4.16); más aun, por el teorema 7.16, $u * \psi_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty$ así, al aplicar el teorema anterior se obtiene lo afirmado.

Teorema 7.24.
1. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, es decir, para cualquier $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ existe una sucesión (φ_n) en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} F$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

2. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, es decir, para cualquier $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, existe una sucesión (ψ_n) en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*

Demostración. 1. Sea $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ fijo, y $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\int \phi(x)\,\mathrm{dx} = 1$ y $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\phi(x/\epsilon)$. Para $n \in \mathbb{Z}$ y $t \geq 0$, sea la función $\lambda_n(t)$ tal que para $0 \leq t \leq n$, $\lambda_n(t) = 1$, para $t \geq n+1$ $\lambda_n(t) = 0$ y para $n \leq t \leq n+1$ la función decrece independientemente del n; más aun λ_n es continua para todo n.

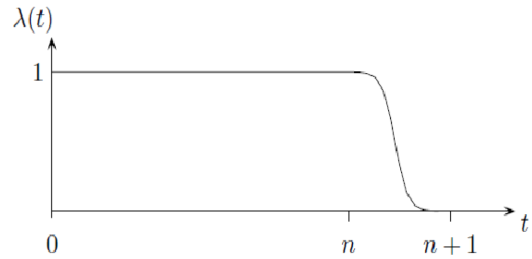

Figura 7.1: $\lambda_n(t)$

Para $x \in \mathbb{R}^d$, sea $\gamma_n(x) = \lambda_n(|x|)$. $\gamma_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\gamma_n(x) = 1$ para $|x| \leq n$ y $\gamma_n(x) = 0$ para $|x| \geq n+1$. Más aun, $\gamma_n F$ tiene soporte compacto y por lo tanto $\gamma_n F * \phi_{1/n} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Se afirma que $\gamma_n F * \phi_{1/n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} F$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, siempre que $n \to \infty$. Pues:
para $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ se tiene

$$\begin{aligned}
(\gamma_n F * \phi_{1/n})(\chi) &= (\gamma_n F * \phi_{1/n}) * \tilde{\chi}(0) \\
&= \gamma_n F * (\phi_{1/n} * \tilde{\chi})(0) \\
&= \gamma_n F(\widetilde{\phi_{1/n}} * \chi) \\
&= F(\gamma_n(\widetilde{\phi_{1/n}} * \chi)) \\
&= F(\widetilde{\phi_{1/n}} * \chi), \ \textit{para un } n \textit{ suficientemente grande} \\
&= F(\widetilde{\phi_{1/n} * \tilde{\chi}}) \\
&\to F(\tilde{\tilde{\chi}}) \\
&= F(\chi),
\end{aligned}$$

como se afirmó.

2. Las funciones λ_n se suponen suaves y además de obedecer todas las propiedades descritas anteriormente se supone $\lambda_{n+1}(t) = \lambda_n(t-1)$ para $n+1 \leq t \leq n+2$. Así, mientras n se hace más grande, el gráfico de λ_n se "alarga" pero mantiene su forma general cuando decrece de 1 a 0. Por esta razón λ_n y cualquiera de sus derivadas están acotadas, independientemente del n. Así, para todo $k = 0, 1, 2, \cdots$ existe un $M_k > 0$ tal que $\sup_n \sup_{t\geq 0} |\lambda_n^{(k)}| < M_k$.
   Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces, con la misma notación del numeral anterior, $\gamma_n T * \phi_{1/n} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ y se afirma que $\gamma_n T * \phi_{1/n} \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ siempre que $n \to \infty$. Pues

   $\gamma_n(\phi_{1/n} * \psi) \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\| \gamma_n(\phi_{1/n} * \psi) - \psi \|_{\alpha,\beta} \leq \| \gamma_n(\phi_{1/n} * \psi - \psi) \|_{\alpha,\beta} + \| \gamma_n\psi - \psi \|_{\alpha,\beta}$$

   para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$, estudiando cada término por separado:
   $\| \gamma_n(\phi_{1/n} * \psi - \psi) \|_{\alpha,\beta} = \sup_x |x^\alpha D^\beta \gamma_n(\phi_{1/n} * \psi - \psi)|$. Pero observe que, por la fórmula de Leibniz

$$\begin{aligned} D^\beta \gamma_n(\phi_{1/n} * \psi - \psi)(x) &= \sum_{k\leq\beta} \binom{\beta}{k} \gamma_n^{(\beta-k)}(x)(\phi_{1/n} * \psi - \psi)^{(k)}(x) \\ &\underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k\leq\beta} \binom{\beta}{k} \gamma_n^{(\beta-k)}(x)(\psi - \psi)^{(k)}(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Pues $\phi_{1/n} * \psi \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (por el teorema 7.21). Así, $\| \gamma_n(\phi_{1/n} * \psi - \psi) \|_{\alpha,\beta} \to 0$.
   De forma análoga

$$\begin{aligned} \| \gamma_n\psi - \psi \|_{\alpha,\beta} &= \sup_x |x^\alpha D^\beta(\gamma_n(\psi) - \psi)| \\ &= \sup_x |x^\alpha(D^\beta(\gamma_n(\psi)) - D^\beta(\psi))| \\ &\underset{n\to\infty}{\to} \sup_x |x^\alpha(D^\beta(\psi) - D^\beta(\psi))| \\ &= 0. \end{aligned}$$

De forma similar, $\gamma_n(\widetilde{\phi_{1/n} * \tilde{\psi}}) \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}(\gamma_n T * \phi_{1/n})(\psi) &= T(\gamma_n(\widetilde{\phi_{1/n} * \tilde{\psi}})), \text{ *como en la primera parte*} \\ &\to T(\psi),\end{aligned}$$

siempre que $n \to \infty$, es decir $\gamma_n T * \phi_{1/n} \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Completando la prueba. □

Observación 7.25. El resultado anterior permite explicar el enfoque secuencial de las distribuciones, de esta manera muchas de las propiedades de las distribuciones son demostradas a partir de sucesiones de funciones “que se comportan bien”.

Teorema 7.26. *Para cualquier $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces*

1. $\mathcal{F}(T * \varphi) = (2\pi)^{d/2}\mathcal{F}\varphi\mathcal{F}T$.
2. $\mathcal{F}T * \mathcal{F}\varphi = (2\pi)^{d/2}\mathcal{F}(\varphi T)$.

Demostración. 1. Existe una sucesión $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tal que $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Para $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, se tiene

$$\begin{aligned}(\widehat{T * \varphi})(\psi) &= (T * \varphi)(\hat{\psi}) = (T * \varphi) * \tilde{\hat{\psi}}(0) \\ &= T * (\varphi * \tilde{\hat{\psi}})(0) = T((\widetilde{\varphi * \tilde{\hat{\psi}}})) \\ &= T(\tilde{\varphi} * \hat{\psi}) \\ &= \lim_n \phi_n(\tilde{\varphi} * \hat{\psi}) = \lim_n \phi_n * (\varphi * \tilde{\hat{\psi}})(0) \\ &= \lim_n (\phi_n * \varphi)(\hat{\psi}) = \lim_n (\widehat{\phi_n * \varphi})(\psi) \\ &= (2\pi)^{d/2} \lim_n (\hat{\phi_n}\hat{\varphi})(\psi) = (2\pi)^{d/2} \lim_n \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\phi_n}(x)\hat{\varphi}(x)\psi(x)\,\mathrm{dx} \\ &= (2\pi)^{d/2} \lim_n \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x)\widehat{(\hat{\varphi}\psi)}(x)\,\mathrm{dx} \\ &= (2\pi)^{d/2} T\widehat{(\hat{\varphi}\psi)} = (2\pi)^{d/2}\hat{T}(\hat{\varphi}\psi) \\ &= (2\pi)^{d/2}(\hat{\varphi}\hat{T})(\psi),\end{aligned}$$

observe que la integral se puede cambiar con el límite utilizando el corolario 2.31 en los preliminares y el hecho que $\phi_n\widehat{(\hat{\varphi}\psi)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Por lo tanto hemos demostrado $\widehat{T * \varphi} = (2\pi)^{d/2}\hat{\varphi}\hat{T}$.

2. Sea $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, luego

$$\begin{aligned}(\hat{T} * \hat{\varphi})(\psi) &= (\hat{T} * \hat{\varphi}) * (\tilde{\psi})(0) \\ &= (\hat{T}) * (\hat{\varphi} * \tilde{\psi})(0) = \hat{T}(\tilde{\hat{\varphi}} * \psi) \\ &= T(\widehat{\tilde{\hat{\varphi}} * \psi}) = (2\pi)^{d/2} T(\widehat{\tilde{\hat{\varphi}}}\hat{\psi}) \\ &= (2\pi)^{d/2}\widehat{\tilde{\hat{\varphi}}} T(\hat{\psi}) = (2\pi)^{d/2}(\widehat{\widehat{\tilde{\hat{\varphi}}} T})(\psi)\end{aligned}$$

Pero, como $\check{\varphi} = \hat{\varphi}(-x) = \tilde{\hat{\varphi}}$, luego: $\widehat{\tilde{\hat{\varphi}}} = \widehat{\check{\varphi}} = \varphi$, pues $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Así se obtiene

$$(\hat{T} * \hat{\varphi})(\psi) = (2\pi)^{d/2}\widehat{(\varphi T)}(\psi).$$

Obteniendo el resultado. $\square$

Capítulo 8

Teoremas de Estructura para las Distribuciones

Por la definición de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, cualquier función continua polinómicamente acotada determina una distribución temperada (teorema 5.23). Se demostrará que dichas funciones **generan** $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 8.1. *Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Entonces existe una función continua polinómicamente acotada, $\Phi(x)$, y un multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ tal que $T = D^\alpha \Phi$.*

Demostración. Veamos el caso $d = 1$. Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ fijo, entonces, existen $k, m \in \mathbb{Z}_+$ y $C > 0$ tales que

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{\alpha \leq k;\, \beta \leq m} \| \varphi \|_{\alpha,\beta}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Se sigue que existe un $C' > 0$ tal que

$$|T(\varphi)| \leq C' \sum_{\beta \leq m} \sup_x |(1 + x^2)^k D^\beta \varphi(x)|,$$

pues

$$\begin{aligned} |T(\varphi)| &\leq C \sum_{\alpha \leq k;\, \beta \leq m} \| \varphi \|_{\alpha,\beta} \\ &= C \left(\sum_{\beta \leq m} \sum_{\alpha \leq k-1} \sup_x |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| + \sum_{\beta \leq m} \sup_x |x^k D^\beta \varphi(x)| \right) \\ &\leq C' \sum_{\beta \leq m} \sup_x |(1 + x^2)^k D^\beta \varphi(x)| \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (ya que $x^k \leq (1+x^2)^k$). Ahora, si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, entonces $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi'(t)dt$ y por lo tanto

$$|\phi(x)| \leq \int_{-\infty}^{x} |\phi'(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi'(t)|dt = \| \phi' \|_{L^1}.$$

Por lo tanto, para cualquier $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\sup_x |\phi(x)| \leq \| \phi' \|_{L^1}$. Obteniendo

$$|T(\phi)| \leq C' \sum_{\beta \leq m} \| D((1+x^2)^k D^\beta \phi(x)) \|_{L^1}$$

pues $(1+x^2)D^\beta \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, siempre que $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Utilizando la desigualdad

$$D(1+x^2)^k = 2xk(1+x^2)^{k-1} \leq k(1+x^2)^k$$

observe que la desigualdad anterior se tiene pues

$$2x - x^2 - 1 = -(x-1)^2 \leq 0$$

para todo x, por lo tanto $2x \leq x^2 + 1$, para todo x. Así, se obtiene

$$|D((1+x^2)^k D^\beta \phi(x))| \leq k|(1+x^2)^k D^\beta \phi(x)| + |(1+x^2)^k D^{\beta+1} \phi(x)|.$$

Más aun, existe un $C'' > 0$ tal que

$$|T(\phi)| \leq C'' \sum_{j \leq m+1} \|(1+x^2)^k D^j \phi(x) \|_{L^1} \tag{8.1}$$

para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Sea $J : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R}) \times \cdots \times L^1(\mathbb{R})$ (con $m+2$ términos), el mapa dado por

$$J(\phi) = ((1+x^2)^k \phi(x), (1+x^2)^k D\phi(x), \cdots (1+x^2)^k D^{m+1} \phi(x)).$$

Observe que $J(\phi)$ es inyectivo, pues si $J(\phi) = J(\chi)$, entonces, todas las componentes son iguales, en particular $(1+x^2)^k \phi(x) = (1+x^2)^k \chi(x)$, obteniendo $\phi = \chi$. Más aun, J es un mapa lineal

$$\begin{aligned} J(a\phi + b\chi) &= ((1+x^2)^k (a\phi(x) + b\chi(x)), \cdots, (1+x^2)^k (a\phi(x) + b\chi(x))) \\ &= a((1+x^2)^k \phi(x), \cdots, (1+x^2)^k \phi(x)) \\ &+ b((1+x^2)^k \chi(x), \cdots, (1+x^2)^k \chi(x)) \\ &= aJ(\phi) + bJ(\chi). \end{aligned}$$

Así, se define el mapa $\Lambda : J(\mathcal{D}(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}$ como

$$\Lambda(J(\phi)) = T(\phi).$$

Observe que Λ está bien definida, pues $J(\phi)$ está determinada únicamente por ϕ y es lineal

$$\Lambda(aJ(\phi) + bJ(\chi)) = T(a\phi + b\chi) = aT(\phi) + bT(\chi) = a\Lambda(J(\phi)) + b\Lambda(J(\chi)).$$

Más aun, la acotación implica que Λ es un funcional lineal acotado sobre $J(\mathcal{D}(\mathbb{R})) \subset (L^1(\mathbb{R}))^{m+2}$.
Por el teorema de Hahn-Banach, (2.21), Λ tiene una extensión a un funcional lineal acotado en todo $(L^1(\mathbb{R}))^{m+2}$. Más aun, por el teorema de representación de Riesz,(2.22), Λ es de la forma

$$\Lambda(g_0 \oplus g_1 \oplus \cdots \oplus g_{m+1}) = \sum_{j=0}^{m+1} \int_{\mathbb{R}} g_j(x) h_j(x) \,\mathrm{dx}$$

para $h_0, \cdots, h_{m+1} \in L^\infty(\mathbb{R})$ (pues, para $p = 1$, el exponente conjugado es $q = \infty$). Por lo tanto

$$T(\phi) = \Lambda(J(\phi)) = \sum_{j=0}^{m+1} \int_{\mathbb{R}} h_j(x)(1 + x^2)^k D^j \phi(x) \,\mathrm{dx}\,.$$

Como distribución esto es

$$T = \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j D^j((1 + x^2)^k h_j(x))$$

en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pero como $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es denso $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, por 5.15, por lo tanto T tiene la misma forma en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Así, para cada j, se define

$$\theta_j(x) = \int_0^x (1 + t^2)^k h_j(t) dt.$$

θ_j es continua y polinómicamente acotada, pues
Es polinómicamente acotada, pues como $h_j \in L^\infty$, h_j es acotada y por lo tanto

$$\theta_j(x) = \int_0^x (1 + t^2)^k h_j(t) dt \leq M \int_0^x (1 + t^2)^k dt = Mp(1 + x^2)$$

donde p es un polinomio.
Como $\theta_j(x)$ es polinómicamente acotada, para todo x, y tal que $|x-y| < \delta$

$$|\theta(x) - \theta(y)| \leq M|p(x) - p(y)| < \epsilon$$

pues p es continua.
Además

$$T = \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j D^{j+1} \theta_j.$$

Para obtener la forma de T, basta con definir

$$v_j(x) = \int_0^x dt_{m+1-j} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \theta_j(t_1)$$

es decir integrar θ_j, $(m+1-j)$ veces.
Entonces, v_j es continua, polinómicamente acotada (por un procedimiento análogo al utilizado para θ_j) y $D^{m+2} v_j(x) = D^{j+1}\theta_j$

$$D^{m+2} v_j = D^{j+1} D^{m+1-j} v_j = D^{j+1} \theta_j$$

y por lo tanto

$$T = \sum_{j \leq m+1} (-1)^j D^{m+2} v_j = D^{m+2} \left(\sum_{j \leq m+1} (-1)^j v_j \right).$$

Definiendo $\Phi(x) = \sum_{j \leq m+1} (-1)^j v_j(x)$ (observe que Φ es la suma, finita, de funciones continuas y polinómicamente acotadas), entonces, Φ es continua, polinómicamente acotada y $T = D^{m+2}\Phi$. □

Teorema 8.2. *Sea $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces, para cualquier $K \subset \Omega$ compacto, existe una función continua Φ y un multi-índice α tal que $F = D^\alpha \Phi$ en $\mathcal{D}(K)$.*

Demostración. Sea $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $K \subset \Omega$ con K compacto. Sea $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $K \subset W \subset \operatorname{supp}(\chi)$, para algún abierto W con $\chi = 1$ en W (5.13). Entonces $F = \chi F$ en $\mathcal{D}(K)$. Sin embargo, χF tiene soporte compacto y por lo tanto define una distribución temperada y tiene la forma $\chi F = D^\alpha \Phi$ para alguna función continua Φ y $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$. Así, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(K)$

$$F(\varphi) = \chi F(\varphi) = D^\alpha \Phi(\varphi),$$

obteniendo el resultado. □

Capítulo 9

Aplicaciones

Una vez expuestos los aspectos centrales de las distribuciones, es en particular interesante observar sus aplicaciones.

9.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)

Como motivación, suponga la ecuación diferencial $u' = H$, donde H es la función de Heaviside definida en 5.6. Observe que la solución para esta EDP sería

$$u(x) = \begin{cases} a, & x < 0 \\ x + b, & x > 0 \end{cases}$$

por lo tanto $u(x) = x + a$, para garantizar la continuidad de u en $x = 0$. Y por lo tanto

$$u(x) = \begin{cases} a, & x < 0 \\ x + a, & x \geq 0 \end{cases}$$

Sin embargo, u no es diferenciable en $x = 0$ (pues $\lim_{x \to x_0^-} u'(x) = 0$, pero $\lim_{x \to x_0^+} u'(x) = 1$). A pesar de lo anterior, si se toma $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, se puede verificar que $u'(\varphi) = H(\varphi)$

$$\begin{aligned}
u'(\varphi) &= -u(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\
&= -\int_{-\infty}^{0} a\varphi'(x)\,\mathrm{dx} - \int_{0}^{\infty} (x+a)\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\
&= -a\varphi(0) + a\varphi(0) - \int_{0}^{\infty} x\varphi'(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{dx} \quad \textit{Integrando por partes} \\
&= \int_{\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)\,\mathrm{dx} \\
&= H(\varphi).
\end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que en algunos casos (posteriormente se mostrarán otros) la solución clásica de la EDP no satisface la regularidad impuesta por esta; sin embargo, la solución débil (solución en distribuciones) sí satisface dicha regularidad.

Definición 9.1. Una distribución $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ que satisface una ecuación diferencial parcial $P(D)E = \delta$ es llamada solución fundamental para el operador diferencial parcial $P(D)$.

Las soluciones fundamentales son particularmente importantes en la solución de EPD no homogéneas, de la forma $P(D)u = \varphi$, con $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$: Sea $\phi = E * \varphi$, donde E es una solución fundamental para $P(D)$, entonces $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ y

$$\begin{aligned}
P(D)\phi &= P(D)(E * \varphi) \\
&= (P(D)E) * \varphi \\
&= \delta * \varphi \\
&= \varphi,
\end{aligned}$$

por lo tanto $E * \varphi$ es una solución. Gracias a lo anterior, se puede determinar la solución de ecuaciones como:

Ejemplo 9.2 (Ecuación Diferencial Ordinaria de Orden n)**.** Considere la ecuación diferencial ordinaria (con $d = 1$) homogénea

$$a_0\varphi^{(n)} + a_1\varphi^{(n-1)} + \cdots + a_0\varphi^{(n)} = 0$$

Con condiciones iniciales

$$\theta(0) = \theta'(0) = \cdots = \theta^{(n-2)}(0) = 0; \quad \theta^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}.$$

Suponga $\omega = \theta H$, donde θ es una solución de la ecuación homogénea. Entonces

$$\begin{aligned} D\omega &= (D\theta)H + \theta(0)DH = (D\theta)H \\ D^2\omega &= D[(D\theta)H] = (D^2\theta)H + (D\theta)(0)D^2H = (D^2\theta)H \\ &\vdots \\ D^{n-1}\omega &= (D^{n-1}\theta)H \\ D^n\omega &= (D^n\theta)H + \frac{1}{a_0}\delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} a_0 D^n\omega + a_1 D^{n-1}\omega + \cdots + a_n\omega &= a_0\left[(D^n\theta)H + \frac{1}{a_0}\delta\right] \\ &\quad + a_1(D^{n-1}\theta)H + \cdots + a_n(\theta)Y \\ &= \delta + H\left(\sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i}\theta\right) \\ &= 0H + \delta \\ &= \delta \end{aligned}$$

Observe que lo anterior es equivalente a

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \delta^{(n-i)}\right) * \omega = \delta.$$

Por lo tanto, para cualquier ecuación no homogénea de la forma

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i}\varphi = g$$

la solución está dada por $\varphi = \omega * g$, donde ω es la solución fundamental. En específico, sea

$$(D - \alpha)\varphi = g,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, entonces, la solución para la ecuación homogénea asociada está dada por

$$\theta(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$$

por lo tanto, la solución para esta ecuación diferencial es

$$\varphi = \theta H * g(x).$$

Ejemplo 9.3 (Ecuación de Poisson)**.** Sea $\Delta u = g$, en $\mathbb{R}^3$, entonces la solución fundamental para Δ es

$$E = -\frac{1}{4\pi|x|}$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, entonces

$$\begin{aligned}
(\Delta E)(\varphi) &= E(\Delta\varphi) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \Delta\varphi \, \mathrm{dx}_1 \, \mathrm{dx}_2 \, \mathrm{dx}_3 \\
&= -\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi r} \Delta\varphi r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi \\
&= -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{r \geq \epsilon} \frac{1}{4\pi r} (\Delta\varphi) r^2 dr dS
\end{aligned}$$

donde $dS = \sin\phi d\phi d\theta$. Integrando por partes, con respecto a r se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{r\geq\epsilon} E(r) r^2 \Delta\varphi dr &= E(r) r^2 \partial_r \varphi|_\epsilon^\infty - \int_{r\geq\epsilon} \partial_r (E(r) r^2) \partial_r \varphi dr \\
&= E(r) r^2 \partial_r \varphi|_\epsilon^\infty - \partial_r E(r) r^2 \varphi|_\epsilon^\infty + \int_{r\geq\epsilon} \Delta(E(r) r^2) \varphi dr \\
&= -E(\epsilon)(\epsilon)^2 (\partial_r \varphi)(\epsilon) + \partial_r (E(\epsilon))(\epsilon)^2 \varphi(\epsilon) \\
&+ \int_{r\geq\epsilon} \Delta(E(r) r^2) \varphi dr.
\end{aligned}$$

Sin embargo $\Delta E(x) = 0$, para todo $x \neq 0$. Por lo tanto

$$(\Delta E)(\varphi) = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \iint_{r=\epsilon} E(r) r^2 \partial_r \varphi dS - \iint_{r=\epsilon} \varphi \partial_r (E(r) r^2) dS \right\}.$$

Pero observe que

$$\iint_{r=\epsilon} E(r)r^2\partial_r\varphi dS \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

pues

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\iint_{r=\epsilon} E(r)r^2\partial_r\varphi dS &= \lim_{\epsilon\to 0}\iint \frac{1}{4\pi r}r^2\partial_r\varphi dS \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\iint \frac{1}{4\pi}r\partial_r\varphi dS \\
&= \iint \frac{1}{4\pi}0\partial_r\varphi dS
\end{aligned}$$

pero como $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, entonces φ es acotado, al igual que $\partial_r\varphi$, obteniendo lo afirmado.
Ahora

$$\partial_r(E(r)r^2) = \left(-\frac{1}{4\pi r}r^2\right)' = \left(\frac{1}{4\pi r^2}r^2\right) - \left(\frac{1}{4\pi r}2r\right) = -\left(\frac{1}{4\pi}\right).$$

Además

$$\iint dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(\phi)d\phi d\theta = 2\pi(-\cos(\phi))|_0^{\pi} = 2\pi(2) = 4\pi$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\iint_{r=\epsilon}\varphi(r,\theta,\phi)\partial_r(E(r)r^2)dS &= -\lim_{\epsilon\to 0}\iint_{r=\epsilon}\varphi(r,\theta,\phi)\frac{1}{4\pi}dS \\
&= -\left(\iint \varphi(0)\frac{1}{4\pi}dS\right) \\
&- \left(\frac{1}{4\pi}\iint(\varphi(0)-\varphi(r,\theta,\phi))dS\right) \\
&= -\left(\frac{\varphi(0)}{4\pi}4\pi + \frac{1}{4\pi}\iint 0dS\right) \\
&= -\varphi(0),
\end{aligned}$$

lo anterior es cierto, pues φ es continua en 0 y si $x \to 0$, $(r \to 0)$ y por lo tanto $(r,\theta,\phi) \to (0,0,0) = 0$. Por lo tanto, se obtiene

$$(\Delta E)(\varphi) = \varphi(0)$$

para cualquier $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Esto es

$$\Delta E = \delta$$

Obteniendo así el resultado.

Veamos otra forma de obtener la solución para la ecuación de Poisson.

Lema 9.4. *Se tiene*

$$\mathcal{F}\left(\frac{c}{|x|^\alpha}\right) = \frac{1}{|\xi|^{d-\alpha}}$$

con $0 < \alpha < d$.

Demostración. Consideremos el caso $d = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right) &= c\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi}\,\frac{1}{|x|^\alpha}\,\mathrm{dx} \\
&= c\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ix\xi}\,\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{dx} + c\int_0^\infty \mathrm{e}^{ix\xi}\,\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{dx} \\
&= c\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}+\mathrm{e}^{ix\xi}}{x^\alpha}\,\mathrm{dx} \\
&= 2c\int_0^\infty \frac{\cos(x\xi)}{x^\alpha}\,\mathrm{dx} \;\; (definiendo\;\; y = x\xi) \\
&= 2c\int_0^\infty \frac{\cos(y)}{y^\alpha}\xi^\alpha\frac{dy}{\xi} \\
&= 2c\xi^{\alpha-1}\int_0^\infty \frac{\cos(y)}{y^\alpha}dy \\
&= 2c\xi^{\alpha-1}\left(\int_0^1 \frac{\cos(y)}{y^\alpha}dy + \int_1^\infty \frac{\cos(y)}{y^\alpha}dy\right) \\
&= 2c\xi^{\alpha-1}\left(I_1 + I_2\right) \\
&= 2c\frac{1}{\xi^{1-\alpha}}\left(I_1 + I_2\right)
\end{aligned}$$

.

Como $\alpha < 1$, $I_1 < \infty$, ahora consideremos I_2

$$I_2 = \frac{\sin(y)}{y^\alpha}\Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\sin(y)}{y^{\alpha+1}}dy$$

y como $1+\alpha > d$, $I_2 < \infty$. El caso general es similar. Obteniendo el resultado.

□

En este lema c es una constante que depende de la defnción de la transformada de Fourier, pues algunos autores, [10] optan por definir

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x)\, \mathrm{dx}\,.$$

Ejemplo 9.5 (Continuación de la Ecuación de Poisson)**.** Considere la ecuación

$$-\Delta u = f$$

Vemos que $u = \Phi * f$, donde

$$\Phi = \frac{1}{|x|^{d-2}},$$

y $d > 2$. Observe que por el teorema 6.18, se tiene

$$\mathcal{F}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)(\xi) = -(i\xi_i)^2 \hat{u}(\xi) = \xi_i^2 \hat{u}(\xi).$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}\left(-\Delta u\right) = (\sum_{i=1}^{d} \xi_i)\hat{u}(\xi) = |\xi|^2 \hat{f}(\xi),$$

lo que es equivalente a

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} \\ &= \hat{f}(\xi) \cdot \mathcal{F}\left(\frac{1}{|\xi|^{d-2}}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto al aplicar la transformada inversa y el teorema 7.2 se obtiene

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\left(f * \Phi\right)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} f * \Phi. \end{aligned}$$

Ejemplo 9.6 (Ecuación del Calor)**.** El operador del calor está dado por

$$P(D) = \partial_t - \Delta$$

donde Δ es el Laplaciano en $\mathbb{R}^d$. Entonces si

$$E(x,t) = H(t)\frac{1}{2^d}\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\,\mathrm{e}^{-|x|^2/4t}$$

satisface $P(D)E = 0$ en $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}\setminus\{0\})$, E es la solución fundamental para $P(D)$.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$. Entonces, definiendo $A = (P(D)E)(\varphi)$

$$\begin{aligned}
A &= ((\partial_t - \Delta)E)(\varphi) \\
&= -E((\partial_t + \Delta)\varphi) \\
&= -\int E(x,t)(\partial_t\varphi + \Delta\varphi)\,\mathrm{dx}\,dt \quad \textit{pues } E \textit{ es localmente integrable}, \\
&= -\int \lim_{\epsilon\to 0}\int_{t\geq\epsilon} E(x,t)(\partial_t\varphi + \Delta\varphi)dt\,\mathrm{dx} \\
&= -\int \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{t\geq\epsilon} E(x,t)\partial_t\varphi + \int_{t\geq\epsilon} E(x,t)\Delta\varphi dt\right)\mathrm{dx} \\
&= -\int \lim_{\epsilon\to 0}\left(-E(x,\epsilon)\varphi(x,\epsilon) - \int_{t\geq\epsilon}\partial_t E(x,t)\varphi + \int_{t\geq\epsilon}\Delta E(x,t)\varphi dt\right)\mathrm{dx} \\
&= -\int \lim_{\epsilon\to 0}\left(-E(x,\epsilon)\varphi(x,\epsilon)\right)\mathrm{dx} \\
&= \int \lim_{\epsilon\to 0}\left(E(x,\epsilon)\varphi(x,\epsilon)\right)\mathrm{dx},
\end{aligned}$$

ahora, definiendo el cambio de variables: $x = 2\epsilon^{1/2}y$, se obtiene: $|x|^2 = 4\epsilon|y|^2$, $y = \frac{x}{2\epsilon^{1/2}}$ y $\mathrm{dx} = 2^d\epsilon^{d/2}dy$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
(P(D)E)(\varphi) &= \frac{1}{(\pi)^{d/2}}\int \lim_{\epsilon\to 0}\left(\mathrm{e}^{|y|^2}\,\varphi(2\epsilon^{1/2}y,\epsilon)\right)dy \\
&= \frac{1}{(\pi)^{d/2}}\varphi(0)\int \mathrm{e}^{|y|^2}\,dy \\
&= \frac{1}{(\pi)^{d/2}}\varphi(0)(\pi)^{d/2} \\
&= \varphi(0) \\
&= \delta(\varphi).
\end{aligned}$$

Obteniendo así $P(D)E = \delta$.

Ejemplo 9.7 (Ecuación de Onda)**.** La ecuación de onda está dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = k^2\Delta_x u(x,t),$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^d$ (para este ejemplo se considerará $d = 1$). Además se cuenta con las condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x), \ \ y \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),$$

donde $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Utilizando la transformada de Fourier, en la ecuación original, se obtiene

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}_x(u)(\xi,t) = -k^2|\xi|^2\mathcal{F}_x(u)(\xi,t)$$

y de las condiciones iniciales

$$\mathcal{F}_x(u)(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \ \ y \ \ \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}_x(u)(\xi,0) = \hat{g}(x).$$

Observe que la ecucación anterior puede ser estudiada como una ecuación diferencial de una sola variable $t \in \mathbb{R}$, por lo tanto, utilizando los métodos usuales de solución se obtiene la solución general para la ecuación diferencial

$$c_1(\xi)\cos(kt|\xi|) + c_2(\xi)\sin(kt|\xi|),$$

pues,

$$\begin{aligned}(c_1(\xi)\cos(kt|\xi|) + c_2(\xi)\sin(kt|\xi|))' &= -ktc_1(\xi)\sin(kt|\xi|)\\ &\quad + ktc_2(\xi)\cos(kt|\xi|)\\ (c_1(\xi)\cos(kt|\xi|) + c_2(\xi)\sin(kt|\xi|))'' &= -k^2t^2c_1(\xi)\cos(kt|\xi|)\\ &\quad + k^2t^2c_2(\xi)\cos(kt|\xi|)\end{aligned}$$

obteniendo

$$\begin{aligned}(c_1(\xi)\cos(kt|\xi|) &+ c_2(\xi)\sin(kt|\xi|))''\\ &+ k^2t^2c_1(\xi)\cos(kt|\xi|) + c_2(\xi)\sin(kt|\xi|)\\ &= -k^2t^2c_1(\xi)\cos(kt|\xi|) + k^2t^2c_2(x)\cos(kt|\xi|)\\ &+ k^2t^2c_1(\xi)\cos(kt|\xi|) + c_2(\xi)\sin(kt|\xi|)\\ &= 0.\end{aligned}$$

De las condiciones iniciales se obtiene

$$\mathcal{F}_x(u)(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\cos(kt|\xi|) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(kt|\xi|)}{k|\xi|}$$

Veamos ahora la inversa de Fourier, para $d = 1$. Observe que en una dimensión, $\cos(kt|\xi|) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ikt\xi} + \mathrm{e}^{-ixt\xi})$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(\cos(kt\xi)\hat{f}(\xi))(x) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{ikt\xi} + \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{-ikt\xi}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{ikt\xi} + \mathcal{F}^{-1}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{-ikt\xi}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}^{-1}A + \mathcal{F}^{-1}B\right).
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
A = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi x}\, f(x)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{e}^{i\xi kt} &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi(x-kt)}\, f(x)\,\mathrm{dx}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi x)}\, f(x+kt)\,\mathrm{dx}\\
&(definiendo:\ x = x - kt)\\
&= \mathcal{F}(\tau_{-kt}f)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
B = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi x}\, f(x)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{e}^{-i\xi kt} &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi(x+kt)}\, f(x)\,\mathrm{dx}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi x)}\, f(x-kt)\,\mathrm{dx}\\
&(definiendo:\ x = x + kt)\\
&= \mathcal{F}(\tau_{kt}f)
\end{aligned}$$

Por lo tanto (aplicando la transformada inversa), se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(\cos(kt\xi)\hat{f}(\xi))(x) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(\tau_{-kt}f) + \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(\tau_{-kt}f)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left((\tau_{-kt}f) + (\tau_{-kt}f)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(f(x-kt) + f(x+kt)\right).
\end{aligned}$$

Y

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{g}(\xi)\frac{\sin(kt|\xi|)}{k|\xi|}\right) = \frac{1}{2k}\int_{-kt}^{kt} g(x+s)ds.$$

Pues, al definir $C = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{g}(\xi)\frac{\sin(kt|\xi|)}{k|\xi|}\right)$, se obtiene

$$C = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{g}(\xi)t\,\mathrm{sinc}(kt|\xi|)\right),$$

donde la función sinc$(\cdot)$ se definió en 6.3. Pero observe que al definir

$$l_{tk}(x) = \begin{cases} 0, & |x| > tk \\ 1, & |x| \leq tk, \end{cases}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(l_{tk})(\xi) &= c\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix\xi}\, l_{tk}(x)\,\mathrm{dx} \\
&= c\int_{-tk}^{tk} \mathrm{e}^{-ix\xi}\,\mathrm{dx} \\
&= c\frac{\mathrm{e}^{-ix\xi}}{-i\xi}\Big|_{-tk}^{tk} \\
&= c\frac{\mathrm{e}^{itk\xi} - \mathrm{e}^{-itk\xi}}{i\xi} \\
&= c2\frac{\sin(tk\xi)}{\xi} \\
&= c2tk\,\mathrm{sinc}(tk\xi).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
C &= t\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{g}(\xi)\,\mathrm{sinc}(\xi tk)\right) \\
&= \frac{ct}{2tk}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{g}(\xi)\hat{l}_{tk}(\xi)\right) \\
&= \frac{ct}{c2tk}\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{g * l_{tk}}(\xi)\right) \\
&= \frac{1}{2k}(g * l)(x) \\
&= \frac{1}{2k}\int_{-kt}^{kt} g(x-y)dy \\
&= \frac{1}{2k}\int_{-kt}^{kt} g(x+s)ds.
\end{aligned}$$

9.2. Soluciones Fundamentales y Ecuaciones Diferenciales

Considere el operador diferencial

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha \tag{9.1}$$

con coeficientes constantes c_α. Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, entonces, al aplicar la transformada de Fourier se obtiene

$$\mathcal{F}(P(D)T) = P(\zeta)\mathcal{F}u.$$

Donde $P(\zeta)$ es el polinomio obtenido de sustituir ζ_j por D_j. Así llamamos a $P(\zeta)$ el **Símbolo** de $P(D)$. Así, el operador diferencial $P(D)$ cambia a multiplicación por el polinomio $P(\zeta)$ bajo la transformada de Fourier.

Observación 9.8. La distribución $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ es solución de la ecuación diferencial $P(D)T = 0$ si y solo si $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ satisface $P(\zeta)\mathcal{F}T = 0$, es decir, si $P(\zeta) \neq 0$, para todo $\zeta \in \mathbb{R}^d$, entonces $\mathcal{F}T = 0$ y por lo tanto $T = 0$.

Observe que de la ecuación (9.1), suponiendo que $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ es una solución fundamental, de $P(D)$, se obtiene

$$1 = \mathcal{F}(P(D)E) = P(\zeta)\mathcal{F}E.$$

Análogamente, si $Q \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ es una solución de la ecuación $P(\zeta)Q = 1$, entonces $E = \mathcal{F}^{-1}Q \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ es una solución fundamental para $P(D)$.

Definición 9.9 (Operador Elíptico)**.** El operador diferencial $P(D)$ de orden m se dice elíptico si

$$P_m(\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \zeta^\alpha$$

no tiene ceros reales, diferentes de $\zeta = 0$, es decir

$$\zeta \in \mathbb{R}^d \quad y \quad \zeta \neq 0 \quad \Longrightarrow P_m(\zeta) \neq 0.$$

Lema 9.10. *El operador diferencial $P(D)$ en $\mathbb{R}^d$ es elíptico de orden m si y solo si existen constantes $c > 0$ y $R \geq 0$ tales que*

$$|P(\zeta)| \geq c\,\|\,\zeta\,\|^m \tag{9.2}$$

para $\zeta \in \mathbb{R}^d$ y $\|\,\zeta\,\| \geq R$.

Demostración. $\Longrightarrow$ Suponga $P(D)$ elíptico, por lo tanto $|P(D)|$ alcanza un mínimo en el conjunto compacto $S = \{\zeta \in \mathbb{R}^d : \| \zeta \| = 1\}$. Así, existe $\eta \in S$ tal que para todo $\zeta \in S$

$$|P_m(\zeta)| \geq |P_m(\eta)|.$$

Pero como $\eta \in S$, $\eta \neq 0$ y por ser operador elíptico $\mu = |P_m(\eta)| > 0$.
Para cualquier $\zeta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\| \zeta \|^{-1} \zeta \in S$ y

$$\mu \leq \left| P_m\left(\frac{\zeta}{\| \zeta \|}\right) \right| = \| \zeta \|^{-m} |P_m(\zeta)|.$$

Definiendo $Q(\zeta) = P(\zeta) - P_m(\zeta)$, entonces Q tiene grado $m-1$ y por lo tanto, existe $d > 0$ tal que

$$|Q(\zeta)| \leq d \| \zeta \|^{m-1},$$

para $\| \zeta \| \geq 1$. Así $\| \zeta \| \geq 1$

$$\begin{aligned} |P(\zeta)| &= |Q(\zeta) + P_m(\zeta)| \\ &\geq |P_m(\zeta)| - |Q(\zeta)| \\ &\geq \mu \| \zeta \|^m - d \| \zeta \|^{m-1} \\ &= \left(\mu - \frac{d}{\| \zeta \|}\right) \| \zeta \|. \end{aligned}$$

Obteniendo el resultado.
$\Longleftarrow$ Suponga $P(D)$ no es elíptica y cumple la ecuación (9.2). Así, existe un $\zeta \neq 0$ tal que $P_m(\zeta) = 0$, por lo tanto, $P_m(t\zeta) = t^m P_m(\zeta) = 0$

$$P(t\zeta) = P_m(t\zeta + Q(t\zeta) = Q(t\zeta).$$

Por lo tanto Q es un polinomio en t de grado menor que m contradiciendo así (9.2), pues en ese caso, Q tendría grado mayor o igual a m. $\square$

Teorema 9.11. *Todo operador elíptico $P(D)$ en $\mathbb{R}^d$ tiene una solución fundamental $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Suponga $P(D)$ de orden m y $R > 0$ que cumpla el lema 9.10; eligiendo $\eta \in \mathbb{C}^d$ tal que $P_m(\eta) \neq 0$. Para $z \in \mathbb{C}$ se escribe $P(\zeta + \eta z)$ como polinomio en z

$$P(\zeta + \eta z) = P_m(\eta) z^m + \sum_{l=0}^{m-1} R_l(\zeta) z^l,$$

donde los coeficientes $R_l(\zeta) = R_l(\zeta, \eta)$ son polinomios de ζ. Definiendo $c_l = \sup_{\|\zeta\| \leq R} |R_l(\zeta)|$, se obtiene el acotamiento

$$|P(\zeta + \eta z)| \geq r^m \left(|P_m(\eta)| - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{c_l}{r^{m-1}} \right),$$

donde $|z| = r$ y $\|\zeta\| < R$. Observe que el término entre paréntesis tiende a $|P_m(\eta)|$ siempre que $r \to \infty$, por lo tanto existe un $\epsilon > 0$ y $r > 0$ tal que

$$|P(\zeta + z\eta)| \geq \epsilon,$$

para $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = r$, $\zeta \in \mathbb{R}^d$ y $\|\zeta\| \leq R$. Definiendo, $B = \{\zeta \in \mathbb{R}^d : \|\zeta\| \leq R\}$, $C = \mathbb{R}^d \setminus B$ y $E = F + G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, donde $F = \mathcal{F}^{-1}(1_C/P)$ y

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_B \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^{ix(\zeta + z\eta)}}{zP(\zeta + z\eta)} dz d\zeta.$$

Veamos que

$$P(D)G(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_B \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} P(D_x) \frac{\mathrm{e}^{ix(\zeta + z\eta)}}{zP(\zeta + z\eta)} dz d\zeta.$$

Definiendo $f(x, z) = \frac{e^{ix(\zeta + z\eta)}}{zP(\zeta + z\eta}$, basta demostrar:

1. $f(x, z)$ es continua en $|z| = r$, lo anterior es cierto pues $z, P(\zeta + z\eta) \neq 0$, en $|z| = r$.

2. $\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j} f(x, z) < g(x)$ donde $g \in L^1$

$$\int_{|z|=r} \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j} f(x, z) = \int_{|z|=r} (i(\zeta_j + \eta_j z_j))^{\alpha_j} f(x, z)$$

pero como $\alpha_j \leq m$, existe un $Q(\zeta)$ tal que $P(\zeta) = \zeta_j^{\alpha_j} + Q(\zeta)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} |\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j} f(x, z)| &\leq \frac{|\,\mathrm{e}^{ix(\zeta + z\eta)}\,|}{|z||Q(\zeta + z\eta)|} \\ &= \frac{1}{|z||Q(\zeta + z\eta)|}. \end{aligned}$$

Pero observe que al utilizar el teorema de Cauchy

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{|z||Q(\zeta + z\eta)|} dz = 2\pi i (Q(\zeta))^{-1} < \infty.$$

Por lo tanto, para todo α_j se cumplen las condiciones anteriores, así definiendo

$$A = \left(\sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} \right) G(x)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_B \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} \frac{\mathrm{e}^{ix(\zeta + z\eta)}}{zP(\zeta + z\eta)} dz d\zeta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_B \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^{ix(\zeta + z\eta)}}{z} dz d\zeta. \end{aligned}$$

Ahora, observe que al utilizar el teorema de Cauchy en la integral de línea compleja, con $z_0 = 0$

$$\int_{|z|=r} \frac{e^{ix(\zeta + z\eta)}}{z} dz,$$

se obtiene

$$\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^{ix(\zeta + z\eta)}}{z} dz = 2\pi i \, \mathrm{e}^{ix(\zeta)},$$

lo que implica

$$P(D)G(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_B \mathrm{e}^{ix\zeta} \, d\zeta = \mathcal{F}^{-1} 1_B(x).$$

Al utilizar un argumento análogo, se obtiene $P(D)F = 1_C$

$$P(D)F = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} P(D) \int_C \frac{\mathrm{e}^{ix\zeta}}{P(x)} \, \mathrm{dx},$$

pero, $f(x, \zeta) = \frac{\mathrm{e}^{ix\zeta}}{P(x)}$ es continuo en C pues P es elíptico; además

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{ix\zeta}}{P(x)} \right| = \frac{1}{|P(x)|}$$

y para $m \ge 1$

$$\int_C \frac{1}{P(x)} \, \mathrm{dx} < \infty.$$

De lo anterior se obtiene

$$P(D)F = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_C P(D) \frac{\mathrm{e}^{ix\zeta}}{P(x)} \,\mathrm{dx} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_c \mathrm{e}^{ix\zeta} \,\mathrm{dx} = \mathcal{F}^{-1} 1_C.$$

Por lo tanto

$$P(D)E = P(D)F + P(D)G = \mathcal{F}^{-1} 1_C + \mathcal{F}^{-1} 1_B = \mathcal{F}^{-1} 1 = \delta,$$

obteniendo así el resultado. □

9.3. Espacios de Sobolev

Se demostró (teorema 6.12) que el operador $\mathcal{F}$ es unitario en L^2, más aun para todo $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}(D^\alpha u) = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}(u)$ (pues u es distribución temperada por el teorema 4.16). Por lo tanto, si $u \in L^2$, sus derivadas de orden k y menores que k están en L^2 si y solo si $(1 + \| \xi \|)^k \mathcal{F}(u) \in L^2$. El espacio de las funciones que cumplen lo anterior se notará $H_{(s)} = H_{(s)}(\mathbb{R}^d)$:

Definición 9.12 (Espacios de Sobolev)**.** Para todo $s \in \mathbb{R}$ se define el espacio de Sobolev $H_{(s)} = H_{(s)}(\mathbb{R}^d)$ de orden s como el conjunto de todos los $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tales que $(1 + \| \cdot \|^2)^{s/2} \mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Se define la siguiente norma sobre este espacio

$$\begin{aligned} \| u \|_{(s)} &:= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 (1 + \| \xi \|^2)^s d\xi \right)^{1/2} \\ &= \| (\mathcal{F}u)(\cdot)(1 + \| \cdot \|^2)^{s/2} \|_{L^2} \end{aligned}$$

Observe que la norma se eligió de forma tal que $H_{(0)} = L^2$.

Es convención de utilizar el factor peso $(1 + \| \xi \|^2)^{1/2}$, en lugar de $1 + \| \xi \|$, se debe a que $1 + \| \xi \|^2$ es análogo al símbolo $I - \Delta$ (donde Δ es el operador de Laplace). Pues

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((I - \Delta)u) &= \hat{u} - \mathcal{F}\left(\sum_{j=0}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u \right) \\ &= \hat{u} - \hat{u}\left(\sum_{j=0}^{d} (-i\xi_j)^2 \right) \\ &= \hat{u}(1 + \| \xi \|^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(I-\Delta)^z := \mathcal{F}^{-1} \circ (1+\|\,\xi\,\|^2)^z \circ \mathcal{F}$$

puede definirse para todo $z \in \mathbb{C}$. Teniendo en cuenta lo anterior, el espacio $H_{(s)}$ se puede definir también como el espacio de todas las distribuciones $u \in \mathcal{S}'$ tales que $v := (I-\Delta)^{s/2}u \in L^2$, y la norma en $H_{(s)}$ de u, es la norma de v en L^2.
El siguiente teorema es válido para $d \in \mathbb{Z}_+$

Teorema 9.13 (Teorema de Riemann-Lebesgue)**.** *Sea u una función Lebesgue integrable en $\mathbb{R}^d$, entonces $\mathcal{F}u$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^d$ y $\mathcal{F}u \to 0$ siempre que $\xi \to \infty$. En particular, $\mathcal{F}u$ es acotado en $\mathbb{R}^d$ y satisface*

$$|\mathcal{F}u(\xi)| \leq c \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|\,\mathrm{dx}$$

con $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Como $|\,\mathrm{e}^{-ix\xi}\,| = 1$, la acotación anterior se sigue de

$$|\mathcal{F}u| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |\,\mathrm{e}^{-ix\xi}\,||u(x)|\,\mathrm{dx} = c\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|\,\mathrm{dx}\,.$$

Además, en $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} x + \frac{\pi}{\|\,\xi\,\|^2}\xi\xi &= \sum_{i=1}^{d} \left(x_i + \frac{\pi}{\|\,\xi\,\|^2}\xi_i \right) \xi_i \\ &= \sum_{i=1}^{d} \left(x_i\xi_i + \frac{\pi}{\|\,\xi\,\|^2}\xi_i^2 \right) \\ &= x\xi + \frac{\pi}{\|\,\xi\,\|^2} \sum_{i=1}^{d} \xi_i^2 \\ &= x\xi + \pi \end{aligned}$$

más aun, $\mathrm{e}^{-i\pi} = \cos(\pi) - i\sin(\pi) = -1$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}u(\xi) &= c\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\xi}\, u(x)\,\mathrm{dx} \\
&= (-1)c\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\pi}\,\mathrm{e}^{-ix\xi}\, u(x)\,\mathrm{dx} \\
&= (-1)c\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i(x+\pi/(\|\,\xi\,\|^2)\xi)\xi}\, u(x)\,\mathrm{dx} \\
&= (-1)c\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\xi}\, u\left(x - \frac{\pi}{\|\,\xi\,\|}\xi\right)\mathrm{dx} \\
&= -\mathcal{F}\tau_{\pi/(\|\,\xi\,\|^2)\xi}u \\
&= -\mathcal{F}u(I - \tau_{\pi/(\|\,\xi\,\|^2)\xi}).
\end{aligned}$$

Así, definiendo $p = 1$ y utilizando lo demostrado en el teorema 7.22, existe una sucesión en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, ϕ_n, tal que para un $n \in \mathbb{Z}_+$: $\|\,u - \phi_n\,\|_{L^p} < \frac{1}{3}\epsilon$.Por lo tanto

$$\|\,\tau_h u - \tau_h\phi_n\,\|_{L^p} = \|\,u - \phi_n\,\|_{L^p} < \frac{1}{3}\epsilon$$

para $h \in \mathbb{R}^d$. Además, existe un $R > 0$ tal que para $\|\,x\,\| \geq R$, $\phi_n(x) = 0$, así, fijando $B = \{x \in \mathbb{R}^d : \|\,x\,\| \leq R + 1\}$. Como ϕ_n es uniformemente continua, se puede eligir $0 < \delta < 1$ tal que

$$|\phi_n(x+h) - \phi_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}\left(\frac{1}{m(D_r(0))}\right)^{1/p}$$

con $\|\,h\,\| < \delta$. Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\phi_n(x+h) - \phi_n(x)|^p\,\mathrm{dx} = \int_B |\phi_n(x+h) - \phi_n(x)|^p\,\mathrm{dx} < \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{1/p}$$

para $\|\,h\,\| < \delta$, es decir $\|\,\tau_{-h}\phi_n - \phi_n\,\|_{L^p} < \frac{\epsilon}{3}$. Así, para $\|\,h\,\| < \delta$

$$\begin{aligned}
\|\,u(\tau_{-h} - I)\,\|_{L^p} &= \|\,\tau_{-h}u - u\,\|_{L^p} \\
&\leq \|\,\tau_{-h}u - \tau_{-h}\phi_n\,\|_{L^p} + \|\,\tau_{-h}\phi_n - \phi_n\,\|_{L^p} + \|\,u - \phi_n\,\|_{L^p} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

por lo tanto, siempre que $\|\,h\,\| \to 0$, $u(\tau_{-h} - I) \to 0$ en L^p y como $\mathcal{F}$ es continuo, entonces

$$\mathcal{F}u \to 0$$

en L^1.
Veamos que $\mathcal{F}u$ es uniformemente continua. Sean $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}u(\xi+\eta) - \mathcal{F}u(\xi)| &= \left| c \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix(\xi+\eta)}\, u(x)\, \mathrm{dx} - \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix(\xi)}\, u(x)\, \mathrm{dx} \right) \right| \\
&= c \left| \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix\xi} \left(\mathrm{e}^{ix\eta} - 1 \right) u(x)\, \mathrm{dx} \right| \\
&\leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|\, \mathrm{dx} < \infty.
\end{aligned}$$

Así, utilizando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \to 0} |\mathcal{F}u(\xi+\eta) - \mathcal{F}u(\xi)| &\leq c \left| \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix\xi} \lim_{\eta \to 0} \left(\mathrm{e}^{ix\eta} - 1 \right) u(x)\, \mathrm{dx} \right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

obteniendo el resultado. □

Teorema 9.14. *Sea $k \in \mathbb{Z}_+$, si $u \in H_{(s)}$ y $s > \frac{d}{2} + k$ entonces u es de clase $\mathcal{C}^k$ y $\partial^\alpha u(x) \to 0$ siempre que $\| x \| \to \infty$ para todo multi-índice α con $|\alpha| \leq k$.*

Demostración. Observe que la desigualdad $s > \frac{d}{2} + k$ implica

$$\begin{aligned}
2(s-k) &> d \\
2(k-s) &< -d
\end{aligned}$$

por lo tanto $(1 + \| \xi \|)^{k-s} \in L^2$. Más aun, $\| \xi \|^\alpha \leq (1 + \| \xi \|)^k$, para cualquier $|\alpha| \leq k$, por lo tanto

$$\xi^\alpha (1 + \| \xi \|)^{-s} (1 + \| \xi \|)^s \mathcal{F}u(\xi) \leq (1 + \| \xi \|)^{k-s} (1 + \| \xi \|)^s \mathcal{F}u(\xi).$$

Como $u \in H_{(s)}$ entonces $(1 + \| \xi \|)^s \mathcal{F}u(\xi) \in L^2$, así, utilizando el teorema de Hölder (2.24) se obtiene

$$\int |\xi^\alpha (1+\| \xi \|)^{-s} (1+\| \xi \|)^s \mathcal{F}u(\xi)| \leq \| (1+\| \xi \|)^{k-s} \|_{L^2} \| (1+\| \xi \|)^s \mathcal{F}u(\xi) \|_{L^2} < \infty$$

por lo tanto $\mathcal{F}(D^\alpha u) \in L^1$. Por el teorema de Riemann-Lebesgue, 9.13, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}D^\alpha u$ es uniformemente continua y por lo tanto $D^\alpha u$ es uniformemente

continua (6.15). Más aun, por el teorema 5.4, $D^\alpha u$ es igual a la derivada usual de u y por lo tanto esta es continua.
Más aun por el teorema de Riemann-Lebesgue $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}D^\alpha u \underset{\|x\|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, obteniendo así el resultado. $\square$

Teorema 9.15. *Sea $P(D)$ un operador lineal diferencial en $\mathbb{R}^d$ de orden m y con coeficientes constantes. Entonces, para todo $s \in \mathbb{R}$, $P(D)$ es un mapa lineal continuo de $H_{(s)}$ en $H_{(s-m)}$*

Demostración. Observe que $P(\xi)(1+\|\xi\|)^{-k}$ es acotado. Pues, como P es un polinomio de grado m

$$\begin{aligned} P(\xi) &= \sum_{i=0}^m c_i \xi^i \\ &\leq \sum_{i=0}^m c_i \|\xi\|^m \\ &= \|\xi\|^m \sum_{i=0}^m c_i \\ &\leq (1+\|\xi\|)^m \sum_{i=0}^m c_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}P(D)u(\xi)(1+\|\xi\|)^{s-m}\|_{L^2} &= \|\mathcal{F}u(\xi)P(\xi)(1+\|\xi\|)^{s-m}\|_{L^2} \\ &\leq \|P(\xi)(1+\|\xi\|)^{-m}\|_{L^2}\,\|\mathcal{F}u(\xi)(1+\|\xi\|)^{s}\|_{L^2} \\ &\leq \sum_{i=0}^m c_i \|\mathcal{F}u(1+\|\xi\|)^s\|_{L^2} \end{aligned}$$

como $u \in H_{(s)}$ $\|\mathcal{F}u(1+\|\xi\|)^s\|_{L^2} < \infty$, así, $P(D)u \in H_{(s-m)}$. $\square$

Más aun, se puede definir el espacio de Sobolev localmente

Definición 9.16. Sea X un abierto de $\mathbb{R}^d$ y $F \in \mathcal{D}'(X)$. La distribución F se dice que pertenece localmente a $H_{(s)}$ si $\varphi F \in H_{(s)}(\mathbb{R}^d)$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}(X)$. El espacio de todas las distribuciones con estas características se notará $H_{(s)}^{\mathrm{loc}}(X)$.

Vale la pena resaltar que esta no es la única forma de definir los espacios de Sobolev. En general, estos se definen como

$$W^{k,p} := \{u \in L^p : \; D^\alpha u \in L^p, \; |\alpha| \leq k\}$$

y su norma se define como

$$\| u \|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \| D^\alpha u \|_{L^p} .$$

9.4. Cálculo Fraccional

Para esta sección, suponga $d = 1$.
Considerando lo anterior, todo $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tiene un primitiva de orden k en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definida como

$$G = \chi_+^k * F, \tag{9.3}$$

con

$$\chi_+^k = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} H(x) \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Veamos la demostración de (9.3) por inducción:
Sea $k = 1$, entonces

$$\begin{aligned} DG &= (D\chi_+^1) * F \\ &= D(H(x)) * F \\ &= \delta * F \\ &= F, \end{aligned}$$

por el ejemplo 7.8.
Suponga que se tiene

$$D^k G = F,$$

entonces

$$\begin{aligned} D\chi_+^{k+1} &= D\left(\frac{x^k}{k!} H(x)\right) \\ &= \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} H(x) + \frac{x^k}{k!}\delta(x) \\ &= \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} H(x) \\ &= \chi_+^k. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} D^{k+1}G &= D^k(D\chi_+^{k+1}) * F \\ &= D^k\chi_+^k * F \\ &= D^k G \ \textit{por la hipótesis inductiva} \\ &= F. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$

$$D^k G = \chi_+^k * F = \delta * F = F;$$

de manera similar se define la k-ésima derivada de G en función de $\delta^{(k)}$.
Lo anterior es el centro de la definición, a través de las distribuciones (pues existen otros enfoques), de las integrales y derivadas de orden $a \in \mathbb{C}$. Se define la familia de operadores

$$I_+^a = \chi_+^a *$$

que depende de $a \in \mathbb{C}$. A esta familia se le pedirán las siguientes propiedades:

1. $\chi_+^a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y $\operatorname{supp}(\chi_+^a) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$.
2. $\chi_+^k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}H(x)$, para $k \in \mathbb{Z}_+$.
3. $\chi_+^{-k}(x) = \delta^{(k)}$.
4. $\chi_+^a * \chi_+^b = \chi_+^{a+b}$, con $b \in \mathbb{C}$.

Observe que por la primera propiedad $I_+^a : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ es continuo y lineal. Por las dos siguientes condiciones, el operador I_+^a permite calcular la a-ésima primitiva y derivada.
Así, se define

$$\chi_+^a(x) = \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}H(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

donde, $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma, definida por

$$\Gamma(a+1) = \int_{\mathbb{R}_+} x^a \,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{dx},$$

y que cumple la propiedad $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ y $x^c = \mathrm{e}^{c\ln(x)}$, para $c \in \mathbb{C}$.
Considerando lo anterior,

$$\begin{aligned}
\int \chi_+^a \,\mathrm{dx} &= \int \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} H(x)\,\mathrm{dx} \quad \textit{integrando por partes} \\
&= \frac{x^a}{a\Gamma(a)} H(x) - \int \frac{x^a}{a\Gamma(a)} \delta(x)\,\mathrm{dx} \\
&= \chi_+^{a+1}
\end{aligned}$$

pues $x^a\delta(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
El operador $I_+^a(u) = \chi_+^a * u$ es llamado la Integral de Riemman-Liouville de u [4]. Este operador permite generalizar la noción de primitiva de u.
Al definir

$$\mathcal{M}\phi(a) := \Gamma(a)\chi_+^a(\phi) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} x^{a-1}\phi(x)\,\mathrm{dx}$$

donde $\mathcal{M} : \phi \mapsto \mathcal{M}\phi$, $\mathcal{M}$ es llamada la transformada de Mellin , debido a esto, χ_+^a es llamada distribución de Mellin o núcleo de Mellin .

Índice alfabético

Cálculo Operacional, 15
Convoluciones, 85

Derivada Débil, 54
Derivada de Distribuciones, 54
Desigualdad
de Hölder, 24
de Young, 24
Distribución
$\mathcal{D}'$, 31
de Dirac, 17, 42
de Heaviside, 17
de Mellin, 131
Delta, 36, 42
Regular, 31
Singular, 31
Temperada, 41

Ecuación
de Poisson, 112, 115
del Calor, 115
Diferencial Ordinaria de Orden n, 110
Enfoque Axiomático, 15
Espacio de Sobolev, 124
Espacios de Lebesgue, 20
Exponentes Conjugados, 20

Fórmula
de Leibniz, 22
de Parseval, 80
Fórmula
de Plancherel, 81
Función
de Dirac, 42
de Heaviside, 17, 57
Delta, 17
Prueba
$\mathcal{D}$, 27
$\mathcal{S}$, 38
Función
Medible, 24

Grado de una Distribución, 17

Integral de Riemman-Liouville, 131

Lema
de Fatou, 25
de Urysohn, 63
de Zorn, 24

Núcleo
de Mellin, 131
de Poisson, 48

Operador Elíptico, 120
Operador Involutivo, 79
Orden de una Distribución, 33

Regla de Pascal, 22
Regularización, 100

Símbolo, 120
Seno Cardinal, 70
Solución Fundamental, 110
Sucesión
    de Dirac, 49

Teorema
    Convergencia Dominada de Lebesgue, 25
    de Estructura, 105
    de Hahn-Banach, 23
    de Inversión de Fourier, 75
    de la Convergencia Monótona, 24
    de Plancherel, 81
    de Representación de Riesz, 24
    de Riemann-Lebesgue, 125
    de Rolle, 22
    del Valor Medio, 23
Transformada
    de Fourier, 69
    de Mellin, 131

Bibliografía

[1] Bhattacharyya P.K. *Distributions, Generalized Functions with Applications in Sobolev Spaces.* De Gruyter, 2012.

[2] Bresiz H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[3] Campos Ferreira J. *Introdução à Teoria das Distribuições.* Foundação Calouste Gulbenkian, 1993.

[4] Duistermaat J.A. y Kolk J.A.C. *Distributions, Theory and Applications.* Birkhäuser, 2010.

[5] Kolmogorov A.N. y Fomin S.V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*
Volume 2, Mesure, The Lebesgue Integral, Hilbert Space. Graylock Press, 1961.

[6] Lang, S. *Real and Functional Analysis*, Springer, 1993.

[7] Lützen, J. *The Prehistory of the Theory of Distributions.* Springer-Verlag, 1982.

[8] Schwartz, L. *Théorie des Distributions*, Vols. I y II, Hermann, 1950-1951.

[9] Sobolev, S. Méthode nouvelle à résoudre la problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques. *Recueil Mathématique* 1 (43) (1936) p.39-71.

[10] Strichartz, R. S. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms.* CRC Press, 1994.

[11] Vladimirov, V.S. *Generalized Funtions.*[En línea]. Encyclopedia of Mathematics.[ref. de 15 febrero 2012]. Disponible en World Wide Web: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Generalized_function.

[12] Vladimirov, V.S. *Methods of the Theory of Generalized Functions.* Taylor & Francis, 2002.

[13] Wilde, I.F. *Distribution Theory (Generalized Functions).*[En línea]. [ref. de 25 Abril 2012]. Disponible en World Wide Web: http://homepage.ntlworld.com/ivan.wilde/notes/gf/gf.pdf.