PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

Algunas propiedades topológicas de los Grupoides dobles de Lie

Juan Sebastian Rodríguez Carreño

Seminario presentado para optar al grado de Matemático.
Director de Tesis: *Jesús Alonso Ochoa Arango, Ph.D.*

Noviembre de 2013

A mis padres y a mi hermano.
A Paola Vargas por su incondicional amistad.

Índice general

Algunas propiedades topológicas de los grupoides dobles de Lie

Juan Sebastian Rodríguez
Javeriana.

Resumen

En este trabajo pretendemos dar una breve introducción a la teoría de grupoides (dobles) de Lie y estudiamos algunas propiedades topológicas de los mismos. De manera más exacta, demostramos que el groupoide de monodromía asociado a una foliación admite una estructura de grupoide de Lie y que la inclusión de la *médula* en el grupoide doble subyacente, satisface la *Propiedad de Extensión de Homotopías*.

Palabras claves. Grupoides dobles, Grupoides topológicos, Grupoides de Lie, Cofibraciones.

2013 Mathematics subject Classification. 22A22, 22E99, 14F35, 53C12, 55P05, 18A25, 18D05.

1. Introducción

La aplicación de métodos categóricos en geometría diferencial ha cobrado gran interés. Como puede observarse en [**C, CF1, CF2**] existe una gran variedad de resultados geométricos que se derivan a partir del estudio de estructuras como Grupoides y Algebroides de Lie, Algebroides de Courant, Espacios Simpliciales, Extensiones de Kan, n-categorías, etc. Pero pocos trabajos se han dedicado al estudio de las categorías iteradas [1]. Los trabajos de Ehresman [**Eh**], R. Brown y K. Mackenzie [**BM**], Mackenzie [**M1, M2, M3, M4, M5**] y, más recientemente, por Th. Voronov [**V**], Gracia-Saz y Mehta [**GM**] y R. A. Metha [**M**], son algunos de los pocos trabajos dedicados a estudiar propiedades geométricas (y topológicas) sobre estructuras categóricas dobles.

Como consecuencia, es comprensible que no se tenga un amplio conocimiento, de las propiedades geométricas y topológicas de las categorías formadas por estas estructuras dobles, en particular, de la categoría formada por los grupoides dobles (topológicos y/o de Lie).

En este trabajo pretendemos dar una breve introducción a la teoría de grupoides (dobles) de Lie y estudiar la *Propiedad de Extensión de Homotopías* para la *médula* de un grupoide doble de Lie. A continuación daremos una descripción más detallada del contenido del trabajo.

En el primer capítulo se introducen los preliminares necesarios para desarrollar el resto del trabajo. Se comienza dando una pequeña introducción a la teoría de categorías y grupoides. En este trabajo, dada una categoría con conjunto de flechas $\mathcal{A}$, pensaremos la multiplicación en $\mathcal{A}$ como la concatenación de flechas, leída de derecha a izquierda, como se muestra a continuación:

$$Z \longleftarrow Y \longleftarrow X$$

Concluimos el primer capítulo con una introducción básica a las variedades diferenciables.

En el segundo capítulo construimos el grupoide (y grupo) fundamental asociado a un espacio topológico y estudiamos su relación con los espacios de cubrimiento del espacio inicial. En particular, mostramos como construir el espacio de cubrimiento universal a partir del grupoide fundamental.

En el tercer capítulo estudiamos algunos resultados de grupos topológicos, introducimos las álgebras de Clifford y damos una construcción del grupo espinorial siguiendo [**Ch**].

En el cuarto capítulo, estudiamos foliaciones de variedades diferenciables. Para cada foliación construimos el grupoide de monodromía asociado y demostramos que el grupoide de monodromía de una foliación siempre admite estructura de grupoide de Lie. Aunque es bien

[1] *N. de T.* para n-fold categories.

conocido entre los expertos, presentamos aquí, *por primera vez*, una prueba totalmente detallada de este hecho.[2]

En el quinto capítulo estudiamos la *Propiedad de Extensión de Homotopías* para funciones continuas. Concluimos el capítulo demostrando algunos criterios para decidir si una aplicación dada es cofibración.

En el último capítulo de este trabajo estudiamos nociones básicas de la teoría de grupoides dobles topológicos, definimos la médula y el grupoide medular asociado a un grupoide doble y concluimos el capítulo estudiando cofibraciones sobre grupoides dobles topológicos y probamos el resultado principal de este trabajo (Teorema 6.20):

En un grupoide doble de Lie la inclusión de la médula en el espacio de cajas es una cofibración.

[2] En [**MM**] se da una idea de la prueba, sin completar detalles.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo estudiaremos los preliminares necesarios para el desarrollo de este trabajo. Las dos primeras secciones constituyen los preliminares algebraicos de la teoría de categorías y seguiremos el enfoque de [**Ml**]. Para evitar problemas de fundamentos, pensaremos que todos los conjuntos subyacentes a las diversas estructuras que consideraremos (grupos, anillos, espacios topológicos, etc) hacen parte de un *universo* $\mathcal{U}$. En la última sección estudiamos las nociones básicas de la teoría de variedades diferenciales, como en el texto [**Le**].

1. Categorías

DEFINICIÓN 1.1. Una *categoría pequeña* $\mathcal{C}$ es una colección de datos $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, s, t, m, id)$ tales que :

- $\mathcal{A}$ y $\mathcal{O}$ son conjuntos, llamados conjunto de flechas y objetos, respectivamente,
- $s, t : \mathcal{A} \to \mathcal{O}$ son funciones, llamadas origen y final, respectivamente,
- $m : \mathcal{A}\ {}_s\times_t\ \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e $id : \mathcal{O} \to \mathcal{A}$ son funciones, donde
$$\mathcal{A}\ {}_s\times_t\ \mathcal{A} = \{(g, f) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mid s(g) = t(f)\},$$
denota el producto de $\mathcal{A}$ con sí mismo fibrado por s y t. Dado $(g, f) \in \mathcal{A}\ {}_s\times_t\ \mathcal{A}$ escribiremos gf en lugar de $m(g, f)$ e id_X en lugar de $id(X)$.

Todos estos datos sujetos a las siguientes condiciones:

- Si $(f, g) \in \mathcal{A}\ {}_s\times_t\ \mathcal{A}$, entonces $s(fg) = s(g)$ y $t(fg) = t(f)$.
- Si $(h, g), (g, f) \in \mathcal{A}\ {}_s\times_t\ \mathcal{A}$, entonces $h(gf) = (hg)f$.
- Si $X \in \mathcal{O}$, entonces $s(id_X) = t(id_X) = X$.
- Si $f \in \mathcal{A}$, entonces $f\, id_{s(f)} = f = id_{t(f)} f$.

OBSERVACIÓN 1.2. Dada una categoría $\mathcal{C} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s, t, m, id)$, llamaremos *conjunto de morfismos* de la categoría al conjunto de flechas $\mathcal{A}$. En algunas ocasiones denotaremos la categoría por el gráfico
$$\mathcal{A} \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathcal{O} .$$

OBSERVACIÓN 1.3. Dada una categoría $\mathcal{C} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s, t, m, id)$, el conjunto $\mathcal{O}$ también será denotado por $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Dados $X, Y \in \mathcal{O}$, el conjunto $\{f \in \mathcal{A} \mid s(f) = X \ \text{ y } \ t(f) = Y\}$, lo denotaremos por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y se denominará *conjunto de morfismos de X en Y*; también escribiremos $f : X \to Y$ en lugar de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

OBSERVACIÓN 1.4. Los axiomas que definen una categoría se pueden reescribir utilizando diagramas conmutativos. Una categoría $\mathcal{C}$ es una colección de datos $(\mathcal{A}, O, s, t, m, id)$ tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

1. *Compatibilidad de la composición parcial con las aplicaciones origen y final.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[d, "t"'] & \mathcal{A}\ {}_s\times_t\ \mathcal{A} \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "m"] & \mathcal{A} \arrow[d, "s"] \\ O & \mathcal{A} \arrow[l, "t"] \arrow[r, "s"'] & O, \end{tikzcd}$$

donde p_1 y p_2 denota la proyección en la primera y segunda coordenada, respectivamente.

2. *Asociatividad de la composición parcial.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}\ {}_s\times_t\ \mathcal{A}\ {}_s\times_t\ \mathcal{A} \arrow[r, "Id_{\mathcal{A}}\times m"] \arrow[d, "m\times Id_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{A}\ {}_s\times_t\ \mathcal{A} \arrow[d, "m"] \\ \mathcal{A}\ {}_s\times_t\ \mathcal{A} \arrow[r, "m"'] & \mathcal{A}, \end{tikzcd}$$

3. *Compatibilidad de la aplicación identidad con las aplicaciones origen y final.*

$$\begin{tikzcd} O & \mathcal{A} \arrow[l, "t"'] \arrow[r, "s"] & O \\ & O \arrow[ul, equal] \arrow[u, "id"'] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

4. *Identidad para la composición.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}\ {}_s\times_{Id_O} O \arrow[r, "Id_{\mathcal{A}}\times id"] \arrow[dr, "p_1"'] & \mathcal{A}\ {}_s\times_t\ \mathcal{A} \arrow[d, "m"] & O\ {}_{Id_O}\times_t\ \mathcal{A} \arrow[l, "id\times Id_{\mathcal{A}}"'] \arrow[dl, "p_2"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

A continuación damos algunos ejemplos de categorías y de construcciones generales sobre las mismas.

DEFINICIÓN 1.5. Sea $C = \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & O \end{tikzcd}$ una categoría, definimos la categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$ por:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$.
- Las aplicaciones origen y final de $\mathcal{C}^{op}$ son t y s, respectivamente.
- Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y,Z)$, definimos $m_{op}(g,f) = fg$.

DEFINICIÓN 1.6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Decimos que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ es un *isomorfismo*, si existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ tal que $gf = id_X$ y $fg = id_Y$, en tal caso diremos que X es *isomorfo* a Y.

EJEMPLO 1.7. Sea R un anillo, denotamos por ${}_R\mathcal{M}$ a la categoría cuyos objetos son R-módulos a izquierda y las flechas son morfismos de R-módulos con la composición usual de funciones.

EJEMPLO 1.8. Sea G un grupo finito. Una *representación* de G sobre un cuerpo $\mathbb{k}$ es un par (V,ρ), donde V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{k}$ y $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ es morfismo de grupos.

Sean (V,ρ_V) y (W,ρ_W) representaciones de un grupo finito G sobre $\mathbb{k}$. Un *morfismo de representaciones* o un *entrelazamiento*, es una transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ T$ para todo $g \in G$, es decir, el siguente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "T"'] & W. \end{tikzcd}$$

Definimos la categoría de representaciones de G sobre $\mathbb{k}$, denotada por $\mathcal{R}ep_{\mathbb{k}}(G)$, como la categoría cuyos objetos son representacines de G sobre $\mathbb{k}$ y cuyos morfismos son entrelazamientos entre representaciones de G.

EJEMPLO 1.9. Sea R un anillo conmutativo. Definimos la categoría $\mathcal{M}at_R$, a partir de los siguientes datos

- *Objetos:* Números naturales.
- *Flechas:* Para todo $m,n \in \mathbb{N}$, definimos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}at_R}(m,n) = \mathbb{M}_{n\times m}(R)$, el conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times m$ con entradas en el anillo R.

La composición de flechas es la multiplicación usual de matrices.

DEFINICIÓN 1.10. Sean $\mathcal{C} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s, t, m, id)$ y $\mathcal{C}' = (\mathcal{A}', \mathcal{O}', s', t', m', id')$ categorías, *un funtor* (covariante) de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ es un par de funciones $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ y $f : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ tales que

- $F(id_X) = id'_{f(X)}$, para todo objeto X de $\mathcal{C}$.
- Si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, entonces $F(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(f(X), f(Y))$.
- $F(gh) = F(g)F(h)$, para todo par de morfismos g y h tales que gh este definido.

Cuando no haya peligro de confusión denotamos por F a las dos funciones f y F. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ son dos funtores, el funtor $G \circ F, g \circ f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se llama la composición de G con F.

EJEMPLO 1.11. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, definimos el funtor identidad $I_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ como $I_{\mathcal{C}}(X) = X$ y $I_{\mathcal{C}}(f) = f$ para todo objeto X y morfismo f de la categoría.

EJEMPLO 1.12. Sean $\mathcal{R}ing$ y $\mathcal{G}rp$ la categoría de anillos y grupos, respectivamente. Para cada anillo R sea $\mathrm{GL}(n,R)$ el grupo general lineal de todas las matrices invertibles de tamaño $n\times n$ con entradas en R. Observe que cada morfismo de anillos $f:R\to S$ induce un morfismo de grupos $\mathrm{GL}(n,f):\mathrm{GL}(n,R)\to\mathrm{GL}(n,S)$, tal que para cada $A\in\mathrm{GL}(n,R)$ la matriz $\mathrm{GL}(n,f)(A)$ se obtiene al aplicar f a cada entrada de la matriz A. Se sigue que $\mathrm{GL}(n,\cdot)$ es un funtor de $\mathcal{R}ing$ en $\mathcal{G}rp$.

EJEMPLO 1.13. Definimos $*:\mathcal{R}ing\to\mathcal{G}rp$ como el funtor que a cada anillo R le asocia el grupo R^* de todas las unidades de R y a cada morfismo de anillos $f:R\to S$ asocia el morfismo de grupos $f^*:=f|_{R^*}$.

DEFINICIÓN 1.14. Sean $F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ dos funtores, una *transformación natural* $\tau:F\dot{\to}G$ de F en G es una familia de morfismos $\tau_X\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),G(X))$ tal que para cada morfismo $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & G(Y), \end{tikzcd}$$

es decir $\tau_Y F(f)=G(f)\tau_X$. Si τ_X es biyectiva para todo $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, decimos que τ es un *isomorfismo natural* y escribimos $F\cong G$. Denotamos por $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ a la categoría cuyos objetos son funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ y morfismos son transformaciones naturales.

DEFINICIÓN 1.15. Decimos que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes, si existen funtores $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ y $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ tales que $I_{\mathcal{C}}\cong G\circ F$ y $I_{\mathcal{D}}\cong F\circ G$.

EJEMPLO 1.16. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Definimos el *funtor diagonal* $\Delta:\mathcal{C}\to\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ como sigue.

- Para cada $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ el funtor $\Delta_X:=\Delta(X):\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ viene dado por $\Delta_X(Z)=X$ y $\Delta_X(f)=id_X$, para todo $Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ y todo morfismo f de $\mathcal{D}$.
- Si $f:X\to Y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ definimos $\Delta(f):\Delta_X\dot{\to}\Delta_Y$ por $\Delta(f)_Z=f$, para todo $Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

EJEMPLO 1.17. Sean $\mathrm{GL}(n,\cdot),*:\mathcal{R}ing\to\mathcal{G}rp$ los funtores de los Ejemplos 1.12 y 1.13. El determinante $\det:\mathrm{GL}(n,\cdot)\dot{\to}*$ es una transformación natural. Más explícitamente, para cada par de anillos R y S, y cada morfismo de anillos $f:R\to S$ el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}(n,R) \arrow[r, "\det_R"] \arrow[d, "\mathrm{GL}(n,f)"'] & R^* \arrow[d, "f^*"] \\ \mathrm{GL}(n,S) \arrow[r, "\det_S"'] & S^*. \end{tikzcd}$$

EJEMPLO 1.18. Sea G un grupo con identidad e. Consideremos $\mathcal{A} = G$, $\mathcal{O} = \{*\}$, $id : \mathcal{O} \to \mathcal{A}$ definida por $id_* = e$, $s,t : \mathcal{A} \to \mathcal{O}$ constantes y $m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definida como el producto del grupo. La colección de datos $(\mathcal{A}, \mathcal{O}, s, t, m, id)$ define una categoría. Más aún, si G y H son grupos, entonces una función $\varphi : G \to H$ es un morfismo de grupos si y sólo si es un funtor entre las categorías asociadas a G y a H. Supongamos que $\varphi, \psi : G \to H$ son funtores tales que existe una transformación natural $\tau : \varphi \dot{\to} \psi$. Luego, para cada $g \in G$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "\tau_*"] \arrow[d, "\varphi(g)"'] & \{*\} \arrow[d, "\psi(g)"] \\ \{*\} \arrow[r, "\tau_*"'] & \{*\}. \end{tikzcd}$$

Es decir $\tau_* \varphi(g) \tau_*^{-1} = \psi(g)$. Recíprocamente, si existe $h \in H$ tal que $h\varphi(g)h^{-1} = \psi(g)$ para todo $g \in G$, podemos definir una transformación natural $\tau : \varphi \dot{\to} \psi$ por $\tau_* = h$. Por lo tanto, dos morfismos son conjugados si y sólo si existe una transformación natural entre ellos.

EJEMPLO 1.19. Sea $\Bbbk$ un cuerpo, consideremos la categoría $\mathcal{V}ect_{\Bbbk}$ cuyos objetos son espacios vectoriales sobre $\Bbbk$ de dimensión finita y morfismos son transformaciones lineales. La categoría $\mathcal{V}ect_{\Bbbk}$ es equivalente a $\mathcal{M}at_{\Bbbk}$. En efecto, para cada espacio vectorial V fijemos una base ordenada $\mathcal{B}_V$ de V. Definamos $F : \mathcal{V}ect_{\Bbbk} \to \mathcal{M}at_{\Bbbk}$ por $F(V) = \dim V$, $F(T) = [T]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W}$, la matriz asociada a T con respecto a las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$, donde $T : V \to W$. Sea $G : \mathcal{M}at_{\Bbbk} \to \mathcal{V}ect_{\Bbbk}$ el funtor definido por $G(n) = \Bbbk^n$ y $G(A) = T_A$, la transformación asociada a la matriz A con respecto a las bases $\mathcal{B}_{\Bbbk^m}$ y $\mathcal{B}_{\Bbbk^n}$, donde A es una matriz de tamaño $n \times m$. Es claro que $F \circ G = I_{\mathcal{M}at_{\Bbbk}}$. Por otro lado, note que $(G \circ F)(V) = \Bbbk^{\dim V}$ y si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces $(G \circ F)(T) = \tau_W^{-1} T \tau_V$, donde τ_V es el isomorfismo de espacios vectoriales que envía el i-ésimo vector de $\mathcal{B}_{\Bbbk^{\dim V}}$ en el i-ésimo vector de $\mathcal{B}_V$. Para ver que $\mathcal{V}ect_{\Bbbk}$ es equivalente a $\mathcal{M}at_{\Bbbk}$ observe que para cada transfomración lineal $T : V \to W$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \Bbbk^{\dim V} \arrow[r, "\tau_V"] \arrow[d, "\tau_W^{-1} T \tau_V"'] & V \arrow[d, "T"] \\ \Bbbk^{\dim W} \arrow[r, "\tau_W"'] & W. \end{tikzcd}$$

Es decir τ es un isomorfismo natural de $G \circ F$ a $I_{\mathcal{V}ect_{\Bbbk}}$.

DEFINICIÓN 1.20. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, decimos que un objeto X de la categoría es:

- Inicial, si para cada objeto Y de la categoría existe un único morfismo de X en Y.
- Final, si para cada objeto Y de la categoría existe un único morfismo de Y en X.
- Nulo, si es inicial y final.

Observe que dos objetos finales (o iniciales) de una categoría $\mathcal{C}$ son isomorfos.

DEFINICIÓN 1.21. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, para cada objeto C de $\mathcal{C}$ y cada funtor $F:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ definimos la *categoría coma asociada a C* y F, denotada por $\mathcal{C}^{C\downarrow F}$, como la categoría cuyos objetos y morfismos se definen a continuación.

- Un objeto de $\mathcal{C}^{C\downarrow F}$ es un par (X,f), donde $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ y $f:C\to FX$ es un morfismo en $\mathcal{C}$.
- Dados dos objetos (X,f) y (Y,g) de $\mathcal{C}^{C\downarrow F}$ un *morfismo* de (X,f) a (Y,g) es un morfismo $h:X\to Y$ en $\mathcal{D}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ FX \arrow[rr, "Fh"'] & & FY. \end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 1.22. Una *flecha universal de C a F* es un objeto inicial en la categoría $\mathcal{C}^{C\downarrow F}$.

OBSERVACIÓN 1.23. Una flecha universal de C a F es un par (X,f) con $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ y $f:C\to FX$ morfismo en $\mathcal{C}$ tal que para cada par (Y,g) con $Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ y $g:C\to FY$, existe un único morfismo $h:X\to Y$ en $\mathcal{D}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ FX \arrow[rr, dotted, "Fh"'] & & FY. \end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 1.24. Sean $\varphi:A\to B$ y $\psi:A\to C$ morfismos de una categoría $\mathcal{C}$. Un *pushout* de φ y ψ es una terna (D,i_1,i_2) donde D es un objeto de $\mathcal{C}$, $i_1:C\to D$ e $i_2:B\to D$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tal que

- $i_1\psi=i_2\varphi$.
- Si $E\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y $j_1:C\to E$, $j_2:B\to E$ son morfismos tales que $j_1\psi=j_2\varphi$, entonces existe un único morfismo $l:D\to E$ tal que $j_1=li_1$ y $j_2=li_2$ (ver Diagrama 1.1).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & B \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddr, bend left, "j_2"] & \\ C \arrow[r, "i_1"] \arrow[drr, bend right, "j_1"'] & D \arrow[dr, dotted, "l"] & \\ & & E. \end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 1.1. *Pushout* de φ y ψ.

OBSERVACIÓN 1.25. El pushout es único salvo isomorfismos y se denota $D=C_{\psi}\cup_{\varphi}B$.

PROPOSICIÓN 1.26. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{E}$ la categoría*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above] & 2 \arrow[l, "i"'] \arrow[r, "j"] \arrow[loop above] & 3. \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Definamos un funtor $F : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ por

$$F(1) = C, \qquad F(2) = A, \qquad F(3) = B, \qquad F(i) = \psi, \qquad F(j) = \varphi.$$

Una flecha universal de $F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathcal{E}})$ a $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{E}}$ es un pushout de φ y ψ.

DEMOSTRACIÓN. Sea (D, τ) una flecha universal de F a Δ, luego $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y $\tau : F \dot{\to} \Delta_D$ es una transformación natural. Como τ es una transformación natural, entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "\tau_1"'] & A \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau_2"'] & B \arrow[d, "\tau_3"] \\ D \arrow[r, equal] & D \arrow[r, equal] & D, \end{tikzcd}$$

por lo tanto $\tau_1\psi = \tau_3\varphi$.

Sea $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y $j_1 : C \to E$, $j_2 : B \to E$ morfismos tales que $j_1\psi = j_2\varphi$. Definamos la transformación natural $\alpha : F \to \Delta_E$ por $\alpha_1 = j_1$, $\alpha_2 = j_1\psi = j_2\varphi$, $\alpha_3 = j_2$. Como (D, τ) es una flecha universal de F a Δ, entonces existe un único morfismo $h : D \to E$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ \Delta_D \arrow[rr, dotted, "\Delta(h)"'] & & \Delta_E. \end{tikzcd}$$

Es decir, los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\tau_1"'] \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\ D \arrow[rr, dotted, "h"'] & & E, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\tau_2"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ D \arrow[rr, dotted, "h"'] & & E, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\tau_3"'] \arrow[dr, "\alpha_3"] & \\ D \arrow[rr, dotted, "h"'] & & E. \end{tikzcd}$$

Lo anterior implica que el Diagrama 1.2 es un diagrama conmutativo.

Si $h' : D \to E$ es otro morfismo tal que $j_1 = h'\tau_1$ y $j_2 = h'\tau_2$, entonces los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\tau_1"'] \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\ D \arrow[rr, dotted, "h'"'] & & E, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\tau_2"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ D \arrow[rr, dotted, "h'"'] & & E, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\tau_3"'] \arrow[dr, "\alpha_3"] & \\ D \arrow[rr, dotted, "h'"'] & & E. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $h = h'$. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "\tau_2"'] & B \arrow[d, "\tau_3"] \arrow[ddr, bend left, "j_2"] & \\
C \arrow[r, "\tau_1"'] \arrow[drr, bend right, "j_1"'] & D \arrow[dr, "h"] & \\
& & E.
\end{tikzcd}
$$

DIAGRAMA 1.2.

DEFINICIÓN 1.27. ***(Categoría con productos fibrados)*** Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Supongamos que $\varphi : B \to A$ y $\psi : C \to A$ son morfismos de $\mathcal{C}$. Un *pullback* de φ y ψ es una terna (D, p_1, p_2), donde $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $p_1 : D \to C$ y $p_2 : D \to B$ son morfismos en $\mathcal{C}$ tal que

- $\varphi p_2 = \psi p_1$.
- Si $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y $\pi_1 : E \to C, \pi_2 : E \to D$ son morfismos tales que $\varphi\pi_2 = \psi\pi_1$, entonces existe un único morfismo $\lambda : E \to D$ tal que $p_1\lambda = \pi_1$ y $p_2\lambda = \pi_2$ (ver Diagrama 1.3).

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dotted, "\lambda"] \arrow[drr, bend left, "\pi_2"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_1"'] & & \\
& D \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "\varphi"] \\
& C \arrow[r, "\psi"'] & A.
\end{tikzcd}
$$

DIAGRAMA 1.3. *Pullback* de φ y ψ.

Decimos que $\mathcal{C}$ tiene productos fibrados si cualquier par de morfismos $\varphi : B \to A$ y $\psi : C \to A$ admite un pullback.

OBSERVACIÓN 1.28. El pullback es único salvo isomorfismos y se denota por $D = C\ {}_{\psi}\!\times_{\varphi} B$. También llamamos a $C\ {}_{\psi}\!\times_{\varphi} B$ el *producto de C y B fibrado por* ψ *y* φ.

EJEMPLO 1.29. La categoría $\mathcal{G}rp$ cuyos objetos son grupos y cuyas flechas son morfismos de grupo tiene productos fibrados. En efecto, sean G, H, K grupos y $\varphi : G \to K$, $\psi : H \to K$ morfismos de grupos. El conjunto

$$
G\ {}_{\varphi}\!\times_{\psi} H = \{(g,h) \in G \times H \mid \varphi(g) = \psi(h)\}, \tag{1.1}
$$

tiene las siguientes propiedades:

- El producto $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$ en $G\ {}_{\varphi}\!\times_{\psi} H$ define una estructura de grupo.

- Las proyecciones $p_1 : G\,{}_{\varphi}\!\times_{\psi} H \to G$, $p_2 : G\,{}_{\varphi}\!\times_{\psi} H \to H$ definidas por $p_1(g,h) = g$ y $p_2(g,h) = h$ son morfismos de grupos y hacen el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G\,{}_{\varphi}\!\times_{\psi} H \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & H \arrow[d, "\psi"] \\ G \arrow[r, "\varphi"'] & K. \end{tikzcd}$$

- Supongamos que D es un grupo y que $\pi_1 : D \to H$, $\pi_2 : D \to G$ son morfismos de grupos tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & H \arrow[d, "\psi"] \\ G \arrow[r, "\varphi"'] & K. \end{tikzcd}$$

  Definamos $\lambda : D \to G\,{}_{\varphi}\!\times_{\psi} H$ por $\lambda(d) = (\pi_1(d), \pi_2(d))$. Como π_1, π_2 son morfismos de grupos también lo es λ. Además para todo $d \in D$ se tiene que $p_2(\lambda(d)) = \pi_2(d)$ y $p_1(\lambda(d)) = \pi_1(d)$, es decir el siguiente diagrama es comutativo

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[drr, bend left, "\pi_2"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_1"'] & & \\ & G\,{}_{\varphi}\!\times_{\psi} H \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & H \arrow[d, "\psi"'] \\ & G \arrow[r, "\varphi"] & A. \end{tikzcd}$$

  Supongamos que $\delta : D \to G\,{}_{\varphi}\!\times_{\psi} H$ es un morfismo de grupos tal que $p_1 \circ \delta = \pi_1$ y $p_2 \circ \delta = \pi_2$, escribamos $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ con $\delta_1 : D \to G$ y $\delta_2 : D \to H$ sus funciones coordenadas. Luego, $\delta_1 = p_1 \circ \delta = \pi_1$ y $\delta_2 = p_2 \circ \delta = \pi_2$, es decir

$$\delta = (\delta_1, \delta_2) = (\pi_1, \pi_2) = \lambda$$

Como conclusión, el grupo $G\,{}_{\varphi}\!\times_{\psi} H$ es el producto fibrado por φ y ψ de G con H.

EJEMPLO 1.30. Sea $\mathcal{T}op$ la categoría cuyos objetos son espacios topológicos y morfismos son funciones continuas. Sean X, Y y Z espacios topológicos y $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ funciones continuas. Definamos

$$X\,{}_{f}\!\times_{g} Y = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

dotado con la topología heredada del espacio $X \times Y$. El espacio $X\,{}_{f}\!\times_{g} Y$ es el producto de X y Y fibrado por f y g.

EJEMPLO 1.31. Sea $\mathcal{M}an$ la categoría cuyos objetos son variedades diferenciales y morfismos son funciones suaves (ver *capítulo* 1, *sección* 3). $\mathcal{M}an$ no tiene productos fibrados. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2$. Observe que si $\mathbb{R}\ {}_f\!\times_f\ \mathbb{R}$ es un pullback en $\mathcal{M}an$, entonces también es un pullback en $\mathcal{T}op$. Por lo tanto, como espacio topológico $\mathbb{R}\ {}_f\!\times_f\ \mathbb{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2=y^2\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x=\pm y\}$. Pero $\mathbb{R}\ {}_f\!\times_f\ \mathbb{R}$ no es localmente euclidiano en $(0,0)$.

DEFINICIÓN 1.32. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos fibrados. Un *objeto categoría interno* a $\mathcal{C}$ consiste en los siguientes datos

1. Dos objetos A y O de $\mathcal{C}$,
2. dos morfismos $s,t:A\to O$ de $\mathcal{C}$,
3. un morfismo $m:A\ {}_s\!\times_t\ A\to A$ de $\mathcal{C}$, donde $A\ {}_s\!\times_t\ A$ es el producto de A con sí mismo fibrado por s y t,
4. un morfismo $id:O\to A$ de $\mathcal{C}$.

Todos estos datos sujetos a la conmutatividad de los diagramas de la Observación 1.4.

2. Grupoides

DEFINICIÓN 1.33. Una categoría $\mathcal{G}\rightrightarrows\mathcal{M}$ es llamada un *grupoide* si toda flecha de $\mathcal{G}$ es un isomorfismo. Es decir, existe una aplicación ${}^{-1}:\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ tal que

- $f^{-1}:Y\to X$ para cada $f:X\to Y$,
- $ff^{-1}=id_Y$ y $f^{-1}f=id_X$ para cada $f:X\to Y$.

OBSERVACIÓN 1.34. Por abuso de notación escribimos $\mathcal{G}$ para el grupoide y para el conjunto de morfismos del grupoide. De la misma forma que en la Observación 1.4 podemos definir un grupoide $\mathcal{G}$ como un par $(\mathcal{G},\mathrm{Inv})$ donde $\mathcal{G}$ es una categoría e $\mathrm{Inv}:\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ es una aplicación tal que el Diagrama 1.4 conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}\ {}_s\!\times_t\ \mathcal{G} \arrow[r, "m"] & \mathcal{G} & \mathcal{G}\ {}_s\!\times_t\ \mathcal{G} \arrow[l, "m"'] \\
 & \mathcal{M} \arrow[u, "id"'] & \\
\mathcal{G}\times\mathcal{G} \arrow[uu, "\mathrm{Inv}\times Id_{\mathcal{G}}"] & \mathcal{G} \arrow[l, "\Delta"] \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[u, shift left, "s"] \arrow[u, shift right, "t"'] & G\times G. \arrow[uu, "Id_{\mathcal{G}}\times\mathrm{Inv}"']
\end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 1.4. Aplicación de invertir.

En los siguientes ejemplos podremos observar que el concepto de grupoide generaliza las nociones de grupo, acción de grupo sobre un conjunto y relaciones de equivalencia.

EJEMPLO 1.35. Un grupo G es un grupoide con un solo objeto (ver *ejemplo* 1.18).

EJEMPLO 1.36. Sea G un grupo actuando a izquierda sobre un conjunto X. Consideremos $\mathcal{M} = X$, $\mathcal{G} = G \times X$; $id : X \to G \times X$ por $id_x = (e,x)$, $s,t : X \times G \to X$ definidas por $s(g,x) = x$, $t(g,x) = g \cdot x$ y el producto dado por $(g,x)(h,y) = (gh,y)$, siempre que $x = h \cdot y$. El inverso de un elemento $(g,x) \in G \times X$ está dado por $(x,g)^{-1} = (g^{-1}, g \cdot x)$. Con estos datos $G \times X \rightrightarrows X$ es un grupoide, el cual se denota por $G \ltimes X$.

EJEMPLO 1.37. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto X. Consideremos $\mathcal{M} = X$, $\mathcal{G} = R$; $id : X \to R$ por $id_x = (x,x)$, $s,t : R \to X$ las dos proyecciones de $X \times X$ sobre X restringidas a R y el producto definido por $(x,y)(y,z) = (x,z)$. El inverso de un elemento $(x,y) \in R$ está dado por (y,x). La colección de datos $(\mathcal{G}, \mathcal{M}, s, t, m, id)$ define un grupoide. Cuando $R = X \times X$, el grupoide definido anteriormente se llama *el grupoide par de* X.

EJEMPLO 1.38. Sean $(\mathcal{G}, \mathcal{M}, s, t, m, id)$ y $(\mathcal{G}', \mathcal{M}', s', t', m', id')$ grupoides. El grupoide $(\mathcal{G} \times \mathcal{G}', \mathcal{M} \times \mathcal{M}', s \times s', t \times t', m \times m', id \times id')$ se llama el *grupoide producto de* $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$.

DEFINICIÓN 1.39. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos fibrados, un objeto grupoide interno a $\mathcal{C}$ es un objeto categoría interno a $\mathcal{C}$, junto con un morfismo $\mathrm{Inv} : A \to A$ tal que el Diagrama 1.4 conmuta. Decimos que un objeto grupoide interno a $\mathcal{C}$ es un objeto grupo interno si O es un objeto final (ver Definición 1.32).

LEMA 1.40. *Un objeto grupo interno a* $\mathcal{G}rp$ *es un grupo abeliano.*

DEMOSTRACIÓN. Un objeto grupo interno a $\mathcal{G}rp$ consiste en los siguientes datos:

- Un grupo A,
- $O = \{e\}$, el grupo con un solo elemento
- $s,t : A \to O$ morfismos triviales,
- $id : O \to A$ morfismo de grupos,
- $m : A \times A \to A$ morfismo de grupos.

Todos estos datos sujetos a la conmutatividad de los diagramas de la observación 1.4.
Para cada par de elementos $x,y \in A$, denotaremos $\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\}$ al elemento $m(x,y)$ y $\{xy\}$ al producto xy en el grupo A. Luego, dado que m es morfismo de grupos tenemos que

$$\begin{array}{c} \{x_1x_2\} \\ \{y_1y_2\} \end{array} = \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} x_2 \\ y_2 \end{array} \right\},$$

para todo $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A \times A$.

Aplicando la igualdad anterior con $x_1 = x$, $x_2 = e$, $y_1 = e$, $y_2 = y$ tenemos

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \{xe\} \\ \{ey\} \end{array} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ e \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} e \\ y \end{array} \right\}.$$

Así mismo, con $x_1 = e$, $x_2 = x$, $y_1 = y$, $y_2 = e$ tenemos

$$\left\{\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right\} = \begin{array}{c} \{ex\} \\ \{ye\} \end{array} = \left\{\begin{array}{c} e \\ y \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} x \\ e \end{array}\right\}.$$

Como *id* es morfismo de grupos tenemos que $id(e) = e$. Luego, por el axioma 4 de la observación 1.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \{xy\} &= \left\{\begin{array}{l} x \\ id(e) \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} id(e) \\ y \end{array}\right\} \\ &= \left\{\begin{array}{c} x \\ e \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} e \\ y \end{array}\right\} \\ &= \left\{\begin{array}{c} e \\ y \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} x \\ e \end{array}\right\} \\ &= \left\{\begin{array}{l} id(e) \\ y \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} x \\ id(e) \end{array}\right\} \\ &= \{yx\}, \end{aligned}$$

es decir, un objeto grupo interno a la categoría de grupo es un grupo abeliano A. $\square$

DEFINICIÓN 1.41. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide y $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$. Definimos el *grupo de isotropía de* $\mathcal{G}$ en X como el grupo

$$\mathcal{G}_X^X = \{f \in \mathcal{G} \mid s(f) = t(f) = X\}.$$

DEFINICIÓN 1.42. Decimos que un grupoide $\mathcal{G}$ es transitivo si cualquier para cualquier par $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$, existe al menos una flecha $f \in \mathcal{G}$ tal que $s(f) = X$ y $t(f) = Y$.

El siguiente lema nos dice que cuando el grupoide $\mathcal{G}$ es transitivo, el grupo de isotropía es independiente del elemento X.

LEMA 1.43. *Sea $\mathcal{G}$ un grupoide transitivo. Para cualquier par $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ se tiene que*

$$\mathcal{G}_X^X \cong \mathcal{G}_Y^Y.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \to Y$ en $\mathcal{G}$. Definamos $\varphi_f : \mathcal{G}_X^X \to \mathcal{G}_Y^Y$ por $\varphi_f(g) = fgf^{-1}$. Como $\varphi_f(gh) = f(gh)f^{-1} = (fgf^{-1})(fhf^{-1}) = \varphi_f(g)\varphi_f(h)$, entonces φ_f es un morfismo de grupos. Más aún, el inverso de φ_f es el morfismo de grupos φ_f^{-1}. Es decir, φ_f es un isomorfismo de grupos. $\square$

3. Variedades diferenciables

En esta sección estudiaremos algunas propiedades básicas de variedades diferenciables. Una variedad diferenciable es un espacio topológico que localmente es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y sobre el cual podemos generalizar la noción de funciones diferenciables. A lo largo de este trabajo una función suave (o diferenciable) $f : V \subset \mathbb{R}^n \to W \subset \mathbb{R}^m$ es lo mismo que una función de clase C^∞. Decimos que f es un difeomorfismo si f es suave y además existe f^{-1} suave.

DEFINICIÓN 1.44. Una *variedad topológica* de dimensión m es un espacio topológico M de Hausdorff, segundo contable, tal que cada punto de M admite una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^m$. Una *carta local* (o una carta coordenada) de M es un par (U,φ), donde U es un abierto de M y $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo sobre algún abierto V de $\mathbb{R}^m$.

OBSERVACIÓN 1.45. De la definición de variedad topológica cualquier punto $x \in M$ está contenido en el dominio de alguna carta (U,φ), en ese caso decimos que (U,φ) es una *carta alrededor* de x y que U es un *dominio coordenado* de x.

DEFINICIÓN 1.46. Sea M una variedad topológica y (U_1,φ_1), (U_2,φ_2) dos cartas locales de M. La función $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ se llama *cambio de coordenadas* de φ_1 a φ_2. Decimos que (U_1,φ_1), (U_2,φ_2) son *suavemente crompatibles* si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ o si la función $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^m$. Un *atlas* sobre M es una colección de cartas $\mathcal{A}$, cuyos dominios cubren a M. Decimos que el atlas $\mathcal{A}$ es *suave* si cualquier par de cartas de $\mathcal{A}$ son suavemente compatibles. El atlas $\mathcal{A}$ se dice *maximal* si no está contenido propiamente en ningún otro atlas.

DEFINICIÓN 1.47. Una *variedad diferenciable* de dimensión m es un par $(M,\mathcal{A})$ donde M es una variedad topológica de dimensión m y $\mathcal{A}$ es un atlas maximal de M.

OBSERVACIÓN 1.48. Generalmente omitimos el atlas maximal y simplemente decimos "M es una variedad diferenciable". En algunas ocaciones escribimos M^m para indicar que M es una variedad diferenciable de dimensión m. Observe que cualquier atlas suave está contenido en un único atlas maximal, por lo tanto para determinar una estructura diferenciable sobre una variedad topológica M es suficiente dar un atlas suave.

Utilizando las cartas coordenadas podemos extender el concepto de diferenciabilidad para funciones entre variedades diferenciales.

DEFINICIÓN 1.49. Sean M^m y N^n variedades diferenciales. Una función $F : M \to N$ se dice *suave (o diferenciable)* en x, si existen cartas locales (U,φ) y (W,ψ) de x y $F(x)$, respectivamente, tales que la función $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es una función diferenciable de un abierto de $\mathbb{R}^m$ en un abierto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que F es suave, si es suave en todo punto $x \in M$. F se llama un *difeomorfismo* si existe F^{-1} y además es diferenciable.

OBSERVACIÓN 1.50. Observe que como el cambio de coordenadas es un difeomorfismo, entonces esta definición es independiente de la elección de las cartas coordenadas.

Si M y N son dos variedades diferenciables denotamos por $C^\infty(M,N)$ al conjunto de todas las funciones suaves de M a N. Si $N = \mathbb{R}$ denotamos por $C^\infty(M)$ al conjunto $C^\infty(M,N)$.

OBSERVACIÓN 1.51. Podemos dotar a $C^\infty(M)$ con una estructura natural de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, donde para todo $f,g \in C^\infty(M)$ y $c \in \mathbb{R}$, definimos $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ y $(cf)(x) = cf(x)$.

3.1. Espacio Tangente. De la misma forma que la recta tangente a una curva es localmente la mejor aproximación lineal, para cualquier variedad diferenciable, podemos definir el espacio tangente en un punto, el cual será útil para estudiar propiedades locales de la variedad. Existen varias formas equivalentes de definir el espacio tangente, en este trabajo solamente presentamos la definición más algebraica que se construye a través de las derivaciones del espacio.

DEFINICIÓN 1.52. Sea M una variedad diferenciable y sea $x \in M$. Una *derivación* en x es una transformación lineal $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tal que para cada $f,g \in C^\infty$ se satisface

$$X(fg) = f(x)X(g) + X(f)g(x).$$

El espacio vectorial T_xM de todas las derivaciones en x se llama *espacio tangente* a M en x. Un elemento de T_xM es llamado un *vector tangente* en x.

OBSERVACIÓN 1.53. Considere $T_p\mathbb{R}^n$ el espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en un punto $p \in \mathbb{R}^n$. Observe que para cada punto $v = (v_1,\cdots,v_n) \in \mathbb{R}^n$ la derivada direccional $D_v|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dada por

$$D_v|_p(f) = \frac{d}{dt} f(a+tv)\bigg|_{t=0}$$

es una derivación en p. Más aún, por la regla de la cadena tenemos que

$$D_v|_p(f) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Utilizando un poco de cálculo probaremos que cualquier derivación en $\mathbb{R}^n$ es una derivada direccional.

LEMA 1.54. *Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y suponga que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es suave. Entonces*

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - p_i),$$

para algunas funciones suaves $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que $g_i(p) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier $w \in \mathbb{R}^n$, por el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned} f(p+w)-f(p) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p+tw)dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tw)w_i dt \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)w_i + \sum_{i=1}^n w_i \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tw) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right) dt. \end{aligned}$$

Si hacemos $w = x - p$ y

$$g_i(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tw) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right) dt,$$

tenemos que

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - p_i).$$

□

PROPOSICIÓN 1.55. *Para cualquier $p \in \mathbb{R}^n$, la aplicación $T : v \mapsto D_v|_p$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ a $T_p\mathbb{R}^n$.*

DEMOSTRACIÓN. Que T es lineal se sigue de $D_{v+w}|_p = D_v|_p + D_w|_p$ y $D_{cv}|_p = cD_v|_p$. Para ver que T es inyectiva, supongamos que $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $D_v|_p = 0$. Si $x_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la proyección en la j-ésima coordenada, entonces

$$0 = D_v|_p(x_j) = \sum_{i=i}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = v_j.$$

Como esto se cumple para todo j, entonces $v = 0$. Veamos que T es sobreyectiva. Sea $X \in T_p\mathbb{R}^n$ cualquier derivación. Para cada $i = 1, \cdots, n$ sea $v_i = X(x_i) \in \mathbb{R}$ y hagamos $v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Veamos que $D_v|_p = X$. En efecto, sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por el lema anterior existen funciones suaves $g_1, g_2, \cdots, g_n$ tales que $g_i(p) = 0$ y

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - p_i).$$

Aplicando X a f y usando que para todo i se cumple $g_i(p) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
Xf &= X(f(p)) + \sum_{i=1}^{n} X\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i)\right) + \sum_{i=1}^{n} X(g_i(x)(x_i - p_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)X(x_i - p_i) + \sum_{i=1}^{n} g_i(p)X(x_i - p_i)) + X(g_i(x))(p_i - p_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)X(x_i - p_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i \\
&= D_v|_p f.
\end{aligned}$$

□

El teorema anterior nos permite pensar el espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en un punto p como una copia de $\mathbb{R}^n$, trasladando el origen al punto p.

COROLARIO 1.56. *Para cualquier $p \in \mathbb{R}^n$, las n derivaciones*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p$$

forman una base para $T_p\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 1.57. Sea $F : M \to N$ y sea $x \in M$. Definimos una transformación lineal $T_xF : T_xM \to T_{F(x)}N$ de la siguiente forma. Para cada derivación $X \in T_xM$, sea $T_xF(X) \in T_{F(x)}N$ la derivación cuya acción en un elemento $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ está dada por $T_xF(X)(f) = X(f \circ F)$. La transformación lineal T_xF se llama la *derivada* de la función F en el punto x.

En el siguiente lema enunciamos las propiedades funtoriales de T_x.

LEMA 1.58. *Sean $F : M \to N$ y $G : N \to P$ funciones suaves y $x \in M$, las siguientes propiedades se satisfacen*

1. $T_x(G \circ F) = T_{F(x)}G \circ T_xF$.
2. $T_x Id_M = Id_{T_xM}$
3. *Si F es un difeomorfismo, entonces T_xF es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

DEMOSTRACIÓN. Se obtiene directo de la definición de derivada. □

Sea M^n una variedad diferenciable con atlas $\mathcal{A}$, si $U \subset M$ es abierto, definimos un atlas suave para U de la siguiente manera

$$\mathcal{A}_U = \{(V, \varphi) \in \mathcal{A} \mid V \subset U\}.$$

Claramente $\mathcal{A}_U$ cubre a U, pues si (V, φ) es una carta de $x \in U$ en M, entonces $(V \cap U, \varphi|_{V \cap U})$ es una carta de x en $\mathcal{A}_U$. Por lo tanto U es una variedad suave de dimensión n. Decimos que U es una *subvariedad abierta* de M.

PROPOSICIÓN 1.59. *Sea U una subvariedad abierta de M y sea $i : U \hookrightarrow M$ la inclusión. Luego, para todo $x \in U$ la transformación lineal*

$$T_x i : T_x U \to T_x M$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Le**, Chap. 3, Prop. 3.7]. $\square$

OBSERVACIÓN 1.60. La proposición anterior nos permite identificar el espacio T_xU con T_xM.

Sea (U, φ) una carta en M^n. Por el Lema 1.58 y la Proposición 1.59, para cada $x \in U$ la transformación

$$T_x\varphi : T_xM \to T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n$$

es un isomorfismo. Por el Corolario 1.56 una base para el espacio $T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n$ consiste en las derivadas parciales $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\varphi(x)}$, $i = 1, \cdots, n$. Si escribimos

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x := T_{\varphi(x)}(\varphi^{-1})\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\varphi(x)}\right),$$

entonces una base para el espacio vectorial T_xM está dada por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_x, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x.$$

3.2. Sumersiones, Inmersiones y Embebimientos. El espacio tangente y el operador derivada nos permite estudiar propiedades locales de funciones diferenciables. En particular si la derivada de una función cumple ciertas propiedades, podemos estudiar la forma local de la función. A continuación damos algunas definiciones sobre funciones.

DEFINICIÓN 1.61. Decimos que una aplicación suave $F : M \to N$ es:

- una *sumersión*, si para cada punto $x \in M$ la diferencial $T_xF : T_xM \to T_{F(x)}N$ es sobreyectiva.
- una *inmersión*, si para cada $x \in M$ la diferencial $T_xF : T_xM \to T_{F(x)}N$ es inyectiva.
- un *embebimiento*, si es una inmersión y un homeomorfismo sobre su imagen.

Los siguientes teoremas describe la forma local de las sumersiones e inmersiones.

TEOREMA 1.62. ***(Forma local de sumersiones)*** *Sea $F : M^m \to N^n$ suave y $x \in M$ tal que T_xF es sobreyectiva. Entonces, existen cartas (U, φ) de x y (V, ψ) de $F(x)$, tales que $F(U) \subset V$ y además con respecto a estas cartas F es de la forma $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(a, b) = a \in \mathbb{R}^n$, para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**La**, II, §2, Prop. 2.2]. $\square$

TEOREMA 1.63. ***(Forma local de inmersiones)*** *Sea $F : M^m \to N^n$ suave y $x \in M$ tal que T_xF es inyectiva. Entonces, existen cartas (U,φ) de x y (V,ψ) de $F(x)$, tales que $F(U) \subset V$ y además con respecto a estas cartas F es de la forma $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(a) = (a,0) \in \mathbb{R}^n$, para todo $a \in \mathbb{R}^m$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**La**, II, §2, Prop. 2.2]. □

Como vimos en el *ejemplo* 1.30 la categoría $\mathcal{T}op$ tiene productos fibrados. Sin embargo la categoría $\mathcal{M}an$ de variedades diferenciables no siempre admite productos fibrados (ver *ejemplo* 1.31). El siguiente lema es consecuencia de la forma local de sumersiones y proporciona condiciones suficientes para que existan productos fibrados en $\mathcal{M}an$.

LEMA 1.64. *Sean M,N y P variedades diferenciables. Suponga que $F : M \to P$ y $G : N \to P$ son aplicaciones suaves, y que alguna de las dos es una sumersión sobreyectiva. Si $M\ {}_F\!\times_G\ N$ es el producto fibrado en la categoría $\mathcal{T}op$, entonces existe una estructura diferenciable sobre $M\ {}_F\!\times_G\ N$ tal que en la categoría de variedades diferenciables $M\ {}_F\!\times_G\ N$ es el producto de M y N fibrado por F y G.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que G es sumersión sobreyectiva y que $(x,y) \in M\ {}_F\!\times_G\ N$. Construimos una carta local de (x,y) como sigue. Por el Teorema 1.62 escojamos cartas locales $(U,\varphi = (y^1,\cdots,y^n))$, $(W,\psi = (z^1,\cdots,z^s))$ de y e $G(y)$, respectivamente, tales que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ y en estas coordenadas $\widetilde{G} := \psi \circ G \circ \varphi^{-1}$ toma la forma

$$\widetilde{G}(y_1,\cdots,y_s,\cdots,y_n) = (y_1,\cdots,y_s).$$

Sea $(V,\phi = (x^1,\cdots,x^n))$ carta local de x en M. Supongamos que W es lo suficientemente pequeño para que $F^{-1}(W) \subset V$. Sea $\pi_n : \mathbb{R}^{s+n} \to \mathbb{R}^n$ la proyección en las n últimas coordentadas. Definamos $\delta : W\ {}_F\!\times_G\ U \to \phi(V) \times U_2 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-s}$ por

$$\delta(x,y) = (\phi(x),\pi_n(\varphi(y))) = (\phi(x),y^s(y),\cdots,y^n(y)).$$

Claramente δ es continua. Más aún, veamos que si definimos $\widetilde{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$, entonces $\delta^{-1} : \phi(V) \times U_2 \to W\ {}_F\!\times_G\ U$ está dada por

$$\delta^{-1}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = (\phi^{-1}(\widetilde{x}),\varphi^{-1}(\widetilde{F}(\widetilde{x}),\widetilde{y})).$$

Observe que como $\widetilde{F}(\widetilde{x}) = \widetilde{G}(\widetilde{F}(\widetilde{x}),\widetilde{y})$, entonces δ^{-1} está bien definida. Por otro lado, para todo $(x,y) \in W\ {}_F\!\times_G\ U$ y todo $(\widetilde{x},\widetilde{y}) \in \phi(V) \times U_2$ tenemos que

$$\begin{aligned}\delta(\delta^{-1}(\widetilde{x},\widetilde{y})) &= \delta(\phi^{-1}(\widetilde{x}),\varphi^{-1}(\widetilde{F}(\widetilde{x}),\widetilde{y}))\\ &= (\widetilde{x},\pi_n(\widetilde{F}(\widetilde{x}),\widetilde{y}))\\ &= (\widetilde{x},\widetilde{y}).\end{aligned}$$

Así mismo,

$$
\begin{aligned}
\delta^{-1}(\delta(x,y)) &= \delta^{-1}(\phi(x),\pi_n\circ\varphi(y))\\
&= (x,\varphi^{-1}(\widetilde{F}\circ\phi(x),\pi_n\circ\varphi(y))\\
&= (x,\varphi^{-1}(\psi\circ F(x),\pi_n\circ\varphi(y))\\
&= (x,\varphi^{-1}(\psi\circ G(y),\pi_n\circ\varphi(y)))\\
&= (x,\varphi^{-1}(\widetilde{G}\circ\varphi(y),\pi_n\circ\varphi(y)))\\
&= (x,\varphi^{-1}(\varphi(y))\\
&= (x,y).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto δ es un homeomorfismo y $M\ {}_F{\times}_G\ N$ es una variedad topológica de dimensión $m+n-s$.

Finalmente veamos que estas cartas son suavemente compatibles. Sean $(x,y),(x',y')\in M\ {}_F{\times}_G\ N$. Escojamos $(U,\varphi),(W,\psi),(V,\phi)$ y $(U',\varphi'),(W',\psi'),(V',\phi')$ cartas locales cumpliendo las propiedades anteriores para (x,y) y (x',y'), respectivamente. Supongamos que $(\widetilde{x},\widetilde{y})\in\delta((\phi(V)\times U_2)\cap(\phi(V')\times U_2'))$. Luego

$$\delta'\circ\delta^{-1}(\widetilde{x},\widetilde{y})=\delta'(\phi^{-1}(\widetilde{x}),\varphi^{-1}(\widetilde{F}(\widetilde{x})))$$

Por lo tanto $\delta'\circ\delta^{-1}$ es suave y $M\ {}_F{\times}_G\ N$ es una variedad diferenciable. Con esta estructura las aplicaciones que definen al pullback de F y G son suaves y por lo tanto $M\ {}_F{\times}_G\ N$ es el producto de M y N fibrado por F y G. □

3.3. Subvariedades. Siempre que se introduce un nuevo objeto en matemáticas, es natural preguntarse por cuáles son las subestructuras del mismo. A diferencia de los espacios topológicos, un subconjunto de una variedad diferenciable no siempre admite estructura de variedad diferenciable. En este trabajo distinguiremos entre dos tipos de subvariedades.

DEFINICIÓN 1.65. Sean M y N variedades diferenciables y $F:M\to N$ una aplicación suave. Decimos que (M,F) es una *subvariedad inmersa* en N, si F es una inmersión inyectiva. Cuando F es un embebimiento, decimos que (M,F) es una *subvariedad embebida* en N.

NOTACIÓN 1.66. Cuando $M\subset N$ escribiremos “M es una subvariedad embebida en N” para hacer referencia a que (M,ι) es una subvariedad embebida en N, donde $\iota:M\hookrightarrow N$ es la inclusión.

PROPOSICIÓN 1.67. *Un subespacio $M\subset N^n$ admite una estructura (única) de subvariedad embebida de N de dimensión m si y sólo si para cada punto $x\in M$ existe una carta (U,φ) de N alrededor de x tal que $\varphi(U)=U_1\times U_2\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}$, con U_1 y U_2 abiertos de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^{n-m}$, respectivamente, tal que $0\in U_2$ y*

$$\varphi(M\cap U)=U_1\times\{0\}.$$

En particular, cualquier subvariedad $M \subset N$ de dimensión m tiene una estructura diferenciable natural inducida por las cartas de la forma $(U \cap N, \varphi|_{U \cap N})$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Le**, Chap. 5, Prop. 5.8]. □

OBSERVACIÓN 1.68. Note que la topología de una subvariedad embebida $M \subset N$ es la topología heredada de N.

Los siguientes resultados serán útiles en el último capítulo de este trabajo.

PROPOSICIÓN 1.69. *Sea M una variedad diferenciable y sea $S \subset M$ una subvariedad embebida. Luego, cada función suave $F : N \to M$ cuya imagen está contenida en S es una función suave de N a S.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Le**, Chap. 5, Prop. 5.30]. □

PROPOSICIÓN 1.70. *Supongamos que $F : M \to N$ es una sumersión y que $P \subset N$ es una subvariedad embebida de N. Si $Q = F^{-1}(P)$, entonces existe una única estructura diferenciable sobre Q tal que Q es una subvariedad embebida de M.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del teorema de la función implicita para variedades, ver [**W**, Chap. 1, Thm. 1.39]. □

3.4. Fibrados vectoriales. Un *fibrado vectorial de rango k* es una terna (E, π, M), donde E y M son variedades diferenciables, y $\pi : E \to M$ es una función sobreyectiva suave satisfaciendo:

1. Para cada $x \in M$, la *fibra* $E_x := \pi^{-1}(x) \subset E$ tiene estructura de espacio vectorial real de dimensión k.
2. Para cada $x \in M$, existe una vecindad U de x en M y un difeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ (llamada una localización trivial de E sobre U), tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "p_1"] \\ & U; & \end{tikzcd}$$

y tal que para cada $y \in U$, la restricción de Φ a E_y es un isomorfismo de espacios vectoriales entre E_y y $\{y\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$.

Una *sección* de un fibrado vectorial (E, π, M) es una función suave $\sigma : M \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = Id_M$. La sección cero que asocia a cada $x \in M$, el cero del espacio vectorial E_x es denotada por σ_0.

Capítulo 2

Grupoide fundamental

Uno de los problemas fundamentales en topología es determinar si dos espacios topológicos son homeomorfos. Una herramienta para tratar este problema es asociar a cada espacio topológico objetos algebraicos que se preserven bajo homeomorfismos. Dichos objetos se llaman invariantes topológicos. En este capítulo construiremos el grupoide y el grupo fundamental de un espacio topológico X y mostraremos que estos son ejemplos de invariantes topológicos. La mayoría de los resultados se pueden consultar en [**Mu**] y [**Ma**]. Comenzaremos definiendo una relación de homotopía sobre espacios de funciones. A lo largo de este trabajo I denota el intervalo $[0,1]$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 2.1. Sean X,Y dos espacios topológicos y $f,g : X \to Y$ funciones continuas. Una homotopía de f a g es una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que para todo $x \in X$ se cumple $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. Si existe una homotopía de f a g decimos que f y g son homotópicos.

OBSERVACIÓN 2.2. La relación "ser homotópico a" es una relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{C}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid \text{f es continua}\}$.

DEFINICIÓN 2.3. Sea X un espacio topológico y $f,g \in \mathcal{C}(I,X)$, tal que $f(0) = g(0)$ y $f(1) = g(1)$. Si existe una homotopía $H : I \times I \to X$ de f a g tal que $H(0,t) = f(0) = g(0)$ y $H(1,t) = f(1) = g(1)$, decimos que f y g son homotópicos por caminos.

OBSERVACIÓN 2.4. Intuitivamente la homotopía H deforma el camino f en el camino g a lo largo de la familia de caminos $H_t := H(\cdot,t)$, dejando los puntos iniciales y finales fijos. La relación "ser homotópico por caminos" es una relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{C}(I,X)$. La clase $[f]$ se llama clase de homotopía de f y el conjutno de clases de homotopía se denota por $\pi_1(X)$.

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea X un espacio topológico y sean*

- $s,t : \pi_1(X) \to X$ *dadas por* $s([f]) = f(0)$ *y* $t([f]) = f(1)$.
- $id : X \to \pi_1(X)$ *definida por* $id(x) = [e_x]$, *donde* $e_x : I \to X$ *es el camino constante que toma el valor x para todo $t \in I$.*
- $m : \pi_1(X) \; {}_s\!\times_t \; \pi_1(X) \to \pi_1(X)$ *definida por* $m([f],[g]) = [f]\cdot[g] = [f \cdot g]$, *donde* $f \cdot g$ *es el camino definido por*

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} g(2t) & si\; t \in [0,\frac{1}{2}] \\ f(2t-1) & si\; t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases} .$$

Con estas aplicaciones, $\pi_1(X) \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} X$ *es un grupoide.*

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos que la composición m está bien definida. Si $[f]=[f']$ y $[g]=[g']$ en $\pi_1(X)$ y $H: I\times I\to X$, $G: I\times I\to X$ son homotopías de f a f' y de g a g', respectivamente, entonces la aplicación

$$(G_t\cdot H_t)(s)=\begin{cases} H(2s,t) & \text{si } s\in[0,\frac{1}{2}] \\ G(2s-1,t) & \text{si } s\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}.$$

es una homotopía entre $g\cdot f$ y $g'\cdot f'$.

Si $f: I\to X$ es un camino, decimos que $g: I\to X$ es una reparametrización de f, si existe una función continua $\varphi: I\to I$ tal que $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ y $f=g\circ\varphi$. Si g es una reparametrización de f, entonces f y g son homotópicos por caminos, mediante la homotopía $H: I\times I\to X$ definida por $H(s,t)=f((1-t)\varphi(s)+ts)$.

Observe que si $([f],[g]),([g],[h])\in\pi_1(X)\ {}_s\!\times_t\ \pi_1(X)$ y $\varphi: I\to I$ está definida por

$$\varphi(t)=\begin{cases} t/2 & \text{si } t\in[0,1/2] \\ t-1/4 & \text{si } t\in[1/2,3/4] \\ 2t-1 & \text{si } t\in[3/4,1] \end{cases},$$

entonces $(f\cdot g)\cdot h=(f\cdot(g\cdot h))\circ\varphi$. Por lo tanto, $([f]\cdot[g])\cdot[h]=[f]\cdot([g]\cdot[h])$ y m es asociativa.

Para cada camino $f: I\to X$ comenzando en x, tenemos que $f\cdot e_x=f\circ\varphi$, donde

$$\varphi(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } t\in[0,1/2] \\ 2t & \text{si } t\in[1/2,1] \end{cases}.$$

Por lo tanto $[f\cdot e_x]=[f]$. Análogamente tenemos que si f termina en y, entonces $[e_y\cdot f]=[f]$.

El inverso de $[f]\in\pi_1(x)$ está dado por la clase de homotopía del camino recorrido en sentido contrario, es decir, del camino $\overline{f}(t)=f(1-t)$. La aplicación $H: I\times I\to X$ definida por

$$H(s,t)=\begin{cases} f(2s(1-t)) & \text{si } s\in[0,\frac{1}{2}] \\ f(2(1-s)(1-t)) & \text{si } s\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

es una homotopía entre $\overline{f}\cdot f$ y $e_{f(0)}$. Análogamente tenemos que $[f\cdot\overline{f}]=[e_{f(1)}]$ y por lo tanto $[\overline{f}]$ es el inverso de $[f]$. $\square$

DEFINICIÓN 2.6. Sea X un espacio topológico. El grupoide $\pi_1(X)\rightrightarrows X$ de la proposición anterior se llama *el grupoide fundamental de* X.

Por abuso de notación también llamamos a $\pi_1(X)$ el grupoide fundamental de X.

LEMA 2.7. *Sea $\mathcal{G}rpd$ la categoría de grupoides. La correspondencia $\pi_1: \mathcal{T}op\to\mathcal{G}rpd$, que a cada espacio topológico X le asocia su grupoide fundamental $\pi_1(X)$ y a cada función continua $h: X\to Y$ le asocia el funtor $(\pi_1(h),h): \pi_1(X)\to\pi_1(Y)$ dado por $\pi_1(h)[f]=[h\circ f]$ es un funtor de la categoría $\mathcal{T}op$ en la categoría $\mathcal{G}rpd$.*

DEMOSTRACIÓN. Inmediato de la definición de π_1. $\square$

DEFINICIÓN 2.8. Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$. El grupo de isotropía $\pi_1(X)_{x_0}^{x_0}$ se llama el grupo fundamental de X en el punto x_0 y se denota por $\pi_1(X, x_0)$.

OBSERVACIÓN 2.9. Sea $\mathcal{T}op_*$ la categoría cuyos objetos son pares (X, x_0) con X un espacio topológico y $x_0 \in X$, y cuyos morfismos de (X, x_0) en (Y, y_0) son función continuas que envían x_0 a y_0. De la misma manera que en el Lema 2.7, el grupo fundamental $\mathcal{T}op_* \to \mathcal{G}rp$ es un funtor. Por abuso de notación denotamos por π_1 el funtor grupo y grupoide fundamental.

COROLARIO 2.10. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos. Si $x, y \in X$, entonces*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0).$$

DEMOSTRACIÓN. Como X es conexo por caminos, entonces el grupoide $\pi_1(X)$ es transitivo. El resultado se sigue del Lema 1.43. $\square$

OBSERVACIÓN 2.11. De las propiedades funtoriales de π_1 se sigue que el grupoide (y el grupo) fundamental es un invariante de un espacio topológico, en el siguiente sentido. Si dos espacios topológicos son homeomorfos, entonces sus grupoides (grupos, resp.) fundamentales son isomorfos. Sin embargo no es cierto que si dos espacios tienen grupoides (grupos) fundamentales isomorfos, entonces los espacios son homeomorfos. Como contraejemplo observe que el grupo fundamental de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es trivial, pero $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ no son homeomorfos.

EJEMPLO 2.12. Sea $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ la esfera de dimensión n y $x_0 \in S$. Luego

$$\pi_1(S^n, x_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ \{0\} & \text{si } n \geq 2 \end{cases} .$$

Más aún, si pensamos a S^1 como subespacio de $\mathbb{C}$, entonces un isomorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\pi_1(S^1, 1)$ está dado por $n \to [f_n]$, donde $f_n(t) = e^{i2\pi nt} \in \mathbb{C}$ (ver [**Mu**, §54, Thm. 54.5] y [**Mu**, §59, Thm. 59.3]).

1. Aplicaciones de cubrimiento y el grupo fundamental

En esta sección estudiaremos los espacios de cubrimiento de un espacio topológico, que en algunas ocaciones resultan ser una herramienta útil para calcular grupos fundamentales. Posteriormente veremos cómo el grupo fundamental caracteriza los espacios de cubrimiento de un espacio topológico.

DEFINICIÓN 2.13. Sean X y E espacios topológicos y sea $p : E \to X$ una aplicación continua y sobreyectiva.

1. Decimos que un conjunto abierto $U \subset X$ esta regularmente cubierto por p, si $p^{-1}(U)$ se escribe como unión disyunta de abiertos V_α, cada uno de los cuales es homeomorfo a U mediante la restricción de p a V_α.

2. Si cada $x \in X$ tiene un vecindad regularmente cubierto por p, decimos que E es un espacio de cubrimiento de X y p es una aplicación de cubrimiento.

El grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ de un espacio topológico X será de utilidad para clasificar todos los espacios de cubrimiento de X, salvo cierta relación de equivalencia.

DEFINICIÓN 2.14. Sean $p : E \to X$ y $p' : E' \to X$ dos aplicaciones de cubrimiento, decimos que p y p' son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : E \to E'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X, & \end{tikzcd}$$

es decir $p = p' \circ h$.

EJEMPLO 2.15. La aplicación $p : \mathbb{R} \to S^1$ definida por

$$p(t) = e^{i2\pi t},$$

es una aplicación de cubrimiento.

EJEMPLO 2.16. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la aplicación $p_n : S^1 \to S^1$, definida por

$$p_n(z) = z^n.$$

La aplicación p_n es una aplicación de cubrimiento.

Más adelante veremos que en realidad cualquier aplicación de cubrimiento de S^1 es equivalente a la aplicación del ejemplo 2.15 o a una de la forma presentada en el ejemplo 2.16, para algún $n \in \mathbb{N}$.

DEFINICIÓN 2.17. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es:

- Localmente conexo por caminos, si para cada $x \in X$ y cada vecindad U de x existe una vecindad V de x conexa por caminos tal que $V \subset U$.
- Simplemente conexo, si es conexo por caminos y su grupo fundamental es trivial.
- Semilocalmente simplemente conexo, si para cada $x \in X$ y cada vecindad U de x existe una vecindad V de x tal que $V \subset U$ y además el morfismo $\pi_1(i) : \pi_1(V, x) \to \pi_1(V, x)$, inducido por la inclusión de U en X, es trivial.

En el siguiente teorema supondremos que todos los espacios topológicos involucrados son conexos por caminos y localmente conexos por caminos.

TEOREMA 2.18. *Sean $p : E \to X$ y $p' : E' \to X$ dos aplicaciones de cubrimiento de X con $p(e_0) = p'(e'_0) = b_0$, entonces p y p' son equivalentes si y sólo si los subgrupos*

$$H = \pi_1(p)(\pi_1(E, e_0)), \quad H' = \pi_1(p')(\pi_1(E, e'_0))$$

son conjugados en $\pi_1(B,b_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Mu**, §79, Thm. 79.4]. □

EJEMPLO 2.19. Del *ejemplo* 2.12 tenemos que $\pi_1(S^1,1)=\mathbb{Z}$. Sea p_n la aplicación de cubrimiento del *ejemplo* 2.16. Luego, $H_n=\pi_1(p_n)(\pi_1(S^1,1))=\{\pi_1(p_n)[e^{i2\pi kt}]\mid k\in\mathbb{Z}\}=\{[e^{i2\pi(nk)t}]\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Por lo tanto, el subgrupo H_n corresponde al subgrupo $n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$. Como los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son de forma $\{0\}$ ó $n\mathbb{Z}$, para $n\in\mathbb{Z}$, entonces cualquier aplicación de cubrimiento de S^1 es equivalente a la aplicación del *ejemplo* 2.15 o a alguna de las aplicaciones del *ejemplo* 2.16.

DEFINICIÓN 2.20. Sea B un espacio topológico y E un espacio de cubrimiento de B. Si E es simplemente conexo, decimos que E es un espacio de cubrimiento universal de B.

OBSERVACIÓN 2.21. Por el Teorema 2.18 cualquier par de espacios de cubrimiento universal son equivalentes. Por esta razón cuando nos refiramos a un espacio de cubrimiento universal de B, diremos “el espacio de cubrimiento universal de B”.

A continuación damos algunos resultados que serán de utilidad para dar condiciones suficientes para la existencia de espacios de cubrimiento universal.

DEFINICIÓN 2.22. Sean $p:E\to B$ y $f:X\to B$ funciones continuas. Un levantamiento de f es una función continua $\widetilde{f}:X\to E$ tal que $f=p\circ\widetilde{f}$.

Una de las herramientas más utilizadas en el estudio de aplicaciones de cubrimiento y grupos fundamentales es la existencia de levantamientos cuando la aplicación f es un camino o una homotopía.

PROPOSICIÓN 2.23. *Sea* $p:E\to B$ *una aplicación de cubrimiento y* $e_0\in E$. *Si* $f:I\to B$ *es un camino comenzando en* $p(e_0)$, *entonces* f *se levanta a único camino* $\widetilde{f}:I\to E$ *que comienza en* e_0. *Más aún, si* $f,g:I\to B$ *son homotópicos por caminos, entonces sus correspondientes levantamientos* $\widetilde{f},\widetilde{g}$ *terminan en el mismo punto y cualquier homotopía* $H:I\times I\to B$ *entre* f *y* g *se levanta a una única homotopía* $\widetilde{H}:I\times I\to E$ *entre* $\widetilde{f}$ *y* $\widetilde{g}$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Mu**, §54, Lemma 54.1, Thm. 54.3]. □

OBSERVACIÓN 2.24. Sea $p:E\to B$ una aplicación de cubrimiento y sea $b_0\in B$. Cada $[f]\in\pi_1(B,b_0)$ define una función continua $\Phi([f]):p^{-1}(b_0)\to E$ dada por $\Phi([f])(e)=\widetilde{f}(1)$, donde $\widetilde{f}$ es el único levantamiento de f a un camino comenzando en e.

LEMA 2.25. *Sea* $p:E\to B$ *una aplicación de cubrimiento y sea* $e_0\in E$. *Si* $b_0=p(e_0)$, *entonces el morfismo de grupos* $\pi_1(p):\pi_1(E,e_0)\to\pi_1(B,b_0)$ *es inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Mu**, §54, Thm. 54.6]. □

Un espacio topológico no siempre admite un espacio de cubrimiento universal. El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para la existencia de espacios de cubrimiento universal.

TEOREMA 2.26. *Sea B un espacio topológico conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Si $b \in B$ y*

$$E = \{[f] \in \pi_1(X) \mid f(0) = b\},$$

entonces existe una topología sobre E, de tal manera que E es un espacio de cubrimiento universal de B.

DEMOSTRACIÓN. Como B es localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo, existe una base $\{U_i\}_{i\in J}$ de la topología de B, tal que cada U_i es conexo por caminos y para cada $x \in U_i$ el morfismo de grupos $\pi_1(U_i, x) \to \pi_1(B, x)$, inducido por la inclusión de U_i en B, es el morfismo trivial.

Para cada camino f en B comenzando en b y terminando en U_i definamos

$$U_i[f] = \{[c] \cdot [f] \mid c \text{ es un camino en } U_i \text{ con } c(0) = f(1)\}.$$

La colección $\{U_i[f] \mid i \in J \text{ y } f \text{ es un camino en } B \text{ con } f(0) = b \text{ y } f(1) \in U_i\}$ es una base para una topología en E (ver *figura* 1), pues si $[h] \in U_i[f] \cap U_j[g]$ y U_k es un básico de B tal que $h(1) \in U_k \subset U_i \cap U_j$, entonces $U_k[h] \subset U_i[f] \cap U_j[g]$.

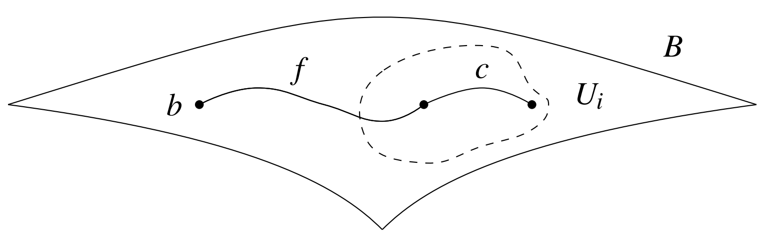


FIGURA 1. Un elemento de $U_i[f]$.

Sea $p : E \to B$ definida por $p([f]) = f(1)$, observe que para cada básico U_i de B y $u \in U_i$ el conjunto

$$p^{-1}(U_i) = \bigcup_{f(1)=u} U_i[f] \tag{2.1}$$

es abierto. Más aún, si $[h] \in U_i[f] \cap U_i[g]$, entonces $[h] = [c] \cdot [f] = [c'] \cdot [g]$ para algún par de caminos c y c' en U_i. Luego, $[f] \cdot [g]^{-1} = [c]^{-1} \cdot [c']$ es un lazo en U_i y por lo tanto es homotópico a un camino constante, es decir $[f] = [g]$. Luego, la unión (2.1) es disjunta. Además la aplicación $p_i := p|_{U_i[f]} : U_i[f] \to U_i$ es un homeomorfismo, pues su inversa $p_i^{-1} : U_i \to U_i[f]$ está dada por $p_i^{-1}(x) = [c_x] \cdot [f]$, donde c_x es un camino en U_i empezando en u y terminando en x. De donde se sigue que p es una aplicación de cubrimiento.

Para cada $[f] \in E$ definamos $\widetilde{f} : I \to E$ por $\widetilde{f}(s) = [f_s]$, donde $f_s : I \to B$ es el camino dado por $f_s(t) = f(st)$. Veamos que $\widetilde{f}$ es continua, para ello veamos que si $s \in I$ y $U_i[g]$ es una vecindad de $[f_s]$, entonces para cada vecindad $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ de s tal que $f(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset U_i$, se satisface que $\widetilde{f}(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset U_i[g]$. En efecto, sea c_s un camino en U_i tal que $[f_s] = [c_s] \cdot [g]$, sea $t \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ y $l : I \to U_i$ el camino dado por $l(r) = f((1-r)t + rs)$ (ver *figura* 2). Luego,

$$\begin{aligned} [f_t] &= [l^{-1}] \cdot [l] \cdot [f_t] \\ &= [l^{-1}] \cdot [f_s] \\ &= [l^{-1}] \cdot [c_s] \cdot [g]. \end{aligned}$$

Por lo tanto $[f_t] \in U_i[g]$. Es decir, $\widetilde{f}$ es un camino entre $[f]$ y $[e_b]$, y como consecuencia E es conexo por caminos.

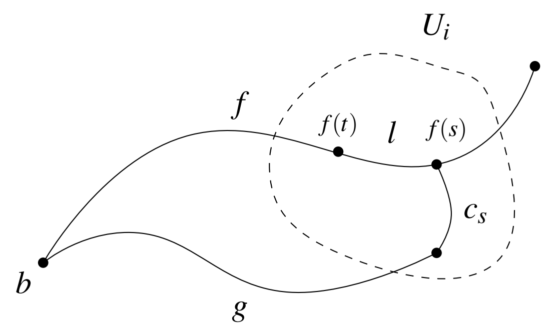


FIGURA 2

Finalmente observe que como $f = p \circ \widetilde{f}$, entonces $\Phi[f]([e_b]) = \widetilde{f}(1) = [f]$. Por lo tanto $\Phi(\pi_1(p)[\widetilde{f}])([e_b]) = [e_b]$ si y sólo si $\pi_1(p)[\widetilde{f}] = [e_b]$. Del Lema 2.25 se sigue que cualquier lazo en E empezando y terminando en $[e_b]$ es homotópico a un camino constante. Por lo tanto E es un espacio de cubrimiento universal de B. $\square$

Capítulo 3

Algunos resultados sobre grupos topológicos

En este capítulo introducimos las nociones básicas sobre grupos topológicos y álgebras de Clifford, con el fin de construir el grupo Spin. Comenzamos estudiando algunos aspectos sobre grupos de matrices. A lo largo de este trabajo usamos $\mathbb{I}$ para denotar la matriz identidad en $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$. Escribimos $\mathbb{I}_n$ cuando el tamaño de $\mathbb{I}$ no sea claro del contexto.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\Bbbk)$, definamos la exponencial de A como*

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k. \tag{3.1}$$

Con la norma $\|A\| = \text{máx}_{ij}\{|a_{ij}|\}$, la serie (3.1) *converge.*

DEMOSTRACIÓN. Sea M una cota superior de $\{|a_{ij}|\}$ y escribamos $a_{ij}^{(k)}$ para la entrada ij de la matriz A^k. Es fácil ver por inducción que para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq (nM)^k.$$

De esta desigualdad se sigue que la serie $\exp A$ converge uniformemente en el conjunto de matrices A con $|a_{ij}| \leq M$. $\square$

LEMA 3.2. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ son los autovalores de A, entonces los autovalores de* $\exp A$ *son $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \cdots, e^{\lambda_k}$, donde la multiplicidad de e^{λ_i} es la misma multiplicidad de λ_i en A. En particular,*

$$\det(\exp A) = \exp \operatorname{Tr} A$$

.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Ch**, Chap. I, §II, Prop. 2]. $\square$

DEFINICIÓN 3.3. Un *grupo topológico* es un grupo G que también es un espacio topológico, tal que las aplicaciones $(g,h) \to gh$ y $g \to g^{-1}$ son continuas. Un *morfismo de grupos topológicos* es un morfismo de grupos continuo. Un morfismo de grupos topológicos se dice un *isomorfismo*, si es un homeomorfismo.

EJEMPLO 3.4. Si $\Bbbk = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, entonces $\mathbb{M}_{n\times m}(\Bbbk)$ es un grupo topológico con la suma de matrices. Observe que como $\mathrm{GL}(n,\Bbbk) = \det^{-1}(\Bbbk - \{0\})$, entonces de la continuidad de det se sigue que $\mathrm{GL}(n,\Bbbk)$ es abieto en $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$. Más aún, por la fórmula para la matriz inversa se tiene que $\mathrm{GL}(n,\Bbbk)$ es un grupo topológico con la topología heredada de $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$. El conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times n$ con determinante igual a 1 es un subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\Bbbk)$, llamado el grupo especial lineal y denotado por $\mathrm{SL}(n,\Bbbk)$.

EJEMPLO 3.5. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\Bbbk)$, denotamos por A^t la matriz transpuesta de A. Una matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ se dice ortogonal si $AA^t = A^tA = \mathbb{I}$. Denotamos por $\mathrm{O}(n)$ al grupo ortogonal, que consta de todas las matrices ortogonales de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Observe que $\det(A^t) = \det(A)$, de donde se sigue que si $A \in \mathrm{O}(n)$, entonces $\det A = \pm 1$. Definimos el grupo especial ortogonal $\mathrm{SO}(n)$ como $\mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$.

Como lo aplicación $A \to A^t$ es un homeomorfismo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ en si mismo, entonces $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{SO}(n)$ son subgrupos cerrado de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

EJEMPLO 3.6. Si $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, denotamos por A^* la matriz transpuesta conjugada de A. Una matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ se dice unitaria si $AA^* = A^*A = \mathbb{I}$. Denotamos por $\mathrm{U}(n)$ al grupo unitario, que consta de todas las matrices unitarias de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Definimos el grupo especial unitario $\mathrm{SU}(n)$ como $\mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. De la misma manera que el ejemplo anterior tenemos que $\mathrm{U}(n)$ y $\mathrm{SU}(n)$ son subgrupos cerrado de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

EJEMPLO 3.7. Los cuaterniones $\mathbb{H}$ son un grupo topológico con la suma. Más aún, como $\mathbb{H}$ es un álgebra de división, los cuaterniones no nulos $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ son un grupo topológico con la multiplicación. Si $w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{H}$, definimos su norma como el número real $N(w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Los cuaterniones de norma uno forman un subgrupo topológico de $\mathbb{H}^\times$.

Los siguientes resultados serán útiles para construir el espacio de cubrimiento universal de $\mathrm{SO}(n)$.

PROPOSICIÓN 3.8. *Existe una vecindad U de* 0 *en* $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$ *tal que* $\exp|_U : U \to \mathrm{GL}(n,\Bbbk)$ *es un homeomorfismo sobre alguna vecindad de* $\mathbb{I}$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Ch**, Chap. I, §II, Prop. 4]. □

PROPOSICIÓN 3.9. *En un grupo topológico conexo G cualquier vecindad del elemento neutro genera a G.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Ch**, Chap. II, §IV, Thm. 1]. □

PROPOSICIÓN 3.10. *Sea G un grupo topológico conexo y localmente conexo, y sea H un subgrupo de G cerrado y localmente conexo. Sea H_0 la componente conexa de la identidad e en H. Luego, la aplicación $f : G/H_0 \to G/H$ definida por $f(gH_0) = gH$ es una aplicación de cubrimiento.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Ch**, Chap. II, §X, Prop. 4]. □

PROPOSICIÓN 3.11. *Sea G un grupo topológico conexo, localmente conexo y semilocalmente simplemente conexo. Si H es un subgrupo localmente conexo y semilocalmente simplemente conexo de G, tal que G/H es simplemente conexo, entonces el grupo fundamental de G es isomorfo a un grupo cociente del grupo fundamental de H.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Ch**, Chap. II, §X, Prop. 5]. □

OBSERVACIÓN 3.12. El grupo $\mathrm{O}(n-1)$ es homeomorfo al *subgrupo cerrado* de $\mathrm{O}(n)$ que consta de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \widetilde{A} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

con $\widetilde{A} \in \mathrm{O}(n-1)$. Análogamente $\mathrm{SO}(n-1)$ es homeomorfo a un subgrupo cerrado de $\mathrm{SO}(n)$. Identificamos a $\mathrm{O}(n-1)$ y $\mathrm{SO}(n-1)$ con estos subgrupos cerrados de $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{SO}(n)$, respectivamente.

LEMA 3.13. *El grupo fundamental de* $\mathrm{SO}(3)$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}_2$.

DEMOSTRACIÓN. [**Ch**, Chap. II, §V, Prop. 1] □

PROPOSICIÓN 3.14. *Para* $n \geq 2$, *los espacios* $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1)$ *y* $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$ *son homeomorfos a la esfera* S^{n-1}.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : \mathrm{O}(n) \to S^{n-1}$ definida por $f(A) = A\mathbf{e_n}$. Observe que si A es de la forma (3.2), entonces $f(A) = \mathbf{e_n}$. Recíprocamente, si $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}(n)$ es tal que $A\mathbf{e_n}$=$\mathbf{e_n}$, entonces para cada $i = 1, \cdots, n$ tenemos que $a_{in} = \delta_{in}$. Por otro lado, como A es ortogonal, entonces $\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 = 1$ y dado que $a_{nn} = 1$, debe ser $a_{ni} = 0$ para $i < n$. Es decir, A es de la forma (3.2). Se sigue que $f(A)$ depende únicamente de la clase $A \cdot \mathrm{O}(n-1)$ y por lo tanto f induce una función continua $\widetilde{f} : \mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1) \to S^{n-1}$. Claramente f es biyectiva y como $\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1)$ es compacto, entonces $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo. Similarmente para $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1)$, ver [**Ch**, Chap. II, §III, Prop. 2a]. □

Definimos el análogo diferenciable a un grupo topológico.

DEFINICIÓN 3.15. Un *grupo de Lie* es un grupo G que también es una variedad diferenciable, tal que las aplicaciones $(g,h) \to gh$ y $g \to g^{-1}$ son suaves. Un *morfismo de grupos de Lie* es un morfismo de grupos suave. Un morfismo de grupos de Lie se dice un *isomorfismo*, si es un difeomorfismo.

1. El espacio de cubrimiento universal de $\mathrm{SO}(n)$

En esta sección construiremos explícitamente el espacio de cubrimiento universal de $\mathrm{SO}(n)$, siguiento el enfoque de [**Ch**]. Para ello, definimos primero el álgebra de Clifford y posteriormente el grupo $\mathrm{Spin}(n)$ como cierto subgrupo de las unidades de esta álgebra. A lo largo de esta sección $\Bbbk$ denota un cuerpo de característica distinta de 2.

LEMA 3.16. *Sea* $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ *y* $\mathfrak{a}$ *el espacio vectorial sobre* $\Bbbk$ *con base* $\{e_A\}_{A \subset N}$ *(libre sobre el conjunto* $\{e_A\}_{A \subset N}$*). Sean* A *y* B *subconjuntos de* N*, para cada* $j \in B$ *escribimos*

$P(A,j) = |\{i \in A \mid i \geq j\}|$ y $P(A,B) = \sum_{j \in B} P(A,j)$. Si $\xi(A,B) := (-1)^{P(A,B)}$ y $A \triangle B$ denota la diferencia simétrica de A con B, definimos el producto de e_A con e_B por la formula

$$e_A e_B = \xi(A,B) e_{A \triangle B}.$$

Con esta operación $\mathfrak{a}$ es un álgebra asociativa sobre $\Bbbk$ con identidad $e_{\emptyset}$. Más aún, si denotamos por e_0 a $e_{\emptyset}$ y e_i a $e_{\{i\}}$ y si $A = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ con $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, entonces

$$e_A = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}. \tag{3.3}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $A, B, C \subset N$. Observe que

$$\begin{aligned} P(A, B \triangle C) &= \sum_{j \in B \triangle C} P(A,j) \\ &= P(A,B) + P(A,C) - 2 \sum_{j \in B \cap C} P(A,j). \end{aligned}$$

Por lo tanto $P(A, B \triangle C)$ y $P(A,B) + P(A,C)$ tienen la misma paridad. De manera similar se puede mostrar que $P(A \triangle B, C)$ y $P(A,C) + P(B,C)$ tienen la misma paridad. Como consecuencia $\xi(A, B \triangle C) = \xi(A,B)\xi(A,C)$ y $\xi(A \triangle B, C) = \xi(A,C)\xi(B,C)$. La asociatividad de $\mathfrak{a}$ se tiene por

$$\begin{aligned} e_A(e_B e_C) &= \xi(B,C) e_A(e_{B \triangle C}) \\ &\xi(B,C)\xi(A, B \triangle C) e_{A \triangle (B \triangle C)} \\ &= \xi(B,C)\xi(A,B)\xi(A,C) e_{(A \triangle B) \triangle C} \\ &= \xi(A \triangle B, C)\xi(A,B) e_{(A \triangle B) \triangle C} \\ &= e_A(e_B e_C). \end{aligned}$$

La igualdad (3.3) es inmediata de la definición del producto en $\mathfrak{a}$. □

DEFINICIÓN 3.17. El álgebra del lema anterior se llama el álgebra de Clifford de orden n y se denota por $\mathcal{C}\ell(n)$.

PROPOSICIÓN 3.18. *El álgebra $\mathcal{C}\ell(n)$ está generada por los elementos $e_1, \cdots, e_n$ sujetos a las relaciones*

$$e_i e_i = -e_0 \qquad y \qquad e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad (i \neq j). \tag{3.4}$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue del Lema 3.16 y de la definición del producto en $\mathcal{C}\ell(n)$. □

OBSERVACIÓN 3.19. El álgebra $\mathcal{C}\ell(n)$ admite una $\mathbb{Z}_2$-graduación natural $\mathcal{C}\ell(n) = \mathcal{C}\ell_0(n) \oplus \mathcal{C}\ell_1(n)$, donde

$$\mathcal{C}\ell_0(n) = \bigoplus_{|A| \text{ par}} \Bbbk e_A \quad \text{y} \quad \mathcal{C}\ell_1(n) = \bigoplus_{|A| \text{ impar}} \Bbbk e_A.$$

Calculemos el centro y los ideales de $\mathcal{C}\ell(n)$.

NOTACIÓN 3.20. Para cada $h \in N$ sea $T_h : \mathcal{C}\ell(n) \to \mathcal{C}\ell(n)$ la transformación lineal dada por $T_h(x) = \frac{1}{2}(x - e_h x e_h)$. Si $A \subset N$, entonces fácilmente se ve que

$$T_h(e_A) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \in A \text{ y } |A| \text{ es par} \\ e_A & \text{si } h \notin A \text{ y } |A| \text{ es par} \\ e_A & \text{si } h \in A \text{ y } |A| \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } h \notin A \text{ y } |A| \text{ es impar} \end{cases}$$

LEMA 3.21. *Si $T = T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_n$, entonces para n par se tiene*

$$T(e_A) = \begin{cases} e_0 & \text{si } A = \emptyset \\ 0 & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases};$$

y para n impar se tiene

$$T(e_A) = \begin{cases} e_0 & \text{si } A = \emptyset \\ e_N & \text{si } A = N \\ 0 & \text{si } A \neq \emptyset, N. \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 3.22. *El centro de $\mathcal{C}\ell(n)$ es*

$$Z(\mathcal{C}\ell(n)) = \begin{cases} \Bbbk e_0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \Bbbk e_0 + \Bbbk e_N & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Observe que $x \in Z(\mathcal{C}\ell(n))$ si y sólo si $T_h(x) = x$ para todo $h \in N$. □

PROPOSICIÓN 3.23. *Los ideales de $\mathcal{C}\ell(n)$ son*

- $\{0\}$ *y $\mathcal{C}\ell(n)$, si n es par.*
- $\{0\}$ *y $\mathcal{C}\ell(n)$, si n es impar y $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ no es un cuadrado en $\Bbbk$.*
- $\{0\}, \mathcal{C}\ell(n)u, \mathcal{C}\ell(n)v$ *y $\mathcal{C}\ell(n)$ si n es impar y $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = j^2$ con $j \in \Bbbk$, donde $u = \frac{1}{2}(e_0 + je_N)$ y $v = \frac{1}{2}(e_0 - je_N)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $J \neq \{0\}$ es un ideal de $\mathcal{C}\ell(n)$ y sea $x = \sum_{A \subset N} a_A e_A \neq 0$ ($a_A \in \Bbbk$) un elemento de J. Escojamos $B \subset N$ tal que $a_B \neq 0$ y escribamos $e_B^{-1}x = a_B e_0 + \sum_{A \neq \emptyset} a'_A e_A$, para algunos $a'_A \in \Bbbk$. Como J es un ideal, entonces $T(e_B^{-1}x) \in J$. Si n es par, entonces $T(e_B^{-1}x) = a_B e_0$ es una unidad y por lo tanto $J = \mathcal{C}\ell(n)$.

Supongamos que n es impar. Utilizando la anticonmutatividad de los e_i's tenemos que

$$\begin{aligned} e_N^2 &= (e_1 e_2 \cdots e_n)(e_1 e_2 \cdots e_n) \\ &= (-1)^{\sum_{i=0}^{n} i} e_0 \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} e_0. \end{aligned}$$

Supongamos que $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ no es un cuadrado en $\Bbbk$. Observe que si $c_0 e_0 + c_N e_N$ y $x_0 e_0 + x_N e_N$ son elementos de $Z(\mathcal{C}\ell(n))$, entonces

$$(x_0 e_0 + x_N e_N)(c_0 e_0 + c_N e_N) = (c_0 x_0 + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} c_N x_N) e_0 + (c_N x_0 + c_0 x_N) e_N$$

Por lo tanto, $c_0e_0+c_Ne_N \in Z(\mathcal{C}\ell(n))$ con $c_N \neq 0$ es invertible si y sólo si el sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcll} c_0x_0 & + & (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}c_Nx_N & =1 \\ c_Nx_0 & + & c_0x_N & =0 \end{array} \right. \tag{3.5}$$

tiene solución en $\Bbbk$ para x_0 y x_N. Si el sistema (3.5) no tuviera solución, tendriamos que

$$\begin{aligned} 0 &= \det\begin{pmatrix} c_0 & (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}c_N \\ c_N & c_0 \end{pmatrix} \\ &= c_0^2+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}c_N^2. \end{aligned}$$

Es decir, $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ es un cuadrado en $\Bbbk$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $Z(\mathcal{C}\ell(n))$ es un cuerpo y el ideal $J\cap Z(\mathcal{C}\ell(n))$ de $Z(\mathcal{C}\ell(n))$ es $\{0\}$ ó $Z(\mathcal{C}\ell(n))$. Si x y B son como antes, entonces $T(e_B^{-1}x)$ es un elemento no nulo de $J\cap Z(\mathcal{C}\ell(n))$. Por lo tanto, $J\cap Z(\mathcal{C}\ell(n)) = Z(\mathcal{C}\ell(n))$ y esto implica que $J=\mathcal{C}\ell(n)$.

Finalmente supongamos que $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = j^2$, para algun $j\in\Bbbk$. Sean $u=\frac{1}{2}(e_0+je_N)$ y $v=\frac{1}{2}(e_0-je_N)$. Observe que u,v son elementos ortogonales idempotentes en $Z(\mathcal{C}\ell(n))$. Más aún, como $u+v=e_0$ y $j^3(u-v)=e_N$, entonces $Z(\mathcal{C}\ell(n))=\Bbbk u+\Bbbk v$. Los ideales de $Z(\mathcal{C}\ell(n))$ son $\{0\},\Bbbk u,\Bbbk v$ y $Z(\mathcal{C}\ell(n))$. Como $J\cap Z(\mathcal{C}\ell(n))$ es un ideal no nulo ($T(e_B^{-1}x)\in J\cap Z(\mathcal{C}\ell(n))$) de $Z(\mathcal{C}\ell(n))$, entonces $J\cap Z(\mathcal{C}\ell(n))=\Bbbk u,\Bbbk v$ ó $Z(\mathcal{C}\ell(n))$. Por lo tanto $u\in J$ ó $v\in J$, supongamos que $u\in J$. Consideremos dos casos. Si $Jv\neq 0$, escojamos x y B como antes tal que $x=yv$ para algún $y\in J$. Como para todo $z\in\mathcal{C}\ell(n)$ se tiene que $T_h(zv)=\frac{1}{2}(zv-hzvh)=\frac{1}{2}(z-hzh)v=T_h(z)v$, entonces

$$T(e_B^{-1}x)=T(e_B^{-1}yv)=T(e_B^{-1}y)v=(\alpha u+\beta v)v=\beta v\in\Bbbk v-\{0\} \quad (\alpha,\beta\in\Bbbk).$$

Por lo tanto, $J\cap Z(\mathcal{C}\ell(n))=Z(\mathcal{C}\ell(n))$, es decir, $J=\mathcal{C}\ell(n)$. Si por el contrario $Jv=\{0\}$, entonces $J=J(u+v)=Ju\subset\mathcal{C}\ell(n)u\subset J$, es decir $J=\mathcal{C}\ell(n)u$. Si $v\in J$ es análogo que $J=\mathcal{C}\ell(n)$ ó $J=\mathcal{C}\ell(n)v$. $\square$

Para cada $x\in\mathcal{C}\ell(n)$ definamos $\theta(x):\mathcal{C}\ell(n)\to\mathcal{C}\ell(n)$ por $\theta(x)(y)=xy$. Si ordenamos la base $\{e_A\}_{A\subset N}$ con el orden lexicográfico, el endomorfismo $\theta(x)$ se puede representar por una matriz de tamaño $2^n\times 2^n$, la cual también denotamos por $\theta(x)$. La aplicación $\theta:\mathcal{C}\ell(n)\to\mathbb{M}_{2^n}(\Bbbk)$ es una representación de $\mathcal{C}\ell(n)$, llamada la representación regular de $\mathcal{C}\ell(n)$. Denotamos por $\Delta(x)$ al determinante de $\theta(x)$. Si n es impar, denotamos por $\mathcal{C}\ell'(n)$ al álgebra de Clifford sobre $\Bbbk'=\Bbbk\left(\sqrt{-1}\right)$. Sean θ' y θ'' la restricción de la representación regular de $\mathcal{C}\ell'(n)$ a $\mathcal{C}\ell'(n)u$ y $\mathcal{C}\ell'(n)v$, respectivamente. Escribimos $\Delta'(x)=\det(\theta'(x))$ y $\Delta''(x)=\det(\theta''(x))$.

Sea $\mathcal{C}\ell^*(n)=\{x\in\mathcal{C}\ell(n)\mid x \text{ es invertible}\}$, note que $x\in\mathcal{C}\ell^*(n)$ si y sólo si $\Delta(x)\neq 0$. Para cada $x\in\mathcal{C}\ell^*(n)$ definimos $\psi(x):\mathcal{C}\ell(n)\to\mathcal{C}\ell(n)$ como $\psi(x)(y)=xyx^{-1}$. Como $\psi(x)^{-1}=\psi(x^{-1})$, entonces la aplicación $\psi:\mathcal{C}\ell^*(n)\to\mathrm{GL}(2^n,\Bbbk)$, es una representación del grupo $\mathcal{C}\ell^*(n)$ cuyo nucleo es $\mathcal{C}\ell^*(n)\cap Z(\mathcal{C}\ell(n)$.

Consideremos la base $\{e_A\}_{A\subset N}$ de $\mathcal{C}\ell(n)$ y sea $\mathcal{C}\ell(n)\to\Bbbk^{2^n}$ la transformación lineal que asigna al i-ésimo elemento de $\{e_A\}_{A\subset N}$ el vector canónico $\mathbf{e_i}$ de $\Bbbk^{2^n}$. Hagamos $\Bbbk=\mathbb{R}$. Dotamos a $\mathcal{C}\ell(n)$ de la única topología que hace esta aplicación un homeomorfismo. Con esta topología las operaciones de $\mathcal{C}\ell(n)$ son continuas. Más aún, $\mathcal{C}\ell^*(n)$ es un grupo topológico con la topología heredada de $\mathcal{C}\ell(n)$ y las representaciones θ y ψ son continuas.

Por otro lado, para $x \in \mathcal{C}\ell(n)$ se tiene

$$\theta\left(e_0 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}\right) = e_0 + x + \frac{\theta(x)^2}{2!} + \cdots + \frac{\theta(x)^m}{m!}.$$

Si hacemos tender m a infinito, entonces por la continuidad de θ obtenemos la identidad

$$\theta(\exp x) = \exp\theta(x).$$

En particular, del Lema 3.2 tenemos que $\Delta(\exp x) = \exp \operatorname{Tr}(\theta(x))$. Sea $\chi(x) : \mathcal{C}\ell(n) \to \mathcal{C}\ell(n)$ por $\chi(x)(y) = xy - yx$, veamos que $\psi(\exp x) = \exp(\chi(x))$. En efecto, para cada $y_0 \in \mathcal{C}\ell(n)$ definamos $y(t) = \psi(\exp(tx))(y_0) = (\exp(tx))y_0(\exp(-tx))$, luego

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\exp(hx))y(t)(\exp(-hx)) - y(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} xy(t) - y(t)x + O(h) \\ &= xy(t) - y(t)x \\ &= \chi(x)y(t), \end{aligned}$$

donde $\lim_{h\to 0} O(h) = 0$. De la ecuación diferencial anterior tenemos que

$$\psi(\exp(tx)) = \exp(t\chi(x))$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 3.24. Sea V el subespacio de $\mathcal{C}\ell(n)$ generado por $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ y sea

$$G = \{x \in \mathcal{C}\ell^*(n) \mid \psi(x)V \subset V, \Delta(x) = 1 \text{ y (si } n \text{ es impar) } \Delta'(x) = \Delta''(x) = 1\}.$$

La componente conexa de e_0 en G es llamado el *grupo espinorial de orden n* y se denota por $\operatorname{Spin}(n)$.

OBSERVACIÓN 3.25. G es un grupo topológico, pues si $x \in G$, entonces como $\psi(x)$ es un isomorfismo y $\psi(x)V \subset V$, debe ser $\psi(x)V = V$. Aplicando $\psi(x)^{-1}$ a esta última igualdad tenemos que $\psi(x^{-1})V = V$.

Si $x \in G$, denotamos por $\varphi(x) : V \to V$ a la restricción de $\psi(x)$ a V. Con respecto a la base $\{e_1 \cdots, e_n\}$ podemos representar a $\varphi(x)$ por una matriz de tamaño $n \times n$. Escribamos

$\varphi(x)e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$, luego, para $y_1, y_2, \cdots, y_n \in \Bbbk$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi(x)\left(\sum_{i=1}^n y_ie_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n y_i\varphi(x)(e_i)\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^n y_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j\right)\right)^2 \\
&= \left(\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}y_i\right)e_j\right)^2 \\
&= -\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}y_i\right)^2 e_0.
\end{aligned}$$

Como $\psi(x)\left(\sum_{i=1}^n y_ie_i\right)^2 = -\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)e_0$, entonces

$$\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

De esta ecuación se sigue que si $y = \sum_{i=1}^n y_ie_i$, entonces $\langle\varphi(x)(y), \varphi(x)(y)\rangle = \langle y, y\rangle$. Por lo tanto la matriz $\varphi(x)$ es ortogonal, es decir, $\varphi(G) \subset \mathrm{O}(n)$. Más aún, por la continuidad de $\varphi : G \to \mathrm{O}(n)$ la componente conexa de la identidad en G debe ser enviada en la componente conexa de la identidad en $\mathrm{O}(n)$, es decir, $\varphi(\mathrm{Spin}(n)) \subset \mathrm{SO}(n)$.

Veamos que $\varphi(\mathrm{Spin}(n)) = \mathrm{SO}(n)$. Sea V_2 el subespacio de $\mathcal{C}\ell(n)$ generado por $\{e_ie_j\}_{1\le i<j\le n}$. Note que $\dim V_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ y además para $1 \le i < j \le n$ se tiene que

$$\chi(e_ie_j)(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i, j \\ 2e_j & \text{si } k = i \\ -2e_i & \text{si } k = j. \end{cases}$$

Sea $x \in V_2$, luego $\chi(x)V \subset V$. Más aún, como $\psi(\exp tx) = \exp t\chi(x)$ y V es cerrado, entonces $\psi(\exp tx)V \subset V$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Además observe que $-\mathrm{Tr}\,\theta(e_ie_j) = \mathrm{Tr}\,\theta(e_je_i) = \mathrm{Tr}(\theta(e_j)\theta(e_i)) = \mathrm{Tr}(\theta(e_i)\theta(e_j)) = \mathrm{Tr}\,\theta(e_ie_i)$, lo que implica que $\mathrm{Tr}\,\theta(e_ie_j) = 0$. Luego, $\Delta(\exp x) = 1$ y si n es impar $\Delta'(\exp x) = \Delta''(\exp x) = 1$. Se sigue que $\exp tx \in \mathrm{Spin}(n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y en particular $\exp x \in \mathrm{Spin}(n)$. Denotemos por $\chi_1(x)$ la restricción de $\chi(x)$ a V. Como $\exp\chi_1(x) = \varphi(\exp x) \in \mathrm{SO}(n)$ (ver Diagrama 3.1), entonces la matriz $\chi_1(x)$ (con respecto a la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$) es antisimétrica. Más aún, si $\chi_1(x) = 0$, entonces $x \in Z(\mathcal{C}\ell(n))$ y por lo tanto $x = 0$, pues $Z(\mathcal{C}\ell(n)) \cap V_2 = \{0\}$. Es decir, si denotamos por $\mathfrak{so}(n)$ al espacio vectorial de matrices antisimétricas de tamaño $n \times n$, entonces la transformación lineal $\chi_1 : V_2 \to \mathfrak{so}(n)$ es inyectiva.

Observe que $\dim V_2 = \dim\mathfrak{so}(n)$ y por lo tanto χ_1 es un isomorfismo de espacios vectoriales. Como $\exp\chi_1(V_2) \subset \varphi(\mathrm{Spin}(n))$, entonces de la Proposición 3.8 se sigue que $\varphi(\mathrm{Spin}(n))$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spin}(n) \arrow[d, "\varphi_1"'] & V_2 \arrow[l, "\exp"'] \arrow[d, "\chi_1"] \\ \mathrm{SO}(n) & \mathfrak{so}(n) \arrow[l, "\exp"] \end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 3.1

contiene una vecindad de $\mathbb{I}$ en $\mathrm{SO}(n)$. Como $\mathrm{SO}(n)$ es conexo, entonces por la Proposición 3.9 tenemos que $\varphi(\mathrm{Spin}(n)) = \mathrm{SO}(n)$.

Denotemos por φ_1 a la restricción de φ a $\mathrm{Spin}(n)$. Del primer teorema de isomorfismos de grupos tenemos que

$$\mathrm{Spin}(n)/\ker(\varphi_1) \cong \mathrm{SO}(n)$$

LEMA 3.26. *El grupo* $\mathrm{Spin}(n)$ *está generado por* $\{\mathrm{sen}(t)e_0 + \cos(t)e_ie_j \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ y } t \in \mathbb{R}\}$. *En particular* $\mathrm{Spin}(n) \subset \mathcal{C}\ell(n)^+$ *(ver observación* 3.19*).*

DEMOSTRACIÓN. De las Proposiciones 3.9 y 3.8, tenemos que $\{\exp(te_ie_j) \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ y } t \in \mathbb{R}\}$ genera a $\mathrm{Spin}(n)$. El resultado se sigue de que

$$\begin{aligned} \exp te_ie_j &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (e_ie_j)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} t^k e_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^k e_ie_j \\ &= \mathrm{sen}(t)e_0 + \cos(t)e_ie_j. \end{aligned}$$

□

LEMA 3.27. *Si* n *es impar y* $j \in \mathbb{k}$ *es tal que* $j^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, *entonces* $\dim \mathcal{C}\ell(n)u = \dim \mathcal{C}\ell(n)v = 2^{n-1}$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos únicamente que $\dim \mathcal{C}\ell(n)u = 2^{n-1}$, el otro caso es análogo. Como $\mathcal{C}\ell(n) = \bigoplus_{A \subset N} e_A$, entonces $\mathcal{C}\ell(n)u$ esta generado por $\{e_Au\}_{A \subset N}$. Observe que

$$e_Au = \frac{1}{2}(e_A + j(-1)^{\sum_{i \in A} i} e_{N \setminus A}).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} j(-1)^{\sum_{i \notin A} i} e_Au &= \frac{1}{2}(j(-1)^{\sum_{i \notin A} i} e_A + j^2(-1)^{\sum_{i=1}^{n} i} e_{N \setminus A}) \\ &= \frac{1}{2}(j(-1)^{\sum_{i \notin A} i} e_A + e_{N \setminus A}) \\ &= e_{N \setminus A}u. \end{aligned}$$

Sea $\{A_1, A_2, \cdots, A_{2^{n-1}}\}$ un conjunto de 2^{n-1} subconjuntos de N tal que para cada $i = 1, \cdots, 2^{n-1}$, se tiene que $A_j \neq N \setminus A_i$, para todo $j = 1, \cdots, 2^{n-1}$. Se sigue que el conjunto $\{e_{A_i} u\}_{i=1}^{2^{n-1}}$ genera a $\mathcal{C}\ell(n)u$.

Veamos que $\{e_{A_i} u\}_{i=1}^{2^{n-1}}$ es linealmente independiente. Sean $a_i \in \mathbb{k}$ tales que

$$a_1 e_{A_1} u + a_2 e_{A_2} u + \cdots + a_{2^{n-1}} e_{A_{2^{n-1}}} u = 0.$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_k \frac{1}{2}(e_{A_k} + j(-1)^{\sum_{i \in A_k} i} e_{N \setminus A_k}) = 0.$$

De la independencia lineal de $\{e_A\}_{A \subset N}$ se sigue que cada $a_i = 0$. Por lo tanto $\dim \mathcal{C}\ell(n) = 2^{n-1}$. □

LEMA 3.28. $\ker(\varphi_1) = \{e_0, -e_0\}$

DEMOSTRACIÓN. Observe que $\ker \varphi_1 = Z(\mathcal{C}\ell(n)) \cap \mathrm{Spin}(n)$. Por otro lado, $Z(\mathcal{C}\ell(n)) \cap \mathcal{C}\ell(n)^+ = ke_0$. Como para cada $a \in \mathbb{R}$, tenemos que $\Delta(ae_0) = a^{2^n}$ y $\mathrm{Spin}(n) \subset \mathcal{C}\ell(n)^+$ (Lema 3.26), entonces $\mathrm{Spin}(n) = \{e_0, -e_0\}$. □

OBSERVACIÓN 3.29. Como el grupo $\mathrm{Spin}(n)$ está generado por $\{\mathrm{sen}(t)e_0 + \cos(t)e_i e_j \mid 1 \leq i < j \leq n \text{ y } t \in \mathbb{R}\}$, entonces podemos pensar a $\mathrm{Spin}(n-1)$ como subespacio de $\mathrm{Spin}(n)$.

LEMA 3.30. $\mathrm{SU}(2)$ *es isomorfo (como grupo topológico) al espacio Q de cuaterniones unitarios. En particular,* $\mathrm{SU}(2)$ *es homeomorfo a S^3.*

DEMOSTRACIÓN. Un cálculo sencillo muestra que

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \;\Big|\; |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Definamos la función $f : Q \to \mathrm{SU}(2)$ por

$$f(w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} w + ix & -y + iz \\ y + iz & w - ix \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que f es un isomorfismo de grupos topológicos. Finalmente, como subespacio de $\mathbb{R}^4$ tenemos que Q es la esfera tridimensional S^3. □

LEMA 3.31. $\mathrm{SU}(2)$ *es un doble cubrimiento de* $\mathrm{SO}(3)$. *En particular,* $\mathrm{SU}(2)$ *es homeomorfo a* $\mathrm{Spin}(3)$ *y por lo tanto* $\mathrm{Spin}(3)$ *es simplemente conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ definida por

$$\Phi \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & -2\mathrm{Re}(ab) & -2\mathrm{Im}(ab) \\ 2\mathrm{Re}(\overline{a}b) & \mathrm{Re}(a^2 - b^2) & \mathrm{Im}(a^2 - b^2) \\ 2\mathrm{Im}(\overline{a}b) & -\mathrm{Im}(a^2 + b^2) & \mathrm{Im}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}.$$

La aplicación Φ es una aplicación de cubrimiento dos a uno, ver [**S**, Chap. 4, Prop. 4.5]. □

LEMA 3.32. *Para $n \geq 2$ se tiene que el espacio topológico* $\mathrm{Spin}(n)/\,\mathrm{Spin}(n-1)$ *es homeomorfo a la esfera S^{n-1}.*

DEMOSTRACIÓN. Del tercer teorema de isomorfismos tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Spin}(n)/\,\mathrm{Spin}(n-1) &\cong \mathrm{Spin}(n)/\{e_0,-e_0\} \Big/ \mathrm{Spin}(n-1)/\{e_0,-e_0\} \\ &\cong \mathrm{SO}(n)/\,\mathrm{SO}(n-1).\end{aligned}$$

El resultado se tiene de la Proposición 3.14. □

TEOREMA 3.33. *Para $n \geq 3$ la aplicación $\varphi_1 : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ es una aplicación de cubrimiento. Más aún,* $\mathrm{Spin}(n)$ *es simplemente conexo y por lo tanto es el espacio de cubrimiento universal de* $\mathrm{SO}(n)$.

DEMOSTRACIÓN. Que φ_1 es una aplicación de cubrimiento se sigue al tomar $G = \mathrm{Spin}(n)$ y $H = \ker \varphi_1$ en la Proposición 3.10. Aplicando repetidamente el Teorema 3.11, teniendo en cuenta que $\mathrm{Spin}(3)$ es simplemente conexo, tenemos que $\mathrm{Spin}(n)$ es simplemente conexo. □

Capítulo 4

Foliaciones y grupoide de monodromía

En este capítulo estudiaremos foliaciones de variedades diferenciables, las cuales resultaran útiles para demostrar que el grupoide fundamental de una variedad diferenciable admite una estructura de grupoide de Lie. Más aún, construiremos el grupoide de monodromía de una foliación y utilizando holonomía de caminos probaremos que este es un ejemplo de grupoide de Lie [**MM**].

1. Introducción a la teoría de foliaciones

Intuitivamente, una foliación en una variedad M^n es una descomposición de M en subvariedades conexas de la misma codimensión q, llamadas hojas. Localmente estas hojas se comportan como los subconjuntos $\mathbb{R}^{n-q} \times \{y\}$ en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$, para $y \in \mathbb{R}^q$.

DEFINICIÓN 4.1. Sea M^n una variedad diferenciable y $n = p+q$. Un *atlas de foliación* de dimensión p es un atlas suave $\mathcal{F}$ tal que

1. Si $(U,\varphi) \in \mathcal{F}$, entonces $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ donde U_1, U_2 son discos abiertos de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$, respectivamente.
2. Si $(U,\varphi),(V,\psi) \in \mathcal{F}$ son tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es de la forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x,y) = (h_1(x,y), h_2(y))$, para todo $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$, tales que $(x,y) \in \varphi(U \cap V)$.

Las cartas (U,φ) se llaman *cartas de foliación*. Una *foliación de M de dimensión p* es un atlas de foliación maximal de M de dimensión p.

DEFINICIÓN 4.2. Sea $\mathcal{F}$ una foliación de dimensión p de una variedad M^n y sea (U,φ) una carta de foliación con $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Los conjuntos de la forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{y\})$ con $y \in U_2$ son llamados *placas* de U.

OBSERVACIÓN 4.3. Observe que para $y \in U_2$ fijo, la aplicación $\varphi^{-1}|_{U_1 \times \{y\}} : U_1 \times \{y\} \to M$ es un embebimiento, por lo tanto las placas son subvariedades conexas de M de dimensión p. Más aún, las placas forman una descomposición de U en subvariedades de M disjuntas dos a dos.

DEFINICIÓN 4.4. Un *camino de placas* de x a y es una sucesión $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ de placas de $\mathcal{F}$ tal que para cada $i = 1, \cdots, k-1$ se tiene que $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ con $p \in \alpha_1$ y $q \in \alpha_k$. Definimos una relación de equivalencia sobre M como xRy si y sólo si existe un camino de placas de x a y. Las clases de equivalencia de R se llaman las *hojas* de $\mathcal{F}$.

OBSERVACIÓN 4.5. Cada hoja L de $\mathcal{F}$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable. Sea $x \in L$ y (U,φ) una carta de x en $\mathcal{F}$ tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{p+q}$. Escribamos $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, donde $\varphi_1 : U \to \mathbb{R}^p$ y $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^q$. Sea α una placa de U que contiene a x y sea $\widetilde{\varphi} = \varphi_1|_\alpha : \alpha \to \mathbb{R}^p$. Claramente $\widetilde{\varphi}$ es un homeomorfismo sobre su imagen. Más aún, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(\alpha, \widetilde{\varphi}) \mid \alpha \text{ es una placa de } L \text{ y } (U,\varphi) \in \mathcal{F}\}$$

es un atlas suave de L.

LEMA 4.6. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación de M. Existe una cubierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de M por cartas coordenadas de $\mathcal{F}$ tal que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $U_i \cup U_j$ está contenido en algún dominio coordenado de $\mathcal{F}$.*

DEFINICIÓN 4.7. Sea L una hoja de $\mathcal{F}$ y $x \in L$. Una *sección transversal* T a L en x es una subvariedad de M tal que $x \in T$ y $T_xM = T_xL \oplus T_xT$.

TEOREMA 4.8. *Sea L una hoja de $\mathcal{F}$ y sean $x, y \in L$. Si α es un camino en L comenzando en x y terminando en y, entonces existen S, T secciones transversales a L en x e y, respectivamente, y un difeomorfismo $f : S \to T$ de tal manera que para cada $u \in S$, se tiene que u y $f(u)$ están en la misma hoja de $\mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un camino de placas $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ de x a y tal que para cada i se tiene que $\alpha_i \cap \alpha(I) \neq \emptyset$. Supongamos que cada α_i es una placa en una carta $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}$ y que $\varphi_i(U_i) = U_1^i \times U_2^i \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Más aún, por el Lema 4.6 podemos suponer que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $U_i \cup U_j$ está contenido en algún dominio coordenado de $\mathcal{F}$.

Para cada $i = 1, \cdots, k-1$ fijemos un punto $u_i \in \alpha_i \cap \alpha_{i+1}$ que esté en la curva α, hagamos $u_0 = x$ y $u_k = y$. Supongamos que $\varphi_i(u_i) = (a_i, b_i)$, $i = 0, \cdots, k$ y sea $T_i = \varphi_i^{-1}(\{a_i\} \times U_2^i)$ sección transversal de L en u_i. Como $U_i \cup U_{i+1}$ está contenido en algún dominio coordenado de $\mathcal{F}$, entonces la componente conexa S_i de $T_i \cap U_{i+1}$ que contiene a u_i es una sección transversal de L en u_i contenida en U_{i+1}. Definamos una función inyectiva $f_i : S_i \to T_{i+1}$, tal que $f_i(u)$ es el único punto de intersección entre la placa de U_{i+1} que pasa por u y T_{i+1} (ver *figura* 1). Claramente f_i es un difeomorfismo sobre su imagen. Más aún, de la construcción es inmediato que u y $f_i(u)$ están en la misma hoja de $\mathcal{F}$.

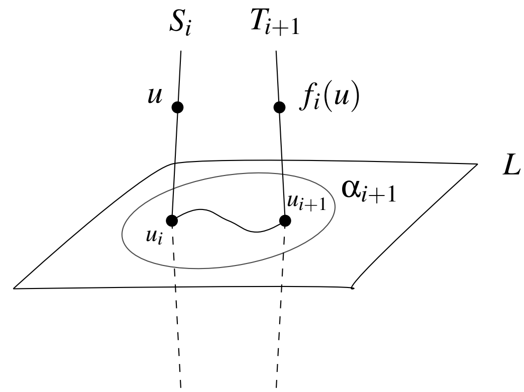


FIGURA 1. La función $f_i : S_i \to T_{i+1}$.

Finalmente sea S una sección transversal a L en x de tal manera que $S \subset S_0 \cap f_0^{-1}(S_1) \cap \cdots \cap (f_k \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_0)^{-1}(T_k)$. La función $f := f_k \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_0 : S \to T_k$ es un difeomorfismo sobre $T = f(S)$ y cumple la propiedad deseada (ver *figura* 2).

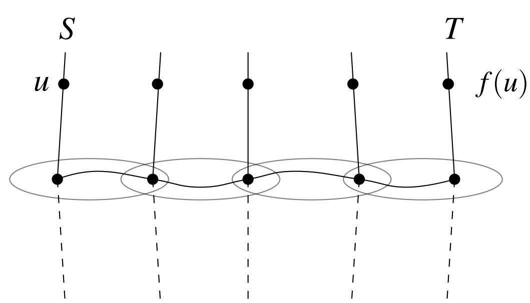


FIGURA 2. La función f.

□

Para definir la holonomía de un camino, introducimos la definición de germen de una función diferenciable.

DEFINICIÓN 4.9. Sean M y N variedades diferenciables y sea $x \in M$. Definimos una relación de equivalencia sobre el espacio de todas las funciones suaves $f : U \to V$, donde U y V son abiertos de M y N, respectivamente, con $x \in U$ y $f(x) \in V$. Si $f : U \to V$ y $f' : U' \to V'$, decimos que $f \sim f'$ si y sólo si existe una vecindad $W \subset U \cap U'$ de x tal que $f|_W = f'|_W$. La clase de equivalencia de una función f se llaman el *germen* de f en x y se denota por $f_x : (M,x) \to (N, f(x))$.

OBSERVACIÓN 4.10. Observe que para cualquier par de gérmenes $f_x : (M,x) \to (N,y)$, $g_y : (N,y) \to (O,z)$ podemos definir la composición como $g_y \circ f_x = (g \circ f|_{f^{-1}(dom\, g)})_x : (M,x) \to (O,z)$. Más aún, el conjunto de gérmenes de difeomorfismos $(M,x) \to (M,x)$ forman un grupo bajo la composición.

DEFINICIÓN 4.11. Sea α un camino en una hoja L de $\mathcal{F}$. El germen de la función f construida en la Proposición 4.8 se llama la *holonomía* del camino α y se denota por

$$\mathrm{hol}^{T,S}(\alpha).$$

PROPOSICIÓN 4.12. *La holonomía del camino α con respecto a T y S no depende de los α_i's, únicamente depende de α, T y S. Más aún la holonomía tiene las siguientes propiedades*

1. *Sean α y β caminos en L tales que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = \beta(0) = y$ y $\beta(1) = z$. Entonces para secciones transversales T, S y R de $\mathcal{F}$ en x, y, z, respectivamente, se tiene*
$$\mathrm{hol}^{R,T}(\beta \cdot \alpha) = \mathrm{hol}^{R,S}(\beta) \circ \mathrm{hol}^{S,T}(\alpha)$$
2. *Si α y β son caminos homotópicos en L de x a y, entonces para secciones transversales T y S en x e y, respectivamente, se tiene que*
$$\mathrm{hol}^{S,T}(\alpha) = \mathrm{hol}^{S,T}(\beta).$$
3. *Si α es un camino en L de x a y, entonces para secciones transversales T, T' en x y S, S' en y se cumple*
$$\mathrm{hol}^{S',T'}(\alpha) = \mathrm{hol}^{S',S}(e_y) \circ \mathrm{hol}^{S,T}(\alpha) \circ \mathrm{hol}^{T,T'}(e_x).$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [**CN**, Chap. 4, §1, Lemma 1] y [**MM**, Chap. 2, §2.1]. $\square$

2. Grupoide de Monodromía

DEFINICIÓN 4.13. Diremos que un grupoide $\mathcal{G} \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathcal{M}$ es un *grupoide topológico*, si $\mathcal{G}, \mathcal{M}$ son espacios topológicos, las aplicaciones $s,t : \mathcal{G} \to \mathcal{M}$, $m : \mathcal{G}\ {}_s\times_t\ \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $I : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ e $id : \mathcal{M} \to \mathcal{G}$ son continuas.

DEFINICIÓN 4.14. Un *grupoide de Lie* es un grupoide $\mathcal{G} \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{G}$ son variedades diferenciables, las aplicaciones $s,t : \mathcal{G} \to \mathcal{M}$, $m : \mathcal{G}\ {}_s\times_t\ \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $I : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ e $id : \mathcal{M} \to \mathcal{G}$ son suaves y las aplicaciones s, t son sumersiones sobreyectivas.

OBSERVACIÓN 4.15. Sea $\mathcal{G} \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \mathcal{M}$ un grupoide topológico (de Lie). Como Inv es su propio inverso, la aplicación Inv es un homeomorfismo (difeomorfismo).

Sea $\mathcal{F}$ un atlas de foliación de dimensión p de una variedad diferenciable M^n. Definimos el *grupoide de monodromía* $\mathrm{Mon}(M,\mathcal{F}) \rightrightarrows M$ como el grupoide cuyas flechas son clases de homotopía de caminos contenidos en las hojas de la foliación y cuya composición entre flechas es la concatenación de caminos.

PROPOSICIÓN 4.16. *El grupoide de monodromía de una foliación admite una estructura de grupoide de Lie.*

DEMOSTRACIÓN. Primero dotemos a $\mathrm{Mon}(M,\mathcal{F})$ de una topología como sigue. Sea $[\alpha] \in \mathrm{Mon}(M,\mathcal{F})$ con α un camino en una hoja L comenzando en x y terminando en y. Escojamos (U,φ) y (V,ψ) cartas de foliación de x e y, respectivamente, tales que $\varphi(U) = A\times C$ y $\psi(V) = B\times D$, donde A,B son discos en $\mathbb{R}^p$ y C,D discos en $\mathbb{R}^q$. Escribamos $\varphi(x) = (x_1,x_2) \in A\times C$ y $\psi(y) = (y_1,y_2) \in B\times D$. Sean $T = \varphi^{-1}(\{x_1\}\times C)$ y $S = \psi^{-1}(\{y_1\}\times D)$ secciones transversales a x e y, respectivamente. Más aún, por el Teorema 4.8 podemos suponer que T y S son lo suficientemente pequeñas para que $\mathrm{hol}^{S,T}(\alpha) : (T,x) \to (S,y)$ sea un difeomorfismo de T en S. Sea $H^\alpha : I\times T \to M$ la función suave definida por $H^\alpha(t,z) = \mathrm{hol}^{S_t,T}(\alpha)(z)$, donde S_t es una sección transversal a $\alpha(t)$, con $S_0 = T$ y $S_1 = S$. Definimos una función

$$f_\alpha : A\times B\times C \to \mathrm{Mon}(M,\mathcal{F})$$

de la siguiente manera. Para cada $(a,b,c) \in A\times B\times C$, sea $z = \varphi^{-1}(x_1,c)$, escribamos $z' = \mathrm{hol}^{S,T}(\alpha)(z)$ y $\psi(z') = (y_1,d)$. Hagamos

$$f_\alpha(a,b,c) = [\tau_\alpha \cdot H^\alpha(-,z)\cdot\gamma_\alpha]$$

donde γ_α es un camino en la placa $\varphi^{-1}(A\times\{c\})$ de $\varphi^{-1}(a,c)$ a z y τ_α es un camino en la placa $\psi^{-1}(B\times\{d\})$ de z' a $\psi^{-1}(b,d)$. Observe que $f_\alpha(a,b,c)$ no depende de la elección de los caminos γ_α, τ_α, pues A,B,C y D son simplemente conexos (ver *figura* 3).

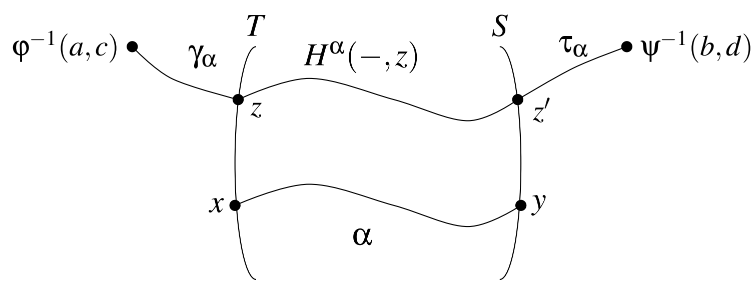


FIGURA 3. Un elemento de $f_\alpha(A\times B\times C)$.

La colección de subconjuntos de la forma $f_\alpha(A\times B\times C)$ forman una base para una topología en $\mathrm{Mon}(M,\mathcal{F})$. En efecto, supongamos que $[\lambda] \in f_\alpha(A\times B\times C)\cap f_\beta(\widetilde{A}\times\widetilde{B}\times\widetilde{C})$, donde β es otro camino en una hoja L' de $\widetilde{x}$ a $\widetilde{y}$ y $(\widetilde{U},\widetilde{\varphi})$, $(\widetilde{V},\widetilde{\psi})$ cartas de foliación de $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$, respectivamente, tales que $\widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) = \widetilde{A}\times\widetilde{C}$ y $\widetilde{\psi}(\widetilde{V}) = \widetilde{B}\times\widetilde{D}$. Supongamos que λ es un camino de u a v y $[\lambda] = [\tau_\alpha\cdot H^\alpha(-,z)\cdot\gamma_\alpha]$. Escojamos A',B' discos en $\mathbb{R}^p$ y C',D' discos en $\mathbb{R}^q$ tales que $\varphi(u) \in A'\times C' \subset \varphi^{-1}(U\cap\widetilde{U})$ y $\varphi(v) \in B'\times D' \subset \psi^{-1}(V\cap\widetilde{V})$. Escribamos $U' = \varphi^{-1}(A'\times C')$, $\varphi' = \varphi|_{U'}$, $V' = \psi^{-1}(B'\times D')$ y $\psi' = \psi|_{V'}$. Consideremos la función

$f_\lambda : A' \times B' \times C' \to \mathrm{Mon}(M, \mathcal{F})$ con respecto a las cartas (U', φ') y (V', ψ'). Veamos que

$$f_\lambda(A' \times B' \times C') \subset f_\alpha(A \times B \times C) \cap f_\beta(\widetilde{A} \times \widetilde{B} \times \widetilde{C}).$$

En efecto, sea $[\mu] \in f_\lambda(A' \times B' \times C')$. Luego

$$\begin{aligned}[\mu] &= [\tau_\lambda \cdot H^\lambda(-, w) \cdot \gamma_\lambda] \\ &= [\tau_\lambda \cdot \mathrm{hol}^{S_t, T^\lambda}(\lambda)(w) \cdot \gamma_\lambda] \\ &= [\tau_\lambda \cdot \mathrm{hol}^{S_t, T^\lambda}(\tau_\alpha \cdot H^\alpha(-, z) \cdot \gamma_\alpha)(w) \cdot \gamma_\lambda]\end{aligned}$$

Por otro lado, note que $[\mathrm{hol}^{S_t, T^\lambda}(\tau_\alpha \cdot H^\alpha(-, z) \cdot \gamma_\alpha)(w)] = [\tau \cdot H^\alpha(-, \mathrm{hol}^{T, T^\lambda}(\gamma_\alpha)(w)) \cdot \gamma]$, para algún par de caminos τ, γ (ver *figura* 4). Por lo tanto

$$[\mu] = [\tau_\lambda \cdot \tau \cdot H^\alpha(-, \mathrm{hol}^{T, T^\lambda}(\gamma_\alpha)(w)) \cdot \gamma \cdot \gamma_\lambda].$$

Es decir $[\mu] \in f_\alpha(A \times B \times C)$ y análogamente $[\mu] \in f_\beta(\widetilde{A} \times \widetilde{B} \times \widetilde{C})$. Por lo tanto la familia de conjuntos de la forma $f_\alpha(A \times B \times C)$ es una base para una topología en $\mathrm{Mon}(M, \mathcal{F})$.

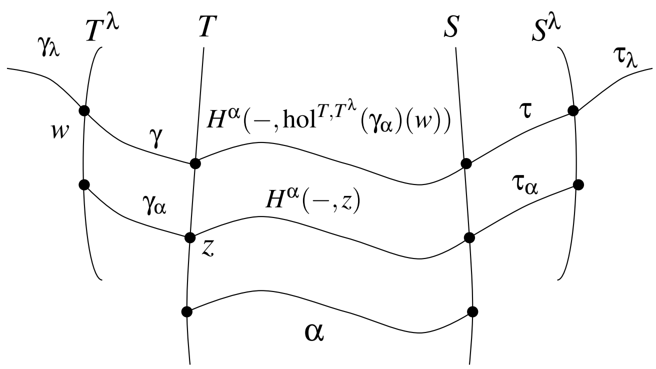


FIGURA 4

Observe que como la topología de $\mathrm{Mon}(M, \mathcal{F})$ está dada a partir de la topología de M y M es segundo contable, entonces $\mathrm{Mon}(M, \mathcal{F})$ también es segundo contable.

Veamos que $\mathrm{Mon}(M, \mathcal{F})$ es Hausdorff. Sean $[\alpha], [\beta] \in \mathrm{Mon}(M, \mathcal{F})$. Supongamos que α y β comienzan en puntos distintos. Escojamos cartas de foliación (U, φ), (U', φ') de $\alpha(0)$ y $\beta(0)$, respectivamente, con $U \cap U' = \emptyset$. Para cualquier par de cartas de foliación (V, ψ), (V', ψ') de $\alpha(1)$ y $\beta(1)$, respectivamente, los abiertos $f_\alpha(A \times B \times C)$ y $f_\beta(A' \times B' \times C')$ son disjuntos, con $[\alpha] \in f_\alpha(A \times B \times C)$ y $[\beta] \in f_\beta(A' \times B' \times C')$. Lo mismo si α y β terminan en puntos distintos.

Ahora supongamos que $[\alpha], [\beta] \in \mathrm{Mon}(M, \mathcal{F})$ empiezan en x y terminan en y, y son tales que no existen abiertos disjuntos que los separen. Escojamos cartas de foliación (U, φ) y (V, ψ) de x e y, respectivamente, tales que las secciones transversales $T = \varphi^{-1}(\{x_1\} \times C)$ y $S =$

$\psi^{-1}(\{y_1\} \times D)$ intersectan a las hojas de $\mathcal{F}$ a lo más en un punto, donde $\varphi(x) = (x_1, x_2)$ y $\psi(y) = (y_1, y_2)$. Sea $[\gamma] \in f_\alpha(A \times B \times C) \cap f_\beta(A \times B \times C)$, luego $[\gamma] = [\tau_\alpha \cdot H^\alpha(-,z) \cdot \gamma_\alpha] = [\tau_\beta \cdot H^\beta(-,z) \cdot \gamma_\beta]$. Como U y V son simplemente conexos, entonces

$$[H^\alpha(-,z)] = [H^\beta(-,z)].$$

Sea

$$H : I \times I \to M$$

una homotopía entre $H^\alpha(-,z)$ y $H^\beta(-,z)$. Si $\Sigma_{s,t}$ es una sección transversal en $H(s,t)$, entonces $\widetilde{H} : I \times I \to M$ definida por $\widetilde{H}(t,s) = \mathrm{hol}^{\Sigma_{s,t},T}(H_s)(x)$ es una homotopía de α a β (ver *figura* 5). Es decir $[\alpha] = [\beta]$ y por lo tanto $\mathrm{Mon}(M, \mathcal{F})$ es Hausdorff.

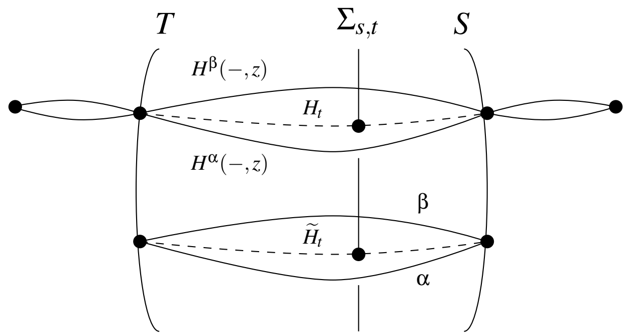


FIGURA 5. Homotopía entre α y β.

Por otro lado observe que las funciones f_α son homeomorfismos sobre su imagen, pues su inversa

$$f_\alpha^{-1} : f(A \times B \ \times C) \to A \times B \times C$$

está dada por $f_\alpha^{-1}([\gamma]) = ((p_1 \circ \varphi)(\gamma(0)), (p_1 \circ \psi)(\gamma(1)), (p_2 \circ \varphi)(\gamma(0)))$. Note que el cambio de coordenadas

$$f_\beta^{-1} \circ f_\alpha : f_\alpha^{-1}(f_\alpha(A \times B \times C) \cap f_\beta(A' \times B' \times C')) \to f_\beta^{-1}(f_\alpha(A \times B \times C) \cap f_\beta(A' \times B' \times C'))$$

dado por

$$f_\beta^{-1}(f_\alpha(a,b,c)) = (p_1(\varphi(\varphi'^{-1}(a,c))), p_1(\psi(\psi'^{-1}(b, p_2(\psi'(\mathrm{hol}(\beta)(z')))))), p_2(\varphi(\varphi'^{-1}(a,c))))$$

es suave. Por lo tanto las funciones f_α determinan una estructura diferenciable para $\mathrm{Mon}(M, \mathcal{F})$.

Finalmente veamos que con está estructura diferenciable

$$\mathrm{Mon}(M, \mathcal{F}) \rightrightarrows M$$

es un grupoide de Lie. Sea $[\alpha] \in \mathrm{Mon}(M, \mathcal{F})$, en coordenadas las aplicaciones s,t : $\mathrm{Mon}(M, \mathcal{F}) \to M$ son de la forma $\widetilde{s} : A \times B \times C \to A \times C$ dada por $\widetilde{s}(a,b,c) = (a,c)$ y $\widetilde{t} : A \times B \times$

$C \to B \times D$ dada por $\widetilde{t}(a,b,c) = (b, p_2(\psi(\mathrm{hol}^{S,T}(\alpha)(\varphi^{-1}(x_1,c)))))$, donde $x_1 = p_1(\varphi(\alpha(0)))$. Por lo tanto s,t son suaves. Si $x \in M$, la aplicación identidad $id : M \to \mathrm{Mon}(M,\mathcal{F})$ en coordenadas apropiadas alrededor de x tiene la forma $\widetilde{id}(a,b) = (a,b,b)$, que claramente es suave.

Finalmente veamos que m es suave. Sea $([\alpha],[\beta]) \in \mathrm{Mon}(M,\mathcal{F})\ {}_s\!\times_t\ \mathrm{Mon}(M,\mathcal{F})$ tal que $\beta(1) = \alpha(0) = y$, $\beta(0) = x$ y $\alpha(1) = z$. Escojamos cartas de foliación (U,φ), (V,ψ), (W,ϕ) de x, y y z, respectivamente. Escribamos $f(U) = A \times C$, $f(V) = B \times D$ y $f(W) = E \times H$. Con respecto a las cartas $(f_\alpha(B \times E \times D), f_\alpha^{-1})$, (V,ψ) la aplicación s es localmente una proyección. Si δ es como en el Lema 1.31 tenemos que $(f_\alpha(B \times E \times D)\ {}_s\!\times_t\ f_\beta(A \times B \times C), \delta)$ es una carta local de $([\alpha],[\beta])$. Con respecto a esta carta y a la carta $(f_{\alpha\cdot\beta}(A \times E \times C))$ de $[\alpha \cdot \beta]$, m toma la forma

$$\widetilde{m}((b,e,d),b') = (b',e,d).$$

Que claramente es suave. $\square$

OBSERVACIÓN 4.17. Sea M^m una variedad diferenciable. Cualquier atlas de M se puede pensar como una foliación trivial de dimensión m. El grupoide de monodromía con respecto a esta foliación corresponde al grupoide fundamental de M. En particular, el grupoide fundamental es un grupoide de Lie. Más aún, la topología del subespacio $E = \{[f] \in \pi_1(X) \mid f(0) = b\}$ de $\pi_1(M)$ es la misma topología del Teorema 2.26.

Capítulo 5

Cofibraciones

En este capítulo estudiaremos la *propiedad de extensión de homotopía y cofibraciones*, siguiendo el enfoque de [**D**]. A lo largo de este capítulo escribiremos la composición de funciones por yuxtaposición, es decir, escribiremos fg en lugar de $f \circ g$.

Sea $i : A \to X$ una función continua. Uno de los problemas en topología es determinar cuándo una aplicación $f : A \to Y$ admite una extensión a lo largo de i, es decir, cuándo existe una función continua $\widetilde{f} : X \to Y$ tal que $f = \widetilde{f}i$. En el caso en que decidir si una función f admite una extensión a lo largo de i dependa únicamente de la clase de homotopía de f, diremos que f es una cofibración. Comenzaremos definiendo el *mapping cylinder* de una aplicación continua.

DEFINICIÓN 5.1. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Si $X+Y$ denota la unión disjunta de espacios topológicos, el pushout en la categoría $\mathcal{T}op$ del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X+X \arrow[r, "f+id_X"] \arrow[d, "\iota_0+\iota_1"'] & Y+X \arrow[d] \\ X\times I \arrow[r] & Z(f), \end{tikzcd}$$

DIAGRAMA 5.1. Mapping cylinder

donde $\iota_0(x) = (x,0)$ y $\iota_1(x) = (x,1)$, se llama el *mapping cylinder* de f y se denota por $Z(f)$.

Para cada función continua $f : X \to Y$ considere el espacio

$$X \times I + Y/\sim,$$

donde la relación de equivalencia está dada por $(x,1) \sim f(x)$. Sea $J+j : Y+X \to X\times I+Y/\sim$ definida por $J(y) = y$, $j(x) = (x,0)$ y sea $a : X\times I \to X\times I+Y/\sim$ definido por $a(x,t) = (x,1-t)$.

TEOREMA 5.2. *$X\times I+Y/\sim$ junto con las aplicaciones a y $J+j$ es el mapping cylinder de f.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente a y $J+j$ son continuas, más aún $a\circ(\iota_0+\iota_1) = (J+j)\circ(f+id_x)$.

Supongamos que Z es otro espacio topológico junto con dos funciones continuas $J'+j' : Y+X \to z$ y $a' : X \times I \to Z$ tales que $a' \circ (\iota_0 + \iota_1) = (J' + j) \circ (f + id_x)$, definamos $l : X \times I + Y/\sim \to Z$ por $l(x,t) = a'(x, 1-t)$ y $l(y) = J'(y)$. Observe que l es continua, pues si $\pi : X \times I + Y \to X \times I + Y/\sim$ es la proyección, entonces la función $l \circ \pi : X \times I + Y \to Z$ determinada por $l \circ \pi(x,t) = a'(x, 1-t)$ y $l \circ \pi(y) = J'(y)$ es continua (lema de pegado). Además si $y \in Y$, $t \in I$ y $x \in X$, entonces $l(a(x,t)) = l(x, 1-t) = a'(x,t)$. Así mismo

$$\begin{aligned} l((J+j)(y)) &= l(J(y)) \\ &= l(y) \\ &= J'(y) \\ &= (J' + j')(y); \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} l((J+j)(x)) &= l(j(x)) \\ &= l(x,0) \\ &= a'(x,1) \\ &= a'((\iota_0 + \iota_1)(x)) \\ &= (J' + j')((f + id_X)(x)) \\ &= (J' + j')(x). \end{aligned}$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} X+X \arrow[r, "f+id_X"] \arrow[d, "\iota_0+\iota_1"'] & Y+X \arrow[d, "J+j"'] \arrow[ddr, bend left, "J'+j'"] & \\ X \times I \arrow[r, "a"'] \arrow[drr, bend right, "a'"'] & X \times I + Y/\sim \arrow[dr, "l"] & \\ & & Z. \end{tikzcd}$$

Finalmente supongamos que $l' : X \times I + Y/\sim \to Z$ es una función continua tal que $l' \circ a = a'$ y $l' \circ (J + j) = J' + j'$. Luego, $l'(x,t) = l'(a(x, 1-t)) = l(a(x, 1-t)) = l(x,t)$ y $l'(y) = l'((J+j)(y)) = l((J+j)(y)) = l(y)$, para cada $(x,t) \in X \times I$ y $y \in Y$. Por lo tanto $l = l'$ y $Z(f) = X \times I + Y/\sim$ es el pushout del Diagrama 5.1. $\square$

LEMA 5.3. *$Z(f)$ es el pushout del diagrama*

DEMOSTRACIÓN. De la definición del mapping cylinder se ve fácilmente que $a \circ \iota_0 = Jf$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_0"'] & Y \arrow[d, "J"] \\
X \times I \arrow[r, "a"'] & Z(f).
\end{tikzcd}
$$

DIAGRAMA 5.2

Observe que si $j_0^X : X \to X + X$ y $j_0^Y : X \to Y + X$ están definidas por $j_0^X(x) = (x, 0)$ y $j_0^X(y) = y$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
 & & Y \arrow[d, "j_0^Y"] \\
X \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[r, "j_0^X"'] \arrow[dr, "\iota_0"'] & Y + X \arrow[r, "f + Id_X"] \arrow[d, "\iota_0 + \iota_1"] & Y + X \arrow[d, "J + j"] \\
 & X \times I \arrow[r, "a"'] & Z(f).
\end{tikzcd}
$$

Supongamos que Z es otro espacio topológico y $a' : X \times I \to Z$, $J' : Y \to Z$ son aplicaciones continuas tales que $J'f = a'\iota_0$. Sea $j' : X \to X \times I + Y/\sim$, definida por $j'(x) = a'(x,1)$. Observe que $(J' + j')(f + Id_X) = a'(\iota_0 + \iota_1)$. Como $Z(f)$ es el pushout del Diagrama 5.1, entonces existe una única función continua $l : Z(f) \to Z$ tal que $J' + j' = l(J + j)$ y $a' = la$. En particular, $J' = lJ$ y $a' = la$. Finalmente observe que si l' es otra aplicación continua tal que $J' = l'J$ y $a' = l'a$, entonces para todo $x \in X$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
l'(J + j)(x) &= l'(x, 0) \\
&= l'a(x, 1) \\
&= a'(x, 1) \\
&= j'(x).
\end{aligned}
$$

Es decir $J' + j' = l'(J + j)$ y $a' = l'a$. De la unicidad de l se sigue que $l = l'$ y por lo tanto $Z(f)$ es el pushout del Diagrama 5.2. $\square$

DEFINICIÓN 5.4. Una aplicación continua $i : A \to X$ se dice que tiene la *propiedad de extensión de homotopías* (HEP) para el espacio Y, si para cualquier homotopía $h : A \times I \to Y$ y cualquier función continua $f : X \to Y$ tal que $fi(a) = h(a, 0)$ existe una homotopía $H : X \times I \to Y$ tal que $f(x) = H(x, 0)$ y $H(i(a), t) = h(a, t)$. En dicho caso decimos que H es una extensión de h con condición inicial f (ver Diagrama 5.3).

Decimos que i es una *cofibración* si tiene la HEP para cualquier espacio Y.

Sea $Z(i)$ el mapping cylinder de una aplicación continua $i : A \to X$, definamos $i_0^X : X \to X \times I$ como la inclusión en el nivel 0. Observe que como $i_0^X \circ i = (i \times Id) \circ i_0^A$, entonces existe

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "e_0"] \\
X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "H"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "i_0^X"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i_0^A"'] & & X \times I \arrow[r, dotted, "H"] & Y. \\
& A \times I \arrow[ur, "i\times Id_I"] \arrow[urr, bend right, "h"'] & &
\end{tikzcd}
$$

DIAGRAMA 5.3. Propiedad de extensión de homotopías

una única aplicación $l : Z(i) \to X \times I$ tal que $lJ = i_0^X$ y $la = i \times Id_I$, es decir tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i_0^A"'] & X \arrow[d, "J"] \arrow[ddr, bend left, "i_0^X"] & \\
A \times I \arrow[r, "a"] \arrow[drr, bend right, "i\times Id"'] & Z(i) \arrow[dr, dotted, "l"] & \\
& & X \times I.
\end{tikzcd}
$$

TEOREMA 5.5. *sea $i : A \to X$ una aplicación continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *i es cofibración.*
2. *i tiene la HEP para $Z(i)$.*
3. *La aplicación $l : Z(i) \to X \times I$ tiene una retracción, es decir, existe una aplicación continua $r : X \times I \to Z(i)$ tal que $rl = Id_{Z(i)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que i tiene la HEP para $Z(i)$. Sea $r : X \times I \to Z(i)$ extensión de a con condición inicial J, como en el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "J"'] \arrow[drr, bend left, "i_0^X"] \arrow[drrr, bend left=40, "J"] & & & \\
A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i_0^A"'] & & Z(i) \arrow[r, "l"] & X \times I \arrow[r, dotted, "r"] & Z(i). \\
& A \times I \arrow[ur, "a"] \arrow[urr, bend right, "i\times Id_I"'] \arrow[urrr, bend right=40, "a"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

Como $rlJ = J$ y $rla = a$, entonces por la propiedad universal de $Z(i)$ debe ser $rl = Id_{Z(i)}$.

Supongamos que l admite una retracción $r : X \times I \to Z(i)$. Sea Y un espacio topológico, $f : X \to Y$ una aplicación continua y $h : A \times I \to Z(i)$ una homotopía con $fi = hi_0^A$. Por la propiedad universal de $Z(i)$, existe una aplicación $s: Z(i) \to Y$ tal que $sJ = f$ y $sa = h$. Si hacemos $H = sr$, entonces $f = sJ = srlJ = Hi_0^X$ y $h = sa = srla = H(i \times Id_I)$, es decir, H es una extensión de h con condición inicial f. □

Estamos interesados en estudiar cuándo la inclusión de un espacio en otro es una cofibración. En algunas ocaciones la siguiente proposición resulta ser un criterio útil para dicho problema.

TEOREMA 5.6. *Si la inclusión $i: A \subset X$ es una cofibración, entonces existe una retracción $r: X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$. Si A es un subconjunto cerrado de X y existe una retracción $r: X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$, entonces i es una cofibración.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f: X \to X \times \{0\} \cup A \times I$ y $h: A \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ definidos por $f(x) = (x,0)$ y $h(a,t) = (a,t)$, respectivamente. La retracción $r: X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ es la extensión de h con condición inicial f. Recíprocamente, supongamos que A es cerrado y que existe una retracción r. Sea Y un espacio topológico y $f: X \to Y$, $h: A \times I \to Y$ tales que $fi = h\iota_0^A$, definamos

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x,t) \in X \times \{0\} \\ h(x,t) & (x,t) \in A \times I \end{cases}$$

como A es cerrado, entonces g es continua. La extensión de h está dada por $H = gr$.

□

EJEMPLO 5.7. La inclusión de S^{n-1} en D^n es una cofibración. En efecto, S^{n-1} es un subconjunto cerrado de D^n y la aplicación r definida por $r(x,t) = (2\gamma(x,t)^{-1}x, \gamma(x,t) - 2 + t)$, donde $\gamma(x,t) = \text{máx}(2\|xr\|, 2-t)$. La aplicación r es una retracción de la inclusión.

EJEMPLO 5.8. La inclusión del subespacio cerrado $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{0\}$ en I no es una cofibración. Supongamos que existe una retracción $r: I \times I \to I \times \{0\} \cup A \times I$. Sea B la bola con centro en $(0,1)$ y radio $\frac{1}{2}$ en $A \times I$. Dado que $r(0,1) = (0,1)$ y que r es continua, existe una bola B' centrada en $(0,1)$ en $I \times I$, tal que $r(B') \subset B$ (ver *figura* 1). Más aún, de la continuidad de r tenemos que $r(B)$ es conexo. Como r es retracción, entonces $r(B' \cap B) = B' \cap B$. Pero $B' \cap B$ contiene puntos en distintas componentes conexas de B, lo cual contradice la conexidad de $r(B')$.

Otros criterios para decidir cuándo una inclusión es una cofibración están dados en las siguientes proposiciones.

PROPOSICIÓN 5.9. *Existe una retracción $r: X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ si y sólo si existe una función continua $u: X \to [0,\infty)$ y una homotopía $\Phi: X \times I \to X$ tal que las siguientes propiedades se satisfacen*

1. $A \subset u^{-1}(0)$
2. $\Phi(x,0) = x$, *para todo* $x \in X$

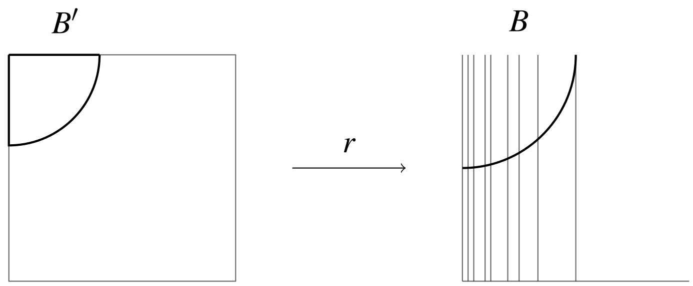


FIGURA 1

3. $\Phi(a,t) = a$, *para todo* $(a,t) \in A \times I$
4. $\Phi(x,t) \in A$, *para todo* $t > u(x)$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que r es una retracción. Definamos

$$u(x) = \text{máx}\{t - p_2(r(x,t)) \mid t \in I\} \quad y \quad \Phi(x,t) = p_1(r(x,t)),$$

donde p_1 y p_2 denotan la proyección en la primera y segunda componente, respectivamente. Sean $a \in A$, $x \in X$ y $t \in I$. La condición 1 se sigue de que $u(a) = \text{máx}\{t - p_2(r(a,t)) \mid t \in I\} = \text{máx}\{t - p_2(a,t) \mid t \in I\} = 0$. Como $\Phi(x,0) = p_1(r(x,t)) = p_1(x,t) = x$, entonces la condición 2 se satisface. La condición 3 es consecuencia de la igualdad $\Phi(a,t) = p_1(r(a,t)) = p_1(a,t) = a$. Para ver que 4 se cumple supongamos que $t > u(x)$, en particular $t > t - p_2(r(x,t))$. Luego $p_2(r(x,t)) > 0$. Como $r(x,t) \in X \times \{0\} \cup A \times I$, entonces $r(x,t) \in A \times I$, de donde se sigue que $\Phi(x,t) \in A$.

Recíprocamente supongamos que existen aplicaciones u y Φ que satisfacien 1-4. Definamos $r(x,t) = (\Phi(x,t), \text{máx}\{t - u(x), 0\})$. Luego, para todo $x \in X$ y $(a,t) \in A \times I$ se tiene que $r(x,0) = (\Phi(x,0), \text{máx}\{-u(x),0\}) = (x,0)$ y $r(a,t) = (\Phi(a,t), \text{máx}\{t - u(a), 0\}) = (a,t)$, es decir r es una retracción. □

PROPOSICIÓN 5.10. *Supongamos que* $A \subset X$ *es cerrado y que existe una vecindad* U *de* A, *una aplicación* $\phi : X \to I$ *y una homotopía* $H : U \times I \to X$, *tal que:*

1. $A = \phi^{-1}(0)$,
2. $\phi(X \setminus U) = \{1\}$,
3. $H(a,t) = a$, *para todo* $a \in A$,
4. $H(x,0) = x$, *para todo* $x \in A$,
5. $H(x,1) \in A$, *para todo* $x \in X$.

Entonces, la inclusión $A \hookrightarrow X$ *es una cofibración.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existen U,ϕ y H. Más aún, podemos suponer que en una vecindad de $X \setminus U$ se tiene $\phi = 1$ (si no considerar la función $\text{mín}(2\phi, 1)$). Es suficiente ver que existe una retracción $\Phi : U \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$, pues en este caso la aplicación

$r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$ definida por

$$r(x,t) = \begin{cases} \Phi(x, t(1-\phi(x))) & \text{si } x \in U \\ (x,0) & \text{si } x \notin U, \end{cases}$$

es una retracción. Definamos la aplicación Φ por

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} (H(x, t/\phi(x)), 0) & \text{si } \phi(x) > t \\ (H(x,1), t - \phi(x)) & \text{si } \phi(x) \leq t. \end{cases}$$

Observe que $\Phi(x,0) = (x,0)$ y $\Phi(a,t) = (a,t)$, para todo $x \in X$ y todo $a \in A$. Claramente Φ es continua en puntos (x,t) tal que $t \neq 0$ y en puntos $(x,0)$ tal que $\phi(x) \neq 0$.

Veamos que Φ es continua en puntos de la forma $(x,0)$ tal que $\phi(x) = 0$, es decir, en puntos de la forma $(a,0)$ con $a \in A$. Dado que para todo t se cumple $H(a,t) = a$, entonces para cada vecindad W de a, existe una vecindad $V \subset W$ de a tal que $H(V \times I) \subset W$. Si $W \times [0, \varepsilon)$ es una vecindad de $(a,0)$, entonces $t < \varepsilon$ y $x \in V$, implica que $\Phi(x,t) \in X \times [0, \varepsilon]$, y por lo tanto Φ es continua. $\square$

Capítulo 6

Grupoides dobles

DEFINICIÓN 6.1. Una categoría doble $\mathcal{T}$ consiste en los siguientes datos:

1. cuatro conjuntos $\mathcal{B}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{P}$, llamados conjuntos de cajas, lados horizontales, lados verticales y puntos, respectivamente,
2. ocho funciones:
   $t,b : \mathcal{B} \to \mathcal{H}$; $\quad r,l : \mathcal{B} \to \mathcal{V}$; $\quad r,l : \mathcal{H} \to \mathcal{P}$; $\quad t,b : \mathcal{V} \to \mathcal{P}$
3. cuatro funciones identidad:
   $id_{\mathcal{H}} : \mathcal{P} \to \mathcal{H}$; $\quad id_{\mathcal{V}} : \mathcal{P} \to \mathcal{V}$; $\quad \mathbf{id} : \mathcal{H} \to \mathcal{B}$; $\quad \mathbf{id} : \mathcal{V} \to \mathcal{B}$
4. cuatro leyes de composición:

$$m : \mathcal{B}\ {}_b{\times}_t\ \mathcal{B} \to \mathcal{B}; \qquad m : \mathcal{B}\ {}_r{\times}_l\ \mathcal{B} \to \mathcal{B}; \qquad m : \mathcal{H}\ {}_r{\times}_l\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}; \qquad m : \mathcal{V}\ {}_b{\times}_t\ \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

Todos estos datos sujetos a los siguientes axiomas

A1. $(\mathcal{B},\mathcal{H},t,b,\mathbf{id},m)$, $(\mathcal{B},\mathcal{V},t,b,\mathbf{id},m)$, $(\mathcal{H},\mathcal{P},t,b,id,m)$, $(\mathcal{V},\mathcal{P},t,b,id,m)$ son categorías,

A2. se satisfacen las siguientes igualdades de funciones $\mathcal{B} \to \mathcal{P}$

$$tr = rt, \qquad tl = lt, \qquad br = rb, \qquad bl = lb$$

Este axioma nos permite pensar cada objeto $A \in \mathcal{B}$ como una caja

$$A = l \underset{b}{\overset{t}{\boxed{}}} r,$$

donde $t(A) = t$, $r(A) = r$, $b(A) = b$ y $l(A) = l$. Los elementos $tr(A), tl(A), br(A), bl(A) \in \mathcal{P}$ representan los cuatro vertices de la caja (superior derecho, superior izquierdo, inferior derecho e inferior izquierdo, respectivamente).

Si $A, B \in \mathcal{B}$ son cajas tales que $r(A) = l(B)$ escribimos $A \,\big|\, B$ y denotaremos el producto horizontal de A con B por AB. Análogamente, si $b(A) = t(B)$ escribimos $\dfrac{A}{B}$ y denotamos el producto vertical de A con B por $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$. La configuración $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}$ significa que todos los productos verticales y horizontales están definidos.

A3. Si $A = l \underset{b}{\overset{t}{\boxed{}}} r$ y $B = k \underset{d}{\overset{u}{\boxed{}}} s$ son elementos de $\mathcal{B}$, entonces:

A3.1 Si $A \mid B$, entonces $AB = l\underset{bd}{\overset{tu}{\boxed{}}}\, s$

A3.2 Si $\dfrac{A}{B}$, entonces $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} = lk\underset{d}{\overset{t}{\boxed{}}}\, rs$

A4. Si $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}$, entonces se verifica la ley de intercambio:

$$\begin{matrix} \{AB\} \\ \{CD\} \end{matrix} = \left\{ \begin{matrix} A \\ C \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} B \\ D \end{matrix} \right\}$$

A5. Las funciones $\mathbf{id} : \mathcal{H} \to \mathcal{B}$ y $\mathbf{id} : \mathcal{V} \to \mathcal{B}$ satisfacen:

$$\mathbf{id}(h) = idl(h)\underset{h}{\overset{h}{\boxed{}}}\, idr(h), \quad h \in \mathcal{H}; \qquad \mathbf{id}(v) = v\underset{idb(v)}{\overset{idt(v)}{\boxed{}}}\, v \quad , \quad v \in \mathcal{V}$$

A6. Si $P \in \mathcal{P}$, entonces $\mathbf{id}\ id_{\mathcal{H}}(P) = \mathbf{id}\ id_{\mathcal{V}}(P)$. Denotaremos este elemento por $\Theta_{\mathcal{P}} := \mathbf{id}\ id_{\mathcal{H}}(P)$.

A7. Si $(g,v) \in \mathcal{V}\ {}_b\times_t\ \mathcal{V}$ y $(x,h) \in \mathcal{H}\ {}_r\times_l\ \mathcal{H}$, entonces

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{id}(g) \\ \mathbf{id}(v) \end{matrix} \right\} = \mathbf{id}(gv); \qquad \{\mathbf{id}(x)\mathbf{id}(h)\} = \mathbf{id}(xh)$$

Denotaremos una categoría doble $\mathcal{T}$ por $(\mathcal{B}; \mathcal{V}, \mathcal{H}; \mathcal{P})$ o por el diagrama

$$\begin{matrix} \mathcal{B} & \rightrightarrows & \mathcal{V} \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ \mathcal{H} & \rightrightarrows & \mathcal{P}. \end{matrix}$$

Sea $A \in \mathcal{B}$, denotaremos por A^v su inversa en la categoría $(\mathcal{B}, \mathcal{H}, t, b, \mathbf{id}, m)$, siempre que exista. Análogamente denotamos por A^h su inversa en $(\mathcal{B}, \mathcal{V}, r, l, \mathbf{id}, m)$.

DEFINICIÓN 6.2. Decimos que una categoría doble T es un grupoide doble si todas las categorías involucradas son grupoides. Es decir para cada $A \in B$ existen A^h y A^v tales que

$$AA^h = \mathbf{id}\ l(A); \qquad A^hA = \mathbf{id}\ r(A)$$

$$\begin{matrix} A \\ A^v \end{matrix} = \mathbf{id}\ t(A); \qquad \begin{matrix} A^v \\ A \end{matrix} = \mathbf{id}\ b(A)$$

LEMA 6.3. *La categoría $\mathcal{G}rpd$ de grupoides tiene productos fibrados.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{G} \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathcal{P}$, $\mathcal{H} \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathcal{M}$ y $\mathcal{V} \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathcal{N}$ grupoides, y sean $F, f : \mathcal{G} \to \mathcal{V}$ y $K, k : \mathcal{H} \to \mathcal{V}$ morfismos de grupoides. Definamos $\widetilde{s}, \widetilde{t} : \mathcal{H}\ {}_K{\times}_F\ \mathcal{G} \to \mathcal{M}\ {}_k{\times}_f\ \mathcal{P}$ por $\widetilde{s}(h,g) = (s(h), s(g))$ y $\widetilde{t}(h,g) = (t(h), t(g))$. Observe que $\widetilde{s}, \widetilde{t}$ están bien definidos, pues para cada $(h,g) \in \mathcal{H}\ {}_K{\times}_F\ \mathcal{V}$ se tiene $k(s(h)) = s(K(h)) = s(F(g)) = f(s(g))$ y análogamente $k(t(h)) = f(t(g))$.

Definamos $\widetilde{m} : (\mathcal{H}\ {}_K{\times}_F\ \mathcal{G})\ {}_s{\times}_t\ (\mathcal{H}\ {}_K{\times}_F\ \mathcal{G}) \to (\mathcal{H}\ {}_K{\times}_F\ \mathcal{G})$ por $(h,g)(h',g') = (hh', gg')$ y $(h,g)^{-1} = (h^{-1}, g^{-1})$. Con estas operaciones la configuración $\mathcal{H}\ {}_K{\times}_F\ \mathcal{G} \overset{\tilde{s}}{\underset{\tilde{t}}{\rightrightarrows}} \mathcal{M}\ {}_k{\times}_f\ \mathcal{P}$ es un grupoide. Sean $P_1, p_1 : \mathcal{H}\ {}_K{\times}_F\ \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ y $P_2, p_2 : \mathcal{H}\ {}_K{\times}_F\ \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ los funtores proyección en la primera y segunda componente, respectivamente. Es claro que $KP_1 = FP_2$, es decir el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}\ {}_K{\times}_F\ \mathcal{G} \arrow[rr, "P_2"] \arrow[dd, "P_1"'] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & \mathcal{G} \arrow[dd, "F", near end] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\
& \mathcal{M}\ {}_k{\times}_f\ \mathcal{P} \arrow[rr, "p_2", near start] \arrow[dd, "p_1", near end] & & \mathcal{P} \arrow[dd, "f"] \\
\mathcal{H} \arrow[rr, "K", near end] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & \mathcal{V} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\
& \mathcal{M} \arrow[rr, "k"] & & \mathcal{N}.
\end{tikzcd}
$$

Finalmente supongamos que $\mathcal{L} \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \mathcal{R}$ es otro grupoide junto con dos funtores $Q_1, q_2 : \mathcal{L} \to \mathcal{H}$, $Q_2, q_2 : \mathcal{L} \to \mathcal{G}$ tales que $KQ_1 = FQ_2$. Definamos el funtor $\Phi : \mathcal{L} \to \mathcal{H}\ {}_K{\times}_F\ \mathcal{G}$ por $\Phi(l) = (Q_1(l), Q_2(l))$ y $\Phi(r) = (q_1(r), q_2(r))$. Un cálculo directo demuestra que $P_1\Phi = Q_1$ y $P_2\Phi = Q_2$.

Supongamos que $\Phi' : \mathcal{L} \to \mathcal{H}\ {}_K{\times}_F\ \mathcal{G}$ es otro funtor tal que $P_1\Phi' = Q_1$ y $P_2\Phi' = Q_2$. Entonces, $P_1\Phi'(l) = Q_1(l) = P_1\Phi(l)$ y análogamente para P_2. Por lo tanto $\Phi' = \Phi$. $\square$

OBSERVACIÓN 6.4. Un argumento similar al de la proposición anterior muestra que la categoría $\mathcal{C}at$ también tiene productos fibrados.

La siguiente proposición nos da una caracterización más concisa del concepto de grupoide.

PROPOSICIÓN 6.5. *Un(a) grupoide (categoría) doble es un objeto grupoide (categoría) interno a la categoría $\mathcal{G}rpd$ ($\mathcal{C}at$).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T}$ un objeto grupoide en la categoría $\mathcal{G}rpd$. Escribamos $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, b, t, id, m, I)$, donde $\mathcal{A}$ y $\mathcal{O}$ son grupoides, y además $b, t : \mathcal{A} \to \mathcal{O}$, $m : \mathcal{A}\ {}_b{\times}_t\ \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ y $I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ son funtores. Todos estos datos sujetos a la conmutatividad de los diagramas que definen un grupoide.

Escribamos $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{V}, r, l, \mathbf{id}, m)$ y $\mathcal{O} = (\mathcal{H}, \mathcal{P}, r, l, id_{\mathcal{H}}, m)$. Los funtores b, t, id, m, I, corresponden a funciones

$$b, t : \mathcal{B} \to \mathcal{H}; \qquad \mathbf{id} : \mathcal{H} \to \mathcal{B}; \qquad m : \mathcal{B}\ {}_b\times_t\ \mathcal{B} \to \mathcal{B}; \qquad I : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$$

$$b, t : \mathcal{V} \to \mathcal{P}; \qquad id_{\mathcal{V}} : \mathcal{P} \to \mathcal{V}; \qquad m : \mathcal{V}\ {}_b\times_t\ \mathcal{V} \to \mathcal{V}; \qquad I : \mathcal{V} \to \mathcal{V}.$$

De las identidades entre los funtores b, t, id, m, I, se tiene que $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \mathcal{H}, b, t, \mathbf{id}, m)$ y $\mathcal{O} = (\mathcal{V}, \mathcal{P}, b, t, id_{\mathcal{V}}, m)$ son grupoides.

Veamos que se satisfacen los axiomas A2$-$A7. La funtorialidad de t y l significa que las siguientes identidades se satisfacen

$$tl = lt, \quad tr = rt, \quad bl = lb, \quad br = rb; \tag{6.1}$$

$$tm = m(t \times t), \quad bm = m(b \times b); \tag{6.2}$$

$$t\,\mathbf{id} = id_{\mathcal{H}}\,t, \quad b\,\mathbf{id} = id_{\mathcal{H}}\,b. \tag{6.3}$$

La ecuación (6.1) corresponde al axioma 2. Las ecuaciones (6.2) corresponden a la parte 3.1 en el axioma 3. Las ecuaciones (6.3) corresponden a la parte de la derecha en el axioma 5.

La funtorialidad de m implica que

$$m(l\ {}_t\times_b\ l) = lm, \quad m(r\ {}_t\times_b\ r) = rm; \tag{6.4}$$

$$m(m\ {}_t\times_b\ m) = m(m \times m); \tag{6.5}$$

$$m(\mathbf{id}\ {}_t\times_b\ \mathbf{id}) = \mathbf{id}\,(m \times m);. \tag{6.6}$$

De estas igualdades, la ecuación (6.4) corresponde a la parte 3.2 del axioma 3. Las ecuaciones (6.5) corresponden al axioma 4. Las ecuaciones (6.6) corresponden a la parte de la izquierda en axioma el 7.

De la funtorialidad de id tenemos las siguientes identidades

$$id_{\mathcal{V}}\,l = l\,\mathbf{id}, \quad id_{\mathcal{V}}\,r = r\,\mathbf{id}; \tag{6.7}$$

$$\mathbf{id}\,m = m(\mathbf{id} \times \mathbf{id}) \tag{6.8}$$

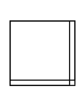
$$\mathbf{id}\,id_{\mathcal{H}} = \mathbf{id}\,id_{\mathcal{V}}. \tag{6.9}$$

Observe que (6.7) corresponde a las igualdad de la izquierda en el exioma 5. La igualdad (6.8) corresponde a la igualdad de la derecha en el axioma 7. Finalmente (6.9) corresponde al axioma 6. Dado que la construcción y los argumentos son reversibles, un objeto grupoide interno a $\mathcal{G}rpd$ es lo mismo a un grupoide doble. $\square$

DEFINICIÓN 6.6. Sea $\mathcal{T}$ un grupoide doble, definimos la médula de $\mathcal{T}$ como el conjunto

$$\mathbb{E}(\mathcal{B}) := \{A \in \mathcal{B} \mid \text{ existe } p \in \mathcal{P} \text{ tal que } b(A) = id_{\mathcal{H}}(p) \quad r(A) = id_{\mathcal{V}}(p)\}.$$

Gráficamente los elementos de $\mathbb{E}(\mathcal{B})$ se representan por cajas de la forma

 .

De ahora en adelante, para evitar problemas de notación, escribiremos e para la aplicación final de una categoría $\mathcal{C}$.

OBSERVACIÓN 6.7. Dado un grupoide doble $(\mathcal{B};\mathcal{V},\mathcal{H};\mathcal{P})$ podemos definir una estructura de grupoide $(\mathbb{E}(\mathcal{B}),\mathcal{P},s,e,id,m)$ sobre la médula de la siguiente forma

- $s,e:\mathbb{E}(\mathcal{B})\to\mathcal{P}$ son funciones definidas por $s(E)=br(E)$ y $e(E)=tl(E)$,
- $id:\mathcal{P}\to\mathbb{E}(\mathcal{B})$, definida por $id_{\mathbb{E}}(p)=\Theta_p$
- $m:\mathbb{E}(B)\ {}_s{\times}_e\ \mathbb{E}(B)\to\mathbb{E}(B)$, definido por

$$\boxed{E}\circ\boxed{F}=\begin{array}{cc}\boxed{E} & \boxed{\mathbf{id}\,t(F)}\\ \boxed{\mathbf{id}\,l(F)} & \boxed{F}\end{array}$$

- Si $E\in\mathbb{E}(\mathcal{B})$, definimos

$$E^{-1}:=\begin{array}{c}E^h\\ (\mathbf{id}\,l(E))^v\end{array}.$$

DEFINICIÓN 6.8. Decimos que un grupoide doble $(\mathcal{B};\mathcal{V},\mathcal{H};\mathcal{P})$, es un *grupoide doble topológico*, si todas las categorías involucradas son grupoides topológicos.

DEFINICIÓN 6.9. Un *grupoide doble de Lie* es un grupoide doble tal que los grupoides involucrados son grupoides de Lie y la aplicación *doble origen*

$$\mathbf{S}:\mathcal{B}\to\mathcal{H}\ {}_r{\times}_b\ \mathcal{V},\text{ tal que } A\mapsto\mathbf{S}(A)=(b(A),r(A))$$

es una sumersión sobreyectiva.

OBSERVACIÓN 6.10. Sea $(\mathcal{B};\mathcal{V},\mathcal{H};\mathcal{P})$ un grupoide doble topológico, el grupoide $\mathbb{E}(\mathcal{B})\underset{e}{\overset{s}{\rightrightarrows}}\mathcal{P}$ es un grupoide topológico.

Observe que la aplicación $\mathfrak{X}:\mathbb{E}(\mathcal{B})\to\mathcal{V}\ {}_t{\times}_l\ \mathcal{H}$, definida por $\mathfrak{X}(E)=(l(E),t(E))$ es la restricción a $\mathbb{E}(\mathcal{B})$ del producto de dos funciones abiertas y continuas y por lo tanto es una función abierta y continua.

EJEMPLO 6.11. Para cada grupoide topológico $\mathcal{G}\rightrightarrows\mathcal{P}$, el arreglo

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{G}\times\mathcal{G} & \rightrightarrows & \mathcal{P}\times\mathcal{P}\\ \downdownarrows & & \downdownarrows\\ \mathcal{G} & \rightrightarrows & \mathcal{P},\end{array}$$

tiene estructura de grupoide doble topológico, donde $\mathcal{G}\times\mathcal{G}\rightrightarrows\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ es el grupoide producto y $\mathcal{G}\times\mathcal{G}\rightrightarrows\mathcal{G}$, $\mathcal{P}\times\mathcal{P}\rightrightarrows\mathcal{P}$ son grupoides pares (ver Ejemplos 1.37 y 1.38).

EJEMPLO 6.12. Sea $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{B}$ un grupoide de Lie. Construimos un grupoide doble de Lie a través del funtor π_1

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{G}) & \rightrightarrows & \pi_1(\mathcal{B}) \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ \mathcal{G} & \rightrightarrows & \mathcal{P}. \end{array}$$

EJEMPLO 6.13. Sea G un grupo topológico actuando en un espacio X, el siguiente diagrama es un grupoide doble topológico

$$\begin{array}{ccc} (G \times X)^2 & \rightrightarrows & X^2 \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ G \times X & \rightrightarrows & X. \end{array}$$

Su médula está dada por

$$\{(e,x,g,x) \mid x \in X \text{ y } g \in G\},$$

donde e es la identidad de G.

EJEMPLO 6.14. Sea G un grupo de Lie conexo. Considere el grupoide doble de Lie

$$\begin{array}{ccc} \pi(G) & \rightrightarrows & \{*\} \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ G & \rightrightarrows & \{*\}. \end{array}$$

Si e es la identidad de G, entonces un elemento de la médula $\mathbb{E}(\pi(G))$ es de la forma

$$\begin{array}{ccc} & f(1) & \\ * & \boxed{[f]} & * \\ & f(0) & \end{array};$$

con $[f] \in \pi_1(G)$. Es decir, $\mathbb{E}(\pi(G))$ consiste en clases de homotopía de caminos que comienzan en e. Por la Observación 4.17 y el Teorema 2.26 el espacio $\mathbb{E}(\pi(G))$ corresponde al espacio de cubrimiento universal de G.

OBSERVACIÓN 6.15. Si en el ejemplo anterior hacemos $G = \mathrm{SO}(n)$ con $n \geq 3$, entonces $\mathrm{Spin}(n)$ aparece como la médula de un grupoide doble de Lie.

1. Cofibraciones y grupoides dobles

En esta sección trataremos el problema de cuándo la inclusión de la médula de un grupoide doble topológico en el espacio de cajas es una cofibración. El resultado principal de esta sección nos dice que en un grupoide doble de Lie la inclusión de la médula siempre es una cofibración. Antes de probar este resultado consideremos un ejemplo.

EJEMPLO 6.16. Sea λ un número irracional, consideremos a $\mathbb{Z}$ actuando en S^1 por $k \cdot e^{i\theta} = e^{i(\theta+\lambda k)}$. Para el grupoide doble topológico

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}\times S^1)^2 & \rightrightarrows & (S^1)^2 \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \\ \mathbb{Z}\times S^1 & \rightrightarrows & S^1, \end{array}$$

la medula es $\mathbb{E}((\mathbb{Z}\times S^1)^2) = \{(0,e^{i\theta},m,e^{i\theta}) \mid m \in \mathbb{Z} \text{ y } \theta \in [0,2\pi)\}$. Observe que $\mathbb{E}((\mathbb{Z}\times S^1)^2)$ es cerrado en $(\mathbb{Z}\times S^1)^2$. La inclusión de $\mathbb{E}((\mathbb{Z}\times S^1)^2)$ en $(\mathbb{Z}\times S^1)^2$ es una cofibración, una retracción $r : (\mathbb{Z}\times S^1)^2 \times I \to (\mathbb{Z}\times S^1)^2 \times \{0\} \cup \mathbb{E}((\mathbb{Z}\times S^1)^2)\times I$ está dada por

$$r(n,e^{i\theta},m,e^{i\alpha},t) = \begin{cases} (n,e^{i\theta},m,e^{i\alpha},0) & \text{si } n \neq 0 \\ (0,e^{i\theta},m,e^{i\alpha},t) & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Antes de demostrar el resultado principal de esta sección, probaremos un lema utilizando vecindades tubulares.

DEFINICIÓN 6.17. Sea N una subvariedad embebida de una variedad diferenciable M. Una *vecindad tubular* de N en M es una tupla (U,φ,E,π), donde U es una vecindad abierta de N en M, la terna (E,π,N) es un fibrado vectorial con base N y φ es un difeomorfismo de U en en subconjunto abierto $\varphi(U)$ de E, tal que la restricción $\varphi|_N$ es la sección cero σ_0 de (E,π,N).

PROPOSICIÓN 6.18. *Cada subvariedad embebida $N \subset M$ de una variedad diferenciable M admite una vecindad tubular (U,φ,E,π).*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**LM**, App. 1, 6.2]. □

Utilizando vecindades tubulares podemos demostrar el siguiente lema.

LEMA 6.19. *Sea $N \subset M$ una subvariedad cerrada embebida de M. La inclusión $i : N \hookrightarrow M$ es una cofibración.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (U,φ,E,π) una vecindad tubular de N en M. Sea $\phi : M \to I$ una función suave tal que $\phi^{-1}(0) = N$ y $\phi^{-1}(1) = M \setminus U$ (ver [**Le**, Problema 2–14]). Definamos la homotopía $H : U \times I \to X$ por $H(u,t) = \varphi^{-1}(\varphi(u)(1-t))$. Observe que:

- $H(a,t) = \varphi^{-1}(\varphi(a)(1-t)) = \varphi^{-1}(\varphi(a)) = a$, para todo $a \in N$, dado que $\varphi(N)$ es la sección cero.
- Es claro que $H(x,0) = x$, para todo $x \in M$.
- $H(x,1) = \varphi^{-1}(\varphi(x)(1-1)) = \varphi^{-1}(\sigma_0(\varphi(a))) = a$, para algún $a \in N$.

El resultado se sigue del Lema 5.10. □

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para que la inclusión de la médula en el espacio de cajas sea una cofibración.

TEOREMA 6.20. *Sea $(\mathcal{B};\mathcal{V},\mathcal{H};\mathcal{P})$ un grupoide doble de Lie. La inclusión $\mathbb{E}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{G}$ es una cofibración.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración consta de varios pasos.

Paso 1. Probaremos que en cualquier grupoide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{M}$, la aplicación $id : \mathcal{M} \to \mathcal{G}$ es un embebimiento. Que id es una inmersión se sigue al derivar la ecuación $s \circ id = Id_M$. Claramente id es inyectiva. Para ver que id es un homeomorfismo sobre su imagen, basta probar que id es una aplicación abierta. Sea $U \subset \mathcal{M}$ abierto. Observe que si $g \in id(U)$, entonces existe $x \in U$ tal que $g = id(x)$. Por otro lado, $e(g) = e(id(x)) = x \in U$, es decir, $g \in id(\mathcal{G}) \cap e^{-1}(U)$. Recíprocamente, si $g \in id(\mathcal{G}) \cap e^{-1}(U)$, entonces $g = id(x)$ para algún $x \in U$. Se sigue que $id(U) = id(\mathcal{G}) \cap e^{-1}(U)$ y por lo tanto id es una aplicación abierta.

Paso 2. Sea $\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{M}$ un grupoide de Lie y sean $\widetilde{s}, \widetilde{e} : id(\mathcal{M}) \to \mathcal{G}$ las restricciones a $id(\mathcal{M})$ de s y e, respectivamente. Veamos que $\widetilde{s}$ y $\widetilde{e}$ son sumersiones sobreyectivas. Como la inclusión $\iota : id(\mathcal{M}) \to \mathcal{G}$ es un embebimiento (en particular suave), entonces $\widetilde{s} = s \circ \iota$ y $\widetilde{e} = e \circ \iota$ son suaves. Por otro lado observe que $\widetilde{s} \circ id = Id_{\mathcal{M}} = \widetilde{e} \circ id$. El resultado se tiene al derivar la última desigualdad.

Paso 3. Sean $\widetilde{r} : \mathcal{P} \to \mathcal{H}$ y $\widetilde{b} : \mathcal{P} \to \mathcal{V}$ las restricciones de r y b a $id_{\mathcal{H}}(\mathcal{P})$ y a $id_{\mathcal{V}}(\mathcal{P})$, respectivamente. Veamos que $id_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}) \,{}_{\widetilde{r}}\!\times_{\widetilde{b}}\, id_{\mathcal{V}}(\mathcal{P})$ es una subvariedad embebida de $\mathcal{H} \,{}_r\!\times_b\, \mathcal{V}$. Sea $i : id_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}) \,{}_{\widetilde{r}}\!\times_{\widetilde{b}}\, id_{\mathcal{V}}(\mathcal{P}) \hookrightarrow \mathcal{H} \,{}_r\!\times_b\, \mathcal{V}$ la inclusión. Observe que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
id_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}) \,{}_{\widetilde{r}}\!\times_{\widetilde{b}}\, id_{\mathcal{V}}(\mathcal{P}) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "i"'] & id_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}) \times id_{\mathcal{V}}(\mathcal{P}) \arrow[r, hook] & \mathcal{H} \times \mathcal{V} \\
& \mathcal{H} \,{}_r\!\times_b\, \mathcal{V} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

De la Proposición 1.69 tenemos que la aplicación i es suave. Como todas las flechas distintas a i en el diagrama anterior son embebimientos, entonces i también es embebimiento.

Paso 4. Como la aplicación $\mathbf{S} : \mathcal{B} \to \mathcal{H} \,{}_r\!\times_b\, \mathcal{V}$ es sumersión sobreyectiva y $\mathbb{E}(\mathcal{B}) = \mathbf{S}^{-1}(id_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}) \,{}_{\widetilde{r}}\!\times_{\widetilde{b}}\, id_{\mathcal{V}}(\mathcal{P}))$, de la Proposición 1.70 se sigue que $\mathbb{E}(\mathcal{B})$ es una subvariedad embebida de $\mathcal{B}$.

Paso 5. Veamos que $\mathbb{E}(\mathcal{B})$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}$. Como toda variedad diferenciable es metrizable, basta probar que si la sucesión $\{B_i\} \subset \mathbb{E}(\mathcal{B})$ converge a B, entonces $B \in \mathbb{E}(\mathcal{B})$. Si $p_i = br(B_i)$ y $p = br(B)$, entonces dado que las funciones b, r e id son continuas, se tiene que

$$b(B) = \lim_{i \to \infty} b(B_i) = \lim_{i \to \infty} id(p_i) = id(p)$$

y análogamente $r(B) = id(p)$. Es decir $B \in \mathbb{E}(\mathcal{B})$ y por lo tanto $\mathbb{E}(\mathcal{B})$ es cerrado.

Paso 6. El teorema se sigue del Lema 6.19.

$\square$

Bibliografía

[AN1] N. ANDRUSKIEWITSCH and S. NATALE, *Double categories and quantum groupoids*, Publ. Mat. Urug. **10**, 11-51 (2005).

[AN2] N. ANDRUSKIEWITSCH and S. NATALE, *The structure of double groupoids*, J. Pure Appl. Algebra **213**, 1031–1045 (2009).

[AOT] N. ANDRUSKIEWITSCH, J. A. OCHOA and A. Tiraboschi, *On slim double Lie groupoids*, Pacific J. Math. **256** no. 1, 1–17 (2012).

[Br] G. E. BREDON, *Topology and geometry*, Grad. Texts in Math., vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1997.

[BM] R. BROWN and K. MACKENZIE, *Determination of a double Lie groupoid by its core diagram*, J. Pure Appl. Algebra **80**, 237–272 (1992).

[CN] C. CAMACHO and A. NETO , *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.

[Ch] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie groups. I*, Princeton Mathematical Series, vol. 8, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.

[C] M. CRAINIC, *Prequantization and Lie brackets.* J. Symplectic Geom. **2**, no. 4, 579–602 (2004).

[CF1] M. CRAINIC and R. L. FERNANDES, *Integrability of Lie brackets.* Ann. of Math. **157** , no. 2, 575–620 (2003).

[CF2] M. CRAINIC and R. L. FERNANDES, *Integrability of Poisson brackets.* J. Differential Geom. **66**, no. 1, 71–137 (2004).

[GM] GRACIA SAZ and R. A. MEHTA, *Lie algebroid structures on double vector bundles and representation theory of Lie algebroids.* Adv. Math. **223**, no. 4, 1236–1275 (2010).

[LW2] J.-H. LU AND A. WEINSTEIN, *Groupoïdes symplectiques doubles des groupes de Lie-Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **309**, 951–954 (1989).

[Eh] C. EHRESMANN, *Catégories doubles et catégories structurées*, C. R. Acad. Sci. Paris **256**, 1198–1201 (1963). *Catégories structurées* Ann. Sci. École Norm. Sup. **80**, 349–426 (1963).

[La] S. LANG, *Differential and Riemannian manifolds*, 3rd ed., Grad. Texts in Math., vol. 160, New York, 1997.

[Le] J. M. LEE, *Introduction to smooth manifolds*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., Springer, New York, 2013.

[LM] P. LIBERMANN and C. MARLE, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, Mathematics and its Applications, vol. 35, 1987.

[LW2] J.-H. LU AND A. WEINSTEIN, *Groupoïdes symplectiques doubles des groupes de Lie-Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **309**, 951–954 (1989).

[Ml] S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., vol. 5, Springer, New York, 1998.

[M1] K. MACKENZIE, *Double Lie algebroids and Second-order Geometry, I*, Adv. Math. **94**, 180–239 (1992).

[M2] K. MACKENZIE, *On symplectic double groupoids and the duality of Poisson groupoids*, Internat. J. Math. **10**, 435–456 (1999).

[M3] K. MACKENZIE, *On symplectic double groupoids and the duality of Poisson groupoids*, Int. Journal of Math. **10**, 435 - 456, 1999.

[M4] K. MACKENZIE, *Double Lie algebroids and Second-order Geometry, II*, Adv. Math. **154**, 46–75 (2000).

[M5] K. MACKENZIE, *General Theory of Lie Groupoids and Algebroids*, London Mathematical Society Lecture Note 213, Cambridge University Press (2005).

[Ma] J. P. MAY, *A concise course in algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[MM] I. MOERDIJK and J. MRČUN, *Introduction to foliations and Lie groupoids*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 91, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[M] R. A. MEHTA and T. XIANG, *From double Lie groupoids to local Lie 2-groupoids.* Bull. Braz. Math. Soc. **42** , no. 4, 651–681 (2011).

[Mu] J. MUNKRES, *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Sadle River, 2000.

[S] S. SINGER, *Linearity, symmetry, and prediction in the hydrogen atom*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2005.

[D] T. TOM DIECK, *Algebraic topology*, EMS Textbooks in Mathematics, Zürich , 2008.

[V] TH. TH. VORONOV *Q-manifolds and Mackenzie theory*, Comm. Math. Phys. **315** , no. 2, 279–310 (2012).

[W] F. WARNER, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Grad. Texts in Math., vol. 94, Springer, New York, 1983.