



**SISTEMA DE CONTROL ROBUSTO, BASADO EN CUATERNIONES,
PARA UN SATÉLITE DE ÓRBITA BAJA**

Proyecto de grado presentado como requisito parcial para optar al título
de Magíster en Ingeniería Electrónica

Autor:

Rudy Cepeda Gómez, I.E.

Director:

Luís David Prieto Martínez, PhD.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

Facultad de Ingeniería

Maestría en Ingeniería Electrónica

Bogotá D.C.

2010

A DAMARIZ

...but if your heart is strong,

hold on, I won't be late...

The Beatles, *Wait*

Índice general

1. Introducción General	1
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes	3
1.3. Objetivos	4
1.4. Metodología	4
1.5. Organización y Nomenclatura	5
2. Cuaterniones	7
2.1. Introducción	7
2.2. Definición y Álgebra	8
2.2.1. Definición	8
2.2.2. Igualdad y Suma	8
2.2.3. Multiplicación	9
2.2.4. El Conjugado Complejo	10
2.2.5. Norma	11
2.2.6. Inverso de un Cuaternión	12
2.3. Rotaciones en \mathbb{R}^3	12
2.3.1. Operador de Rotación	12
2.3.2. Ángulo y Eje de Rotación	13
2.3.3. Rotaciones y Escalamientos	14
2.4. Cinemática y Dinámica	14
2.4.1. Cinemática	14
2.4.2. Dinámica	16
2.5. Sumario	16
3. Modelos Dinámicos de un Satélite de Órbita Baja	17
3.1. Introducción	17

Índice general

3.2. Sistemas de Referencia	18
3.2.1. Sistema de Referencia Inercial	18
3.2.2. Sistema de Referencia Orbital	19
3.2.3. Sistema de Referencia de la Nave	20
3.3. Modelo Orbital	20
3.3.1. Modelo General	20
3.3.2. Caracterización de la Órbita	24
3.4. Modelo de Orientación	27
3.5. Simulaciones	28
3.5.1. Modelo Orbital	30
3.5.2. Modelo de Orientación	32
3.6. Perturbaciones Externas	34
3.6.1. Rozamiento Atmosférico	34
3.6.2. Gradiente Gravitacional	35
3.7. Sumario	35
4. Síntesis de los Controladores	37
4.1. Introducción	37
4.2. Control Orbital	38
4.2.1. Planteamiento Preliminar	38
4.2.2. Ley de Control	39
4.3. Control de Orientación	40
4.4. El Concepto de Capa Límite	42
4.5. Sumario	43
5. Implementación de los Controladores	45
5.1. Introducción	45
5.2. La herramienta de simulación <i>JaveSAT</i>	45
5.2.1. Módulo de Descripción de la Nave	46
5.2.2. Módulo de Definición de la Órbita	47
5.2.3. Módulo de Modelamiento de Sensores y Actuadores	47
5.2.4. Módulo de Síntesis y Simulación de los Controles	49
5.2.5. Módulo de Post-procesamiento	50
5.2.6. El Modelo en Simulink	50
5.3. Ejemplos de una Simulación	51
5.4. Sumario	54

6. Conclusiones y Trabajo Futuro	59
6.1. Conclusiones	59
6.2. Trabajo Futuro	60
Bibliografía	65

Índice de figuras

3.1. Sistema de referencia inercial.	18
3.2. Sistema de referencia local.	19
3.3. Sistema de referencia de la nave.	20
3.4. Parámetros de la órbita.	25
3.5. Diagrama de bloques del sistema completo.	28
3.6. Detalle del bloque de conversión del LORF al IRF	29
3.7. Diagramas de bloques de los modelos del satélite.	29
3.8. Detalle del cálculo de W	30
3.9. Órbita circular en el IRF	31
3.10. Evolución temporal de los cuaterniones en la órbita circular.	31
3.11. Comportamiento del cuaternión W con una fuerza externa.	32
3.12. Evolución temporal de los cuaterniones en la órbita elíptica.	33
3.13. Evolución temporal de los cuaterniones en el modelo de orientación.	33
4.1. Función saturación unitaria.	42
5.1. Menú principal de <i>JaveSAT</i>	46
5.2. Módulo de ingreso de los parámetros del satélite.	46
5.3. Módulo de caracterización de la órbita.	48
5.4. Módulo de modelamiento de sensores y actuadores.	48
5.5. Módulo de síntesis y simulación de los controles.	49
5.6. Módulo de post-procesamiento.	50
5.7. Modelo completo en Simulink.	51
5.8. Diagrama de bloques para la generación de perturbaciones.	52
5.9. Diagrama de bloques de los controladores.	53
5.10. Modelo de un actuador.	54
5.11. Cuaternión orbital.	54

Índice de figuras

5.12. Error del cuaternión orbital.	55
5.13. Fuerza de control.	55
5.14. Cuaternión de orientación.	56
5.15. Velocidad angular del SCRF.	56
5.16. Error del cuaternión de orientación.	57
5.17. Torque de control.	57

Índice de cuadros

3.1. Parámetros de la Órbita Circular	30
---	----

Capítulo 1

Introducción General

1.1. Introducción

En la actualidad, las aplicaciones de los satélites artificiales son numerosas: telecomunicaciones, meteorología, investigación científica, espionaje, y otras varias. Dependiendo de la tarea para la cual son diseñados, estos objetos pueden ser muy diferentes unos de otros. Pueden encontrarse a tan sólo 200 km de la superficie terrestre o pueden estar a más de 40.000 km; pueden ser muy pesados, como la estación espacial internacional, o muy ligeros, como los llamados *pico-satélites*. De cualquier manera, sin importar todas estas diferencias, las leyes físicas que rigen el movimiento de estos cuerpos en el espacio son siempre las mismas.

La importancia de un adecuado diseño de los sistemas que van a bordo del satélite es alta, pues resulta difícil y costoso corregir un error después de que la nave se encuentre en el espacio. Sin restar importancia a los demás sistemas, el control de la órbita y de la orientación del satélite es fundamental en cualquier tarea que se le asigne. Errores en el seguimiento de la órbita correcta pueden originar un fracaso en la misión y una orientación errónea puede llevar a un exceso de rozamiento atmosférico o a una inadecuada absorción de energía solar, causas que reducirían la vida útil de la nave.

Los satélites de órbita baja (*Low Earth Orbiters*, LEO) son vehículos ubicados en órbitas casi circulares, con altitudes comprendidas entre los 300 y 1500km [1]. Gracias a su baja altura se requiere poca potencia para llevarlos hasta su órbita, hecho que los convierte en el tipo de nave más comúnmente hallado alrededor de la tierra. Puesto que a la altura a la que suelen ubicarse la densidad de la atmósfera aún es apreciable, estos satélites se ven bastante afectados por rozamientos aerodinámicos que influyen tanto en su órbita como en su orientación. Estas perturbaciones son prácticamente imposibles de predecir debido a que las condiciones atmosféricas cambian continuamente. Por ello, cuando se diseña un sistema de

Capítulo 1. Introducción General

control para esta clase de vehículos, deben tenerse en cuenta dinámicas no modeladas, errores paramétricos, vibraciones y diversos factores externos, por lo cual no es apropiado hacer uso de técnicas de control que no consideren estas perturbaciones o factores desconocidos.

El punto de partida en el diseño de cualquier controlador es la obtención de un modelo matemático del sistema. Para esto, cuando se trabaja con satélites, el movimiento total se descompone en una traslación de su centro de masa, que corresponde al recorrido orbital, y una rotación alrededor de este punto, correspondiente al problema de orientación. Esta descomposición permite generar dos modelos diferentes y prácticamente desacoplados, y atacar los dos problemas por separado.

Para la obtención del modelo orbital suele utilizarse la representación vectorial tradicional de la mecánica newtoniana, ya que se puede tratar como el movimiento de una partícula. El modelo de orientación más extendido se basa en el empleo de la matriz de cosenos directores [2,3] y su evolución temporal.

Existe, sin embargo, otra forma de modelar las rotaciones en el problema de orientación y es utilizando *cuaterniones*, un conjunto numérico introducido por Sir William Rowan Hamilton [4,5] cuando buscaba extender el concepto de número complejo a más de dos dimensiones. Estos elementos, a pesar de haber sido bastante aceptados originalmente por la comunidad científica de la época (Maxwell, por ejemplo, utilizó cuaterniones para presentar su teoría electrodinámica original [6]), durante la primera mitad del siglo XX se perdió interés en ellos al desarrollarse el análisis vectorial y matricial.

No obstante esto, en la segunda mitad del siglo XX empezaron a aparecer varias aplicaciones de los cuaterniones, en diversas ramas de la ciencia y la ingeniería. Por la eficiencia con la que pueden utilizarse para representar rotaciones, han sido muy utilizados para definir la orientación de cuerpos en el espacio y en aplicaciones de realidad virtual y animación tridimensional [2]. La representación de rotaciones en el espacio tridimensional mediante cuaterniones es computacionalmente más eficiente, tanto en espacio de almacenamiento requerido como en número de operaciones necesarias, que la representación mediante matrices que se emplea comúnmente [2,3]. Además de esto, la representación de rotaciones con matrices presenta ambigüedades cuando se analizan rotaciones sucesivas, problema que el uso de cuaterniones elimina completamente.

Estos dos puntos ilustran las ventajas de emplear cuaterniones en la formulación de modelos para la dinámica de orientación de un cuerpo en el espacio. Formular el modelo orbital utilizando la misma técnica permite unificar las expresiones y simplificar el diseño del sistema de control. Estas ventajas son las que se busca explotar en el proyecto propuesto.

Este documento refleja los resultados de un proceso de investigación centrado en el mode-

lamiento y control de satélites de órbita baja. El trabajo de investigación propuesto se centró en la formulación de un modelo genérico para la dinámica orbital y de orientación de un LEO y en la síntesis de un sistema de control robusto para el mismo, utilizando como principal herramienta matemática los cuaterniones. Tanto el modelo como el sistema de control fueron validados mediante el desarrollo de un simulador basado en MATLAB.

1.2. Antecedentes

El principal objetivo propuesto consistió en el empleo de cuaterniones para el desarrollo de estos modelos, queriendo abordar algunos temas poco tratados anteriormente en la Pontificia Universidad Javeriana: a parte del trabajo de grado de la maestría en hidrosistemas de Jorge Escobar [7], quien empleó cuaterniones para modelar el comportamiento dinámico de los fluidos, y de la experiencia del profesor Luis D. Prieto, quien en su tesis de doctorado [1,8,9] trabajó en el modelamiento y control del satélite GOCE [10–12] de la Agencia Espacial Europea, no existen en la PUJ trabajos previos que aborden alguna de estas dos áreas.

A nivel mundial, sin embargo, son múltiples los trabajos que se encuentran en estos dos campos. Como ya se mencionó, los cuaterniones han encontrado gran cantidad de aplicaciones en física e ingeniería, especialmente cuando se trabaja sobre aspectos geométricos de espacios tridimensionales [2]. La literatura sobre control de satélites es copiosa, pues este campo se ha desarrollado de manera bastante rápida durante los últimos 50 años [3].

Los trabajos en los que se fusionan las dos áreas, es decir, aquellos en los que se utilizan cuaterniones para expresar la dinámica de naves espaciales y sintetizar leyes de control para las mismas, también son variados, pero en casi todos se utilizan cuaterniones en el problema del control de la orientación de los satélites, en donde el movimiento es rotacional, dejando el problema traslacional para ser trabajado con análisis vectorial tradicional [2, 13–15]. Sin embargo, los cuaterniones se han empleado muy poco para realizar el modelamiento orbital y en muchos casos, por ejemplo [16–18], se trata de desarrollos con un enfoque más teórico que práctico, por lo que su aplicabilidad no es muy alta. El trabajo de D. Andreis [19–21] es el primero en el que se realiza una completa descripción de la cinemática y la dinámica orbital de una partícula utilizando cuaterniones, descripción adecuada para ser utilizada en aplicaciones prácticas.

El presente trabajo toma como punto de partida los desarrollos de Andreis para órbitas circulares y los expande, para llegar a un modelo completo de órbita y orientación. Además, se sintetizaron leyes de control no lineales a partir de los modelos basados en cuaterniones, creando una diferencia con respecto a [21], en donde se utilizó un modelo clásico, basado en

ecuaciones de Euler-Hill, para sintetizar una ley de control basada en técnicas EMC.

Todas estas consideraciones teóricas fueron verificadas mediante la creación de una herramienta de simulación, basada en MATLAB, similar a aquella creada por Prieto en [1] o a la *toolbox* desarrollada por Lovera [22] basada en el lenguaje *Modellica*. Herramientas de este tipo son de gran interés, tanto para la comunidad académica como para la industria.

1.3. Objetivos

Originalmente, los objetivos que se propusieron para el trabajo de grado incluían el empleo de controladores lineales basados en técnicas H_∞ . Sin embargo, a medida que se fue avanzando en el proceso de investigación, se encontraron características particulares de los modelos dinámicos desarrollados que desaconsejaron el empleo de controladores no lineales. Fue por esto que se requirió un cambio de objetivos. Tras este cambio, los objetivos finalmente aprobados por el comité de maestría fueron los siguientes:

Objetivo General

Diseñar el sistema de control de órbita y orientación para un satélite de órbita baja, utilizando un modelo basado en cuaterniones y técnicas de control no lineales.

Objetivos Específicos

- Obtener un modelo completo de la dinámica orbital y de orientación de un LEO basado en cuaterniones.
- Definir una estructura y modelo de incertidumbre para la planta que refleje los rangos para los cuales es necesario garantizar condiciones de estabilidad y desempeño en el sistema.
- Sintetizar un sistema de control robusto de órbita y de orientación para un LEO utilizando técnicas no lineales.
- Validar el modelo y el sistema de control a través de su implementación en un simulador.

1.4. Metodología

La metodología utilizada durante el desarrollo del trabajo de investigación estuvo basada en una aplicación directa del método científico hipotético deductivo. A partir de la revisión

de diversas fuentes bibliográficas, se condensó una propuesta para la solución del problema de control de satélites de órbita baja.

Una extensa revisión bibliográfica proporcionó información suficiente acerca de los temas del trabajo. Con esta información, se formularon hipótesis sobre la manera en que debe realizarse modelamiento de la dinámica del satélite. La verificación de estas hipótesis se realizará mediante la simulación de modelos en un computador. Un procedimiento similar se realizó para la síntesis de los controladores. Diferentes formulaciones fueron propuestas, algunas de las cuales se rechazaron debido a diferentes inconvenientes.

El proyecto se desarrolló en tres fases. La primera de ellas fue un proceso de documentación inicial, del que se obtuvieron las especificaciones que permitieron formular con claridad los objetivos del trabajo. Una vez concluida esta primera etapa, cuyo principal resultado fue el anteproyecto, se procedió a iniciar la formulación del modelo de la dinámica orbital y de orientación de un satélite genérico. Con el modelo desarrollado, intentó formular un problema de control lineal, el cual demostró ser inviable, tal como se mencionó en el informe parcial. Los objetivos del proyecto fueron entonces replanteados y una nueva técnica de control se estudió. Con ellos se logró la solución del problema propuesto. Finalmente, el modelo y el algoritmo de control se probaron en un simulador basado en un computador de escritorio.

1.5. Organización y Nomenclatura

La organización de este documento es la siguiente: el capítulo 2 presenta un breve resumen acerca de los cuaterniones y sus operaciones básicas, el capítulo 3 desarrolla los modelos dinámicos del satélite, utilizando como principal herramienta el álgebra de cuaterniones; la síntesis de las leyes de control basadas en técnicas no lineales es el tema del capítulo 4, en el capítulo 5 se muestran los resultados del empleo de los modelos y las leyes de control previamente estudiadas, a la vez que se introduce la herramienta software desarrollada para la simulación de estos modelos. Finalmente, se presenta un último capítulo con las conclusiones del trabajo y posibles direcciones para continuar avanzando en esta área.

A lo largo del reporte, se utilizarán caracteres en cursiva como r , R , U , para representar cantidades escalares y cuaterniones (el contexto permite separar unos de otros), mientras que los vectores y matrices serán representados por letras en negrilla \mathbf{F} , \mathbf{g} , etc. Los símbolos no convencionales o aquellos que se estén empleando de manera diferente a su definición convencional serán aclarados cuando sea necesario. Las unidades utilizadas corresponden a aquellas del Sistema Internacional.

Capítulo 2

Cuaterniones

2.1. Introducción

Los cuaterniones son un conjunto numérico introducido por Sir William Rowan Hamilton a mediados del siglo XIX [4,5]. Lo que Hamilton buscaba en la época era extender el concepto de número complejo a más de dos dimensiones, lo que logró sacrificando la conmutatividad de la multiplicación.

El conjunto de los cuaterniones, con las operaciones de suma y multiplicación definidas entre ellos, forma un sistema matemático conocido como *anillo de división no conmutativo*. Este título enfatiza el hecho de que el producto de cuaterniones, en general, no es conmutativo y también que para cada elemento diferente de cero existe un inverso multiplicativo.

La no conmutatividad de la multiplicación entre cuaterniones imposibilitó el desarrollo de una teoría de *funciones de variable cuaternia* [23], hecho que llevó a que la aplicación de los cuaterniones en la matemática resultara poco significativa.

Los cuaterniones, sin embargo, probaron ser especialmente útiles para la representación de rotaciones en espacios tridimensionales, tarea en la que resultan más eficientes que las matrices de rotación habituales. Por esta razón han sido utilizados en aplicaciones relacionadas con el control de orientación de vehículos tales como aeronaves, submarinos, naves espaciales y similares, y en animación tridimensional y realidad virtual.

El propósito de este capítulo es presentar una introducción general acerca de este conjunto numérico. En las secciones siguientes se presentan una definición básica, el álgebra elemental de los cuaterniones y sus aplicaciones a las rotaciones. Como principal referencia para profundizar en este material, se sugiere el libro de Jack Kuipers [2].

2.2. Definición y Álgebra

2.2.1. Definición

Un cuaternión, como lo sugiere el nombre, consiste en un cuarteto de números reales, esto es, un elemento de \mathbb{R}^4 , representado como:

$$Q = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$$

con $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$. El conjunto de los cuaterniones se designa con la letra \mathbb{H} .

Otra manera habitual de representar a un cuaternión es definiendo una *parte real*, un escalar cualquiera $q_0 \in \mathbb{R}$, y una *parte vectorial* $\mathbf{q} = \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \in \mathbb{R}^3$, siendo \mathbf{i}, \mathbf{j} y \mathbf{k} la base ortonormal estándar en \mathbb{R}^3 . El cuaternión será la suma entre la parte real y la parte vectorial:

$$Q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$$

Si se piensa en \mathbf{i}, \mathbf{j} y \mathbf{k} no como vectores sino como unidades imaginarias, se comprende por qué a los cuaterniones se les denomina números *hipercomplejos de rango 4*.

La representación del cuaternión como la suma de una parte real y una parte vectorial permite ver que, de la misma manera en que \mathbb{R} y \mathbb{R}^3 son subconjuntos de \mathbb{R}^4 , lo serán de \mathbb{H} . Los reales corresponden a cuaterniones con parte vectorial cero, de la forma $Q = q_0 + \mathbf{0}$. Los vectores en \mathbb{R}^3 corresponden a cuaterniones con parte escalar cero, de la forma $Q = 0 + \mathbf{q}$. A estos últimos elementos también se les conoce como *cuaterniones puros*.

Siendo la suma de un escalar y un vector, un cuaternión resulta ser un elemento matemático extraño, algo no definido en el álgebra lineal convencional. Para comprender un poco mejor su comportamiento y utilidad, es conveniente definir las reglas que rigen su operación.

2.2.2. Igualdad y Suma

Dada la correspondencia biunívoca existente entre los elementos de \mathbb{R}^4 y los elementos de \mathbb{H} , se deriva que la igualdad y la suma y resta de cuaterniones se definen de la misma forma en que se definen para vectores en \mathbb{R}^4 . De esta manera, si $P = p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3$ y $Q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ son dos cuaterniones, se tiene:

$$P = Q \iff p_0 = q_0 \wedge p_1 = q_1 \wedge p_2 = q_2 \wedge p_3 = q_3$$

La suma (o resta) de dos cuaterniones es el resultado de sumar (o restar) término a término sus componentes:

$$\begin{aligned} R = P + Q &= (p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3) \pm (q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3) \\ R &= (p_0 \pm q_0) + \mathbf{i}(p_1 \pm q_1) + \mathbf{j}(p_2 \pm q_2) + \mathbf{k}(p_3 \pm q_3) \end{aligned}$$

La suma entre cuaterniones hereda las propiedades de la suma de vectores. Eso quiere decir que esta operación es clausurativa (la suma de dos cuaterniones es otro cuaternión), conmutativa (no importa el orden al sumar cuaterniones) y asociativa (la suma de más de dos cuaterniones puede realizarse sumando cualquier pareja primero). Además de esto, puede definirse un elemento nulo (un cuaternión cuyas 4 componentes son cero) que hará las veces de módulo para la suma. Es decir, cualquier cuaternión al sumarse con este elemento nulo dará como resultado el mismo cuaternión. También existe, para cada cuaternión Q , un inverso aditivo o negativo $-Q$ (cuyas componentes son simplemente el negativo de la componente correspondiente en el cuaternión Q), que al sumarse con Q produce como resultado el módulo de la suma, es decir, el cuaternión nulo.

2.2.3. Multiplicación

Producto por un Escalar

Antes de definir la multiplicación entre cuaterniones, se definirá primero el producto entre un cuaternión y un escalar. Esta operación, también heredada de \mathbb{R}^4 , es similar al producto entre un vector y un escalar:

$$cQ = cq_0 + \mathbf{i}cq_1 + \mathbf{j}cq_2 + \mathbf{k}cq_3$$

donde $c \in \mathbb{R}$.

Producto entre Cuaterniones

La definición del producto entre dos cuaterniones es un poco más complicada. Para poder definirla, Hamilton [4] introdujo estos productos especiales fundamentales¹:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{i}^2 &= -1 & \mathbf{j}^2 &= -1 & \mathbf{k}^2 &= -1 \\
 \mathbf{ij} &= \mathbf{k} & \mathbf{jk} &= \mathbf{i} & \mathbf{ki} &= \mathbf{j} \\
 \mathbf{ji} &= -\mathbf{k} & \mathbf{kj} &= -\mathbf{i} & \mathbf{ik} &= -\mathbf{j} \\
 \mathbf{ijk} &= -1
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Puesto que estos productos elementales son no conmutativos, el producto entre cuaterniones, en general, será no conmutativo.

¹Estos productos, aunque efectuados con elementos de la base estándar en \mathbb{R}^3 , son productos entre cuaterniones. No deben confundirse con los productos punto y cruz entre vectores.

Capítulo 2. Cuaterniones

El producto entre dos cuaterniones, que se denotará con el símbolo \otimes , se efectúa multiplicando término a término los factores:

$$\begin{aligned}
 R &= P \otimes Q = (p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3)(q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3) \\
 R &= p_0q_0 + \mathbf{i}p_0q_1 + \mathbf{j}p_0q_2 + \mathbf{k}p_0q_3 + \mathbf{i}p_1q_0 \\
 &\quad + \mathbf{i}p_1q_0 + \mathbf{i}^2p_1q_1 + \mathbf{ij}p_1q_2 + \mathbf{ik}p_1q_3 \\
 &\quad + \mathbf{j}p_2q_0 + \mathbf{ji}p_2q_1 + \mathbf{j}^2p_2q_2 + \mathbf{jk}p_2q_3 \\
 &\quad + \mathbf{k}p_3q_0 + \mathbf{ki}p_3q_1 + \mathbf{kj}p_3q_2 + \mathbf{k}^2p_3q_3
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Aplicando la definición de los productos fundamentales (2.1) y reagrupando términos semejantes, la expresión anterior se convierte en:

$$\begin{aligned}
 R &= p_0q_0 - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + \\
 &\quad \mathbf{i}(p_0q_1 + p_1q_0) + \mathbf{j}(p_0q_2 + p_2q_0) + \mathbf{k}(p_0q_3 + p_3q_0) + \\
 &\quad \mathbf{i}(p_1q_2 - p_2q_1) + \mathbf{j}(p_3q_1 - p_1q_3) + \mathbf{k}(p_2q_3 - p_3q_2)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Una manera de expresar la multiplicación entre cuaterniones de manera más concisa aprovecha las definiciones de parte real y parte vectorial. Si los dos cuaterniones a operar son $P = p_0 + \mathbf{p}$ y $Q = q_0 + \mathbf{q}$, el producto entre éstos estará dado por:

$$R = P \otimes Q = p_0q_0 - \mathbf{p} \bullet \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$$

en donde \bullet y \times representan, respectivamente, los productos punto y cruz definidos en el álgebra de vectores en \mathbb{R}^3 .

Como puede verse, la multiplicación entre cuaterniones es clausurativa. Puede demostrarse que también es asociativa, pero esto es un ejercicio tedioso que requiere una fuerte manipulación algebraica de vectores². Esta operación también es distributiva con respecto a la suma. Existe también un módulo para la multiplicación, el cual consiste en el cuaternión cuya parte real es 1 y cuya parte vectorial es el vector nulo. Como ya se mencionó, el producto entre cuaterniones no es conmutativo.

2.2.4. El Conjugado Complejo

De la misma forma en que para los números complejos ordinarios, se define el conjugado complejo de un cuaternión Q , denotado como Q^* , como el cuaternión que tiene la misma

²El lector interesado en esta demostración puede remitirse al libro de J. Kuipers [2]

parte real que Q y cuya parte vectorial corresponde al negativo de la de Q . Es decir, si $Q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$, su conjugado complejo será:

$$Q^* = q_0 - \mathbf{q} = q_0 - \mathbf{k}q_1 - \mathbf{j}q_2 - \mathbf{k}q_3$$

La suma de un cuaternión y su conjugado produce como resultado un escalar. El producto de un cuaternión con su conjugado, también produce como resultado un escalar.

El conjugado complejo de un producto entre cuaterniones es igual al producto de los complejos conjugados pero en orden inverso. Es decir:

$$(P \otimes Q)^* = Q^* \otimes P^*$$

2.2.5. Norma

La norma o magnitud de un cuaternión es un concepto asociado con una longitud. Se denota por $N(Q)$ o $\|Q\|$ y corresponde al escalar dado por:

$$\|Q\| = \sqrt{Q \otimes Q^*}$$

De esta definición se concluye que $Q \otimes Q^* = Q^* \otimes Q = \|Q\|^2$.

La norma de un cuaternión puede evaluarse de la misma manera que la norma euclidiana de un vector en \mathbb{R}^4 :

$$\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Cuando un cuaternión tiene norma igual a 1 se denomina *cuaternión unitario* y suele representarse con un acento: \hat{Q} . Los cuaterniones unitarios son de especial importancia por ser los que se emplean para representar rotaciones.

La norma del producto entre dos cuaterniones es igual al producto de las normas individuales. Esto puede demostrarse:

$$\begin{aligned} N^2(P \otimes Q) &= (P \otimes Q)(P \otimes Q)^* \\ &= P \otimes Q \otimes Q^* \otimes P^* \\ &= N^2(Q) P \otimes P^* \\ &= N^2(Q) N^2(P) \end{aligned}$$

Lo anterior implica que el producto entre dos cuaterniones unitarios será otro cuaternión unitario, resultado que será de gran utilidad más adelante.

2.2.6. Inverso de un Cuaternión

Ahora que se han definido el conjugado complejo y la norma de los cuaterniones puede definirse el inverso de un cuaternión. Siendo el cuaternión $1 + \mathbf{0}$ el módulo de la multiplicación, el producto de un cuaternión Q con su inverso Q^{-1} , por definición, debe ser igual a este módulo. Se tiene entonces:

$$Q^{-1} \otimes Q = 1 + \mathbf{0}$$

Si se multiplican ambos miembros de esta expresión por Q^* :

$$Q^{-1} \otimes Q \otimes Q^* = Q^*$$

Y teniendo en cuenta que $Q \otimes Q^* = \|Q\|^2$, se llega a:

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|}$$

Procediendo de manera similar, puede demostrarse que la multiplicación entre un cuaternión y su inverso es uno de los pocos casos en que esta operación conmuta. Es decir, $Q \otimes Q^{-1} = Q^{-1} \otimes Q = 1 + \mathbf{0}$. Otra propiedad especial del inverso es que para un cuaternión unitario su inverso es igual a su conjugado: $\widehat{Q}^{-1} = \widehat{Q}^*$. Este es un resultado similar al que se tiene para las matrices ortogonales, donde $A^{-1} = A^T$.

2.3. Rotaciones en \mathbb{R}^3

Como se mencionó en la introducción, la principal aplicación de los cuaterniones, y lo que evitó que cayeran en desuso, es su empleo para representar rotaciones en espacios tridimensionales. En esta sección se presenta la forma en que se representa una rotación utilizando cuaterniones.

Antes de definir el operador de rotación con cuaterniones, es conveniente recordar que, según se mencionó en la sección 2.2.1, los vectores en \mathbb{R}^3 pueden representarse como cuaterniones puros. Por lo tanto, cada vez que se presente un vector en una operación que incluya cuaterniones, se asumirá que este vector está representado por el cuaternión puro equivalente.

2.3.1. Operador de Rotación

El operador de rotación que se busca definir debe cumplir las dos siguientes características fundamentales:

- Si se aplica sobre un vector (cuaternión puro) el resultado debe ser otro vector (cuaternión puro)

- La norma del vector sobre el cual se aplique el operador debe permanecer inalterada tras la transformación

La primera característica surge de la necesidad de que el resultado de rotar un vector sea otro vector. La segunda se debe a que las rotaciones, por definición, son transformaciones ortogonales, transformaciones que preservan inalteradas las distancias.

Sea \widehat{Q} un cuaternión unitario. La operación:

$$\mathbf{w} = \widehat{Q} \otimes \mathbf{v} \otimes \widehat{Q}^* \quad (2.4)$$

que transforma un vector \mathbf{v} en otro vector \mathbf{w} sin alterar su norma representa una rotación [2,14]. Si el orden de los productos se altera,

$$\mathbf{u} = \widehat{Q}^* \otimes \mathbf{v} \otimes \widehat{Q} \quad (2.5)$$

se obtiene otra forma de definir un rotación. La diferencia entre los operadores de las ecuaciones (2.4) y (2.5) radica en la forma en que se definan la referencia y el sentido de giro.

Si (2.4) representa una rotación por cierto ángulo alrededor de un eje en dirección positiva (cualquiera que sea la definición de dirección positiva), la expresión (2.5) representará una rotación por el mismo ángulo y alrededor del mismo eje en dirección negativa.

Por otro lado, si en ambos casos se asumen direcciones de giro positivas, una ecuación representará un giro del vector con respecto a un sistema de referencia estacionario, mientras la otra indicará un giro del sistema de referencia, manteniéndose estáticos los vectores. Esta situación es similar a la que se presenta cuando se utilizan matrices de rotación: si A representa una de vectores, A^T representará una rotación de ejes.

El tipo de rotación representado por (2.4) o (2.5) estará definido en cada aplicación particular. La diferencia entre utilizar uno u otro para definir el tipo (rotación de vectores o rotación de ejes) y sentido de cada transformación se presenta únicamente en el signo de los ángulos involucrados.

2.3.2. Ángulo y Eje de Rotación

Según el teorema de rotaciones de Euler, para representar la orientación de dos sistemas coordenados se requieren mínimo cuatro parámetros. Estos cuatro parámetros corresponden con los elementos de un cuaternión unitario [14], que puede ser expresado en la forma:

$$\widehat{Q} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.6)$$

en donde \mathbf{u} es un vector unitario en \mathbb{R}^3 . Esta notación indica que el cuaternión unitario \widehat{Q} en (2.6) representará una rotación por un ángulo θ alrededor del eje dado por \mathbf{u} .

2.3.3. Rotaciones y Escalamientos

Si en lugar de utilizar un cuaternión unitario \widehat{Q} se emplea uno con norma no unitaria en las ecuaciones (2.4) o (2.5), se obtiene un cuarto grado de libertad para el operador. Cualquier cuaternión no unitario puede factorizarse como el producto de su norma y un cuaternión unitario así: $Q = \|Q\| \widehat{Q}$. Si este cuaternión se emplea en el operador de rotación se tendrá:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= Q \otimes \mathbf{v} \otimes Q^* \\ \mathbf{w} &= \|Q\| \widehat{Q} \otimes \mathbf{v} \otimes \|Q\| \widehat{Q}^* \\ \mathbf{w} &= \|Q\|^2 \left(\widehat{Q} \otimes \mathbf{v} \otimes \widehat{Q}^* \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Se tiene entonces que un cuaternión no unitario Q , expresado como:

$$Q = \|Q\| \widehat{Q} = \|Q\| \left(\cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

representará una rotación por un ángulo θ alrededor del eje definido por \mathbf{u} y una escalamiento por un factor $\|Q\|^2$ de manera simultánea.

2.4. Cinemática y Dinámica

Dado que el espacio de cuaterniones contiene al espacio de vectores tridimensionales, las cantidades físicas como velocidad, aceleración, desplazamiento y momentum, tanto lineales como angulares, pueden entenderse como cuaterniones puros y sus expresiones en forma de cuaternión pueden hallarse. En esta sección se presenta un conjunto de algoritmos necesario para poder estudiar y desarrollar modelos basados en cuaterniones para sistemas dinámicos.

2.4.1. Cinemática

Considérense dos vectores \mathbf{r}_o y \mathbf{r}_i , los cuales pueden ser relacionados por una rotación y un escalamiento mediante el empleo de un cuaternión Q según (2.7). Se tiene entonces que:

$$\mathbf{r}_o = Q \otimes \mathbf{r}_i \otimes Q^* \quad (2.8)$$

$$\mathbf{r}_i = (Q)^{-1} \otimes \mathbf{r}_o \otimes (Q^*)^{-1} \quad (2.9)$$

Derivando (2.8):

$$\dot{\mathbf{r}}_o = \dot{Q} \otimes \mathbf{r}_i \otimes Q^* + Q \otimes \mathbf{r}_i \otimes \dot{Q}^* + Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* \quad (2.10)$$

y sustituyendo (2.9) en (2.10):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_o &= \dot{Q} \otimes Q^{-1} \otimes \mathbf{r}_o \otimes (Q^*)^{-1} \otimes Q^* + Q \otimes Q^{-1} \otimes \mathbf{r}_o \otimes (Q^*)^{-1} \otimes \dot{Q}^* + Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* \\ \dot{\mathbf{r}}_o &= \dot{Q} \otimes Q^{-1} \otimes \mathbf{r}_o + \mathbf{r}_o \otimes (Q^*)^{-1} \otimes \dot{Q}^* + Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* \end{aligned} \quad (2.11)$$

Si se toma la derivada de $Q \otimes Q^{-1} = 1$, se tendrá $\dot{Q} \otimes Q^{-1} + Q \otimes (\dot{Q}^{-1}) = 0$. A partir de este resultado, puede definirse un cuaternión W tal que $W = \dot{Q} \otimes Q^{-1} = -Q \otimes (\dot{Q}^{-1})$ o

$$\dot{Q} = W \otimes Q \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.12) en (2.11), se llega a:

$$\dot{\mathbf{r}}_o = W \otimes \mathbf{r}_o + \mathbf{r}_o \otimes W^* + Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* \quad (2.13)$$

El cuaternión W se conoce como *velocidad angular generalizada*. La componente escalar del cuaternión W relaciona la derivada de la magnitud de Q con la magnitud actual de Q , es decir, $w = \|\dot{Q}\|/\|Q\|$. Para demostrar esto, se realiza primero la expansión de (2.12) así:

$$\dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = W \otimes Q = \begin{bmatrix} w_0 q_0 - w_1 q_1 - w_2 q_2 - w_3 q_3 \\ w_1 q_0 + w_0 q_1 - w_3 q_2 + w_2 q_3 \\ w_2 q_0 + w_3 q_1 + w_0 q_2 - w_1 q_3 \\ w_3 q_0 - w_2 q_1 + w_1 q_2 + w_0 q_3 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Partiendo de la definición de norma, la derivada será:

$$\|\dot{Q}\| = \frac{q_0 \dot{q}_0 + q_1 \dot{q}_1 + q_2 \dot{q}_2 + q_3 \dot{q}_3}{\|Q\|} \quad (2.15)$$

Si se utiliza el resultado de (2.14) en (2.15) se llega a:

$$\|\dot{Q}\| = \frac{w_0 (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)}{\|Q\|} \quad (2.16)$$

De donde se concluye que:

$$w = w_0 = \frac{\|\dot{Q}\|}{\|Q\|} \quad (2.17)$$

El anterior resultado implica que si se trabaja con rotaciones puras, es decir, si Q es un cuaternión unitario \widehat{Q} , W será un cuaternión puro, puesto que $\|\widehat{Q}\| = 1$. En este caso, la expresión (2.13) se reduce a:

$$\dot{\mathbf{r}}_o = 2W \otimes \mathbf{r}_o + \widehat{Q} \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes \widehat{Q}^* \quad (2.18)$$

Estos sucede, por ejemplo, cuando se utilizan cuaterniones para definir la orientación de un cuerpo rígido en el espacio.

2.4.2. Dinámica

Sea el cuaternión $A = \dot{W}$. Por tratarse de la derivada de la velocidad, A se denomina *aceleración angular generalizada*. Si se deriva la expresión (2.12):

$$\ddot{Q} = \dot{W} \otimes Q + W \otimes \dot{Q} = A \otimes Q + W \otimes W \otimes Q \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) puede expresarse de manera más compacta, como $\ddot{Q} = D \otimes Q$, con la introducción de un cuaternión $D = A + W \otimes W$ que reúne los efectos de la aceleración y velocidad angulares. La segunda derivada de \mathbf{r}_o se obtiene al derivar (2.13):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_o &= A \otimes \mathbf{r}_o + W \otimes \dot{\mathbf{r}}_o + \dot{\mathbf{r}}_o \otimes W^* + \mathbf{r}_o \otimes A^* + \\ &\quad + W \otimes Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* + Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* \otimes W^* + Q \otimes \ddot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* \\ \ddot{\mathbf{r}}_o &= A \otimes \mathbf{r}_o + W \otimes W \otimes \mathbf{r}_o + W \otimes \mathbf{r}_o \otimes W^* + W \otimes Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* + \\ &\quad + W \otimes \mathbf{r}_o \otimes W^* + \mathbf{r}_o \otimes W^* \otimes W^* + Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* \otimes W^* + \mathbf{r}_o \otimes A^* + \\ &\quad + W \otimes Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* + Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* \otimes W^* + Q \otimes \ddot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* \\ \ddot{\mathbf{r}}_o &= D \otimes \mathbf{r}_o + \mathbf{r}_o \otimes D^* + 2W \otimes \mathbf{r}_o \otimes W^* + \\ &\quad + 2(W \otimes Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* + Q \otimes \dot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* \otimes W^*) + Q \otimes \ddot{\mathbf{r}}_i \otimes Q^* \end{aligned} \quad (2.20)$$

Si se consideran rotaciones puras, la ecuación (2.20) tendrá una forma similar a la ecuación clásica para el movimiento relativo. Es posible asignar significado físico a cada término de esta expresión, según se muestra en [19].

2.5. Sumario

Este capítulo es una introducción al manejo de cuaterniones, desde su definición y álgebra básica, hasta la manera en que se emplean para representar rotaciones. Se incluyeron algunas ecuaciones diferenciales para representar la cinemática y dinámica rotacional con base en estos elementos. Aunque el material contenido en este capítulo es suficiente para comprender el resto de este documento, se sugiere al lector ahondar en el tema revisando las referencias, especialmente [2, 4, 5].

Capítulo 3

Modelos Dinámicos de un Satélite de Órbita Baja

3.1. Introducción

Los satélites de órbita baja (*Low Earth Orbiters*, LEO) son vehículos ubicados en órbitas casi circulares, con altitudes comprendidas entre los 300 y 1500km [1]. Gracias a su baja altura se requiere poca potencia para llevarlos hasta su órbita, hecho que los convierte en el tipo de nave más comúnmente hallado alrededor de la tierra. Puesto que a la altura a la que suelen ubicarse la densidad de la atmósfera aún es apreciable, estos satélites se ven bastante afectados por rozamientos aerodinámicos que influyen tanto en su órbita como en su orientación. Estas perturbaciones son prácticamente imposibles de predecir debido a que las condiciones atmosféricas cambian continuamente. Por ello, cuando se diseña un sistema de control para esta clase de vehículos, deben tenerse en cuenta dinámicas no modeladas, errores paramétricos, vibraciones y diversos factores externos, por lo cual no es apropiado hacer uso de técnicas de control que no consideren estas perturbaciones o factores desconocidos.

Dentro del proceso de diseño de un controlador, el primer paso consiste en la construcción de un modelo matemático que represente el comportamiento de la planta bajo estudio. En el caso de los satélites, se construye un modelo para su movimiento de traslación alrededor de la tierra (el problema orbital) y otro para trabajar con los movimientos del satélite alrededor de su centro de masa (el problema de orientación).

Para la obtención del modelo orbital suele utilizarse la representación vectorial tradicional de la mecánica newtoniana, ya que se trata del movimiento de una partícula. El modelo de orientación más extendido se basa en el empleo de la matriz de cosenos directores [2, 3, 24–26] y su evolución temporal.

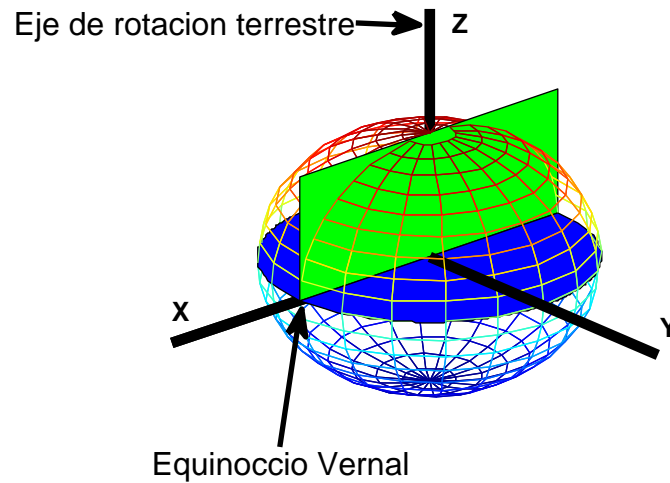


Figura 3.1: Sistema de referencia inercial o IRF . (Adaptado de [1] con autorización del autor.)

El propósito de este capítulo es presentar otra manera de obtener los modelos dinámicos, tanto de órbita como de orientación, de un satélite de órbita baja. Este método, presentado inicialmente por D. Andreis y E. Canuto [19–21], consiste en utilizar cuaterniones (ver Capítulo 2) para representar rotaciones en el modelo de orientación y rotaciones y escalamientos en el modelo orbital. Las siguientes secciones presentan la forma en que se obtiene este modelo. No se hará una explicación detallada de las ecuaciones dinámicas convencionales, las cuales pueden encontrarse en las referencias [1, 3, 24–26].

3.2. Sistemas de Referencia

Con el fin de definir el modelo matemático del movimiento del satélite, es necesario introducir un conjunto de sistemas de coordenadas que permitan integrar fácilmente los fenómenos involucrados. En los problemas de control de naves espaciales, usualmente se utilizan 3 sistemas de coordenadas: un sistema de referencia inercial, un sistema de referencia orbital y un sistema de referencia de la nave [3]. A continuación se describen cada uno de estos sistemas y cómo se definirán en este trabajo.

3.2.1. Sistema de Referencia Inercial

El sistema de referencia inercial, IRF (*Inertial Reference Frame*), se utiliza para definir la posición absoluta de la nave. Para propósitos prácticos, un sistema geocéntrico puede utilizarse como IRF gracias al movimiento casi circular y desacelerado de la tierra alrededor del sol.

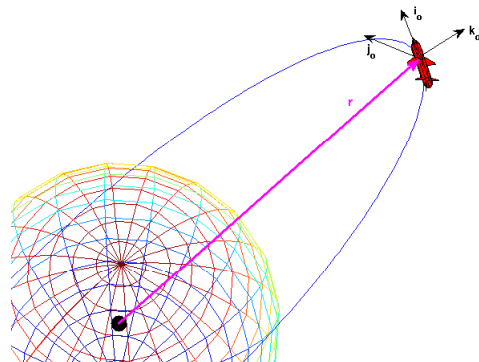


Figura 3.2: Sistema de referencia orbital local o LORF . (Adaptado de [1] con autorización del autor.)

La figura 3.1 presenta el IRF $\mathbf{R}_i = \{O_i, \mathbf{i}_i, \mathbf{j}_i, \mathbf{k}_i\}$ que será empleado en este trabajo. Su origen O_i coincide con el centro de masa de la tierra. El vector unitario \mathbf{i}_i apuntará en dirección al punto vernal¹ en la época enero 1 del 2000. El vector unitario \mathbf{k}_i coincide con el eje de rotación de la tierra y apunta en dirección al polo norte celeste. Finalmente, el vector unitario \mathbf{j}_i completa el sistema cartesiano de mano derecha.

3.2.2. Sistema de Referencia Orbital

Con el fin de tener una referencia con respecto a la cual definir la orientación de la nave, se introduce un sistema de referencia no inercial que esté relacionado con su posición y/o con su velocidad instantánea.

En este trabajo se utilizará el denominado Sistema de Referencia Orbital Local, o LORF (*Local Orbit Reference Frame*). Su origen O_o , está ubicado en el centro de masa del satélite. El vector unitario \mathbf{i}_o , es paralelo al vector de velocidad orbital instantánea y apunta en la dirección de movimiento del satélite. El vector unitario \mathbf{j}_o es perpendicular al plano orbital y va en la dirección del momentum angular orbital instantáneo ($\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$). El vector unitario \mathbf{k}_o completa el sistema cartesiano de mano derecha. De acuerdo con esto, los vectores unitarios del LORF se definen así:

$$\mathbf{i}_o = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \mathbf{j}_o = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\|}, \quad \mathbf{k}_o = \mathbf{i}_o \times \mathbf{j}_o$$

Este sistema de referencia, descrito gráficamente en la figura 3.2 también se utilizará para definir las fuerzas y torques externos que perturban el recorrido orbital del satélite.

¹Punto por el que sale el sol el día del equinoccio. Para una información más detallada acerca de conceptos astronómicos, puede consultarse [1].

3.2.3. Sistema de Referencia de la Nave

La dinámica de orientación del satélite se define en este marco de referencia no inercial, el cual suele venir definido por la geometría de la nave. El origen del SCRF (*Spacecraft Reference Frame*), O_B , coincide con el centro de masa del satélite. Sus tres ejes coordenados, \mathbf{i}_B , \mathbf{j}_B , \mathbf{k}_B coinciden con los ejes de inercia principales de la nave y se orientan así: \mathbf{i}_B apunta en la dirección de movimiento, \mathbf{k}_B es perpendicular a la cara del satélite que mira hacia la tierra, con dirección positiva hacia el nadir y \mathbf{j}_B completa el sistema coordenado de mano derecha. La figura 3.3 muestra la definición de este sistema coordenado.

Estos tres sistemas de referencia serán suficientes para definir el modelo dinámico del satélite, tema que se tratará en las secciones que siguen.

3.3. Modelo Orbital

3.3.1. Modelo General

Sea \hat{R} un cuaternión unitario que representa la orientación del LORF con respecto al IRF de manera tal que:

$$(\mathbf{i}_o)_{LORF} = \hat{R} \otimes (\mathbf{i}_o)_{IRF} \otimes \hat{R}^* \quad (3.1)$$

siendo $(\mathbf{i}_o)_{LORF}$ la representación del vector \mathbf{i}_o en el LORF (la cual es el vector constante $[1 \ 0 \ 0]^T$) e $(\mathbf{i}_o)_{IRF}$ la representación del mismo vector en el IRF .

Si la ecuación (3.1) es multiplicada en ambos miembros por la magnitud de la velocidad del satélite, $v = \|\mathbf{v}\|$, se obtiene:

$$(\mathbf{v})_{LORF} = v \left(\hat{R} \otimes (\mathbf{i}_o)_{IRF} \otimes \hat{R}^* \right) \quad (3.2)$$

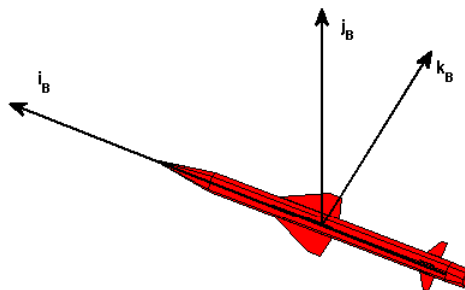


Figura 3.3: Sistema de referencia de la nave o SCRF . (Adaptado de [1] con autorización del autor.)

Si el término escalar en el miembro derecho de (3.2) se reparte entre los dos cuaterniones, se tendrá un cuaternión no unitario $R = \|R\| \widehat{R}$ cuya magnitud es igual a la raíz cuadrada de la magnitud de la velocidad, $\|R\| = \sqrt{v}$. La ecuación (3.2) puede escribirse entonces como:

$$(\mathbf{v})_{LORF} = R \otimes (\mathbf{i}_o)_{IRF} \otimes R^* \quad (3.3)$$

en donde se está representando, de manera simultánea, una rotación y un escalamiento, de la forma mostrada en la sección 2.3.3. Sin embargo, existen infinitas combinaciones de rotaciones y escalamientos que satisfacen (3.3) [20]. Con el fin de definir de manera unívoca el cuaternión R , se debe introducir una segunda ecuación:

$$(\mathbf{j}_o)_{LORF} = \widehat{R} \otimes (\mathbf{j}_o)_{IRF} \otimes \widehat{R}^* \quad (3.4)$$

Esta ecuación obliga a que la rotación causada por R lleve del IRF al LORF de manera correcta. En conjunto (3.3) y (3.4) definen R .

Si ahora se toma la derivada con respecto al tiempo de las dos últimas ecuaciones se tiene:

$$(\dot{\mathbf{v}})_{LORF} = \dot{R} \otimes (\mathbf{i}_o)_{IRF} \otimes R^* + R \otimes (\mathbf{i}_o)_{IRF} \otimes \dot{R}^* + R \otimes (\dot{\mathbf{i}}_o)_{IRF} \otimes R^* \quad (3.5)$$

$$(\dot{\mathbf{j}}_o)_{LORF} = \dot{\widehat{R}} \otimes (\mathbf{j}_o)_{IRF} \otimes \widehat{R}^* + \widehat{R} \otimes (\mathbf{j}_o)_{IRF} \otimes \dot{\widehat{R}}^* + \widehat{R} \otimes (\dot{\mathbf{j}}_o)_{IRF} \otimes \widehat{R}^* \quad (3.6)$$

Utilizando la ecuación cinemática del cuaternión R (ecuación (2.12)), es posible reescribir (3.5) y (3.6) como:

$$(\dot{\mathbf{v}})_{LORF} = W \otimes (\mathbf{v})_{LORF} + (\mathbf{v})_{LORF} \otimes W^* + v \left[\widehat{R} \otimes (\mathbf{i}_o)_{IRF} \otimes \widehat{R}^* \right] \quad (3.7)$$

$$(\dot{\mathbf{j}}_o)_{LORF} = 2\widetilde{W} \otimes (\mathbf{j}_o)_{LORF} + \widehat{R} \otimes (\dot{\mathbf{j}}_o)_{IRF} \otimes \widehat{R}^* \quad (3.8)$$

donde el cuaternión W es la velocidad angular generalizada del cuaternión R , y está relacionada con las fuerzas que actúan sobre el satélite. El cuaternión \widetilde{W} es un cuaternión puro que corresponde a la parte vectorial de W . Es decir, si $W = w + \mathbf{w}$, $\widetilde{W} = 0 + \mathbf{w}$. Esto resulta debido a que la ecuación (3.4) corresponde a una rotación pura.

De acuerdo con la ecuación (2.17), la componente escalar de W relaciona la derivada de $\|R\|$ con su valor actual. Puesto que la magnitud de R está relacionada con la velocidad, se tiene:

$$w = \frac{\|\dot{R}\|}{\|R\|} = \frac{\frac{d}{dt}\sqrt{v}}{v} = \frac{\dot{v}}{2v} \quad (3.9)$$

Se requiere ahora obtener las derivadas de los vectores \mathbf{i}_o y \mathbf{j}_o en el IRF. Partiendo de la definición de \mathbf{i}_o :

$$(\mathbf{i}_o)_{IRF} = \frac{(\mathbf{v})_{IRF}}{v} \quad (3.10)$$

Capítulo 3. Modelos Dinámicos de un Satélite de Órbita Baja

Derivando con respecto al tiempo la expresión anterior se llega a:

$$\left(\dot{\mathbf{i}}_o\right)_{IRF} = \frac{d}{dt} \left(\frac{(\mathbf{v})_{IRF}}{v} \right) = \frac{(\dot{\mathbf{v}})_{IRF}}{v} - \frac{\dot{v}}{v} (\mathbf{i}_o)_{IRF} \quad (3.11)$$

Ahora, teniendo en cuenta que $(\dot{\mathbf{v}})_{IRF} = \frac{(\mathbf{F})_{IRF}}{m}$, se llega a:

$$\left(\dot{\mathbf{i}}_o\right)_{IRF} = \frac{(\mathbf{F})_{IRF}}{mv} - \frac{\dot{v}}{v} (\mathbf{i}_o)_{IRF} \quad (3.12)$$

De la misma manera, \mathbf{j}_o está definido como:

$$(\mathbf{j}_o)_{IRF} = \frac{(\mathbf{r})_{IRF} \times (\mathbf{v})_{IRF}}{\|(\mathbf{r})_{IRF} \times (\mathbf{v})_{IRF}\|} \quad (3.13)$$

Para hacer más fácil la notación, se introducirá la variable escalar $\lambda = \|(\mathbf{r})_{IRF} \times (\mathbf{v})_{IRF}\|$. Al tomar la derivada de (3.13), se tiene:

$$\left(\dot{\mathbf{j}}_o\right)_{IRF} = \frac{(\dot{\mathbf{r}})_{IRF} \times (\mathbf{v})_{IRF}}{\lambda} + \frac{(\mathbf{r})_{IRF} \times (\dot{\mathbf{v}})_{IRF}}{\lambda} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \frac{(\mathbf{r})_{IRF} \times (\mathbf{v})_{IRF}}{\lambda} \quad (3.14)$$

Simplificando, se llega a la derivada buscada:

$$\left(\dot{\mathbf{j}}_o\right)_{IRF} = \frac{(\mathbf{r})_{IRF} \times (\mathbf{F})_{IRF}}{\lambda m} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} (\mathbf{j}_o)_{IRF} \quad (3.15)$$

Algo para tener en cuenta es que, puesto que la magnitud del producto cruz entre dos vectores es independiente del sistema de referencia, se tendrá que $\lambda = \|(\mathbf{r})_{IRF} \times (\mathbf{v})_{IRF}\| = \|(\mathbf{r})_{LORF} \times (\mathbf{v})_{LORF}\|$. Sabiendo que el vector posición en el LORF solo tiene coordenadas en dirección x y en dirección z (es decir $(\mathbf{r})_{LORF} = [r_x \ 0 \ r_z]^T$) y la velocidad solo tiene componente en dirección x en este mismo sistema de referencia, se concluye que $\lambda = r_z v$.

Reemplazando las expresiones (3.12) y (3.15) en (3.7) y (3.8):

$$(\dot{\mathbf{v}})_{LORF} = W \otimes (\mathbf{v})_{LORF} + (\mathbf{v})_{LORF} \otimes W^* + \frac{(\mathbf{F})_{LORF}}{m} - \dot{v} (\mathbf{i}_o)_{LORF} \quad (3.16)$$

$$\left(\dot{\mathbf{j}}_o\right)_{LORF} = 2\widetilde{W} \otimes (\mathbf{j}_o)_{LORF} + \frac{(\mathbf{r})_{LORF} \times (\mathbf{F})_{LORF}}{\lambda m} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} (\mathbf{j}_o)_{LORF} \quad (3.17)$$

Puesto que $(\mathbf{v})_{LORF} = v (\mathbf{i}_o)_{LORF}$, se tiene $(\dot{\mathbf{v}})_{LORF} = \dot{v} (\mathbf{i}_o)_{LORF}$. Empleando esto y expandiendo (3.16) en sus componentes se llega a:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_x}{m} - \dot{v} + 2w_0v \\ \frac{F_y}{m} + 2w_3v \\ \frac{F_z}{m} - 2w_2v \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Reemplazando (3.9) en la segunda componente de la expresión anterior se llega a $w_0 = \frac{F_x}{2mv}$. Las otras dos componentes no nulas llevan a $w_2 = -\frac{F_z}{2mv}$ y $w_3 = \frac{F_y}{2mv}$.

Puesto que $(\mathbf{j}_o)_{LORF}$ es un vector constante, su derivada será nula. Expandiendo ahora (3.17) se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2w_2 - \frac{F_z}{vm} \\ -2w_3 - \frac{F_y}{vm} \\ \frac{F_x}{vm} - \frac{dotv}{v} \\ 2w_1 + \frac{r_x F_y}{r_z vm} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Las tres primeras componentes de (3.19) concuerdan con lo que se obtuvo de (3.18). La cuarta componente lleva a $w_1 = -\frac{r_x}{2mvr_z} F_y$.

Finalmente, la relación entre la velocidad angular generalizada y la fuerza que actúa sobre el satélite será:

$$W = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}, v, m) \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix} \mathbf{F} \quad (3.20)$$

siendo

$$\alpha = \frac{1}{2mv} \quad \epsilon = \frac{r_x}{r_z}$$

Debe aclararse que las cantidades vectoriales presentes en (3.20) deben estar expresadas en sus componentes en el LORF .

Con la expresión (3.20) se completa el modelo dinámico para el cuaternión orbital. Para completar el modelo del movimiento del satélite, es necesario incluir la ecuación para la posición. Partiendo de la relación entre las componentes del vector posición en el LORF y en el IRF :

$$(\mathbf{r})_{LORF} = \hat{R} \otimes (\mathbf{r})_{IRF} \hat{R}^* \quad (3.21)$$

Y tomado la derivada con respecto al tiempo en cada miembro:

$$(\dot{\mathbf{r}})_{LORF} = \dot{\hat{R}} \otimes (\mathbf{r})_{IRF} \hat{R}^* + \hat{R} \otimes (\dot{\mathbf{r}})_{IRF} \hat{R}^* + \hat{R} \otimes (\mathbf{r})_{IRF} \dot{\hat{R}}^* \quad (3.22)$$

Empleando de nuevo (2.12) y efectuando las rotaciones se llega a la forma final:

$$(\mathbf{r})_{LORF} = (\mathbf{v})_{LORF} + \widetilde{W} \otimes (\mathbf{r})_{LORF} + (\mathbf{r})_{LORF} \otimes \widetilde{W}^* \quad (3.23)$$

Finalmente, el modelo dinámico del movimiento orbital del satélite, expresado en coordenadas del LORF , estará formado por las ecuaciones (2.12) y (3.23), sujetas a la relación (3.20)

y a $\widetilde{W} = 0 + \mathbf{w}$. Estas ecuaciones se presentan de nuevo a continuación:

$$\dot{R} = W \otimes R \quad (3.24)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} + \widetilde{W} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \widetilde{W}^* \quad (3.25)$$

$$W = \Gamma \mathbf{F} \quad (3.26)$$

con:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{2mv}, \quad \epsilon = \frac{r_x}{r_z}$$

3.3.2. Caracterización de la Órbita

Para definir unívocamente una órbita en el espacio se requieren 6 parámetros, a saber:

- La longitud del semieje mayor a .
- La excentricidad e .
- La inclinación i .
- La ascensión recta del nodo ascendente Ω .
- El argumento del perigeo ω .
- La anomalía verdadera θ .

Los primeros tres parámetros definen la forma de la órbita, el tercero, el cuarto y el quinto definen su orientación en el espacio, mientras el último de los seis varía con el tiempo y ubica al satélite en un punto específico de la trayectoria. Estos parámetros se describen de manera gráfica en la figura 3.4 y una definición detallada de cada uno puede encontrarse en [1,3].

El modelo presentado hasta el momento no incluye ninguno de los parámetros de una órbita. Sin embargo, cualquier conjunto de parámetros puede relacionarse con una posición y velocidad iniciales. Es decir, si se quiere posicionar un satélite en una órbita descrita por un conjunto $\{a, e, i, \Omega, \omega\}$, el lanzador deberá ubicar al satélite en una posición inicial \mathbf{r}_0 con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 específicas. De esta misma manera se define un cuaternión inicial R_{ref} , necesariamente ligado a \mathbf{v}_0 .

En las simulaciones realizadas en este trabajo, se asumió que el punto inicial siempre corresponde al perigeo². Puesto que la órbita es una elipse con la tierra en uno de sus focos,

²Punto de la órbita en que el satélite se encuentra más cerca de la tierra. Ver [1,3].

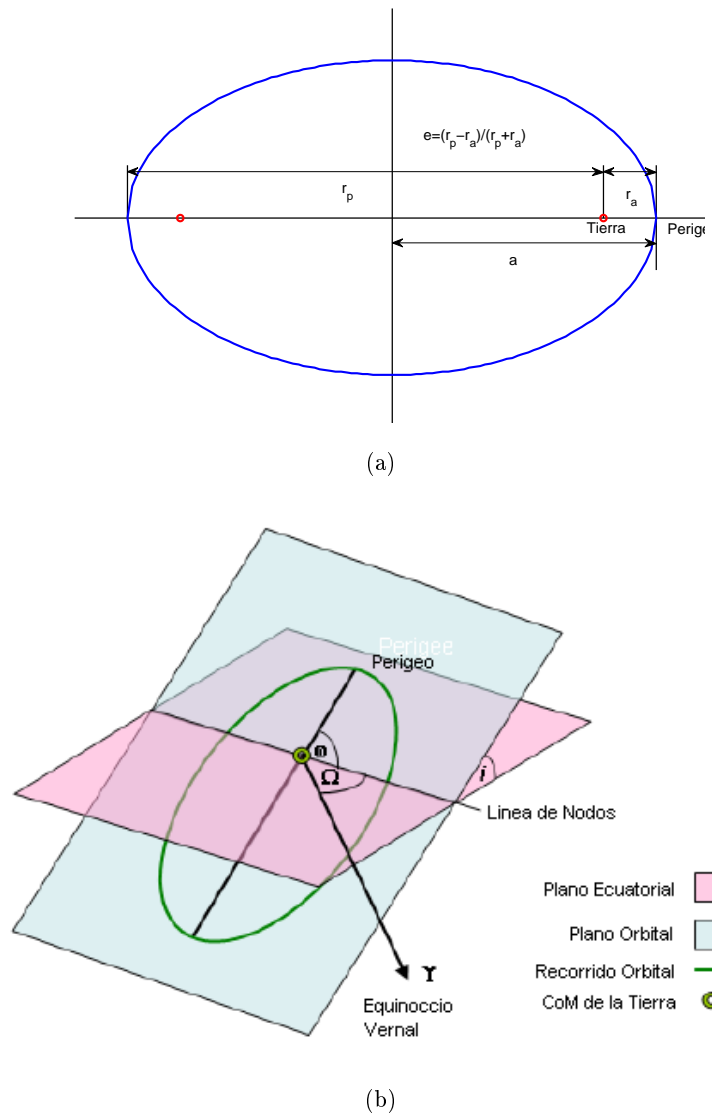


Figura 3.4: Parámetros de la órbita. (a) Descripción geométrica. (b) Ubicación en el espacio tridimensional. (Adaptado de [1] con autorización del autor.)

la distancia entre la tierra y la nave en el perigeo corresponde al valor del semieje mayor de la elipse menos su distancia focal, y esta última corresponde al producto entre a y la excentricidad de la elipse. Es decir, la distancia entre la tierra y el satélite en el perigeo será:

$$r_p = a(1 - e) \quad (3.27)$$

Puesto que en este punto el vector velocidad y el vector posición son perpendiculares, se tendrá que la posición inicial de la nave, expresada en el LORF es $\mathbf{r}_0 = [0 \ 0 \ r_p]^T$.

Capítulo 3. Modelos Dinámicos de un Satélite de Órbita Baja

La orientación inicial del LORF está determinada por los parámetros angulares i , Ω y ω . Se deben realizar las siguientes rotaciones al IRF para llegar al LORF :

- Una rotación de un ángulo Ω alrededor del eje z para alinear el eje x con la línea de nodos.
- Una rotación de un ángulo i alrededor del nuevo eje x para alinear el plano xy con el plano orbital.
- Una rotación de un ángulo ω alrededor del nuevo eje z para alinear el eje x con el semieje de la mayor de la elipse.
- Una rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes alrededor del nuevo eje z para que el eje x apunte en dirección de la velocidad orbital.
- Una rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes alrededor del nuevo eje x para que el eje y apunte en dirección del momentum angular orbital.

La composición de estas cuatro rotaciones lleva a que el cuaternión inicial sea:

$$\widehat{R}_{ref} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{i}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{i}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

La magnitud de este cuaternión debe ser la raíz cuadrada de la magnitud de la velocidad orbital en este punto inicial. En una órbita elíptica, la velocidad y la posición están relacionadas por [3]:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2a} \quad (3.29)$$

siendo μ la constante gravitacional de la tierra (el producto entre la masa de la tierra y la constante gravitacional universal) a la longitud del semieje mayor y r la distancia radial entre el satélite y el planeta. De la anterior expresión se concluye que, en el perigeo, la velocidad será:

$$v = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{2a} \right)} \quad (3.30)$$

y $R_{ref} = \sqrt{v} \widehat{R}_{ref}$.

De esta forma, dados los 5 parámetros espaciales de la órbita, se pueden utilizar las expresiones (3.27), (3.28) y (3.30) para definir las condiciones iniciales que se utilizarán en el modelo (3.26) para una órbita particular. El último parámetro, la anomalía media M , está relacionado con la evolución temporal de la órbita y es un parámetro variable, por lo tanto no se requiere para definir la ubicación inicial [1, 3].

3.4. Modelo de Orientación

La orientación absoluta del del satélite con respecto al IRF corresponde a una rotación que transforme de este sistema de referencia al SCRF . Esta rotación puede descomponerse en dos rotaciones sucesivas, una que lleve del IRF al LORF y otra que lleve del LORF al SCRF . De esta forma, es posible definir la orientación del satélite con respecto al LORF utilizando un cuaternión unitario \hat{Q} tal que:

$$(\mathbf{i}_B)_{LORF} = \hat{Q} \otimes (\mathbf{i}_B)_{BRF} \otimes \hat{Q}^*. \quad (3.31)$$

De acuerdo con (2.18), la derivada de (3.31) es:

$$(\dot{\mathbf{i}}_B)_{LORF} = 2W_B \otimes (\mathbf{i}_B)_{LORF} \quad (3.32)$$

Como se mencionó en la sección 2.4, esta ecuación corresponde a la ecuación tradicional para el movimiento de rotación $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. En este caso $\boldsymbol{\omega}$ sería el doble de la parte vectorial del cuaternión W_B , es decir $\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{w}_B$. Con el fin de dar consistencia a las expresiones que se presentarán más adelante, se introducirá el cuaternión $U = 2W_B$, de manera que la ecuación cinemática para el cuaternión \hat{Q} será:

$$\dot{\hat{Q}} = \frac{1}{2}U \otimes \hat{Q} \quad (3.33)$$

Para modelar el comportamiento dinámico, debe hallarse una relación entre U y el torque externo aplicado al satélite. Si T es el cuaternión que representa este torque ($T = [0 \ T_x \ T_y \ T_z]^T$), y de acuerdo con la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional, se tendrá $T = \dot{H}$, donde H es el cuaternión del momentum angular del cuerpo. El momentum angular, expresado en el SCRF , es:

$$H = I_0 U \quad (3.34)$$

Siendo I_0 el tensor de inercia en el espacio de 4 dimensiones, definido como [14]:

$$I_0 = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ 0 & I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad k = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})$$

Asumiendo que el tensor de inercia del satélite permanece constante, la derivada con respecto al tiempo de (3.34) será:

$$\dot{H} = T = I_0 \dot{U} \quad (3.35)$$

Y se llega a $\dot{U} = I_0^{-1}T$.

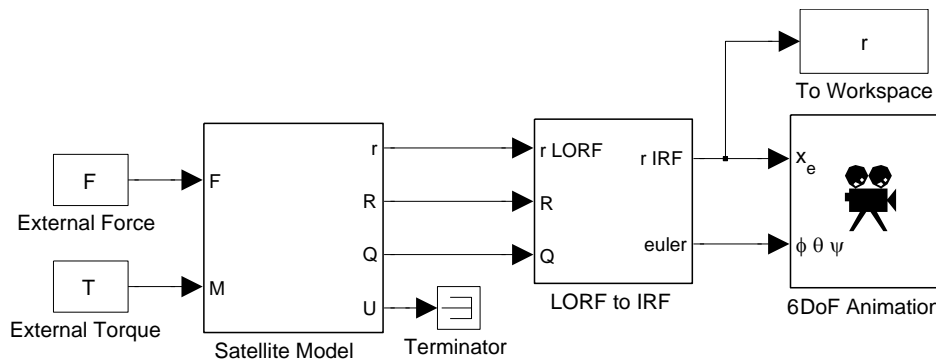


Figura 3.5: Diagrama de bloques, en Simulink, del sistema completo.

El modelo de orientación del satélite se define por las siguientes dos ecuaciones:

$$\dot{Q} = \frac{1}{2}U \otimes Q \quad (3.36)$$

$$\dot{U} = I_0^{-1}T \quad (3.37)$$

3.5. Simulaciones

Un proceso de verificación del comportamiento de los modelos definidos por las ecuaciones (3.26) y (3.37) se realizó mediante una serie de simulaciones, empleando Simulink. La figura 3.5 muestra el diagrama de bloques del modelo construido en Simulink. Este modelo se desarrolló de una forma modular, de manera que puede ser fácilmente incorporado dentro de sistemas más complejos. El subsistema del lado derecho en la figura 3.5 simplemente realiza la transformación del LORF al IRF con el fin de poder observar los resultados de manera natural. Este bloque se describe en más detalle en la figura 3.6, en la que se puede observar como las tres entradas (vector posición en el LORF $(\mathbf{r})_{LORF}$, cuaternión del LORF R y cuaternión de orientación Q) se combinan para producir la el vector posición en el IRF y los ángulos de Euler requeridos por el bloque de animación. El bloque de la izquierda de la figura 3.5 incluye el modelo del satélite, tanto para la órbita como para la orientación, modelos que se describen en detalle en la figura 3.7. Es importante notar que el modelo orbital incluye la componente fuerza gravitacional, pues es ésta la que mantiene al satélite en órbita, de manera que la fuerza externa \mathbf{F} solo debe incluir las perturbaciones y las señales de control. Por su parte, la figura 3.8 detalla la forma en que se calcula la velocidad angular generalizada W dentro del modelo orbital. Los parámetros requeridos para la simulación de estos modelos se leen desde el *workspace* de MATLAB. Una función se encarga de tomar los parámetros de la órbita y de la nave (masa y momentos de inercia) y genera todas las constantes requeridas.

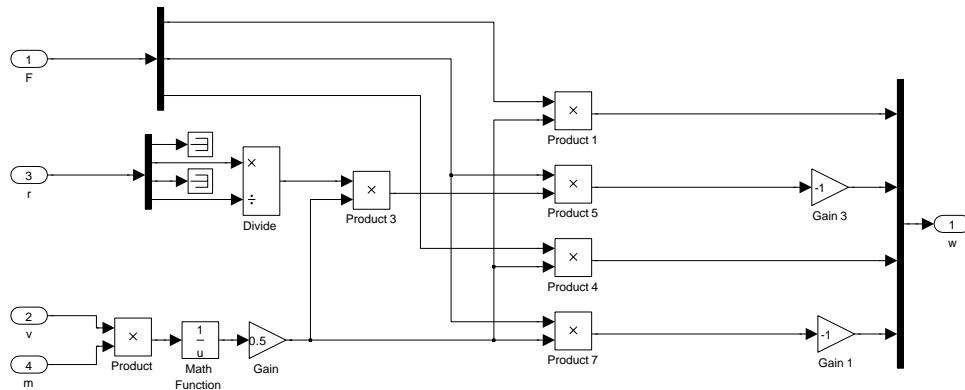


Figura 3.8: Detalle del cálculo de W .

3.5.1. Modelo Orbital

Para este modelo se presentan los resultados de tres simulaciones diferentes. La primera corresponde a una órbita circular no perturbada, es decir, sin ninguna clase de fuerza externa actuando sobre el satélite. La segunda órbita simulada parte de los mismos parámetros que la primera, pero además incluye una fuerza constante actuando siempre en dirección contraria a la velocidad, simulando el rozamiento aerodinámico. El tercer caso corresponde a una órbita elíptica, para observar la forma en que una excentricidad mayor a cero afecta el comportamiento del modelo.

Órbita Circular

Los parámetros de la órbita circular simulada se presentan en el cuadro 3.1. Se utilizó un valor de 1000 kilogramos para la masa del satélite.

La órbita en el espacio tridimensional, junto con una proyección que permite observar su forma, se muestran en la figura 3.9. En este caso la única fuerza externa que actuó sobre el satélite fue la atracción gravitacional de la tierra, que en el LORF se expresa como $\mathbf{F}_G = -\mu_{\oplus}m/r^3\mathbf{r}$, siendo μ_{\oplus} la constante gravitacional de la tierra (el producto entre la constante

Cuadro 3.1: Parámetros de la Órbita Circular

PARÁMETRO	VALOR	PARÁMETRO	VALOR
a	250Km	Ω	0
e	0	ω	0
i	$\frac{\pi}{2}$	M	No utilizado

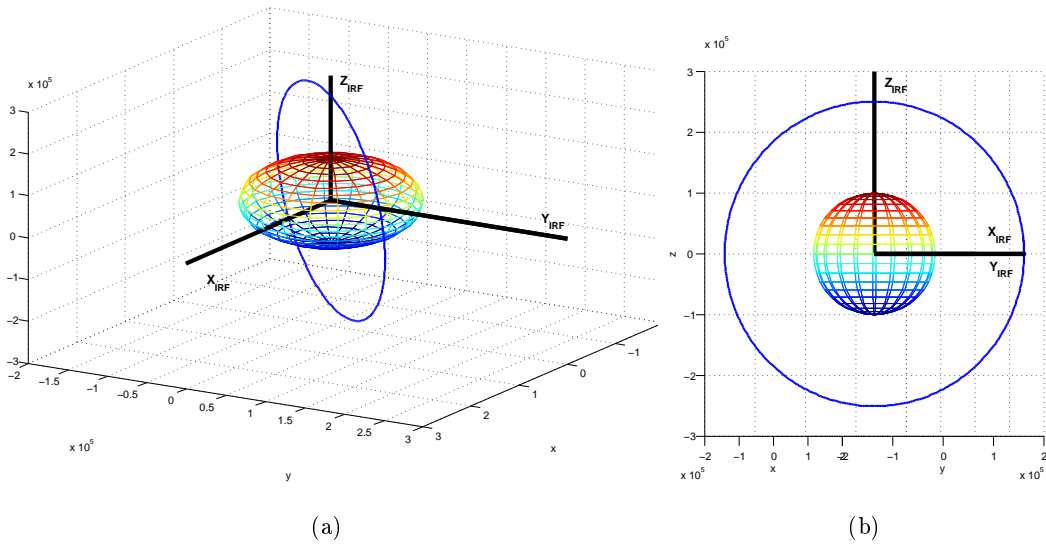


Figura 3.9: Órbita circular en el IRF : (a) Vista en tres dimensiones (b) Forma circular

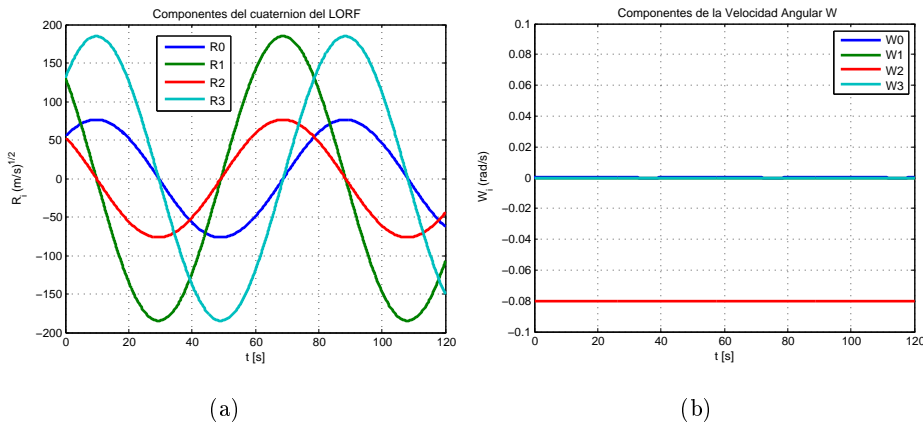


Figura 3.10: Evolución temporal de los cuaterniones en la órbita circular: (a) Cuaternión R (b) Velocidad angular generalizada W

gravitacional universal y la masa de la tierra) m la masa del satélite y r la magnitud del vector posición \mathbf{r} .

La figura 3.10(a) muestra la evolución temporal del cuaternión R . Sus componentes presentan un comportamiento oscilatorio de amplitud constante, correspondiente a un movimiento de rotación uniforme. Dado que la rapidez permanece constante, la magnitud del cuaternión también. Esto se ve reforzado por la gráfica de la figura 3.10(b), en la que se observa el comportamiento de la velocidad angular generalizada W . Para este cuaternión, solo la componente w_y es diferente de cero, puesto que el satélite siempre está rotando alrededor del eje \mathbf{j}_o .

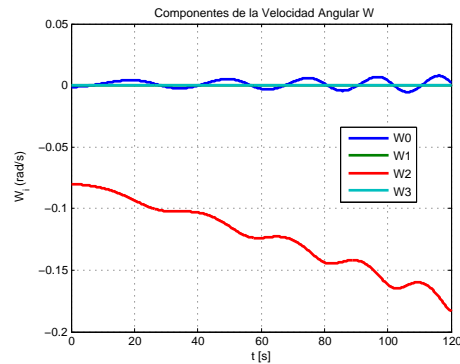


Figura 3.11: Comportamiento del cuaternión W con una fuerza externa.

Cuando se agrega una fuerza externa al satélite, como podría ser el rozamiento aerodinámico, la velocidad angular generalizada presenta un comportamiento como el que se observa en la figura 3.11. La componente w_y aumenta en magnitud porque el radio orbital decrece (el satélite pierde altura al perder energía). El comportamiento oscilatorio de la componente w_0 refleja los cambios en la magnitud del cuaternión R .

Órbita Elíptica

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, la velocidad de un satélite en una órbita elíptica es máxima cuando éste se encuentra en el perigeo y mínima en el apogeo. Este comportamiento se evidencia en la figura 3.12(a), en la que se observa la variación de la magnitud del cuaternión R en una órbita de este tipo. Los parámetros utilizados en este caso corresponden a los mismos del cuadro 3.1, cambiando únicamente la excentricidad a 0,5. La velocidad angular generalizada W presenta también variaciones periódicas, que se muestran en la figura 3.12(b). La componente escalar w (W_0 en la figura) es la que indica el cambio en la magnitud de R , indica un movimiento acelerado, que corresponde con lo que se ve en la figura 3.12(a). Las variaciones en la componente w_2 se producen por la misma tercera ley de Kepler: el satélite cambia de dirección más rápido cuando se encuentra en el perigeo.

3.5.2. Modelo de Orientación

Con el fin de verificar si este modelo arroja resultados coherentes, se realizó una simulación en la que se aplicó un torque de 1 Nm alrededor del eje \mathbf{i}_B a un satélite cuyo momento de inercia alrededor de ese mismo eje es 1 kgm². Como era de esperarse, la velocidad angular alrededor de ese eje creció de manera lineal, con pendiente igual a 1, de la forma que se observa en la figura 3.13(a). Una variación en el torque o en el momento de inercia solo alterará la

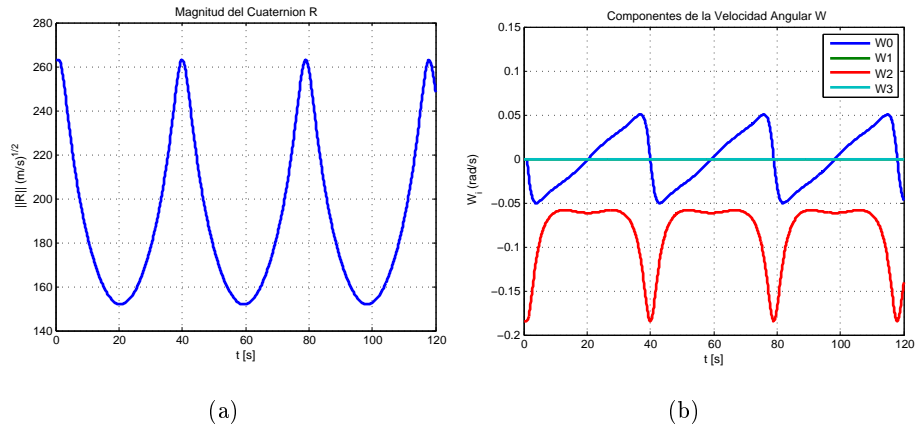


Figura 3.12: Evolución temporal de los cuaterniones en la órbita elíptica: (a) Magnitud del cuaternión R (b) Velocidad angular generalizada W

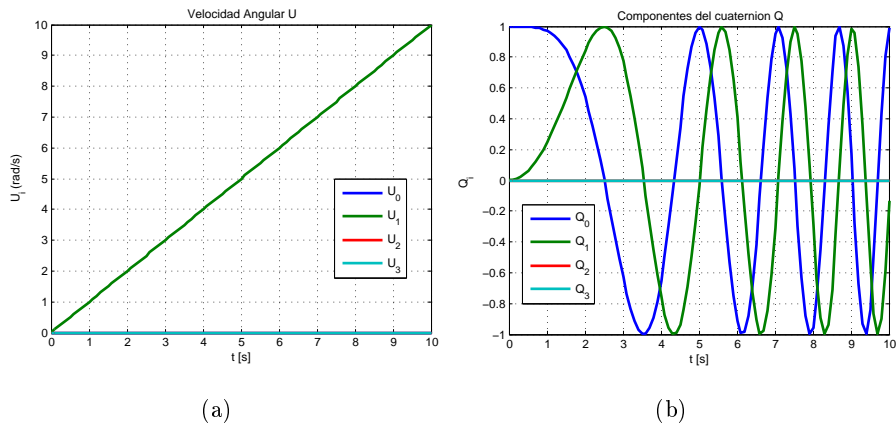


Figura 3.13: Evolución temporal de los cuaterniones en el modelo de orientación: (a) Velocidad angular U (b) Cuaternión de orientación \hat{Q}

pendiente de la gráfica.

El cuaternión Q , por su parte, presenta un comportamiento interesante. La velocidad angular diferente de cero causa que el ángulo de rotación varíe y por lo tanto, las componentes q_0 y q_1 varían de manera senoidal, conforme lo hace el ángulo de rotación, según se ve en la figura 3.13(b). El aumento en la frecuencia con la que las componentes del cuaternión Q varían se debe a que el torque permanece constante y así mismo lo hace la aceleración angular. Si el torque externo se aplica sobre algún otro eje, la componente de Q correspondiente a ese eje presentará una variación similar a la que presenta q_1 en la figura 3.13(b).

3.6. Perturbaciones Externas

Existen varias fuentes de perturbaciones externas que afectan el comportamiento de un satélite en órbita. Entre ellas pueden mencionarse el rozamiento atmosférico, el viento solar, el campo magnético terrestre, los armónicos gravitacionales y otras [1, 3, 24–26].

El efecto de relativo de estas perturbaciones (cuales son mas intensas que otras) depende de la altitud a la que se encuentre la nave. En el caso de los satélites de órbita baja, las dos principales fuentes de perturbaciones externas son el rozamiento atmosférico y el gradiente gravitacional. Aunque existen otras que pueden llegar a ser también considerables, como el campo magnético terrestre, en este trabajo se considerarán solo las dos más importantes.

3.6.1. Rozamiento Atmosférico

A las alturas a las que suele operar un LEO, la densidad de la atmósfera es aún considerable. El rozamiento de la nave con el aire resta energía cinética al movimiento orbital del satélite causando pérdida de altitud y una *circularización* de la órbita (reducción de la excentricidad orbital) [1]. Estas perturbaciones deben ser compensadas de manera adecuada, con el fin de evitar una reducción en la vida útil del satélite. La fuerza de rozamiento está dada por:

$$\mathbf{F}_a = -\frac{1}{2}\rho S C_d \mathbf{v}_r \quad (3.38)$$

En la expresión anterior, ρ es la densidad de la atmósfera a la altitud de operación, S es el área efectiva perpendicular al vector velocidad, C_d es el coeficiente de rozamiento aerodinámico del satélite y \mathbf{v}_r es la velocidad de la nave relativa a la atmósfera. Este último término viene dado por:

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \omega_e \times \mathbf{r}$$

siendo \mathbf{v} la velocidad del satélite, expresada en el IRF, ω_e la velocidad angular de la tierra y \mathbf{r} el vector posición del satélite, expresado en el IRF.

Esta fuerza de rozamiento atmosférico puede expresarse como una fuerza concentrada en un punto conocido como el centro de presiones del satélite. Si dicho centro de presiones no coincide con el centro de masa de la nave, se induce un torque que afecta la orientación del satélite. Este torque aerodinámico está dado por:

$$\mathbf{T}_a = \mathbf{r}_{cp} \times \mathbf{F}_a \quad (3.39)$$

donde \mathbf{r}_{cp} representa el vector posición del centro de presiones con respecto al centro de masa del satélite.

3.6.2. Gradiente Gravitacional

Todo objeto asimétrico sometido a la acción del campo gravitacional terrestre experimenta un torque que tiende a alinear su eje de menor inercia con la dirección del campo. Este torque se debe a las diferencias entre la fuerza efectiva aplicada a cada elemento de masa del objeto en cuestión. Asumiendo que la tierra es esférica, un satélite que se encuentre a una altura R experimentará un torque, debido al gradiente gravitacional, dado por [3]:

$$T_{gx} = \frac{3\mu_{\oplus}}{2R^3} (I_z - I_y) \sin(2\phi) \cos^2(\theta) \quad (3.40a)$$

$$T_{gy} = \frac{3\mu_{\oplus}}{2R^3} (I_z - I_x) \sin(2\theta) \cos(\phi) \quad (3.40b)$$

$$T_{gz} = \frac{3\mu_{\oplus}}{2R^3} (I_x - I_y) \sin(2\theta) \sin(\phi) \quad (3.40c)$$

donde θ y ϕ representan, respectivamente, los ángulos de alabeo (*roll*) y banqueo (*yaw*) del satélite.

3.7. Sumario

Este capítulo presentó una formulación para la dinámica del satélite utilizando cuaterniones, junto con algunas simulaciones para validar su comportamiento genérico. El modelo desarrollado contiene únicamente las dinámicas básicas, que en capítulos posteriores se completarán con la síntesis del controlador. Una interesante característica de este modelo es que, si bien se ha planteado para su empleo en satélites, puede ser fácilmente adaptado para modelar cualquier vehículo de 6 grados de libertad, como aeronaves, proyectiles de artillería, submarinos, misiles u otro similar a éstos.

Aparte del modelo dinámico del satélite, en este capítulo se incluyeron también los modelos matemáticos de las principales perturbaciones externas que pueden afectar a un satélite de órbita baja.

Capítulo 4

Síntesis de los Controladores

4.1. Introducción

Los modelos desarrollados en el capítulo 3, son altamente no lineales y presentan algunas particularidades que no sólo dificultan sino que llegan a hacer casi imposible el empleo de técnicas lineales de control. Las dificultades de linealización inherentes a este tipo de modelo ya han sido mencionadas por Andreis en [21], razón por la cual en su trabajo utilizó un modelo basado en aceleraciones residuales para sintetizar una ley de control embebido basado en modelos (EMC).

Aparte de la dificultad de linealización, existe un problema de acoplamiento también difícil de resolver utilizando técnicas lineales. En [1, 8], Prieto presenta un modelo orbital del que se menciona, como una de sus principales ventajas, la falta de acoplamiento entre la dinámica en el plano orbital y la dinámica de la inclinación de la órbita, propiedad que simplifica la síntesis del controlador al permitir que un sistema de sexto orden (dos derivadas en tres coordenadas) se separe en dos sistemas, uno de cuarto y uno de segundo orden, más fáciles de analizar. Esta ventaja se pierde al emplear el modelo basado en cuaterniones presentado en el capítulo 3, puesto que la representación de todas las rotaciones en forma de un solo cuaternión acopla todos los movimientos del satélite.

Con el fin de superar estas dificultades, la mejor opción es utilizar una técnica de control no lineal con suficientes propiedades de robustez, que permita satisfacer los objetivos de control. En este trabajo se propone el empleo de la técnica de control en modo deslizante, SMC (*Sliding Mode Control*) [27–30], tanto para la órbita como para la orientación del satélite. Esta técnica de control es especialmente adecuada cuando se trabaja con modelos no lineales con elevados grados de incertidumbre, tanto paramétrica como no paramétrica. La síntesis de estos se discute en las siguientes secciones. Los detalles particulares acerca del empleo de la técnica SMC, sin

embargo, no se presentarán en este documento por cuestiones de espacio. El lector interesado en estos detalles puede consultar las referencias [27–29, 31, 32].

Hay que recalcar que las leyes de control que van a ser tratadas en las secciones subsiguientes asumen un conocimiento adecuado de los cuaterniones R , \widehat{Q} y U . Asumir este conocimiento es poco realista, por lo que en una aplicación real se requerirá el empleo de observadores robustos que, a partir de mediciones ruidosas de posición y velocidad del satélite puedan estimar de manera adecuada estas cantidades. Esta tarea, sin embargo, requiere un trabajo extra enorme, que no se incluyó para no extender excesivamente el alcance del trabajo de grado.

4.2. Control Orbital

4.2.1. Planteamiento Preliminar

De acuerdo con el modelo presentado en el capítulo 3, el cuaternión orbital R , puede ser descrito como el producto entre un cuaternión característico R_o , que fue definido en la ecuación (3.28) y depende de los 5 parámetros espaciales de la órbita, y un cuaternión que varía con el tiempo R_θ , que representa la rotación en el plano orbital siguiendo el valor del parámetro temporal θ . Esto lleva a:

$$R = R_\theta \otimes R_o \quad (4.1)$$

Al tomar la derivada con respecto al tiempo de los dos miembros de (4.1) se obtiene:

$$\dot{R} = W \otimes R = \dot{R}_\theta \otimes R_o + R_\theta \otimes \dot{R}_o \quad (4.2)$$

La variación de R_θ es causada por la fuerza gravitacional y es inherente al movimiento orbital, mientras que las perturbaciones externas que actúan sobre el satélite y cambian el valor de R_o son las que afectan la forma de la órbita y las que deben ser contrarrestadas por el sistema de control. De esta forma, el cuaternión W puede descomponerse de la siguiente manera:

$$W = \mathbf{\Gamma F} = m\mathbf{\Gamma g} + \mathbf{\Gamma F}_e \quad (4.3)$$

donde \mathbf{g} representa al campo gravitacional terrestre y \mathbf{F}_e incluye la resultante de las perturbaciones que actúan sobre el satélite y las fuerzas de control. Definiendo $W_\theta = m\mathbf{\Gamma g}$, se tiene $\dot{R}_\theta = W_\theta$. Reemplazando (4.3) en (4.2):

$$\begin{aligned} m\mathbf{\Gamma g} \otimes R + \mathbf{\Gamma F}_e \otimes R &= \dot{R}_\theta \otimes R_o + R_\theta \otimes \dot{R}_o \\ m\mathbf{\Gamma g} \otimes R_\theta \otimes R_o + \mathbf{\Gamma F}_e \otimes R_\theta \otimes R_o &= \dot{R}_\theta \otimes R_o + R_\theta \otimes \dot{R}_o \\ W_\theta \otimes R_\theta \otimes R_o + \mathbf{\Gamma F}_e \otimes R_\theta \otimes R_o &= \dot{R}_\theta \otimes R_o + R_\theta \otimes \dot{R}_o \\ \dot{R}_\theta \otimes R_o + \mathbf{\Gamma F}_e \otimes R_\theta \otimes R_o &= \dot{R}_\theta \otimes R_o + R_\theta \otimes \dot{R}_o \end{aligned}$$

Llegándose finalmente a:

$$\dot{R}_o = [R_\theta^{-1} \otimes \Gamma \mathbf{F}_e \otimes R_\theta] \otimes R_o \quad (4.4)$$

Si se expresa \mathbf{F}_e como $\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_d + \mathbf{u}$, siendo \mathbf{u} la fuerza de control y \mathbf{F}_d la resultante de las perturbaciones, sus efectos pueden separarse, para obtener:

$$\dot{R}_o = [R_\theta^{-1} \otimes \Gamma \mathbf{u} \otimes R_\theta] \otimes R_o + [R_\theta^{-1} \otimes \Gamma \mathbf{F}_d \otimes R_\theta] \otimes R_o \quad (4.5)$$

En el resto de esta sección, se asume que el vector \mathbf{F}_d es desconocido, pero cada una de sus componentes está acotada por un valor conocido tal que $F_{di} \leq F_{maxi}$, siendo \mathbf{F}_{max} el vector que contiene los valores máximos de las componentes de la fuerza.

4.2.2. Ley de Control

Si definimos el cuaternión característico de la órbita, o cuaternión de referencia R_{ref} , como el valor de R_o correspondiente con el que se presentó en la ecuación (3.28), el error orbital está dado por el vector tetradimensional:

$$\mathbf{e}_o = R_o - R_{ref} \quad (4.6)$$

El objetivo del control orbital es lograr estabilidad asintótica, es decir, garantizar $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_o = 0$ a pesar de las incertidumbres.

La derivada del error con respecto al tiempo es:

$$\dot{\mathbf{e}}_o = \dot{R}_o \quad (4.7)$$

puesto que R_r es constante. La dinámica del error orbital es entonces un sistema tetradimensional de primer orden. Al tratarse de un sistema de primer orden, la función deslizante \mathbf{s} se define simplemente como el error: $\mathbf{s} = \mathbf{e}_o$.

Para este sistema se define la función de Lyapunov $V_o = \frac{1}{2} \mathbf{e}_o^T \mathbf{e}_o$. El sistema será asintóticamente estable si $\dot{V}_o < 0$, es decir, si $\dot{\mathbf{e}}_o^T \mathbf{e}_o < 0$. Con el fin de garantizar esta condición, la señal de control se selecciona de manera que la derivada del error sea:

$$\dot{\mathbf{e}}_o = -k_o \mathbf{sgn}(\mathbf{e}_o) \quad (4.8)$$

donde \mathbf{sgn} representa la función signo, aplicada a cada elemento del vector \mathbf{e}_o .

Utilizando (4.7) y la parte conocida de (4.5) se tiene:

$$-k_o \mathbf{sgn}(\mathbf{e}_o) = [R_\theta^{-1} \otimes \Gamma \mathbf{u} \otimes R_\theta] \otimes R_o$$

de donde se obtiene la expresión para \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \Gamma^+ [R_\theta \otimes (-k_o \mathbf{sgn}(\mathbf{e}_o) \otimes R_o^{-1}) \otimes R_\theta^{-1}] \quad (4.9)$$

siendo $\mathbf{\Gamma}^+$ la matriz seudo inversa de $\mathbf{\Gamma}$.

El empleo de (4.9) garantizaría estabilidad asintótica en el sistema si no existieran perturbaciones, es decir, suponiendo que \mathbf{F}_d es cero. Para garantizar la estabilidad del sistema cuando existen fuerzas externas, la ganancia k_o debe seleccionarse de manera tal que se garantice la condición de negatividad $\dot{\mathbf{e}}_o^T \mathbf{e}_o < 0$. Para ello, se sustituye (4.9) en (4.5):

$$\dot{\mathbf{e}}_o = -k_o \mathbf{sgn}(\mathbf{e}_o) + [R_\theta^{-1} \otimes \mathbf{\Gamma} \mathbf{F}_d \otimes R_\theta] \otimes R_o \quad (4.10)$$

y se aplica directamente la desigualdad:

$$\dot{\mathbf{e}}_o^T \mathbf{e}_o = [-k_o \mathbf{sgn}(\mathbf{e}_o) + [R_\theta^{-1} \otimes \mathbf{\Gamma} \mathbf{F}_d \otimes R_\theta] \otimes R_o]^T \mathbf{e}_o < 0 \quad (4.11)$$

Sabiendo que las componentes de \mathbf{F}_d están acotadas y que $\mathbf{sgn}(\mathbf{e}_o)^T \mathbf{e}_o = \|\mathbf{e}_o\|_1 > \|\mathbf{e}_o\|$, la desigualdad puede expresarse como:

$$-k_o \|\mathbf{e}_o\| + \|\mathbf{\Gamma} \mathbf{F}_{max}\| \|R_o\| \|\mathbf{e}_o\| < 0 \quad (4.12)$$

de donde resulta la condición $k_o > \|\mathbf{\Gamma} \mathbf{F}_{max}\| \|R_o\|$. Como puede verse, esta ganancia depende no solamente de la magnitud de las fuerzas externas, sino también de la magnitud del cuaternión R_o , es decir, de la velocidad y posiciones actuales del satélite. Por lo tanto, k_o debe ser calculada cada vez que la señal de control se vaya a aplicar.

Si la masa del satélite no se conoce exactamente, pero se conocen sus cotas máxima y mínima tal que $\underline{m} < m < \bar{m}$, se introducen las matrices $\underline{\mathbf{\Gamma}}$ y $\bar{\mathbf{\Gamma}}$, correspondientes, respectivamente, al empleo de \underline{m} y \bar{m} en (3.20), expresión utilizada para el cálculo de $\mathbf{\Gamma}$. En este caso, la ganancia del controlador se calcula usando:

$$k_o > \|\underline{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{F}_{max}\| \|R_o\| \quad (4.13)$$

y la señal de control usando:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{\Gamma}}^+ [R_\theta \otimes (-k_o \mathbf{sgn}(\mathbf{e}_o) \otimes R_o^{-1}) \otimes R_\theta^{-1}] \quad (4.14)$$

4.3. Control de Orientación

El objetivo del control de orientación es mantener el SCRF alineado con el LORF, lo que implica mantener el cuaternión \widehat{Q} igual al cuaternión identidad $1 + \mathbf{0}$. Con este fin, se define el error de orientación \mathbf{e}_a como:

$$\mathbf{e}_a = \widehat{Q} - (1 + \mathbf{0}) \quad (4.15)$$

Puede verse que la derivada del error corresponde a la derivada del cuaternión \widehat{Q} . Puesto que la derivada de \widehat{Q} incluye al cuaternión U , de acuerdo con (3.37), la función deslizante para este caso debe incluir a los dos cuaterniones \widehat{Q} y U . Esta función está dada por:

$$\mathbf{s} = \mathbf{e}_a + U \quad (4.16)$$

Definiendo la función de Lyapunov para este sistema como $V_a = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{s}$, se busca que la señal de control garantice $\dot{\mathbf{s}} = -k_a\mathbf{sgn}(\mathbf{s})$ con el fin de mantener $\dot{V} = \dot{\mathbf{s}}^T\mathbf{s} < 0$. Tomando la derivada de (4.16):

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}U \otimes \widehat{Q} + I_0^{-1}T = -k_a\mathbf{sgn}(\mathbf{s}) \quad (4.17)$$

donde $T = T_u + T_e$ es el cuaternión que representa la acción combinada de los torques de control T_u y los torques provenientes de perturbaciones externas T_e , los cuales se consideran desconocidos pero acotados, de manera tal que $T_e \leq T_{emax}$. Teniendo en cuenta únicamente el control, se obtiene:

$$T_u = I_0 \left(-k_a\mathbf{sgn}(\mathbf{s}) + \frac{1}{2}U \otimes \widehat{Q} \right) \quad (4.18)$$

La ganancia k_a debe seleccionarse de manera que la condición de negatividad $\dot{\mathbf{s}}^T\mathbf{s} < 0$ se mantenga aún en el peor escenario. Usando (4.18) en (4.17):

$$\dot{\mathbf{s}} = -k_a\mathbf{sgn}(\mathbf{s}) + I_0^{-1}T_e \quad (4.19)$$

de manera que:

$$\dot{\mathbf{s}}^T\mathbf{s} = \left(-k_a\mathbf{sgn}(\mathbf{s}) + I_0^{-1}T_e \right)^T \mathbf{s} \quad (4.20)$$

lo que lleva a:

$$\dot{\mathbf{s}}^T\mathbf{s} \leq -k_a \|\mathbf{s}\| + \|I_0^{-1}T_{emax}\| \|\mathbf{s}\| \quad (4.21)$$

Luego, para mantener $\dot{\mathbf{s}}^T\mathbf{s} < 0$, se requiere

$$k_a > \|I_0^{-1}T_{emax}\| \quad (4.22)$$

En el caso de que los momentos de inercia no se conozcan con exactitud, se introducen los tensores \overline{I}_0 e \underline{I}_0 , resultantes de usar, respectivamente, los valores máximos y mínimos de los momentos de inercia. Con estos tensores, la ganancia del controlador se calcula usando:

$$k_a > \|\underline{I}_0^{-1}T_{emax}\| \quad (4.23)$$

y el torque de control será:

$$T_u = \overline{I}_0 \left(-k_a\mathbf{sgn}(\mathbf{s}) + \frac{1}{2}U \otimes \widehat{Q} \right) \quad (4.24)$$

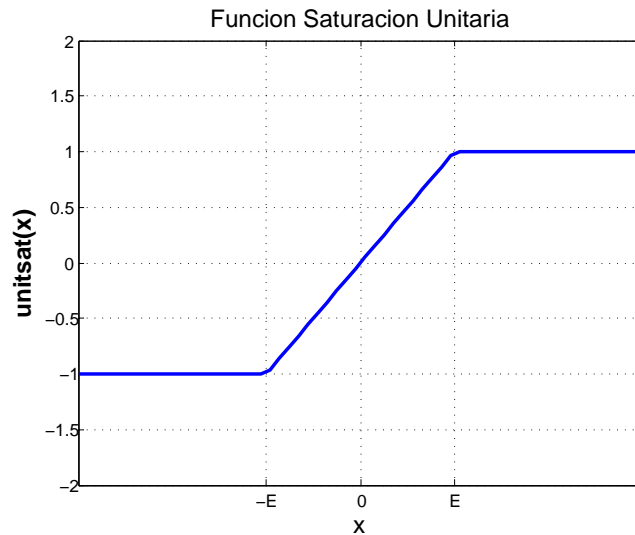


Figura 4.1: Función saturación unitaria.

4.4. El Concepto de Capa Límite

Un efecto poco deseado, pero característico de la técnica de control en modo deslizante, es el fenómeno de *chatter* u oscilaciones de alta frecuencia en la señal de control. Este fenómeno es introducido por el empleo de la función signo y se produce cuando el valor de la función deslizante es pequeño y cambia de signo rápidamente [27–29].

Aunque este efecto suele ser atenuado por las dinámicas de los actuadores, los cuales siempre tienen características pasabajos, se han introducido técnicas para minimizar este efecto de una mejor manera. La técnica más comúnmente utilizada es el reemplazo de la función signo por una función sigmoide, como pueden ser la tangente inversa (con un escalamiento apropiado), la tangente hiperbólica, u otras similares.

Para reemplazar a la función signo, en este trabajo se empleó la función saturación unitaria, cuya gráfica se presenta en la figura 4.1, y que está definida por:

$$\mathbf{unitsat}(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < -\epsilon \\ \frac{x}{\epsilon} & \text{if } -\epsilon < x < \epsilon \\ 1 & \text{if } x > \epsilon \end{cases} \quad (4.25)$$

El empleo de esta función, aplicada a cada término de la función deslizante \mathbf{s} , permite confinar sus componentes dentro del intervalo $[-\epsilon, \epsilon]$, siendo ϵ un parámetro definido por el usuario. La amplitud de este intervalo, conocido como *capa límite*, está directamente relacionada con el máximo error de seguimiento, pues indica la variación admisible de la función deslizante.

Por otro lado, si se define la dinámica genérica de la superficie deslizante como $\dot{s} = -k\mathbf{unitsat}(\mathbf{s}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, donde $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ incluye todas las perturbaciones externas, el comportamiento de las componentes de \mathbf{s} por fuera de la capa límite tendrá un comportamiento similar al que presentaban al emplearse la función signo. Dentro de la capa límite, sin embargo, la dinámica de cada componente de \mathbf{s} tendrá la forma:

$$\dot{s} = -\frac{k}{\epsilon}s + f(\mathbf{x}, t) \quad (4.26)$$

que corresponde a la ecuación de un filtro de primer orden con frecuencia de corte $\omega_c = k/\epsilon$. De esta manera, al incrementar el tamaño de la capa límite, el sistema rechazará de mejor manera las perturbaciones de alta frecuencia.

De esta manera, el empleo de la función saturación unitaria y del concepto de capa límite que ella trae implícito, acarrea un compromiso entre exactitud y rechazo a perturbaciones de alta frecuencia. El diseñador del sistema de control debe juzgar de manera adecuada la importancia de cada uno de estos factores y ajustar los parámetros para satisfacer los requerimientos de desempeño.

4.5. Sumario

En este capítulo se presentó el proceso de síntesis de controladores orbitales y de orientación basados en la técnica de control en modo deslizante. Se derivaron condiciones para ajustar la ganancia de las señales control para garantizar un error de seguimiento suficientemente bajo. También se introdujo el concepto de capa límite para minimizar el efecto de oscilaciones de alta frecuencia no deseadas, típico de las aplicaciones que utilizan SMC .

Los resultados de la implementación de estos controladores serán tratados en el capítulo siguiente.

Capítulo 5

Implementación de los Controladores

5.1. Introducción

Con el fin de evaluar el comportamiento, tanto de los modelos presentados en el capítulo 3 como de las leyes de control presentadas en el capítulo 4, se creó una aplicación basada en MATLAB para la simulación de estos sistemas. *JaveSAT*, como fue bautizada esta aplicación, emula a la herramienta *Spacelab*, desarrollada por L. Prieto [1], aunque trata un problema mucho más genérico y, por lo tanto, menos profundo.

Algunos de los componentes de *JaveSAT*, específicamente los modelos dinámicos de órbita y orientación del satélite, ya fueron presentados en la sección 3.5, cuando se presentó la verificación de los modelos. De cualquier manera, este capítulo muestra todos los componentes de esta herramienta y algunos ejemplos de simulaciones que ilustran su empleo.

5.2. La herramienta de simulación *JaveSAT*

El programa desarrollado consta de una serie de interfaces gráficas de usuario (GUI), que pueden ser empleadas de manera independiente o en secuencia desde un menú principal, y de un modelo en Simulink que se encarga de representar al sistema real. Al haber sido escrito usando las versiones 7.4 de MATLAB y 6.6 de Simulink, se espera que el programa se comporte de manera adecuada en cualquier versión compatible con éstas.

Las tareas de cada uno de los componentes están relacionadas con diferentes detalles de la puesta a punto del problema de control, como son la definición de la órbita, la selección de las características del satélite y otros detalles. Todas estas partes están enlazadas a través de un menú principal, cuya GUI se muestra en la figura 5.1 y que puede iniciarse al escribir el comando `javesat` en la ventana de comandos de MATLAB.

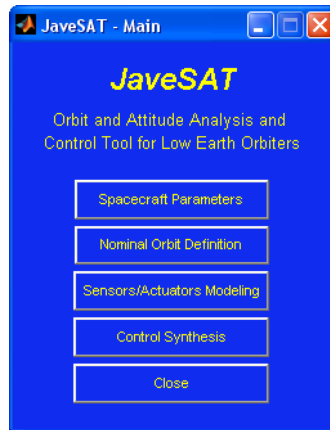


Figura 5.1: Menú principal de *JaveSAT*.

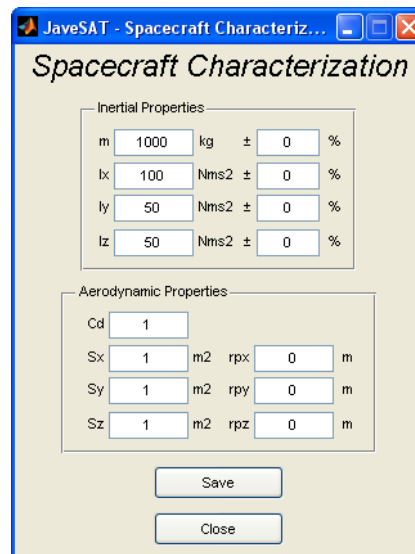


Figura 5.2: Módulo de ingreso de los parámetros del satélite.

A continuación, cada módulo será descrito.

5.2.1. Módulo de Descripción de la Nave

Sin importar la forma real del satélite, los parámetros que describen su comportamiento dinámico se dividen en dos conjuntos: inerciales y aerodinámicos. En el primer grupo se incluyen la masa y los momentos de inercia, con sus respectivos rangos de variación esperados, mientras el coeficiente de rozamiento aerodinámico C_d , el valor de las superficies efectivas en las tres direcciones S_x , S_y , y S_z , y el vector posición del centro de presiones con respecto al centro de masa de la nave \mathbf{r}_{cp} conforman el segundo grupo.

Estos 12 parámetros pueden ser ingresados en la interfaz gráfica de la figura 5.2, la cual puede activarse mediante un clic en el botón *Spacecraft Parameters* del menú principal de *JaveSAT* (figura 5.1) o ingresando el comando `spacecraft_characterization` en la ventana de comandos.

El botón *Save*, en la parte baja de la interfaz, brinda al usuario la posibilidad de guardar las características ya ajustadas en un archivo que luego será leído por el simulador. Esto permite definir varias naves en una misma sesión para luego realizar comparaciones de manera sencilla.

5.2.2. Módulo de Definición de la Órbita

Mediante un clic en el botón *Nominal Orbit Definition* del menú principal o utilizando el comando `orbit_characterization`, se despliega la GUI de la figura 5.3. Este módulo permite ingresar los seis parámetros orbitales (altura del perigeo rp , excentricidad e , inclinación i , ascensión recta del nodo ascendente Ω y argumento del perigeo ω) y visualizar la órbita, tanto en el espacio tridimensional definido por el IRF, como en el plano orbital¹.

Es importante mencionar que la gráfica se actualiza en tiempo real, es decir, cada vez que se cambia alguno de los parámetros, la imagen de la órbita se va actualizando en el sistema de referencia seleccionado. Además de esto, la GUI cuenta con la barra de herramientas estándar de MATLAB para figuras, lo que habilita opciones de visualización como rotaciones, corrimientos panorámicos, acercamientos y alejamientos que permiten una mejor apreciación visual de las características de la órbita.

Por otro lado, de la misma forma en que la interfaz de caracterización de la nave, se cuenta con la opción de guardar los datos de la órbita seleccionada. Además de ello, este módulo permite cargar una órbita previamente guardada para estudiarla gráficamente o, si es el caso, modificarla.

5.2.3. Módulo de Modelamiento de Sensores y Actuadores

Un tercer módulo, mostrado en la figura 5.4, permite ingresar la información acerca de actuadores y sensores de la nave, tanto para cantidades lineales, usadas en el control orbital, como angulares para el control de orientación. Este componente de *JaveSAT* se ejecuta mediante el comando `sensors_and_actuators` o a través de un clic en el botón *Sensors/Actuators Modeling* del menú principal.

Los actuadores, tanto de fuerza como de torque, se han modelado como actuadores lineales de segundo orden, cuya dinámica está definida por una ganancia en DC, un ancho de banda

¹Sistema de referencia también conocido como *Natural Orbit Reference Frame* o NORF. Ver [1] para una definición precisa.

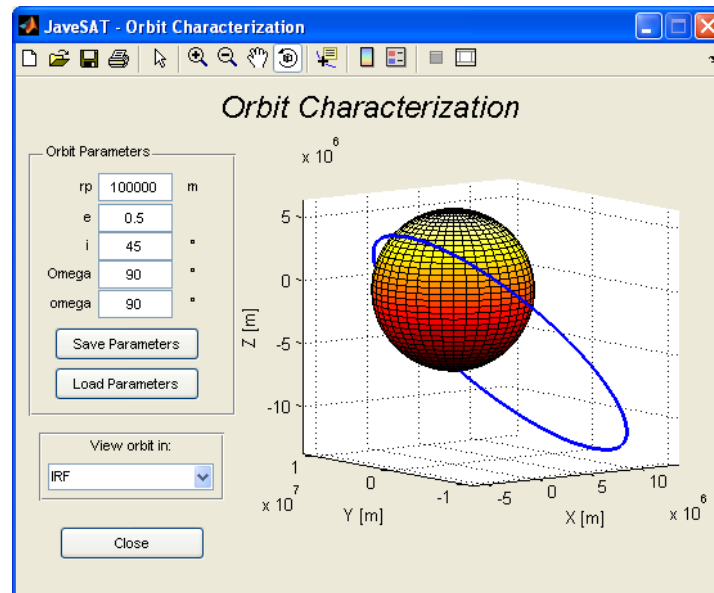


Figura 5.3: Módulo de caracterización de la órbita.

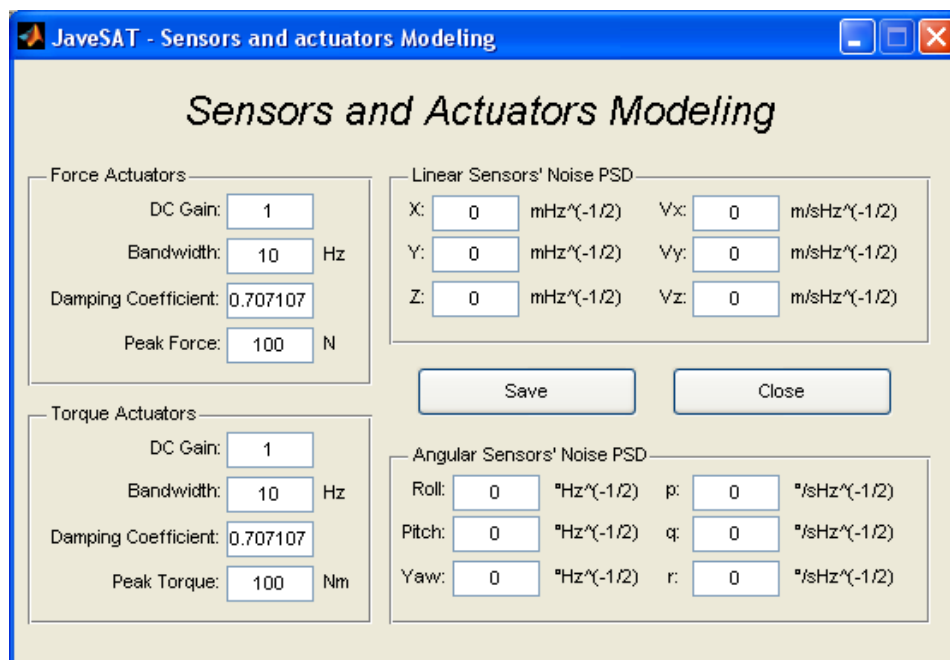


Figura 5.4: Módulo de modelamiento de sensores y actuadores.

y un coeficiente de amortiguamiento. Este modelo se seleccionó por ser el que representa a la mayoría de actuadores reales [3].

Si bien los sensores no se acoplaron en el modelo final debido al trabajo extra que requiere

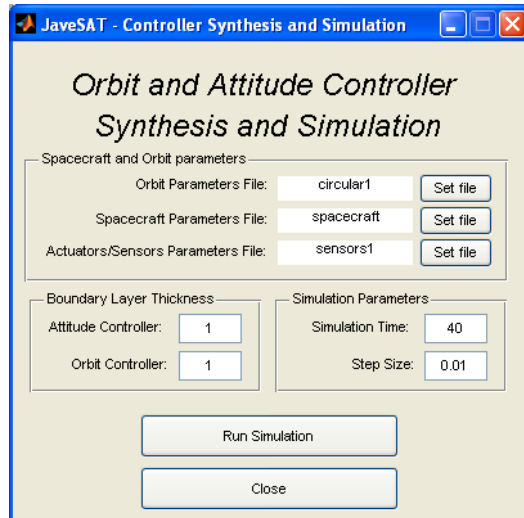


Figura 5.5: Módulo de síntesis y simulación de los controles.

la inclusión de observadores de estado adecuados, la plataforma *JaveSAT* incluye provisión para ellos, con el fin de facilitar futuras ampliaciones. El modelo de los sensores es bastante simplificado, y solo incluye la densidad espectral de potencia del ruido que ellos introducen, ruido asumido como blanco con distribución gaussiana.

Los parámetros ingresados, como en los demás módulos de modelamiento, pueden ser grabados en un archivo tras hacer clic en el botón *save*.

5.2.4. Módulo de Síntesis y Simulación de los Controles

Este módulo, presentado en la figura 5.5, se activa con un clic en el botón *Control Synthesis* del menú principal o con el comando `control_synthesis`. Este componente es el encargado de reunir toda la información necesaria y de enlazarla con el modelo en Simulink, para luego correr la simulación del conjunto satélite/controlador.

En la parte superior de esta ventana, el usuario debe seleccionar los archivos que contienen la descripción de la nave, de la órbita y de los actuadores, archivos generados por los módulos descritos previamente. En la parte baja, se ingresa el valor del grosor de la capa límite ϵ , para cada controlador. Además de esto, existe la posibilidad de ajustar el paso de simulación y la duración de la misma. Cabe aclarar que el modelo se está resolviendo mediante un método de quinto orden de paso fijo (`ode5` de MATLAB).

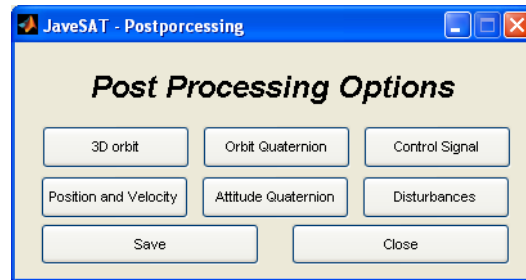


Figura 5.6: Módulo de post-procesamiento.

5.2.5. Módulo de Post-procesamiento

Una vez finaliza la simulación del sistema, la ventana de la figura 5.6 se despliega. Los botones de esta ventana permiten observar los resultados de la simulación de los controladores sintetizados, tales como errores en los cuaterniones, magnitudes de las fuerzas de control, variación en el tiempo de la posición y velocidad y otros. Esta ventana también permite al usuario guardar los resultados en un archivo que le permita usarlos por fuera de *JaveSAT*.

5.2.6. El Modelo en Simulink

El núcleo de *JaveSAT* consiste en el modelo de Simulink cuyo diagrama de bloques se muestra en la figura 5.7. Puede apreciarse su construcción modular, que facilita la inserción de funciones extra, como inclusión de observadores o de otras fuentes de incertidumbre, aparte de otras versiones de la dinámica del satélite.

Los bloques *Satellite Dynamics* y *LORF to IRF* son los mismos que fueron descritos en la sección 3.5, por lo que no se detallarán en esta sección.

El bloque *Enviromental Disturbances*, cuyos detalles pueden verse en la figura 5.8, genera las fuerzas y torques externos, provenientes de las perturbaciones aerodinámicas y del gradiente gravitacional. La figura 5.8(a) muestra la configuración general, en donde cada bloque produce un tipo de perturbación diferente. La fuerza aerodinámica resulta expresada en el IRF y por lo tanto debe ser rotada para encontrar su expresión en el LORF. Los dos torque son sumados, y no requieren transfromación alguna porque ya vienen expresados en el SCRF. La forma en que cada bloque produce las perturbaciones se detalla en las figuras 5.8(b) y 5.8(c).

Los controladores de órbita y de orientación están incluidos dentro del bloque *Controller*, presentado en la figura 5.9. En una implementación completa, las entradas de este bloque deberían conectarse con las salidas de un observador de estados adecuado, pero, por simplicidad, en este trabajo se asume conocimiento completo de los cuaterniones r , R , Q y U . Como se puede ver en la figura 5.9(a), los dos controles son independientes, de manera que uno puede

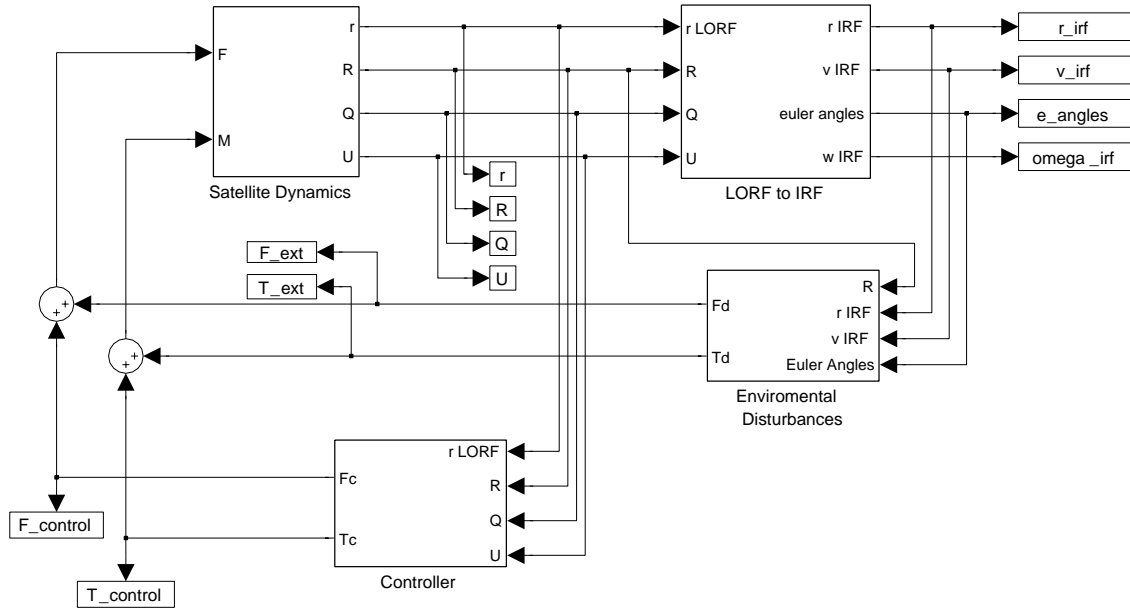


Figura 5.7: Modelo completo en Simulink.

ser reemplazado sin afectar al otro. El diagrama de bloques del control orbital se detalla en la figura 5.9(b), mientras la figura 5.9(c) hace lo propio con el controlador de orientación. Los bloques actuadores que se ven en la figura 5.9(a) constan del bloque estándar de Simulink y de un bloque de saturación para representar la fuerza o torque máximo disponible en cada caso (ver figura 5.10).

5.3. Ejemplos de una Simulación

Con el propósito de mostrar el rendimiento de las leyes de control sintetizadas a continuación se muestran los resultados de la simulación de un caso de estudio.

En la figura 5.11 se observa como el valor del cuaternión orbital R_o se mantiene prácticamente constante. Al observar el error de R_o con respecto a R_{ref} en la figura 5.12 se confirma que el controlador está haciendo su trabajo y que, a pesar de las perturbaciones, el satélite mantiene su órbita. Evidentemente, el seguimiento no es perfecto, lo que resulta claro al observar como uno de los componentes del error crece al aumentar el tiempo.

Este aumento del error, debido principalmente a la fuerza de rozamiento atmosférico, produce, como es de esperarse, un crecimiento en la componente longitudinal de la fuerza de control, según se aprecia en la figura 5.13. La magnitud de la fuerza de control crece velozmente debido a la elevada ganancia de control, característica de las técnicas SMC.

Con el fin de proporcionar una perturbación inicial de la cual el satélite requiera recuperar-

Capítulo 5. Implementación de los Controladores

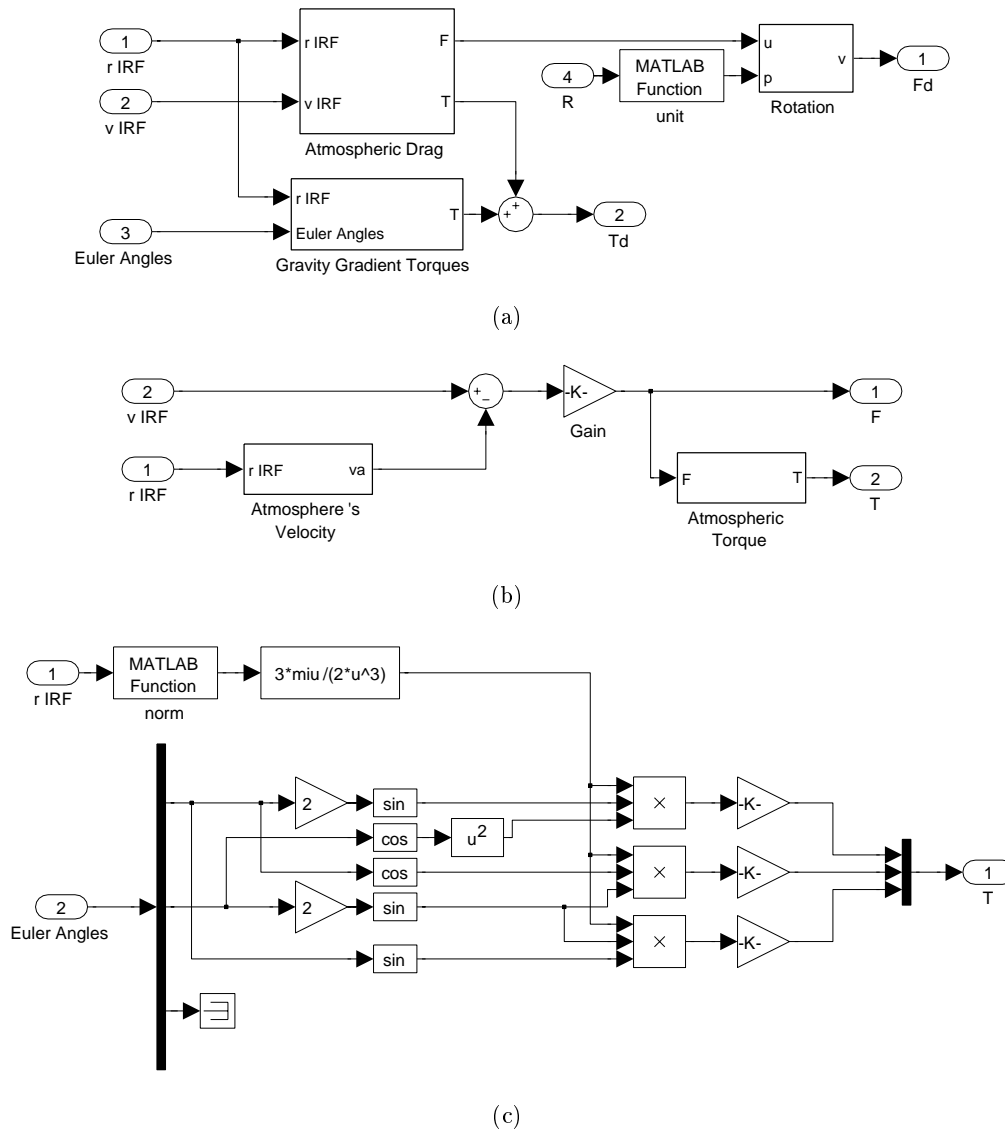


Figura 5.8: Diagrama de bloques para la generación de perturbaciones: (a) Vista general, (b) Perturbaciones aerodinámicas, (c) Gradiente gravitacional.

se, *JaveSAT* inicia la simulación con el satélite en una orientación inicial aleatoria. En la figura 5.14 se observa la variación en el tiempo de las componentes del cuaternión de orientación. Al observar la figura 5.16, es claro que la orientación del satélite se estabiliza dentro de un margen de error adecuado en un tiempo relativamente corto.

El gran inconveniente de la técnica de control en modo deslizante, las oscilaciones de alta frecuencia tanto en la variable controlada como en la señal de control, se pone en evidencia al observar las figuras 5.15 y 5.17. La frecuencia de estas oscilaciones puede ajustarse variando el tamaño de la capa límite, mediante cambios en el valor del parámetro ϵ .

5.3. Ejemplos de una Simulación

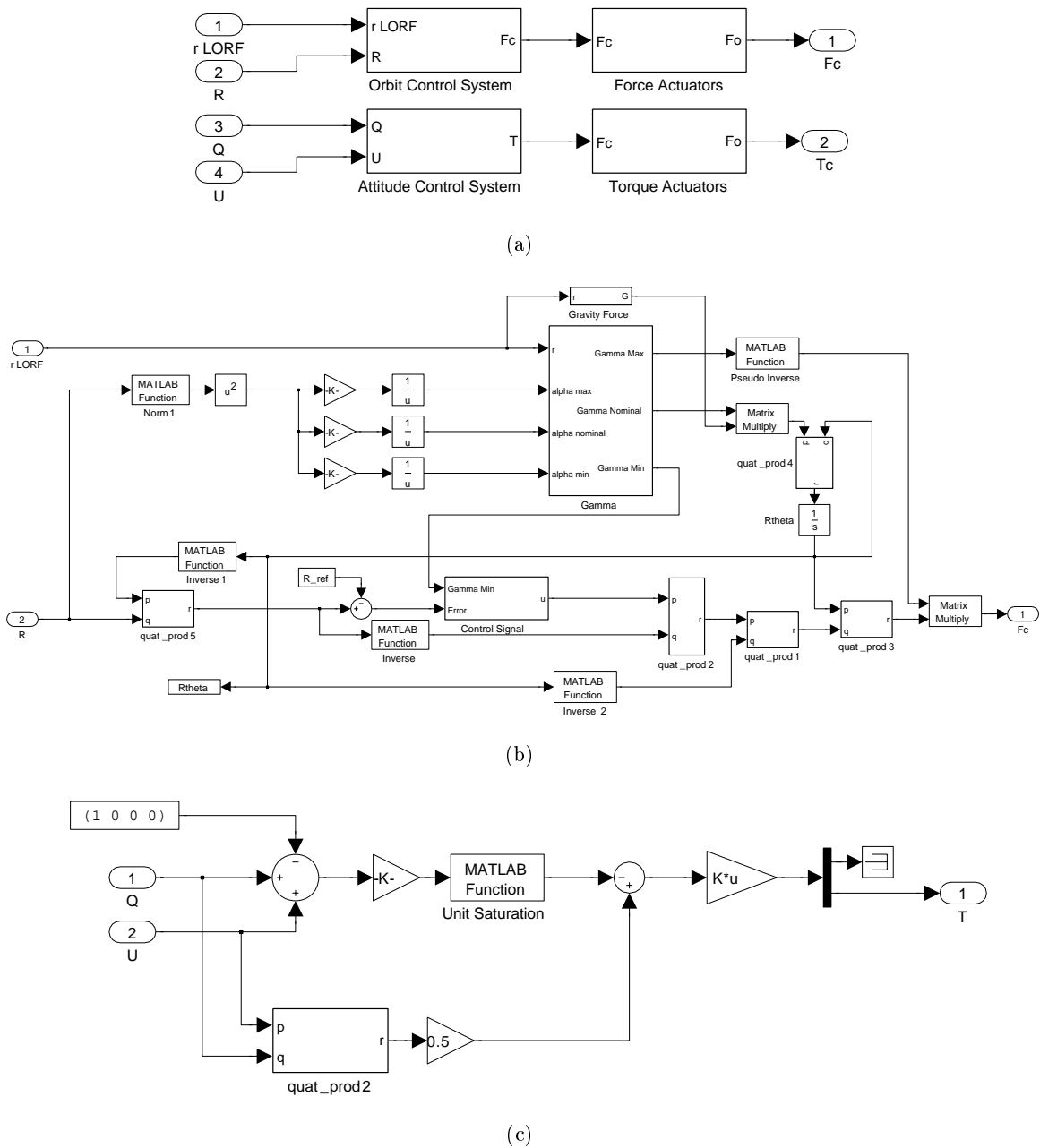


Figura 5.9: Diagrama de bloques de los controladores (a) Vista general, (b) Control de órbita, (c) Control de orientación.

En las figuras 5.13 y 5.17 otro punto negativo del empleo de esta técnica de control se evidencia, el cual es el excesivo esfuerzo de control. Puesto que las ganancias de control se calculan empleando el peor escenario posible, el cual realmente sucede rara vez, se suelen obtener valores extra conservadores que resulta en fuerzas de control muy altas. Teniendo en

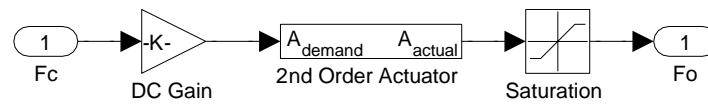


Figura 5.10: Modelo de un actuador.

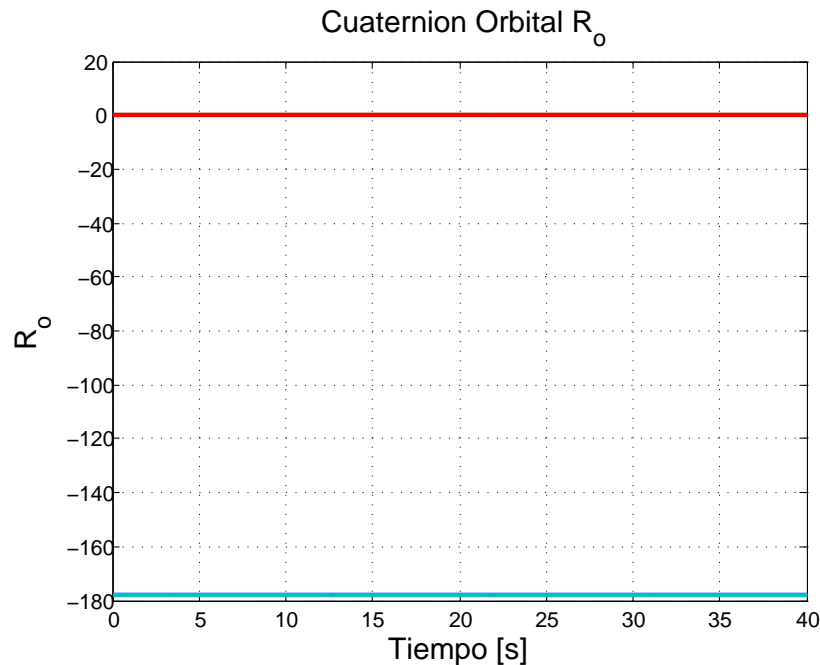


Figura 5.11: Cuaternion orbital.

cuenta que en un satélite se busca utilizar la menor cantidad de combustible posible para aumentar su vida útil, este resultado desaconseja el empleo de esta técnica de control para esta aplicación. De cualquier manera, la llamada técnica de control en modo deslizante con estimación de perturbaciones SMCPPE [28, 30] es una opción que puede ser estudiada y que permite reducir drásticamente los valores de estas ganancias.

5.4. Sumario

Los principales resultados del trabajo de grado fueron el tema de este capítulo. Se describió la herramienta de simulación *JaveSAT*, basada en MATLAB, con cada uno de sus componentes, y se presentaron ejemplos que muestran no solo el rendimiento de las leyes de control sintetizadas en el capítulo 4 sino también el modo de empleo del programa desarrollado.

Los ejemplos de simulación mostraron claramente que la estrategia de control planteada funciona, aunque las clásicas desventajas del SMC acarrearán un costo que quizá desaconseje se

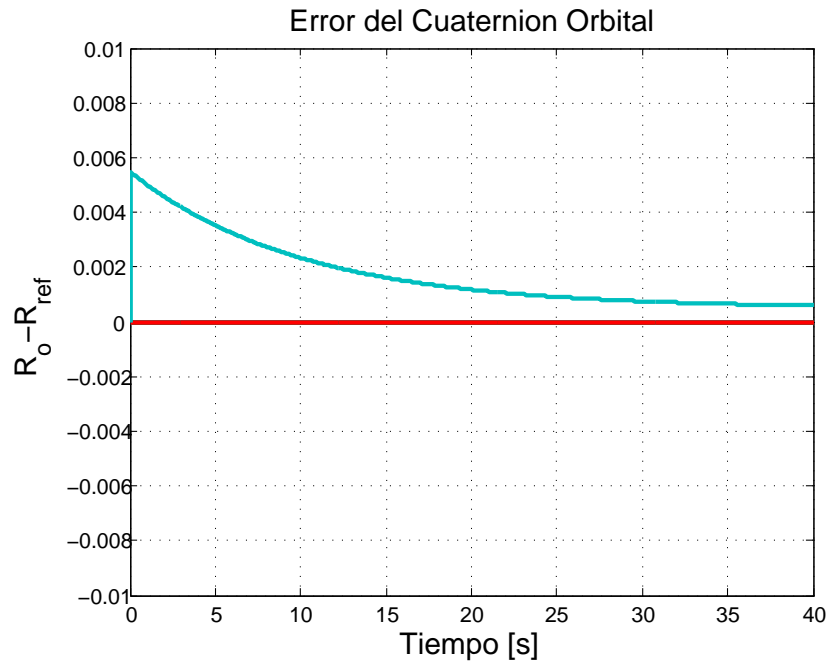


Figura 5.12: Error del cuaternion orbital.

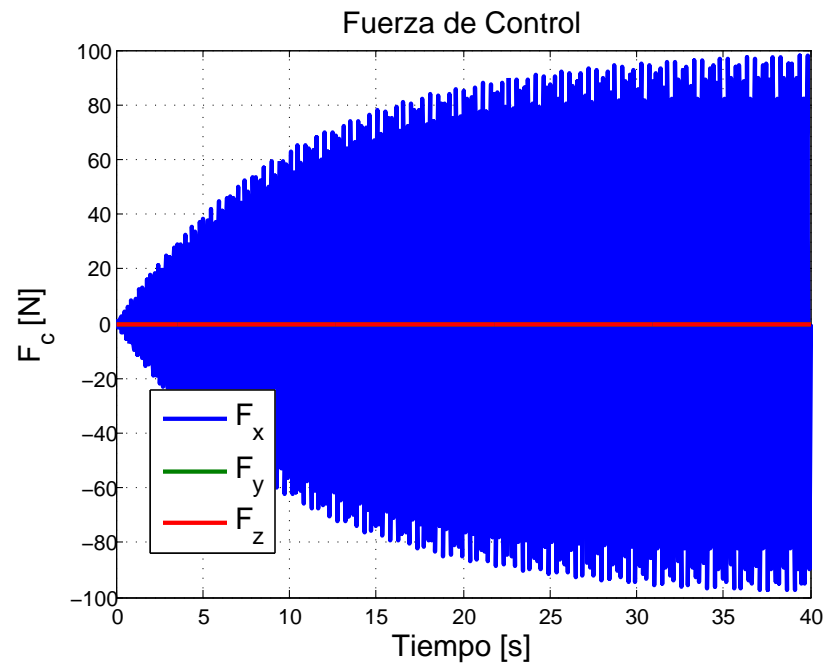


Figura 5.13: Fuerza de control.

empleo en aplicaciones reales.

Finalmente, antes de emitir un juicio final sobre la idoneidad del empleo de la estrategia de

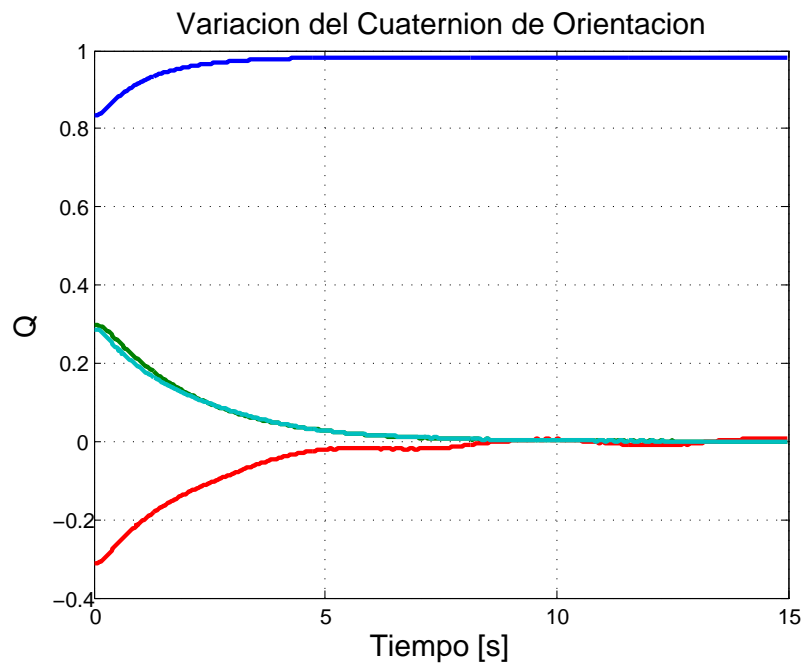


Figura 5.14: Cuaternión de orientación.

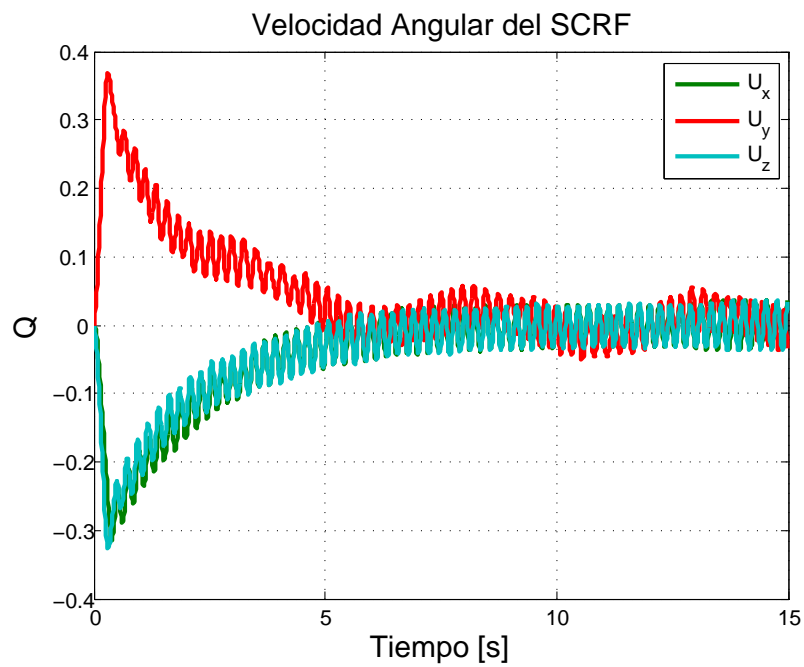


Figura 5.15: Velocidad angular del SCRF.

control presentada, hay que considerar que los ejemplos planteados fueron casos enteramente

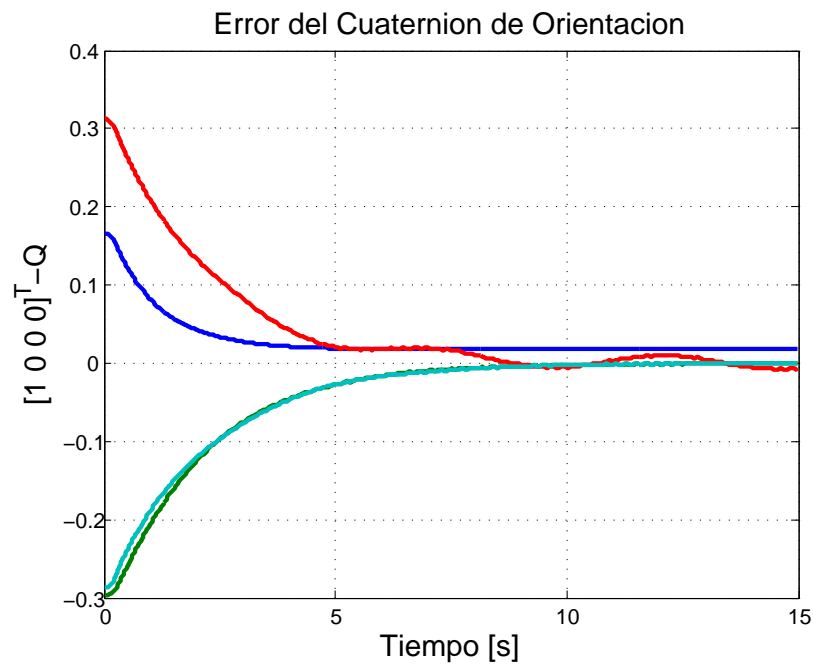


Figura 5.16: Error del cuaternión de orientación.

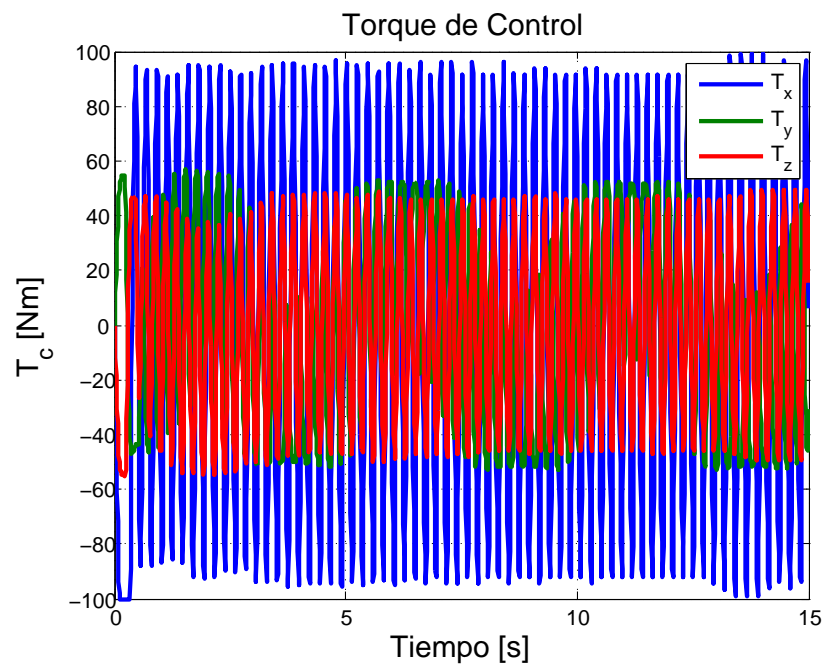


Figura 5.17: Torque de control.

genéricos. Una implementación real, por supuesto, requerirá un modelamiento más cuidadoso

Capítulo 5. Implementación de los Controladores

del satélite y una mejor estimación de las perturbaciones externas. Esto, sumado a restricciones y objetivos más claros, permitirían una mejor selección de las ganancias, de los grosores de las capas límite y de las frecuencias de actuación, con lo que se puede llegar a la síntesis de un controlador adecuado para el problema específico.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

6.1. Conclusiones

Este trabajo de grado abordó un tema poco tratado en Colombia en el ámbito académico y totalmente inexplorado en el campo industrial. Los resultados obtenidos, por lo tanto, deben revisarse a la luz de la naturaleza netamente innovadora y el carácter exploratorio de los objetivos propuestos.

El planteamiento de modelos dinámicos basados en cuaterniones para la dinámica orbital y de orientación de un LEO, presentado en el capítulo 3, requirió una profunda revisión de la literatura acerca del manejo de estos elementos matemáticos, condensada en el capítulo 2. Estos dos capítulos satisfacen el primer objetivo.

Aunque los resultados obtenidos al avanzar el proceso de investigación desaconsejaron el empleo de las técnicas de control propuestas inicialmente (control lineal robusto H_∞), en el capítulo 4 se presentaron leyes de control no lineales basadas en la técnica del control en modo deslizante que presentan un grado de robustez elevado. Con la síntesis de estas leyes de control, el tercer objetivo fue alcanzado.

Al tratarse de un modelo fuertemente no lineal, la estructura de incertidumbre para la planta se trató de manera sencilla como posibles variaciones en los parámetros inerciales (masa y momentos de inercia) y modelamiento de perturbaciones externas. De esta manera se cumplió el segundo objetivo propuesto. Otras fuentes de incertidumbre no consideradas, como dinámicas no modeladas o perturbaciones externas de otros tipos, se pueden incluir fácilmente en el modelo, y un incremento en la ganancia de los controladores será suficiente para lidiar con ellas, gracias al elevado grado de robustez del SMC .

La creación de una aplicación basada en MATLAB para la simulación de los modelos y leyes de control presentados, respectivamente, en los capítulos 3 y 4, permite una sencilla validación

de los mismos, además de generar una herramienta útil tanto para la enseñanza como para futuras exploraciones dentro de esta misma temática, tal como se muestra en el capítulo 5. *JaveSAT*, aparte de satisfacer el cuarto objetivo propuesto, es uno de los principales resultados de este proyecto.

De esta manera se concluye que tanto el objetivo general como los objetivos específicos propuestos, tras la modificación aprobada por el comité de maestría, fueron alcanzados.

Con respecto a otros trabajos similares, como [21] o [1], la principal diferencia y contribución de esta tesis es el empleo de cuaterniones en todo el proceso de desarrollo del sistema de control, desde el modelamiento hasta la síntesis de la ley de control. El trabajo de Prieto [1] soluciona esencialmente el mismo problema, pero se aborda desde una perspectiva completamente diferente basada en modelos y leyes de control lineales, mientras que Andreis en [21], presenta un modelo basado en cuaterniones, pero éste no se utiliza para realizar el control, debido a los problemas de linealización encontrados.

6.2. Trabajo Futuro

Cuando este trabajo de grado fue planteado, la principal intención, tanto del autor como del director, fue la apertura de un área de investigación poco tratada en la Pontificia Universidad Javeriana. Con esta idea en mente, el trabajo que puede seguir en esta área es inmenso.

Dentro de los desarrollos directos desde esta tesis se pueden mencionar el diseño de observadores de estado robustos, no incluidos aquí según se mencionó en el capítulo 4, que serían necesarios en el caso de la implementación real de un sistema de control. Este tema es bastante interesante, y puede dar lugar a varios trabajos de grado, tanto a nivel de pregrado como de maestría. El estudio de la convergencia de este tipo de observadores de estado no lineales y robustos es una línea de investigación bastante activa e interesante. Aparte de esto, el modelo de las perturbaciones externas puede ampliarse para incluir otras tales como los armónicos gravitacionales o el campo magnético terrestre, que también suelen afectar a los LEO.

La herramienta *JaveSAT*, por su parte, también puede ser ampliada para incluir el uso de modelos tradicionales en la simulación y de otras técnicas de control, tanto lineales como no lineales, permitiendo realizar comparaciones entre diferentes combinaciones planta/controlador. La estructura modular del simulador permite que esta tarea sea desarrollada con relativa facilidad. Otra posibilidad de expansión consiste en transportar los algoritmos a otro lenguaje de programación, de manera que se obtuviera una aplicación *stand-alone* que no requiera tener instalado MATLAB para su ejecución.

Otras áreas de gran interés en el campo espacial, que podrían ser exploradas a la luz

de estos modelos, podrían ser, por citar un par de ejemplos, los problemas de *rendezvous* o acoplamiento entre naves espaciales, o el control de formaciones o constelaciones de satélites. En el primero se requiere un delicado control para asegurar que las trayectorias de dos naves se intersectan en el punto adecuado, en la dirección correcta y con nula velocidad relativa, lo que plantea una gran cantidad de retos al exigir una enorme precisión al controlador. El segundo problema consiste en coordinar un grupo de satélites de marea que mantenga una posición relativa exacta entre ellos, a la vez que se mueven en una trayectoria común.

Bibliografía

- [1] L. D. Prieto, “Drag Free and Attitude Control for a Low Earth Orbiter: a LMI Approach,” Ph.D. dissertation, Politecnico di Torino, Turín, Italia, Jan. 2005.
- [2] J. B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1999.
- [3] M. J. Sidi, *Spacecraft Dynamics and Control*. New York, N.Y.: Cambridge University Press, 1997.
- [4] W. R. Hamilton, “On a new Species of Imaginary Quantities Conected with a Theory of Quaternions,” *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol. 2, pp. 424–434, Dec. 1844.
- [5] ———, *Lectures on Quaternions*. Cambridge: McMillian & Co, 1853.
- [6] J. C. Maxwell, *A treatise on Electricity and Magnetism*. Cambridge: McMillian & Co., 1873.
- [7] J. A. Escobar, “Possible Implications of Using Quaternions in Hydrosiences,” Tesis de Maestría en Hidrosistemas, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia, July 2006.
- [8] D. Prieto and Z. Ahmad, “A Drag Free Control Based on Model Predictive Technics,” in *Proc. of 2005 American Control Conference*, Protland, OR, June 2005, pp. 1527–1532.
- [9] B. Bona and D. Prieto, “Orbit and Attitude Control for European Satellite GOCE,” in *Proc. of 2005 IEEE Conference on Networking Sensing and Control*, Mar. 2005, pp. 728–733.
- [10] E. Canuto, B. Bona, G. Calafiore, and M. Indri, “Drag Free Control for European Satellite GOCE. Part I: Modeling.” in *Proc. of 41st IEEE Conference on Desicion and Control*, Las Vegas, NV, Dec. 2002, pp. 1269–1274.

Bibliografia

- [11] —, “Drag Free Control for European Satellite GOCE. Part II: Digital Control.” in *Proc. of 41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, NV, Dec. 2002, pp. 4072–4077.
- [12] E. Canuto, P. Martella, and G. Sechi, “Attitude and Drag Control: an Application to GOCE Satellite,” *Space Science Reviews*, vol. 11, pp. 1–11, 2002.
- [13] Y. Wu, X. Hu, M. Wu, and D. Hu, “Error Annalysis of Strapdown Inertial Navigation Using Dual Quaternion Algebra,” in *Proc. of IEEE Position Location and Navigation Symposium*, Apr. 2004, pp. 259–267.
- [14] J. K. C. Chou, “Quaternion Kinematic and Dynamic Differential Equations,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 8, pp. 53–64, Feb. 1992.
- [15] S. Gupta, “Linear Quaternions Equations With Application To Spacecraft Attitude Propagation,” in *Proc. of 1998 IEEE Aerospace Conference*, Mar. 1998, pp. 69–76.
- [16] Y. N. Chelnokov, “The Use of Quaternions in the Optimal Control Problems of Motion of the Center of Mass of a Spacecraft in a Newtonian Gravity Field: I,” *Cosmic Research*, vol. 35, pp. 470–484, 2001.
- [17] —, “The Use of Quaternions in the Optimal Control Problems of Motion of the Center of Mass of a Spacecraft in a Newtonian Gravity Field: II,” *Cosmic Research*, vol. 41, pp. 85–99, 2003.
- [18] —, “The Use of Quaternions in the Optimal Control Problems of Motion of the Center of Mass of a Spacecraft in a Newtonian Gravity Field: III,” *Cosmic Research*, vol. 41, pp. 460–476, 2003.
- [19] D. Andreis and E. S. Canuto, “Orbit Dynamics and Kinematics with Full Quaternions,” in *Proc. of 2004 American Control Conference*, Boston, MA, June 2004, pp. 3660–3665.
- [20] —, “The LORF Orbit Equation with Full Quaternions,” in *Proc. of 16th Triennial IFAC World Conference*, Praga, Rep. Checa, July 2005, pp. 330–335.
- [21] D. Andreis, “Standard Spacecraft Control System Design,” Ph.D. dissertation, Politecnico di Torino, Turín, Italia, Dec. 2005.
- [22] M. Lovera, “Control-oriented modelling and Simulation of Spacecraft Attitude and Orbit Dynamics,” *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, vol. 12, pp. 73–88, 2003.

- [23] L. S. Pontryagin, *Generalizaciones de Los Números*. Moscú: Ed. URSS, 2005.
- [24] J. R. Wertz, *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1978.
- [25] M. Noton, *Spacecraft Navigation and Guidance*. London: Springer, 1998.
- [26] V. A. Chobotov, *Orbital Mechanics*. Washington D.C.: AIAA Education Series, 1991.
- [27] J. J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking Control of Nonlinear Systems using Sliding Surfaces with Application to Robot Manipulators," *International Journal of Control*, vol. 38, no. 2, pp. 465–492, 1983.
- [28] H. Elmali and N. Olgac, "Sliding Mode Control with Perturbation Estimation: A new Approach," *Automatica*, vol. 28, no. 1, pp. 145–151, 1992.
- [29] —, "Robust Output Tracking Control of Nonlinear MIMO Systems via Sliding Mode Technique," *International Journal of Control*, vol. 56, no. 4, pp. 923–941, 1992.
- [30] —, "Satellite Attitude Control via Sliding Mode Control with Perturbation Estimation," *IEE Control Theory and Applications*, vol. 143, no. 3, pp. 276–282, may 1996.
- [31] J. J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Engelwood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.
- [32] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.