

MODELADO Y CONTROL ROBUSTO DE UN VEHÍCULO AÉREO NO TRIPULADO UAV  
DURANTE MANIOBRA DE VUELO ESTACIONARIO (HOVERING)

ANDRÉS MAURICIO CÁRDENAS TORRES

Proyecto de grado para optar al título de  
Magister en Ingeniería Electrónica

Profesor Tutor:

INGENIERO JULIÁN COLORADO MONTAÑO, PH.D.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
BOGOTÁ D.C.  
2013

## CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	11
1. MARCO TEÓRICO .....	13
1.1. VELOCIDAD INDUCIDA DEL ROTOR PRINCIPAL RESPECTO AL AIRE .....	13
1.2. FUNCIÓN DE ARRASTRE AERODINÁMICO .....	17
1.3. TEORÍA DE MOMENTOS .....	17
1.4. CONTROL $H^\infty$ LOOP SHAPING .....	19
1.4.1. Paso 1. ....	19
1.4.2. Paso 2. ....	19
1.4.3. Paso 3. ....	20
2. ESPECIFICACIONES .....	21
2.1. MARCOS DE REFERENCIA .....	21
2.2. NOTACIÓN .....	21
2.3. DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MODELO .....	22
3. DESARROLLOS .....	24
3.1. MODELO NO LINEAL DEL HELICÓPTERO .....	24
3.1.1. Ecuaciones de Cuerpo Rígido .....	24
3.1.2. Ecuaciones de Torque y Fuerza.....	29
3.1.3. Ecuaciones de Empuje e Inclinación del Aspa.....	40
3.1.4. Sinopsis de las Ecuaciones No Lineales.....	43
3.1.5. Linealización .....	44
3.2. IDENTIFICACIÓN DEL SISTEMA MOTOR .....	49
3.2.1. Experimentación.....	50
3.2.2. Identificación del sistema Motor.....	51
3.3. CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE: FUSELAJE .....	54
3.4. CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE: SISTEMA MOTOR.....	56
3.5. LEY DE CONTROL $H^\infty$ : FUSELAJE.....	56
3.5.1. Pre-Análisis del Sistema para la Implementación del Controlador $H^\infty$ Loop Shaping.....	57
3.5.2. Objetivos de Control .....	58
3.5.3. Diseño de la Ley de Control $H^\infty$ Loop Shaping.....	59
3.6. LEY DE CONTROL $PID$ : SISTEMA DE VELOCIDAD .....	61
3.6.1. Desacople del Sistema.....	61
3.6.2. Diseño de la Ley de Control $PID$ . ....	63

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	67
4.1. ANÁLISIS EN EL TIEMPO .....	67
4.1.1. Evaluación del modelo no lineal del fuselaje .....	67
4.1.2. Evaluación del modelo lineal del fuselaje .....	72
4.2. ANÁLISIS EN EL TIEMPO-FRECUENCIA.....	74
4.2.1. Modelo lineal del sistema motor: análisis de estabilidad .....	74
4.2.2. Modelo lineal del sistema motor: análisis en frecuencia .....	75
4.2.3. Modelo Lineal del Fuselaje: Análisis de Estabilidad. ....	76
4.2.4. Modelo Lineal del Fuselaje: Análisis en Frecuencia.....	77
4.3. ANÁLISIS PLANTA-CONTROLADOR .....	79
4.3.1. Evaluación de la Ley de Control $H^\infty$ Loop Shaping. ....	79
4.3.2. Evaluación de la Ley de Control PID.....	83
CONCLUSIONES .....	85
BIBLIOGRAFÍA.....	87
ANEXOS.....	91

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Modelo propuesto para la descripción dinámica del helicóptero en estudio. ....	12
Figura 2. Cono formado en vuelo estacionario (Hover).....	13
Figura 3. Método empírico para la validación de la Teoría de Momentos.....	14
Figura 4. Perfil del aspa.....	17
Figura 5. Construcción del lazo abierto para control. ....	19
Figura 6. Estructura del controlador $H^\infty$ Loop Shaping.....	20
Figura 7. Sistema de coordenadas respecto al CDG. ....	21
Figura 8. Variables de posición y orientación del helicóptero. ....	22
Figura 9. Movimientos longitudinales y laterales. ....	22
Figura 10. Esquema de presentación de los desarrollos.....	24
Figura 11. Bloque de las ecuaciones de cuerpo rígido. ....	25
Figura 12. Rotaciones del helicóptero.....	25
Figura 13. Proyección de la velocidad angular con BF rotado sobre el vector $\omega_0$ de la posición inicial en el marco SF. ....	26
Figura 14. Eje de coordenadas del cuerpo rígido. ....	28
Figura 15. Diagrama de bloques de las ecuaciones de torque y fuerza.....	29
Figura 16. Relación de fuerzas según modos de vuelo. ....	30
Figura 17. Movimiento longitudinal del helicóptero.....	31
Figura 18. Desplazamiento lateral del helicóptero.....	32
Figura 19. Diagrama de fuerzas del rotor trasero.....	33
Figura 20. Vector de fuerza gravitacional.....	33
Figura 21. Distancias del CDG a las fuentes de fuerza. ....	35
Figura 22. Diagrama de proyección de fuerzas para el torque en el eje x.....	35
Figura 23. Diagrama de proyección de fuerzas para el torque en el eje y.....	36
Figura 24. Diagrama de proyección de fuerzas para el torque en el eje z.....	36
Figura 25. Diagrama de fuerzas para el torque sobre el eje x. ....	37
Figura 26. Diagrama de fuerzas para el torque sobre los ejes y e z. ....	38
Figura 27. Torque aerodinámico del rotor principal en inclinación longitudinal y lateral.....	39
Figura 28. Diagrama de bloques del empuje del rotor y la velocidad inducida. ....	41
Figura 29. Sistema de transmisión del helicóptero KDS 450SV. ....	42
Figura 30. Diagrama de bloques del sistema motor. ....	49
Figura 31. Señales de trabajo para realizar la identificación.....	50
Figura 32. Respuesta de Velocidad ante escalón unitario. ....	52
Figura 33. Evaluación de la Respuesta Paso: Simulación vs Datos Reales. ....	53
Figura 34. Residuos estadísticos. ....	53
Figura 35. Respuestas paso en tiempo continuo y discreto. ....	54
Figura 36. Cota superior de incertidumbre del modelo del fuselaje.....	55
Figura 37. Perfil de incertidumbre multiplicativa. ....	56
Figura 38. Valores singulares planta-controlador. ....	61
Figura 39. Sistema desacoplado. ....	62
Figura 40. Comparación de la velocidad de respuesta de las respuestas paso del sistema. ....	63
Figura 41. Topología de control implementada sin perturbación: PID ideal. ....	63
Figura 42. Respuesta temporal de los controladores diseñados. ....	64
Figura 43. Respuesta temporal de los controladores ante entradas de excitación variables. ....	66

Figura 44. Esquema de los resultados obtenidos.....	67
Figura 45. Respuesta del modelo no lineal ante un $U_{col} = 0^\circ$ , $U_{cic} = 0^\circ$ , $U_{acel} = 0^\circ$ y $U_{ped} = 0^\circ$ .	68
Figura 46. Simulación del modelo no lineal con $U_{col} = 0^\circ - 20^\circ$ , $U_{cic} = 0^\circ$ , $U_{acel} = 20\%$ y $U_{ped} = 0^\circ$ .....	69
Figura 47. Simulación del modelo no lineal con entradas $U_{lat} = 7^\circ$ y $U_{acel} = 5\%$ y salidas $u$ , $v$ , $w$ , $p$ , $q$ y $r$ .....	70
Figura 48. Simulación del modelo no lineal con entradas $U_{lat} = 7^\circ$ y $U_{acel} = 5\%$ y salidas $\phi$ , $\theta$ , y $\psi$ .....	70
Figura 49. Respuesta del modelo no lineal ante entradas $U_{acel} = 0\%$ y $U_{lon} = 12^\circ$ y salidas $u$ , $v$ , $w$ , $p$ , $q$ y $r$ .....	71
Figura 50. Respuesta del modelo no lineal ante entradas $U_{acel} = 20\%$ y $U_{lon} = 12^\circ$ y salidas $\phi$ , $\theta$ , y $\psi$ .....	71
Figura 51. Respuestas de los modelos ante una entrada $U_{col} = 10^\circ$ .....	72
Figura 52. Respuestas de los modelos ante una entrada $U_{lon} = 10^\circ$ .....	73
Figura 53. Respuestas de los modelos ante una entrada $U_{lat} = 10^\circ$ .....	73
Figura 54. Respuesta de los modelos ante una entrada $U_{ped} = 10^\circ$ .....	74
Figura 55. Respuesta de los modelos ante una entrada $U_{ped} = -10^\circ$ .....	74
Figura 56. Respuesta en frecuencia del modelo.....	76
Figura 57. Lazo abierto del modelo lineal.....	78
Figura 58. Lazo cerrado del modelo lineal.....	78
Figura 59. Sensibilidad del modelo lineal.....	79
Figura 60. Topología de control simulada.....	79
Figura 61. Respuesta controlador $H^\infty$ con perturbación en $\phi = 10^\circ$ .....	80
Figura 62. Respuesta controlador $H^\infty$ con perturbación en $\theta = 10^\circ$ .....	80
Figura 63. Respuesta controlador $H^\infty$ con perturbación en $\psi = 10^\circ$ .....	81
Figura 64. . Respuesta controlador $H^\infty$ y PID con perturbación en $\Omega = 80\text{rads}$ .....	81
Figura 65. Respuesta de los controladores $H^\infty$ y PID ante perturbaciones múltiples.....	82
Figura 66. Estabilidad robusta.....	83
Figura 67. Perturbación de los controladores PID.....	84
Figura 68. Respuesta de los controladores ante una señal de perturbación.....	84

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Aplicación de la teoría de momentos. ....	14
Tabla 2. Valores para linealización. ....	47
Tabla 3. Resultados discriminados por porcentaje de ajuste tras la identificación. ....	51
Tabla 4. Valores de sintonización de los controladores PID sin perturbaciones.....	64
Tabla 5. Consumo de Energía $H^\infty$ .....	82
Tabla 6. Análisis del consumo de energía. ....	83
Tabla 7. Distancias entre el CDG y los ejes del rotor trasero y principal. ....	93
Tabla 8. Masa de algunos elementos del helicóptero KDS 450SV.....	95
Tabla 9. Parámetros del helicóptero KDS450SV.....	98
Tabla 10. Valores arrojados por FoilSim III. ....	99

## ÍNDICE DE TÉRMINOS

Con el propósito de introducir al lector sobre los diferentes términos utilizados en el trabajo, se presenta a continuación una descripción de las variables que fueron empleadas.

OPERADOR	UNIDAD	DESCRIPCIÓN
Cíclico	[·]	Mando de control del helicóptero que le permite a éste desempeñar movimientos laterales y longitudinales; en algunas ocasiones se utilizan los términos cíclico-latear y cíclico-longitudinal para describirlos.
Colectivo	[·]	Mando de control del helicóptero que cambia el ángulo de ataque de las aspas del rotor principal para generar mayor empuje.
Acelerador	[·]	Mando de control del motor que regula la velocidad de rotación del motor.
Pedales	[·]	Mando de control que regula el ángulo de ataque del rotor trasero.
$U_{cic} = [U_{lat}, U_{lon}]$	[°]	Consignas que corresponden al ángulo de entrada del servomotor que controla el ángulo de inclinación del rotor principal.
$U_{col}$	[°]	Consigna que corresponde al ángulo de entrada del servomotor que controla el ángulo de ataque de las aspas del rotor principal.
$U_{acel}$	[%]	Consigna de control normalizada que representa el valor de señal de PWM que es enviado al variador de velocidad que acciona al motor.
$U_{ped}$	[°]	Consigna que corresponde al ángulo de entrada del servomotor que controla el ángulo de ataque de las aspas del rotor trasero.
$\beta_{1c}$	[rad]	Ángulo de inclinación longitudinal del rotor principal entre el plano TPP y plano HP.
$\beta_{1s}$	[rad]	Ángulo de inclinación lateral del rotor principal entre el plano TPP y plano HP.
$\beta_{col}$	[rad]	Ángulo que muestra la relación entre el mando de control del colectivo y el ángulo efectivo de la inclinación o ángulo de ataque de cada aspa del rotor principal.
$\beta_{ped}$	[rad]	Ángulo que muestra la relación entre el mando de control de los pedales y el ángulo efectivo de la inclinación o ángulo de ataque de cada aspa del rotor trasero.
TPP	[·]	Plano formado por la rotación del rotor principal.
HP	[·]	Plano horizontal sobre la cabeza del eje del rotor principal, paralelo al plano terrestre.

$BF$	[·]	Marco fijo ubicado en el centro de gravedad.
$SF$	[·]	Marco espacial.
$EF$	[·]	Marco terrestre.
$T_{RP}$	$[kg \cdot m/s^2]$	Empuje generadado por el rotor principal.
$T_{RT}$	$[kg \cdot m/s^2]$	Empuje generadado por el rotor trasero.
$v_i$	$[m/s^2]$	Velocidad inducida del aire que pasa por el disco del rotor principal.
$v_0$	$[m/s^2]$	Velocidad del aire lejano sobre el rotor principal.
$w$	$[m/s^2]$	Velocidad del aire lejano debajo del rotor principal.
$V$	$[m/s^2]$	Velocidad de ascenso respecto al aire.
$A$	$[m^2]$	Área del rotor principal.
$\rho$	$[kg/m^3]$	Densidad del aire.
$a$	[·]	Constante de elevación de las aspas del rotor principal.
$B$	[·]	Número de aspas.
$c$	$[m]$	Ancho de las aspas del rotor principal.
$Q_{RP}$	[·]	Torque provocado por la fricción o arrastre aerodinámico del rotor principal.
$C_{RP}$	[·]	Coficiente de la relación entre el empuje y la fricción o arrastre aerodinámico del rotor principal.
$D_{RP}$	[·]	Constante de fricción o arrastre aerodinámico del rotor principal.
$\Omega$	$[rad/s]$	Velocidad angular del rotor principal

${}^eV$	$[m/s]$	Velocidad traslacional sobre los ejes de coordenadas $x$ , $y$ e $z$ . ${}^eV = [u \ v \ w]$
$\theta$	$[rad]$	Ángulos de Euler sobre los ejes de coordenadas $x$ , $y$ e $z$ , $\theta = [\phi \ \theta \ \psi]$
$\omega$	$[rad/s]$	Velocidades Angulares sobre los ejes de coordenadas $x$ , $y$ e $z$ , $\omega = [p, q, r]$
${}^bF$	$[kg.m/s^2]$	Vectores de fuerza en cada eje de coordenadas $x$ , $y$ e $z$ , asociadas a los componentes del helicóptero.
${}^bF_{RP}$	$[kg.m/s^2]$	Vectores de fuerza del rotor principal en cada eje de coordenadas $x$ , $y$ e $z$ respecto al marco fijo. ${}^bF_{RP} = [{}^bF_{RPx} \ {}^bF_{RPy} \ {}^bF_{RPz}]$
${}^bF_{RT}$	$[kg.m/s^2]$	Vectores de fuerza del rotor trasero en cada eje de coordenadas $x$ , $y$ e $z$ respecto al marco fijo. ${}^bF_{RT} = [{}^bF_{RTx} \ {}^bF_{RTy} \ {}^bF_{RTz}]$
${}^bF_g$	$[kg.m/s^2]$	Vectores de fuerza de la gravedad en cada eje de coordenadas $x$ , $y$ e $z$ respecto al marco fijo. ${}^bF_g = [{}^bF_{gx} \ {}^bF_{gy} \ {}^bF_{gz}]$
${}^b\tau$	$[kg.m^2/s^2]$	Vectores de torque en cada eje de coordenadas $x$ , $y$ e $z$ , asociadas a los componentes del helicóptero.
${}^b\tau_{RP}$	$[kg.m^2/s^2]$	Vectores de torque del rotor principal en cada eje de coordenadas $x$ , $y$ e $z$ , respecto al marco fijo. ${}^b\tau_{RP} = [L_{RP} \ M_{RP} \ N_{RP}]$
${}^b\tau_{RT}$	$[kg.m^2/s^2]$	Vectores de torque del rotor trasero en cada eje de coordenadas $x$ , $y$ e $z$ , respecto al marco fijo. ${}^b\tau_{RT} = [L_{RT} \ M_{RT} \ N_{RT}]$
${}^b\tau_{DRP}$	$[kg.m^2/s^2]$	Vectores de torque aerodinámico en cada eje de coordenadas $x$ , $y$ e $z$ , respecto al marco fijo. ${}^b\tau_{DRP} = [L_{DRP} \ M_{DRP} \ N_{DRP}]$
$I$	$[kg.m^2]$	Matriz de momentos de inercia.
$I_{xx}$	$[kg.m^2]$	Tensor de inercia sobre el eje $x$ .
$I_{yy}$	$[kg.m^2]$	Tensor de inercia sobre el eje $y$ .
$I_{zz}$	$[kg.m^2]$	Tensor de inercia sobre el eje $z$ .
$d_x$	$m$	Distancia del centro de gravedad al eje del rotor principal sobre el eje $x$ .
$d_y$	$m$	Distancia del centro de gravedad al eje del rotor principal sobre el eje $y$ .
$d_z$	$m$	Distancia del centro de gravedad al eje del rotor principal sobre el eje $z$ .

$d_{x_{RT}}$	$m$	Distancia del centro de gravedad al eje del rotor trasero sobre el eje $x$ .
$d_{z_{RT}}$	$m$	Distancia del centro de gravedad al eje del rotor trasero sobre el eje $z$ .

## INTRODUCCIÓN

Desde el surgimiento del helicóptero diferentes estudios han sido desarrollados a fin de optimizar el comportamiento de estas máquinas, pues por su versatilidad y su capacidad de vuelo vertical, pueden ser utilizadas en diferentes aplicaciones. Las propiedades aerodinámicas y dinámicas presentes durante el vuelo en este tipo de aeronaves, tienen una repercusión directa sobre el espacio seis-dimensional en el que se mueve. Sin embargo, las entradas de control no permiten de manera directa, actuar sobre cada coordenada espacial, lo cual significa que el sistema en estudio es altamente subactuado<sup>1</sup>. Adicionalmente, la interactividad entre las variables que intervienen en las dinámicas de vuelo y la dependencia directa con variables externas como la velocidad del viento, su dirección y la densidad de aire, terminan por hacer del helicóptero una aeronave compleja de controlar. En ese orden de ideas, es importante desarrollar modelos que permitan analizar no solo su característica subactuada, sino también aspectos de estabilidad, control, etc.

Existen dos perspectivas clásicas para modelar y caracterizar su vuelo: i) el modo crucero; el cual consiste en hacer que el helicóptero siga una trayectoria espacial preestablecida y ii) el modo estacionario (también conocido como “hovering”), y es en éste último en el que se concentra este trabajo. El vuelo estacionario permite aplicaciones de alta precisión en las que el helicóptero mantiene fija una posición espacial mientras se encuentra suspendido en el aire, esta facultad le permite realizar operaciones de tipo militar; en la descarga de tropa, de transporte; helicópteros grúa, agropecuarias, de rescate, industriales; como la supervisión de líneas de alta tensión, entre otros. Los diferentes usos de este tipo de aeronaves y la complejidad de sus dinámicas, dejan ver la clara necesidad de abordar la temática a fin de ampliar su estudio.

Se propone entonces encontrar un modelo que describa las dinámicas no lineales del helicóptero a escala KDS 450SV y diseñar una ley de control robusto que permita estabilizarlo en vuelo estacionario. Se encuentra una aproximación del modelo matemático como se muestra en la Figura 1, el cual es una adaptación de los diferentes modelos generales propuestos por (Tobias, Krogstad, & Gravdahl, 2008), (Naldi & Marconi, 2006), (Masajedi, Ghanbarzadeh, & Shishesaz, 2012), (Hald, Hesselbaek, Holmgaard, Jensen, Jakobsen, & Siegumfeldt, 2005). El esquema de modelación consiste en dividir un gran modelo en dos submodelos, el Fuselaje y el sistema Motor. Esto se logra partiendo del principio que, discriminando variaciones abruptas de la densidad del aire, la sustentación de un helicóptero puede ser controlada manipulando el ángulo de paso de las aspas del rotor principal y manteniendo una velocidad angular constante del eje del rotor principal.

El sistema Fuselaje se analiza desde aproximaciones físicas a partir de la teoría de momentos, las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler y algunas aproximaciones aerodinámicas, para determinar un conjunto de ecuaciones no lineales que determinen la relación entre las entradas de colectivo, cíclico, pedales y la velocidad angular con las velocidades traslacionales, angulares y los ángulos de Euler del helicóptero.

El sistema Motor se comprende un conjunto de elementos que permiten la rotación del rotor principal, entre otros se encuentran el eje del rotor principal, la barra estabilizadora bell hiller, el plato oscilante, las aspas del rotor principal, piñones, enlaces (links), bisagras y de manera directa el rotor trasero que se conecta por una correa dentada. Por tanto, la identificación del sistema comprenderá encontrar un modelo multivariable y lineal del sistema utilizando la teoría de la identificación de defina la relación entre el sistema Motor, el acelerador y el colectivo con la velocidad angular ( $\Omega$ ) del rotor principal.

---

<sup>1</sup> Un sistema subactuado es aquel que tiene más grados de libertad que entradas de control.

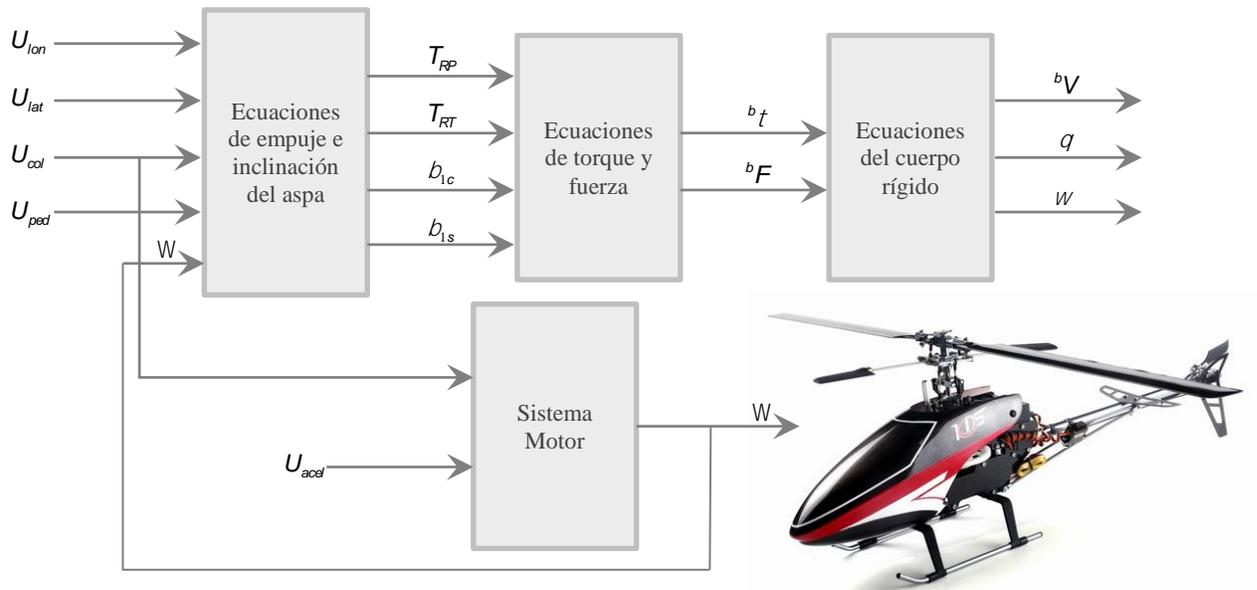


Figura 1. Modelo propuesto para la descripción dinámica del helicóptero en estudio.

Siguiendo la estructura del modelo de la Figura 1, se planteó diseñar una estrategia de control robusto utilizando la técnica  $H_\infty$  para controlar la estabilidad en vuelo estacionario del helicóptero KDS450SV. Para lograr este propósito, se encuentra un modelo lineal que describe el comportamiento dinámico del Helicóptero en vuelo estacionario, luego se realiza el proceso de identificación de un modelo lineal del sistema motor del helicóptero utilizando el Toolbox de identificación de sistemas de Matlab. Seguido a esto se determina la incertidumbre de los dos modelos. Posteriormente se encuentra una ley de control lineal para la regulación de velocidad del eje del rotor principal y una ley de control robusta  $H_\infty$  para lograr la estabilización en vuelo estacionario del helicóptero. Finalmente se simula y analiza el sistema planta controlador para determinar su comportamiento.

El presente documento muestra algunas definiciones generales, la notación utilizada, el procedimiento seguido para determinar las ecuaciones de cuerpo rígido, las ecuaciones de torque y fuerza, las ecuaciones de empuje e inclinación del aspa, el proceso de experimentación y la identificación del sistema motor del helicóptero, el análisis y validación de los modelos no lineales y la linealización, y finalmente las estructuras de control utilizadas y la respectiva evaluación de los mismos.

# 1. MARCO TEÓRICO

## 1.1. VELOCIDAD INDUCIDA DEL ROTOR PRINCIPAL RESPECTO AL AIRE

La caracterización del comportamiento del rotor y su relación con el aire debe ser analizada en los diferentes modos de vuelo que la aeronave puede desempeñar; cuando el helicóptero está en tierra, cuando realizan ascensos o descensos en la vertical, cuando se hacen maniobras de sustentación, cuando se encuentra en velocidad crucero, etc. Para esto, la teoría de momentos, la mecánica de fluidos, la teoría de vortex, la ley de Biot-Savart y la teoría de potencial, determinan el comportamiento en cada uno de estos modos.

Generalmente, se asume que el disco rotor está formado por un número de aspas infinito con una superficie plana de área constante ( $A$ ), el cual succiona el aire, generando un cono de succión, y lo acelera produciendo un empuje total ( $T$ ) y logrando velocidades de viento como: muy arriba del disco rotor ( $v_0$ ), en el disco del rotor la inducida en el disco del rotor ( $v_i$ ), la velocidad inducida lejana abajo del rotor ( $w$ ) y la velocidad de ascenso respecto al aire ( $V$ ) como se enseña en la Figura 2.

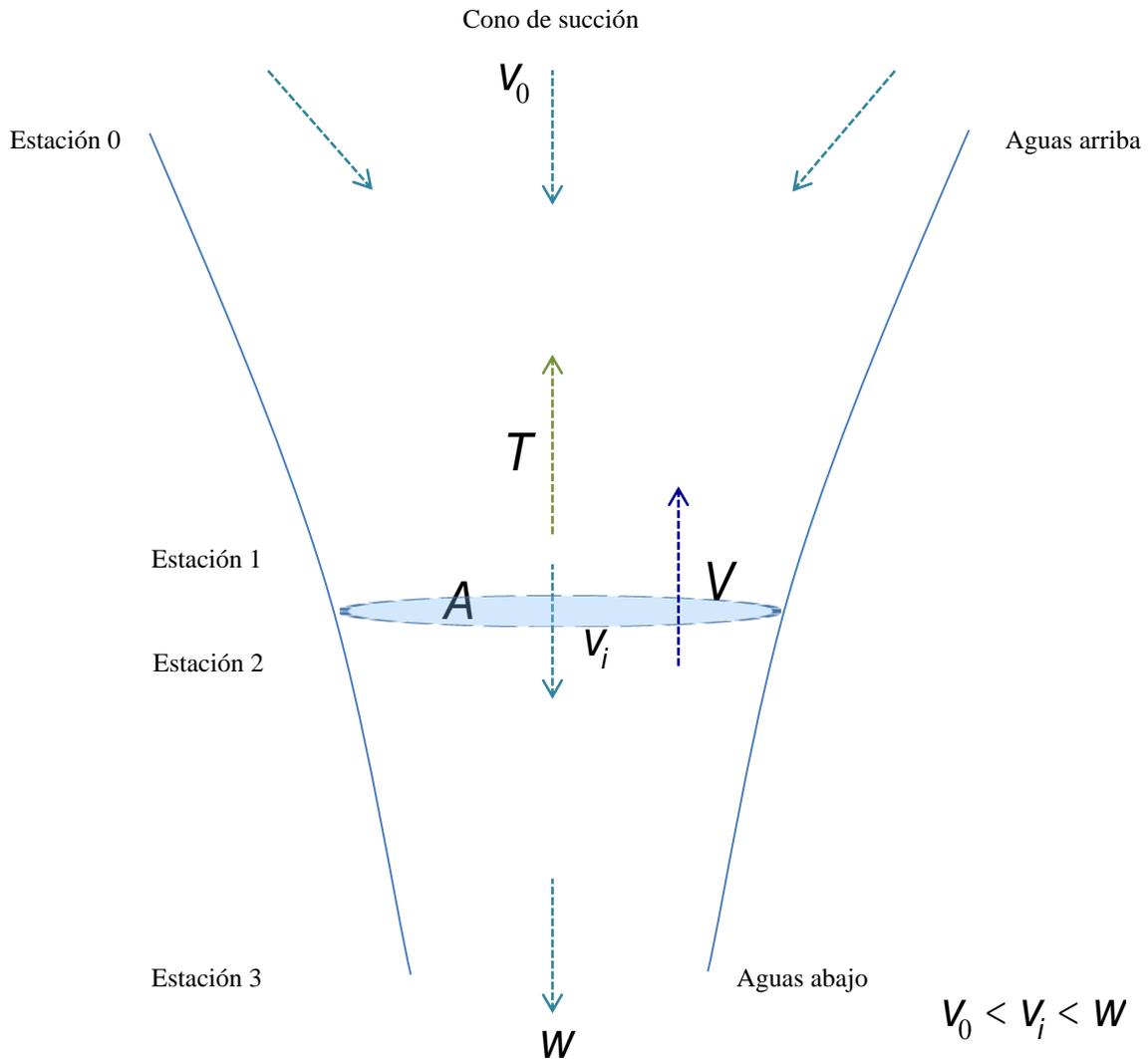


Figura 2. Cono formado en vuelo estacionario (Hover).

Cada modo de vuelo comprenderá ciertos supuestos y un análisis de la teoría de momentos para el modelo del flujo del aire, de forma diferente. Autores como (Cooke & Fitzpatrick, 2002), (McCormick Jr., 1999),

(Leishman, 2006), (Padfield, 2007), (Seddon, 1990), (Hafner, 1954) y (Young, 1978), entre otros, muestran cómo la teoría de momentos ayuda a encontrar un modelo de forma independiente, sin embargo, éstos no son aplicables para hallar un modelo general (Mendes de Almeida Correia da Cunha, 2002). Para dar solución a esta problemática, autores como (Cooke & Fitzpatrick, 2002), (McCormick Jr., 1999), (Leishman, 2006), (Padfield, 2007), (Seddon, 1990), (Hafner, 1954) y (Young, 1978) determinaron un ajuste empírico para determinar en qué instantes la teoría de momentos es válida, como se puede observar en la Figura 3. Allí se muestra el análisis para vuelo en sustentación y su relación cuando se tienen altas velocidades de descenso y de ascenso ( $V/v_H < -2$ ,  $V/v_H \geq 0$ ), donde la teoría de momentos se cumple. Sin embargo a velocidades de descenso entre  $-2 < V/v_H < 0$ , se deben realizar algunos ajustes, pues la teoría de momentos deja de cumplirse.

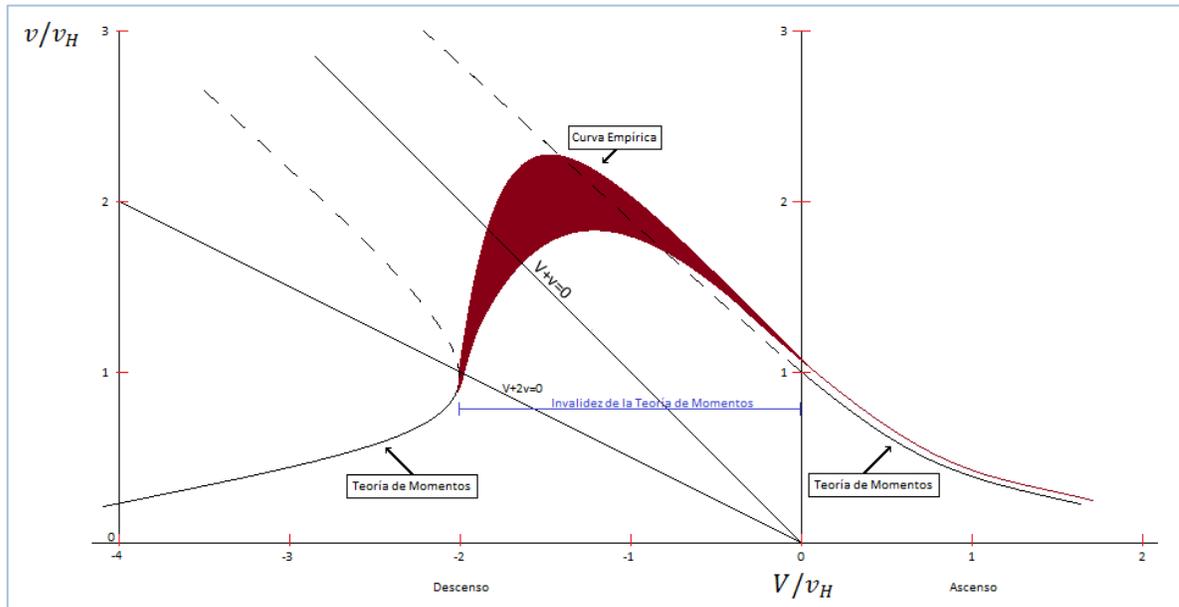


Figura 3. Método empírico para la validación de la Teoría de Momentos.

Wayne plantea un cuadro resumen en el que relaciona los diferentes estados donde la teoría de momentos tiene validez (Wayne, 1994).

ESTADO	INTERVALO	ECUACIÓN
Ascenso	$V/v_H > 0$	$v_i = \sqrt{(V/2)^2 + v_h^2} - V/2$
Estacionario (Hover)	$V/v_H = 0$	$v_i = \sqrt{(V/2)^2 + v_h^2} - V/2 \quad \forall V = 0$
Bajas velocidades	$-1 < V/v_H < 0$	$v_i = \sqrt{(V/2)^2 + v_h^2} - V/2$
Estela Turbulenta y Vórtice de Anillo	$-2 < V/v_H < -1$	$v_i = kV[0.373(V/2)^2 - 1.991]$
Autorrotación Ideal	$V/v_H = -1.71$	$v_i = 6v_h + 2.5V$
Molino de Viento	$V/v_H < -2$	$v_i = -\sqrt{(V/2)^2 + v_h^2} - V/2$

Tabla 1. Aplicación de la teoría de momentos.

En el modo de vuelo estacionario o vuelo en bajas velocidades, la velocidad de ascenso ( $V$ ) es igual a 0 o relativamente baja, y la velocidad en hover ( $v_h$ ) tenderá constante. Por tanto, la relación que mejor describe este comportamiento es extraída de la tabla anterior, como se aprecia en la ecuación (1).

$$v_i^2 = \sqrt{\left(\frac{V^2}{2}\right)^2 + v_h^2} - \frac{V^2}{2} \quad (1)$$

Para encontrar la velocidad de hover, se deben hacer algunas suposiciones. Se rechaza la energía en la estela debida al torque del rotor y se asume el aire como un fluido incompresible y no viscoso (sin rozamiento). A partir de esta teoría y echando mano de la teoría de la conservación de la masa se define el flujo másico a través del disco como:

$$\dot{m} = \rho A v_i \quad (2)$$

Siguiendo la ley de conservación de masa se puede estimar que el flujo másico es constante en toda la estela formada por el disco. El flujo aguas arriba (figura 2) está en reposo, por esto el empuje del rotor principal puede calcularse mediante la ley de conservación de momentos, por lo que la fuerza total aplicada es simétrica al empuje generado y es igual a una variación del momento lineal, el cual considera el producto entre el flujo másico y la velocidad del viento muy por debajo del rotor:

$$T = \dot{m} w = \rho A v_i w \quad (3)$$

Para comprender el concepto del cono formado por el flujo del aire a través del disco del rotor (visto en la Figura 2), es necesario comprender el Teorema de Bernoulli, pues al establecerse dicho cono se puede observar que el proceso es similar al tubo de Venturi. Por esto, es necesario que exista una compensación de todas las variables (en este caso la velocidad y la presión, pues la densidad del fluido es constante), es decir, cuando existe un aumento de velocidad del aire existirá una disminución de la presión generada por las aspas del rotor directamente proporcional a esta y viceversa.

Haciendo referencia a la Figura 4, La velocidad del aire  $V_1$  es mayor a la de  $V_2$ , traduciéndose en un diferencial de presión entre la parte superior del aspa y la parte inferior de la misma, conllevando a que exista una presión mayor debajo del ala y una menor por encima de esta, produciendo finalmente la elevación.

Al relacionar las presiones que actúan en el cono formado por el disco del rotor, la presión total ( $p_t$ ) es igual a la presión estática ( $p_e$ ) más la dinámica ( $q$ ). Debido a que el aire es impulsado por el rotor, es necesario tener en cuenta que existen 4 puntos en los que se debe medir la presión, así que se estima la presión aguas arriba del disco del rotor (estación 0), sobre el disco del rotor (estación 1), debajo del disco del rotor (estación 2) y aguas abajo del disco del rotor (estación 3). Al asumir que el nivel de presión aguas arriba del disco rotor es igual a la presión atmosférica ( $p_0$ ) se puede aplicar el Teorema de Bernoulli entre las estaciones 0 y 1 enseñadas en la Figura 2.

$$p_0 = p_1 + q \quad (4)$$

La presión dinámica ( $q$ ) está dada por la rotación del disco, la cual es producida por la energía cinética del rotor, esto es:

$$q = \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (5)$$

Ya que el aire tiene masa, pues puede ejercer presión, es posible aproximar la masa ( $m$ ) a la densidad del aire ( $\rho$ ), con esto y reemplazando (5) en (4) se tiene que:

$$p_0 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_i^2 \quad (6)$$

Para calcular la presión entre las estaciones 2 y 3 (debajo del disco y aguas abajo del disco rotor) se debe tener en cuenta que la presión total en  $p_2$  incluye por si sola una presión dinámica; esto por la ley de la conservación de energía, pues la presión estática está siendo afectada directamente por la presión dinámica ejercida por el rotor, esto es:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_i^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho w^2 \quad (7)$$

Para encontrar la relación existente entre las presiones en las estaciones 0, 1, 2 y 3, puede determinarse reemplazando la ecuación (6) en (7), esto es:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_i^2 = \left[ p_1 + \frac{1}{2}\rho v_i^2 \right] + \frac{1}{2}\rho w^2 \quad (8)$$

Resolviendo,

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \frac{1}{2}\rho w^2 \\ p_2 - p_1 &= \frac{1}{2}\rho w^2 \end{aligned} \quad (9)$$

La ecuación (9) describe el diferencial de presión que pasa a través del disco rotor, a lo que se conoce también como la carga del disco rotor ( $LD$ ). Partiendo del hecho que la presión es una fuerza que se ejerce por unidad de área, es posible relacionar la ecuación (9) con el empuje requerido para que el disco rotor pueda levantar el peso del helicóptero, mediante la relación de  $T/A$ , esto es,

$$\begin{aligned} LD &= \frac{T}{A} = p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho w^2 \\ \frac{T}{A} &= \frac{1}{2}\rho w^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Retomando (3), reemplazándola en (10) y resolviendo se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{\rho A v_i w}{A} &= \frac{1}{2}\rho w^2 \\ v_i &= \frac{1}{2}w \end{aligned} \quad (11)$$

$$w = 2v_i \quad (12)$$

Con este resultado claramente se puede observar que la velocidad del aire en la estela que se encuentra aguas abajo del disco del rotor es dos veces más rápida que la velocidad inducida en el disco. A partir de esto es posible replantear una nueva ecuación de empuje, por lo tanto relacionando (2), (3) y (12), se determina que,

$$v_H^2 = \frac{T}{2\rho A} \quad (13)$$

En (13) se realiza el cambio de variable de  $v$  a  $v_H$ , pues la velocidad inducida del aire que pasa por el rotor principal es justamente la velocidad requerida para lograr la sustentación del helicóptero en el aire. Al reemplazar (13) en (1) y teniendo en cuenta que  $A = \pi R^2$ , finalmente se tiene que,

$$v_i^2 = \sqrt{\left(\frac{V^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{T}{2\rho\pi R^2}\right)^2} - \frac{V^2}{2} \quad (14)$$

## 1.2. FUNCIÓN DE ARRASTRE AERODINÁMICO

Cuando las aspas del helicóptero se encuentran rotando se someten a la resistencia del aire, así como a las turbulencias generadas por cada aspa, como se observa en la Figura 4. Existen diferentes aproximaciones para determinar el torque generado por el arrastre aerodinámico de los rotores principal y trasero, algunas más complejas que otras, por lo que es necesario encontrar la forma de determinarlo. Autores como (Naldi & Marconi, 2006), (Tobias, Krogstad, & Gravdah, 2008), (Masajedi, Ghanbarzadeh, & Shishesaz, 2012), (Wang, Wang, Niu, & Duan, 2007) y (Prouty, 2001) plantean una aproximación a la función de torque relacionando el empuje del rotor y su arrastre, y el arrastre del rotor cuando las aspas tienen ángulo de ataque cero (15); donde el subíndice  $i$  corresponde al rotor principal  $RP$  y rotor trasero  $RT$ .

$$Q_i \cong C_i T_i^{1.5} + D_i \quad (15)$$

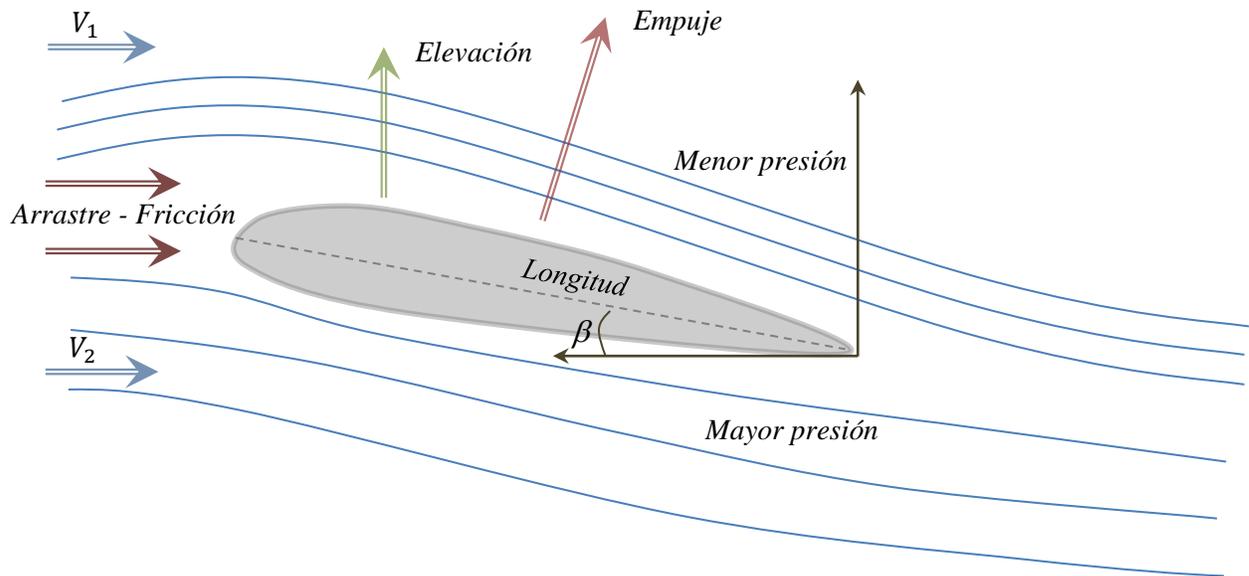


Figura 4. Perfil del aspa.

El conjunto de ecuaciones descritas permiten encontrar el empuje generado por las aspas del rotor principal en vuelo estacionario.

## 1.3. TEORÍA DE MOMENTOS

Las ecuaciones de movimiento pueden ser calculadas igualando la tasa de cambio de los momentos angulares y lineales de las fuerzas y momentos aplicados. A partir de esto se selecciona un punto arbitrario  $P$ , dentro del fuselaje, para el cual se encuentra una expresión para la aceleración absoluta.

Ya que la distancia del CDG al punto  $P$  puede determinarse mediante una relación con los vectores unitarios, tal como se muestra en (16),

$$\mathbf{P} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (16)$$

Y la velocidad angular respecto al CDG se describe como se enseña en (17).

$$\boldsymbol{\omega}_{CDG} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} \quad (17)$$

El momento angular absoluto sobre el centro de masa de un cuerpo rígido, según [(Wie, 1998), p. 332], puede definirse como:

$$\vec{H} = \int \vec{r} \times \underbrace{\dot{\vec{R}}}_{\dot{a}_p} dm = \int \vec{r} \times \left( \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}} \right) dm = \int \vec{r} \times \dot{\vec{r}} dm = \int \vec{r} \times (\omega_{CDG} \times \vec{r}) dm \quad (18)$$

Resolviendo (16),

$$\begin{aligned} \vec{H} = & \left[ p \int (y^2 + z^2) dm - q \int yx dm - r \int zx dm \right] \mathbf{i} \\ & + \left[ -p \int xy dm + q \int (x^2 + z^2) dm - r \int zy dm \right] \mathbf{j} \\ & + \left[ -p \int xz dm - q \int yz dm + r \int (x^2 + y^2) dm \right] \mathbf{k} \end{aligned} \quad (19)$$

De (19) se puede observar que algunas de las ecuaciones son los momentos de inercia del CDG y los productos inerciales (momentos centrífugos del CDG), esto es:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm \quad (20)$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm \quad (21)$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm \quad (22)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = - \int yx dm \quad (23)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = - \int zx dm \quad (24)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = - \int yz dm \quad (25)$$

A partir de esto, y representando (19) de forma matricial,

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = I\omega \quad (26)$$

Basado en el principio de conservación del momento angular y al ubicar el momento angular absoluto sobre el centro de masa, el torque ( $\tau$ ) se puede definir como  $\dot{\vec{H}} = \tau = [L \quad M \quad N]^T$ , por lo tanto,

$${}^b\tau = \frac{dH}{dt} \quad (27)$$

Aunque la ecuación (27) es válida cuando el cuerpo rígido experimenta rotaciones en todos sus ejes, no resulta práctica para determinar el movimiento, pues el helicóptero realizará movimientos en cada eje de manera secuencial. Teniendo en cuenta este hecho y tomando como referencia la ecuación de rotación de Euler (segunda ley de Euler), es posible encontrar un nuevo resultado para la ecuación (19). Para esto debe fijarse un marco de coordenadas al cuerpo rígido sobre el CDG y alinearlos a los ejes principales del tensor de inercia  $I$ ; asumiendo los momentos de inercia principales sobre cada eje ( $diag(I)$ ). Con esto, la ecuación del movimiento angular, según la segunda ley de Euler es:

$${}^b\tau = \dot{\vec{H}} + \omega \times H \quad (28)$$

Resolviendo,

$$b_\tau = \frac{d(I\omega)}{dt} + \omega \times (I\omega) \quad (29)$$

$$b_\tau = \dot{I}\omega + I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) \quad (30)$$

De (30) se tiene que la inercia no cambia respecto al tiempo, por lo que  $\dot{I} = 0$ , esto es, el primer término de la ecuación es igual a cero.

$$b_\tau = I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) \quad (31)$$

Al despejar la aceleración angular de (31), se tiene que:

$$\dot{\omega} = I^{-1}[b_\tau - \omega \times I\omega] \quad (32)$$

#### 1.4. CONTROL $H_\infty$ LOOP SHAPING

La técnica de control loop shaping (Zhou, Doyle, & Glover, 1996) se basa en el diseño de un precompensador o un postcompensador que alteran los valores singulares de la planta nominal para lograr un perfil de lazo abierto deseado. El diseño del controlador sigue tres pasos básicos que buscan finalmente obtener un lazo de control estable con requerimientos de robustez.

##### 1.4.1. Paso 1.

Encontrar un precompensador  $W_1(s)$  o un postcompensador  $W_2(s)$  que se combinan con el modelo nominal  $P(s)$  para obtener el perfil en frecuencia deseado para el lazo abierto de la planta para control, la cual se describe como  $P_s(s) = W_2(s)P(s)W_1(s)$ . La Figura 5 muestra el esquema del procedimiento para el diseño de la planta de control.

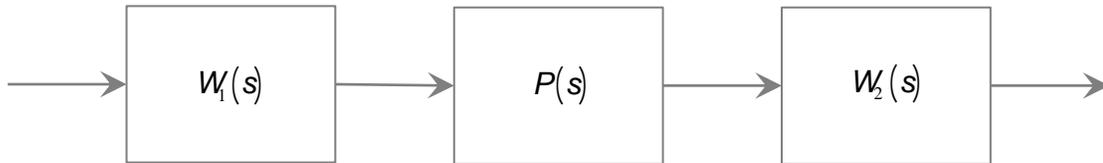


Figura 5. Construcción del lazo abierto para control.

##### 1.4.2. Paso 2.

Para lograr la estabilización robusta se siguen dos pasos intermedios. Primero se calcula el valor para el cual se logra un controlador que cumpla la minimización de la norma  $H_\infty$ . Para esto, se calcula el valor  $\epsilon_{max}$  siguiendo

$$\epsilon_{max} = \left( \inf_{K \text{ estabilizada}} \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + P_s(s)K)^{-1} \tilde{M}_s^{-1} \right\|_\infty \right)^{-1} \quad (33)$$

$$\epsilon_{max} = \sqrt{1 - \|\tilde{N}_s \tilde{M}_s\|_H^2} < 1 \quad (34)$$

Donde las variables  $\tilde{M}_s$  y  $\tilde{N}_s$  son los factores coprimos normalizados de la planta para control  $P_s(s)$ , de tal forma que  $P_s(s) = \tilde{M}_s^{-1}\tilde{N}_s$  y se cumpla la condición que  $\tilde{M}_s\tilde{M}_s + \tilde{N}_s\tilde{N}_s = I$ . Si el valor de  $\epsilon_{max}$  tras el proceso, es mucho menor a 1, se debe retornar al paso 1 y replantear el diseño del precompensador y el postcompensador.

Luego se debe encontrar un seleccionar  $\epsilon \leq \epsilon_{max}$ , que permita sintetizar un controlador estable  $K_\infty$  que satisfice que:

$$\left\| \begin{bmatrix} I \\ K_\infty \end{bmatrix} (I + P_s(s)K_\infty)^{-1} \tilde{M}_s^{-1} \right\|_\infty \leq \epsilon^{-1} \quad (35)$$

### 1.4.3. Paso 3.

El controlador resultante se construye combinando  $K_\infty$  y los filtros  $W_1(s)$  y  $W_2(s)$  como se muestra en (132)

$$K = W_1(s)K_\infty W_2(s) \quad (36)$$

La implementación del controlador se logra siguiendo la estructura planteada en la Figura 6, la cual puede ser simulada en software como Simulink y el diseño del controlador a su vez utilizando la función “nfcsyn()” de Matlab.

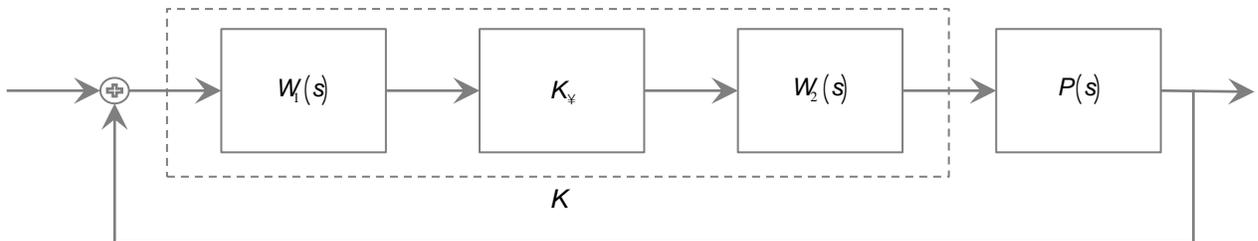


Figura 6. Estructura del controlador  $H_\infty$  Loop Shaping.

## 2. ESPECIFICACIONES

Para poder entender algunas de las operaciones que se realizarán es necesario acordar ciertos criterios y definiciones que confluirán para establecer las ecuaciones de dinámica, cinemática y aerodinámica del vuelo del helicóptero en estado estacionario.

### 2.1. MARCOS DE REFERENCIA

El helicóptero puede considerarse como un cuerpo rígido que se traslada y rota sobre cada uno de sus ejes, teniendo así 6 grados de libertad de movimiento. A partir de esto y con el fin de determinar su ubicación en el espacio, deben contemplarse marcos de referencia que permitan distinguir sus movimientos en el proceso de modelación.

Por conveniencia se selecciona un Marco Terrestre **EF** para representar los movimientos respecto al globo terráqueo, el cual se asume como plano-estacionario. El origen de **EF** se asume arbitrariamente con el eje  $x$  apuntando en una dirección conveniente, el eje  $z$  de manera vertical hacia abajo y el eje  $y$  perpendicular a los dos ejes. Un segundo marco representado como Marco Fijo **BF** es ubicado en el centro de masa o gravedad del helicóptero. Para éste último se escoge el eje  $x$  en dirección a la nariz de la aeronave, el eje  $y$  a la derecha de la misma y el  $z$  verticalmente hacia abajo y perpendicular a los demás. Para mayor claridad se bosquejan los ejes y marcos en la Figura 7. Con el fin de describir los movimientos rotacionales se define un Marco Espacial **SF**, el cual se orienta de igual forma que el **EF** pero con  $z$  apuntando hacia arriba y con origen en el **BF**. Para mayor claridad se utilizarán los superíndices  $b$ ,  $e$  y  $s$  para indicar los marcos BF, EF, SF.

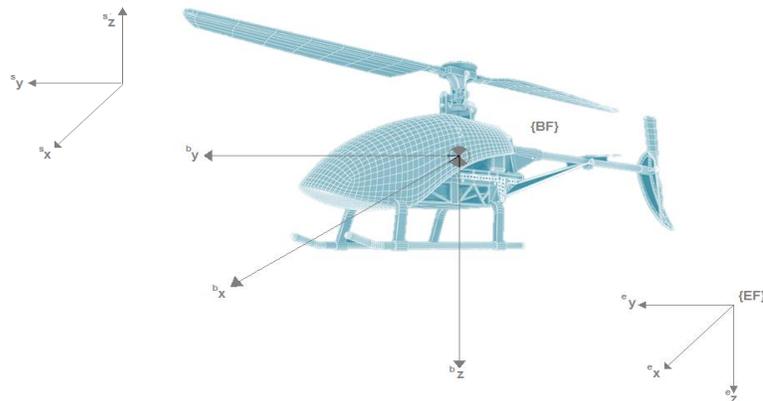


Figura 7. Sistema de coordenadas respecto al CDG.

### 2.2. NOTACIÓN

Para denotar los movimientos del helicóptero respecto al aire se definen algunas variables que describen cada caso, como se aprecia en la Figura 8. El desplazamiento de la aeronave en el marco **BF** respecto al **SF** es representado por el vector  $P = \{x \ y \ z\}$  y la velocidad traslacional en **BF** respecto al **SF** se representa como  ${}^eV = \{u \ v \ w\}$ . Para el caso de los movimientos rotacionales, los ángulos de Euler en el **BF** expresados en el **BF** serán denotados por  $\Theta = \{\phi \ \theta \ \psi\}$  y la velocidad angular como  $\omega = \{p \ q \ r\}$ .

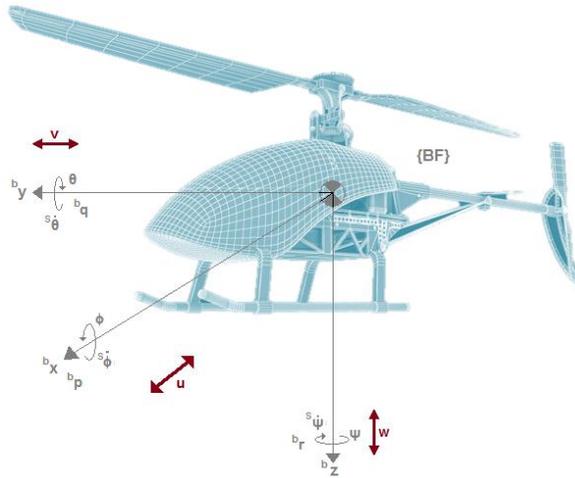


Figura 8. Variables de posición y orientación del helicóptero.

Los movimientos del helicóptero son el resultado de las fuerzas generadas por el rotor principal y el rotor trasero. Cuando se realiza un cambio en el ángulo de ataque o en la inclinación de las aspas, se presentan cambios en las direcciones de las fuerzas de empuje, sustentación y propulsión, logrando una variación de la dirección y la magnitud del movimiento. La Figura 9 permite distinguir el plano formado por las puntas de las aspas cuando se presentan inclinaciones en los ejes  $x$  e  $y$  con el fin de lograr trayectorias longitudinales y laterales (plano **TPP**) y el plano cubierto por el rotor principal cuando se encuentra en estado nulo **HP** (sin inclinación).

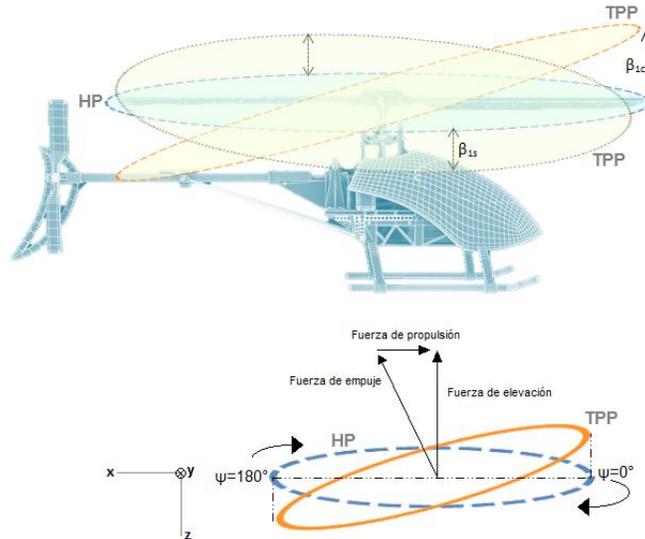


Figura 9. Movimientos longitudinales y laterales.

### 2.3. DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MODELO

Con el fin de determinar una función  $\dot{X} = f(x, U)$  que describa las características dinámicas y aerodinámicas del helicóptero, se analizan la teoría de momentos y las ecuaciones de Newton Euler, para configurar el diagrama de bloques que se enseñó en la Figura 1.

Las ecuaciones de empuje e inclinación del aspa aproximan la relación que existe entre las consignas de entrada  $U$  correspondientes a las señales de actuación del cíclico para movimientos longitudinales ( $U_{lon}$ ) y laterales ( $U_{lat}$ ), de los pedales para la orientación en guiñada ( $U_{ped}$ ), y por último el colectivo para la

elevación ( $U_{col}$ ). Debe contemplarse que el empuje generado por el rotor principal ( $T_{RP}$ ) tiene relación directa con la velocidad angular ( $\Omega$ )<sup>2</sup>, por lo que se incluye un bloque que la relaciona el colectivo y el acelerador del motor ( $U_{accel}$ ). Finalmente el vector de entradas se muestra a continuación.

$$U = \{U_{lon}, U_{lat}, U_{ped}, U_{col}, U_{accel}\} \quad (37)$$

La relación de las variables de  $U$ , se interrelacionan para determinar el empuje de los rotores principal y trasero, esto es ( $T_{RP}$ ) y ( $T_{RT}$ ) respectivamente, así mismo a partir de éstas es posible determinar los ángulos de inclinación laterales y longitudinales del marco del rotor principal, esto es ( $\beta_s$ ) y ( $\beta_c$ ) respectivamente. Con los empujes y los ángulos pueden aproximarse las ecuaciones de torque  ${}^b\tau$  y fuerza  ${}^bF$  que dominan el helicóptero.

Mediante las ecuaciones de cuerpo rígido se pueden encontrar las posiciones lineales ( ${}^eP = \{x \ y \ z\}$ ), las velocidades traslacionales ( ${}^eV = \{u \ v \ w\}$ ), los ángulos de Euler ( $\Theta = \{\phi \ \theta \ \psi\}$ ), y las velocidades angulares ( $\omega = \{p \ q \ r\}$ ).

---

<sup>2</sup> Así mismo, un impacto significativo a la elevación.

### 3. DESARROLLOS

Con el propósito de esquematizar la distribución de los desarrollos, se plantean diferentes apartados e índices. La Figura 10 muestra que en una primera instancia se presentarán las ecuaciones con las que se obtuvo el modelo no lineal del fuselaje y la posterior linealización. Luego se dará a conocer el proceso de experimentación y posterior identificación del modelo lineal del sistema Motor-Colectivo-Acelerador. Finalmente se plantearán las leyes de control desarrolladas para cada uno de los modelos lineales.

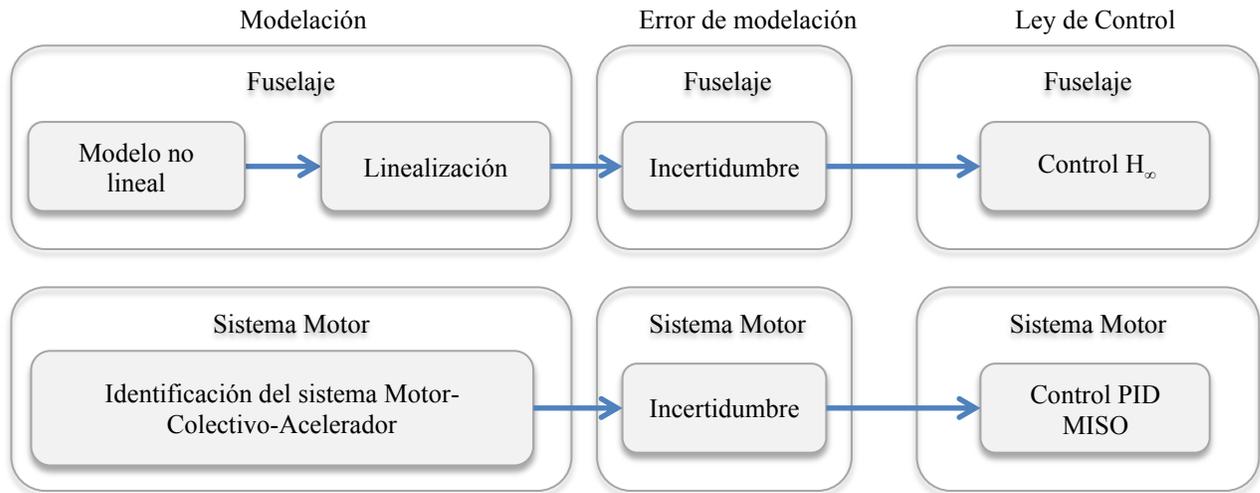


Figura 10. Esquema de presentación de los desarrollos.

Así bien, se presentará a continuación el desarrollo del modelo no lineal del fuselaje del helicóptero tomando como referencia el esquema visto en la Figura 1. De allí se extraen tres áreas particulares y se presentan en el siguiente orden: las ecuaciones del cuerpo rígido, las ecuaciones de torque y fuerza y las ecuaciones de empuje e inclinación del aspa.

#### 3.1. MODELO NO LINEAL DEL HELICÓPTERO.

Para determinar la ley de control robusto apropiada que mantenga el helicóptero en vuelo estacionario, se realiza un análisis de la aeronave en bloques. En primer lugar se encuentra un modelo no lineal para determinar finalmente las velocidades angulares y traslacionales.

##### 3.1.1. Ecuaciones de Cuerpo Rígido

Para dar solución a las ecuaciones movimiento para el cuerpo rígido, se hace una análisis de las ecuaciones cinemáticas y dinámicas que describen el comportamiento del helicóptero.

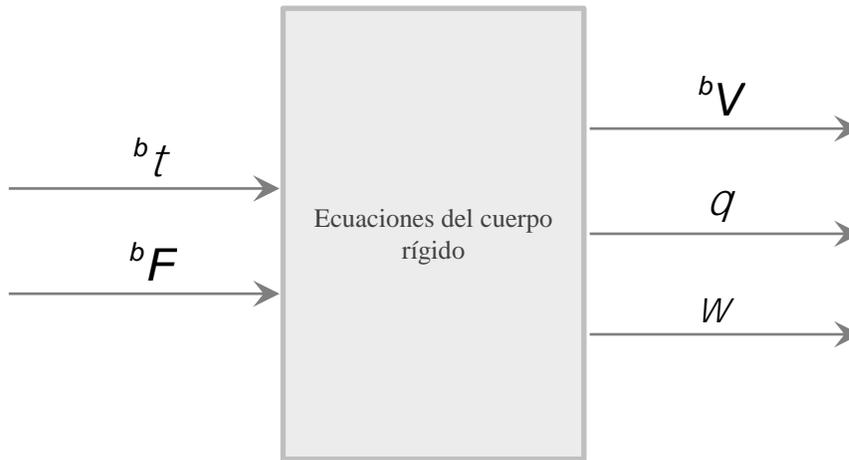


Figura 11. Bloque de las ecuaciones de cuerpo rígido.

La figura anterior describe la relación entre las velocidades traslacionales ( ${}^b V$ ), los ángulos de Euler ( $\theta$ ) y las velocidades angulares ( $\omega$ ), con los torques y las fuerzas generados por el rotor principal y trasero. Para esto, se analiza el helicóptero como un cuerpo rígido y se desarrollan matrices de transformación para determinar las velocidades lineales y la teoría de momentos para las rotacionales.

### 3.1.1.1. Cinemática

Al asumir que el helicóptero no cambiará su forma o su masa por actuación de fuerzas externas, es posible realizar un estudio de la cinemática para determinar la orientación de la aeronave cuando se realiza una rotación sobre alguno de los ejes  $x$ ,  $y$  o  $z$  en los marcos  $SF$  y  $BF$ . La secuencia estándar en la dinámica del vuelo es desviación (Yaw,  $\psi$ ), elevación (Pitch,  $\theta$ ) y giro (Roll,  $\phi$ ) como se muestra en la Figura 12.

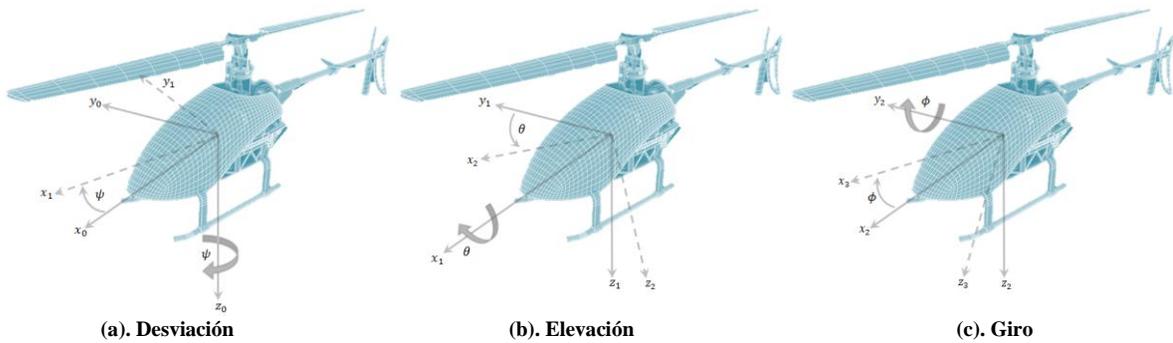


Figura 12. Rotaciones del helicóptero.

Para lograr la desviación se realiza una rotación de magnitud  $\psi$  sobre el eje  $z$ , por lo que los demás vectores se redireccionan y deben representarse de nuevo, tal como se observa en (39).

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) & 0 \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Tras la rotación en  $z$ , el fuselaje rota sobre el nuevo eje  $y$ , con un ángulo de elevación  $\theta$ , provocando una nueva distribución de los demás ejes, para esto se encuentra la representación matricial vista en (40).

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (40)$$

El último movimiento se realiza sobre el eje x en un ángulo  $\psi$ , y la rotación se expresa como se observa en (41).

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (41)$$

A partir de (33), (40) y (41), es posible describir una matriz orto-normal que represente la transformación entre marco **SF** al **BF**:

$$R_{bs}(\Theta) = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$$

$$R_{bs}(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta)\text{sen}(\psi) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\cos(\psi) - \cos(\phi)\text{sen}(\psi) & \text{sen}(\phi)\text{sen}(\psi)\text{sen}(\psi) + \cos(\phi)\cos(\psi) & \text{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\text{sen}(\theta)\cos(\psi) + \text{sen}(\phi)\text{sen}(\psi) & \cos(\phi)\text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi) - \text{sen}(\phi)\cos(\psi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (42)$$

Debido a que la matriz de transformación es orto-normal, es decir  $R_{bs}^{-1}(\Theta) = R_{bs}^T(\Theta)$ , siendo  $\Theta$  el vector de ángulos de Euler, por tanto puede establecerse una nueva matriz de transformación que permita expresar movimientos de **BF** a **SF**.

$$R_{sb}(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\cos(\psi) - \cos(\phi)\text{sen}(\psi) & \cos(\phi)\text{sen}(\theta)\cos(\psi) + \text{sen}(\phi)\text{sen}(\psi) \\ \cos(\theta)\text{sen}(\psi) & \text{sen}(\phi)\text{sen}(\psi)\text{sen}(\psi) + \cos(\phi)\cos(\psi) & \cos(\phi)\text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi) - \text{sen}(\phi)\cos(\psi) \\ -\text{sen}(\theta) & \text{sen}(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (43)$$

Con la matriz de transformación, el cambio entre marcos viene dado por  ${}^s x = R_{sb}(\Theta) {}^b x$

#### 3.1.1.1.1. Velocidad Angular

La velocidad angular del fuselaje en el sistema de coordenadas del marco **BF** relativo a **SF** está relacionada con las tasas de cambio de los ángulos de orientación ( $\omega$ ), o ángulos de Euler ( $\Theta$ ).

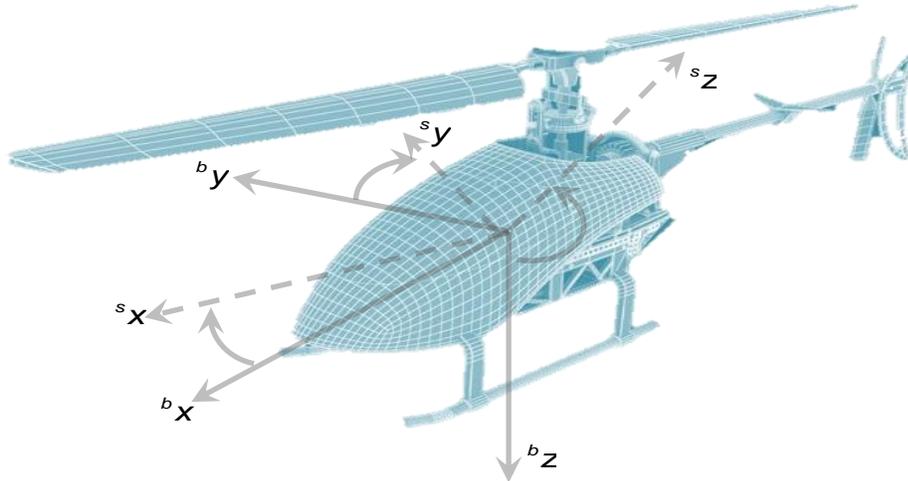


Figura 13. Proyección de la velocidad angular con BF rotado sobre el vector  $\omega_0$  de la posición inicial en el marco SF.

Debido a que  $\omega$  puede proyectarse en cualquiera de los marcos, puede encontrarse una correspondencia mediante (44).

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_x(\phi)R_y(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Resolviendo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\cos(\phi) \\ -\dot{\theta}\sin(\phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\sin(\theta) & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta}\cos(\phi) \\ -\dot{\theta}\sin(\phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\sin(\theta) \\ \dot{\psi}\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \dot{\psi}\cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin(\theta) \\ \dot{\theta}\cos(\phi) + \dot{\psi}\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \dot{\psi}\cos(\phi)\cos(\theta) - \dot{\theta}\sin(\phi) \end{bmatrix} \quad (45) \end{aligned}$$

Finalmente las ecuaciones de velocidad quedan,

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\omega = \Gamma_{bs}(\theta)\dot{\Theta} \quad (47)$$

La matriz de transformación  $\Gamma_{bs}(\theta)$  permite relacionar la velocidad angular con las tasas de Euler, del marco **SF** al **BF**, así mismo, debido a que esta matriz es orto-normal, es posible hacer un mapeo de **BF** a **SF** despejando  $\dot{\Theta}$  de la ecuación (47).

$$\dot{\Theta} = [\Gamma_{bs}(\theta)]^{-1}\omega \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi)\tan(\theta) & \cos(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (49)$$

Expandiendo (49),

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + r\cos(\phi)\tan(\theta) + q\sin(\phi)\tan(\theta) \\ q\cos(\phi) - r\sin(\phi) \\ q\frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} + r\frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \end{bmatrix} \quad (50)$$

### 3.1.1.2. Dinámica: Aceleración Angular

Para derivar las ecuaciones de movimiento es necesario continuar asumiendo que el helicóptero es un cuerpo rígido que cuenta con un centro de masa ubicado en el punto CDG (Centro de Gravedad). A partir

de esto se presentan unos componentes de velocidad traslacional  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  y rotacional  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{r}$ , las cuales se presentan bajo la acción de momentos angulares  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{N}$ , como se enseñan en la Figura 14.

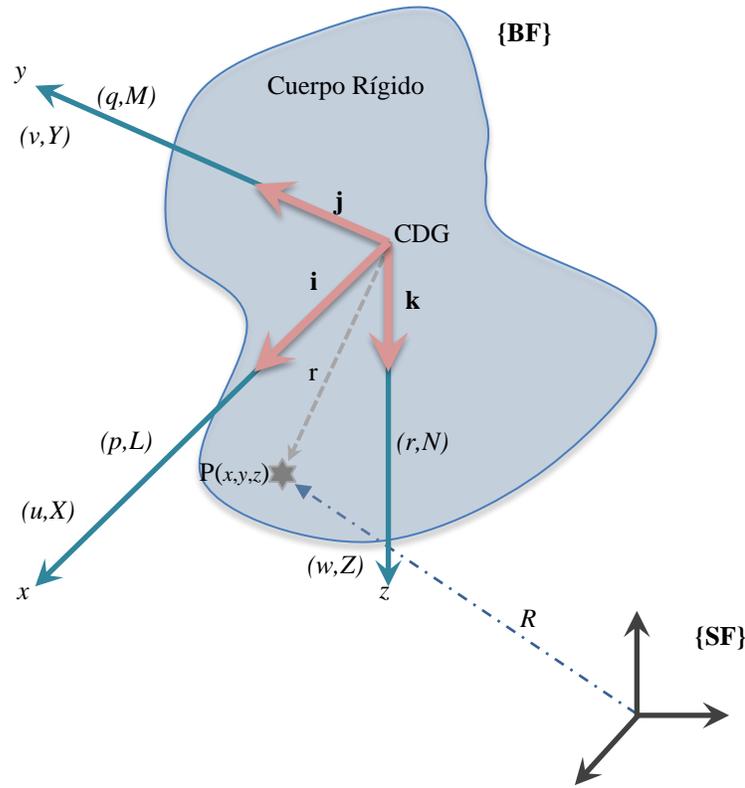


Figura 14. Eje de coordenadas del cuerpo rígido.

Retomando la ecuación (26), la matriz  $I$  está conformada por los momentos angulares sobre cada eje de rotación; conocidos como tensores de inercia, los cuales son calculados para el helicóptero KDS 450SV en el ANEXO 1: ESTIMACIÓN DEL TENSOR DE INERCIA.

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior, se resuelve la ecuación presentada en (32) para describir la aceleración angular final.

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L + qr(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} \\ \frac{M - pr(I_{zz} + I_{xx})}{I_{yy}} \\ \frac{N + pq(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (52)$$

### 3.1.1.3. Aceleración Traslacional

Con el propósito de seguir relacionando los torques y momentos del cuerpo rígido con las ecuaciones de movimiento, la aceleración traslacional puede determinarse a partir del cálculo de la fuerza ejercida sobre el CDG.

$${}^b F = ma \quad (53)$$

Al expandir (53) mediante la ecuación de transporte como se sugiere en [ (Kasdin & Paley, 2011), p. 444], la fuerza puede reescribirse como:

$${}^b F = m[{}^b \dot{v} + \omega \times {}^b v] \quad (54)$$

Al despejar la aceleración traslacional,

$${}^b \dot{v} = \frac{1}{m} {}^b F - (\omega \times {}^b v) \quad (55)$$

Expandiendo (55) se obtiene la aceleración traslacional.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^b \dot{u} \\ {}^b \dot{v} \\ {}^b \dot{w} \end{bmatrix} &= \frac{1}{m} \begin{bmatrix} {}^b f_x \\ {}^b f_y \\ {}^b f_z \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} {}^b u \\ {}^b v \\ {}^b w \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} {}^b \dot{u} \\ {}^b \dot{v} \\ {}^b \dot{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r {}^b v - q {}^b w + \frac{{}^b f_x}{m} \\ p {}^b w - r {}^b u + \frac{{}^b f_y}{m} \\ q {}^b u - p {}^b v + \frac{{}^b f_z}{m} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (56)$$

### 3.1.2. Ecuaciones de Torque y Fuerza

Para determinar las fuerzas  ${}^b F$  y torques  ${}^b \tau$  que actúan sobre el helicóptero, es necesario encontrar la relación existente entre los ángulos de inclinación para los movimientos longitudinales y laterales, el empuje generado por el rotor principal y el rotor trasero, la acción de la fuerza de gravedad, las fuerzas de arrastre o de fricción del fuselaje, entre otros.

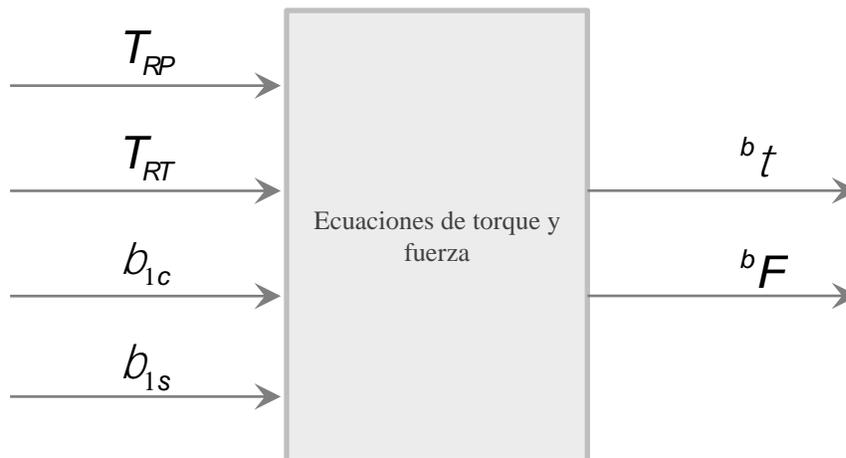
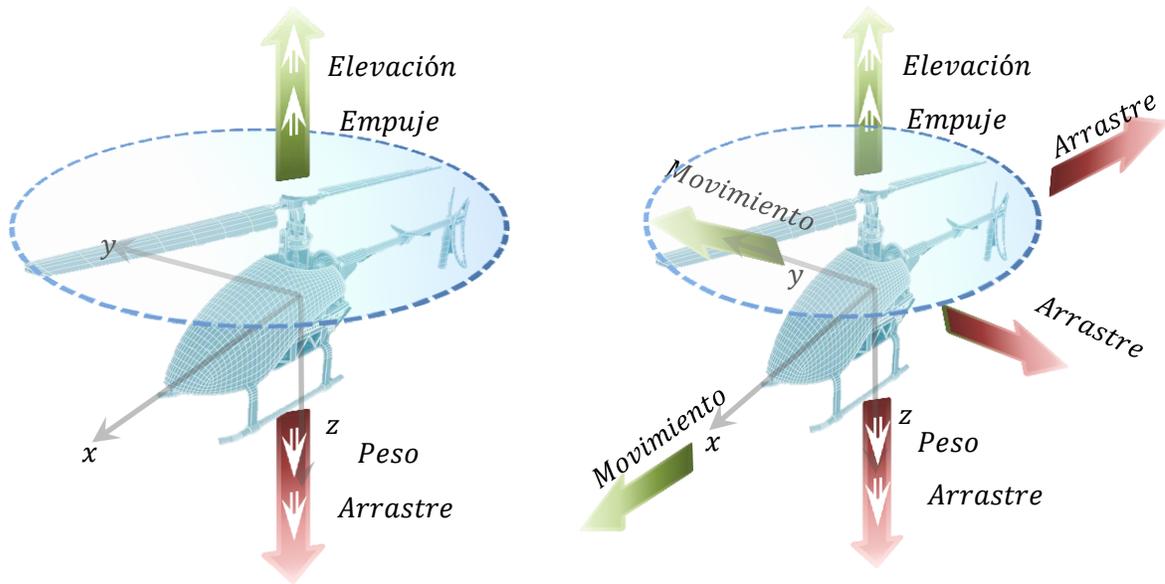


Figura 15. Diagrama de bloques de las ecuaciones de torque y fuerza.

### 3.1.2.1. Ecuaciones de Fuerza

La Figura 16 (a) enseña la relación entre la elevación y el empuje, con el peso y el arrastre aerodinámico, cuando el helicóptero se encuentra en vuelo estacionario, y por ejemplo en (b) se muestra la misma relación cuando se desplaza hacia la derecha y adelante. Durante el vuelo elementos como el rotor principal ( ${}^bF_{RP}$ ;  ${}^b\tau_{RP}$ ) y el rotor trasero ( ${}^bF_{RT}$ ;  ${}^b\tau_{RT}$ ) generan empujes que permiten movimientos verticales, laterales, longitudinales y rotacionales en los tres ejes cartesianos. Así mismo diferentes fuerzas, torques, empujes y arrastres aerodinámicos actúan sobre el helicóptero debido a efectos como: la oposición al aire por parte del fuselaje ( ${}^bF_{fus}$ ;  ${}^b\tau_{fus}$ ), las fuerzas de estabilización debidas a las aletas vertical ( ${}^bF_{vf}$ ;  ${}^b\tau_{vf}$ ) y horizontal ( ${}^bF_{hf}$ ;  ${}^b\tau_{hf}$ ) ubicadas en la cola, la barra estabilizador del rotor principal o Bell Hiller ( ${}^bF_{BH}$ ;  ${}^b\tau_{BH}$ ), entre otras. Al relacionar todas éstas, es posible determinar la fuerza y torque total del helicóptero.

El vuelo en Hover busca la estabilización del helicóptero de forma estacionaria en el aire, manipulando el ángulo de ataque de las aspas del rotor principal y la aceleración del . Con esto, la aeronave ganará altitud cuando el empuje sea mayor al peso y las cargas aerodinámicas direccionadas hacia abajo, y la perderá cuando se presente el caso contrario (U.S. Department of Transportation & Federal Aviation Administration, 2000). Si las condiciones de viento son ideales y las velocidades de desplazamiento son significativamente bajas, es decir no se presentarán grandes desplazamientos longitudinales o laterales, es posible discriminar los efectos producidos por las aletas estabilizadoras horizontal y vertical, así como las fricciones generadas por el fuselaje y el empuje producido por el Bell Hiller (Kim, Chang, Keh, Ha, & Lee, 2004), (Hald, Hesselbaek, Holmgaard, Jensen, Jakobsen, & Siegumfeldt, 2005), (Koo & Sastry, 1998) & (Ma, Sastry, & Koo, 2001). Al contemplarse estas condiciones específicas, es posible sintetizar un modelo eficiente que exprese el comportamiento del helicóptero.



(a). Vuelo estacionario o Hover.

(b). Vuelo lateral (derecha) y longitudinal (adelante).

Figura 16. Relación de fuerzas según modos de vuelo.

A partir de lo expuesto anteriormente, las fuerzas actuantes sobre helicóptero  ${}^bF$  pueden encontrarse a partir de la sumatoria de fuerzas principales que actúan sobre el CDG, esto es:

$${}^bF = \sum_{i=1}^n F_i = {}^bF_{RP} + {}^bF_{RT} + {}^bF_g \quad (57)$$

La sumatoria comprende las fuerzas generadas por el empuje del rotor principal, el rotor trasero y la fuerza gravitacional, es decir,  ${}^bF_{RP}$ ,  ${}^bF_{RT}$  y  ${}^bF_g$  respectivamente. Ya que las fuerzas tienen componentes en cada eje de coordenadas, esto es  $x$ ,  $y$  y  $z$ , cada una de estas debe ser expandida de la siguiente manera:

$${}^bF_{RP} = [{}^bF_{RP_x} \quad {}^bF_{RP_y} \quad {}^bF_{RP_z}] \quad (58)$$

$${}^bF_{RT} = [{}^bF_{RT_x} \quad {}^bF_{RT_y} \quad {}^bF_{RT_z}] \quad (59)$$

$${}^bF_g = [{}^bF_{g_x} \quad {}^bF_{g_y} \quad {}^bF_{g_z}] \quad (60)$$

### 3.1.2.1.1. Ecuaciones de fuerza: Rotor Principal.

De manera general, el rotor principal permite realizar movimientos laterales, longitudinales, rotacionales y la elevación del helicóptero; combinando el colectivo con la aceleración del motor. Estos movimientos pueden ser realizados por diferentes fuerzas actuantes en dirección a cada eje cartesiano, por lo que para evaluar la correspondencia deben utilizarse una notación específica. Las fuerzas ejercidas por el rotor principal sobre el eje  $x$  se denotarán como  ${}^bF_{RP_x}$ , y para los demás ejes  ${}^bF_{RP_y}$  y  ${}^bF_{RP_z}$  respectivamente.

En los helicópteros, los desplazamientos laterales y longitudinales se dan por la variación de un controlador conocido como cíclico. La Figura 17 enseña la forma en que la aeronave realiza avances o retrocesos, para eso se inclina el plano del rotor principal (**HP**) un ángulo  $\beta_{1c}$ , produciendo que el vector de la fuerza de empuje ( $T_{RP}$ ) también se incline, pues este es perpendicular al plano inclinado del rotor (**TPP**). Para efectos de modelación, este vector se proyecta al eje  $y$  y situado sobre el plano del rotor principal en estado fijo, **HP**.

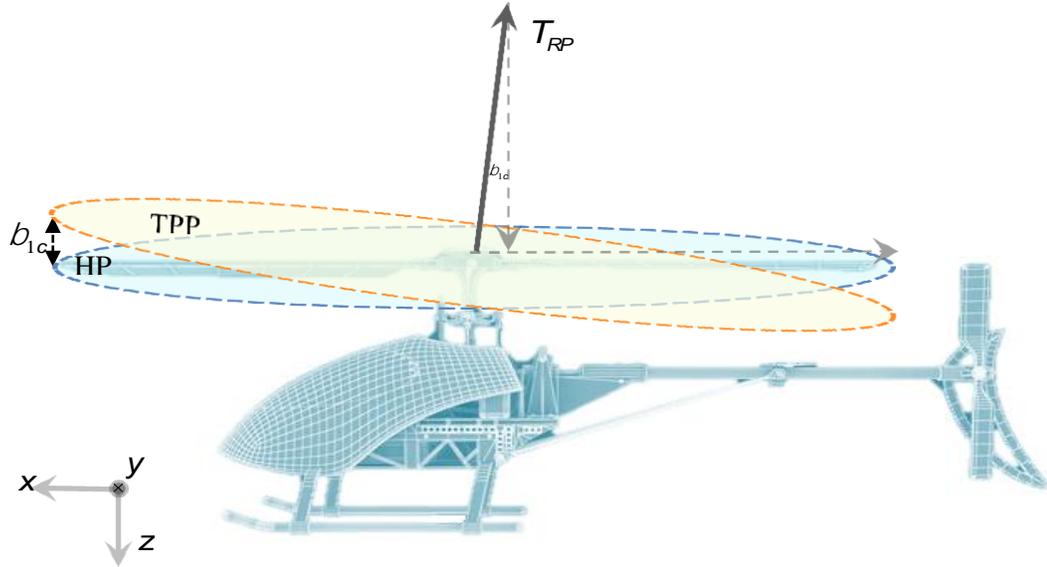


Figura 17. Movimiento longitudinal del helicóptero.

Al proyectar  $T_{RP}$  respecto a **HP**, es decir al eje  $x$ , la fuerza en este eje cartesiano queda:

$${}^bF_{RP_x} = -T_{RP} \text{sen}(\beta_{1c}) \quad (61)$$

Para los movimientos laterales, el plano del rotor principal se inclina un ángulo  $\beta_{1s}$  con el fin de proyectar la fuerza de empuje sobre el eje  $y$ , generando un desplazamiento del helicóptero sobre este mismo eje de coordenadas; esto puede observarse en la Figura 18. Con esto, la fuerza ejercida es:

$${}^bF_{RP_y} = T_{RP} \text{sen}(\beta_{1s}) \quad (62)$$

Ahora bien, la elevación solo está regida por movimientos sobre el eje z, por lo que la fuerza observada es el empuje mismo. Ya que la dirección de  $T_{RP}$  es paralela, contraria al eje z y dependiente de las inclinaciones  $\beta_{1s}$  y  $\beta_{1c}$ , la fuerza puede describirse como:

$${}^bF_{RP_z} = -T_{RP} \text{cos}(\beta_{1s}) \text{cos}(\beta_{1c}) \quad (63)$$

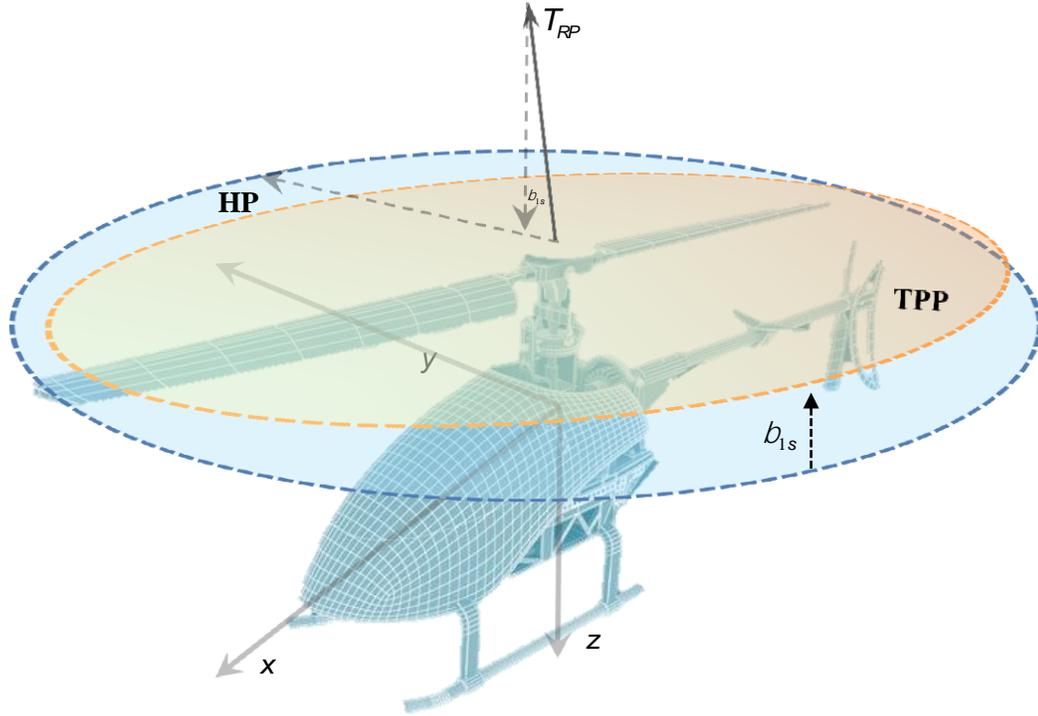


Figura 18. Desplazamiento lateral del helicóptero.

Luego de plantear las fuerzas en cada eje, es posible describir la matriz de fuerzas ejercidas por el rotor principal, por tanto,

$${}^bF_{RP} = \begin{bmatrix} -T_{RP} \text{sen}(\beta_{1c}) \\ T_{RP} \text{sen}(\beta_{1s}) \\ -T_{RP} \text{cos}(\beta_{1s}) \text{cos}(\beta_{1c}) \end{bmatrix} \quad (64)$$

### 3.1.2.1.2. Ecuaciones de fuerza: Rotor Trasero

La Figura 19 permite visualizar que la dirección del empuje generado por el rotor trasero  $T_{RT}$  es paralela al eje y. Para efectos de modelación, esta fuerza se considerará como la de mayor magnitud; pues permite contrarrestar el par motor producido por el rotor principal, a partir de esto otras fuerzas ejercidas en los demás serán despreciadas. La ecuación que describe el empuje está descrita por (65), en la cual se considera que rotaciones en el sentido del eje y son positivas.

$${}^bF_{RT} = \begin{bmatrix} {}^bF_{RT_x} \\ {}^bF_{RT_y} \\ {}^bF_{RT_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_{RT} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

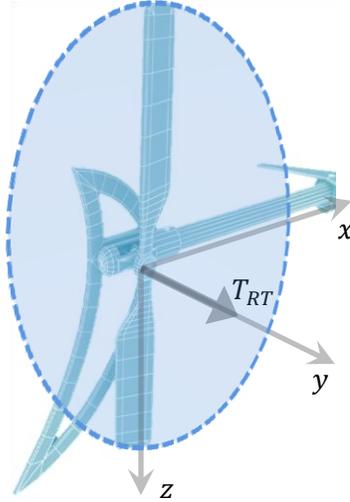


Figura 19. Diagrama de fuerzas del rotor trasero.

### 3.1.2.1.3. Componentes de fuerza: Aceleración gravitacional sobre cada eje.

En la dinámica de vuelo de la aeronave, los componentes de la aceleración gravitacional se analizan en torno al marco inercial. La Figura 20 muestra claramente que la dirección de la gravedad es paralela al eje z.

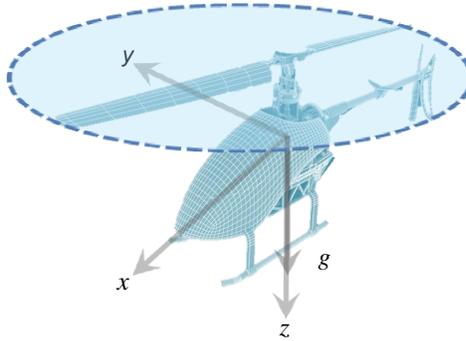


Figura 20. Vector de fuerza gravitacional.

Ya que las anteriores fuerzas han sido representadas en el marco **BF**, es necesario mapear la gravedad de **SF** a **BF**, mediante la matriz de transformación encontrada en (36). La representación, teniendo en cuenta la dirección de la gravedad es:

$${}^bF_g = R_{bs}(\Theta) \begin{bmatrix} {}^sF_{gx} \\ {}^sF_{gy} \\ {}^sF_{gz} \end{bmatrix} = R_{bs}(\Theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (66)$$

Reemplazando (26) en (66) y resolviendo se describe la fuerza gravitacional.

$${}^bF_g = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta)\sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) - \cos(\phi)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\psi) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

$${}^bF_g = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta)mg \\ \text{sen}(\phi)\text{cos}(\theta)mg \\ \text{cos}(\phi)\text{cos}(\theta)mg \end{bmatrix} \quad (67)$$

#### 3.1.2.1.4. Ecuaciones de Fuerza Finales

Al Retomar la ecuación (56), la fuerza que experimenta el helicóptero puede representarse por la sumatoria de fuerzas del rotor principal, trasero y la fuerza gravitacional, ejercidas sobre cada eje del plano cartesiano. Por tanto, al sumar (63), (65) y (67) se tiene que,

$${}^bF = \begin{bmatrix} -T_{RP}\text{sen}(\beta_{1c}) \\ T_{RP}\text{sen}(\beta_{1s}) \\ -T_{RP}\text{cos}(\beta_{1s})\text{cos}(\beta_{1c}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T_{RT} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta)mg \\ \text{sen}(\phi)\text{cos}(\theta)mg \\ \text{cos}(\phi)\text{cos}(\theta)mg \end{bmatrix} \quad (68)$$

Resolviendo,

$${}^bF = \begin{bmatrix} -T_{RP}\text{sen}(\beta_{1c}) - \text{sen}(\theta)mg \\ T_{RP}\text{sen}(\beta_{1s}) + T_{RT} + \text{sen}(\phi)\text{cos}(\theta)mg \\ -T_{RP}\text{cos}(\beta_{1s})\text{cos}(\beta_{1c}) + \text{cos}(\phi)\text{cos}(\theta)mg \end{bmatrix} \quad (69)$$

#### 3.1.2.2. Ecuaciones de Torque

Para encontrar las funciones que describen los torques actuantes sobre el helicóptero, se analizaron las diferentes fuerzas que los originan, así como la dirección respecto al plano cartesiano formado en el marco **BF**. Se pudo estimar que los torques que mayor efecto tienen sobre el helicóptero son el del motor en rotor principal  ${}^b\tau_{RP}$ , el del rotor trasero  ${}^b\tau_{RT}$  y el generado por los efectos aerodinámicos de las aspas del rotor principal  ${}^b\tau_{DRP}$ .

Partiendo de la ecuación clásica de torque (70), y representándolos en cada eje cartesiano, se tiene que:

$$\tau = Fd = \sum_{i=1}^n F_i d_i \quad (70)$$

$${}^b\tau = {}^b\tau_{RP} + {}^b\tau_{RT} + {}^b\tau_{DRP} = \begin{bmatrix} L_{RP} \\ M_{RP} \\ N_{RP} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{RT} \\ M_{RT} \\ N_{RT} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{DRP} \\ M_{DRP} \\ N_{DRP} \end{bmatrix} \quad (71)$$

De (71), las variables  $L$ ,  $M$  y  $N$  representan los ejes cartesianos  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente. Para dar solución a la ecuación de torque, debe tenerse en cuenta que los torques son positivos en la dirección de las manecillas del reloj y que la distancia o palanca de la ecuación (70) debe encontrarse respecto al centro de gravedad, es decir, hallar la distancia entre el CDG y la fuente de la fuerza; que para este caso el empuje producido por el rotor principal o trasero. La Figura 21 enseña las diferentes distancias.

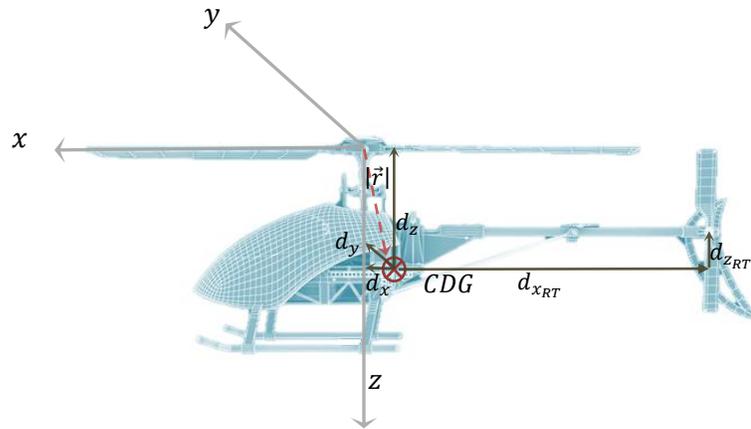
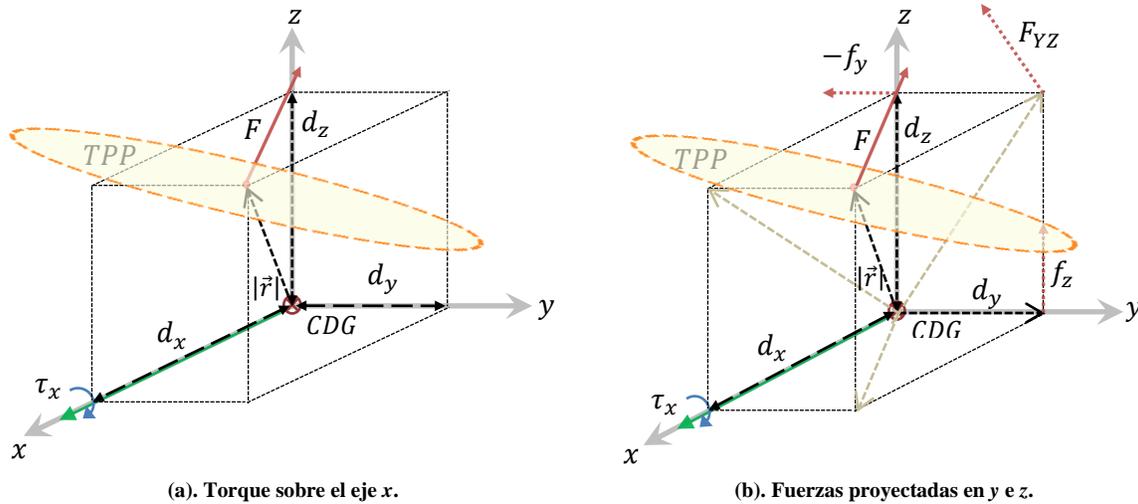


Figura 21. Distancias del CDG a las fuentes de fuerza.

Para determinar los torques se analizan las proyecciones de los vectores de fuerza y distancia sobre los ejes correspondientes. Para esto se asumen los diferentes torques generados en las direcciones del eje cartesiano en el centro de gravedad y las fuerzas sobre los planos formados por los rotores. En el ANEXO 2: PARÁMETROS DEL HELICÓPTERO se muestran las distancias específicas del helicóptero

### 3.1.2.2.1. Ecuaciones de torque: Rotor Principal

Para determinar el torque ejercido por la fuerza del empuje del rotor principal sobre el centro de gravedad en la dirección del eje  $x$ ; es decir un movimiento lateral, se estudian las direcciones de los vectores como se observa en la Figura 22(a). A partir del torque ejercido, se proyectan las fuerzas sobre cada eje como se muestra en la Figura 22(b), a partir de esto se determina el torque en  $\tau_x$  como se ve en (72).

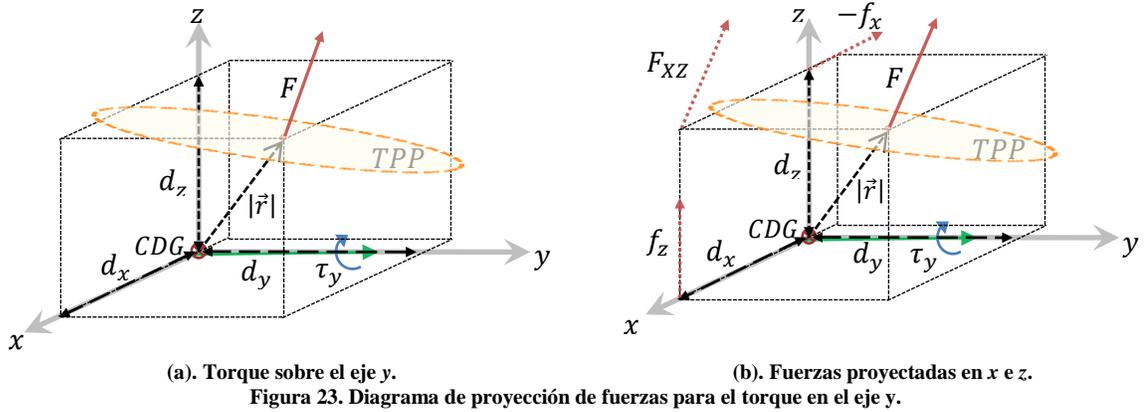


(a). Torque sobre el eje  $x$ .

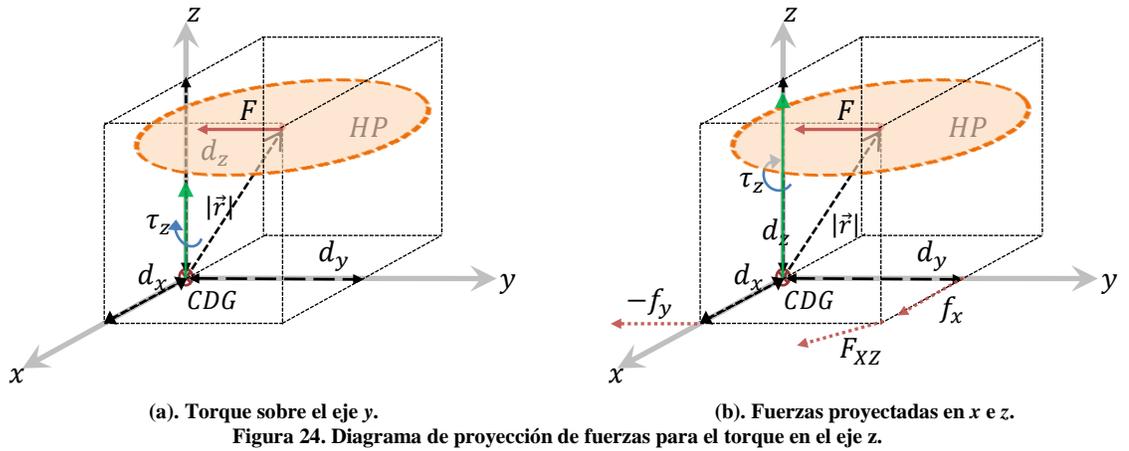
(b). Fuerzas proyectadas en  $y$  e  $z$ .

Figura 22. Diagrama de proyección de fuerzas para el torque en el eje  $x$ .

El torque  $\tau_y$  implica un movimiento longitudinal del helicóptero, por lo que el cálculo de éste debe contemplar las proyecciones del vector de fuerza sobre los ejes  $x$  e  $z$ . La Figura 23(a) enseña el rotor inclinado según la rotación sobre el eje  $y$ , para el cual la fuerza de empuje es perpendicular a esta inclinación. La Figura 23(b) deja entrever las proyecciones de las fuerzas sobre los ejes contrapuestos. El resultado final que describe el torque  $\tau_y$  se enseña en la ecuación (73).



El último torque, a lo largo del eje z, se diagrama como se observa en la Figura 24 (a) y se proyecta como en (b) respectivamente. La ecuación que describe el torque generado por la fuerza del rotor principal se describe en (74).



Las siguientes ecuaciones describen los vectores de torque representados para los ejes del plano cartesiano, respecto al centro de gravedad.

$$L_{RP} = \tau_x = -f_{y_{RP}} d_z + f_{z_{RP}} d_y \quad (72)$$

$$M_{RP} = \tau_y = -f_{x_{RP}} d_z + f_{z_{RP}} d_x \quad (73)$$

$$N_{RP} = \tau_z = -f_{y_{RP}} d_x + f_{x_{RP}} d_y \quad (74)$$

Ahora, es necesario tener en cuenta que la dirección de los vectores x, y y z planteadas en la Figura 22, Figura 23 y Figura 24 difieren de las escogidas para el plano **BF** del helicóptero. Por tanto, al tomar los ejes como la Figura 8, las ecuaciones anteriores pueden plantearse como:

$$L_{RP} = f_{y_{RP}} d_z - f_{z_{RP}} d_y \quad (75)$$

$$M_{RP} = -f_{x_{RP}} d_z - f_{z_{RP}} d_x \quad (76)$$

$$N_{RP} = f_{y_{RP}} d_x + f_{x_{RP}} d_y \quad (77)$$

### 3.1.2.2.2. Ecuaciones de torque: Rotor Trasero

De igual forma que para el rotor principal, los torques generados por las fuerzas presentes en el rotor trasero deben analizarse desde el eje de éste hasta el centro de gravedad. Así mismo, se contemplan las proyecciones sobre cada eje cartesiano. Para comprender de una mejor forma los torques sobre cada eje, se utilizan diferentes representaciones gráficas con el fin de lograr este objetivo. En el caso de  $L_{RT}$ , la Figura 25 enseña el torque sobre el eje  $x$  y las fuerzas proyectadas sobre los ejes subsecuentes.

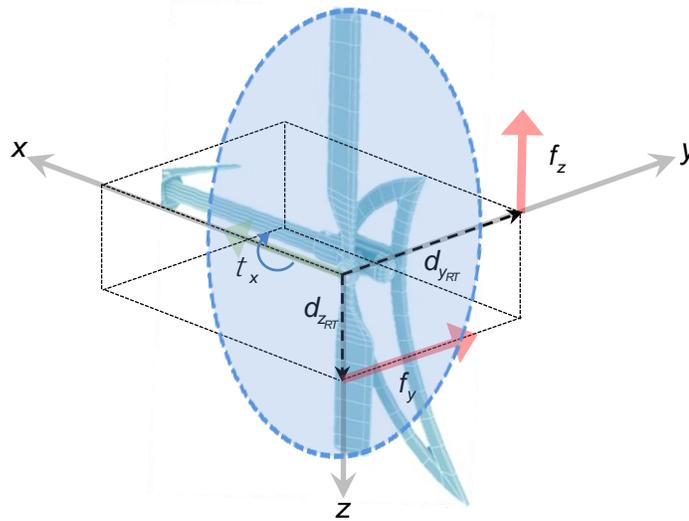


Figura 25. Diagrama de fuerzas para el torque sobre el eje x.

El torque en  $x$  se describe mediante (78), sin embargo es necesario tener en cuenta la dirección de las fuerzas ejercidas descritas por la ecuación. Ya que no existe un empuje generado sobre el eje  $z$ , la fuerza sobre este eje es nula por lo que el torque solo dependerá de  $f_{yRT}$ , es decir, el rotor trasero estabiliza la cola del helicóptero cuando se presentan giros (Roll).

$$L_{RT} = \tau_x = f_{yRT} d_{zRT} + \overbrace{f_{zRT}}^0 d_{yRT} = f_{yRT} d_{zRT} \quad (78)$$

La Figura 26 muestra los torques ejercidos sobre los ejes  $y$  y  $z$ . Para el caso de la subfigura (a), claramente puede verse que el rotor trasero no ejerce las fuerzas  $f_{yRT}$  y  $f_{xRT}$ , por lo cual no existen torques sobre  $y$ . Para el caso de la subfigura (b), puede determinarse que  $f_{xRT} = 0$ , por lo que  $\tau_z$  solo dependerá de la fuerza  $f_{yRT}$ .

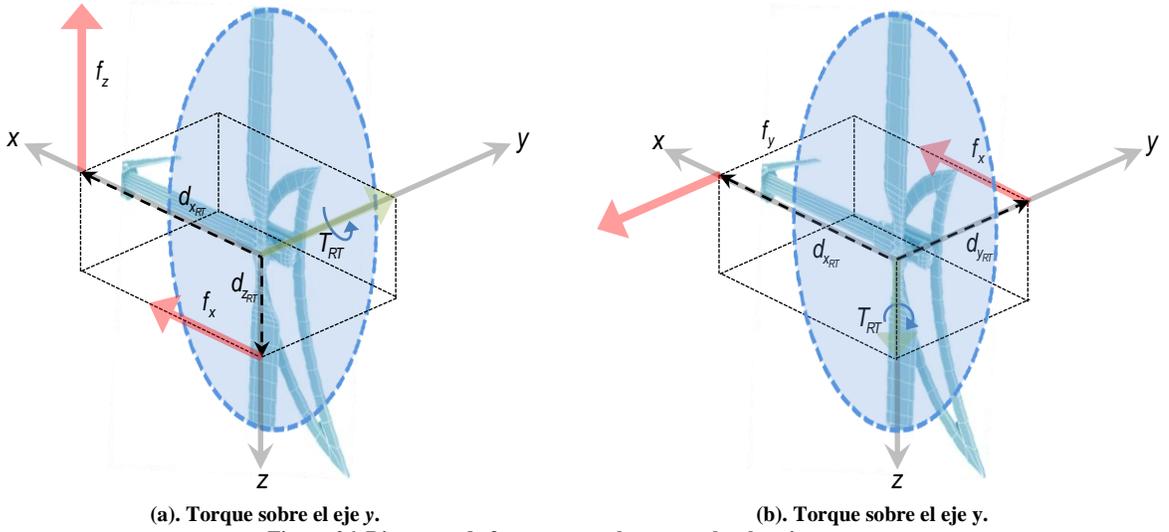


Figura 26. Diagrama de fuerzas para el torque sobre los ejes y e z.

Las ecuaciones que describirán los torques sobre los ejes y e z se presentan en (79) y (80).

$$M_{RT} = \tau_y = -\overbrace{f_{z_{RT}}^0} d_{x_{RT}} + \overbrace{f_{x_{RT}}^0} d_{y_{RT}} = 0 \quad (79)$$

$$N_{RT} = \tau_z = -f_{y_{RT}} d_{x_{RT}} + \overbrace{f_{x_{RT}}^0} d_{y_{RT}} = -f_{y_{RT}} d_{x_{RT}} \quad (80)$$

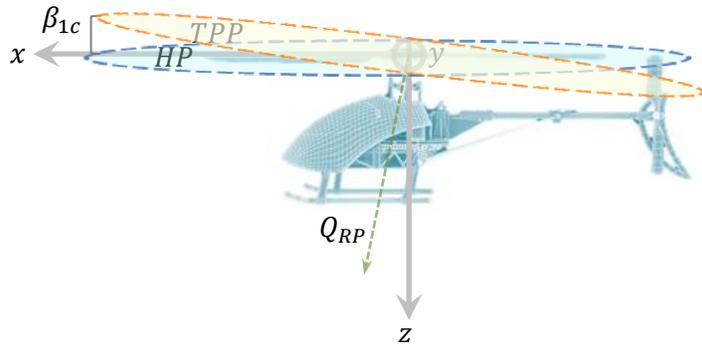
### 3.1.2.2.3. Torque Aerodinámico del Rotor Principal

De la ecuación (15), se realizaron algunas consideraciones. Ya que la principal función del rotor trasero es contrarrestar el torque generado por el rotor principal; a lo que se conoce como la relación torque y anti-torque, y cuenta con unas aspas de un radio significativamente menor que las del principal, el arrastre aerodinámico del rotor trasero tiene poca influencia sobre el helicóptero por lo que es rechazado, es decir se asume  $Q_{RT} = 0$ . Finalmente se escribe (15) en función del rotor principal como,

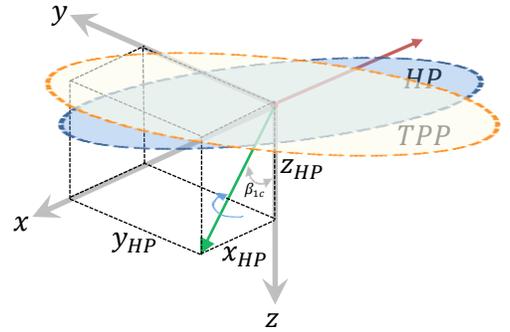
$$Q_{RP} \cong -(C_{RP}^Q T_{RP}^{1.5} + D_{RP}^Q) \quad (81)$$

Para determinar las constantes  $C_{RP}^Q$  y  $D_{RP}^Q$ , se realizan algunas simulaciones y cálculos, los cuales pueden observarse en el ANEXO 3: ESTIMACIÓN DEL ARRASTRE.

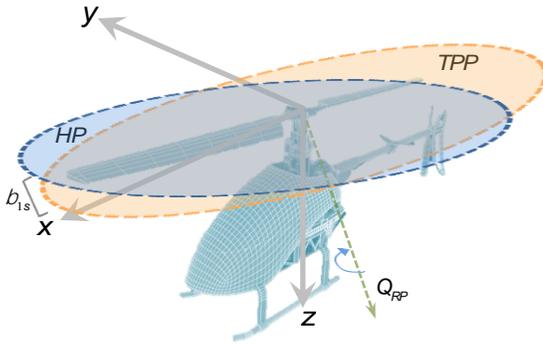
El cálculo del vector de torque generado por el arrastre de las aspas del rotor principal, debe contemplar los planos de inclinación del mismo. La Figura 27 muestra las proyecciones de  $Q_{RP}$  cuando el plano del rotor principal se inclina en un movimiento longitudinal y lateral.



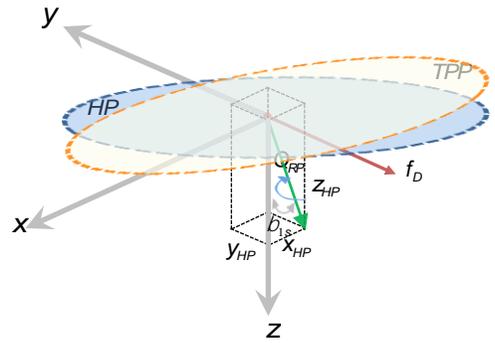
(a). Representación del torque aerodinámico en inclinación longitudinal.



(b). Proyección del torque aerodinámico en inclinación longitudinal.



(c). Representación del torque aerodinámico en inclinación lateral.



(d). Proyección del torque aerodinámico en inclinación lateral.

Figura 27. Torque aerodinámico del rotor principal en inclinación longitudinal y lateral.

De la figura anterior se deduce el torque aerodinámico para los ejes  $x$ ,  $y$  e  $z$ , teniendo como referente que el vector es positivo a lo largo de  $z$  y que debe ser proyectado al plano  $HP$ . A partir de esto, las proyecciones quedan como se muestran en (82-84).

$$L_{DRP} = Q_{RP} \text{sen}(\beta_{1c}) \quad (82)$$

$$M_{DRP} = -Q_{RP} \text{sen}(\beta_{1s}) \quad (83)$$

$$N_{DRP} = Q_{RP} \text{cos}(\beta_{1c}) \text{cos}(\beta_{1s}) \quad (84)$$

#### 3.1.2.2.4. Ecuaciones de Torque Finales

La sumatoria de torques expresada en (70) puede ser expandida reemplazando las ecuaciones (74-80) y (81-83), finalmente la generalización del torque queda como se enseña en (85).

$${}^b\tau = \begin{bmatrix} f_{y_{RP}} d_z + f_{z_{RP}} d_y \\ -f_{x_{RP}} d_z - f_{z_{RP}} d_x \\ f_{y_{RP}} d_x + f_{x_{RP}} d_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{y_{RT}} d_{z_{RT}} \\ 0 \\ -f_{y_{RT}} d_{x_{RT}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{RP} \text{sen}(\beta_{1c}) \\ -Q_{RP} \text{sen}(\beta_{1s}) \\ Q_{RP} \text{cos}(\beta_{1c}) \text{cos}(\beta_{1s}) \end{bmatrix} \quad (85)$$

Resolviendo,

$${}^b\tau = \begin{bmatrix} {}^bL \\ {}^bM \\ {}^bN \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{y_{RP}} d_z - f_{z_{RP}} d_y + f_{y_{RT}} d_{z_{RT}} + Q_{RP} \text{sen}(\beta_{1c}) \\ -f_{x_{RP}} d_z + f_{z_{RP}} d_x - Q_{RP} \text{sen}(\beta_{1s}) \\ f_{y_{RP}} d_x + f_{x_{RP}} d_y - f_{y_{RT}} d_{x_{RT}} + Q_{RP} \text{cos}(\beta_{1c}) \text{cos}(\beta_{1s}) \end{bmatrix} \quad (86)$$

### 3.1.3. Ecuaciones de Empuje e Inclinación del Aspa

Esto hace que sea necesario analizar y evaluar la forma más adecuada para determinar el empuje y los ángulos de inclinación del aspa.

#### 3.1.3.1. Ecuaciones de empuje: Rotor Principal

Para encontrar una ecuación que determine el empuje en vuelo estacionario se asumen movimientos de pequeña magnitud y de bajas velocidades. Al tomar como referente el análisis planteado por (El-Saadany, Medhat, & Elhalwagy, 2009) (Del Cerro, Barrientos, & Martinez, 2009) (Heffley & Mních, Minimum Complexity Helicopter Simulation Math Model Program, 1986) y (Munziger, 1998), se describe el empuje del rotor ( $T_{RP}$ ) como se enseña en la ecuación (87), en la cual se relacionan la densidad del aire ( $\rho$ ), la velocidad angular del rotor ( $\Omega$ ), el radio del rotor ( $R$ ), la pendiente de la curva de elevación de las aspas del rotor principal ( $a$ ); la cual cuando se tienen aspas muy delgadas (Lutze, 2002), (Caughey, 2011) & (Polhamus, 1949) este valor puede aproximarse a  $a = 2\pi$ , el número de aspas ( $B$ ), la cuerda o largo del aspa ( $c$ ), la velocidad de las aspas del rotor principal relativa al aire ( $\omega_i$ ) y la velocidad inducida del aire que pasa por el rotor en el plano TPP ( $v_i$ ).

$$T_{RP} = (\omega_i - v_i) \frac{\rho \Omega R^2 a B c}{4} \quad (87)$$

La velocidad vertical neta de las aspas del rotor principal relativa al aire, se describe mediante la relación entre la velocidad del rotor principal relativa al aire cuando se presentan movimientos traslacionales ( $\omega_r$ ), la velocidad angular del rotor, el radio del rotor, la consigna de colectivo ( $U_{col}$ ) y el ángulo de torsión de las aspas del rotor ( $\theta_{twist}$ ).

$$\omega_i = \omega_r + \frac{2}{3} \Omega R \left[ \beta_{col} + \frac{3}{4} \theta_{twist} \right] \quad (88)$$

De (88) se puede anotar que las aspas que utiliza el helicóptero propuesto en la investigación no cuenta con ángulos de torsión, es decir, son completamente planas, por lo tanto  $\theta_{twist}$  puede ser rechazado en la ecuación. El resultado entonces sería,

$$\omega_i = \omega_r + \frac{2}{3} \Omega R \beta_{col} \quad (89)$$

La velocidad del rotor principal relativa al aire ( $\omega_r$ ) producida por movimientos traslacionales (Cai, Chen, & Tong Lee, 2011), puede determinarse relacionando los ángulos de inclinación aplicados del rotor principal [ $\beta_{1c}, \beta_{1s}$ ] y la condición inicial de inclinación del eje del rotor ( $i_s$ ), como se aprecia en (90).

$$\omega_r = {}^b w + (\beta_{1c} + i_s) {}^b u - \beta_{1s} {}^b v \quad (90)$$

Finalmente, la velocidad de ascenso a pequeñas velocidades puede modelarse a partir de la relación cuadrática de las velocidades en cada uno de los ejes del rotor y la velocidad inducida en el disco del rotor, esto es:

$$V^2 = {}^b u^2 + {}^b v^2 + \omega_r (\omega_r - 2v_i) \quad (91)$$

Como se observa en (1) y (91), las dos ecuaciones son dependientes una de otra, por lo que para realizar la evaluación del modelo no lineal se utilizó el modelo de simulación planteado por la NASA en (Heffley &

Mnich, Manudyne Report 83-2-3, 1986). La estructura puede verse en la Figura 28, de la cual el valor de  $v_i$  puede estimarse con solo 5 iteraciones.

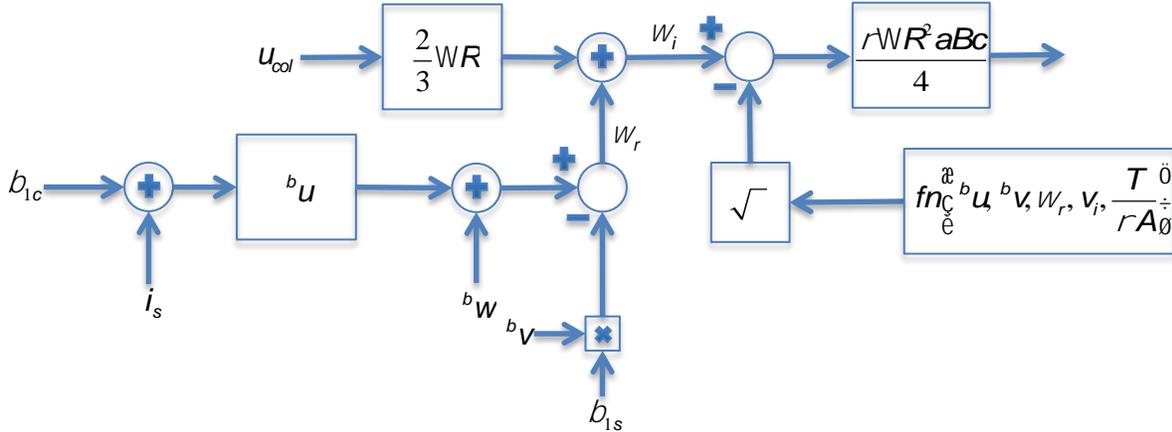


Figura 28. Diagrama de bloques del empuje del rotor y la velocidad inducida.

### 3.1.3.2. Ecuaciones de empuje: Rotor Trasero

El helicóptero utilizado en este proyecto, y en general este tipo de aeronaves, cuentan con una relación proporcional entre la velocidad rotación entre los rotores principal y trasero. En este caso específico, para el helicóptero KDS 450SV, el motor está conectado directamente al rotor principal y por medio de una cadena dentada permite que el rotor trasero también lo haga, de tal forma cuando el rotor principal da una rotación completa, el trasero lo hace en 4.09 ocasiones. Esta relación entre el piñón del rotor principal, la correa de transmisión y el piñón del rotor trasero es 45 a 11, permite al rotor trasero compensar el torque generado por el motor, haciendo que el helicóptero no autogire de manera descontrolada. Adicionalmente el aeromodelo está equipado con un controlador de giro o “Giroscopio KDS 820 AVCS” que mediante un sistema de control angular, termina por eliminar cualquier descompensación presentada durante el vuelo, haciendo que el helicóptero siempre mantenga orientada su nariz, lo que finalmente implica que la componente de velocidad angular de rotación en  $z$  es  $r = 0$ .

A pesar que el giroscopio compensa el par motor, cualquier cambio en la consigna  $u_{ped}$  alterará esta compensación, haciendo que el rotor gire controladamente en Yaw. A partir de esto y retomando la ecuación (65), puede determinarse que  ${}^bN = 0$  pues el torque se mantendrá controlado, esto implicaría que la fuerza ejercida por la consigna  $\beta_{ped}$  se realiza sobre el eje  $y$  del rotor trasero, lo que finalmente implica que  $f_{yRT}$  es el empuje ejercido por este rotor, esto es  $T_{RT} = f_{yRT}$ . Tomando el torque sobre el eje  $z$  visto en (65) y reescribiendo la ecuación se tiene que,

$$0 = [f_{y_{RP}} d_x + f_{x_{RP}} d_y - T_{RT} d_{x_{RT}} + Q_{RP} \cos(\beta_{1c}) \cos(\beta_{1s})] + \beta_{ped} \quad (92)$$

$$T_{RT} d_{x_{RT}} = f_{y_{RP}} d_x + f_{x_{RP}} d_y + Q_{RP} \cos(\beta_{1c}) \cos(\beta_{1s}) + \beta_{ped}$$

$$T_{RT} = \frac{f_{y_{RP}} d_x + f_{x_{RP}} d_y + Q_{RP} \cos(\beta_{1c}) \cos(\beta_{1s})}{d_{x_{RT}}} + \beta_{ped} \quad (93)$$

### 3.1.3.3. Transmisión Movimientos Longitudinales, Laterales y de Colectivo

El helicóptero cuenta con un elemento conocido como plato oscilante (swashplate), que con algunos dispositivos mecánicos como enlaces y bisagras facilitan la transferencia de los ángulos de los movimientos de los servomotores al rotor de tal modo que logren realizarse movimientos longitudinales, laterales y cambios de ángulos de ataque de las aspas, sin que se presente ninguna oposición al movimiento rotacional del eje del rotor. El sistema de transmisión de movimientos del aeromodelo KDS

450SV puede observarse en la Figura 29, para el cual se realiza un análisis de movimiento que permitan encontrar la relación entre las consignas  $U_{col}$  y  $U_{cic} = \{U_{lon}, U_{lat}\}$  y los ángulos  $\beta_{col}$ ,  $\beta_{1s}$  y  $\beta_{1c}$ .

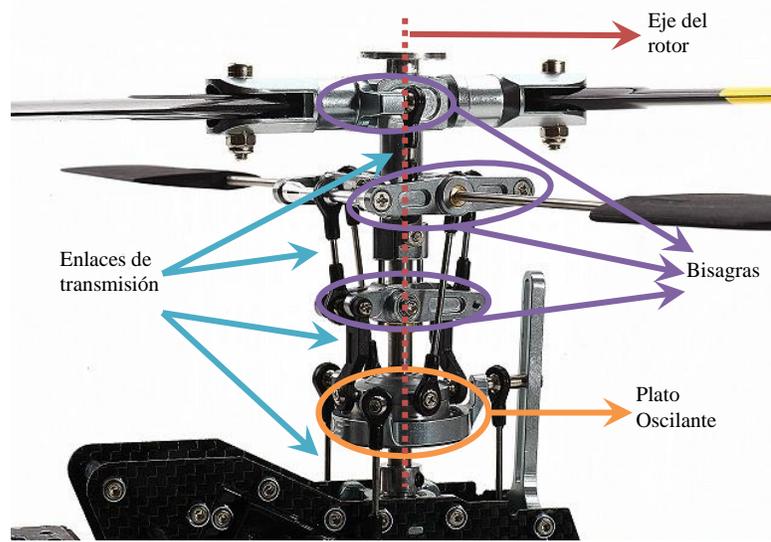


Figura 29. Sistema de transmisión del helicóptero KDS 450SV.

#### 3.1.3.3.1. ÁNGULO DE ATAQUE DEL COLECTIVO.

Para realizar un cambio en el ángulo de ataque del colectivo, el helicóptero eleva el plato oscilante mediante tres servomotores que se mueven simultáneamente. La relación entre el cambio de ángulo con el que se excita los servomotores con el ángulo de paso de las aspas se describe mediante la ecuación (94).

$$\beta_{col} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{l_0 l_4}{(l_9 + l_4)(l_7 + l_{10})} \text{sen}(U_{col}) \right] \quad (94)$$

En el ANEXO 4: ANGULOS DE ATAQUE se muestra el procedimiento seguido para determinar la relación entre los ángulos.

#### 3.1.3.3.2. ÁNGULO DE ATAQUE DEL CÍCLICO.

Ya que el control del cíclico permite que helicóptero desempeñe movimientos longitudinales y laterales, se determinan los ángulos  $\beta_{1c}$  y  $\beta_{1s}$  formados por entre la horizontal y el ángulo de inclinación de las aspas (Ver Figura 17 y Figura 18). El procedimiento que se siguió para determinar los ángulos pueden observarse en el ANEXO 4: ANGULOS DE ATAQUE, sin embargo el resultado final se presenta en las siguientes ecuaciones.

$$\beta_{1c} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{\text{sen}(U_{lon}) l_0}{R} \right] \quad (95)$$

$$\beta_{1s} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{\text{sen}(U_{lat}) l_0}{R} \right] \quad (96)$$

#### 3.1.3.3.3. ÁNGULO DE ATAQUE DEL ROTOR TRASERO.

El control del rotor trasero permite regular la orientación del helicóptero, y para determinar el ángulo que se transfiere del servomotor a las aspas se presenta en el ANEXO 4: ANGULOS DE ATAQUE. La relación final viene dada por,

$$\beta_{RT} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{l_{\alpha} \text{sen}(\theta_{\alpha}) l_{II}}{l_{VI} l_I} \right] \quad (97)$$

### 3.1.4. Sinopsis de las Ecuaciones No Lineales

Retomando la Figura 1, las ecuaciones que rigen el cuerpo rígido, que se aprecian en el capítulo 3.1.1, se describen para la aceleración traslacional  ${}^b\dot{V} = \{ {}^b\dot{u} \quad {}^b\dot{v} \quad {}^b\dot{w} \}$ , la aceleración de las ratas de Euler  $\dot{\theta} = \{ \dot{\phi} \quad \dot{\omega} \quad \dot{\psi} \}$  y la aceleración angular  $\omega = \{ \dot{p} \quad \dot{q} \quad \dot{r} \}$ , como se aprecia a continuación.

$$\begin{bmatrix} {}^b\dot{u} \\ {}^b\dot{v} \\ {}^b\dot{w} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r {}^b v - q {}^b w + \frac{{}^b f_x}{m} \\ p {}^b w - r {}^b u + \frac{{}^b f_y}{m} \\ q {}^b u - p {}^b v + \frac{{}^b f_z}{m} \\ p + r \cos(\phi) \tan(\theta) + q \text{sen}(\phi) \tan(\theta) \\ q \cos(\phi) - r \text{sen}(\phi) \\ q \frac{\text{sen}(\phi)}{\cos(\theta)} + r \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \\ \frac{L + qr(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} \\ \frac{M - pr(I_{zz} + I_{xx})}{I_{yy}} \\ \frac{N + pq(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} \end{bmatrix}$$

De las ecuaciones anteriores, los valores de  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{zz}$  se presentan en el ANEXO 1: ESTIMACIÓN DEL TENSOR DE INERCIA y están dados por,

$$\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0801e^{-5} \text{ kg/m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3.7708e^{-4} \text{ kg/m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6009e^{-4} \text{ kg/m}^2 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de fuerza ( ${}^bF$ ) y torque ( ${}^b\tau$ ) se describen en capítulo 3.1.2 y se presentan a continuación,

$${}^bF = \begin{bmatrix} -T_{RP} \text{sen}(\beta_{1c}) - \text{sen}(\theta) mg \\ T_{RP} \text{sen}(\beta_{1s}) + T_{RT} + \text{sen}(\phi) \cos(\theta) mg \\ -T_{RP} \cos(\beta_{1s}) \cos(\beta_{1c}) + \cos(\phi) \cos(\theta) mg \end{bmatrix}$$

$${}^b\tau = \begin{bmatrix} {}^bL \\ {}^bM \\ {}^bN \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{yRP} d_z - f_{zRP} d_y + f_{yRT} d_{zRT} + Q_{RP} \text{sen}(\beta_{1c}) \\ -f_{xRP} d_z + f_{zRP} d_x - Q_{RP} \text{sen}(\beta_{1s}) \\ f_{yRP} d_x + f_{xRP} d_y - f_{yRT} d_{xRT} + Q_{RP} \cos(\beta_{1c}) \cos(\beta_{1s}) \end{bmatrix}$$

En el capítulo 3.1.3 se determinaron los empujes de rotor principal y el rotor trasero respectivamente, los cuales se presentan a continuación:

$$T_{RP} = (\omega_i - v_i) \frac{\rho \Omega R^2 a B c}{4}$$

$$T_{RT} = \frac{f_{y_{RP}} d_x + f_{x_{RP}} d_y + Q_{RP} \cos(\beta_{1c}) \cos(\beta_{1s})}{d_{x_{RT}}} + \beta_{ped}$$

$$\omega_i = \omega_r + \frac{2}{3} \Omega R \beta_{col}$$

$$\omega_r = {}^b w + (\beta_{1c} + i_s) {}^b u - \beta_{1s} {}^b v$$

$$V^2 = {}^b u^2 + {}^b v^2 + \omega_r (\omega_r - 2v_i)$$

$$v_i^2 = \sqrt{\left(\frac{V^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{T}{2\rho\pi R^2}\right)^2} - \frac{V^2}{2}$$

Finalmente en el 3.1.3.3 se presentan los ángulos de transferencia entre el servomotor y los ángulos de las aspas. Consecutivamente se presentan: el ángulo de ataque de colectivo, el ángulo entre el plano del rotor y el TPP para desplazamientos longitudinales y laterales, y el ángulo de ataque del rotor trasero respectivamente.

$$\beta_{col} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{l_0 l_4}{(l_9 + l_4)(l_7 + l_{10})} \text{sen}(U_{col}) \right]$$

$$\beta_{1c} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{\text{sen}(U_{lon} + U_{col}) l_0}{R} \right]$$

$$\beta_{1s} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{\text{sen}(U_{lat} + U_{col}) l_0}{R} \right]$$

$$\beta_{RT} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{l_\alpha \text{sen}(\theta_\alpha) l_{II}}{l_{VI} l_I} \right]$$

### 3.1.5. Linealización

La linealización de las ecuaciones no lineales descritas para el fuselaje contemplan dos operaciones específicas: la definición de los puntos de equilibrio y la definición del espacio de estados lineal. Este último utiliza el método del Jacobiano para determinar la relación entre las entradas, estados y las salidas.

#### 3.1.5.1. Puntos de Equilibrio

Para linealizar el modelo se encuentran los puntos de equilibrio en los cuales el helicóptero logra la sustentación en el aire. Para esto se asumen algunas circunstancias y se evalúan algunos parámetros:

- El vuelo estacionario asume que la suma del empuje y la elevación es igual a la suma del peso y la fuerza de arrastre.
- En vuelo estacionario, la elevación es igual la fuerza de arrastre aerodinámica del helicóptero, por tanto  $L = Q_{RP}$ , haciendo que el empuje sea igual al peso del helicóptero  $T_{RP} = W$ .
- Para mantener el helicóptero en vuelo estacionario, las consignas de  $U_{lon}$  y  $U_{lat}$  deberán ser cero, por tanto no existirán movimientos longitudinales y laterales, es decir  $\beta_{1c} = 0$  y  $\beta_{1s} = 0$ .
- Se deben asegurar consignas de aceleración  $U_{acel}$  y colectivo  $U_{col}$  tales que  $\Omega$  permanezca constante y que se logre sustentación.
- En vuelo estacionario no deben existir desplazamientos laterales y longitudinales, por lo que  $x$  e  $y$  son cero. A partir de esto las velocidades traslacionales  $u$  y  $v$  también son cero.
- El vuelo estacionario implica que la distancia en  $z$  se mantiene constante, por lo que la velocidad traslacional en este eje es cero,  $w = 0$ .

- g. Se deberá encontrar el empuje del rotor trasero  $T_{RT}$  de tal forma que ejerza el antitorque necesario para contrarrestar el par motor ejercido por el rotor principal al mantener una velocidad  $\Omega$  constante.

Con estas consideraciones se determina del empuje del rotor trasero, la velocidad angular, las consignas  $u_{lat}$ ,  $u_{lon}$ ,  $u_{acel}$ ,  $u_{col}$ ,  $u_{ped}$ ,  $\Omega$ ,  $T_{RT}$  y  $T_{RP}$ . Partiendo del hecho que, para lograr el vuelo estacionario, el empuje deberá ser igual al peso del helicóptero, esto es  $T_{RP} = W \cong 0.916kg\ m/s^2$ . Con esto, se implementan se soluciona la ecuación (81)

$$Q_{RP} = -[(0.00502183)(0.916kg\ m/s^2)^{1.5} + 0.023] \quad (98)$$

$$Q_{RP} = -[0.00502183(0.916)^{1.5} + 0.023] \quad (99)$$

$$Q_{RP} = -0.0274025$$

Habiendo descrito el empuje del rotor principal en la ecuación (87), se replantea la ecuación teniendo en cuenta el valor del empuje para la linealización, así como los de las constantes  $\rho = 1.224\ kg/m^3$ ,  $a = 2\pi$ ,  $B = 2$ ,  $R = 0.36m$ ,  $c = 0.03125m$  como,

$$T_{RP} = (\omega_i - v_i) \frac{(1.224\ kg/m^3)\Omega(0.36m)^2(2\pi)(2)(0.03125m)}{4} \quad (100)$$

De la ecuación (87) y reemplazando se tiene que:

$$\omega_i = \omega_r + \frac{2}{3}\Omega(0.36m) U_{col} \quad (101)$$

Reemplazando en (90) las variables  $\beta_{1c} = \beta_{1s} = 0$  y asumiendo una condición inicial  $i_s$  también cero, el valor de  $\omega_r$  se obtiene como,

$$\omega_r = {}^b_w + \left( \begin{matrix} 0 \\ \widehat{\beta}_{1c} + \widehat{i}_s \end{matrix} \right) {}^b_u - \widehat{\beta}_{1s} {}^b_v$$

$$\omega_r = {}^b_w \quad (102)$$

Ya que la velocidad de desplazamiento sobre el eje z es cero,  $\omega_r = 0$ . Esto implica que (101) queda,

$$\omega_i = \frac{2}{3}\Omega(0.36m) U_{col} \quad (103)$$

Al relacionar (14) y (91), los valores de  $\square$  y  $v_i$  quedan,

$$V^2 = \widehat{b_u^2} + \widehat{b_v^2} + \widehat{\omega_r} \left( \widehat{\omega_r} - 2v_i \right)$$

$$V^2 = 0 \quad (104)$$

Por tanto  $v_i$ ,

$$v_i^2 = \sqrt{\left( \frac{\widehat{V^2}}{2} \right)^2 + \left( \frac{T_{RP}}{2\rho\pi R^2} \right)^2} - \frac{\widehat{V^2}}{2}$$

$$v_i^2 = \sqrt{\left(\frac{T_{RP}}{2\rho\pi R^2}\right)^2}$$

$$v_i^2 = \frac{T_{RP}}{2\rho\pi R^2} \quad (105)$$

$$v_i = \sqrt{\frac{0.916 \text{ kg m/s}^2}{2(1.224 \text{ kg/m}^3)\pi(0.36\text{m})^2}} = 0.9587 \text{ m/s} \quad (106)$$

Con los valor encontrado en (106), se evalúa iterativamente la ecuación (94) hasta encontrar una velocidad angular, la cual para este helicóptero correspondió a de  $\Omega = 81.02478 \text{ rad/s}$ . Con esto se evalúa la ecuación (103) y se escoge una consigna  $U_{col} = 12.5^\circ$  equivalente a un  $\beta_{col} = 0.08662 \text{ rad}$  para que la ecuación (100) iguale el empuje del rotor principal, que en este caso es igual al peso.

$$\left(\frac{2}{3}(104.71 \text{ rad/s})(0.36\text{m})\beta_{col} - 0.9587 \text{ m/s}\right) \frac{(1.224 \text{ kg/m}^3)(81.02478 \text{ rad/s})(0.36\text{m})^2(2\pi)(2)(0.03125\text{m})}{4} \quad (107)$$

La ecuación (107) describe el valor de la consigna de colectivo  $U_{col}$  para una velocidad del rotor  $\Omega$  dada. En el proceso de identificación del motor, se determinó que el helicóptero logra una máxima velocidad de  $2500 \text{ RPM} = 261.79 \text{ rad/s}$  sin acción de colectivo y de casi  $2000 \text{ RPM} = 209.43 \text{ rad/s}$  con acción de colectivo al máximo, por tanto los valores utilizados para linealización se encuentran los parámetros normales.

Por otra parte, en el vuelo estacionario la suma de los torques debe ser igual a cero pues todo el sistema debe estar estabilizado, es decir,

$$\tau_T = \sum_{i=1}^n \tau_i = 0 \quad (108)$$

$${}^b\tau = {}^b\tau_{RP} + {}^b\tau_{RT} + {}^b\tau_{DRP} = \begin{bmatrix} L_{RP} \\ M_{RP} \\ N_{RP} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{RT} \\ M_{RT} \\ N_{RT} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{DRP} \\ M_{DRP} \\ N_{DRP} \end{bmatrix} = 0 \quad (109)$$

El propósito del rotor de cola en vuelo estacionario es compensar el torque generado por el rotor principal y cualquier otra perturbación, sin embargo como se mencionó anteriormente, si se asume que no existen efectos del aire, la ecuación (109) puede expresarse solo en función de los torques aplicados sobre el eje z, esto es,

$${}^b\tau_{RT} = N_{RP} + N_{RT} + N_{DRP} = 0 \quad (110)$$

Por tanto, el equilibrio se dará cuando el rotor de cola iguale el torque generado por el rotor principal, esto es,

$$N_{RP} + N_{DRP} = -N_{RT} \quad (111)$$

Al reemplazar (86) en (111),

$$\left[ f_{y_{RP}} \widehat{a}_x^0 + f_{x_{RP}} \widehat{a}_y^0 + Q_{RP} \cos\left(\widehat{\beta}_{1c}^0\right) \cos\left(\widehat{\beta}_{1s}^0\right) \right] = -f_{y_{RT}} \widehat{a}_{x_{RT}}^{0.4314\text{m}} \quad (112)$$

Reduciendo (112),

$$Q_{RP} = -(0.4314m)f_{y_{RT}} \quad (113)$$

Evaluando (113) con un empuje del rotor principal igual al peso del helicóptero,

$$f_{y_{RT}} = \frac{0.0274025}{0.4314} = 0.063520 \text{ kg.m/s}^2 \quad (114)$$

La ecuación (114) enseña la fuerza necesaria para compensar el par motor generado por la rotación del rotor principal. Ya que la fuerza se ejerce en el mismo sentido contrario que el empuje del rotor trasero, estas son equivalentes,  $f_{y_{RT}} = T_{RT}$ . Esto implica que la fuerza ejercida por la señal de control deberá contrarrestar el empuje o la fuerza generada. Al hacer la compensación en (114), se puede determinar el valor de linealización para la constante  $\beta_{ped}$ , esto es,

$$\begin{aligned} 0.063520 \text{ kg.m/s}^2 + \beta_{ped} &= 0 \\ \beta_{ped} &= -0.063520 \text{ kg.m/s}^2 \end{aligned} \quad (115)$$

La fuerza  $\beta_{ped}$  equivale a la consigna de control presentada en (116).

$$u_{ped} = -3.401311 \quad (116)$$

Resumiendo, las variables para la linealización se presentan en la Tabla 2.

VARIABLE	VALOR	DESCRIPCIÓN
$T_{RP}$	0.916kg m/s <sup>2</sup>	Empuje del rotor principal
$Q_{RP}$	-0.0274025	Fuerza de arrastre aerodinámico
$T_{RT}$	0 kg.m/s <sup>2</sup>	Empuje del rotor trasero
$\beta_{1c}$	0	Ángulo del TPP respecto al eje del rotor – Longitudinal
$\beta_{1s}$	0	Ángulo del TPP respecto al eje del rotor – Lateral
$U_{col}$	12.5%	Consigna de colectivo
$U_{lat}$	0	Consigna de cíclico – lateral
$U_{long}$	0	Consigna de cíclico – longitudinal
$U_{ped}$	0	Consigna de pedales – rotor trasero
$U_{accl}$	50%	Consigna de acelerador
$\Omega$	81.02478 rad/s	Velocidad angular del rotor

Tabla 2. Valores para linealización.

### 3.1.5.2. Modelo Lineal

Para linealizar el modelo se utiliza el método del Jacobiano (Gopal, 1993), el cual permite describir el espacio de estados a partir de un conjunto de ecuaciones no lineales evaluadas en puntos de equilibrio.

$$\Delta \dot{x}(t) = f_i(x(t), u(t), x(t_0), t) \quad (117)$$

$$\Delta \dot{y}(t) = h(x(t), u(t), x(t_0), t) \quad (118)$$

Las funciones (117) y (118) son derivadas parcialmente en función de cada uno de los estados y las entradas del sistema, como se aprecia en las ecuaciones (119) a (122). Este resultado entrega el espacio de estados lineal del sistema.

$$A(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(x(t), u(t), x(t_0), t) \quad (119)$$

$$B(t) = \frac{\partial f_i}{\partial u}(x(t), u(t), x(t_0), t) \quad (120)$$

$$C(t) = \frac{\partial h}{\partial u}(x(t), u(t), x(t_0), t) \quad (121)$$

$$D(t) = \frac{\partial h}{\partial u}(x(t), u(t), x(t_0), t) \quad (122)$$

Para determinar el modelo lineal se definen los estados, las entradas y las salidas que se utilizarán para en el modelo. Por tanto, se consideran como estados las velocidades traslacionales  $\{u \ v \ w\}$ , los ángulos de Euler  $\{\phi \ \theta \ \psi\}$  y las velocidades angulares  $\{p \ q \ r\}$ . Se toman como entradas del modelo las consignas de velocidad angular  $\{\Omega\}$ , cíclico – lateral  $\{U_{lat}\}$ , cíclico – longitudinal  $\{U_{lon}\}$  y la señal de control del rotor de cola  $\{U_{ped}\}$ . La velocidad angular del rotor principal es salida del controlador PID diseñado para el motor del helicóptero. Del conjunto de estados se estimaron como salidas las velocidades lineales y los ángulos de Euler.

Para encontrar el modelo lineal, de las ecuaciones resumidas en el capítulo 3.1, utilizando el método del Jacobiano se utilizó el script de Matlab que se encuentra en el ANEXO 5 LINEALIZACIÓN. Finalmente el modelo lineal del sistema representado en el espacio de estados se enseña a continuación,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 9.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.26 & 0 & 0 & 0 & 198.34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26.72 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ p(t) \\ q(t) \\ r(t) \\ \phi(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} \quad (123)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0062 & 0 \\ 0.0030 & 0.0062 & 0 & 0.2005 \\ -1.7949 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0703 & 0.1250 & -0.2859 & 4.6847 \\ 0 & 0.0385 & 0.0168 & 0 \\ -0.0672 & 0 & 0 & -2.2378 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{col}(t) \\ U_{lat}(t) \\ U_{lon}(t) \\ U_{ped}(t) \end{bmatrix} \quad (124)$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ p(t) \\ q(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (125)$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{col}(t) \\ U_{lat}(t) \\ U_{lon}(t) \\ U_{ped}(t) \end{bmatrix} \quad (126)$$

### 3.2. IDENTIFICACIÓN DEL SISTEMA MOTOR

El empuje vertical en los helicópteros viene dado por las aspas del rotor principal, las cuales deben girar a una velocidad controlada para que el diferencial de presión entre las aspas sea el suficiente para contrarrestar el peso de la aeronave. Diferentes variables influyen en la generación de empuje vertical (tilt) del rotor: la forma de las aspas, la velocidad de rotación del eje y del motor, la presión atmosférica, la turbulencia producida por el aspa subsiguiente, el ángulo de inclinación o ángulo de ataque, la fricción aerodinámica generada por el rotor principal y el rotor de cola etc, los cuales deben ser parcialmente analizados para determinar el empuje.

Las ecuaciones de empuje del rotor principal, descritas en la ecuación (87), relacionan la velocidad angular del eje del rotor ( $\Omega$ ) como una variable necesaria. Para determinar esta última se toma como referencia el modelo observado en la Figura 1, para el cual se asume un sistema multivariable con dos entradas (las consignas de aceleración y colectivo), las cuales están acopladas de tal manera que alteran la velocidad final del rotor, es decir la salida del sistema; a esta relación se denominó Sistema Motor, el cual comprende elementos mecánicos como el eje del rotor, el plato oscilante, links, piñones, la correa dentada que une el motor principal con el rotor de cola, bisagras y las aspas del rotor principal y trasero; en resumen, todos los elementos mecánicos que permiten a los dos rotores generar empuje como se aprecia en la Figura 29.

La interacción del rotor de cola con el sistema Motor; mediante la acción de los pedales de Yaw (orientación), puede asumirse como una perturbación sobre la velocidad final del rotor, pues éste está directamente conectado al motor mediante una correa dentada, por lo que cualquier cambio del ángulo de ataque de las aspas del rotor de cola genera fricción aerodinámica que se convierten en ligeras atenuaciones de la velocidad angular. Por tanto, para efectos de la identificación la consigna  $U_{ped}$  se mantendrá igual a cero.

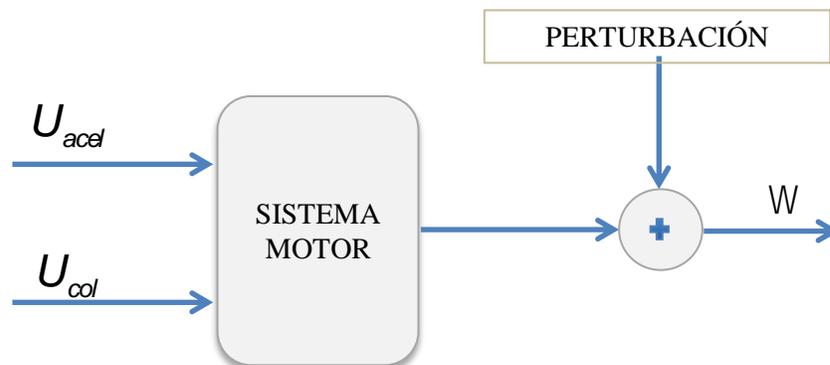


Figura 30. Diagrama de bloques del sistema motor.

Para encontrar un empuje que permita al helicóptero el vuelo en estacionario, debe asegurarse una velocidad angular del rotor constante, por lo cual es necesario manipular la aceleración del motor y el ángulo de ataque de las aspas del rotor (comúnmente conocido como colectivo), sin embargo es necesario contemplar y explicar el acoplamiento que existe entre las consignas y la señal de salida.

La relación entre  $\Omega$  y  $U_{acel}$  es proporcional, es decir, a mayor revoluciones del motor la velocidad aumentará, a pesar de esto, cuando se da un cambio en el ángulo de ataque de las aspas del rotor principal ( $U_{col}$ ) la sustentación ( $S$ ) aumenta y así mismo lo hace la resistencia al aire ( $R_S$ ), lo cual se traduce en una disminución en la velocidad angular final. Esta interacción entre las variables debe ser analizada en el proceso de modelación y la ley de control a implementar.

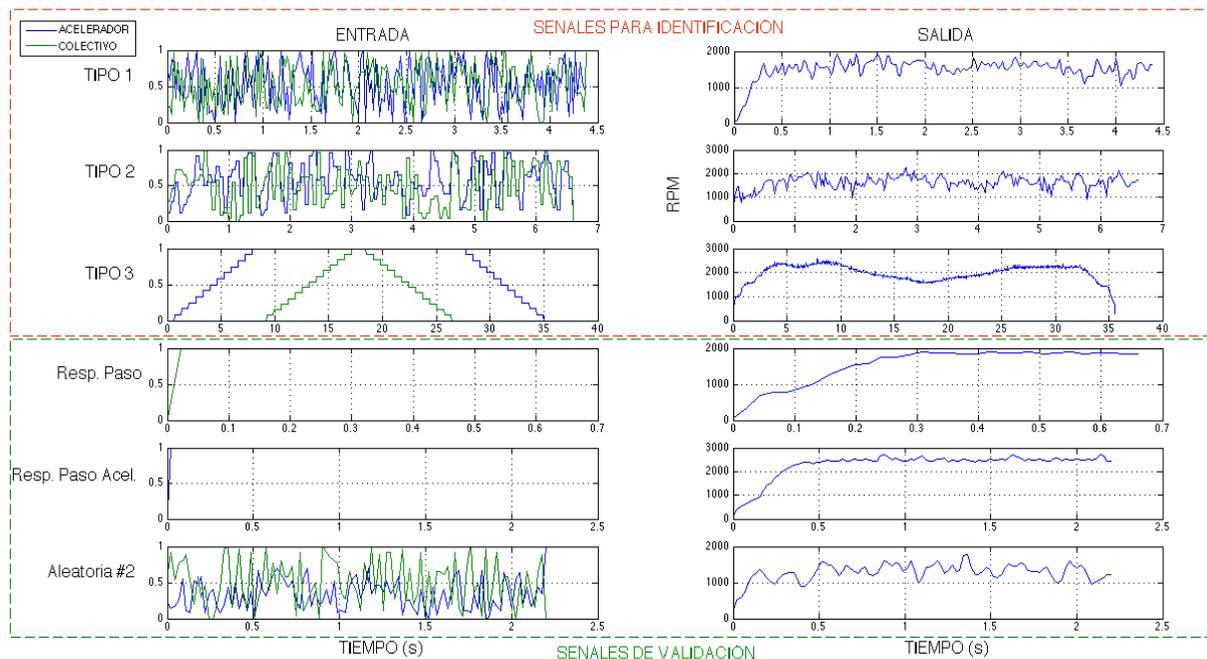
### 3.2.1. Experimentación

El proceso de identificación se realizó con tres tipos de señales de modelación: aleatoria, pseudoaleatoria y escalonada, las cuales serán llamadas durante el desarrollo del documento como señales Tipo 1, Tipo 2 y Tipo 3 respectivamente, y pueden ser observadas en la Figura 31. Cada una de las señales de prueba tienen un propósito específico, esto es, para el caso Tipo 1 se usan señales de tipo ruido blanco con el fin de registrar los cambios de alta frecuencia del colectivo y el acelerador y sus efectos sobre la velocidad.

La señal Tipo 2; entrada pseudo-aleatoria de tipo ruido blanco, excita el colectivo y el acelerador en alta frecuencia aunque sostiene los valores de las señales de entrada para conocer las respuestas de estabilización a dos tiempos de muestreo correspondientes a  $44ms$ . El propósito de utilizar este tipo de entradas aleatorias se basó en la necesidad de estimar estados de alta frecuencia del helicóptero lograse, sin embargo debe aclararse que algunas variables no fueron consideradas en la identificación.

La señal Tipo 3, buscó conocer la respuesta del sistema ante entradas escalonadas y sostenidas por tiempos constantes; 29 tiempos de muestreo equivalentes a  $638ms$ , esto le permite al rotor aproximarse a una velocidad en estado estable.

Para realizar la validación de los modelos obtenidos se utilizaron todas las señales vistas en la Figura 31. Allí puede encontrarse la respuesta paso de colectivo y acelerador; la cual es llamada Resp. Paso durante el documento. También se excitó el sistema con una respuesta paso aplicando solo señal de acelerador; la cual será llamada Resp. Paso Acel., con el fin de evaluar si los modelos pueden alcanzar la velocidad máxima posible (sin cargas aerodinámicas producidas por el colectivo). Por último se estimó conveniente utilizar una nueva señal aleatoria para determinar la respuesta ante estas entradas caóticas, la cual será llamada Aleatoria #2 en el transcurso del escrito.



(a). Señales de entrada.

(a). Señales de salida.

Figura 31. Señales de trabajo para realizar la identificación.

Durante la experimentación se pudo visualizar que el sistema presentaba un tiempo de retardo producido por la transferencia de movimiento entre los servomotores, el plato oscilante, los enlaces (links) y las bisagras hasta el ángulo de ataque efectivo de las aspas del rotor principal. Adicionalmente, luego del análisis, se encontró que el motor debía romper la fricción generada por efecto de los componentes

mecánicos del rotor principal, los cuales se convierten en una carga para el motor. Para realizar el proceso de identificación se discrimina este tiempo por ser inferior a 10ms.

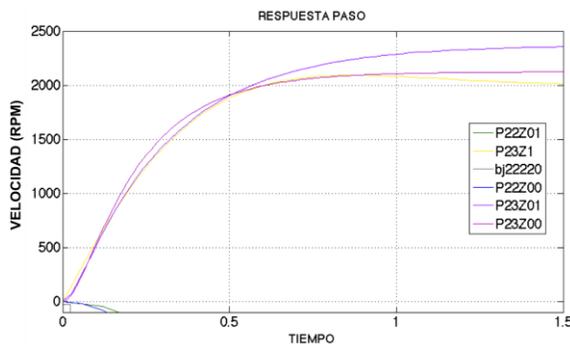
### 3.2.2. Identificación del sistema Motor

Con el fin de encontrar el modelo que mejor describe el comportamiento del sistema se decidió utilizar como única señal de validación la Respuesta Paso, y se agruparon los mejores porcentajes de ajuste como se muestra en la Tabla 3. Luego de esto se analiza la correspondencia entre las respuestas paso real (vista en la Figura 32.g) y las simuladas de cada uno de los modelos escogidos.

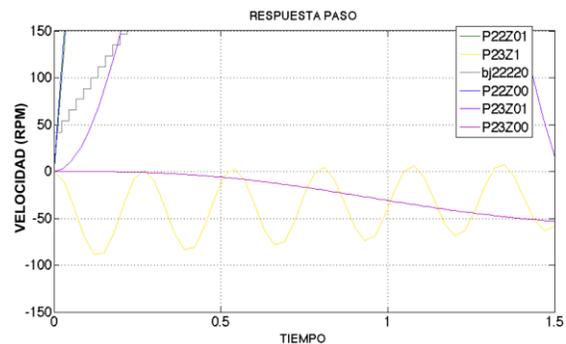
SEÑALES DE IDENTIFICACIÓN					
SEÑAL PSEUDOALEATORIA		SEÑAL ESCALONADA		SEÑAL ALEATORIA	
SEÑALES DE VALIDACIÓN					
AJUSTES RESPUESTA PASO		AJUSTES RESPUESTA PASO		AJUSTES RESPUESTA PASO	
bj22231	91.99 %	P33Z11	88.46 %	bj22220	87.95 %
bj22220	91.21 %	P33Z01	88.46 %	P23Z11	87.93 %
bj32221	91.02 %	P33Z00	88.46 %	P23Z01	87.88 %
bj32230	83.54 %	P23Z00	88.27 %	P23Z00	87.81 %
n4s2	73.89 %	P33Z10	88.21 %	P22Z00	86.64 %
arx10101	72.1 %	bj22221	80.11 %	P22Z01	86.55 %

Tabla 3. Resultados discriminados por porcentaje de ajuste tras la identificación.

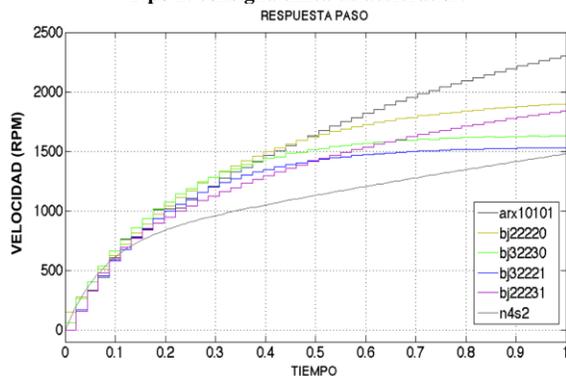
De la Figura 32(a) se encontró que la respuesta de los modelos bj22220, P22Z00 y P22Z01 no corresponden a los resultados reales de un escalón unitario para la entrada de acelerador, y para el caso de P23Z11, P23Z01 y P23Z00 tienen respuestas similares a las velocidades angulares medidas. Al examinar la gráfica (b) se logró determinar que el modelo P23Z00 es el único sistema que tiene correspondencia a la respuesta real. Esta última observación se debe a que el colectivo no genera cambios de velocidad sino existe una entrada de acelerador, por lo que velocidades negativas serían llevadas a cero.



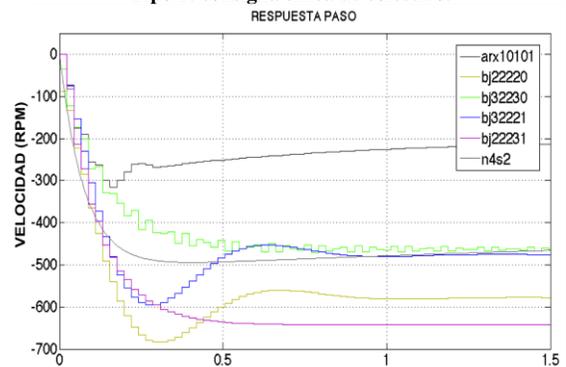
(a). Respuesta escalón de los modelos encontrados con una señal Tipo 1: consigna única de acelerador.



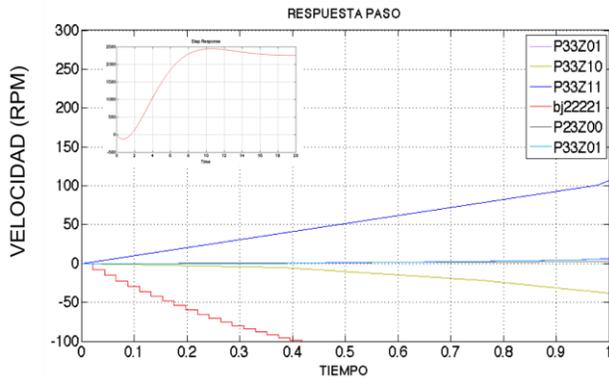
(b). Respuesta escalón de los modelos encontrados con una señal Tipo 1: consigna única de colectivo.



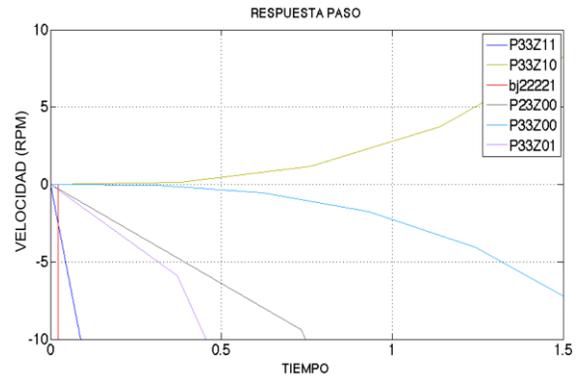
(c). Respuesta escalón de los modelos encontrados con una señal Tipo 2: consigna única de acelerador.



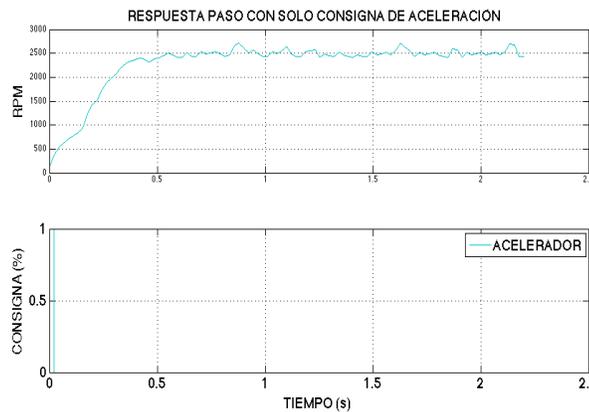
(d). Respuesta escalón de los modelos encontrados con una señal Tipo 2: consigna única de colectivo.



(e). Respuesta escalón de los modelos encontrados con una señal Tipo 3: consigna única de acelerador.



(f). Respuesta escalón de los modelos encontrados con una señal Tipo 3: consigna única de colectivo.



(g). Escalón unitario de consigna de aceleración: respuesta real de la velocidad máxima sin carga aerodinámica del colectivo.  
**Figura 32. Respuesta de Velocidad ante escalón unitario.**

Continuando con las observaciones, la gráfica (c) muestra que todos los modelos tienen tiempos de respuesta y ganancias diferentes a la respuesta real, sin embargo los modelos bj22220, bj32221 y bj32230 aunque presentan ganancias atenuadas, las cuales serán necesario evaluar si existe un valor constante o valor DC con el que pueda compensarse, adicionalmente al comparar las velocidades de respuesta con los datos reales se observaron ciertas analogías. Del ítem (d) de la figura se pudo constatar que todos los modelos tienen equivalencia a lo que podría ser la respuesta real de la velocidad angular ante una señal de entrada unitaria de colectivo.

El gráfico (e) permitió evidenciar que todos los modelos son errados. De (f) se logró comprobar que solo P33Z10 no ejemplifica el resultado de velocidad. A pesar de que los resultados de los modelos Tipo 3 son satisfactorios, el análisis gráfico mostró que el único modelo que presenta cierta similitud es el bj22221, sin embargo el tiempo de respuesta es superior 10 segundos, se presenta un sobre pico que no existe en la respuesta real y claramente un cero de fase no mínima hace que los resultados de la velocidad sean desacertados.

Del conjunto de modelos la Tabla 3, se concluye a partir los resultados gráficos y el porcentaje de ajuste que los modelos P23Z00, bj22220, bj32221 y bj32230, son los más ajustados a los datos reales, por tanto se evalúan detenidamente las respuestas temporales y el error de predicción para la Respuesta Paso y Respuesta Paso Acelerador normalizados entre 0 y 1.

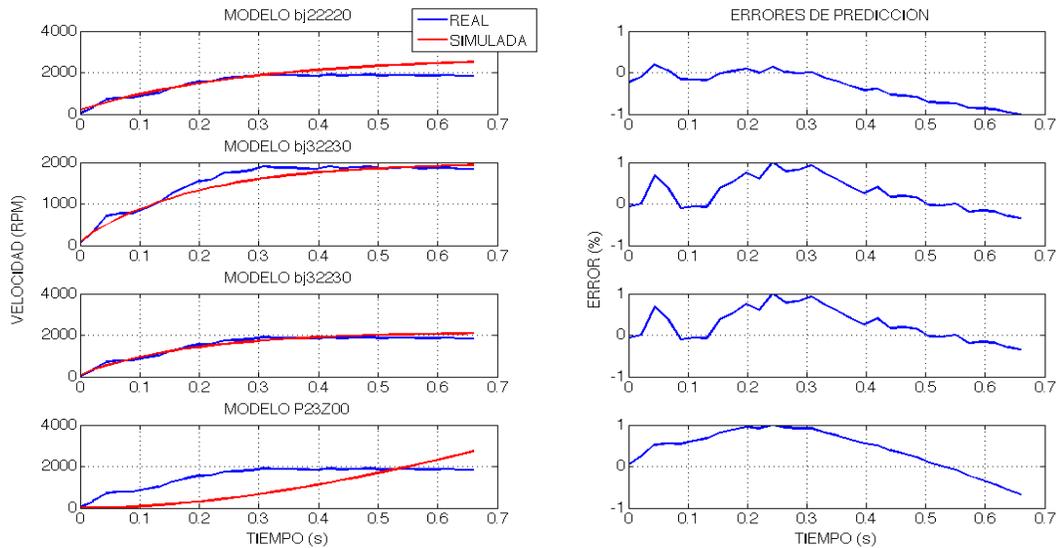
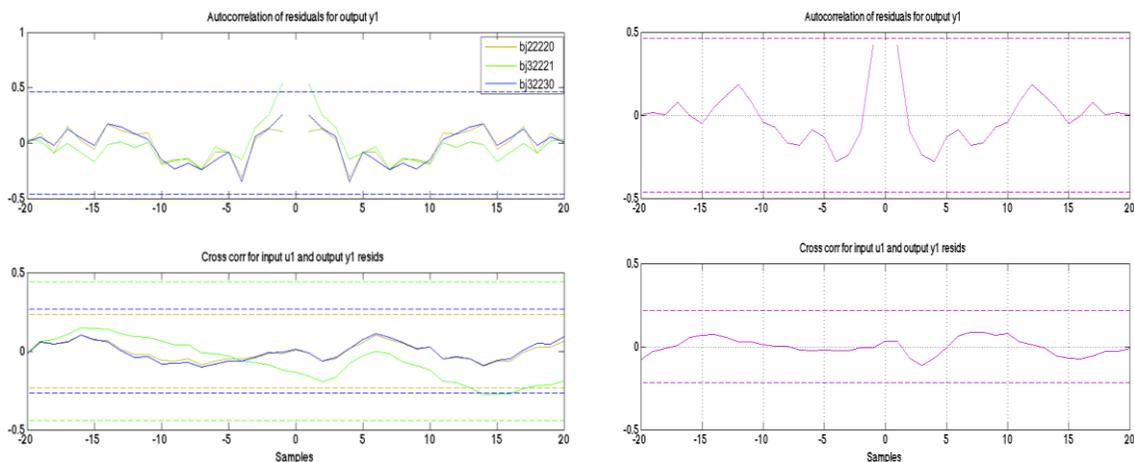


Figura 33. Evaluación de la Respuesta Paso: Simulación vs Datos Reales.

La Figura 33 muestra los resultados gráficos de los cuatro modelos seleccionados anteriormente. Pudo determinarse que los modelos dinámicos Box Jenkins, presentan ganancias atenuadas de 42% para los modelos bj22220 y bj32230, y 40% para el bj32221, por tanto se amplificaron las salidas de cada modelo en factores de 1.42 y 1.4, respectivamente. Este valor de amplificación de la señal de salida de los modelos está claramente justificada en el hecho que físicas no modeladas un fueron incluidas en el modelo, las cuales, por ejemplo, se convierten en cargas aerodinámicas que disminuyen la velocidad final del rotor.

Analizando los errores de modelación se encontró que los modelos bj22220, bj32230, bj32221 y P23Z00 cuentan con errores promedio de 1.7001%, 1.1784%, 0.0676% y 4.0310% respectivamente. Según los datos obtenidos del error, el modelo bj32230 presenta la mejor aproximación a la planta. Finalmente se examinaron las gráficas de correlación y correlación cruzada de los residuos de los errores de predicción. La Figura 34 muestra los errores de predicción resultantes de la salida registrada con la salida predicha por el modelo.



(a). Residuos estadísticos de los modelos bj22220, bj32221 y bj32230.

(b). Residuos estadísticos del modelo P23Z00.

Figura 34. Residuos estadísticos.

Idealmente los residuos deben ser independientes de la entrada. Sin embargo para el modelo bj32221 no sucedió así, esto muestra que existen dinámicas presentes en el sistema motor-colectivo-acelerador que no

fueron contempladas. Esto es claro, pues la densidad del aire, el voltaje de las baterías, las perturbaciones, turbulencias producidas por el efecto suelo, entre otras, no fueron tenidas en cuenta en la medición de las variables. Luego del análisis puede determinarse que el modelo apropiado que reproduce el sistema de velocidad es el bj32230, y se describe a continuación,

$$1.42[Y(t)] = \frac{B(z)}{F(z)}u(t) + \frac{Cq}{D(z)}e(t) \quad (127)$$

$$1.42[Y(t)] = \left[ \frac{60.02 + 234.1z^{-1} + 184.9z^{-2}}{1 + 0.4669z^{-1} - 0.8416z^{-2} - 0.3334z^{-3}} \right] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \left[ \frac{1 - 0.4307z^{-1} - 0.295z^{-2}}{1 - 1.114z^{-1} + 0.1145z^{-2}} \right] e(t)$$

Con el fin de encontrar las leyes de control del sistema, se encontró el modelo en tiempo continuo, para esto se utilizó la función en Matlab “d2c()” utilizando una aproximación bilineal (Tustin) con un tiempo de muestre de 22ms. El modelo resultante puede observarse en (128).

$$1.42[Y(t)] = \frac{B(s)}{F(s)}u(t) + \frac{C(s)}{D(s)}e(t) \quad (128)$$

$$1.42[Y(t)] = \left[ \frac{60.02s^5 + 1.52e04s^4 + 4.04e6s^3 + 4.92e8s^2 + 5.71e10s + 3.83e12}{s^5 + 94.73s^4 + 4.334e04s^3 + 2.051e06s^2 + 4.644e08s + 2.336e09} \right] \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \left[ \frac{s^2 + 154.2s + 1387}{s^2 + 98.49s + 1.218} \right] e(t)$$

Para determinar la recuperación del modelo, luego de la conversión a tiempo continuo, se graficaron las respuestas escalón unitario acelerador y colectivo. La Figura 35 enseña la respuesta luego de la transformación. Claramente se puede notar que el modelo en (s) recupera completamente su versión en (z).

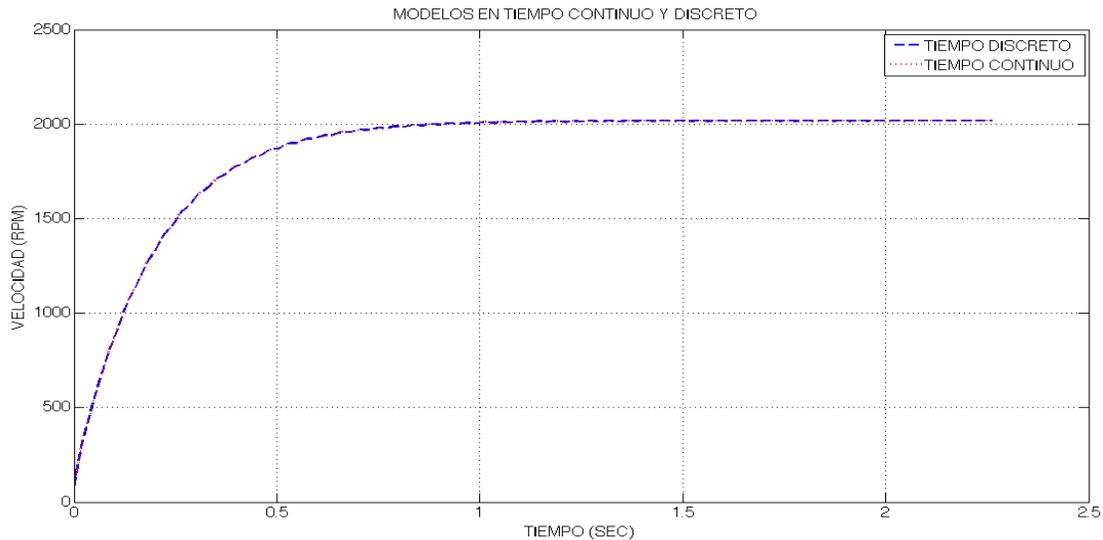


Figura 35. Respuestas paso en tiempo continuo y discreto.

### 3.3. CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE: FUSELAJE

El comportamiento dinámico del sistema no solo está descrito por un único modelo lineal e invariante en el tiempo, sino que una familia de modelos lineales e invariantes; producidos por dinámicas no modeladas

que intervienen en el vuelo en hover del helicóptero los cuales terminan por generar cierto grado de incertidumbre. Esto significa que la planta real ( $G_R$ ) está compuesta por la relación de un modelo nominal ( $G_N$ ) y un error de modelación ( $E_m$ ), la cual puede observarse en la siguiente ecuación (M. H., G. de la Sen, & Avello, 2000).

$$G_R(s) = [I + \Delta_{mo}(s)]G_N(s) \quad (129)$$

De la ecuación anterior puede despejarse el error de modelación como se muestra en (129). A partir de esto y teniendo en cuenta que el modelo encontrado presenta dos entradas una salida, se hizo uso de la teoría de los valores principales para determinar la cota máxima o superior de incertidumbre del modelo encontrado.

$$\sigma^+\{E_m(s)\} = \frac{G_R(s)}{G_N(s)} - I \quad (130)$$

La Figura 36 muestra la cota superior de la incertidumbre multiplicativa que se encontró del modelo del fuselaje. Es evidente que el modelo cuenta con errores de modelación debidos a parámetros no contemplados como la presión atmosférica, las velocidades y presiones del aire en torno al aspa, la densidad del aire, el coeficiente de fricción aerodinámica, la temperatura, la velocidad del viento, la humedad relativa, entre otros y efectos aerodinámicos como la estela turbulenta, el molino de viento y el vórtice de anillo. A pesar de esto, los valores de ganancia del error no son tan considerables, aunque presenta variaciones en el espectro de frecuencia.

Al evaluar la respuesta del error de modelación se encuentran ganancias  $0dB$  en baja frecuencia,  $> 2dB$  en alta y un par de picos en  $2.989 rad/s$  y  $11.27 rad/s$  con valores de ganancia de  $3.84dB$  y  $0.261dB$  respectivamente. Comparando las frecuencias de mayor error con la frecuencia natural del sistema; la cual es  $0.11 rad/s$ , las magnitudes de error se encuentran por encima de esta frecuencia por lo que el modelo que representa la planta es confiable.

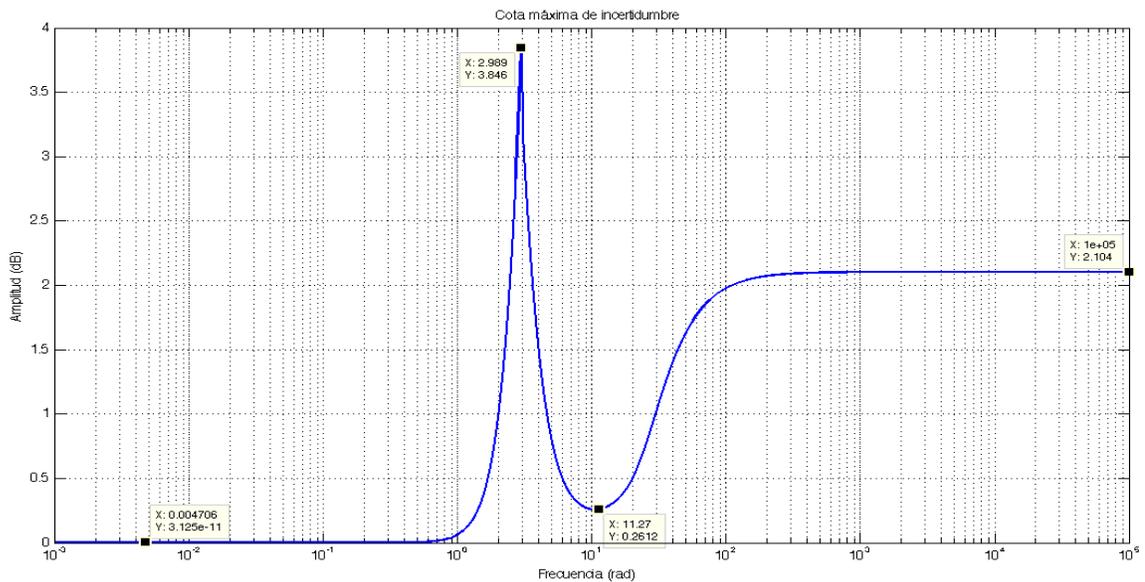


Figura 36. Cota superior de incertidumbre del modelo del fuselaje.

Adicionalmente, al tener presente que la frecuencia natural del motor del helicóptero ronda los  $280 rad/s$ , es posible relacionar esta condición con la incertidumbre de alta. Teniendo en cuenta este escenario, el modelo encontrado satisface las necesidades claras para el desarrollo de la ley de control.

### 3.4. CÁLCULO DE LA INCERTIDUMBRE: SISTEMA MOTOR

Para encontrar el perfil de la incertidumbre se realizó un código en Matlab, en el que se encontraron 65.536 modelos a partir de las desviaciones estándar arrojadas por el proceso de identificación del sistema Box Jenkins. Luego de manera iterativa para cada nuevo modelo, se aplicaron las ecuaciones anteriormente mencionadas y se determinó, como se observa Figura 37, la cota superior de la salida de la planta mediante el uso de los valores principales.

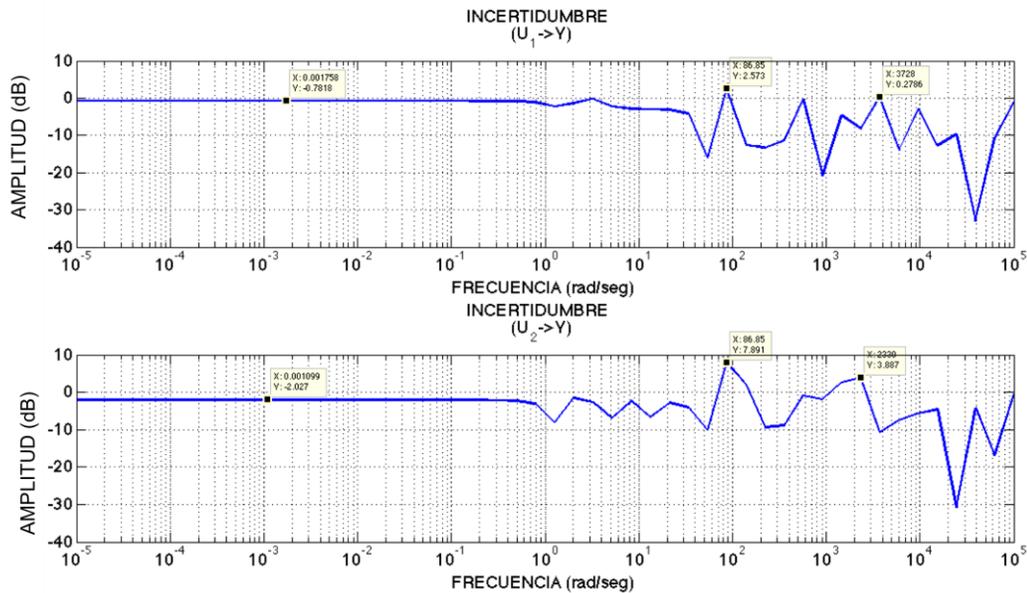


Figura 37. Perfil de incertidumbre multiplicativa.

Del análisis de la incertidumbre se logró determinar que el modelo  $(Y(t)/U_1(t))$  presenta dos ganancias de  $2.573dB$  ( $1.345$ ) y  $0.2786dB$  ( $0.2820$ ) en las frecuencias  $86.85rad/seg$  y  $3629rad/seg$  respectivamente, en las cuales existen problemas de incertidumbre del modelo. Al contrastar las frecuencias en las que se encuentran los picos máximos de error con la frecuencia máxima del sistema ( $556.0619rad/seg$ ) puede definirse que se presentan dinámicas de alta frecuencia que el modelo no puede describir, por lo que el control implementado deberá contrarrestar los efectos producidos por este. Para el caso de  $(Y(t)/U_2(t))$  se presentan ganancias de  $86.85dB$  y  $3.887dB$  en las frecuencias  $86.85rad/seg$  y  $2330rad/seg$  mostrando que realmente existen comportamientos en alta frecuencia que el modelo no podría describir. Cabe hacer la aclaración de que la frecuencia máxima es sin carga aerodinámica, por lo que la frecuencia máxima con acción de acelerador y colectivo simultáneamente se ve considerablemente disminuida.

### 3.5. LEY DE CONTROL $H_{\infty}$ : FUSELAJE

La estabilización del helicóptero en vuelo estacionario busca que los movimientos rotacionales se mantengan constantes, específicamente que los ángulos de Euler  $[\phi \ \theta \ \psi]$  sean iguales a cero, y que la velocidad de elevación  $\omega = 0$ . Habiendo descrito un modelo general para un sistema de 4 entradas y 6 salidas, se reestructura el modelo ya presentado en (123) a (126) para que las salidas a controlar sean la velocidad traslacional de elevación y los ángulos de Euler, y las entradas sean las consignas de cíclico longitudinal, cíclico lateral, pedales y la velocidad angular del rotor controlada por los PID que se presentan siguiente sección. Con esto, el modelo a controlar se estima como se muestra en el ANEXO 8: PLANTA PARA CONTROL y se presenta a continuación:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.011 & 0 & 0 & 0 & 9.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.264 & 0 & 0 & 0 & 198.343 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26.72 & 0 \\ 0 & 0 & -0.252 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \\ p(t) \\ q(t) \\ r(t) \\ \phi(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} \quad (132)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00617 & 0 \\ 0.0003 & 0.0061 & 0 & 0.2005 \\ -1.795 & 0 & 0 & 0 \\ 0.07032 & 0.125 & -0.2859 & 4.685 \\ 0 & 0.03852 & 0.01684 & 0 \\ -0.0681 & 0 & 0 & -2.238 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega(t) \\ U_{lat}(t) \\ U_{lon}(t) \\ U_{ped}(t) \end{bmatrix} \quad (133)$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ \phi(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} \quad (134)$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega(t) \\ U_{lat}(t) \\ U_{lon}(t) \\ U_{ped}(t) \end{bmatrix} \quad (135)$$

Se linealizó el modelo para lograr una velocidad angular de  $81.02478095183396 \text{ rad/s}$ , con lo cual el empuje producido por el rotor principal se igual al peso, con lo cual se obtiene una velocidad de elevación igual a cero. A partir del modelo para control se diseña el controlador  $H_\infty$  Loop Shaping utilizando factores coprimos normalizados.

### 3.5.1. Pre-Análisis del Sistema para la Implementación del Controlador $H_\infty$ Loop Shaping

Para el diseño de la ley de control  $H_\infty$  loop-shaping, se debe garantizar que la planta para control sea detectable y estabilizable (Feyel, 2013), (Murillo Sánchez, 1995) y (Braatz, Morari, & Skogestad, 1996). Un sistema se considera detectable si todos sus modos no observables son estables, y estabilizable si todos sus modos no controlables son estables. Con el fin de evaluar estas condiciones, se utilizó la matriz de Hautus descrita en (Boltynski & Poznyak, 2012).

La evaluación de la detectabilidad se realiza planteando la matriz de Hautus descrita en (136), la cual si es de rango completo para todos los valores propios reales mayores iguales a cero, cumple la condición.

$$H_D = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} \quad (136)$$

Al igual que la detectabilidad, la estabilidad se determina encontrando la matriz de Hautus presentada en (137), para la cual se debe constatar que el rango de la matriz resultante sea completo para todo valor propio real mayor o igual a cero.

$$H_E = [A - \lambda I \quad B] \quad (137)$$

Al evaluar las matrices  $H_D$  y  $H_E$  para el modelo de control se tiene que,

$$H_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0113 & 0 & 0 & 0 & 9.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20.8334 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix}_{13 \times 9}$$

$$H_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -0.0062 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & \dots & 0.0062 & 0 & 0.2005 \\ 0 & 0 & -20.8334 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2644 & \dots & 0.1250 & -0.2859 & 4.6847 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.0385 & 0.0168 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2526 & \dots & 0 & 0 & -2.2378 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9 \times 13}$$

Al evaluar los rangos de las matrices anteriormente expuestas, se determinó que eran de rango completo, por lo que el sistema cumple con los criterios de estabilidad y detectabilidad. El diseño de la ley de control establece metas de control, el diseño de los filtros precompensadores, postcompensadores y el controlador. El método para encontrar las matrices se encuentra en el ANEXO B: PLANTA PARA CONTROL.

### 3.5.2. Objetivos de Control

Las respuestas en frecuencia del sistema muestran que el helicóptero es susceptible a perturbaciones y ruido, adicionalmente presenta condiciones específicas para la velocidad de respuesta y necesidades claras en el ancho de banda de los actuadores. Con esto se establecen criterios de diseño para el controlador.

- Atenuación de perturbaciones: la perturbación mas clara para el helicóptero son los cambios en la presión atmosférica y ráfagas de viento inesperadas. Para lograr atenuar este tipo de perturbaciones, el aeronave debe contar con tiempos de respuesta muy rápidos que le permitan reaccionar prontamente a estos cambios. Esto frecuentemente se logra haciendo que el perfil de sensibilidad tienda a cero,  $\sigma^+\{S(s)\} \rightarrow 0$ , lo que por definición implica que  $\sigma^-\{L(s)\} \gg 1$ .
- Atenuación de ruido y robustez: para lograr alcanzar este objetivo se debe hacer que  $\sigma^+\{T(s)\} \ll 1$ , esto por definición se alcanza haciendo que  $\sigma^+\{L(s)\} \ll 1$ , por tanto esta condición entra en conflicto con la meta anterior. Debido a las particularidades del helicóptero las dos metas se deben cumplir al mismo tiempo, lo cual se logra haciendo que las perturbaciones se atenúen en baja frecuencia y el ruido en altas, por lo que  $\sigma^+\{L(s)\} \gg 1$  en  $\omega$  pequeñas y  $\sigma^+\{L(s)\} \ll 1$  para el caso contrario.
- Seguimiento de la referencia: para minimizar el error de estado estable se debe asegurar que el lazo abierto tenga altas ganancias en toda frecuencia, sin embargo idealmente se busca que el sistema se exija para que responda rápidamente en frecuencias bajas. Al cumplir esta condición se cumplen consecuentemente las anteriores.

Teniendo en cuenta las condiciones específicas del helicóptero, el diseño de la ley de control  $H_\infty$  deberá estar en capacidad de atenuar perturbaciones, aunque debe considerarse la magnitud de las mismas pues es

posible que un disturbio o disturbios combinados logre llevar el sistema a un punto en el que el controlador no logre recuperarlo.

### 3.5.3. Diseño de la Ley de Control $H_\infty$ Loop Shaping

El diseño del precompensador y postcompensador buscan un buen seguimiento de la referencia y robustez del controlador. Es necesario aclarar que el propósito de la ley de control es regular el sistema para que se mantenga a una referencia cero, de tal forma que ante una perturbación de cierta magnitud en cualquiera de las salidas, el helicóptero pueda recuperarse en el menor tiempo posible; teniendo en cuenta el gran acoplamiento o interactividad que existen entre las señales de entrada y cada una de las salidas.

Generalmente el filtro precompensador  $W_1(s)$  debe ser seleccionado de tal manera que tenga altas ganancias en baja frecuencia y bajas en alta frecuencia, similar a un filtro pasa bajas con frecuencia de corte igual a la frecuencia de operación. Esto le permite asegurar el buen seguimiento de la referencia, la atenuación de perturbaciones y robustez (Lv, Hu, & Liu, 2011). El postcompensador  $W_2(s)$  refleja la importancia de las salidas a ser controladas asignando un factor de ganancia que redunde de la velocidad de respuesta.

Para diseñar el filtro  $W_1(s)$  se sintonizó con el fin de atenuar el efecto de la incertidumbre del sistema presente en frecuencias superiores a los  $2 \text{ rad/s}$  y de este modo asegurar la robustez del controlador. Se ubican ceros de transmisión de alta frecuencia y de fase mínima para garantizar que los polos inestables fuesen cancelados por estos. Así mismo se seleccionan polos de alta frecuencia para lograr rápidas recuperaciones del sistema ante perturbaciones de las salidas. Luego de analizar diferentes configuraciones para el filtro, se estimó conveniente asignar a  $W_1(s)$  como se muestra en la ecuación (138), asegurando que el filtro fuese estable y de fase mínima; condición estricta de Matlab para el diseño de los filtros. La matriz de transferencia enseña que  $\psi(t)$  o yaw, deberá responder más rápidamente que roll ( $\phi(t)$ ) y este último más rápido que el pitch ( $\theta(t)$ ); esto se debe a la gran interacción entre los ángulos yaw y roll, pues cada vez que existe un cambio en el yaw se ve reflejado implícitamente sobre el roll, y a su vez el roll produce una inclinación de la nariz del helicóptero (pitch), debida al efecto de la gravedad y la posición del centro de gravedad. Este efecto implicó que  $\psi(t)$  respondiera rápidamente para que los demás ángulos se estabilizaran en el menor tiempo posible.

$$W_1(s) = \begin{bmatrix} 1.2 \frac{(s+40)}{(s+10.5)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3 \frac{(s+35)}{(s+22)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1 \frac{(s+38)}{(s+20)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.3 \frac{(s+45)}{(s+23)} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (138)$$

Adicional a lo que se mencionó anteriormente, el torque generado por el giro del rotor principal, genera un antitorque  $\psi(t)$  que debe ser contrarrestado por la acción de los pedales, por tanto el control del yaw también es crítico. Para el diseño del filtro  $W_2(s)$  se buscó ponderar la importancia de las salidas, en este caso se determinó que el ángulo  $\theta(t)$  tiene la prioridad para el controlador, luego se deberá controlar  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$  y  $\Omega(t)$ .

$$W_2(s) = \begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 285 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (139)$$

Utilizando la función “nfcsyn()” se encuentra un controlador que cumple la condición de la norma  $H_\infty$  y forma un lazo cerrado estable. El espacio de estados resultante se enseña en las ecuaciones (140) a (143).

$$A_c = \begin{bmatrix} -10.5 & 0 & 0 & \dots & -0.08 & 0.01 & 0.01 \\ 0 & -22 & 0 & \dots & -78.29.6379 & 8.14 & 6.81 \\ 0 & 0 & -20 & \dots & -30.47 & 3.16 & 2.64 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -28.41 & -0.0179 & 3.9 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 14.36 & -10.4757 & 4.79 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1.65 & 0.029 & -23.19 \end{bmatrix}_{15 \times 15} \quad (140)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0.00010 & -0.47 & 21.85 & -2.65 \\ 0.82 & -471.89 & 33313.12.22 & -2684.62 \\ 0.32 & -183.16.43 & 12930.3 & -1042.02 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.09 & -53.59 & 3753.88 & -302.38 \\ -0.07 & 37.65 & -2701.29 & 216.22 \\ -0.03 & 15.08 & -1064.87 & 85.83 \end{bmatrix}_{15 \times 4} \quad (141)$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 4.42 & 0 & 0 & \dots & -0.01 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0 & 4.42 & 0 & \dots & -25.44 & 2.65 & 2.21 \\ 0 & 0 & 4.95 & \dots & -8.38 & 0.87 & 0.73 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -3.71 & 0.38 & 0.32 \end{bmatrix}_{4 \times 15} \quad (142)$$

$$D_c = \begin{bmatrix} 0.001 & -0.07 & 4.93 & -0.40 \\ 0.27 & -153.36 & 10826.76.95 & -872.5 \\ 0.09 & -50.37 & 3555.83 & -286.56 \\ 0.04 & -22.39 & 1580.54 & -127.37 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (143)$$

El margen de estabilidad  $\gamma$  resultante es 26.85 o 27.07dB, para el cual el máximo valor principal del lazo abierto planta-controlador cumple con la condición que  $W_2(s)P(s)W_1(s)$  permanezca dentro del rango de  $\gamma$ . La verificación de los valores singulares se observa en la Figura 38, con lo cual se certifica que el regulador cumple la condición de estabilidad. El script para el cálculo del controlador se encuentra en el ANEXO 9: DISEÑO DE LA LEY DE CONTROL  $H_\infty$ .

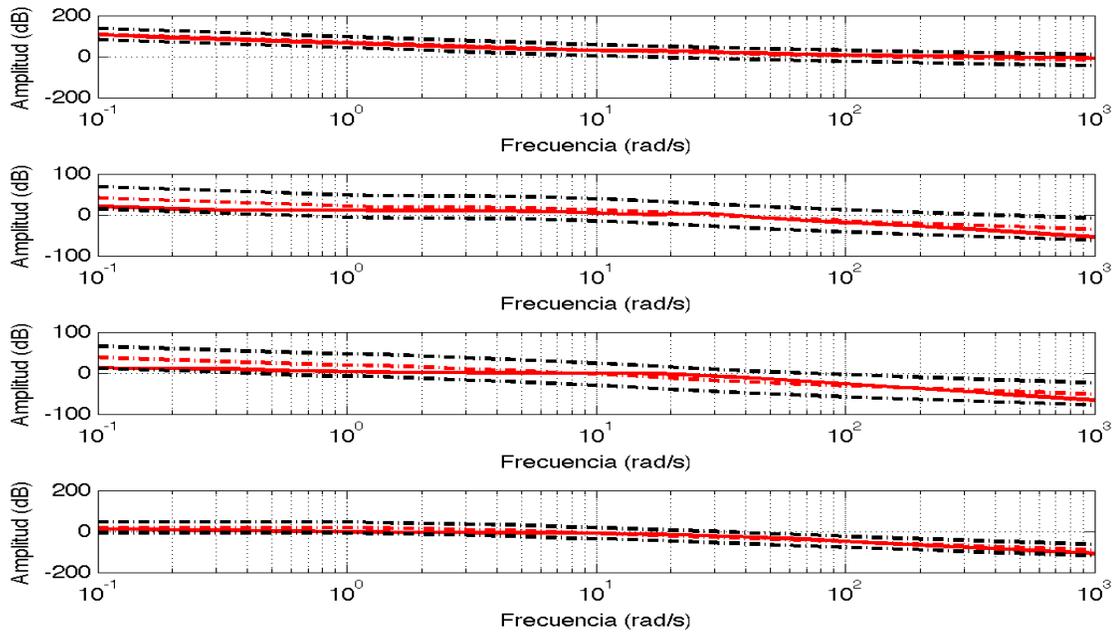


Figura 38. Valores singulares planta-controlador.

### 3.6. LEY DE CONTROL PID: SISTEMA DE VELOCIDAD

Para diseñar la ley de control PID que permita controlar el sistema MISO que constituye la relación colectivo-acelerador y velocidad angular, se realiza un desacople del sistema para obtener dos funciones de transferencia SISO que representen la interacción entre el acelerador-velocidad y el colectivo-velocidad independientemente. Durante el siguiente capítulo se mostrará el proceso realizado para lograr construir los dos controladores que regulan de forma separada.

#### 3.6.1. Desacople del Sistema

Como ley de control se estableció diseñar un servocontrolador tipo PID para sistemas de una entrada y una salida. Con el fin de lograr este objetivo fue necesario convertir el modelo Box Jenkins, identificado en (140), a una matriz de transferencia aplicando la función “*idtf()*”; el modelo resultante puede apreciarse en (144-146).

$$G(s) = 1.42[G_{11}(s) \quad G_{12}(s)] \quad (144)$$

$$G_{11}(s) = \frac{60.02s^5 + 1.52e04s^4 + 4.04e06s^3 + 4.926e08s^2 + 5.711e10s + 3.833e12}{s^5 + 94.73s^4 + 4.334e04s^3 + 2.05e06s^2 + 4.64e08s + 2.336e09} \quad (145)$$

$$G_{12}(s) = \frac{-35.46s^3 - 1715s^2 - 7.41e05s - 5.04e07}{s^3 + 10.01s^2 + 1.42e04s + 1.09e05} \quad (146)$$

Luego de encontrar el modelo representado en función de transferencia, se utilizó la técnica de desacople de ganancia relativa RGA, por sus siglas del inglés Relative Gain Array. El propósito de desacoplar el modelo se basó en la necesidad de sintetizar la función de transferencia y llevarla a una expresión que dividiera el sistema 2x1 en dos de 1x1.

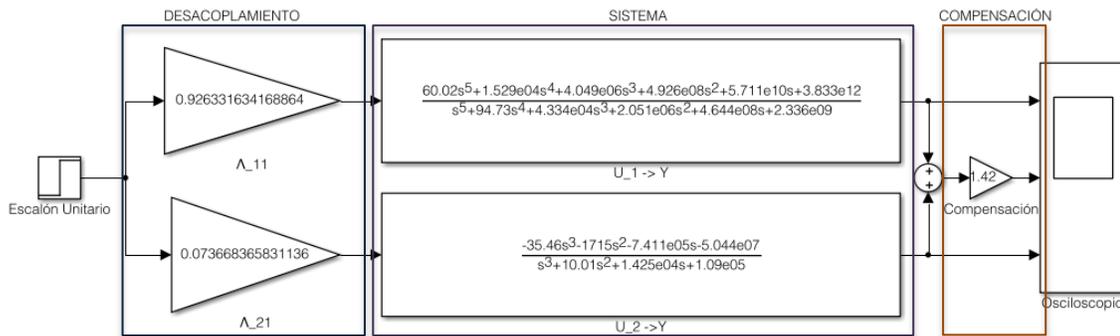
El principio del método RGA busca encontrar un factor que permita romper la interacción de cada elemento de la matriz de transferencia, para esto define una nueva matriz  $\Lambda_{ij}$  que cumpla la ecuación:

$$\Lambda_{ij} = [G(j\omega)]_{ij}[G(j\omega)]_{ji}^{-1} \quad \forall \omega = 0 \quad (147)$$

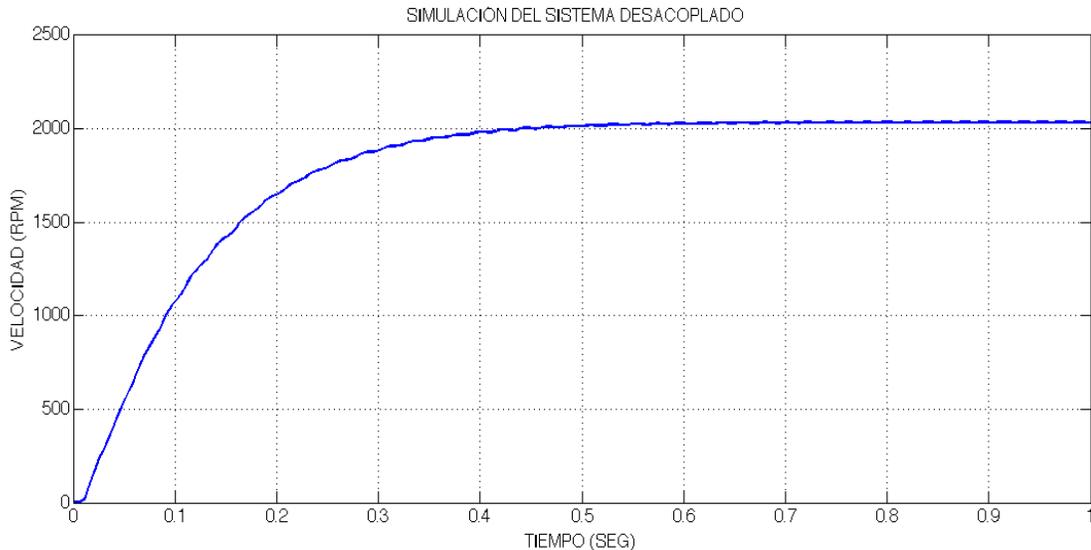
Debe aclararse que al evaluar la ecuación en  $\omega = 0$ , se obtiene el valor de ganancia D.C. del sistema (Clifford Goodwin, Graebe, & Salgado, 2001), (Bristol, 1966), (Cao & Rossiter, An Input Pre-Screening Technique for Control Structure Selection, 1997) y (Skogestad & Postlethwaite, 2001). Para determinar las ganancias que logran desacoplar la matriz de transferencia se utilizó el algoritmo computacional propuesto en (Cao, Relative Gain Array, 2008), arrojando:

$$\Lambda = [0.9263 \quad 0.0736] \quad (148)$$

Finalmente y a partir de las ganancias encontradas, se simuló el sistema siguiendo la estructura observada en la Figura 39 (a), y se diagramó la respuesta de velocidad del rotor principal como se observa en el ítem (b) de la misma figura.



(a). Diagrama de bloques del sistema desacoplado.



(b). Respuesta del sistema desacoplado.  
Figura 39. Sistema desacoplado.

El sistema identificado mostró la existencia de un retardo originado por el tiempo que tardan los servomotores, el plato oscilante, los enlaces (links), las bisagras y otros elementos mecánicos en hacer efectivo el cambio de ángulo de ataque de las aspas del rotor principal, esto sumado a la transferencia de movimiento al rotor trasero, combinaban un conjunto de fricciones que retardaban la acción de la entrada. Este efecto se observó en la experimentación del sistema y como se observa en la Figura 39, este tiempo se ve ligeramente aumentado a un valor de  $6.6ms$ , el cual sigue siendo considerablemente pequeño en

comparación al tiempo de simulación, específicamente un 0.6% del tiempo final y a los tiempos de estabilización del sistema, por tanto este se desprecia para el diseño de los controladores.

### 3.6.2. Diseño de la Ley de Control PID.

Para diseñar la ley de control del sistema MISO identificado, se establecen ciertos parámetros para el diseño del controlador. Para esto se compararon las respuestas paso vistas anteriormente, como se observa en la Figura 40, con el fin de establecer la velocidad máxima de respuesta del sistema planta-controlador.

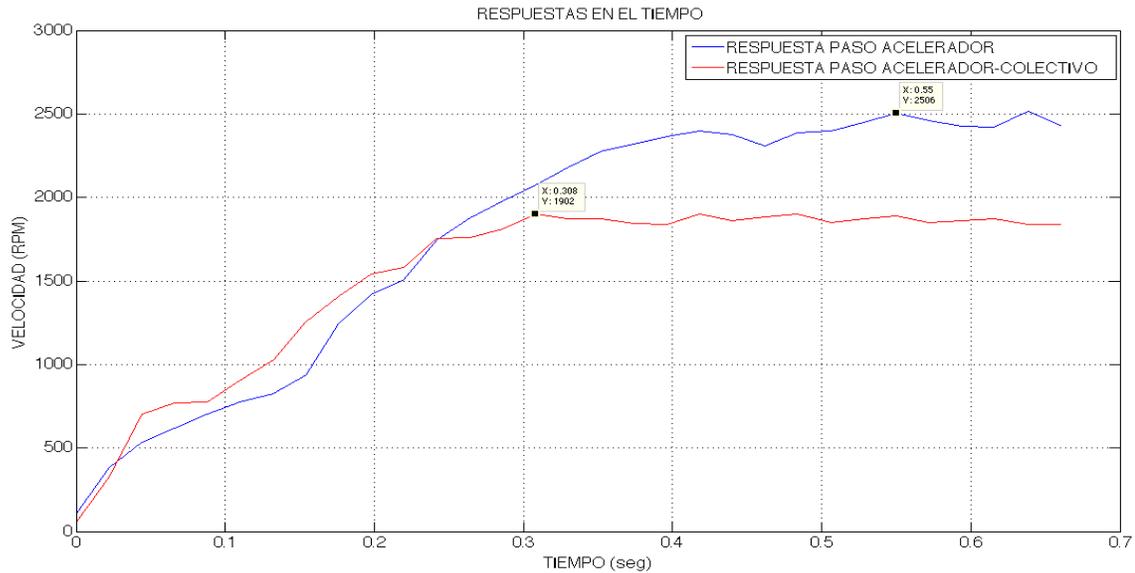


Figura 40. Comparación de la velocidad de respuesta de las respuestas paso del sistema.

A partir de la gráfica anterior, se determinó que el colectivo permite llegar al estado estable 200ms más rápido, sin embargo el valor de la velocidad final se atenúa, como fue mencionado anteriormente. A partir se estableció que el Tiempo de Asentamiento del sistema deberá ser de menos de 500ms, un Tiempo de Levantamiento al menos 4 veces más rápido que el de asentamiento; esto es 125ms, y un Sobrepasso Máximo inferior al 25% como lo recomienda el método de Ziegler-Nichols. El controlador implementado siguió la topología de un PID ideal como se enseña en la ecuación (130) y la Figura 41.

$$C(s) = [C_1(s) \quad C_2(s)] = \left[ K_{p1} + K_{i1} \frac{1}{s} + K_{d1} s \quad K_{p2} + K_{i2} \frac{1}{s} + K_{d2} s \right] \quad (149)$$

La topología utilizada buscó controlar los efectos del colectivo y el acelerador independientemente, a partir del error de velocidad. Fue necesario realizar una sintonización iterativa de diferentes PID con el fin de alcanzar los objetivos de control.

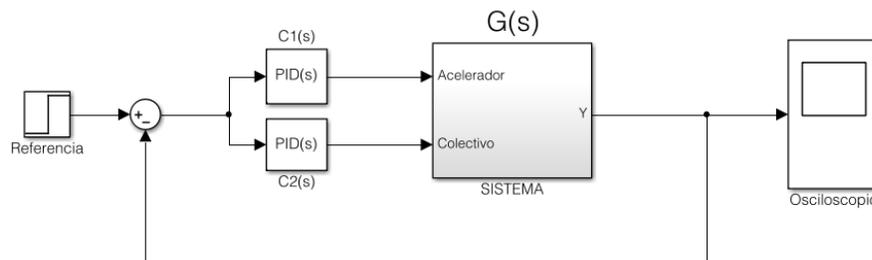


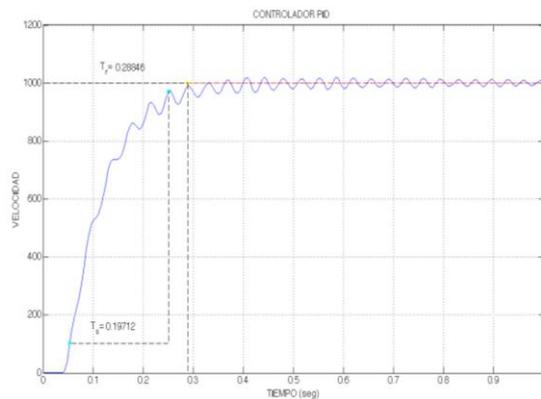
Figura 41. Topología de control implementada sin perturbación: PID ideal.

La Tabla 4 muestra los PID sintonizados y las respuestas temporales: el tiempo de levantamiento  $T_r$  calculado a partir del tiempo que el sistema alcanza el 2% del valor final de estabilización, el tiempo de asentamiento  $T_s$  entre el 5% y el 95% y el sobrepaso máximo calculado sobre la base del estado estable.

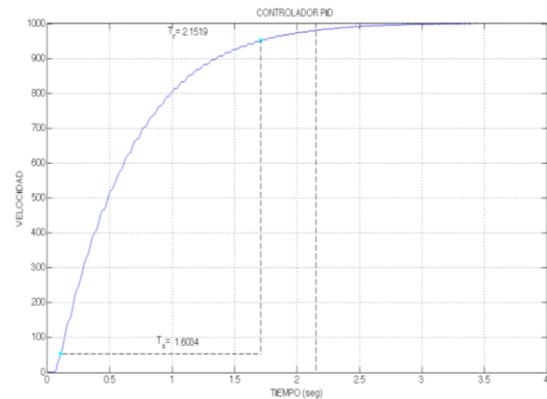
ANEXO	CONTROLADORES						RESPUESTA		
	$C_1(s)$			$C_2(s)$			$T_r$	$T_s$	$M_p$
	P	I	D	P	I	D			
PID1	0.001	3.8	0.008	0.0001	1.2	-	0.54976	0.35545	0%
PID2	0.001	4.2	0.008	0.0001	1.2	-	0.54498	0.31754	0%
PID3	0.001	4.2	-	0.0001	1.2	-	0.48558	0.29327	0%
PID4	0.001	4.2	-	0.0001	1.2	2.5	0.36715	0.23671	0%
PID5	0.001	5.2	-	0.0001	1.2	2.11834	0.28846	0.19712	0%
PID6	0.001	15.2	-	0.0001	1.2	2.11834	0.15942	0.09178	14.02%
PID7	0.001	12.2	-	0.0001	1.2	2.11834	0.16827	0.11058	11.31%
PID8	0.001	9.2	-	0.0001	1.2	2.11834	0.20192	0.12019	7.48%
PID9	0.001	7.2	-	0.0001	1.2	2.11834	0.21154	0.15385	4.31%
PID10	0.0002	5.2	-	0.0001	1.2	0.39894	2.1519	1.6034	0%
PID11	0.0009	5.2	-	0.0001	0.9	1.91139	0.4359	0.26282	0%
PID12	0.00013	15.2	0.002	0.0006	5.4	-	1.1075	0.89247	4.2866%

Tabla 4. Valores de sintonización de los controladores PID sin perturbaciones.

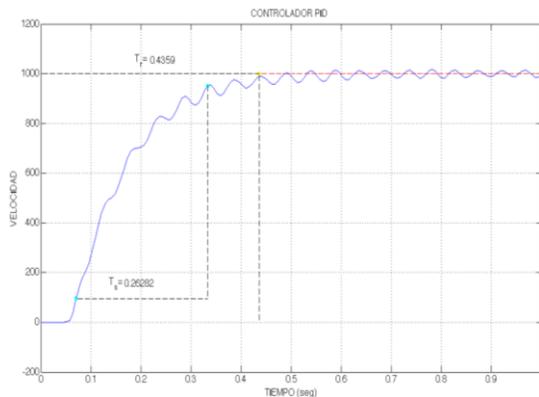
Al observar las diferentes gráficas en el ANEXO 6: CONTROLADORES PID, se pudo constatar que las mejores respuestas obedecen a los PID número 5, 10, 11 y 12, las cuales pueden verse en Figura 42. Al comparar las respuestas es evidente que la mayoría cumple con los objetivos de control. Sin embargo se toman los controladores PID5, PID10, PID11 y PID12.



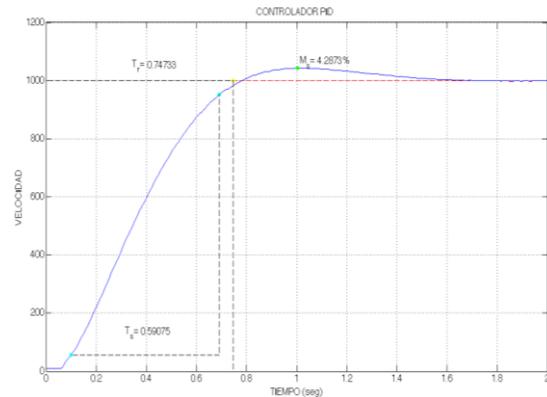
(a). Respuesta temporal del controlador PID 5.



(b). Respuesta temporal del controlador PID 10.



(c). Respuesta temporal del controlador PID 11.

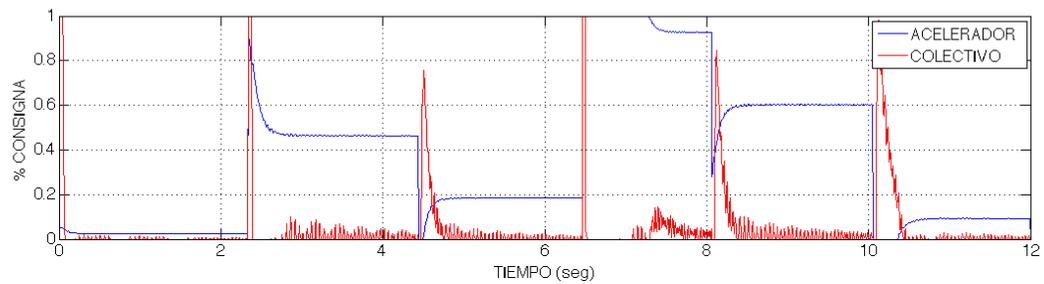
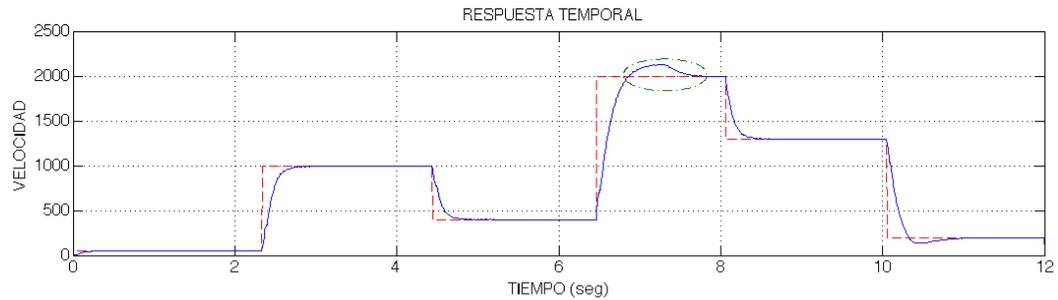


(d). Respuesta temporal del controlador PID 12.

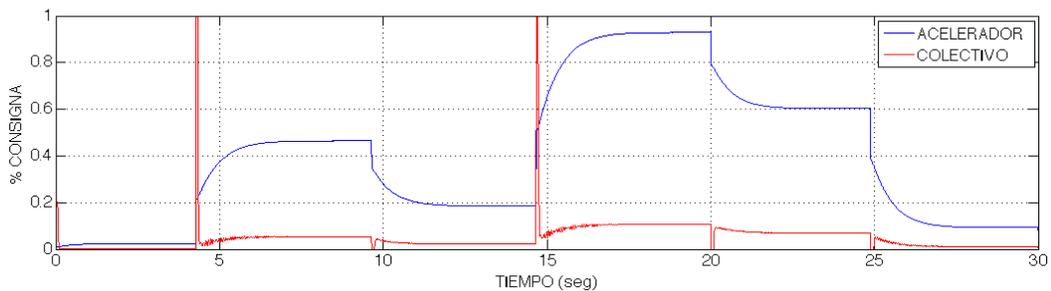
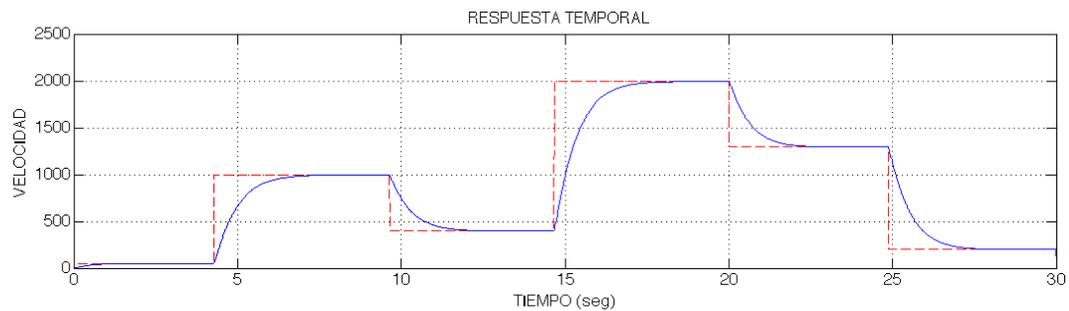
Figura 42. Respuesta temporal de los controladores diseñados.

El efecto del retardo producido por el desacople del sistema continúa estando presente durante el diseño del controlador, sin embargo su valor es tal que no representa un factor importante para la interacción entre los controladores  $H_\infty$  y PID cuando controlen la planta total.

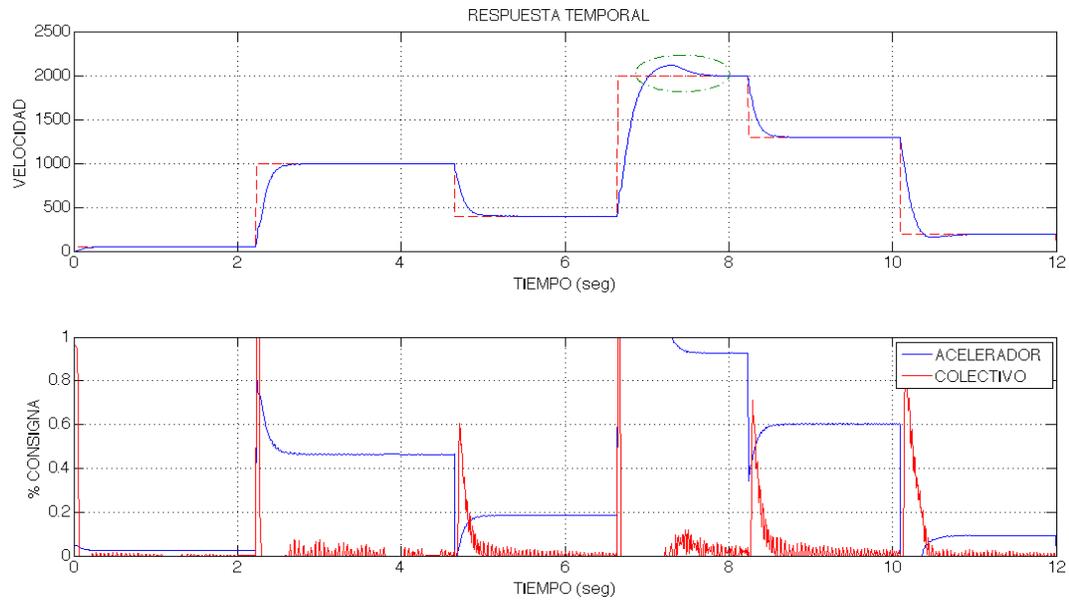
Con el fin de validar la respuesta se analizaron las señales de control normalizadas para determinar si las respuestas simuladas son comparables en magnitud a las señales reales que fueron enviadas a los servomotores. Adicionalmente se sometió el controlador a diferentes señales de referencia a fin de conocer sus respuestas, como se observa en las siguientes figuras.



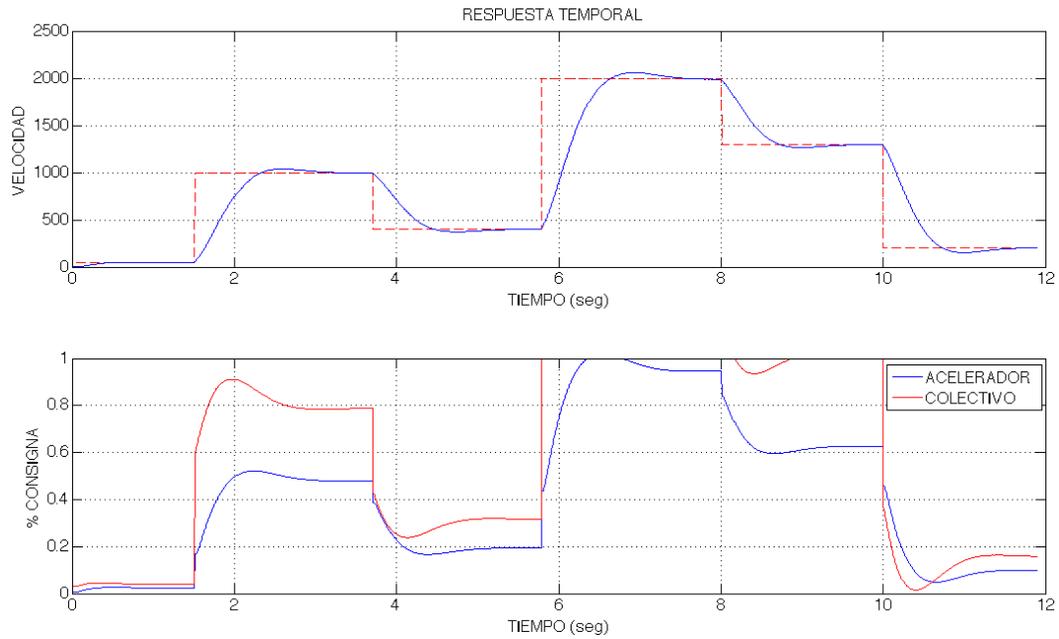
(a). Respuesta temporal del controlador PID 5 ante señales escalonadas.



(b). Respuesta temporal del controlador PID 10 ante señales escalonadas.



(c). Respuesta temporal del controlador PID 11 ante señales escalonadas.



(d). Respuesta temporal del controlador PID 12 ante señales escalonadas.

Figura 43. Respuesta temporal de los controladores ante entradas de excitación variables.

El controlador PID11, descrito como se observa en las ecuaciones (150-151), presentó los mejores resultados para realizar el control de la velocidad angular del rotor  $[\Omega]$  y por tanto se consideró es el controlador óptimo para determinar el empuje generado por las aspas del rotor principal.

$$C_1(s) = 0.0009 \left[ 1 + \frac{5.2}{s} \right] = \frac{1}{s} [0.0009s + 0.00468] \quad (150)$$

$$C_2(s) = 0.0001 \left[ 1 + \frac{0.9}{s} + 1.91139s \right] = \frac{1}{s} [0.0001911s^2 + 0.0001s + 0.0001914s] \quad (151)$$

## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados obtenidos se presentan desde diferentes perspectivas. Los modelos encontrados para el fuselaje, tanto el no lineal como el lineal, son evaluados y contrastados en el tiempo para determinar si los resultados corresponden al comportamiento del helicóptero. Así mismo se realiza un análisis en tiempo-frecuencia para los dos modelos; para los cuales se evalúan la estabilidad, controlabilidad, observabilidad, el lazo abierto, lazo cerrado, la sensibilidad, entre otros. Por último se evalúan los sistemas planta-controlador ante perturbaciones y seguimiento de la referencia.

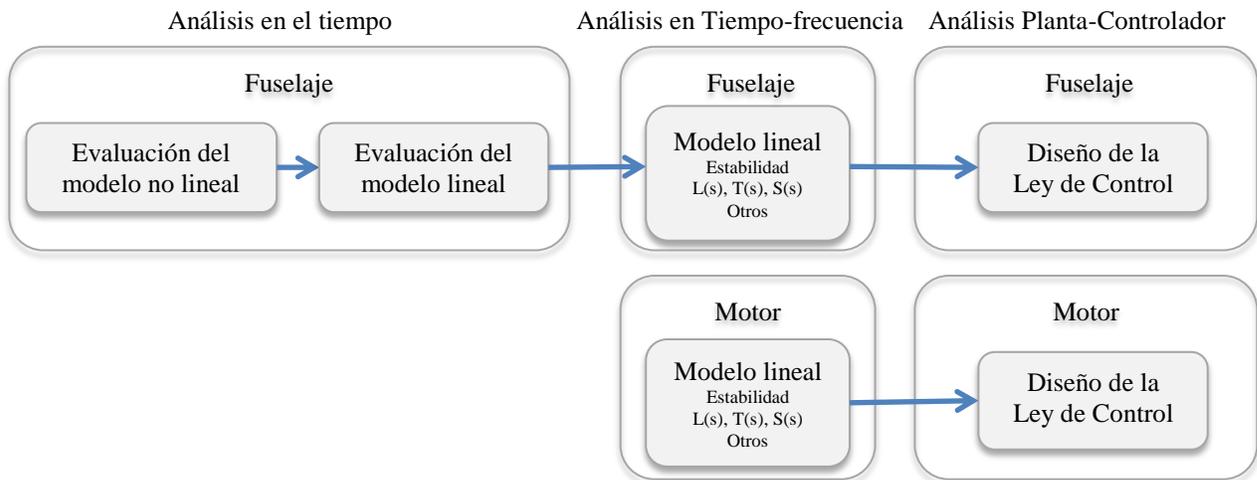


Figura 44. Esquema de los resultados obtenidos.

Siguiendo la estructura expresada en la gráfica anterior, se presenta a continuación la evaluación del modelo no lineal y lineal.

### 4.1. ANÁLISIS EN EL TIEMPO

Para evaluar el desempeño de los modelos no lineal y lineal del fuselaje, se comparan los resultados en simulación y se contrastan con el comportamiento clásico del helicóptero sometido a diferentes entradas.

#### 4.1.1. Evaluación del modelo no lineal del fuselaje

Se implementa el modelo no lineal en Simulink siguiendo la estructura de la Figura 1, el cual puede ser observado en el ANEXO 7: MODELO NO LINEAL. Por tanto, se acopla el modelo no lineal con la matriz de transferencia del sistema motor identificado y la estructura resultante se somete ante diferentes entradas de excitación variando las consignas  $U_{lon}$ ,  $U_{lat}$ ,  $U_{ped}$ ,  $U_{col}$  y  $U_{acel}$  en lazo abierto.

Con el fin de analizar la relación entre los desplazamientos sobre  $x$ ,  $y$  y  $z$ , las velocidades traslacionales en  $u$ ,  $v$  y  $w$  y las angulares  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ , y las consignas de cíclico y colectivo, se debe comprender qué ocurre con cada cambio. Para esto se hace referencia a la Figura 12 y la Figura 18, con las cuales se puede definir que una consigna  $U_{lon}$  positiva implicará un desplazamiento negativo (hacia atrás) en  $x$  al igual que la velocidad traslacional  $u$ , sin embargo el ángulo de rotación en roll será positivo. Para una entrada  $U_{lat}$  positiva o un  $\beta^+$  el helicóptero se desplazará hacia la izquierda por lo que  $y$  será positiva y la velocidad angular de igual signo y una rotación también positiva sobre el roll ( $\theta$ ). Para una señal de colectivo positiva  $U_{col}$  o  $\beta_{col}^+$ , el ángulo de ataque aumentará por tanto existirá un mayor rozamiento contra el viento, aumentando la fricción y el empuje  $T_{RP}$ , pero disminuyendo la velocidad angular  $\Omega$  y haciendo que la velocidad de elevación sea positiva.

En primera instancia se decide evaluar la respuesta del sistema ante entradas “0” para determinar la estabilidad del sistema. La respuesta tras la simulación se observa en la Figura 45, la cual muestra que aunque el helicóptero no se acelera, éste experimenta movimientos. Claramente en la realidad este comportamiento no se presenta, por lo que fue necesario hacer algunos análisis del modelo para determinar la validez del mismo.

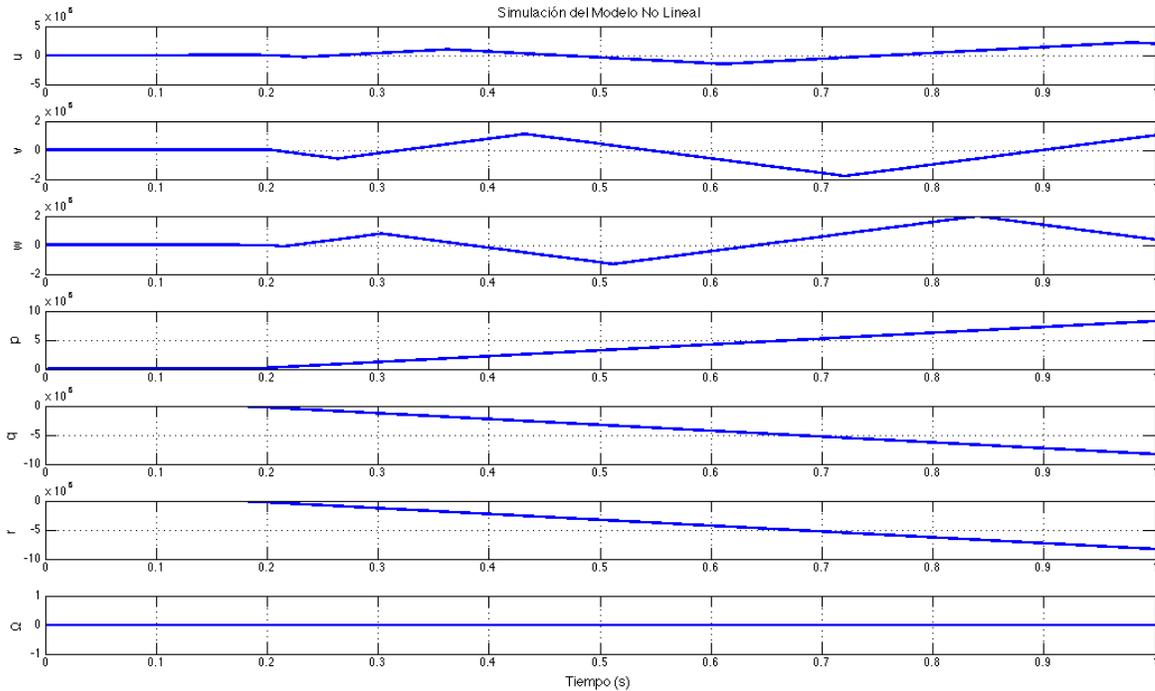


Figura 45. Respuesta del modelo no lineal ante un  $U_{col} = 0^\circ$ ,  $U_{cic} = 0^\circ$ ,  $U_{acel} = 0^\circ$  y  $U_{ped} = 0^\circ$ .

El helicóptero aunque esté situado en tierra experimenta a la fuerza que ejerce la gravedad como una constante, adicionalmente el coeficiente de  $\gamma$  del aspa también lo es. Las ecuaciones (67) y (81) muestran claramente que la fuerza equivalente sobre el eje z resulta igual a  $F_z = mg$  y al calcular el arrastre del rotor, aunque no exista empuje, la constante  $D_{RP}^Q = 0.023$  se acumula. Al presentarse  $F_z$  se genera una velocidad traslacional en  $w$ , luego en  $u$  y un instante después en  $v$ , esto por si solo genera un efecto dominó que excita todo el sistema. Por otra parte, el arrastre  $Q_{RP} = D_{RP}^Q$  hace que se genere un torque sobre z, este nuevo valor  $N$  crea una velocidad angular sobre este mismo eje ( $r$ ), presentándose el mismo efecto anterior. A partir de esto se puede estimar que, teóricamente, el modelo es internamente inestable, estos efectos se deberán contrarrestar con la ley de control implementada.

Con el fin de contrarrestar el antitorque generado por el rotor principal, se realiza un ajuste en la simulación para poder visualizar las demás simulaciones. Al hacer esto se sometió el sistema ante una entrada  $0^\circ$  del servomotor del colectivo; equivalente a  $0 \text{ rad}$ , y se aceleró el motor a un 20% de su capacidad. Seguidamente, cuatro segundos después y con el motor acelerado, se aplicó una señal de colectivo de  $20^\circ$  equivalente a  $0.3490 \text{ rad}$  para determinar los efectos del colectivo sobre la velocidad angular del motor y la velocidad de elevación  $w$ .

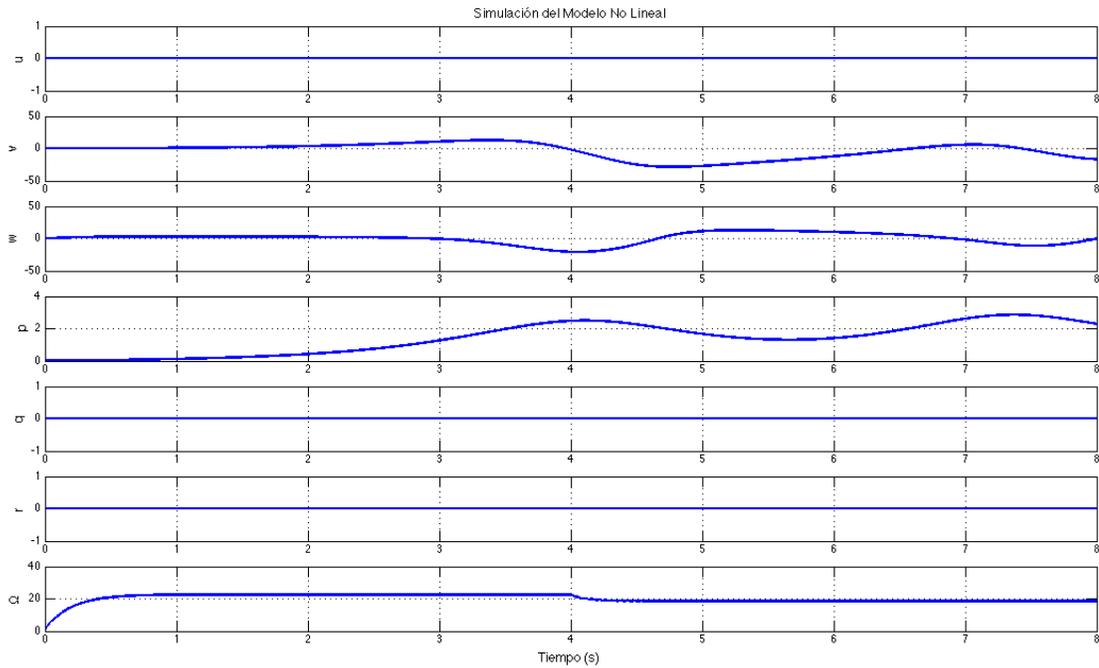


Figura 46. Simulación del modelo no lineal con  $U_{col} = 0^\circ - 20^\circ$ ,  $U_{cic} = 0^\circ$ ,  $U_{acel} = 20\%$  y  $U_{ped} = 0^\circ$ .

La Figura 46 muestra el resultado de la simulación planteada anteriormente. De la gráfica puede observarse que al aplicarse una señal de colectivo la velocidad angular se ve disminuida; debido a que un ángulo de ataque mayor, el empuje aumenta pero la resistencia de las aspas contra el viento también lo hace haciendo que la velocidad angular disminuya. Adicionalmente la velocidad traslacional es alterada tras la simulación, pues al momento de aumentar la velocidad angular del rotor el helicóptero se eleva en el aire, sin embargo la velocidad traslacional vertical no puede recuperarse ante el cambio. Finalmente es clara la dependencia e interacción de cada una de las variables del sistema, puesto que los cambios también altera la velocidad traslacional en  $v$  y la velocidad angular  $\phi$ .

Como tercera prueba se excitó el modelo con una consigna de cíclico-lateral  $U_{lat} = 7^\circ$  y de acelerador  $U_{acel} = 5\%$  El resultado de la prueba se observa en la Figura 47, para la cual se determina claramente que al existir un ángulo de inclinación positivo el helicóptero se desplazará hacia la derecha, adquiriendo velocidad traslacional positiva  $v$ , por lo que el helicóptero rotará sobre  $y$  y por lo que se presenta a su vez una velocidad angular de rotación sobre el mismo eje. La Figura 48 muestra el comportamiento de los ángulos de Euler experimentados por el helicóptero. A partir de esto es claro que ante una inclinación del rotor hacia la derecha se presenta un cambio de ángulo positivo en roll, adicionalmente y por el par motor generado por el rotor principal las, velocidades angulares  $r$  y  $y$  y ángulo en yaw varían negativamente.

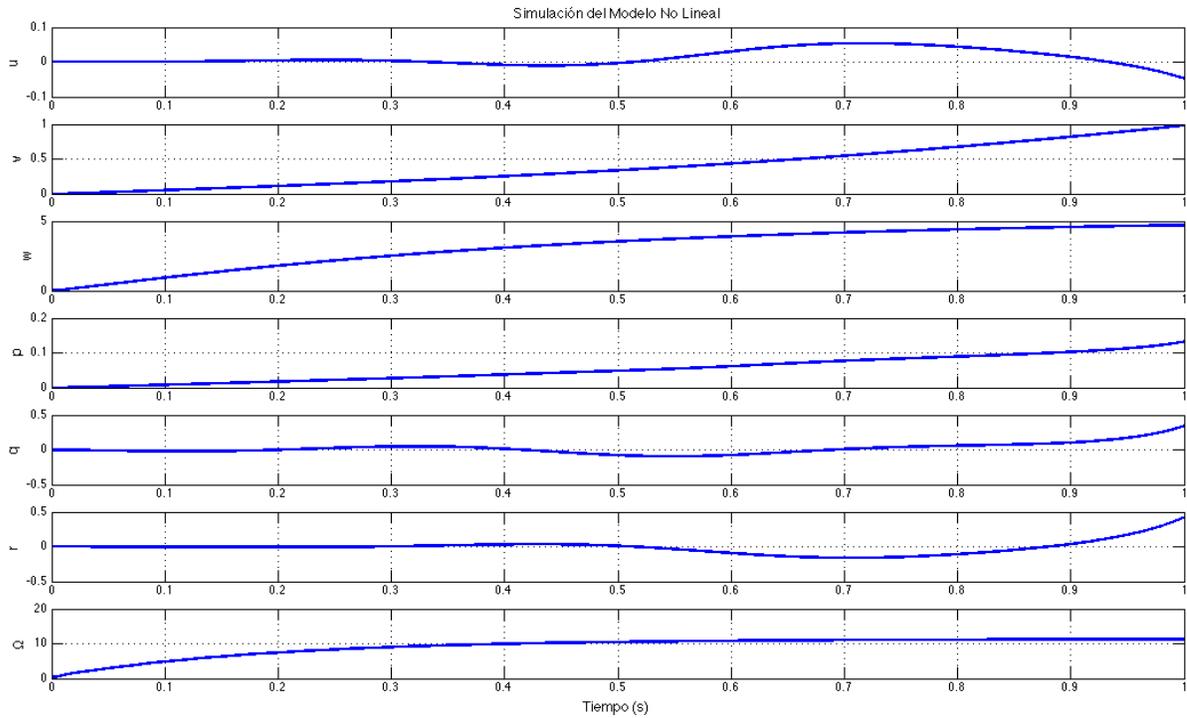


Figura 47. Simulación del modelo no lineal con entradas  $U_{lat} = 7^\circ$  y  $U_{acel} = 5\%$  y salidas  $u, v, w, p, q$  y  $r$ .

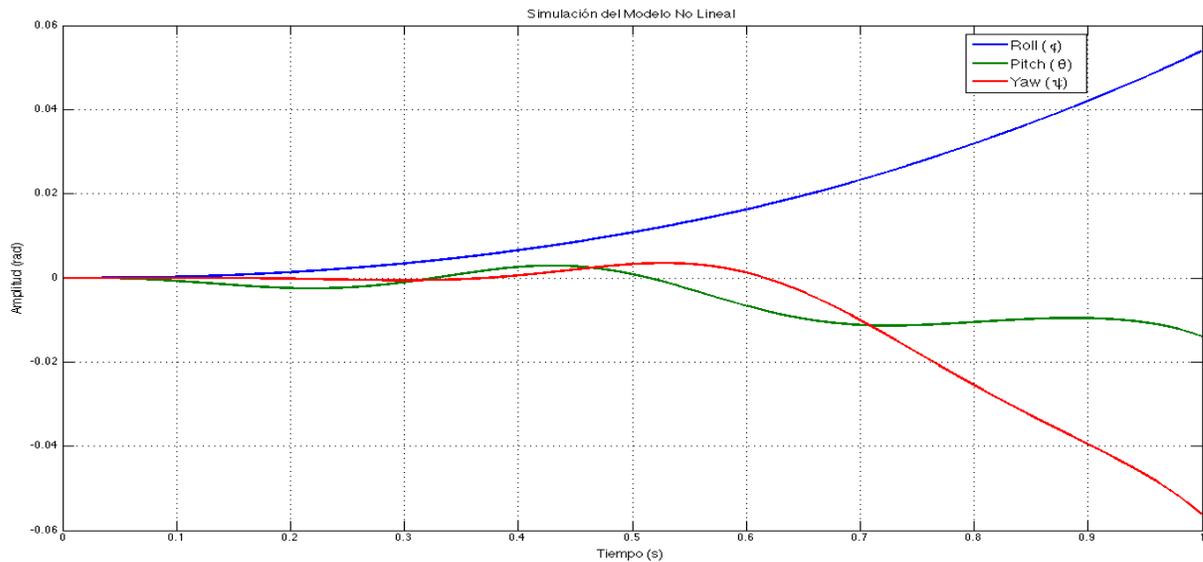


Figura 48. Simulación del modelo no lineal con entradas  $U_{lat} = 7^\circ$  y  $U_{acel} = 5\%$  y salidas  $\phi, \theta, \psi$ .

Una última prueba es realizada para determinar los efectos sobre el helicóptero ante una entrada de acelerador  $U_{acel} = 20\%$  y una señal de cíclico longitudinal  $U_{lon} = 12^\circ$ . La Figura 49 y Figura 50 enseñan que a pesar que la aeronave gana velocidad de elevación  $w$  por acción del acelerador y se desplaza hacia atrás con velocidad  $u$  y velocidad angular negativa en roll  $q$ , una ligera descompensación en la velocidad  $v$  genera un pequeño cambio de la velocidad angular  $p$  que termina por hacer que el helicóptero descienda desplazándose hacia delante y girando hacia la izquierda.

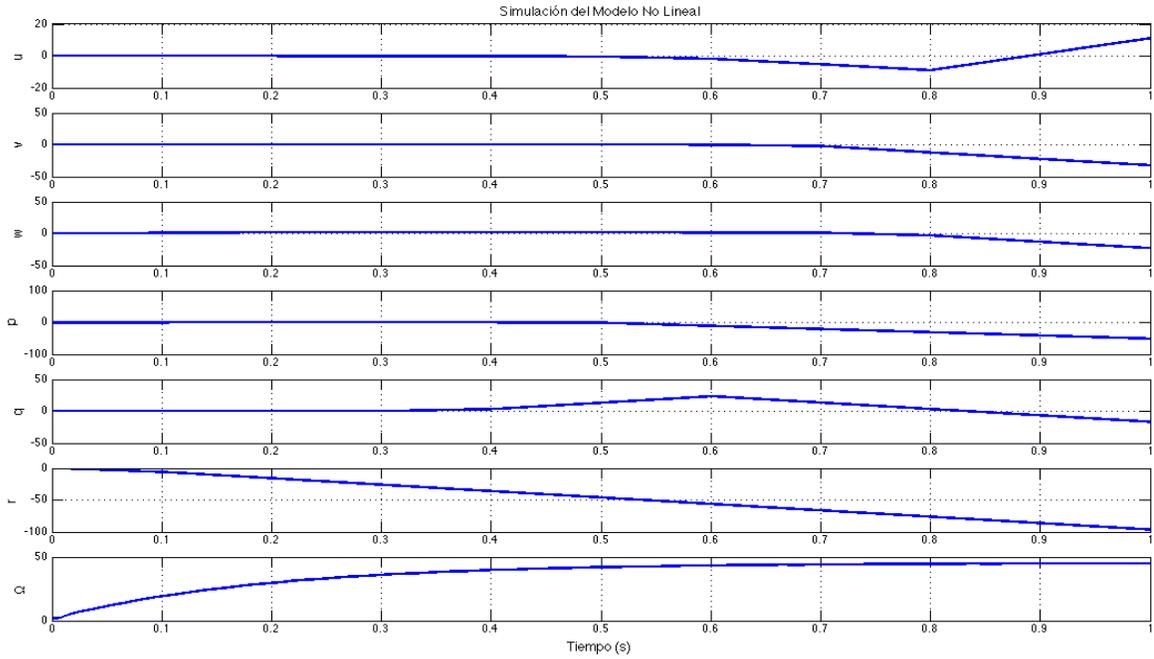


Figura 49. Respuesta del modelo no lineal ante entradas  $U_{acel} = 0\%$  y  $U_{lon} = 12^\circ$  y salidas  $u, v, w, p, q$  y  $r$ .

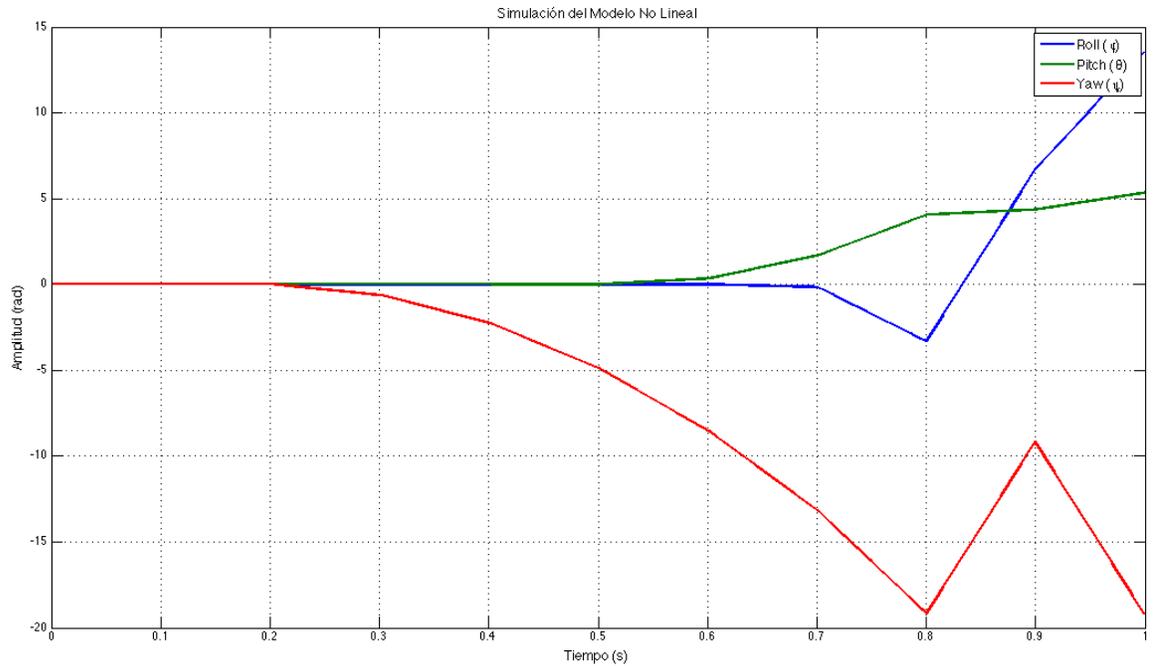


Figura 50. Respuesta del modelo no lineal ante entradas  $U_{acel} = 20\%$  y  $U_{lon} = 12^\circ$  y salidas  $\phi, \theta$ , y  $\psi$ .

La gran interacción entre las variables del modelo que presenta una aproximación del comportamiento del helicóptero, hacen que cualquier desviación en alguna de estas genere cambios directos sobre las demás. Esta interacción entre las ecuaciones genera una gran inestabilidad y deja ver la complejidad de volar y controlar estas aeronaves. Los resultados obtenidos en la simulación son evidentes y representan claramente lo que sucede en un helicóptero real cuando no se realiza supervisión de todas las variables.

#### 4.1.2. Evaluación del modelo lineal del fuselaje

El modelo es evaluado realizando una comparación del modelo lineal con el modelo no lineal, teniendo en cuenta los puntos de linealización utilizados. Para esto se realizan algunas pruebas variando las señales de entrada para la acción del cíclico entre  $-12.5^\circ$  y  $12.5^\circ$ <sup>3</sup>, el colectivo entre  $-25^\circ$  y  $25^\circ$  y en la misma cantidad para el rotor trasero.

Para evaluar los efectos del colectivo sobre el modelo lineal y no lineal, son sometidos ante una entrada  $U_{col} = 10^\circ$ . Del resultado de la simulación observado en la Figura 51 puede estimarse que las aspas aumentaron el ángulo de ataque y de igual manera la fricción contra el aire, por lo que la velocidad angular del rotor disminuye. Una velocidad angular negativa indica que el rotor gira en el sentido contrario haciendo que la velocidad angular en  $w$  sea negativa. Ya que el modelo fue linealizado en torno a valores de  $u, v, w, \phi, \theta$  y  $\psi$  iguales a cero, el resultado es aceptable.

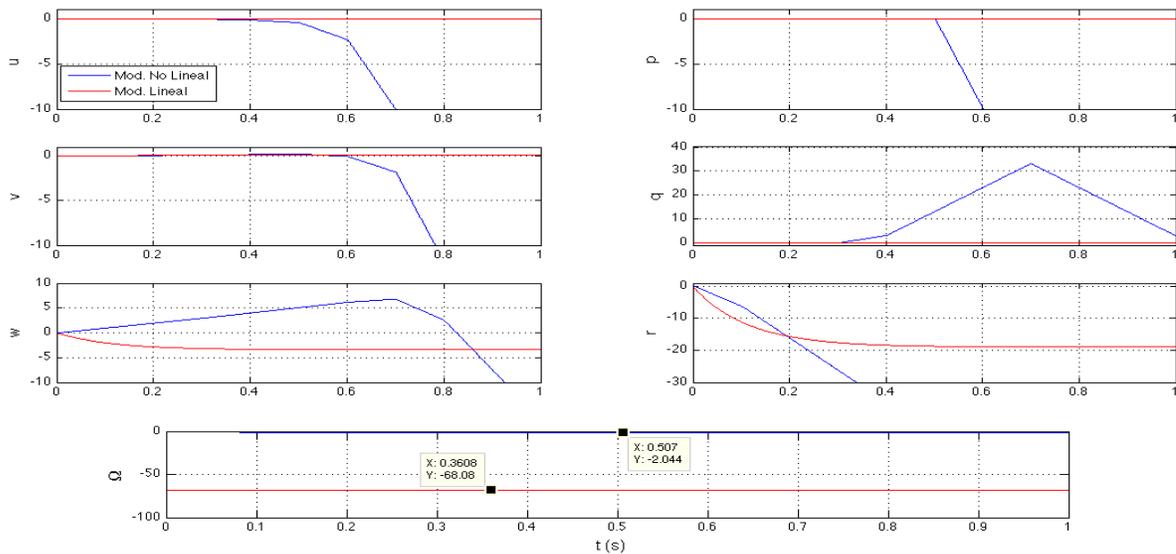


Figura 51. Respuestas de los modelos ante una entrada  $U_{col} = 10^\circ$ .

La Figura 52 muestra la simulación de los modelos ante una entrada de cíclico-longitudinal  $U_{lon} = 10^\circ$ . Es claro que ante una inclinación positiva del rotor principal ( $\beta^+$ ) se presenta un retroceso del helicóptero sobre el eje  $x$ , ganando velocidad lineal; la cual es representada por  $u$  de forma negativa. Esta respuesta implica que la nariz de la aeronave se eleve, haciendo que gire sobre el eje  $y$  es positiva y la velocidad angular  $q$  se incrementa. Finalmente, ya que en el modelo lineal se asumieron puntos de equilibrio para el hover, la simulación no muestra desplazamientos laterales y rotaciones sobre roll; por lo que  $v$  y  $p$  son cero respectivamente, sin embargo el modelo no lineal si las presenta; pues demuestran el comportamiento del helicóptero en los diferentes modos de vuelo. Por tanto, para el vuelo estacionario, el modelo lineal se ve ratificado por los resultados del modelo no lineal.

<sup>3</sup> Se debe aclarar que los servomotores tienen un ángulo de trabajo de  $25^\circ$ .

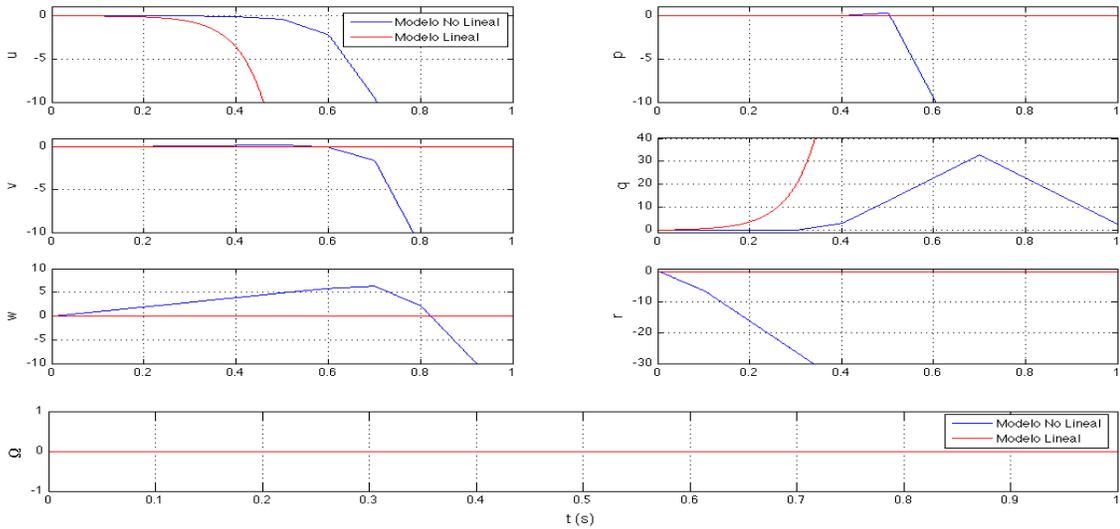


Figura 52. Respuestas de los modelos ante una entrada  $U_{lon} = 10^\circ$ .

Para evaluar los efectos del cíclico-lateral  $U_{lat}$ , se aplica una señal de entrada de  $10^\circ$ . La Figura 53 muestra que, en los dos sistemas, el helicóptero desarrolla una velocidad lineal traslacional debida a la inclinación del rotor ( $+v$ ). Para desplazarse a la derecha, el helicóptero rota sobre el eje  $x$  haciendo que se realice un roll, por esto la velocidad angular  $p$  es positiva. Finalmente, debido a la gran relación que tiene el mando cíclico con el rotor, una inclinación longitudinal del rotor hacia atrás, la cual se presenta en los dos modelos. La no presencia de condiciones específicas en el modelo no lineal hacen que la interacción entre las variables sea mas mas compleja, por lo que este cambio del cíclico longitudinal hace que todas las demás variables cambien; comparadas con el modelo lineal se mantienen cero.

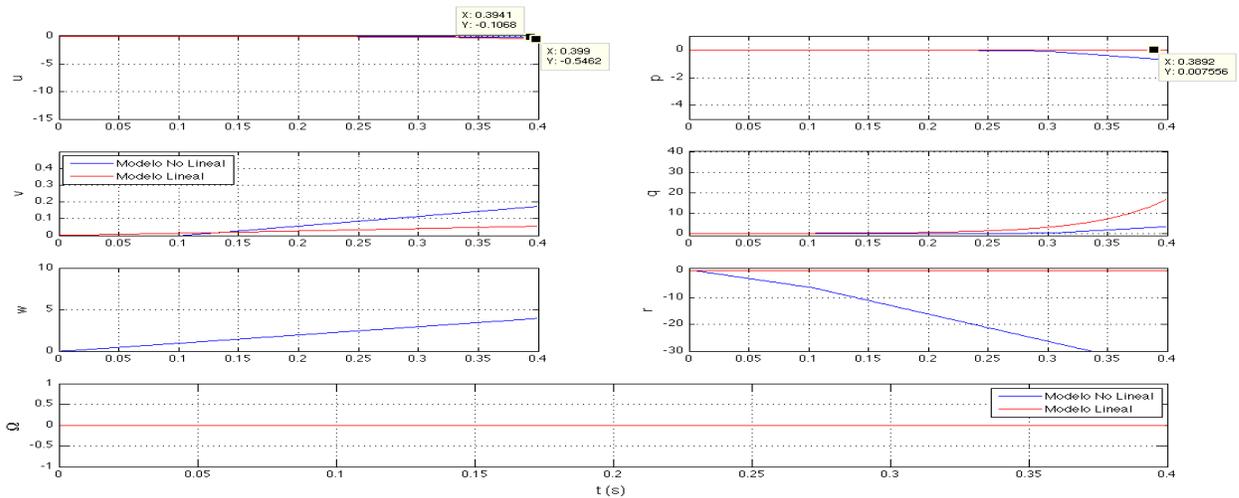


Figura 53. Respuestas de los modelos ante una entrada  $U_{lat} = 10^\circ$ .

Para evaluar la capacidad que tiene el rotor trasero de eliminar el efecto producido por el par motor generado por el rotor principal y rotar sobre el eje  $z$ , se aplican entradas de  $U_{ped}$ , positiva y negativa, igual al  $10^\circ$ . La Figura 54 muestra claramente como el empuje generado por el rotor trasero hace girar el helicóptero a la derecha.

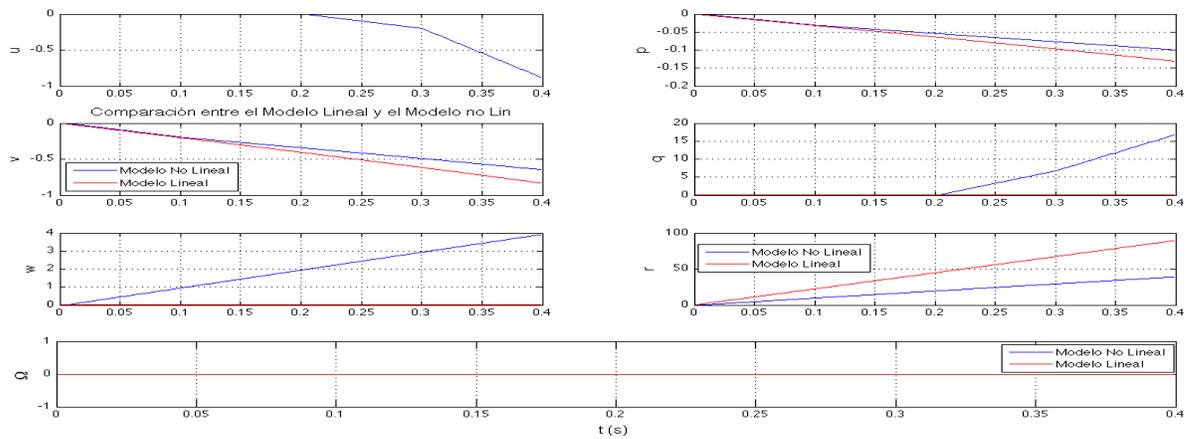


Figura 54. Respuesta de los modelos ante una entrada  $U_{ped} = 10^\circ$ .

En un último análisis se aplica  $U_{ped} = -10^\circ$  para determinar si el helicóptero rota sobre el Yaw. Como se aprecia en la Figura 55, el empuje generado por el rotor trasero hace que el helicóptero hacia la izquierda.

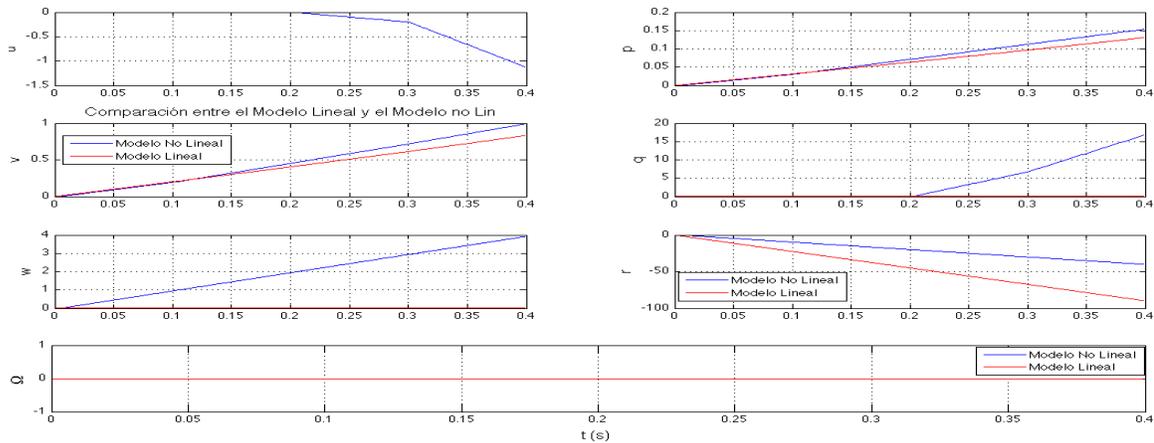


Figura 55. Respuesta de los modelos ante una entrada  $U_{ped} = -10^\circ$ .

Al comparar el resultado del modelo linealizado con el modelo no lineal, pudo apreciarse durante todas las simulaciones que los dos modelos tienen correspondencia, tanto entre ellos como con el comportamiento real. Por tanto, el modelo puede ser utilizado para realizar el sistema de control.

## 4.2. ANÁLISIS EN EL TIEMPO-FRECUENCIA

Con el fin de analizar el sistema, se observaron los polos del sistema, los ceros de transmisión del mismo, así como las respuestas en frecuencia del lazo abierto, el lazo cerrado y la sensibilidad. Esto brindó información para el diseño de la ley de control.

### 4.2.1. Modelo lineal del sistema motor: análisis de estabilidad

Para determinar la estabilidad del sistema se analizaron los valores propios, para esto se encontró la representación en espacio de estados de la función de transferencia. Para esto se utilizó la función “*id2ss()*”, con lo cual se obtuvo que:

$$A_M = \begin{bmatrix} -94.7 & -169.2 & -62.5 & -110.7 & -17.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 128 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 128 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.01 & -111.3 & -26.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 128 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -98.1 & -1.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (152)$$

Al encontrar los valores propios se  $\lambda_i(A)$ , vistos en (152) se logró determinar que el sistema internamente es asintóticamente estable. Esto puede demostrarse pues el motor y las aspas del rotor principal no se excitan a menos que una señal externa lo haga, en este caso un cambio de ángulo de los servomotores. Adicionalmente, es claro que aunque el helicóptero es sensible a perturbaciones externas, pues cambios como la densidad del aire y la presión atmosférica tiene efectos sobre la sustentación, sin embargo no se pueden adjudicar efectos directos sobre la velocidad final del rotor, como los podrían generar ráfagas repentinas de viento.

$$\lambda(A_M) = \begin{bmatrix} -43.82 + 142.8i \\ -43.82 - 142.8i \\ -0.97 + 142.80i \\ -0.97 - 142.80i \\ -5.13 \\ -1.18 + 119.3i \\ -1.18 - 119.3i \\ -7.66 \\ -98.48 \\ -0.01 \end{bmatrix} \quad (153)$$

Para calcular los ceros multivariados del sistema se utilizó el principio planteado por (MacFarlane & Karcnias, 1976), en el cual se consideran ceros de transmisión si el rango de la matriz conformada por los ceros  $P(z)$  es menor que el rango del sistema. Luego de aplicar la función  $tzero()$  de Matlab, se obtuvieron los ceros de del sistema  $P(z) = [-98.9737 \quad -0.3209]$ , lo cual al compararlo con el rango de la matriz de transferencia, se determinó que estos eran los ceros que dominaban el sistema multivariable. Ya que los ceros se encuentran en la mitad izquierda del plano complejo, se consideran ceros de fase mínima, lo cual es cierto pues la respuesta paso obtenida no muestra curvas de inicio negativas.

#### 4.2.2. Modelo lineal del sistema motor: análisis en frecuencia

Luego de determinar la estabilidad interna del sistema, se evaluaron las respuestas en frecuencia de la función de transferencia como se observa en la Figura 56. Del lazo cerrado se pudo establecer pequeña susceptibilidad del sistema al ruido de medición, lo cual se puede asociar a las señales de control que se ingresan a los servomotores, los cuales por contener un control de posición limitan las señales de ruido. Cabe anotar, sin embargo, el sistema aunque atenúa el ruido per se, no significa que filtre el ruido.

La gráfica de la sensibilidad muestra los niveles de atenuación a las perturbaciones, las cuales ilustran un sistema robusto ante este tipo de excitaciones en baja frecuencia, aunque en alta frecuencia los efectos son mayores. Este tipo de influencias se pueden aducir a los efectos que podrían tener las ráfagas de viento repentinas cuando el rotor gira a mayor velocidad.

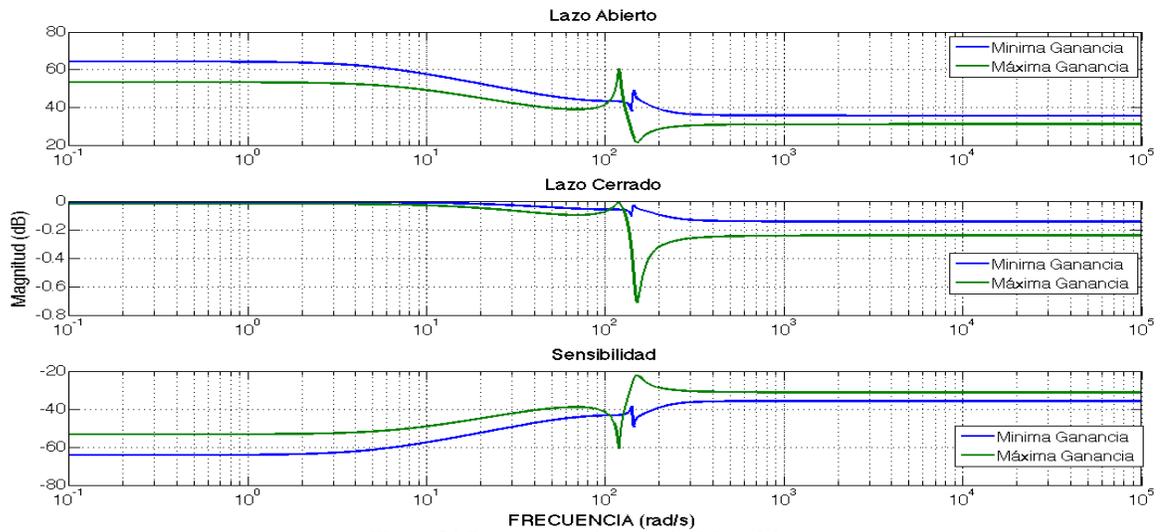


Figura 56. Respuesta en frecuencia del modelo.

#### 4.2.3. Modelo Lineal del Fuselaje: Análisis de Estabilidad.

Como se observó en la simulación del modelo no lineal, el helicóptero reacciona en ausencia de entradas, por lo que inherentemente es inestable. Para hacer una valoración del modelo lineal, se determinan los valores propios de la matriz  $A$  del sistema en espacio de estados.

$$\lambda(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14.0834 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14.0834 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1692 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.1692 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6.75 \end{bmatrix} \quad (154)$$

La ecuación (154) muestra la inestabilidad clara que tienen los helicópteros, los cuales necesitan estrictamente señales de control que lleven a compensar las intrincadas interacciones que tienen los elementos que lo componen, tanto entre estos mismos como con el aire. Como se mencionó anteriormente, el modelo helicóptero se encuentra sometido a la fuerza de la gravedad y al valor constante de la función de arrastre aerodinámico. Esto deja claro que este tipo de aeronaves, a diferencia de los aviones y aeroplanos, no genera empuje planeando (excepto por la autorrotación), por lo que para el vuelo se necesitan señales de excitación que permitan controlar aspectos como el ascenso-descenso, los movimientos laterales y longitudinales, y la rotación inducida por el helicóptero mismo.

Al aplicar la función “ $ctrb(A,B)$ ” en Matlab se obtiene la matriz de controlabilidad del sistema. Para este caso la matriz resultante se enseña a continuación,

$$C_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.01 & \dots & \dots & -13148.6 & 0 \\ 0.01 & 0.01 & 0 & \dots & \dots & -21861405.29 & 358227958.18 \\ -1.79 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0.07 & 0.13 & -0.29 & \dots & \dots & -442453767.5 & 7250188524.01 \\ -0.07 & 0.04 & 0.02 & \dots & \dots & 8584.87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9 \times 36} \quad (155)$$

Se encontró que el rango de la matriz de controlabilidad es 9, con lo cual la matriz es de rango completo pues para este caso es igual a la cantidad de filas  $rank(A) = \min(n, m)$ . Esto confirma que existen entradas que pueden llevar el sistema de un estado inicial a otro final en un tiempo finito, por lo cual es apto para la implementación de controladores.

La observabilidad se determina mediante la función “ $obsv(A, C)$ ”, y el resultado se representa a continuación,

$$O_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -18031415.07 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 161297.62 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{54 \times 9} \quad (156)$$

Al evaluar el rango de la matriz de observabilidad se encontró que el rango de la matriz de observabilidad es 8, por lo cual el sistema no es posible reconstruir las salidas del sistema a partir de la observación de los estados del sistema en un tiempo finito. Esto corresponde a la realidad, pues la interacción interna entre las variables y su dependencia con la velocidad del aire y su densidad, hacen que determinar la posición del sistema no sea probable.

#### 4.2.4. Modelo Lineal del Fuselaje: Análisis en Frecuencia.

El sistema es analizado en frecuencia haciendo uso de los valores singulares para obtener la máxima y mínima ganancia del lazo abierto, del cerrado y la sensibilidad. Esto permite determinar la ganancia máxima que tolera el sistema y su comportamiento ante perturbaciones y al ruido de medición. Adicionalmente algunos parámetros son extraídos para el diseño del controlador  $H_\infty$ .

La Figura 57 representa la máxima y mínima ganancia del lazo abierto, para lo cual se puede estimar que el sistema cuenta con dos límites de ganancia en baja frecuencia, una de  $40dB$  y otra de  $140dB$ . Estas altas ganancias son debidas al tipo de helicóptero utilizado, pues sus grandes habilidades para realizar vuelos acrobáticos hacen que sus respuestas sean muy rápidas para lograr recuperarse de estados complejos de vuelo. Desde el punto de vista del controlador, estas altas ganancias permitirán a los actuadores responder muy rápidamente ante de perturbaciones y un óptimo seguimiento de la referencia. Finalmente la frecuencia natural mas baja se ubica sobre los  $2.241 rad/s$ , sin embargo se debe tener en cuenta que el modelo no contempla la frecuencia natural del sistema motor, la cual se encuentra en  $278 rad/s$ .

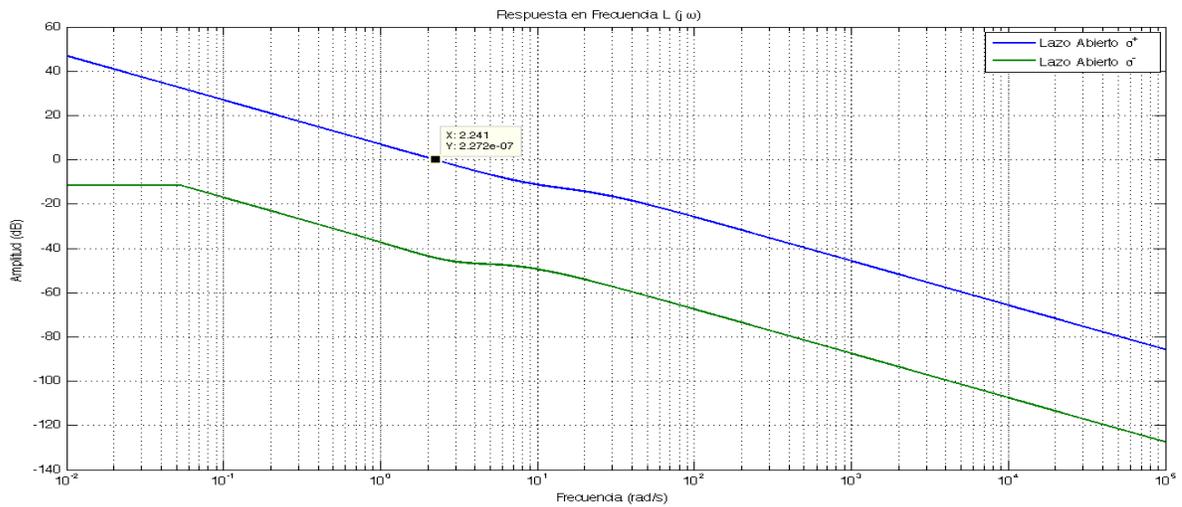


Figura 57. Lazo abierto del modelo lineal.

El lazo cerrado observado en la Figura 58 muestra el desempeño del sistema ante el ruido de medición, con el cual se determinó que  $1.4338 \text{ rad/s}$  es el máximo ancho de banda del sistema. Este perfil muestra que el sistema es susceptible al ruido; posiblemente aerodinámico, por lo que se tendrán que establecer cualidades específicas en el controlador para minimizar el ruido en frecuencias superiores al ancho de banda y a la frecuencia natural del sistema.

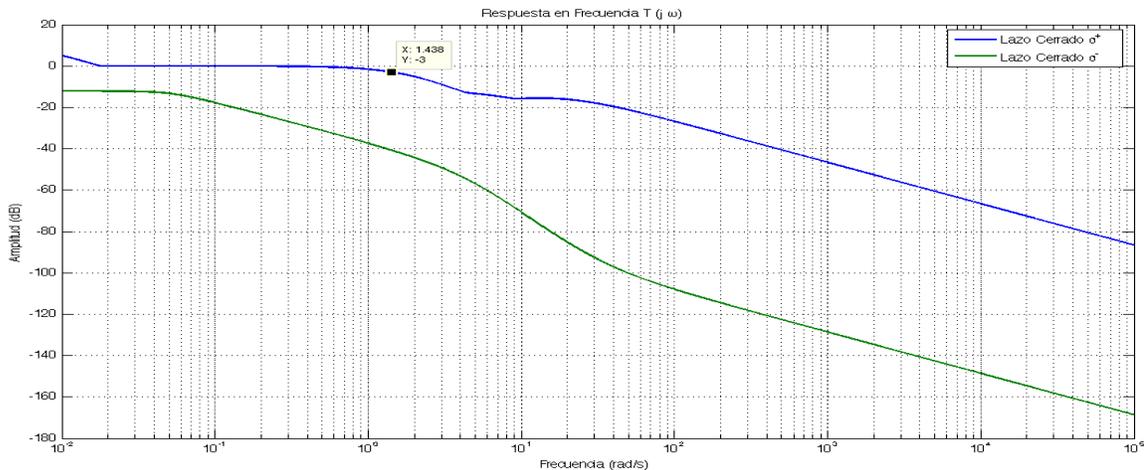


Figura 58. Lazo cerrado del modelo lineal.

El perfil de sensibilidad enseñado en la Figura 59 muestra que el sistema es muy susceptible a las perturbaciones, lo que corresponde claramente al comportamiento del helicóptero. Si bien es cierto que la naturaleza de la aeronave es ser inestable y que con las adecuadas señales de control este puede controlarse, grandes perturbaciones como la densidad del aire y ráfagas de viento repentinas afectan claramente su dinámica.

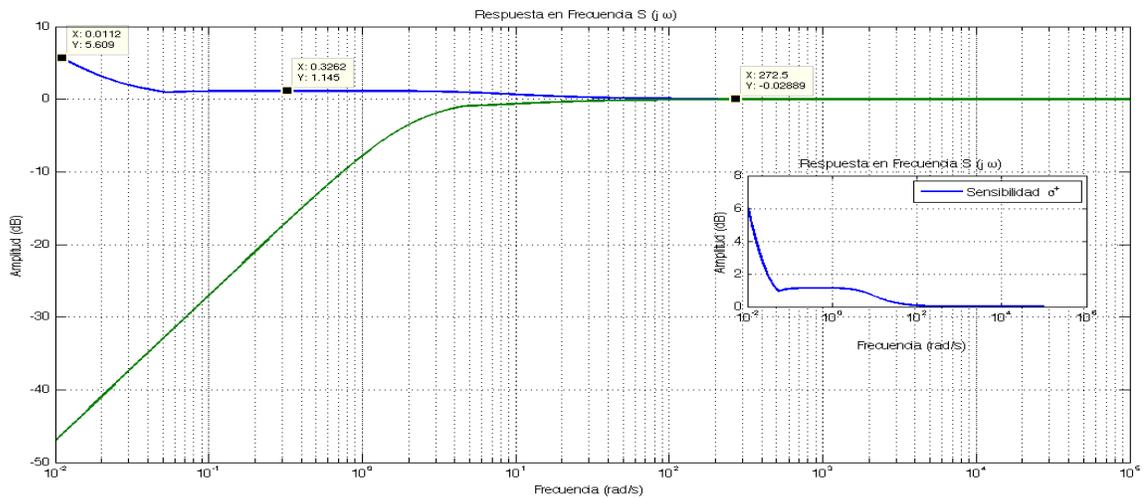


Figura 59. Sensibilidad del modelo lineal.

### 4.3. ANÁLISIS PLANTA-CONTROLADOR

#### 4.3.1. Evaluación de la Ley de Control $H_\infty$ Loop Shaping.

Con el fin de evaluar el desempeño del controlador  $H_\infty$  en la regulación de los ángulos de Euler, se realizaron diferentes experimentos para determinar la capacidad de reacción ante diferentes perturbaciones en el roll, pitch, yaw y la velocidad angular del rotor principal. Se simuló la topología enseñada en la Figura 60, en la que se adicionan perturbaciones a la salida y se observa la recuperación del controlador.

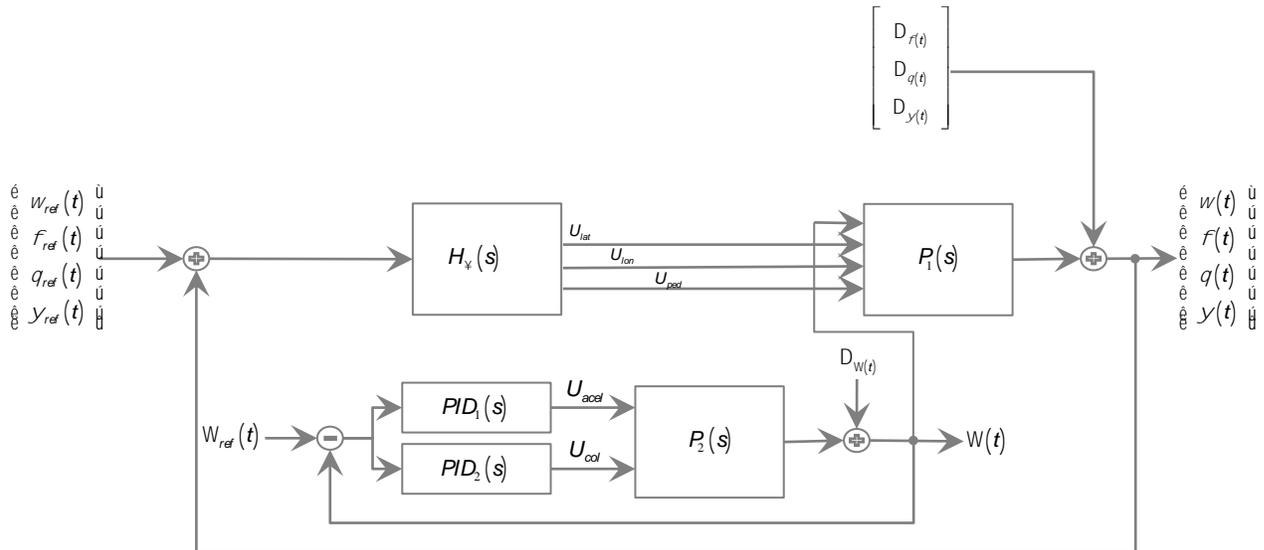


Figura 60. Topología de control simulada.

Se implementó en Simulink la estructura mostrada en la figura anterior como se presenta en el ANEXO 10: SIMULACIÓN PLANTA-CONTROLADOR, en donde el controlador debe regular valores de referencia se iguales a cero. Se realiza una prueba durante 15 segundos y se somete el lazo cerrado planta-controlador ante una variación de  $0^\circ$  a  $10^\circ$  y  $10^\circ$  a  $0^\circ$  de pitch en tiempos aleatorios. La Figura 61 muestra el resultado de la simulación, en el cual puede observarse que a pesar de la gran interacción entre las entradas-salidas la recuperación es inferior a 1.6 segundos, cambios de ángulos inferiores a  $30^\circ$  aproximadamente y errores de estado estable del orden de  $1e^{-6}$ . Los efectos del acoplamiento se reflejan en velocidad angular regulada por los PID, sin embargo los efectos son casi nulos.

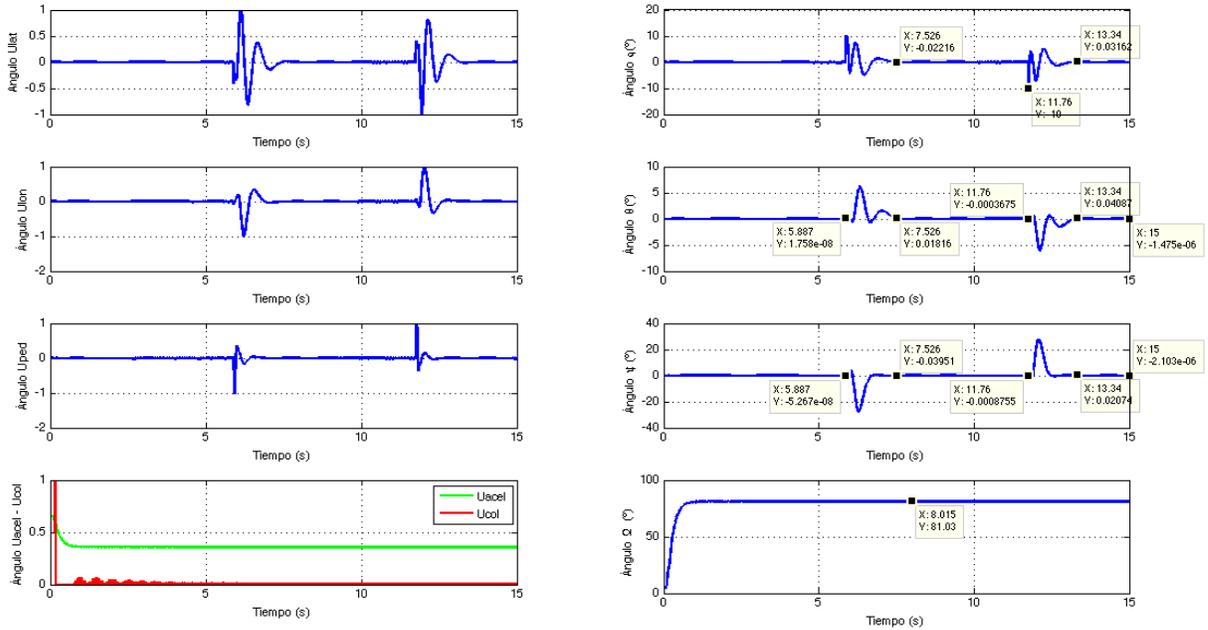


Figura 61. Respuesta controlador  $H_{\infty}$  con perturbación en  $\phi = 10^{\circ}$ .

Similarmente al experimento anterior se perturba el ángulo de roll ( $\phi$ ) en dos ocasiones, pasando de  $0^{\circ}$  a  $10^{\circ}$  y luego retornando a  $0^{\circ}$ . La Figura 62 deja claros los acoplamientos del sistema, pues al tratar de compensar el cambio de ángulo en pitch, la consigna  $U_{lat}$  se acciona, este cambio a su vez tiene efectos sobre el ángulo del yaw ( $\psi$ ) lo que finalmente resulta en un cambio acumulativo que se adiciona al roll y finalmente afectando el pitch ( $\theta$ ). El resultado es entonces un sistema que presenta cambios de poco menos de  $50^{\circ}$ , sin embargo el helicóptero logra recuperarse. El error de estado estable de nuevo ronda valores muy pequeños, en este caso en valores menores a  $1e^{-8}$ . Por último, el efecto sobre velocidad angular es muy pequeño, casi nulo.

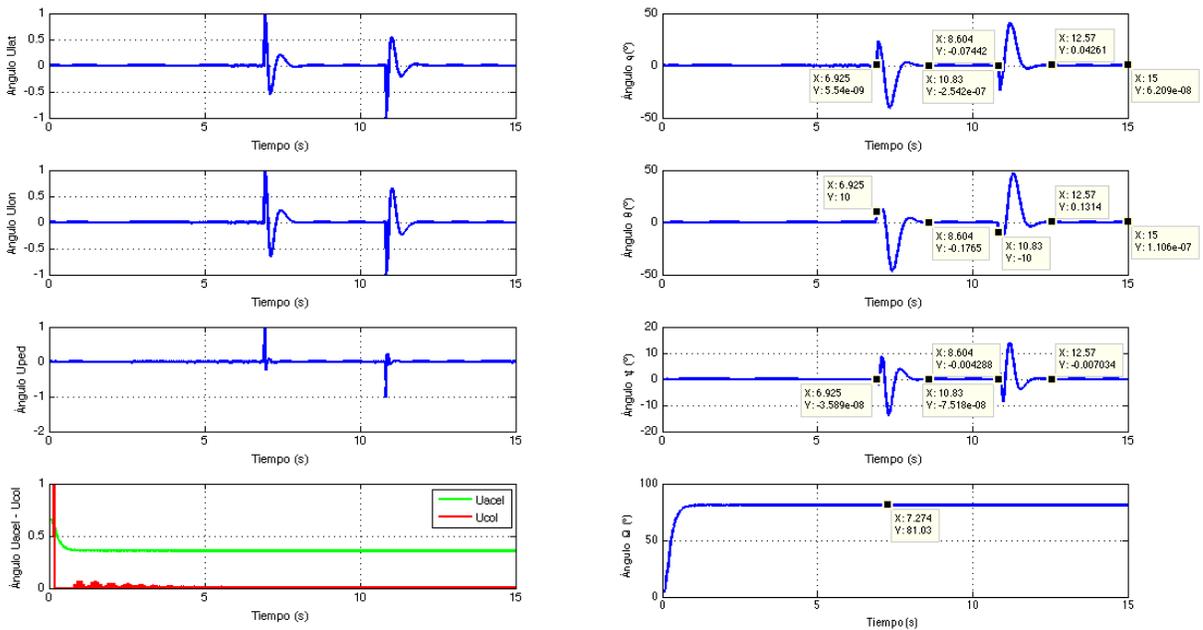


Figura 62. Respuesta controlador  $H_{\infty}$  con perturbación en  $\theta = 10^{\circ}$ .

Se evalúa el comportamiento del controlador ante una perturbación de 10 grados sobre el yaw ( $\psi$ ) y los resultados se presentan en la Figura 63. De la gráfica se observa que ante el sistema puede recuperarse en un

tiempo inferior a 1.4 segundos, oscilaciones inferiores a los  $10^\circ$  y errores de estado estable inferiores a  $1e^{-8}$ . Es claro que al igual que el disturbio aplicado a  $\phi$ , la interacción no es tan fuerte, por lo que la recuperación se logra en términos aceptables.

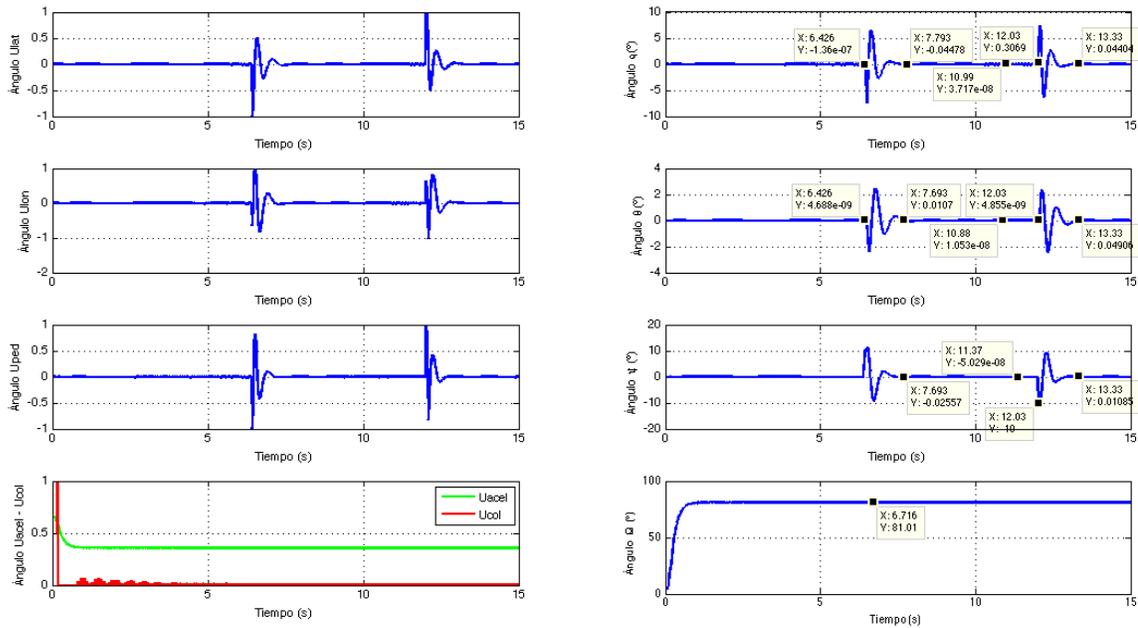


Figura 63. Respuesta controlador  $H_\infty$  con perturbación en  $\psi = 10^\circ$ .

Para observar el comportamiento de los controladores  $H_\infty$  y PID perturbados, se aplica un disturbio sobre la velocidad angular de  $\Omega = 80 \text{ rad/s}$ . La Figura 64 muestra el resultado de la simulación, de la cual se aclara que lo que está resaltado con un círculo rojo no es una perturbación, es el efecto inicial de la estabilización del controlador PID a  $81.0247 \text{ rad/s}$ . Aunque la velocidad angular afecta el ángulo en yaw ( $\psi$ ), el modelo no lineal fue linealizado para un valor de  $U_{ped}$  que contrarrestara el par motor del rotor principal, por esto el efecto sobre éste ángulo,  $\phi$  y  $\theta$  es insignificante.

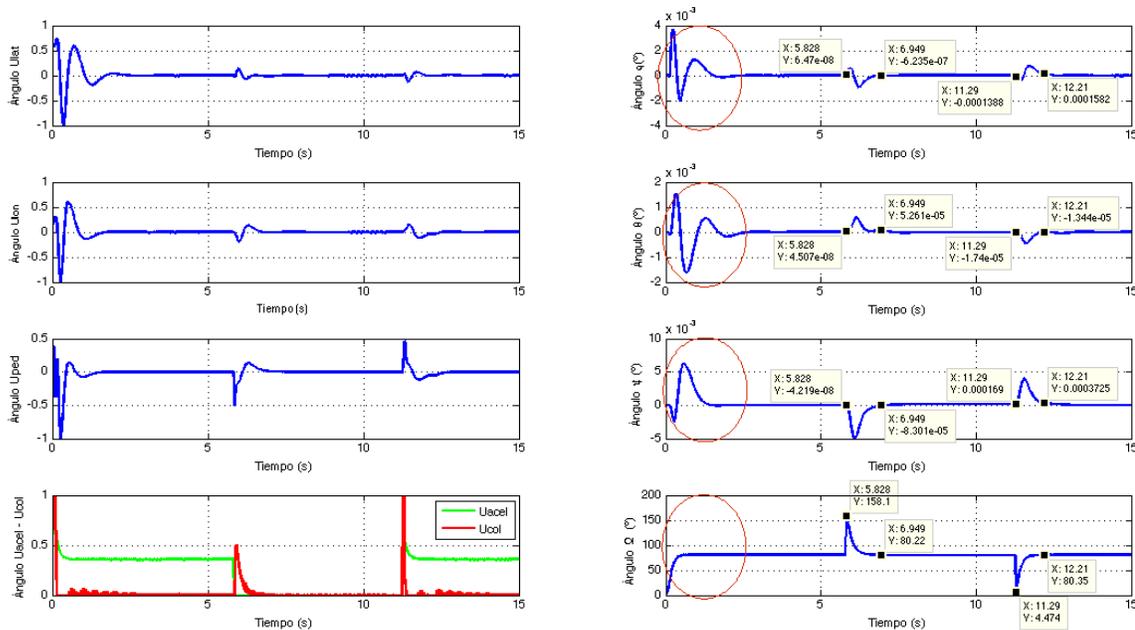


Figura 64. . Respuesta controlador  $H_\infty$  y PID con perturbación en  $\Omega = 80 \text{ rad/s}$ .

En una última prueba se analiza la respuesta del controlador ante perturbaciones múltiples. Se asume el caso en el que se activa el control de hover en un tiempo cero con un ángulo roll  $\phi = 5^\circ$ , pitch  $\theta = 10^\circ$ , yaw  $\psi = 7^\circ$  y con un incremento en la velocidad angular inicial de  $\Omega = 20 \text{ rad/s}$  que luego es llevada a cero. La Figura 65 muestra el resultado de la simulación, en la cual se observa claramente que ante esta gran exigencia el controlador puede estabilizar el helicóptero, aunque sacrificando la velocidad en la que encuentra el estado estable, pues llega hasta los 4 segundo con un error de seguimiento del orden de  $1 \times 10^{-3}$ .

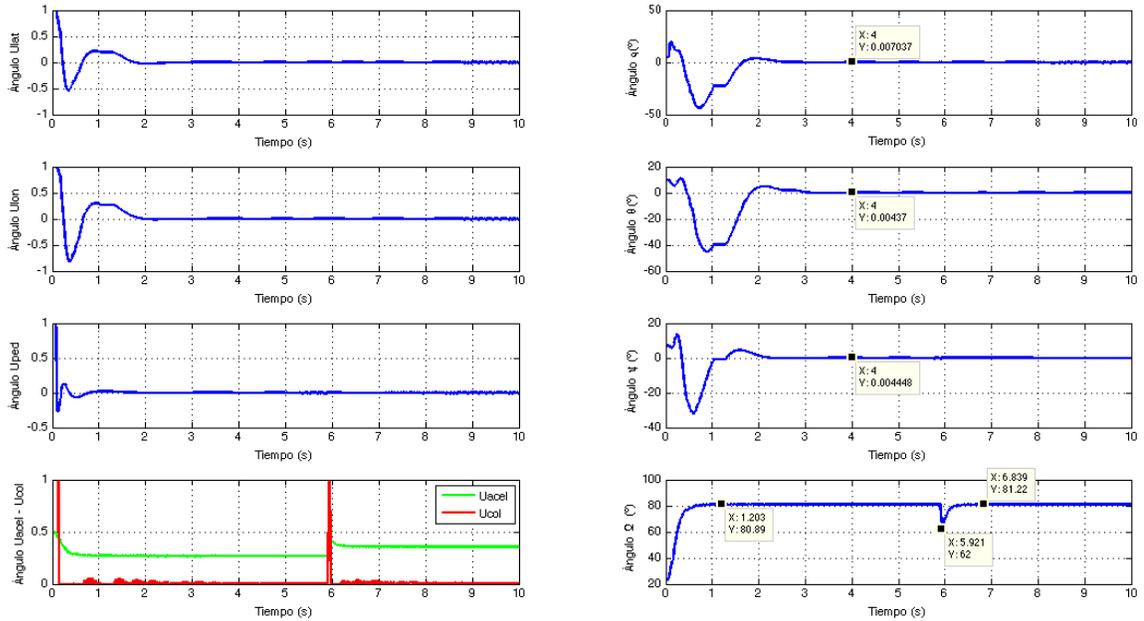


Figura 65. Respuesta de los controladores  $H_\infty$  y PID ante perturbaciones múltiples.

#### 4.3.1.1. Energía del Controlador.

Como método de verificación del controlador propuesto, se encontró la energía de la señal de control basado en la ecuación (157). Para la evaluación de este parámetro se utilizaron los datos provistos en la perturbación múltiple y se analizó su consumo independientemente.

$$E_{SC} = \sum_{i=0}^n \int_{t_0}^{t_f} |Sc_i(t)|^2 \quad (157)$$

Siendo los datos evaluados el resultado del caso más crítico, el mayor consumo lo presentan la consigna de aceleración controlada por el PID, el cíclico-lateral y los pedales; debido a, como se mencionó anteriormente, la interacción entre estas últimas variables. El cumplimiento del criterio de robustez en el diseño del controlador sumado a los bajos niveles de consumo de energía muestran el buen desempeño del controlador.

CONTROLADOR	ENERGÍA DE LA SEÑAL DE CONTROL				
	$\int_{t_0}^{t_f}  U_{lat}(t) ^2$	$\int_{t_0}^{t_f}  U_{lon}(t) ^2$	$\int_{t_0}^{t_f}  U_{ped}(t) ^2$	$\int_{t_0}^{t_f}  U_{acel}(t) ^2$	$\int_{t_0}^{t_f}  U_{col}(t) ^2$
Perturbación múltiple	0.213	0.3307	0.8420	0.1147	0.1615
Perturbación $\phi = 10^\circ$	0.4369	0.3273	0.0646	0.0532	0.1068
Perturbación $\theta = 10^\circ$	0.1354	0.1750	0.002	0.0503	0.1065
Perturbación $\psi = 10^\circ$	0.0982	0.1832	0.1031	0.0531	0.1066
Perturbación $\Omega = 80 \text{ rad/s}$	0.2520	0.1694	0.1395	0.3478	0.1350

Tabla 5. Consumo de Energía  $H_\infty$ .

#### 4.3.1.1. Estabilidad Robusta.

Con el propósito de evaluar la robustez del sistema, se determina si el controlador puede regular el sistema aún en presencia de la incertidumbre, para esto se multiplica el lazo cerrado planta-controlador con el error multiplicativo como se observa en la ecuación (158).

$$\left\| \frac{K(j\omega)P(j\omega)}{1 + K(j\omega)P(j\omega)} E_{\Delta}(j\omega) \right\| < 1 \quad (158)$$

Al evaluar la ecuación se determinó que para toda  $\omega$ , el resultado es menor a uno, por lo que el controlador cumple con el criterio de estabilidad robusta. El resultado puede observarse en la Figura 66.

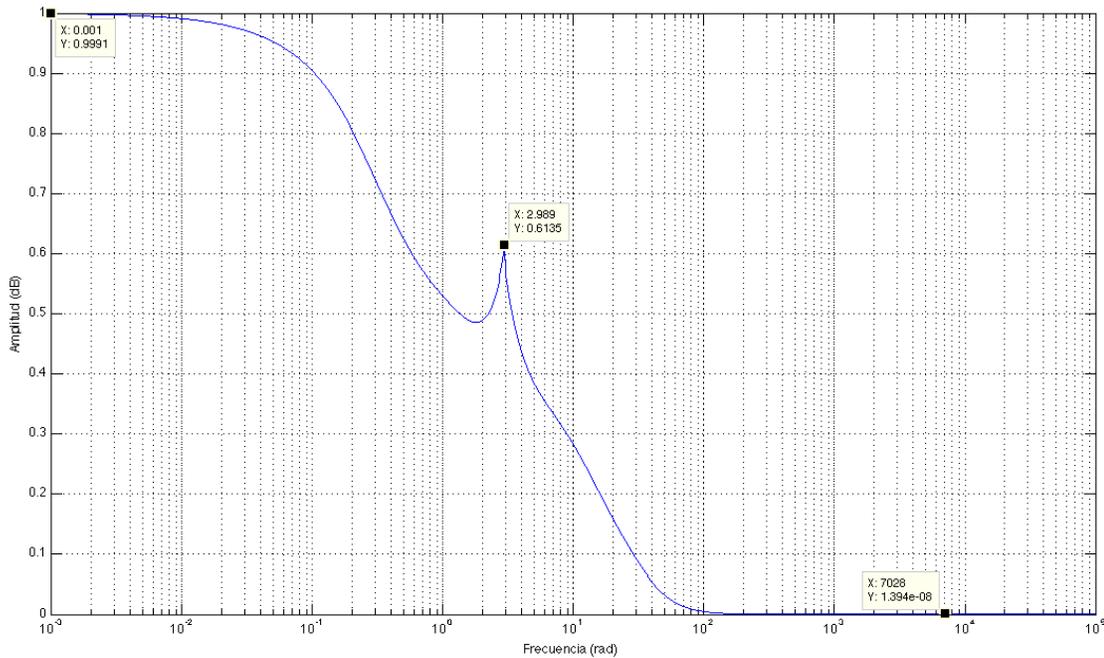


Figura 66. Estabilidad robusta.

#### 4.3.2. Evaluación de la Ley de Control PID

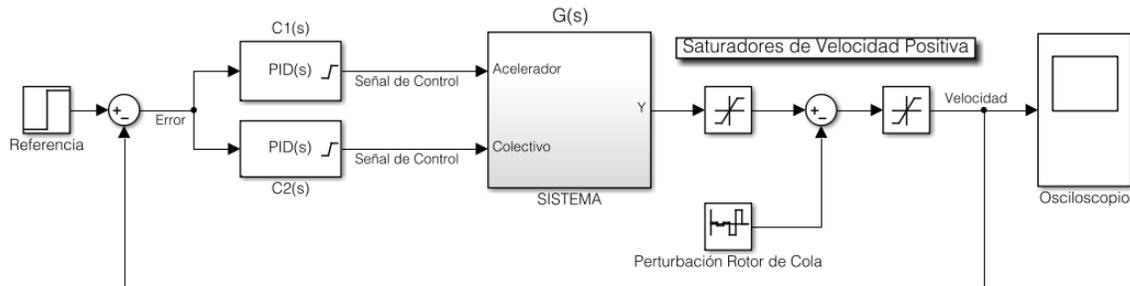
Como método de ratificación del controlador escogido, se estimó el consumo de energía de las señales de control para cada par de PID's. Para esto el sistema se sometió a una respuesta paso y se analizaron los datos como se observa Tabla 6. De ésta puede observarse que en relación al consumo de energía, el controlador que cuenta con la mejor respuesta es el PID11.

CONTROLADOR	ENERGÍA DE LA SEÑAL DE CONTROL	
	$\int_{t_0}^{t_f}  C_1(t) ^2$	$\int_{t_0}^{t_f}  C_2(t) ^2$
PID5	2.8833	0.3191
PID10	5.8986	0.1921
<b>PID11</b>	2.7672	0.2479
PID12	3.3443	8.85

Tabla 6. Análisis del consumo de energía.

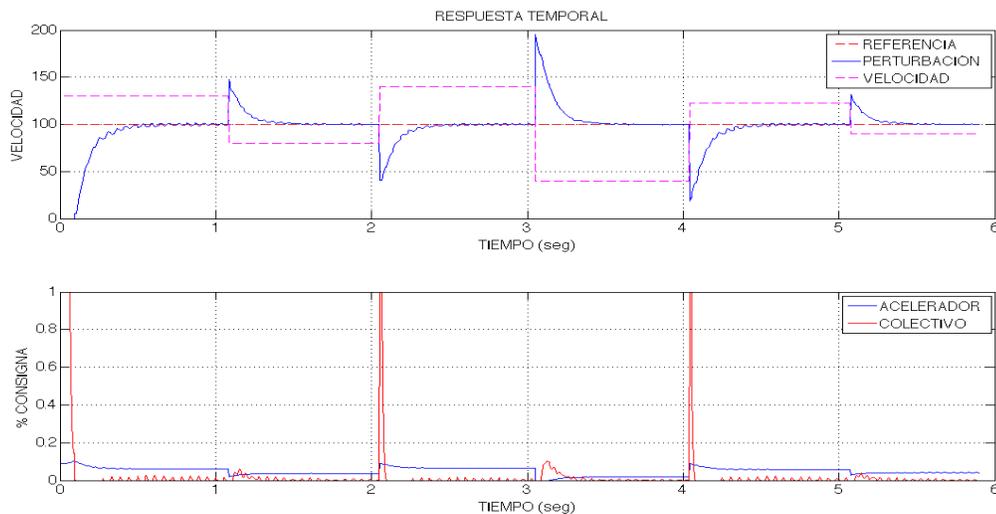
Finalmente el controlador PID11; visto en las ecuaciones (150-151), fue sometido a la reducción de velocidad del rotor principal producida por un cambio en ángulo de ataque de las aspas del rotor de cola; para producir empuje y controlar el yaw. Para esto se simuló el sistema planta-controlador en Simulink y

se ingresó una señal de perturbación que restaba o sumaba la velocidad angular final del rotor. El modelo seguido para simulación se puede observar en la Figura 67, el cual presenta los controladores saturados con señales de 0 a 1, saturadores de velocidad positiva para asegurar que siempre fuese mayor a cero y un vector de perturbaciones compuesto por los valores  $[30, -20, 40, -60, 23, -10]RPM$  que se permutaban cada 0.5 segundos aproximadamente. El proceso de simulación se llevó a cabo durante 12 y 30 segundos, pues dependía de la velocidad de estabilización de cada controlador. El resultado final se presenta en la Figura 68.



**Figura 67. Perturbación de los controladores PID.**

Al observar los resultados de gráficos y tabulados, se logró determinar que el controlador cumple con las velocidades de respuesta estimadas, el seguimiento de la referencia y en mayor proporción la capacidad de recuperación ante perturbaciones. Por tanto se consideró es el controlador óptimo para determinar el empuje generado por las aspas del rotor principal.



**Figura 68. Respuesta de los controladores ante una señal de perturbación.**

## CONCLUSIONES

- La descarga de la batería que utiliza el helicóptero KDS450SV genera una disminución de la corriente suministrada al motor eléctrico, derivando en una reducción de la velocidad angular final del rotor principal; lo cual pudo ser constatado experimentalmente. Esto conllevó a que en el proceso de identificación del motor o sistema acelerador – colectivo – velocidad angular, se asegurase que la batería estuviese cargada al 100%. Adicionalmente variables como la densidad, velocidad y dirección del del aire, son perturbaciones variantes con el tiempo y complejas de modelar, que terminaron por condicionar el modelo identificado a circunstancias controladas, en las que este tipo de efectos no afectaran las mediciones; sin embargo, según las simulaciones, el resultado encontrado obedece a las características mas importantes del aeromodelo. Para determinar una mejor aproximación del sistema, será necesario medir o caracterizar estos efectos para obtener un modelo con una mayor aproximación.
- Diferentes constantes aerodinámicas de las aspas del helicóptero tuvieron que ser determinadas teóricamente y utilizando el programa de simulación FoilSim III de la NASA, sin embargo para lograr una mayor aproximación del modelo, deben ser caracterizadas experimentalmente utilizando un tunel de viento. Adicionalmente, elementos del helicóptero como las aletas de estabilización horizontal y vertical, la barra estabilizadora Bell Hiller y la fricción aerodinámica del fuselaje, no fueron contemplados en la modelación, pues en relación al tamaño y los efectos sobre el aeromodelo no implicaron un nivel de incertidumbre considerable. El modelo lineal resultante representa el comportamiento de un helicóptero sin sistemas de control, por lo que éste se consideró confiable para el diseño de la ley de control.
- Las dimensiones del helicóptero KDS450SV, su peso y materiales de construcción, hacen que ésta aeronave pueda desempeñar maniobras de vuelo muy rápidas y ágiles; lo cual pudo apreciarse en el proceso de experimentación, su parametrización y el análisis del modelo resultante. Por tanto, el aeromodelo puede tolerar ciertas exigencias que un análogo de tamaño real no podría soportar, por ejemplo el vuelo invertido, convirtiéndolo en un aparato ideal para futuros desarrollos de vehículos autónomos aéreos.
- La fuerza de la gravedad y la fricción aerodinámica generon la inestabilidad interna del modelo pues al ser siempre constantes, la acción acumulativa de los integradores puros hacian que, de forma aparentemente, el helicóptero siempre tuviese empuje y velocidad de elevación negativa; así se encuentre en condiciones de excitación cero. A pesar del efecto de inestabilidad, la fuerza de gravedad da propiedades de controlabilidad al empuje y la fricción aerodinámica a la rotación del rotor principal.
- El fuerte acoplamiento entre las entradas y salidas del helicóptero KDS450SV hicieron de éste un sistema complejo de controlar, pues ante cualquier acción de regulación se presentaban efectos no deseados sobre las demás salidas. La división del sistema en dos modelos independientes; el fuselaje y el sistema motor, resultó beneficiosa ya que se desacopló el acelerador como consigna de control para el modelo del fuselaje. Luego de la validación de los dos modelos encontrados y al analizar los resultados, se cree posible desarticular la consigna  $U_{ped}$  del fuselaje para el control del antitorque y diseñar una ley de control lo suficientemente rápida para el control de orientación sobre el acimut, de modo que el efecto sobre el roll y el pitch sea nulo.

- Las incertidumbres encontradas de los modelos lineales muestran que existen algunas dinámicas que no fueron modeladas o consideradas en la identificación. Esto es claro, ya que efectos aerodinámicos como la estela turbulenta, el molino de viento, el efecto tierra, la temperatura, la humedad relativa, entre otros, no fueron considerados en la modelación por restricción de pruebas en túnel de viento. A pesar de esto, las frecuencias en las que se presentaron la mayores magnitudes de incertidumbre no se encontraban sobre los valores nominales de funcionamiento del helicóptero.
- El desacople del modelo identificado para el sistema acelerador – colectivo – velocidad angular, utilizando el método RGA (Relative Gain Array), permitió la implementación de dos controladores, PI y PID, los cuales cumplieron con el objetivo de controlar la velocidad angular en el menor tiempo posible, con capacidad de tolerar las perturbaciones generadas por el cambio de ángulo de ataque del rotor trasero y posibles cambios en la densidad del aire. Se constató en las simulaciones que la velocidad angular se estabiliza en un tiempo inferior a los ángulos de Roll, Pitch y Yaw, condición necesaria y crítica para el vuelo estacionario del helicóptero, pues al no existir  $\Omega$  no habrá empuje del rotor principal o trasero.
- El análisis de robustez demostró que la ley de control  $H_\infty$  determinada estabiliza el sistema en presencia de errores de modelación y la perturbación generada por la estabilización de la velocidad angular por parte de los PID. La simulación del sistema planta-controlador enseñó que se cumple la condición de seguimiento de la referencia, tanto estática como cambiante, teniendo errores de estado estable del orden de las micras de grados.

## BIBLIOGRAFÍA

- Kasdin, J., & Paley, D. (2011). *Engineering Dynamics: A Comprehensive Introduction*. New Jersey, Princeton, Estados Unidos: Princeton University Press.
- Wie, B. (1998). *Space Vehicle Dynamics and Control*. Reston, Virginia, Estados Unidos: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.
- U.S. Department of Transportation & Federal Aviation Administration. (2000). *Rotorcraft Flying Handbook*. Washington D.C.: Federal Aviation Administration; U.S. Government Printing Office.
- Kim, B., Chang, Y., Keh, J., Ha, H., & Lee, M. (2004). Design of 6-DOF Attitude Controller of Hovering Model Helicopter. *Proceedings of the 30th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 1 (1), 104 - 110.
- Hald, U., Hesselbaek, M., Holmgaard, J., Jensen, C., Jakobsen, S., & Siegumfeldt, M. (2005). *Autonomous Helicopter - Modelling and Control*. Aalborg University, Department of Control Engineering. Aalborg: Aalborg University.
- Koo, J., & Sastry, S. (1998). Output Tracking Control Design of a Helicopter Model Based on Approximate Linearization. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*, 4, 3635-3640.
- Ma, Y., Sastry, S., & Koo, J. (2001). *Nonlinear Control of a Helicopter Base Unmanned Aerial Vehicle Model*. Berkeley University, Robotics. Berkeley: Berkeley University.
- Naldi, R., & Marconi, L. (Septiembre de 2006). Robust Nonlinear Control of a Miniature Helicopter for Aerobatic Maneuvers. *Proceedings 32nd Rotorcraft Forum*, 1-16.
- Tobias, P., Krogstad, T. R., & Gravdahl, J. (20 de Agosto de 2008). Modelling of UAV Formation Flight Using 3D Potential Field. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 1453-1462.
- Masajedi, P., Ghanbarzadeh, A., & Shishesaz, M. (7-9 de Diciembre de 2012). Optimal Control Designing for a Discrete Model of Helicopter in Hover. *Proceedings of International Conference on Control Engineering and Communication Technology*, 407 - 412.
- Wang, H., Wang, D., Niu, X., & Duan, H. (18-21 de Agosto de 2007). Modeling and Hover Control of a Novel Unmanned Coaxial Rotor/Ducted-Fan Helicopter. *Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics*, 1768 - 1773.
- Prouty, R. W. (2001). *Helicopter Performance, Stability, and Control* (Segunda ed.). Boston: Krieger Pub Co.
- Croucher, P. A. (2006). *Private Helicopter Pilot Studies*. Electrocution.
- Leishman, J. (2006). *Principles of Helicopter Aerodynamics*. New York, USA: Cambridge University Press.
- Padfield, G. (2007). *Helicopter Flight Dynamics* (Segunda ed.). New Delhi, Singapore: ISBN 978-1405118170.

- Federal Aviation Administration. (2007). *Rotorcraft Flying Handbook* (Primera ed.). New York, USA: Skyhorse Publishing.
- Torenbeek, E., & Wittenberg, W. (2009). *Flight Physics: Essentials of Aeronautical Disciplines and Technology, with Historical Notes* (Primera ed.). (S. Calvert, & E. Torenbeek, Trads.) New York, USA: Springer.
- Joglar Alcubilla, J. (2010). *Conocimientos sobre el Helicoptero* (Primera ed.). N-E.
- Watkinson, J. (2004). *Art of the Helicopter* (Primera ed.). Oxford, Great Britain: Butterworth-Heinemann.
- Wayne, J. (1994). *Helicopter Theory* (Primera ed.). Toronto, Canada: General Publishing Company, Ltd.
- Mendes de Almeida Correia da Cunha, R. M. (2002). *Modeling and Control of an Autonomous Robotic Helicopter*. Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico. Lisboa: N/A.
- Messiter, M. (2007). *R/C Model Helicopters a Guide for Beginners*. Hong Kong: Traplet Publications Ltd.
- Stepniewski, W. Z. (1984). *Rotary-Wing Aerodynamics* (Primera ed.). New York, USA: Dover Publications.
- Cooke, A., & Fitzpatrick, E. (2002). *Helicopter Test and Evaluation*. Gran Bretaña: Blackwell Publishing.
- McCormick Jr., B. W. (1999). *Aerodynamics of V/STOL Flight*. New York, USA: Dover Publications.
- Young, C. (1978). *A Note of the Velocity Induced by a Helicopter Rotor in the Vortex Ring State: RAE Technical Report 78125*. Royal Aircraft Establishment. Royal Aircraft Establishment.
- Seddon, J. (1990). *Basic Helicopter Aerodynamics*. Gran Bretaña: BSP Professional Books.
- Hafner, R. (1954). *The Domain of the Helicopter*. Journal of the Royal Aeronautical Society.
- Rozhdestvensky, K. V. (2000). *Aerodynamics of a Lifting System in Extreme Ground Effect*. Alemania: Springer.
- Sukumar, P. (10 de 11 de 2010). *Review Notes - Wing Theory*. Recuperado el 03 de Febrero de 2011, de finiteWingReview:  
<https://wiki.engr.illinois.edu/download/attachments/40042975/finiteWingReview.pdf?version=3&modificationDate=1289416261193>
- Yi-Ling Yang, K. (1993). *Helicopter Rotor Lift Distributions for Minimum Induced Power Loss*. Massachusetts Institute of Tehnology, Department of Aeronautics an Astronautics. Massachusetts: Massachusetts Institute of Tehnology.
- Paraschivoiu, I. (2003). *Subsonic Aerodynamics*. (S. Schettini, Ed., & F. Saeed, Trad.) Canada: Presses Internationales Polytechnique.
- Katz, J., & Plotkin, A. (2001). *Low-speed aerodynamics* (Segunda ed.). USA: Cambridge University Press.

- El-Saadany, Medhat, A., & Elhalwagy, Y. Z. (26-28 de Mayo de 2009). Flight Simulation Model for Small Scaled Rotor Craft-Based UAV. *Proceedings of 13th International Conference on Aerospace Sciences & Aviation Technology*, 1-17.
- Del Cerro, J., Barrientos, A., & Martinez, A. (2009). Modelling and Control Prototyping of Unmanned Helicopters. En T. Mung Lam, *Aerial Vehicles* (pág. 320). Madrid: InTech.
- Heffley, R. K., & Mních, M. A. (1986). *Minimum Complexity Helicopter Simulation Math Model Program*. U.S. Army Aeroflightdynamics Directorate, Armes Research Center. Los Altos: Manudyne System Incorporate.
- Munziger, C. (1998). *Development of a Real-Time Flight Simulator for an Experimental Model Helicopter*. Georgia Institute of Technology, School of Aerospace Engineering. Atlanta: Georgia Institute of Technology.
- Cai, G., Chen, B. M., & Tong Lee, H. (2011). *Unmanned Rotorcraft sYSTEMS*. New York, New York, United States: Springer.
- Lutze, F. H. (30 de Abril de 2002). *AOE 3134*. Recuperado el 08 de Septiembre de 2013, de Stability and Control: Longitudinal Aerodynamic Estimating Methods: <http://www.dept.aoe.vt.edu/~lutze/AOE3134/aeroestimates.pdf>
- Polhamus, E. C. (1949). *A Simple Method of Estimating the Subsonic Lift and Damping in Roll of Sweptback Wings*. National Advisory Committee for Aeronautics - NACA, Langley Aeronautical Laboratory. Washington: Nasa.
- Caughey, D. A. (2011). *Introduction to Aircraft Stability and Control Course Notes for M&AE 5070*. Cornell University, Sibley School of Mechanical & Aerospace Engineering. Ithaca: Cornell University.
- Heffley, R. K., & Mních, M. A. (1986). *Minimum Complexity Helicopter Simulation Math Model Program*. U.S. Army Aeroflightdynamics Directorate, Armes Research Center. Moffett Field: Manudyne Systems Incorporated.
- Mott, R. L. (1996). *Mecánica de Fluidos Aplicada* (4ª edición ed.). Atlacomulco, Naucalpan de Juárez, México: Prentice Hall Hispanoamérica S.A.
- Benson, T. J. (21 de Marzo de 2011). *National Aeronautics and Space Administration*, 1.4d. Recuperado el 29 de Septiembre de 2013, de FoilSim III Student Version 1.4d: Glenn Research Center: <http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/foil3.html>
- Pierre Beer, F., Johnston, E., Eisenberg, E. R., & Mazurek, D. F. (2007). *Mécanica Vectorial para Ingenieros: Estática*. Filadelfia, Pensilvania, Estados Unidos: McGraw-Hill.
- Beer, F. P., Johnston, Jr., E., & Eisenberg, E. R. (2007). *Mécanica vectorial para ingenieros: estática* (8ª edición ed.). (J. E. Murrieta Murrieta, Trad.) México D.F., México: McGraw-Hill Interamericana.
- Aliexpress. (1999). *Aliexpress*. Recuperado el 03 de Octubre de 2013, de Aliexpress: [www.aliexpress.com](http://www.aliexpress.com)
- Giancoli C., D. (2006). *Física: principios con aplicaciones* (6ª edición ed.). Atlacomulco, Naucalpan de Juárez, México: Prentice Hall, Inc.

- Gopal, M. (1993). *Modern Control System Theory* (2ª edición ed.). New Delhi: New Age International Ltd., Publishers.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de Control Moderna* (4ª edición ed.). Madrid, España: Pearson Educación.
- M. H., A., G. de la Sen, R., & Avello, A. J. (2000). Selección de Pesos de Prestación y Estabilidad para Control Robusto. *Jornadas de Automática*. Sevilla.
- MacFarlane, A., & Karcanias, N. (1976). Poles and zeros of linear multivariable systems : a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. *International Journal of Control* , 24 (1), 33-74.
- Clifford Goodwin, G., Graebe , S. F., & Salgado, M. E. (2001). Exploiting SISO Techniques in MIMO Control. En G. Clifford Goodwin, S. F. Graebe, & M. E. Salgado, *Control System Design*. Michigan: Prentice Hall.
- Bristol, E. H. (1966). On a New Measure of Interactions for Multivariable Process Control. *IEEE Transactions on Automatic Control* , 11 (1), 133-134.
- Cao, Y., & Rossiter, D. (1997). An Input Pre-Screening Technique for Control Structure Selection. *Computers and Chemical Engineering* , 21 (6), 563-569.
- Skogestad, S., & Postlethwaite, I. (2001). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design* (2ª edición ed.). Ney York: John Wiley & Sons.
- Cao, Y. (07 de Marzo de 2008). *File Exchange*. Recuperado el 14 de Agosto de 2013, de Mathworks: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19096-relative-gain-array/content/rga.m>
- Zhou, K., Doyle, J., & Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. New Jersey, Estados Unidos: Prentice Hall.
- Lv, M., Hu, Y., & Liu, P. (2011). Attitude Control for Unmanned Helicopter using H-infinity Loop-shaping Method. *2011 International Conference on Mechatronic Science, Electric Engineering and Computer* (11).
- Feyel, P. (2013). *Loop-shaping Robust Control*. Estados Unidos: ISTE Ltd y John Wiley & Sons, Inc.
- Murillo Sánchez, C. E. (1995). *Control Lineal Multivariable: Métodos LQG/LTR y Hinf*. Universidad EAFIT, Departamento de Ingeniería Mecánica. Medellín: EAFIT.
- Braatz, R. D., Morari, M., & Skogestad, S. (1996). Loopshaping for Robust Performance. (8.-8. (. VOL. 6, Ed.) *International Journal of Robust and Nonlinear Control* , 6, 805-823.
- Boltyanski, V. G., & Poznyak, A. (2012). *The Robust Maximum Principle: Theory Applications*. New York: Birkhäuser Basel.

## ANEXOS

### ANEXO 1

#### ESTIMACIÓN DEL TENSOR DE INERCIA

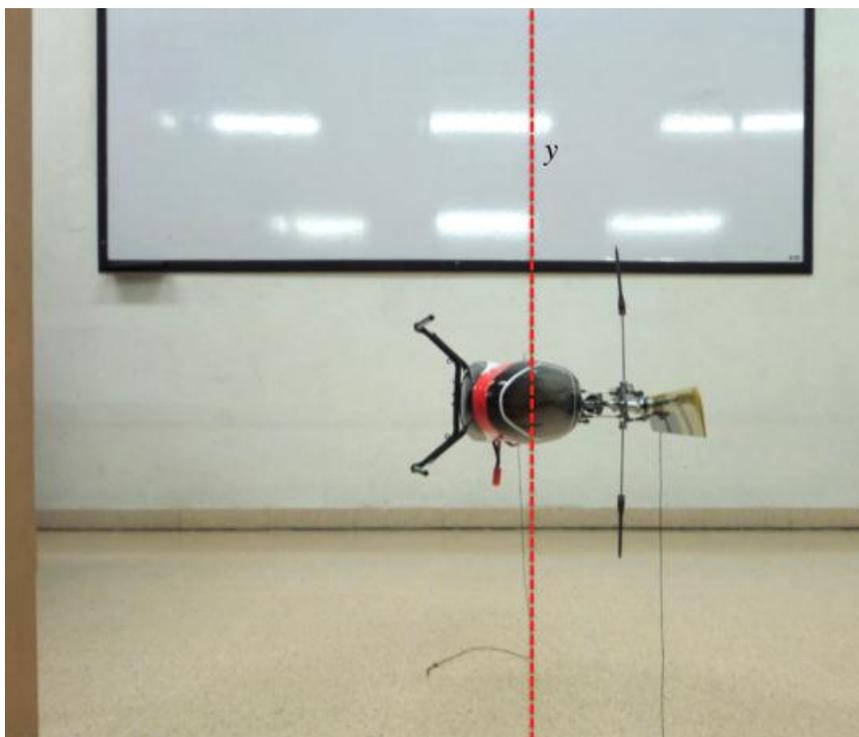
Para determinar el tensor de inercia es necesario conocer el centro de masa o gravedad del helicóptero. Para esto se realiza una prueba experimental en la que el helicóptero es sujetado con cuerdas sobre los ejes  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

##### 1. DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE GRAVEDAD (CDG).

Se utilizan hilos pegados en diferentes puntos sobre cada uno de los ejes del helicóptero hasta lograr la estabilización del helicóptero, como se observa en la Ilustración 1, la Ilustración 2 y la Ilustración 3. Luego se analiza el punto en el que las líneas sobre cada eje se cruzan y este es justamente el CDG.



Ilustración 1. Centro de masa sobre el eje  $x$ .

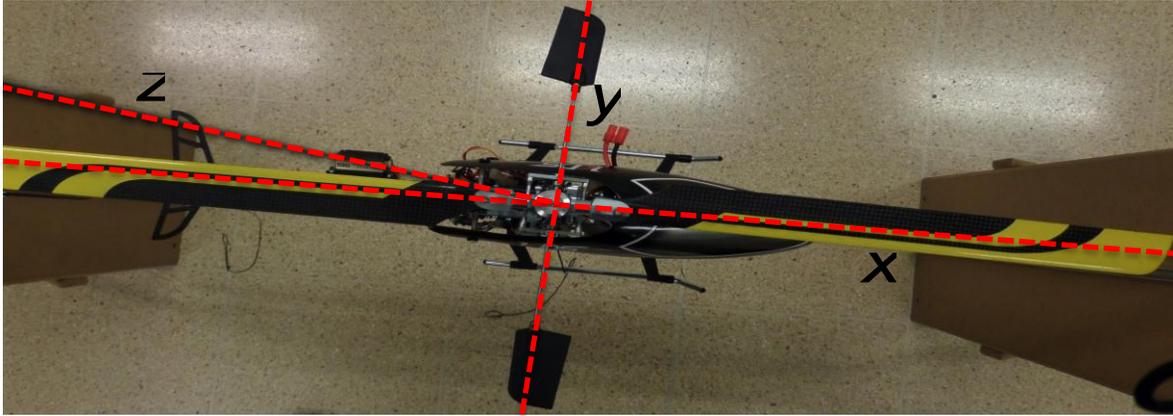


**Ilustración 2. Centro de masa sobre el eje  $y$ .**

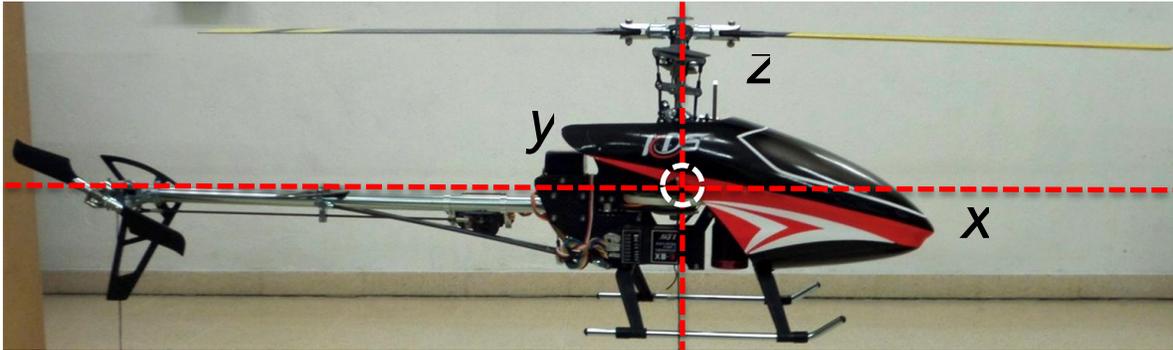


**Ilustración 3. Centro de masa sobre el eje  $z$ .**

Luego de la experimentación se logró determinar que el centro de masa del helicóptero se encuentra ubicado sobre el eje del rotor principal aproximadamente a  $11\text{mm}$  del piñón de transmisión del motor, como se observa en la Ilustración 4.



(a). Vista superior del centro de gravedad.



(b). Vista lateral del centro de gravedad.

Ilustración 4. Centro de gravedad del helicóptero.

Teniendo en cuenta que el centro de gravedad está centrado en el eje del rotor principal y tomando como referencia la Figura 21, se realizan las mediciones de las distancias  $d_x$ ,  $d_y$ ,  $d_z$ ,  $d_{x_{RT}}$  y  $d_{z_{RT}}$ , que se pueden observar en la Tabla 7.

CONSTANTE	VALOR	DESCRIPCIÓN
$d_x$	0m	Distancia entre el eje del rotor principal y el CDG sobre el eje $x$
$d_y$	0m	Distancia entre el eje del rotor principal y el CDG sobre el eje $y$
$d_z$	0.11m	Distancia entre el eje del rotor principal y el CDG sobre el eje $z$
$d_{x_{RT}}$	0.43m	Distancia entre el CDG y el eje del rotor trasero sobre el eje $x$
$d_{z_{RT}}$	0.017m	Distancia entre el CDG y el eje del rotor trasero sobre el eje $z$

Tabla 7. Distancias entre el CDG y los ejes del rotor trasero y principal.

## 2. CÁLCULO DEL TENSOR DE INERCIA.

Para determinar los momentos de inercia del helicóptero con respecto a los ejes de coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , se estimó conveniente analizar la aeronave a partir de figuras geométricas con volumen (Beer, Johnston, Jr., & Eisenberg, 2007). Finalmente los tensores de inercia se encuentran como la suma del momento de inercia sobre cada eje, esto es,

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm \quad (A1.1)$$

$$I_{yy} = \int (z^2 + x^2) dm \quad (A1.2)$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm \quad (A1.3)$$

La Ilustración 5 muestra el esquema que se utilizó para describir la forma en que se calcula el momento de inercia. A partir de esto, por ejemplo, el tensor de inercia sobre el eje  $x$  se calcula como  $I_{xx} = I_{x_A} + I_{x_B} + I_{x_C} + I_{x_D} + I_{x_E} + I_{x_F}$ . Se hace la anotación sobre la geometría de  $F$ , la cual se analiza mas adelante.

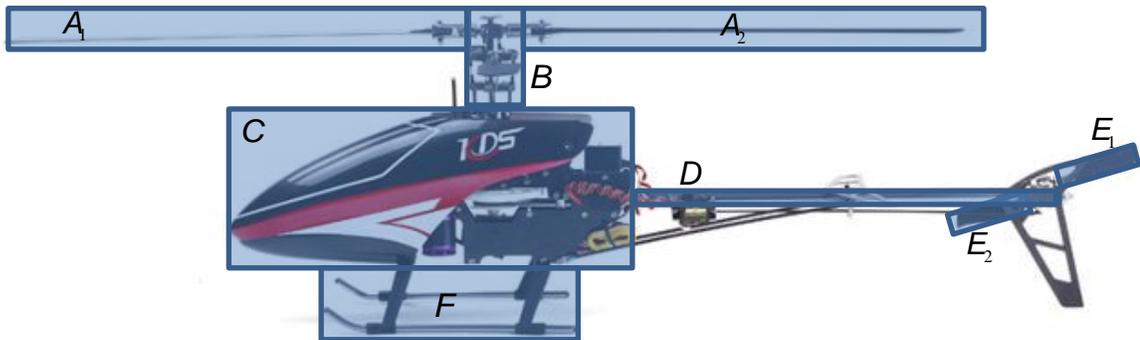


Ilustración 5. Geometría del helicóptero en 2D.

Ya que se consideran volúmenes para cada figura, se replantea la figura anterior y se propone la Ilustración 6. Se asume el fuselaje como un prisma rectangular ( $C$ ), así como el sistema de palancas para la transmisión de movimiento del motor al rotor principal ( $B$ ) y tren de aterrizaje ( $F$ ). Las aspas de rotor principal ( $A_1, A_2$ ) y del rotor trasero ( $E_1, E_2$ ) se asumen como prismas rectangulares delgados. Finalmente la barra trasera ( $D$ ) se modela como un cilindro circular. Con estas aproximaciones se realiza el análisis de los momentos de inercia.

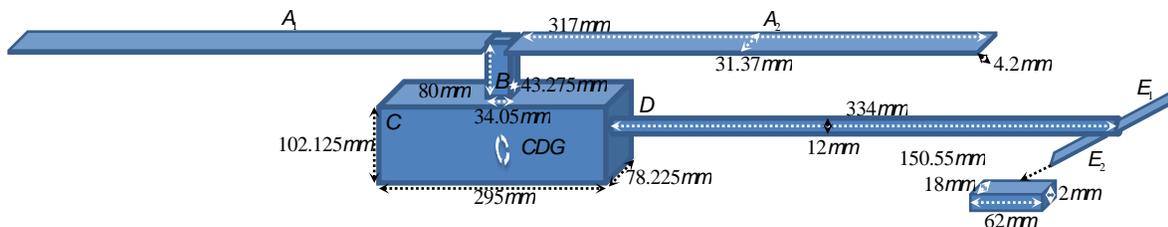


Ilustración 6. Geometría volumétrica del helicóptero.

Adicionalmente se toman algunas medidas de las piezas que conforman cada volumen, y en algunos casos se toma como referente datos publicados en sitios de web (Aliexpress, 1999), para minimizar el error de estimación del momento de inercia. La Tabla 8 muestra los parámetros encontrados.

PIEZA	VOLUMEN ASOCIADO	PESO	MASA
Aspa rotor principal	$A_1, A_2$	20.45g	0.0020853kg
Cabeza del rotor principal	$B$	200.03g	0.0203974kg
Batería	$C$	221.6g	0.0225969kg

Cubierta de fuselaje	<i>C</i>	46.45g	0.0047366kg
Tren de aterrizaje	<i>F → C</i>	27.65g	0.0028195kg
Sujetador de cola	<i>D</i>	99.79g	0.0101757kg
Tubo rotor trasero	<i>D</i>	16.15g	0.0016468kg
Aleta vertical	<i>D</i>	5.55g	0.0005659kg
Aleta horizontal	<i>D</i>	4.6g	0.0004691kg
Unidad de transmisión del rotor trasero	<i>D</i>	10g	0.1kg
Barra de sujeción	<i>D</i>	3.95g	0.0004028kg
Aspa rotor trasero	<i>E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub></i>	1.9g	0.0001937kg

Tabla 8. Masa de algunos elementos del helicóptero KDS 450SV.

### 2.1. CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DEL VOLUMEN A.

Para determinar el volumen y la masa de  $A_1$  y  $A_2$  se utilizan las dimensiones de la misma y los datos presentados en la Tabla 8, respectivamente. Ya que las aspas son iguales,  $V_{A_1} = V_{A_2}$  y  $m_{A_1} = m_{A_2}$  por tanto los momentos de inercia sobre cada eje son:

$$I_{A_{1x}} = \frac{1}{12} m(y^2 + z^2) = \frac{1}{12} (0.0020853kg)[(0.03137m)^2 + (0.0042m)^2] \quad (A1.4)$$

$$= 1.7419e^{-7} kg/m^2$$

$$I_{A_{1y}} = \frac{1}{12} m(z^2 + x^2) = \frac{1}{12} (0.0020853kg)[(0.0042m)^2 + (0.3170m)^2] \quad (A1.5)$$

$$= 1.7478e^{-5} kg/m^2$$

$$I_{A_{1z}} = \frac{1}{12} m(x^2 + y^2) = \frac{1}{12} (0.0020853kg)[(0.3170m)^2 + (0.03137m)^2] \quad (A1.6)$$

$$= 1.7646e^{-5} kg/m^2$$

Teniendo en cuenta lo explicado en el párrafo anterior, los momentos de inercia del volumen A son:  $I_{A_x} = 1.7419e^{-7}$ ,  $I_{A_y} = 1.7478e^{-5}$  y  $I_{A_z} = 1.7646e^{-5}$ .

### 2.2. CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DEL VOLUMEN B.

El bloque B está compuesto del eje del rotor, las aspas de estabilización – Bell Hiller, de bisagras y eslabones que en total tienen una masa de  $m_B = 0.0203974kg$ . Partiendo de la suposición que este cuerpo presenta una geometría de prisma rectangular se analiza el momento de inercia como se muestra a continuación.

$$I_{B_x} = \frac{1}{12} m(y^2 + z^2) = \frac{1}{12} (0.0203974kg)[(0.043275m)^2 + (0.08m)^2] = 1.4071e^{-5} kg/m^2 \quad (A1.7)$$

$$I_{B_y} = \frac{1}{12} m(z^2 + x^2) = \frac{1}{12} (0.0203974kg)[(0.08m)^2 + (0.03405m)^2] = 1.2858e^{-5} kg/m^2 \quad (A1.8)$$

$$I_{B_z} = \frac{1}{12} m(x^2 + y^2) = \frac{1}{12} (0.0203974kg)[(0.03405m)^2 + (0.043275m)^2] \quad (A1.9)$$

$$= 5.17575e^{-6} kg/m^2$$

### 2.3. CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DEL VOLUMEN C.

Este volumen está compuesto por objetos de diferentes materiales como aluminio, plástico y fibra de carbono distribuidos en el motor, piñones y la estructura misma, respectivamente. Aunque la masa puede determinarse con la relación entre la densidad y volumen (Giancoli C., 2006), se decide aproximarla a partir del peso del volumen C. Esto se realiza partiendo de la diferencia entre el peso total del helicóptero y la suma total de los demás componentes pesados. Ya que el helicóptero cuenta con un peso total de 916g, se encuentra la sumatoria de las masas de la Tabla 8.

$$W_{C_p} = 20.45g + 200.03g + 221.6g + 46.45g + 27.65g + 99.79g + 16.15g + 5.55g + 4.6g + 10g + 3.95g + 1.9g = 0.6581kg \text{ m/s}^2 \quad (\text{A1.10})$$

Luego se determina el peso del volumen C a partir de la diferencia sugerida en (A1.11),

$$W_{C_p} = 0.916kg - 0.65812kg = 0.2579kg \text{ m/s}^2 \quad (\text{A1.11})$$

A partir del peso se determina la masa,

$$m_c = \frac{W_{C_p}}{g} = \frac{0.2579kg \text{ m/s}^2}{9.8 \text{ m/s}^2} = 0.0263kg \quad (\text{A1.12})$$

Finalmente se los momentos de inercia son:

$$I_{C_x} = \frac{1}{12}m(y^2 + z^2) = \frac{1}{12}(0.0263kg)[(0.078225m)^2 + (0.102125m)^2] = 3.6293e^{-5} \text{ kg/m}^2 \quad (\text{A1.13})$$

$$I_{C_y} = \frac{1}{12}m(z^2 + x^2) = \frac{1}{12}(0.0263kg)[(0.102125m)^2 + (0.295m)^2] = 2.1371e^{-4} \text{ kg/m}^2 \quad (\text{A1.14})$$

$$I_{C_z} = \frac{1}{12}m(x^2 + y^2) = \frac{1}{12}(0.0263kg)[(0.295m)^2 + (0.078225m)^2] = 2.0425e^{-4} \text{ kg/m}^2 \quad (\text{A1.15})$$

#### 2.4. CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DEL VOLUMEN D.

Al igual que en el ítem anterior, el volumen de *D* está compuesto por el sujetador de cola, las aletas verticales y horizontales, el tubo del rotor trasero, la unidad de transmisión del rotor trasero y la barra de sujeción. A partir de la Tabla 8 se encuentra la masa como se muestra a continuación,

$$m_D = \frac{(99.79 + 16.15 + 5.55 + 4.6 + 10 + 3.95) \text{ gm/s}^2 / 1000}{9.8 \text{ m/s}^2} = 0.0143kg \quad (\text{A1.16})$$

El momento de inercia de un cilindro circular se calcula como,

$$I_{D_x} = \frac{1}{2}mr^2 \quad (\text{A1.17})$$

$$I_{D_y} = \frac{1}{12}m(3r^2 + L^2) \quad (\text{A1.18})$$

$$I_{D_z} = \frac{1}{12}m(3r^2 + L^2) \quad (\text{A1.19})$$

Reemplazando,

$$I_{D_x} = \frac{1}{2}(0.0143kg)(0.06m)^2 = 2.5722e^{-7} \text{ kg/m}^2 \quad (\text{A1.20})$$

$$I_{D_y} = \frac{1}{12}(0.0143kg)(3(0.06m)^2 + (0.334m)^2) = 1.3297e^{-4} \text{ kg/m}^2 \quad (\text{A1.21})$$

$$I_{D_z} = I_{D_y} = 1.3297e^{-4} \text{ kg/m}^2 \quad (\text{A1.22})$$

## 2.5. CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA DEL VOLUMEN $E_1$ Y $E_2$ .

La masa de las aspas del rotor se observa en la Tabla 8. Con este dato se determinan los momentos de inercia para los volúmenes siguiendo el mismo procedimiento utilizado para  $A_1$  y  $A_2$  como se aprecia a continuación,

$$I_{E_x} = \frac{1}{12}m(y^2 + z^2) = \frac{1}{12}(0.0001937kg)[(0.018m)^2 + (0.002m)^2] = 5.2993e^{-9}kg/m^2 \quad (A1.23)$$

$$I_{E_y} = \frac{1}{12}m(z^2 + x^2) = \frac{1}{12}(0.0001937kg)[(0.002m)^2 + (0.062m)^2] = 6.2170e^{-8}kg/m^2 \quad (A1.24)$$

$$I_{E_z} = \frac{1}{12}m(x^2 + y^2) = \frac{1}{12}(0.0001937kg)[(0.062m)^2 + (0.018m)^2] = 6.7340e^{-8}kg/m^2 \quad (A1.25)$$

## 2.6. CÁLCULO DE LOS TENSORES DE INERCIA.

El tensor de inercia  $I_{xx}$  se calcula sumando las ecuaciones (A1.4), (A1.7), (A1.13), (A1.20) y (A1.23), para  $I_{yy}$  las (A1.5), (A1.8), (A1.14), (A1.21), (A1.24) y para el caso de  $I_{zz}$  se suman (A1.6), (A1.9), (A1.15), (A1.22), (A1.25). La suma puede observarse a continuación,

$$I_{xx} = (1.7419e^{-7} + 1.4071e^{-5} + 3.6293e^{-5} + 2.57226e^{-7} + 5.2993e^{-9})kg/m^2 \quad (A1.26)$$

$$I_{yy} = (1.7478e^{-5} + 1.2858e^{-5} + 2.1371e^{-4} + 1.3297e^{-4} + 6.217e^{-8})kg/m^2 \quad (A1.27)$$

$$I_{zz} = (1.7646e^{-5} + 5.1575e^{-6} + 2.0425e^{-4} + 1.3297e^{-4} + 6.7340e^{-8})kg/m^2 \quad (A1.28)$$

El resultado final es,

$$I_{E_x} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0801e^{-4}kg/m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3.7708e^{-3}kg/m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6009e^{-3}kg/m^2 \end{bmatrix} \quad (A1.29)$$

ANEXO 2  
PARÁMETROS DEL HELICÓPTERO

OPERADOR	VALOR
$\rho$	$1.224kg/m^3$
$R$	$0.36m$
$c$	$0.03125m$
$A$	$0.4071m^2$
$a$	$2\pi$
$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$	$I = \begin{bmatrix} 5.0801e^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 3.7708e^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 3.6009e^{-3} \end{bmatrix}$
$C_{RP}^Q$	$0.00502183$
$D_{RP}^Q$	$0.023$
$B$	$2$
$d_x$	$0$
$d_y$	$0$
$d_z$	$0.11m$
$d_{xRT}$	$0.43m$
$d_{zRT}$	$0.017m$
$m$	$0.0934Kg$
$g$	$9.8m/s^2$
$l_0$	$13mm$
$l_1$	$43.35mm$
$l_2$	$30.25mm$
$l_3$	$43.075mm$
$l_4$	$11.325mm$
$l_5$	$42.05mm$
$l_6$	$30.375mm$
$l_7$	$10.125mm$
$l_9$	$19.05mm$
$l_{10}$	$2mm$
$l_\alpha$	$10.175mm$
$l_I$	$18.225mm$
$l_{II}$	$16.15mm$
$l_{III}$	$8.4mm$
$l_{IV}$	$8.612mm$
$l_V$	$7.05mm$
$l_{VI}$	$8.4mm$

Tabla 9. Parámetros del helicóptero KDS450SV.

ANEXO 3  
ESTIMACIÓN DEL ARRASTRE

El arrastre del rotor principal ( $Q_{RP}$ ) depende de las constantes  $C_{RP}$  y  $D_{RP}$ , que corresponden a la relación entre el empuje del rotor y el coeficiente de arrastre, y el arrastre inicial cuando las aspas del rotor principal tienen ángulo de paso cero, respectivamente.

$$Q_{RP} \cong C_{RP}T_{RP}^{1.5} + D_{RP} \quad (A2.1)$$

Para determinar la constante de arrastre  $D_{RP}^Q$  se analiza el perfil del asa para el helicóptero en cuestión. Según el Comité Consejero Nacional para la Aeronáutica (NACA por sus siglas en inglés), este tipo de aspas se reconocen como NACA-12, pues como se observa en la Ilustración 7, la simetría existente entre la parte superior e inferior de la misma.

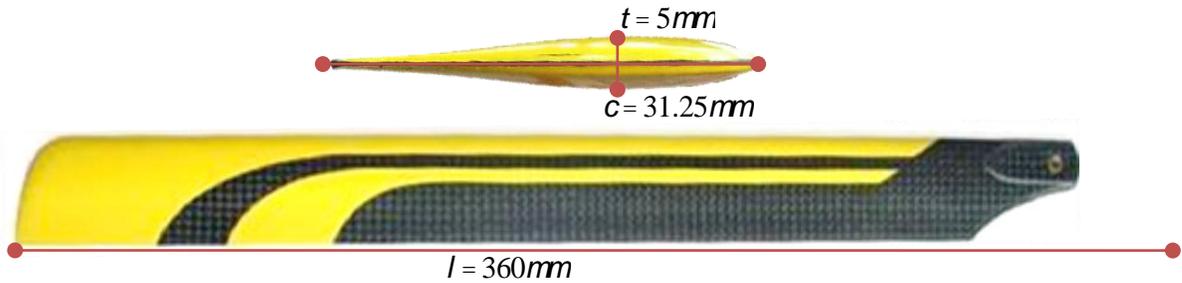


Ilustración 7. Perfil del asa del helicóptero KDS 450SV.

El coeficiente de fricción teórico según (Mott, 1996) puede calcularse a partir de la velocidad del aire ( $v_a$ ), de la fuerza de arrastre ( $F_D$ ), de la densidad del aire ( $\rho$ ) y del área del asa ( $A$ ), como se aprecia en la ecuación (A2.2). Variables como la velocidad del aire y la fuerza de fricción deben ser medidas en túneles de viento, por tanto, se utilizan simuladores para determinar el coeficiente de fricción resultante.

$$D_{RP}^Q = c_d = \frac{2F_d}{\rho v^2 A} \quad (A2.2)$$

La NASA dispone de un simulador que permite estimar ciertos parámetros cuando no se dispone de un túnel de viento (Benson, 2011). El simulador utiliza la cuerda del asa, el largo y la velocidad del viento. Para poder realizar la simulación se estima la velocidad del viento aproximándola a la máxima velocidad de rotación del asa, la cual es ( $\approx 2500RPM$ ). En la ecuación (A2.3) se estima de la máxima velocidad.

$$v = V_{RPM} \left( \frac{2\pi}{60} \right) = (0.36)(2500RPM) \left( \frac{2\pi}{60s} \right) \left( \frac{3600s}{1000m} \right) = 339.2917 Km/h \quad (A2.3)$$

Así mismo la cuerda es ( $c = 0.03125m$ ) y el largo es ( $l = 0.36m$ ). El resultado de la simulación arrojó los valores de la Tabla 10 y el resultado gráfico observado en la Ilustración 8.

PARÁMETRO	VALOR
$D_{RP}^Q$	0.0023
$F_D$	1.447N
$R_e$	208014
$A$	0.011m <sup>2</sup>
$\rho$	1.224 kg/m <sup>3</sup>
$\beta_{col}$	20°
Elevación	71N
$D_{RP}^Q_{MAX}$	0.262

Tabla 10. Valores arrojados por FoilSim III.

Para determinar  $C_{RP}$ , se tiene en cuenta la relación entre la elevación generada y la fuerza de arrastre. Según la simulación, son  $71N$  y  $16N$ . Asumiendo que el empuje guarda la misma proporción, el empuje máximo basado en el mínimo para volar  $0.916N$  sería  $4.58N$ . A partir de esto, la relación entre el empuje máximo que genera el aspa en su máximo ángulo de ataque (Federal Aviation Administration, 2007) está dada por (A2.4).

$$C_{RP} = \frac{D_{RP}}{T} = \frac{0.023}{4.58 \text{ kgm/s}^2} = 0.00502183 \quad (\text{A2.4})$$

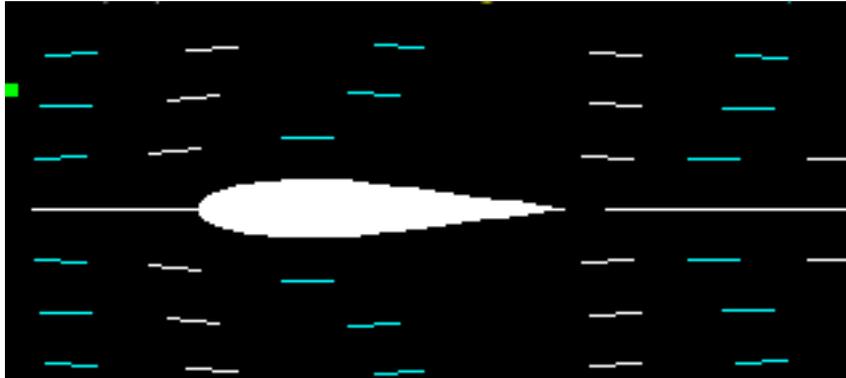


Ilustración 8. Resultado de la simulación en FoilSim III.

La ecuación resultante de (A2.1) en  $kg \cdot m/s^2$  es,

$$Q_{RP} \cong -[(0.00502183)T_{RP}^{1.5} + 0.023] \quad (\text{A2.5})$$



Adicionalmente,

$$l_0 = l_{01} = l_{02} = l_{03}$$

$$\theta_{S0} = \theta_{S01} = \theta_{S02} = \theta_{S03}$$

Con esto,

$$X_1 = l_0 \text{sen}(\theta_{S0}) \quad (\text{A3.2})$$

Ya que el desplazamiento es simétrico,  $X_{2_1} = X_{2_2}$  y  $\theta_{Su_1} = \theta_{Su_2}$ , se generaliza haciendo las variables como  $X_2$  y  $\theta_{Su}$ . Al analizar el punto donde se realiza la palanca y teniendo en cuenta la simetría en la distancia de la palanca formada en este punto, se determinó que,

$$X_2 = \text{sen}(\theta_{Su}) l_4 \quad (\text{A3.3})$$

Partiendo que el eje del plato oscilante y el de la bisagra 1 son paralelos, se proyecta la distancia  $X_1$  hasta el origen de  $X_2$  puede encontrarse una aproximación como se observa en la Ilustración 10. La aproximación de la ecuación (92) asume que los ángulos  $\theta_{Su}$  y  $\theta_{Su_c}$  son opuestos por el vértice, por tanto son iguales.

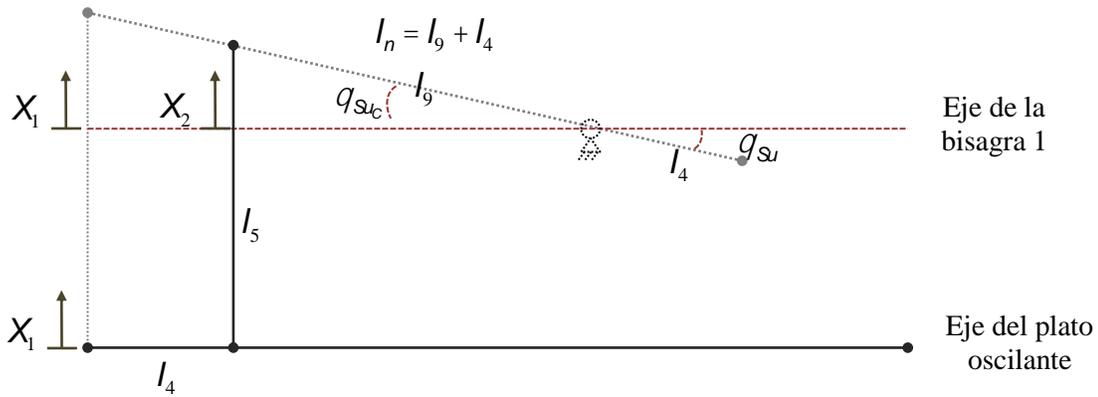


Ilustración 10. Proyección de la distancia  $X_1$  al eje de la bisagra 1.

$$X_1 = (l_9 + l_4) \text{sen}(\theta_{Su}) \quad (\text{A3.4})$$

Resolviendo  $\text{sen}(\theta_{Su})$  para (91) de (92) se tiene que,

$$X_2 = X_1 \frac{l_4}{(l_9 + l_4)} \quad (\text{A3.5})$$

$$X_1 = X_2 \frac{l_9 + l_4}{l_4} \quad (\text{A3.6})$$

Al reemplazar (90) en (93),

$$X_2 = l_0 \frac{l_4}{(l_9 + l_4)} \text{sen}(\theta_{S0}) \quad (\text{A3.7})$$

El movimiento  $X_3$  se da en relación a la bisagra que conecta el aspa con el eje del rotor, por lo que se determina mediante,

$$X_3 = \text{sen}(\beta_{col})l_7 \quad (\text{A3.8})$$

Ya que los ejes de la bisagra 1 y 2 son paralelos y se mueven simultáneamente, y que además los desplazamientos  $X_2$  y  $X_3$  son siempre perpendiculares al eje vertical del rotor, se analiza puntualmente lo que sucede en esta transferencia de movimiento. La Ilustración 11 presenta éste y la proyección de  $X_2$  al eje de la bisagra 3.

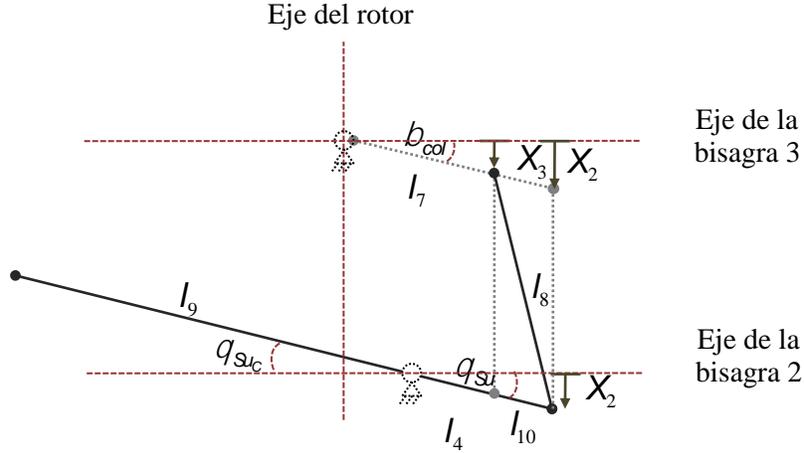


Ilustración 11. Proyección de la distancia  $X_2$  a la bisagra 3.

La ecuación que describe la proyección se presenta en (97), para el cual

$$X_2 = (l_7 + l_{10})\text{sen}(\beta_{col}) \quad (\text{A3.9})$$

Relacionando (97) con (96),

$$\begin{aligned} X_3 &= l_7 \frac{X_2}{(l_7 + l_{10})} \\ X_3 &= \frac{l_7 X_2}{l_7 + l_{10}} \end{aligned} \quad (\text{A3.10})$$

Tomando (95) y reemplazando en (98)

$$X_3 = \frac{l_7 \left( l_0 \frac{l_4}{(l_9 + l_4)} \text{sen}(\theta_{so}) \right)}{l_7 + l_{10}} \quad (\text{A3.11})$$

Ahora (99) en (96) entrega la relación directa entre el ángulo de consigna del acelerador y el ángulo de ataque de cada aspa.

$$\frac{l_7 \left( l_0 \frac{l_4}{(l_9 + l_4)} \text{sen}(\theta_{so}) \right)}{l_7 + l_{10}} = \text{sen}(\beta_{col})l_7$$

Resolviendo,

$$\beta_{col} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{l_0 l_4}{(l_9 + l_4)(l_7 + l_{10})} \text{sen}(\theta_{so}) \right] \quad (\text{A3.12})$$

Reescribiendo (100) y generalizando  $\theta_{S_0}$  como la consigna  $U_{col}$  del conjunto de entradas descritas en la ecuación (1), se tiene finalmente que,

$$\beta_{col} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{l_0 l_4}{(l_9 + l_4)(l_7 + l_{10})} \text{sen}(U_{col}) \right] \quad (\text{A3.13})$$

## 2. ÁNGULO DE ATAQUE DEL CÍCLICO.

Ya que el control del cíclico permite que helicóptero desempeñe movimientos longitudinales y laterales, es posible determinar los ángulos  $\beta_{1c}$  y  $\beta_{1s}$  formados por entre la horizontal y el ángulo de inclinación de las aspas para determinarlos se debe contemplar el tipo de rotor con el que cuenta la aeronave.

El helicóptero KDS 450SV cuenta con un solo rotor principal no articulado que le permite un vuelo ágil y de rápidas respuestas. La ausencia de articulaciones facilita el análisis, pues efectos como el arrastre (lag) y el aleteo (flapping) se realizan por esfuerzo mecánico del aspa, por lo que no existen bisagras para contrarrestarlos. Bajo estas consideraciones, los ángulos longitudinales y transversales se efectúan por inclinación del plato oscilante, de tal modo que para movimientos longitudinales positivos los ángulos de los servomotores  $S_1$  y  $S_2$  disminuyen y el ángulo del servomotor  $S_3$  aumenta en la misma proporción. Para el caso contrario, desplazamiento longitudinal negativo, los servomotores  $S_1$  y  $S_2$  aumentan el ángulo y  $S_3$  disminuye también lo hace en la misma proporción. El procedimiento anterior aplica para el movimiento lateral  $\beta_{1s}^+$ , sin embargo son los servomotores  $S_1$  y  $S_3$  los que aumentan de ángulo y el de  $S_2$  disminuye. Así pues, para  $\beta_{1s}^-$  los ángulos  $S_1$  y  $S_3$  disminuyen y  $S_2$  aumenta en la misma medida.

Para efectos del análisis, solo se grafica el desplazamiento longitudinal positivo. Es necesario tener en cuenta que  $\theta_{0_1}$ ,  $\theta_{0_2}$  y  $\theta_{0_3}$  tienen correspondencia, como se mencionó anteriormente, por tanto el ángulo de inclinación del plato oscilante depende directamente del cambio articulado de estos. Generalizando  $X_0$  puede escribirse como,

$$X_0 = X_1 = \text{sen}(\theta_0)l_0 \quad (\text{A3.14})$$

Para determinar el ángulo de inclinación del disco formado por el aspa respecto al TPP se tiene que,

$$X_3 = \text{sen}(\beta_{1c})R \quad (\text{A3.15})$$

Ya que cualquier declive del plato oscilante se transmite directamente al ángulo de inclinación del rotor principal respecto al TPP, puede plantearse que  $X_1 = X_3$ , por tanto,

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_0)l_0 &= \text{sen}(\beta_{1c})R \\ \beta_{1c} &= \text{sen}^{-1} \left[ \frac{\text{sen}(\theta_0)l_0}{R} \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.16})$$

Generalizando (104) y presentando la ecuación a partir de las consignas señaladas en la ecuación (1), se tiene que,

$$\beta_{1c} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{\text{sen}(U_{lon})l_0}{R} \right] \quad (\text{A3.17})$$

Para el caso de la inclinación lateral del rotor,  $\beta_{1s}$ , se utiliza (104) como referencia.

$$\beta_{1s} = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{\text{sen}(U_{lat})l_0}{R} \right] \quad (\text{A3.18})$$

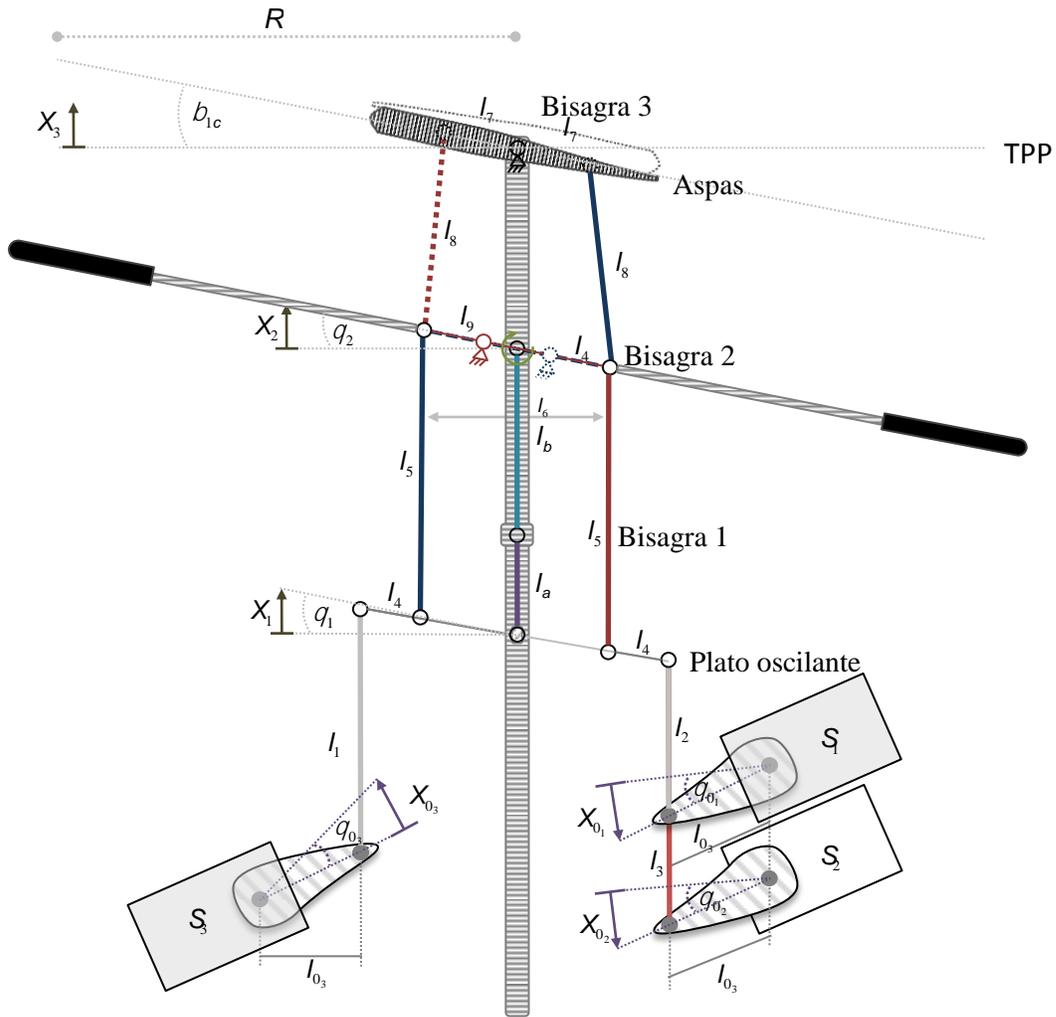


Ilustración 12. Desplazamiento longitudinal  $\beta_{1c}^+$ .

Por último, durante el proceso de identificación del motor, se asumió que  $U_{col}$  entregaba valores entre  $100^\circ$  a  $75^\circ$  para  $S_1$  y  $S_2$ ,  $U_{lat}$ ,  $U_{lon}$  y  $U_{col}$  con los ángulos de inclinación de los servomotores se puede describir como:

$$U_{col} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 = (0^\circ \rightarrow 25^\circ) + 100^\circ \\ \theta_2 = (0^\circ \rightarrow 25^\circ) + 100^\circ \\ \theta_3 = (0^\circ \rightarrow 25^\circ) - 100^\circ \end{bmatrix} \quad (\text{A3.19})$$

Tras experimentación se encontró que  $u_{lon}$  y  $u_{lat}$  varían tan solo  $10^\circ$ , por lo que la inclinación del plato oscilante se da por los cambios enseñados (107) y (18) respectivamente.

$$U_{lon} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 = ((0^\circ \rightarrow 25^\circ) + 100^\circ) \mp U_{lon} \\ \theta_2 = ((0^\circ \rightarrow 25^\circ) + 100^\circ) \mp U_{lon} \\ \theta_3 = ((0^\circ \rightarrow 25^\circ) - 100^\circ) \pm U_{lon} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.20})$$

$$U_{lat} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 = ((0^\circ \rightarrow 25^\circ) + 100^\circ) \pm U_{lat} \\ \theta_2 = ((0^\circ \rightarrow 25^\circ) + 100^\circ) \mp U_{lat} \\ \theta_3 = ((0^\circ \rightarrow 25^\circ) - 100^\circ) \pm U_{lat} \end{bmatrix} \quad (\text{A3.21})$$



Del análisis gráfico se encuentra que el ángulo  $\beta_{RT}$  se determina mediante la ecuación (113).

$$X_d = l_{VI} \text{sen}(\beta_{RT}) \quad (\text{A3.26})$$

Ya que el mecanismo permite una transferencia directa entre  $X_c$  y  $X_d$ , lo que implica que son iguales, la ecuación (113) puede igualarse a (112).

$$l_{II} \frac{X_\alpha}{l_I} = l_{VI} \text{sen}(\beta_{RT}) \quad (\text{A3.27})$$

Reemplazando (109) en (114),

$$\begin{aligned} l_{II} \frac{l_\alpha \text{sen}(\theta_\alpha)}{l_I} &= l_{VI} \text{sen}(\beta_{RT}) \\ \beta_{RT} &= \text{sen}^{-1} \left( \frac{l_\alpha \text{sen}(\theta_\alpha) l_{II}}{l_{VI} l_I} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.28})$$

La ecuación (115) describe finalmente la relación entre el ángulo de entrada del servomotor y el ángulo de ataque de las aspas.

## ANEXO 5 LINEALIZACIÓN

El script de Matlab se encuentra en el CD que se entrega con el documento; lleva el nombre de ModeloLineal.m y está almacenado en la carpeta ANEXO 5. Solo se debe ejecutar el programa para que este entregue el modelo linealizado y evalúe la controlabilidad, la observabilidad, la estabilidad y la detectabilidad.

Menú raíz del CD.

- ANEXO 5
  - ModeloLineal.m

## ANEXO 6 CONTROLADORES PID

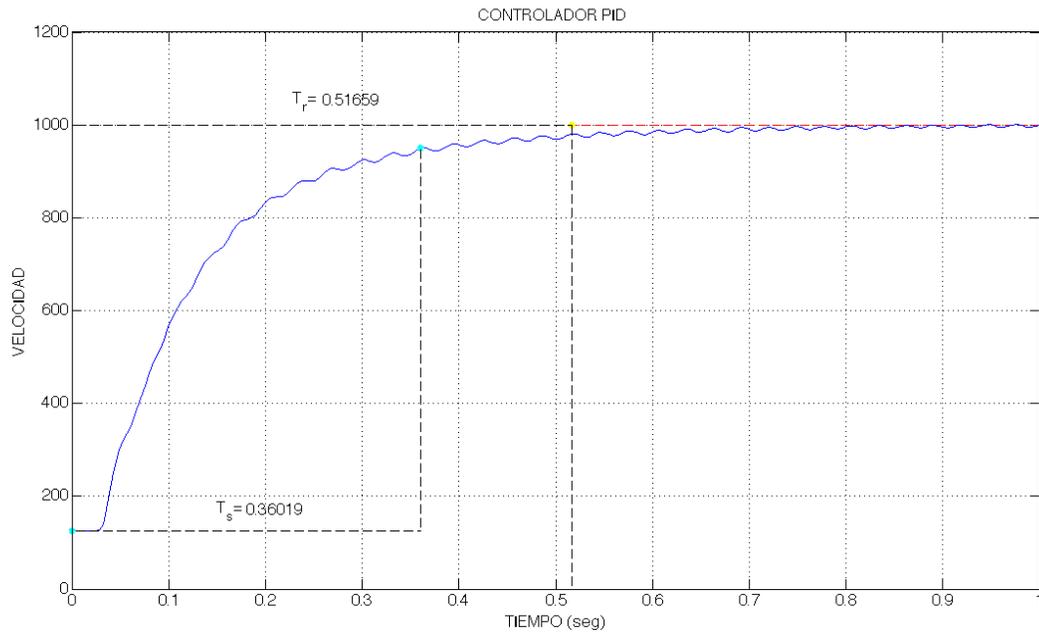


Ilustración 14. Respuesta temporal panta-controlador: PID 1.

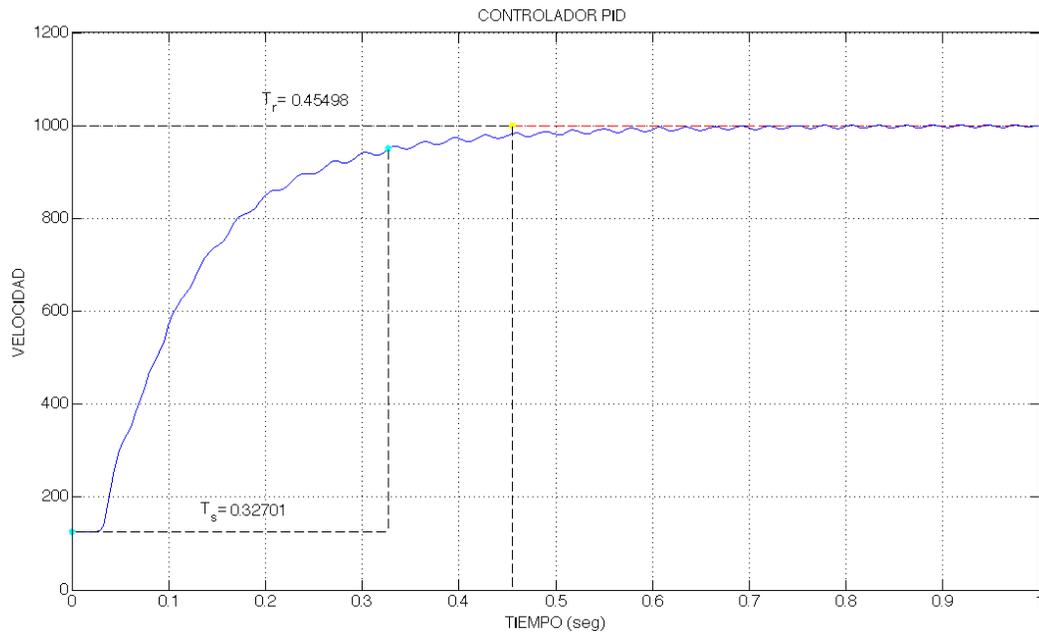
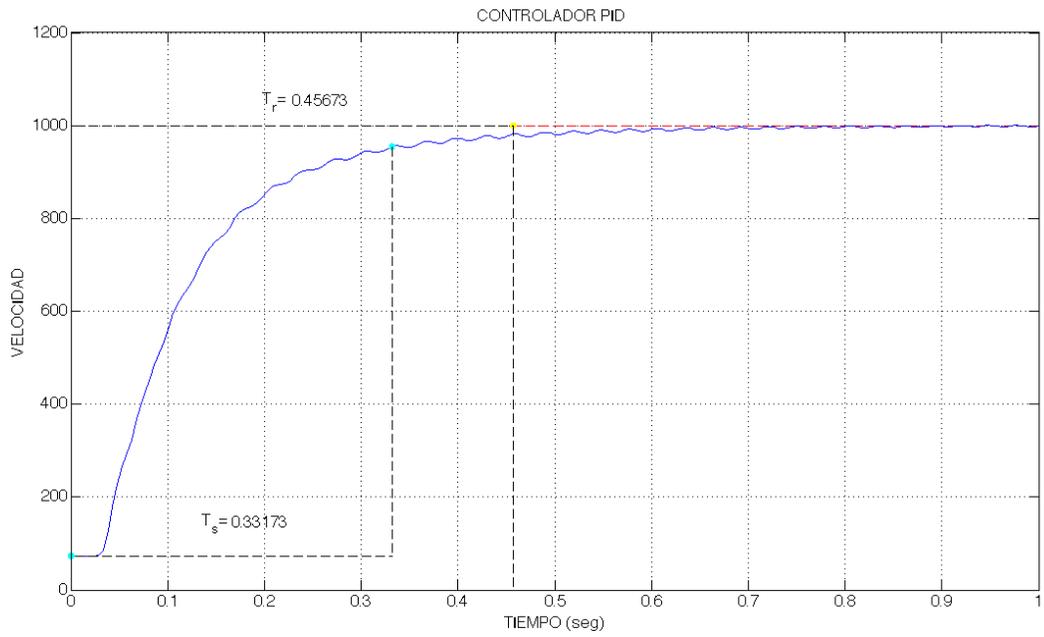
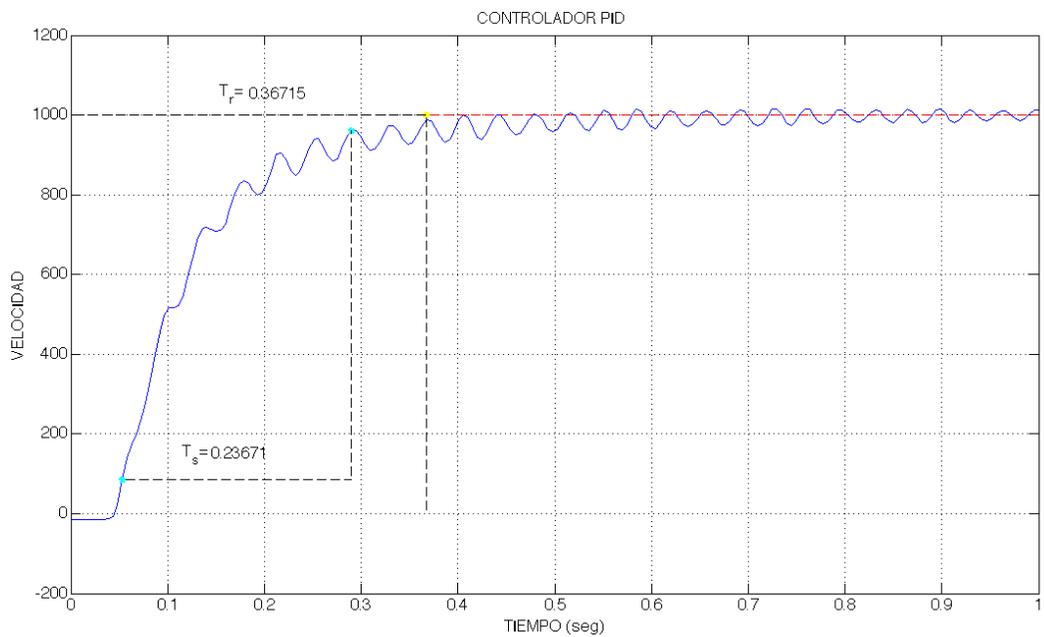


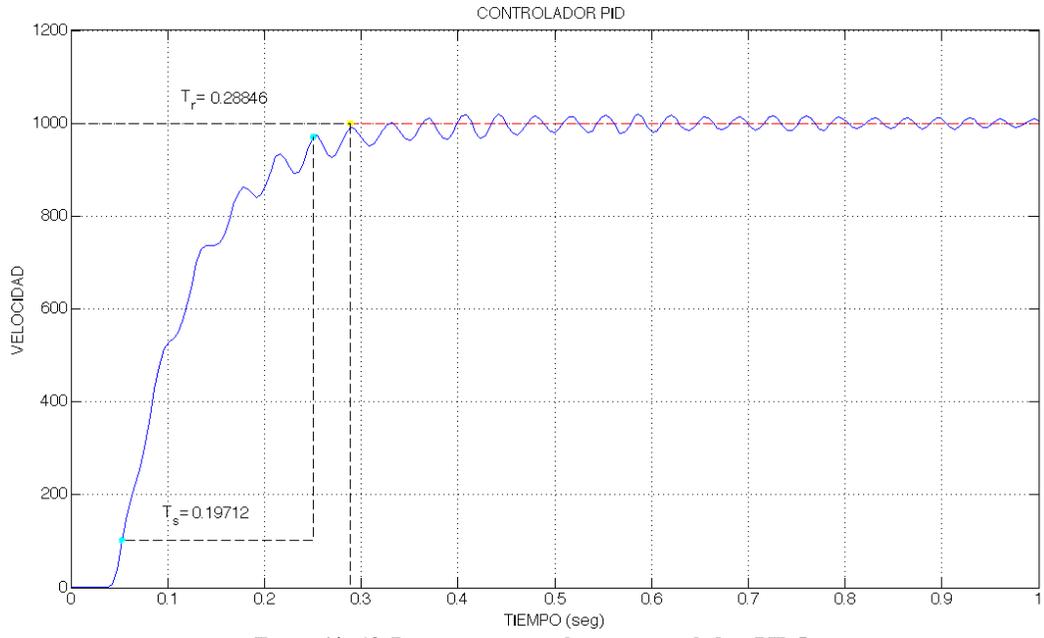
Ilustración 15. Respuesta temporal panta-controlador: PID 2.



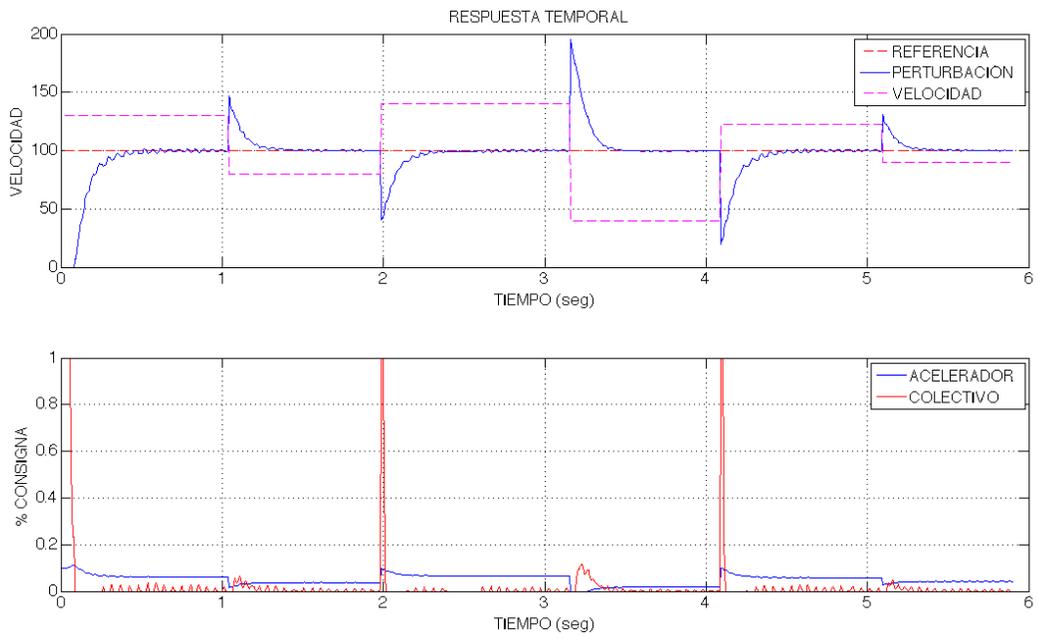
**Ilustración 16. Respuesta temporal panta-controlador: PID 3.**



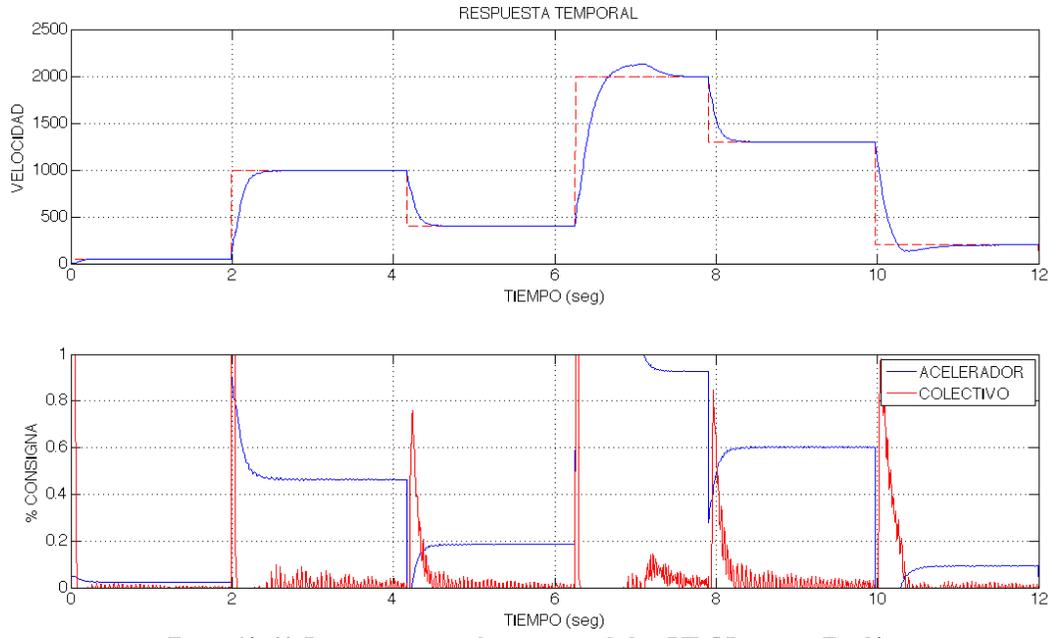
**Ilustración 17. Respuesta temporal panta-controlador: PID 4.**



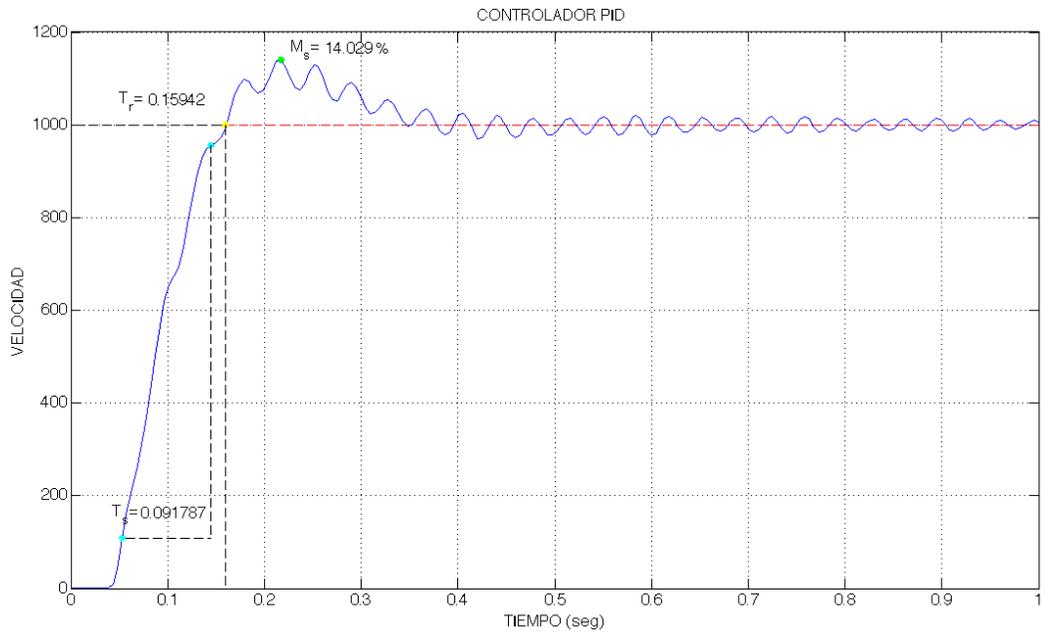
**Ilustración 18. Respuesta temporal panta-controlador: PID 5.**



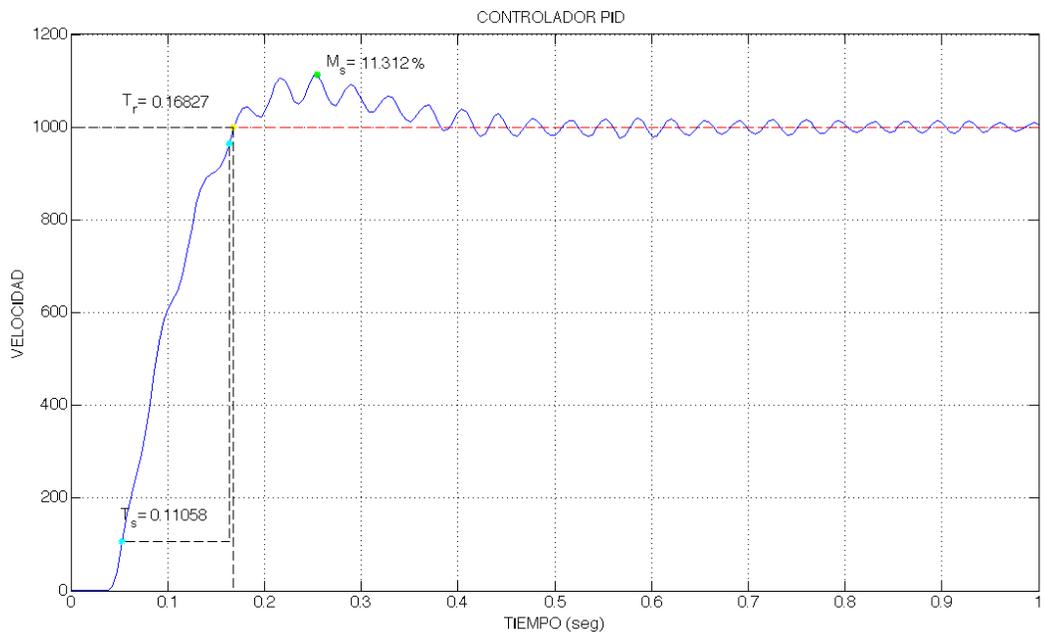
**Ilustración 19. Respuesta temporal panta-controlador: PID 5 Perturbado.**



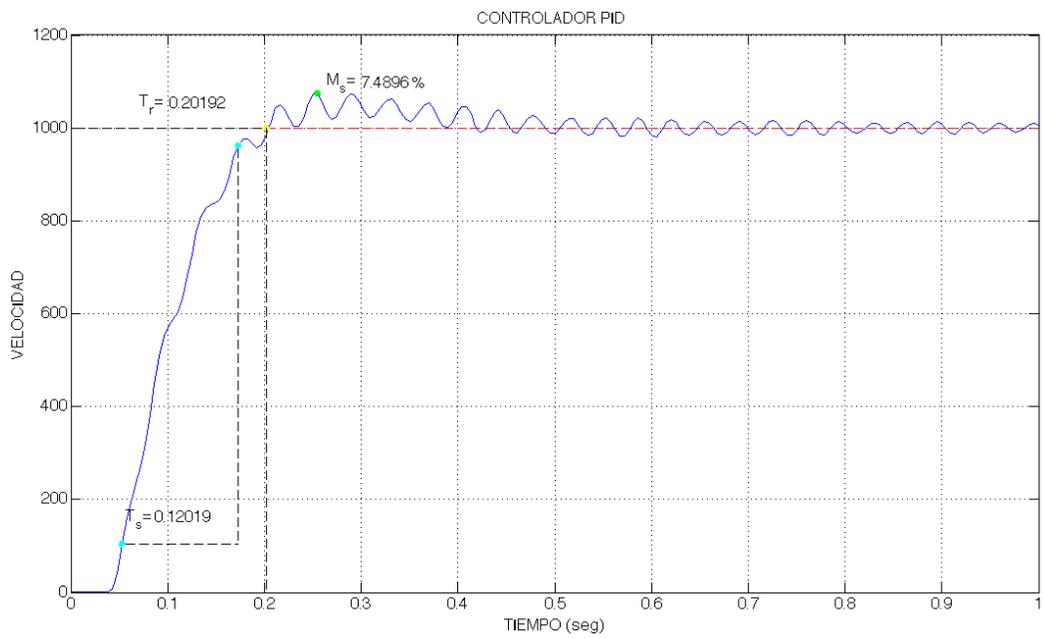
**Ilustración 20. Respuesta temporal panta-controlador: PID 5 Respuesta Escalón.**



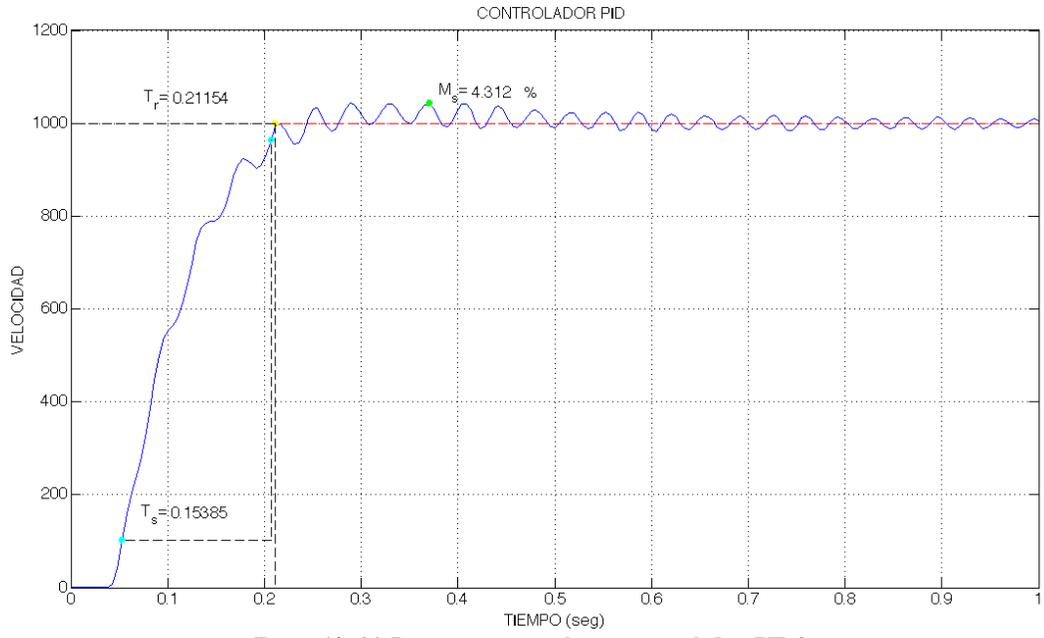
**Ilustración 21. Respuesta temporal panta-controlador: PID 6.**



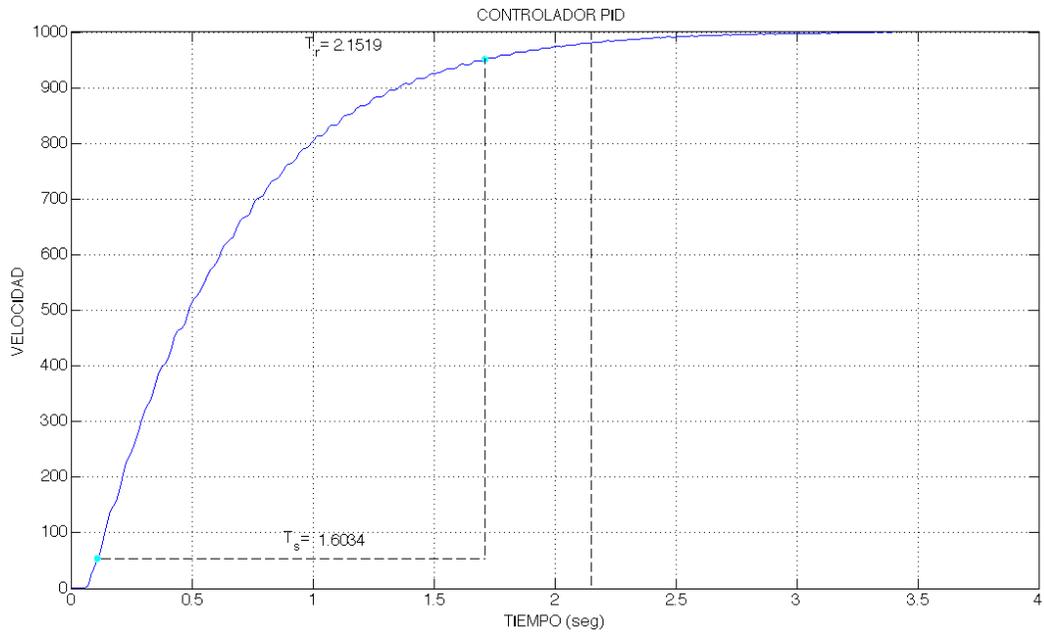
**Ilustración 22. Respuesta temporal panta-controlador: PID 7.**



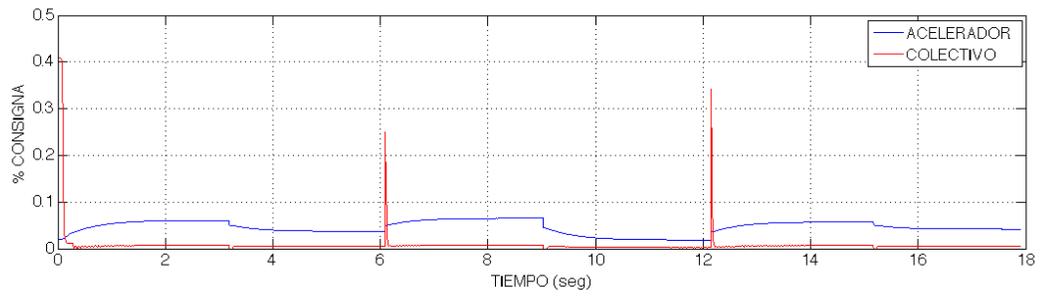
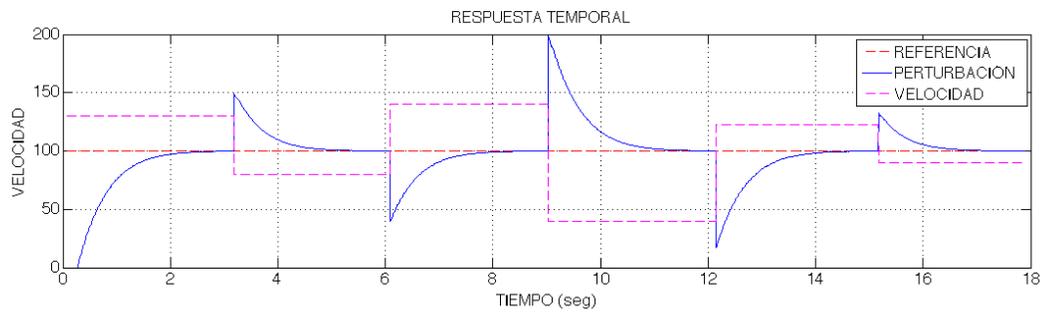
**Ilustración 23. Respuesta temporal panta-controlador: PID 8.**



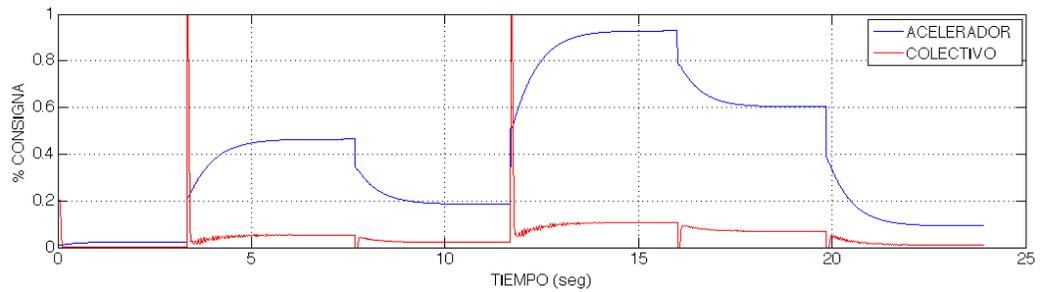
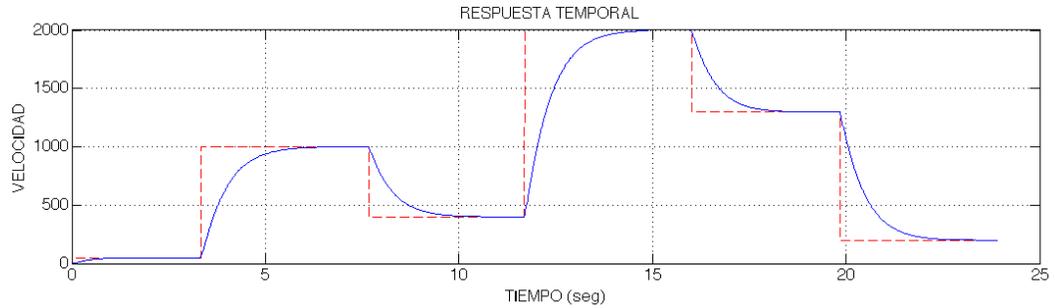
**Ilustración 24. Respuesta temporal panta-controlador: PID 9.**



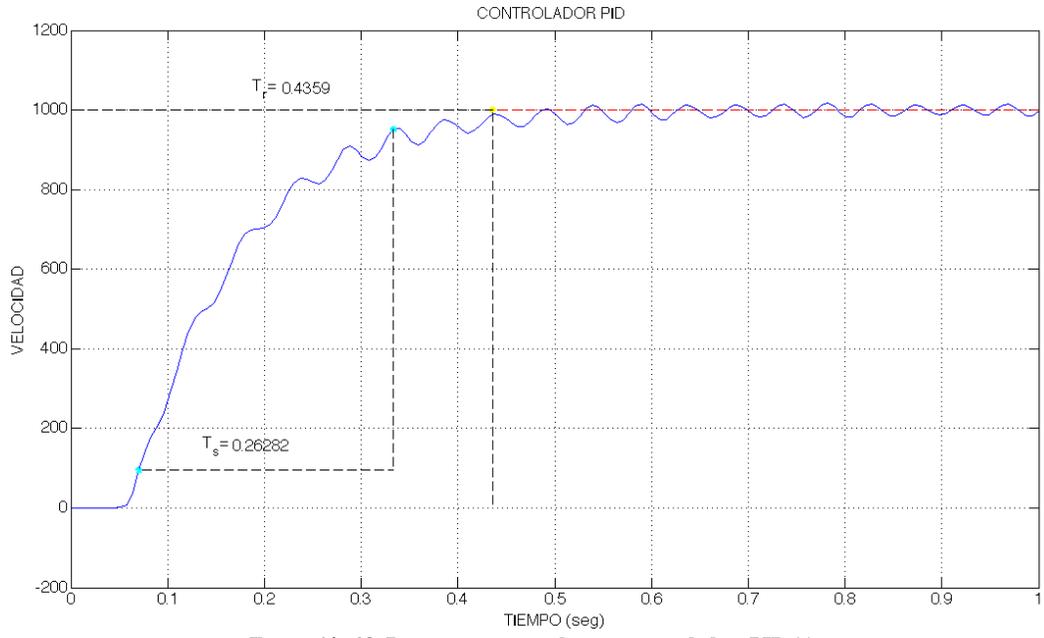
**Ilustración 25. Respuesta temporal panta-controlador: PID 10.**



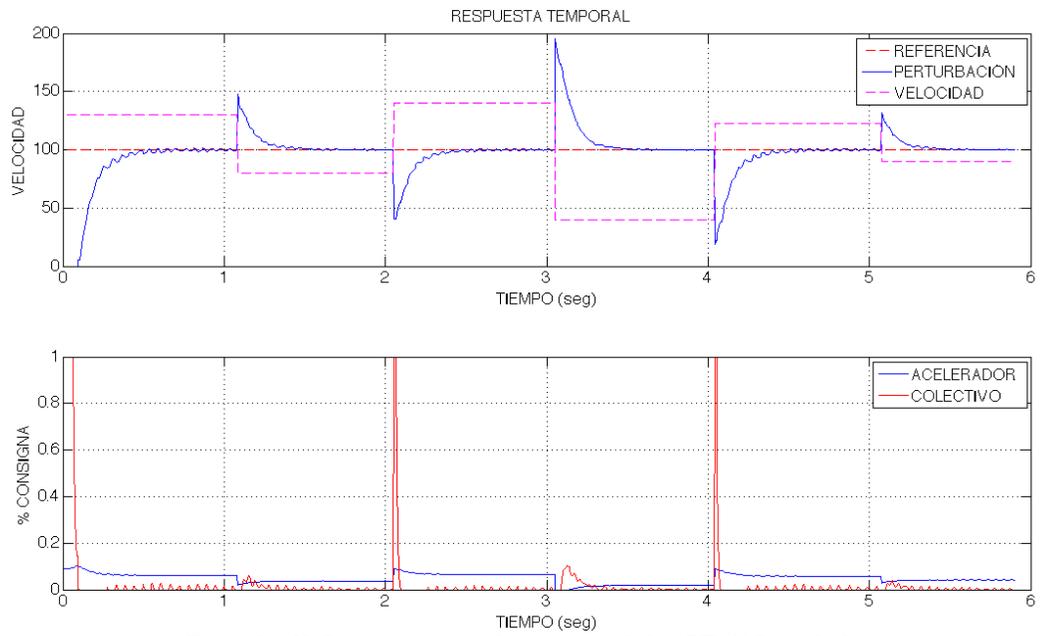
**Ilustración 26. Respuesta temporal panta-controlador: PID 10 Perturbado.**



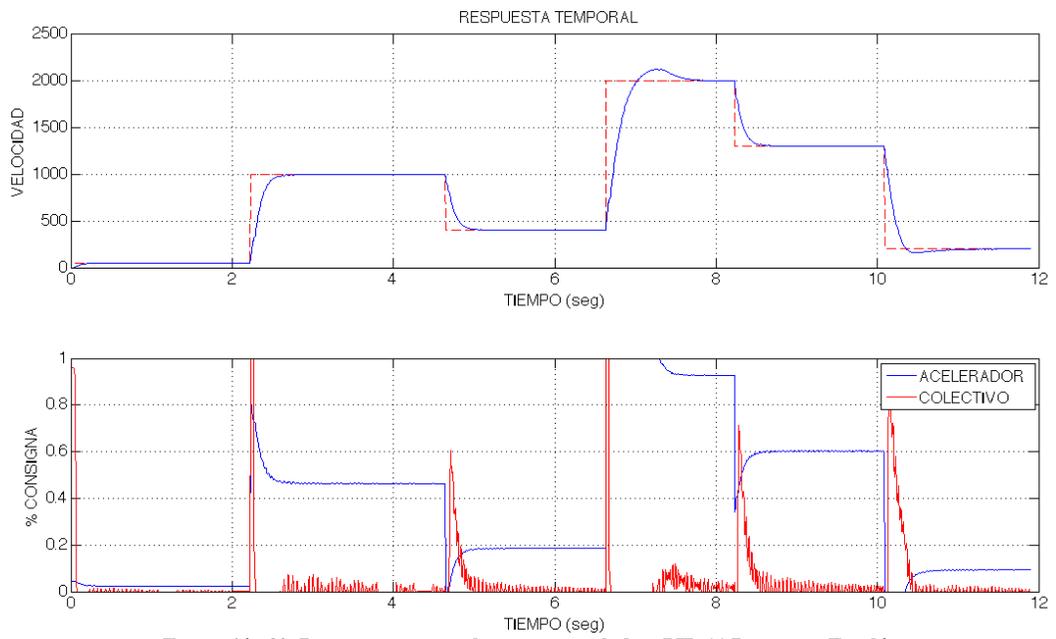
**Ilustración 27. Respuesta temporal panta-controlador: PID 10 Respuesta Escalón.**



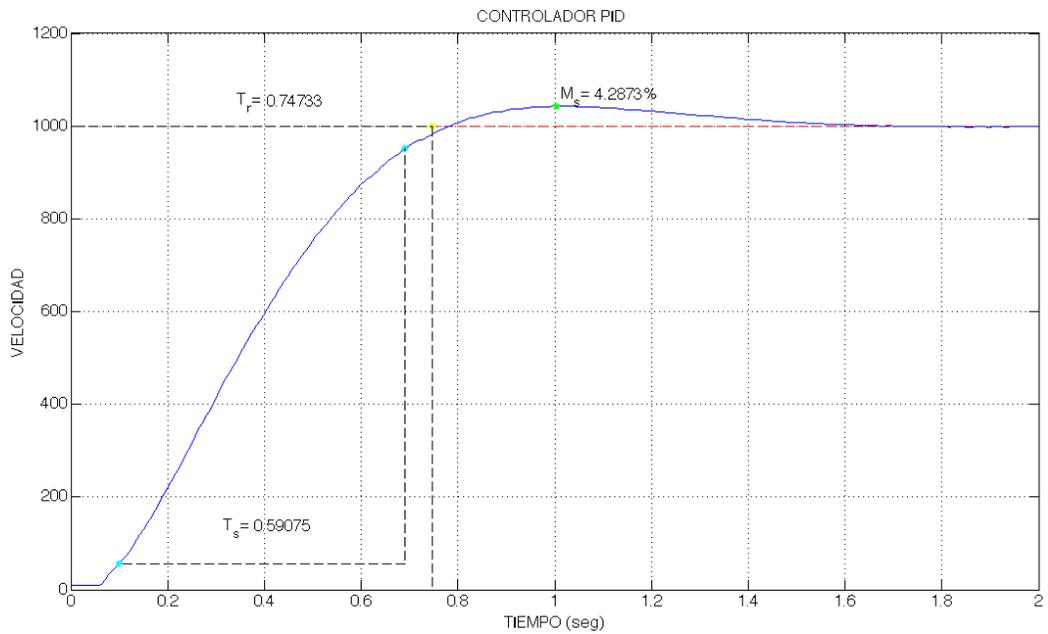
**Ilustración 28. Respuesta temporal panta-controlador: PID 11.**



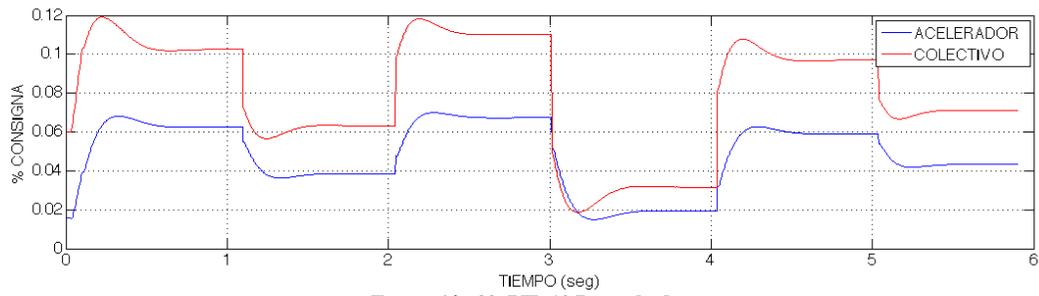
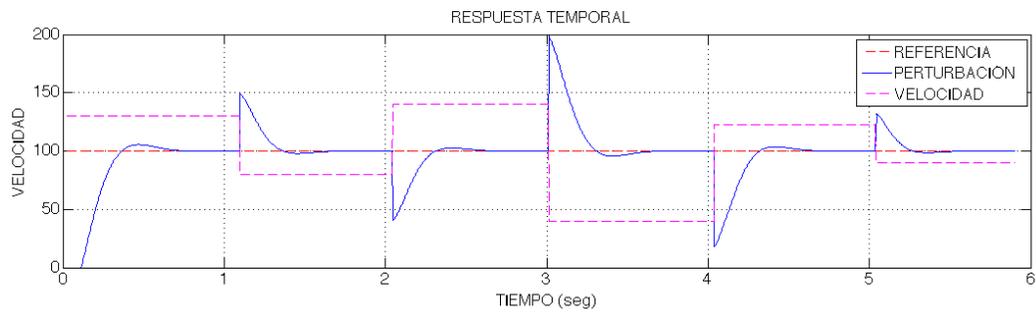
**Ilustración 29. Respuesta temporal panta-controlador: PID 11 Perturbado.**



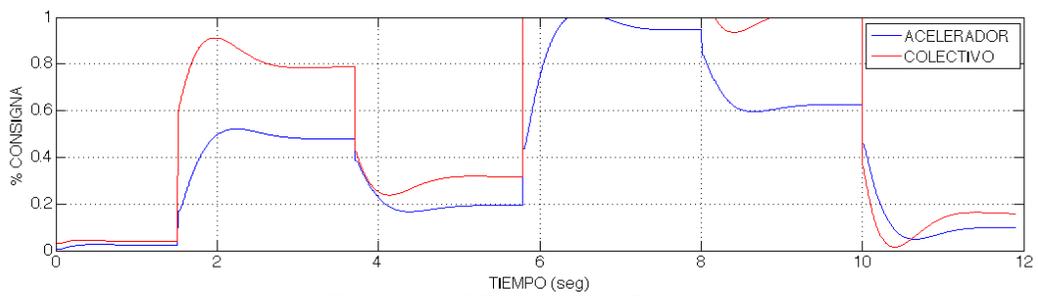
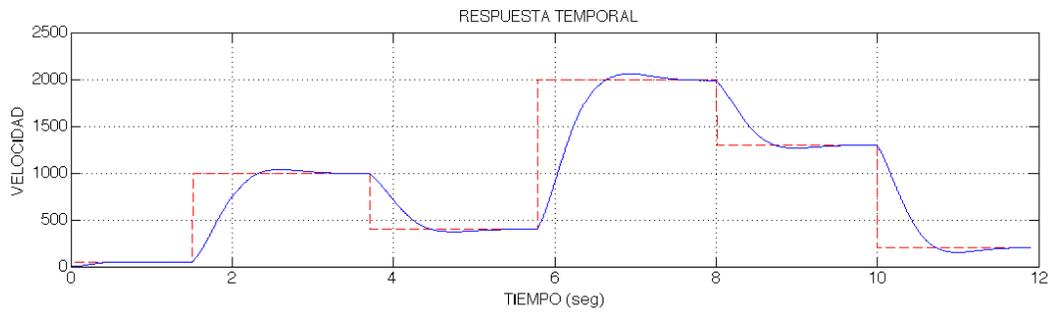
**Ilustración 30. Respuesta temporal panta-controlador: PID 11 Respuesta Escalón.**



**Ilustración 31. Respuesta temporal panta-controlador: PID 12.**



**Ilustración 32. PID 12 Perturbado.**



**Ilustración 33. PID 12 Respuesta Escalón.**



## ANEXO 8 PLANTA PARA CONTROL

El script que determina el modelo lineal para control se encuentra en el CD que se entrega con el documento; lleva el nombre de LinealizacionparaControl.m y está almacenado en la carpeta ANEXO 8: MODELO PARA CONTROL. Solo se debe ejecutar el programa, el cual entrega el modelo en espacio de estados para control y determina la controlabilidad, la observabilidad, la estabilidad y la detectabilidad.

Menú raíz del CD.

- ANEXO 8: MODELO PARA CONTROL
  - LinealizacionparaControl.m

ANEXO 9  
DISEÑO DE LA LEY DE CONTROL  $H_\infty$

El script que calcula el controlador  $H_\infty$  se encuentra en el CD que se entrega con el documento; lleva el nombre de DisenoControlador.m y está almacenado en la carpeta ANEXO 9. El programa al ejecutarse carga el modelo lineal para control almacenado en la misma carpeta con nombre ModeloparaControl.mat. El programa encuentra el controlador lo presenta, adicionalmente muestra el análisis de los valores singulares del lazo abierto planta controlador.

Menú raíz del CD.

- ANEXO 9
  - DisenoControlador.m
  - ModeloparaControl.mat

## ANEXO 10 SIMULACIÓN PLANTA-CONTROLADOR

El programa que contiene la simulación que fusiona el controlador  $H_\infty$  y los PID se encuentra en el CD que se entrega con el documento; lleva el nombre de SimulacionControlador.slx y está almacenado en la carpeta ANEXO 10. Antes de ejecutar el programa debe cargar la planta y el controlador que se encuentran también en la misma carpeta, ejecutando las funciones “load(ModeloParaControl)” y load(ControladorHinf). El propósito de la simulación es someter los controladores a perturbaciones en la salida, por tanto pueden ingresarse diferentes magnitudes y el disturbio específico.

Menú raíz del CD.

- ANEXO 10
  - SimulacionControlador.slx
  - ModeloParaControl.mat
  - ControladorHinf.mat