Pontificia Universidad Javeriana.

Facultad de Ciencias.

Departamento de Matemáticas.

OPERADS,
EJEMPLOS Y APLICACIONES.

Gabriel Casabianca González

Asesor(a): Dra. Eddy Pariguán.

Bogotá - Colombia

Mayo de 2014

Índice general

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi familia y amigos, por todo su apoyo, a la Profesora Eddy Pariguán, por todo lo que me enseñó y por la paciencia que me tuvo, a Jesús Ochoa, por su contribución al trabajo y a mi formación académica, a Jorge Plazas, por leer y corregir el trabajo y a la Pontifica Universidad Javeriana, por la financiación parcial de este trabajo a través del proyecto identificado con ID 00005841.

Introducción

Un Operad es una abstracción de familias de funciones de n variables que se pueden componer, con un n también variable, que son útiles para organizar y modelar diferentes tipos de estructuras matemáticas. Éstos se definen dentro de la Teoría de categorías, una rama de la matemática que proporciona un lenguaje universal para describir estructuras algebraicas y relaciones entre ellas [23].

Una categoría es una estructura algebraica definida a partir de objetos que están relacionados por flechas, que cumplen dos propiedades básicas: las flechas pueden componerse de manera asociativa, y para cada objeto, existe una flecha identidad. Inicialmente, fueron introducidas por Eilberg y Mac Lane [9] en 1945 para estudiar el concepto de functor y de transformación natural. Durante los siguientes 15 años se utilizó la Teoría de categorías como un lenguaje para estudiar, entre otros, Topología algebraica y Álgebra homológica [5], utilizando las pruebas mediante diagramas conmutativos. Grothendieck, en su trabajo de 1957 [14], definió las categorías aditivas y abelianas para modelar aspectos fundamentales del Álgebra homológica. Seguido a esto, gracias a los trabajos de Lawvere, la Teoría de Categorías fue considerado como un objeto de estudio autónomo, debido al desarrollo del concepto de functor adjunto y su relación con la definición de categoría abstracta. La tesis doctoral de Lawvere [16] constituyó un avance importante dentro de la teoría, ya que allí introdujo la categoría **Cat**, la cual describiremos en el Capítulo 1, fundamento de la Teoría de categorías. Desde 1980 hasta hoy en día, sus aplicaciones han ido creciendo, principalmente en Topología algebraica y Álgebra homológica, pero también en Geometría algebraica, Álgebra universal, Lógica matemática y Ciencia computacional teórica.

Particularmente, dentro de la Teoría de Categorías, hubo interés por hacer abstracciones de propiedades como la asociatividad y conmutatividad. Los trabajos de Stasheff, Epstein y Mac Lane, [10], [20], [27], establecen una "ley general de asociatividad" para una categoría con multiplicación, es decir, un isomorfismo : $A(BC) \cong (AB)C$, y estudiar los casos en que éste es único, para argumentos A, B y C. De manera análoga, definieron una ley general de conmutatividad $AB \cong BA$, y la existencia de una identidad K tal que $KA \cong A$, para la multiplicación AB. Estos isomorfismos están sujetos a axiomas de coherencia, y a partir de estos surgió la definición de Categoría Simétrica Monoidal.

Los primeros trabajos dedicados a estudiar de forma teórica la composición de operaciones fueron presentados por Michel Lazard, llamados por él como *analyseurs*, en 1950 [17]. La primera definición formal de los Operads apareció en los $60'$s, con trabajos de J. Adams y S. Mac Lane [19] , J. M. Boardman y R. M. Vogt [4], J. D. Stasheff [27] y especialmente J. P. May [24]. En la década de los 90 se identificaron otros objetos aptos para ser estudiados mediante los Operads, dentro de la Teoría de la deformación, Co-homología de grafos, Dualidad de Koszul, Teoría de representaciones, Análisis combinatorio, espacios de Moduli, Teoría de cuerdas y Teorías conformes de campos, entre otros [11], [22], [25], [28]. Dentro de la Teoría operádica algebraica moderna, se detaca el trabajo de V. A. Ginzburg y M. M. Kapranov [13], quienes describieron la noción de Operads modulares, una generalización de los grafos de Kontsevich y la construcción por barras de Operads, motivado por la relación entre los Operads y Espacios de Moduli para curvas algebraicas [12].

El objetivo de este trabajo es presentar el concepto de Operad sobre una Categoría Simétrica Monoidal. Mostramos el Operad de Discos Pequeños, el Operad de Cubos Pequeños y el Operad de Endomorfismos.

En el primer capítulo se definen objetos de Teoría de Categorías, como Categoría, Functor y Transformación Natural, necesarios para introducir conceptos de los capítulos siguientes. En el segundo capítulo, se introduce el concepto de Categoría Monoidal y Categoría Simétrica Monoidal, y se dan ejemplos, haciendo énfasis en la construcción de la Categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo k como Categoría Simétrica Monoidal. En el tercer capítulo, se hace una introducción a la definición de Operad con tres ejemplos, el Operad de Discos Pequeños, el Operad de Cubos Pequeños y el Operad de Endomorfismos, y finalmente se da la definición formal de Operad sobre una Categoría Simétrica Monoidal. En el cuarto capítulo se introduce el concepto de álgebras sobre Operads, se presenta el espacio de lazos como álgebra sobre el Operad de Cubos Pequeños, y estudian los $Ass-$álgebra, y $Com-$álgebra, los cuales coinciden con las nociones clásicas de álgebras asociativas y álgebras conmutativas y asociativas, respectivamente.

Capítulo 1

Categorías

En este capítulo el lector encontrará una introducción básica a la teoría de Categorías, necesaria para introducir el concepto de Operad. Se darán definiciones clásicas y ejemplos de categoría, functor y transformación natural [21].

1.1. Axiomas de Categorías

En esta sección se definirá el concepto de Categoría y se darán ejemplos. Una categoría es una estructura algebraica que proporciona un lenguaje conceptual conveniente para el estudio de la matemática, incluido el propuesto en este trabajo. La teoría de Categorías inicia con la observación que muchas propiedades de objetos matemáticos pueden ser unificadas y simplificadas con diagramas de *flechas*. Cada flecha representa dos conjuntos y una regla que asigna elementos del primero con el segundo. Un diagrama

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & Z \end{tikzcd}$$

es conmutativo cuando $h = g \circ f$, denotando $\circ$ como la composición usual. Muchas propiedades de estructuras matemáticas pueden ser representadas bajo propiedades de diagramas que conmutan. Algunos ejemplos se encuentran explicados en [21], donde el autor representa el producto cartesiano como conmutatividad entre diagramas.

A continuación se presentarán los conceptos de Categorías y sus propiedades:

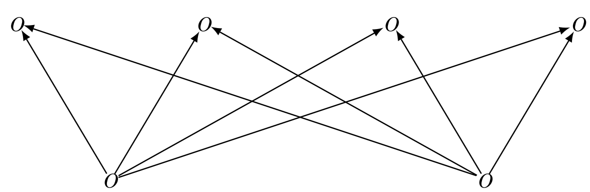
Definición 1. *Un **grafo dirigido** es un Conjunto O de objetos, un Conjunto A de flechas y dos funciones:*

- Dominio*, que asigna a cada flecha f un objeto a, es decir $a = \operatorname{Dom} f$.*
- Codominio*, que asigna a cada flecha f un objeto b, es decir $b = \operatorname{Cod} f$.*

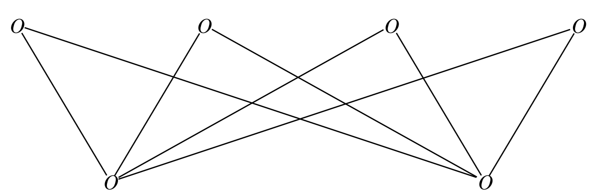
Dentro del grafo, se denota el conjunto de las funciones que se pueden componer como:

$$A \times_O A = \{(g, f) | g, f \in A, \operatorname{Dom} g = \operatorname{Cod} f\},$$

llamado el producto sobre O.



Ejemplo de un grafo dirigido



Ejemplo de un grafo no dirigido

Definición 2. *Una **categoría** $\mathcal{C}$ es un grafo dirigido con dos funciones adicionales:*

$$\begin{aligned} \operatorname{id} : \mathcal{C} &\to A, & A \times_{\mathcal{C}} A &\to A \\ c &\mapsto \operatorname{id}_c, & (f, g) &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

llamadas identidad y composición, tal que

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{id}_a) = a = \operatorname{Cod}(\operatorname{id}_a), \quad \operatorname{Dom}(g \circ f) = \operatorname{Dom} f, \quad \operatorname{Cod}(g \circ f) = \operatorname{Cod} g,$$

para todos los objetos $a \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ y todas las composiciones posibles de flechas. Para todas las flechas $f : a \to b$ y $g : b \to c$ se tiene que

$$id_b \circ f = f, \quad g \circ id_b = g$$

Al conjunto de objetos de una categoría $\mathcal{C}$ se denotará como $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, y el de sus flechas, o *morfismos*, como $\mathcal{C}(A, B)$, con $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Ejemplo 3. *A continuación se presentarán algunos ejemplos de categorías:*

1. ***0*** *es la categoría vacía (no objetos, no flechas).*

2. ***1*** *es la categoría con un objeto y una flecha* $\circlearrowleft$ *(la identidad).*

3. ***2*** *es la categoría con dos objetos* a, b *y solo una flecha distinta a la identidad,* $\circlearrowleft \to \circlearrowleft$.

4. ***3*** *es la categoría con tres objetos cuyas flechas distintas a la identidad están arregladas en un triángulo.*

5. *Una categoría* ***discreta*** *es aquella en la que toda flecha es la identidad.*

6. *Para toda categoría* $\mathcal{C}$, *y un objeto fijo* $a \in \mathcal{C}$, *el conjunto*

$$\boldsymbol{Hom}(a, a) = \{f : a \to a \mid f \text{ es flecha}\}$$

   es un monoide.

7. *Dadas* $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ *categorías, la* ***categoría producto*** $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ *se define:*

   - *para objetos,* $\mathrm{Ob}(\mathcal{B} \times \mathcal{C}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
   - *para morfismos,* $\mathcal{B} \times \mathcal{C}((x, y), (w, z)) = \mathcal{B}(x, y) \times \mathcal{C}(w, z)$, *donde* $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ *y* $w, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
   - *Todo conjunto parcialmente ordenado, o poset, puede ser visto como una categoría* P, *en la que dos objetos están unidos por, a lo sumo, una flecha, y las flechas no son funciones. Dados* $x, y \in \mathrm{Ob}(P)$, *las flechas serán de la forma* (x, y), *si* $x \leq y$. *La composición de flechas está dada por* $(x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$. *Así, se tendrá que esta relación es transitiva. También se tiene que la relación es simétrica, gracias a la existencia de la flecha identidad* (x, x). *Por último*

la antisimetría se tiene gracias a la condición de que haya a lo sumo una flecha entre dos objetos, es decir, si existen dos flechas (x, y) y (y, x), entonces necesariamente $x = y$.

Para los siguientes ejemplos se introducirá el concepto de objetos *pequeños*, para categorías. Un conjunto pequeño es un conjunto que pertenece a un universo fijado $\mathcal{U}$.
En la teoría axiomática de conjuntos de Von Neumann-Bernays-Gödel [3], una *clase* es una colección de conjuntos que pueden ser definidos sin ambiguedades mediante una propiedad que todos ellos compartan. Todo conjunto es una clase, sin importar la manera de definirlo, y una clase que no es un conjunto es llamada *clase propia*. Una categoría $\mathcal{C}$ es llamada pequeña si $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es un conjunto y no una clase propia.

Ejemplo 4. *Algunos ejemplos de Categorías pequeñas son:*

1. **Set** *denota la categoría cuyos objetos son los conjuntos y funciones como morfismos. Dados* $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ *entonces* $\mathbf{Set}(A, B)$ *denota el conjunto de morfismos en* **Set** *entre* A *y* B*, que en este caso es*

$$\mathbf{Set}(A, B) = \{f : A \to B : f \text{ es un función}\}.$$

2. $\mathbb{B}$ *denota la categoría cuyos objetos son conjuntos finitos y morfismos son biyecciones.*

3. $\mathbf{Vect}(k)$ *denota la categoría cuyos objetos son espacios vectoriales de dimensión finita sobre* k *un cuerpo y morfismos son transformaciones lineales.*

4. **Top** *denota la categoría cuyos objetos son espacios topológicos y morfismos son funciones continuas.*

5. $\mathbb{Z}_2$-**Vect** *denota la categoría cuyos objetos son espacios vectoriales* $\mathbb{Z}_2$*-graduados y morfismos son transformaciones lineales entre ellos.*

6. **Cat** *denota la categoría cuyos objetos son categorías pequeñas y morfismos son functores.*

7. **Mon** *denota la categoría cuyos objetos son monoides y morfismos son morfismos de monoides.*

8. **Grp** *denota la categoría cuyos objetos son grupos y morfismos son homomorfismos de grupos.*

9. **Rng** *denota la categoría cuyos objetos son anillos y morfismos son morfismos de anillos.*

10. **CRng** *denota la categoría cuyos objetos son anillos conmutativos y morfismos son morfismos de anillos.*

11. k-**Mod** *denota la categoría cuyos objetos son módulos sobre el anillo conmutativo* k*.*

1.2. Functores

En esta sección se dará la definición de functor y se darán ejemplos. Un morfismo de una categoría en otra que preserva la estructura es llamado functor. Está definido para objetos y flechas. A continuación sigue la definición:

Definición 5. *Para categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$, un* ***functor*** $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ *con dominio $\mathcal{C}$ y codominio $\mathcal{B}$ es una regla tal que:*

- *A cada objeto $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ asigna un objeto $\mathcal{T}c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$.*
- *A cada flecha $f : c \to c'$ asigna una flecha $\mathcal{T}f : \mathcal{T}c \to \mathcal{T}c'$ en $\mathcal{B}(A, B)$, con $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, tal que*
    - $\mathcal{T}(1_c) = 1_{\mathcal{T}c}$.
    - $\mathcal{T}(g \circ f) = \mathcal{T}g \circ \mathcal{T}f$.

Ejemplo 6. *Un ejemplo sencillo de functor es el functor potencia,* $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$*. El morfismo de objeto asigna a cada conjunto* X *el conjunto potencia, o partes,* $\mathcal{P}(X)$*, con sus elementos siendo subconjuntos de* X*. Su función de morfismos asigna a cada* $f : X \to Y$ *un morfismo* $\mathcal{P}f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$*, el cual envía a cada* $S \subseteq X$ *a su imagen* $f(S) \subseteq Y$*. Como se cumple* $\mathcal{P}(1_X) = 1_{\mathcal{P}(X)}$ *y* $\mathcal{P}(f \circ g) = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$*, claramente se define un functor sobre la categoría de conjuntos pequeños en sí misma.*

Definición 7. *Una* ***especie de estructura*** *es una regla* $\mathcal{F}$ *tal que:*

- *asigna a todo* U *conjunto finito, un conjunto* $\mathcal{F}[U]$ *finito.*
- *asigna a toda biyección* $\sigma : U \to V$*, una función* $\mathcal{F}[\sigma] : \mathcal{F}[U] \to \mathcal{F}[V]$ *que cumple con las propiedades functoriales.*

  1. *para todas las biyecciones* $\sigma : U \to V$ *y* $\tau : V \to W$*,*

  $$\mathcal{F}[\sigma \circ \tau] = \mathcal{F}[\sigma] \circ \mathcal{F}[\tau]$$

  2. *para el morfismo identidad,* $\mathrm{id}_U : U \to U$*,*

  $$\mathcal{F}[\mathrm{id}_U] = \mathrm{id}_{\mathcal{F}[U]}.$$

Un elemento $s \in \mathcal{F}[U]$ *es llamado una* $\mathcal{F}$*-estructura sobre* U*, mientras que* $\mathcal{F}[\sigma]$ *es llamada el transporte de estructuras a través de* σ*.*

Observe que una especie $\mathcal{F}$ es un functor entre $\mathbb{B}$ y sí misma. El lector interesado en profundizar las ideas presentes en este ejemplo puede ver [2].

Definición 8. *Un functor que* olvida *parte o la totalidad de la estructura de un objeto algebraico es llamado un* ***functor olvidadizo*** *o functor subyacente.*

Ejemplo 9. *Sea* $\mathcal{U} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ *el functor que le asigna a cada grupo* G *el conjunto* $\mathcal{U}(G)$ *de sus elementos, olvidando la multiplicación, y por lo tanto la estructura del grupo, y a cada morfismo* $\varphi : G \to G'$*, la misma función* φ*, sólo vista como función entre conjuntos.*

Ejemplo 10. *Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un* ***bifunctor*** *$\mathcal{F} : \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un functor de la categoría producto $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ a la categoría $\mathcal{D}$, definido así:*

- *En objetos: Para cada $x \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$ e $y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, un objeto $z \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$.*
- *En morfismos: Dados $f \in \mathcal{C}(x, x')$ y $g \in \mathcal{B}(y, y')$, el morfismo*

$$\mathcal{F}(f, g) : \mathcal{F}(x, y) \to \mathcal{F}(x', y'),$$

tal que

$$\mathcal{F}(f' \circ f, g' \circ g) = \mathcal{F}(f', g') \circ \mathcal{F}(f, g).$$

De manera similar, se define un functor con más argumentos. Se denota por $\mathcal{C}^n$ el producto cartesiano de $\mathcal{C}$ con sí misma n veces, y $F : \mathcal{C}^n \to \mathcal{D}$ el functor con n argumentos en $\mathcal{C}$ y valores en $\mathcal{D}$. Se dice que F tiene multiplicidad n.

Los functores pueden ser compuestos. Dados functores $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ y $\mathcal{S} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, entre Categorías $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, las funciones composición

$$c \mapsto \mathcal{S}(\mathcal{T}c), \qquad\qquad f \mapsto \mathcal{S}(\mathcal{T}f)$$

sobre objetos $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y flechas $f \in \mathcal{C}(A, B)$, con $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, definen un functor $\mathcal{S} \circ \mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, llamado **functor composición**. Dicha composición es asociativa, y existe el functor identidad $\mathrm{id}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, que actúa como la identidad para esta composición.

Definición 11. *Un* ***isomorfismo de Categorías*** *$\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ es un functor $\mathcal{T}$ que es una biyección, en objetos y en morfismos.*

Equivalentemente, un functor $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ es un isomorfismo si y sólo si existe $\mathcal{S} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{S} \circ \mathcal{T}$ y $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ son functores identidad ($\mathcal{S} = \mathcal{T}^{-1}$).

Definición 12. *Un functor $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ es* ***completo*** *cuando cada par $c, c' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, y para cada morfismo $g : \mathcal{T}c \to \mathcal{T}c'$ en $\mathcal{B}(\mathcal{T}c, \mathcal{T}c')$ existe un morfismo $f : c \to c'$ en $\mathcal{C}(c, c')$, tal que $g = \mathcal{T}f$.*

Definición 13. *Un functor $\mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ es* ***fiel*** *(o un embedding) cuando a cada par $c, c' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y a cada par $f_1, f_2 : c \to c'$ de morfismos paralelos, se tiene que*

$$\mathcal{T}f_1 = \mathcal{T}f_2 : \mathcal{T}c \to \mathcal{T}c' \Rightarrow f_1 = f_2.$$

1.3. Transformaciones Naturales

En esta sección se dará la definición de transformación natural, y se dará un ejemplo. Una transformación natural puede considerarse como un morfismo entre functores que respeta la estructura interna de su dominio y codominio [21].

Definición 14. *Dados dos fuctores $\mathcal{S}, \mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, una* ***transformación natural*** *$\tau : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ es una función que asigna a cada $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ un morfismo $\tau_c = \tau c : \mathcal{S}c \to \mathcal{T}c$ de tal forma que cada morfismo $f : c \to c'$ genera un diagrama*

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f"] & \mathcal{S}c \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "\mathcal{S}f"'] & \mathcal{T}c \arrow[d, "\mathcal{T}f"] \\
c' & \mathcal{S}c' \arrow[r, "\tau_{c'}"] & \mathcal{T}c'
\end{tikzcd}$$

que resulta ser conmutativo. Cuando esto se cumple, también se dice que τ_c es natural en c.

Si pensamos el functor $\mathcal{S}$ como tomando una imagen desde $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$, entonces una transformación natural τ es un conjunto de morfismos que envía la imagen $\mathcal{S}$ en la imagen $\mathcal{T}$, con todos los cuadrados, y paralelogramos, siendo conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "h"'] & \\
 & b \\
c \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}a \arrow[rr, "\tau_a"] \arrow[dr, "\mathcal{S}f"] \arrow[dd, "\mathcal{S}h"] & & \mathcal{T}a \arrow[dr, "\mathcal{T}f"] \arrow[dd] & \\
 & \mathcal{S}b \arrow[rr, "\tau_b"] & & \mathcal{T}b \arrow[dl, "\mathcal{T}g"] \\
\mathcal{S}c \arrow[ur, "\mathcal{S}g"] \arrow[rr, "\tau_c"] & & \mathcal{T}c &
\end{tikzcd}$$

llamamos a $\tau a, \tau b, \tau c, \ldots$ los componentes de la transformación natural τ, también llamada morfismo entre functores. Una transformación natural τ con cada componente τc invertible en $\mathcal{B}$ es llamada una equivalencia natural, o un isomorfismo natural, en símbolos $\tau : \mathcal{S} \cong \mathcal{T}$.

Proposición 15. *El determinante es una transformación natural.*

Demostración. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{S} : \mathbf{CRng} \to \mathbf{Grp}$ functores, tales que:

- $\mathcal{T} := (\ \ )^*$, en objetos toma un anillo conmutativo k y lo envía en k^*, el grupo de unidades, es decir, todos los elementos que tienen inversos multiplicativos; en morfismos, dado φ homomorfismo de anillos, lo envía en él mismo, restringido a las unidades.

- $\mathcal{S} := \mathrm{GL}_n$, en objetos, envía un anillo conmutativo k en $\mathrm{GL}_n(k)$, esto es, el grupo general lineal (Matrices de tamaño $n \times n$ con el determinante distinto de 0); en morfismos, envía a un morfismo de anillos φ, en uno entre matrices, en el que toma cada entrada de la matriz y le aplica φ.

Sea $\det_k M$ el determinante de una matriz M de tamaño $n \times n$ con entradas en el anillo conmutativo k. Como la fórmula del determinante está definida igual para cualquier anillo conmutativo, cada morfismo de anillos $f : k \to k'$ lleva a un diagrama,

$$\begin{tikzcd} GL_n k \arrow[r, "det_k"] \arrow[d, "GL_n f"'] & k^* \arrow[d, "f^*"] \\ GL_n k' \arrow[r, "det_{k'}"] & k'^* \end{tikzcd}$$

que resulta ser conmutativo, y demuestra que la transformación $\det : GL_n \to (\ \ )^*$ es natural entre dos functores, $(\ \ )^*$ y GL_n, de $\mathbf{CRng} \to \mathbf{Grp}$. □

Ejemplo 16. *Dadas categorías $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$, la categoría $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ se define como:*

- $\mathrm{Ob}\,(\mathcal{D}^{\mathcal{C}}) = \{$*functores* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}\}$.

- $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \{$*transformaciones naturales* $f:\mathcal{F}\to\mathcal{G}\}$, *para* $\mathcal{F},\mathcal{G}\in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}^{\mathcal{C}})$.

Definición 17. *Una **equivalencia entre categorías** $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es definida como un par de functores $\mathcal{S}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ y $\mathcal{T}:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$, junto con isomorfismos naturales $I_{\mathcal{C}}\cong\mathcal{T}\circ\mathcal{S}$ y $I_{\mathcal{D}}\cong\mathcal{S}\circ\mathcal{T}$.*

Capítulo 2

Categorías Simétricas Monoidales

Las categorías simétricas monoidales, conocidas también como categorías tensoriales monoidales o bicategorías, han sido introducidos independientemente por diferentes autores, como Bénabou en [1] y MacLane en [19]. Las bicategorías, como las llamaba MacLane, se introducen con varios propósitos: formular la noción de una categoría con un functor Hom, generalizar las leyes de asociatividad, conmutatividad e identidad entre objetos, dados por isomorfismos, y estudiar los casos en los que la equivalencia es única. En esta sección se introducirán los conceptos necesarios para la definición de categoría simétrica monoidal, como las leyes superiores de asociatividad, conmutatividad e identidad, entre otras. El lector que este interesado en la noción de coherencia de Mac Lane puede revisar [20].

2.1. Categorías Monoidales

En esta sección se definirá el concepto de Categoría Monoidal, y se darán ejemplos.

Definición 18. *Un* ***monoide*** *es un conjunto $\mathcal{M}$ junto con la ley de composición $\bullet$ definida así:*

$$\bullet : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M},$$

tal que la ley de composición es asociativa y posee un elemento identidad.

Un monoide es una categoría con un objeto, y está determinado por su conjunto de flechas, la función identidad y la regla para la composición. Como para cualquier dos flechas está definida la composición, la categoría puede ser descrita como un conjunto $\mathcal{M}$ con una operación binaria $\bullet : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ que es asociativa y tiene identidad. Luego un monoide es exactamente un semigrupo.

Ejemplo 19. *La categoría cuyo único objeto es un conjunto arbitrario $\mathcal{A}$, y sus morfismos son funciones de $\mathcal{A}$ en sí mismo es un monoide, relativo a la operación de composición entre morfismos, debido a que la composición de funciones es asociativa, y la identidad es la función identidad.*

Definición 20. *Una **categoría monoidal** es una séxtupla $(\mathcal{C}, \odot, 1_{\mathcal{C}}, \alpha, \gamma, \beta)$ dada por los siguientes datos:*

1. *$\mathcal{C}$ es una categoría.*

2. *Un bifunctor $\odot : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, llamado producto monoidal.*

3. *Un objeto $1_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ un objeto distinguido, llamado unidad en $\mathcal{C}$.*

4. *Para cada $x, y, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, un isomorfismo natural $\alpha_{x,y,z}$, llamado isomorfismo de asociatividad tal que*

$$\alpha \equiv \alpha_{x,y,z} : x \odot (y \odot z) \to (x \odot y) \odot z.$$

5. *Para cada $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, dos isomorfismos naturales γ y β, llamados identidades a izquierda y derecha*

   - $\gamma : 1_{\mathcal{C}} \odot x \to x,$
   - $\beta : x \odot 1_{\mathcal{C}} \to x.$

Estos datos están sujetos a los siguientes axiomas:

1. Axioma de asociatividad (Pentágono de MacLane): Dados $x, y, z, w \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& x \odot (y \odot (z \odot w)) \arrow[dl, "\mathrm{id}_x \odot \alpha_{y,z,w}"'] \arrow[dr, "\alpha_{x,y,z\odot w}"] & \\
x \odot ((y \odot z) \odot w) \arrow[d, "\alpha_{x,y\odot z,w}"'] & & (x \odot y) \odot (z \odot w) \arrow[d, "\alpha_{x\odot y,z,w}"] \\
(x \odot (y \odot z)) \odot w \arrow[rr, "\alpha_{x,y,z} \odot \mathrm{id}_w"] & & ((x \odot y) \odot z) \odot w
\end{tikzcd}$$

2. Axioma de unidad. Para cada $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
x \odot (1_{\mathcal{C}} \odot y) \arrow[rr, "\alpha_{x,1_{\mathcal{C}},y}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_x \odot \gamma"'] & & (x \odot 1_{\mathcal{C}}) \odot y \arrow[dl, "\beta \odot \mathrm{id}_y"] \\
& x \odot y &
\end{tikzcd}$$

En el Ejemplo 21, $\mathbb{B}$ es la categoría de conjuntos finitos y biyecciones, definido en el Ejemplo 4.

Ejemplo 21. *La categoría $\mathbb{B}$ es una categoría monoidal tal que $\odot := \times$ es el producto cartesiano de conjuntos, y la unidad es, para $u \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$ fijo, el conjunto con un solo elemento, $1_{\mathbb{B}} = \{u\}$. Como el producto cartesiano es asociativo, dados $m, n, k \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, $\alpha \equiv \alpha_{n,m,k} = \mathrm{id}_{n\times m\times k}$. Además, las identidades a izquierda y derecha γ y β, están dados por las proyecciones en la segunda y primera coordenadas, es decir, para todo $n \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$,*

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & \{u\} \times n & \longrightarrow & n \\ & (u,k) & \longmapsto & k \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \beta: & n \times \{u\} & \longrightarrow & n \\ & (k,u) & \longmapsto & k. \end{array}$$

La conmutatividad de los diagramas está dada gracias a que $\alpha = \mathrm{id}$, y a que γ y β son proyecciones.

Ejemplo 22. **Top** *es una categoría monoidal, tal que $\odot := \times$ es el producto cartesiano entre espacios topológicos y $1_{\mathbf{Top}}$ el conjunto con un elemento fijo, dotado con la topología discreta.*

Una Categoría $\mathcal{C}$ tomando $\odot$ como el producto cartesiano, $1_{\mathcal{C}}$ como un objeto terminal y α, γ, β como los isomorfismos canónicos, es llamada categoría monoidal cartesiana. Entre los casos particulares importantes se incluyen **Set** , **Cat** , **Grp** y **Rng** .

2.2. Categorías Simétricas Monoidales

En esta sección se definirá el concepto de categoría simétrica monoidal, y se hará especial énfasis en el ejemplo de **Vect** (k).

Definición 23. *Una* ***categoría simétrica monoidal*** *es una tupla* $(\mathcal{C}, \odot, 1_{\mathcal{C}}, \alpha, \gamma, \beta, s)$, *tal que* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \odot, 1_{\mathcal{C}}, \alpha, \gamma, \beta)$ *es una categoría monoidal, y* s *un isomorfismo natural* $s_{xy} : x \odot y \to y \odot x$, *llamado simetrizador, que satisface los siguientes axiomas de coherencia, expresados por la conmutatividad de los siguientes diagramas:*

$$\begin{tikzcd}
x \odot y \arrow[r, "s_{x,y}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{x\odot y}"'] & y \odot x \arrow[d, "s_{y,x}"] \\
& x \odot y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1_{\mathcal{C}} \odot x \arrow[rr, "s_{1_{\mathcal{C}},x}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & x \odot 1_{\mathcal{C}} \arrow[dl, "\beta"] \\
& x &
\end{tikzcd}$$

y el último de ellos conocido como el hexágono de Mac Lane:

$$\begin{tikzcd}
& x \odot (y \odot z) \arrow[dl, "\mathrm{id}_x \odot s_{y,z}"'] \arrow[dr, "\alpha_{x,y,z}"] & \\
x \odot z \odot y \arrow[d, "\alpha_{x,z,y}"'] & & (x \odot y) \odot z \arrow[d, "s_{x\odot y,z}"] \\
(x \odot z) \odot y \arrow[dr, "s_{x,z} \odot \mathrm{id}_y"'] & & z \odot (x \odot y) \arrow[dl, "\alpha_{z,x,y}"] \\
& (z \odot x) \odot y &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 24. *Cualquier categoría monoidal cartesiana* $\mathcal{C}$, *es un categoría simétrica monoidal con* $s_{xy}(a, b) := (b, a)$, *con* $(a, b) \in x \times y$, $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

A continuación haremos la descripción de $\mathbf{Vect}\,(k)$ como una categoría monoidal con $\odot := \otimes$ el producto tensorial entre espacios vectoriales y $1_{\mathbf{Vect}\,(k)} := k$. Haremos la construcción de los isomorfismos α, β y γ:

Isomorfismo de Asociatividad: Sean $E, F, G \in \mathrm{Ob}\,(\mathbf{Vect}\,(k))$, y $z \in G$ fijo. Definimos $f_z : E \times F \to E \otimes (F \otimes G)$ así: $f_z(x, y) = x \otimes (y \otimes z)$. f_z es bilineal, gracias a las propiedades de linealidad de $\otimes$:

$$\begin{aligned} f_z(\lambda x_1 + x_2, y) &= (\lambda x_1 + x_2) \otimes (y \otimes z) \\ &= \lambda x_1 \otimes (y \otimes z) + x_2 \otimes (y \otimes z) \\ &= \lambda f_z(x_1, y) + f_z(x_2, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_z(x, \lambda y_1 + y_2) &= x \otimes (\lambda y_1 + y_2 \otimes z) \\ &= x \otimes (\lambda y_1 \otimes z + y_2 \otimes z) \\ &= x \otimes (\lambda y_1 \otimes z) + x \otimes (y_2 \otimes z) \\ &= \lambda x \otimes (y_1 \otimes z) + x \otimes (y_2 \otimes z) \\ &= \lambda f_z(x, y_1) + f_z(x, y_2). \end{aligned}$$

Gracias a la propiedad universal del producto tensorial [8] se tiene que existe una única transformación lineal $h_z : E \otimes F \to E \otimes (F \otimes G)$, tal que $h_z \circ \otimes = f_z$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "f_z"] \arrow[d, "\otimes"'] & E \otimes (F \otimes G) \\ E \otimes F \arrow[ur, "h_z"'] & \end{tikzcd}$$

Luego se tiene que para todo $x \in E, y \in F$,

$$h_z(x \otimes y) = f_z(x, y) = x \otimes (y \otimes z).$$

Sea $\psi : (E \otimes F) \times G \to E \otimes (F \otimes G)$ definida por:

$$\psi(x \otimes y, z) = h_z(x \otimes y).$$

Veamos que ψ es lineal:

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda(x_1 \otimes y_1) + x_2 \otimes y_2), z) &= h_z(\lambda(x_1 \otimes y_1) + (x_2 \otimes y_2)) \\
&= \lambda h_z(x_1 \otimes y_1) + h_z(x_2 \otimes y_2) \\
&= \lambda \psi(x_1 \otimes y_1, z) + \psi(x_2 \otimes y_2, z).
\end{aligned}$$

La linealidad en la segunda componente se tiene gracias a la unicidad de h_z, ya que $h_{\lambda z_1 + z_2} = \lambda h_{z_1} + h_{z_2}$.

De nuevo por la propiedad universal, se tiene que existe una única transformación lineal $\widehat{\alpha} : (E \otimes F) \otimes G \to E \otimes (F \otimes G)$ tal que $\widehat{\alpha} \circ \otimes = \psi$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(E \otimes F) \times G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\otimes"'] & E \otimes (F \otimes G) \\
(E \otimes F) \otimes G \arrow[ur, "\widehat{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego, se tiene que $\widehat{\alpha}((x \otimes y) \otimes z) = \psi(x \otimes y, z) = h_z(x \otimes y) = x \otimes (y \otimes z)$.

Sea $x \in E$ fijo. Definamos $g_x : F \times G \to (E \otimes F) \otimes G$ por $g_x(y, z) = (x \otimes y) \otimes z$. Claramente g_x es bilineal. Una vez más, por la propiedad universal, existe una única transformación lineal $\widehat{h}_x : F \otimes G \to (E \otimes F) \otimes G$ tal que $\widehat{h}_x \circ \otimes = g_x$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
F \times G \arrow[r, "g_x"] \arrow[d, "\otimes"'] & (E \otimes F) \otimes G \\
F \otimes G \arrow[ur, "\widehat{h}_x"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego se tiene que:

$$\widehat{h}_x(y \otimes z) = g_x(y, z) = (x \otimes y) \otimes z. \tag{2.1}$$

Definimos $\widehat{\psi} : E \times (F \otimes G) \to (E \otimes F) \otimes G$ de la siguiente manera:

$$\widehat{\psi}(x, y \otimes z) = g_x(y \otimes z).$$

$\widehat{\psi}$ también es bilineal, y por lo tanto existe una única

$$\alpha \equiv \alpha_{E,F,G} : E \otimes (F \otimes G) \to (E \otimes F) \otimes G,$$

tal que $\alpha \circ \otimes = \widehat{\psi}$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
E \times (F \otimes G) \arrow[r, "\widehat{\psi}"] \arrow[d, "\otimes"'] & (E \otimes F) \otimes G \\
E \otimes (F \otimes G) \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego se tiene que

$$\alpha(x \otimes (y \otimes z)) = \widehat{\psi}(x, y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z. \tag{2.2}$$

de (2.1) y (2.2), se tiene que:

$$(\widehat{\alpha} \circ \alpha)(x \otimes (y \otimes z)) = \widehat{\alpha}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z),$$

$$(\alpha \circ \widehat{\alpha})((x \otimes y) \otimes z) = \alpha(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z.$$

Por lo tanto, $\alpha \circ \widehat{\alpha} = \mathrm{id} = \widehat{\alpha} \circ \alpha$, luego α es el isomorfismo de asociatividad, es un isomorfismo y por lo tanto, $(E \otimes F) \otimes G \cong E \otimes (F \otimes G)$.

Identidad a izquierda y derecha: Dado $E \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vect}(k))$, definimos γ y β como sigue:

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & k \times E & \longrightarrow & E \\ & (a, v) & \longmapsto & av \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \beta : & E \times k & \longrightarrow & E \\ & (v, a) & \longmapsto & va, \end{array}$$

donde av y va es la multiplicación usual por escalar. γ y β preservan la linealidad gracias a que los elementos del cuerpo k son asociativos bajo la multiplicación, y son biyectivos por construcción. Por lo tanto, γ y β son las identidades a izquierda y derecha, respectivamente. Ahora veremos que los datos anteriores cumplen los axiomas de categoría monoidal:

Axioma de asociatividad: Dados $E, F, G, H \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vect}(k))$, y debemos ver que

$$(\alpha_{E,F,G} \otimes \mathrm{id}_H) \circ \alpha_{E,F\otimes G,H} \circ (\mathrm{id}_E \otimes \alpha_{F,G,H}) = \alpha_{E\otimes F,G,H} \circ \alpha_{E,F,G\otimes H}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&(\alpha_{E,F,G} \otimes \mathrm{id}_H) \circ \alpha_{E,F\otimes G,H} \circ (\mathrm{id}_E \otimes \alpha_{F,G,H})(x \otimes (y \otimes (z \otimes w))) \\
&\qquad = (\alpha_{E,F,G} \otimes \mathrm{id}_H) \circ \alpha_{E,F\otimes G,H}(x \otimes ((y \otimes z) \otimes w)) \\
&\qquad = (\alpha_{E,F,G} \otimes \mathrm{id}_H)((x \otimes (y \otimes z)) \otimes w) \\
&\qquad = (((x \otimes y) \otimes z) \otimes w).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\alpha_{E\otimes F,G,H} \circ \alpha_{E,F,G\otimes H}(x \otimes (y \otimes (z \otimes w))) &= \alpha_{E\otimes F,G,H}((x \otimes y) \otimes (z \otimes w)) \\
&= (((x \otimes y) \otimes z) \otimes w),
\end{aligned}$$

y por lo tanto, se tiene lo deseado.

Axioma de Unidad: Dados $E, F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vect}(k))$, debemos ver que

$$\mathrm{id}_E \otimes \gamma = (\beta \otimes \mathrm{id}_F) \circ \alpha_{E,k,F}.$$

Entonces:

$$\mathrm{id}_E \otimes \gamma(x \otimes (k \otimes y)) = x \otimes y.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(\beta \otimes \mathrm{id}_F) \circ \alpha_{E,k,F}(x \otimes (k \otimes y)) &= (\beta \otimes \mathrm{id}_F)((x \otimes k) \otimes y) \\
&= x \otimes y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el axioma de unidad se cumple, y finalmente se tiene que $\mathbf{Vect}(k)$ es una categoría monoidal.

Veremos ahora que $\mathbf{Vect}\,(k)$ es una categoría simétrica monoidal, haciendo la construcción del isomorfismo s:

Dados $E, F \in \mathrm{Ob}\,(\mathbf{Vect}\,(k))$, definamos $\varphi_1 : E \times F \to E \otimes F$ y $\varphi_2 : E \times F \to F \otimes E$, $\varphi_1(x, y) := x \otimes y$, $\varphi_2(x, y) := y \otimes x$. Como φ_2 es bilineal, existe $s : E \otimes F \to F \otimes E$ lineal, tal que $f \circ \varphi_1 = \varphi_2$, o equivalentemente, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & F \otimes E \\
E \otimes F \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $f(x \otimes y) = (y \otimes x)$. De la misma manera, existe $\widehat{s} : F \otimes E \to E \otimes F$ tal que $g \circ \varphi_2 = \varphi_1$, o equivalentemente,

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & E \otimes F \\
F \otimes E \arrow[ur, "\widehat{s}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\widehat{s}(y \otimes x) = x \otimes y$.

Luego tenemos que:

$$\widehat{s} \circ s \circ \varphi_1 = \widehat{s} \circ \varphi_2 = \varphi_1 \qquad \text{y} \qquad s \circ \widehat{s} \circ \varphi_2 = s \circ \varphi_1 = \varphi_2,$$

y por lo tanto $\widehat{s} \circ s \circ \varphi_1 = \varphi_1$ y $s \circ \widehat{s} \circ \varphi_2 = \varphi_2$.

Equivalentemente,

$$(\widehat{s} \circ s)(x \otimes y) = (x \otimes y) \qquad \text{y} \qquad (s \circ \widehat{s})(y \otimes x) = (y \otimes x).$$

Como la imagen de φ_1 es igual a $E \otimes F$, se tiene que $\widehat{s} \circ s = \mathrm{id}$, y análogamente $s \circ \widehat{s}$, y por lo tanto, s (o $\widehat{s}$) es biyectiva, y por lo tanto, s es el morfismo simetrizador, y $E \otimes F \cong F \otimes E$.

Dados $E, F, G \in \mathrm{Ob}\,(\mathbf{Vect}\,(k))$, veremos que se cumplen los axiomas de coherencia:

1. $s_{E,F} \circ s_{F,E} = \mathrm{id}_{E \otimes F}$,

2. $\beta \circ s_{k,E} = \gamma$,

3. $s_{E,G} \otimes \mathrm{id}_F \circ \alpha_{E,G,F} \circ \mathrm{id}_E \otimes s_{F,G} = \alpha_{G,E,F} \circ s_{E \otimes F,G} \circ \alpha_{E,F,G}$.

La igualdad 1 se tiene gracias a que $s_{E,F} \circ s_{F,E}(x \otimes y) = s_{E,F}(y \otimes x) = x \otimes y$, y 2 es equivalente a que el producto tensorial es bilineal. Veamos 3:

$$\begin{aligned}
(s_{E,G} \otimes \mathrm{id}_F \circ \alpha_{E,G,F} \circ \mathrm{id}_E \otimes s_{F,G})(x \otimes (y \otimes z)) &= (s_{E,G} \otimes \mathrm{id}_F \circ \alpha_{E,G,F})(x \otimes (z \otimes y)) \\
&= (s_{E,G} \otimes \mathrm{id}_F)((x \otimes z) \otimes y) \\
&= ((z \otimes x) \otimes y),
\end{aligned}$$

y además se tiene que,

$$\begin{aligned}
(\alpha_{G,E,F} \circ s_{E \otimes F,G} \circ \alpha_{E,F,G})(x \otimes (y \otimes z)) &= (\alpha_{G,E,F} \circ s_{E \otimes F,G})((x \otimes y) \otimes z) \\
&= \alpha_{G,E,F}(z \otimes (x \otimes y)) \\
&= ((z \otimes x) \otimes y).
\end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{Vect}\,(k)$ es una categoría simétrica monoidal.

Capítulo 3

Operads

En este capítulo presentaremos tres ejemplos que motivarán la definición de Operad [15], [25], [29], el Operad de Discos Pequeños, el Operad de Cubos Pequeños y el Operad de Endomorfismos. Luego, daremos la definición formal de Operad sobre una Categoría Simétrica Monoidal, junto con sus axiomas. En el ejemplo de Operad de Endomorfismos haremos la construcción completa del Operad, comprobando todos los axiomas de asociatividad, unidad y compatibilidad [6], mientras que en los ejemplos de Operad de Discos Pequeños y Operad de Cubos Pequeños daremos ejemplos de cómo funciona su estructura, debido a que la definición es técnica y los ejemplos muestran claramente el funcionamiento de esta estructura como un Operad. Para la definición formal del Operad de Discos Pequeños, el lector puede ver [18], y para el Operad de Cubos Pequeños, [24].

3.1. Operad de los Discos Pequeños

Consideremos la familia $\{\mathcal{P}(i)\}_{i\geq 1}$, donde $a \in \mathcal{P}(i)$ es la bola unitaria en $\mathbb{R}^2$, junto con i discos en su interior, con rótulos y cuyos interiores son disjuntos dos a dos:

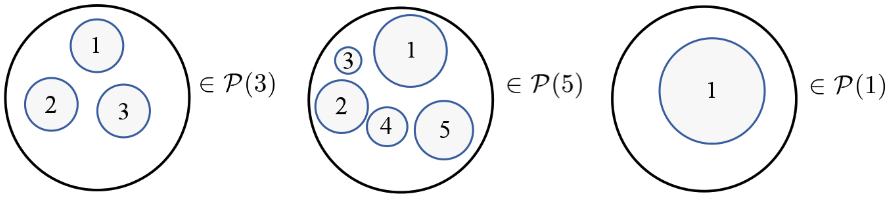


Figura 3.1: Ejemplos de elementos de $\mathcal{P}(i)$.

Consideremos ahora cada $\mathcal{P}(i)$ como un objeto de $(\mathbf{Top}, \times)$ categoría simétrica monoidal (véase Ejemplo 22 y Ejemplo 24), que vamos a dotar con la siguiente estructura:

- Para cada $n \geq 1$, una acción del grupo simétrico de tamaño n, S_n, sobre $\mathcal{P}(n)$,
- Para toda familia de números naturales $n, m_1, \cdots, m_n$, un morfismo

$$\gamma : \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(m_1) \times \cdots \times \mathcal{P}(m_n) \to \mathcal{P}(m_1 + \cdots + m_n),$$

  al que llamaremos composición,
- Un elemento distinguido, $1 \in \mathcal{P}(1)$,
- Morfismos identidad que dependan de γ y 1,
- Compatibilidad de la composición con la acción.

Acción de S_n sobre $\mathcal{P}(n)$: Dada $\sigma \in S_n$, consideremos la *acción* que permuta los rótulos de un elemento $a \in \mathcal{P}(n)$ a través de σ, así:

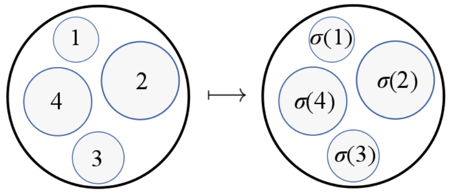


Figura 3.2: Acción de S_4 sobre $\mathcal{P}(4)$.

Composición: Dados $n, m_1, \cdots, m_n$ números naturales, llamaremos *composición* al morfismo que toma un disco $a \in \mathcal{P}(n)$ y discos $a_1 \in \mathcal{P}(m_1), \cdots, a_n \in \mathcal{P}(m_n)$ y lo envía en un disco en $b \in \mathcal{P}(m_1 + \cdots + m_n)$, donde b tendrá la estructura original de a, salvo que cada disco interior con rótulo i, se reemplazará por la configuración de a_i. Denotaremos a la composición por γ.

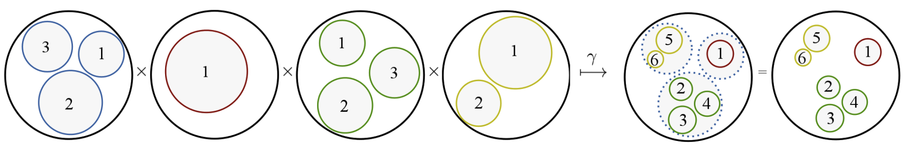


Figura 3.3: Ejemplo de Composición $\mathcal{P}(3) \times \mathcal{P}(1) \times \mathcal{P}(3) \times \mathcal{P}(2) \to \mathcal{P}(1 + 3 + 2)$.

Identidad: Consideremos un elemento distinguido en $\mathcal{P}(1)$, que tiene como único disco contenido el mismo disco. Lo llamaremos *identidad*, y lo denotaremos como 1:

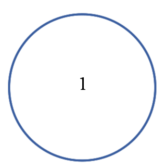


Figura 3.4: La identidad, denotada por 1.

Morfismos identidad: Dado el morfismo composición γ y la identidad 1, consideremos los *morfismos identidad*, a izquierda y a derecha:

- La *identidad a izquierda* consiste en aplicar γ a 1 y a cualquier disco $a \in \mathcal{P}(n)$. Así, la configuración inicial de a no cambiará con el morfismo, debido a que dentro de 1 colocamos la configuración de a:

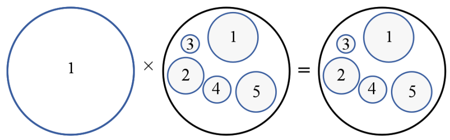


Figura 3.5: Ejemplo de Identidad a izquierda de un elemento de $\mathcal{P}(4)$.

- La *identidad a derecha* consiste en aplicar γ a cualquier disco $b \in \mathcal{P}(n)$ y a n veces 1. Así, en cada disco interior de b colocamos a 1, y así quedará el disco interior original:

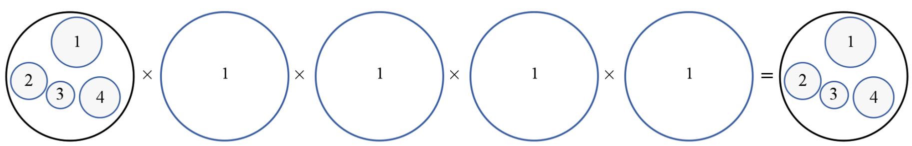


Figura 3.6: Ejemplo de Identidad a derecha de un elemento de $\mathcal{P}(4)$.

Asociatividad de la composición: Dada una familia de números naturales, veremos también que γ cumple una condición de *asociatividad*, es decir, que podemos componer de dos maneras distintas. en la Sección 3.4 representaremos esta propiedad con la conmutatividad de un diagrama. A continuación explicaremos mediante un ejemplo la asociatividad:

- Como primer "camino" aplicaremos γ al disco con color azul, junto con los siguientes discos de color rojo y amarrillo. Luego, al disco resultante, junto con los discos de color morado y verde, le aplicaremos γ de nuevo:

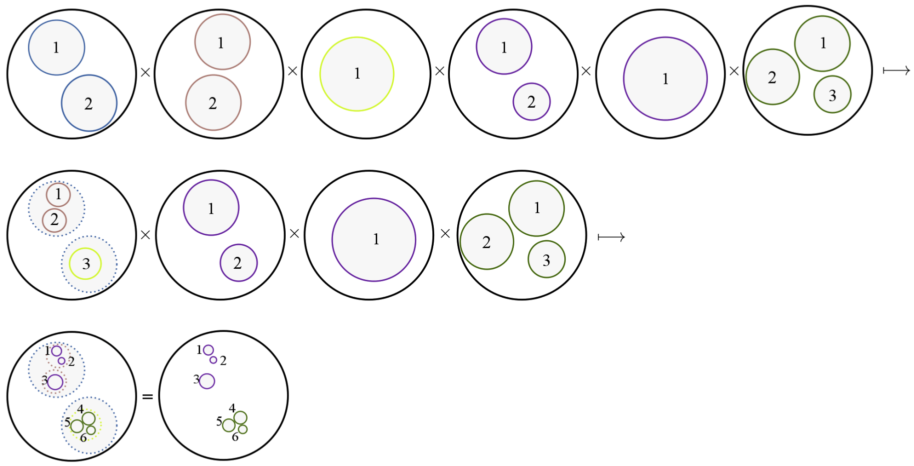


Figura 3.7: Manera 1 de asociar la composición.

- Como segundo "camino", reordenaremos los discos de tal manera que se pueda hacer la composición del disco de color rojo con los discos de color morado y del disco de color amarillo junto con el disco de color verde, y aplicaremos γ a cada uno de ellos. Por último, aplicaremos γ al disco de color azul junto con cada uno de los discos resultantes de las composiciones anteriores:

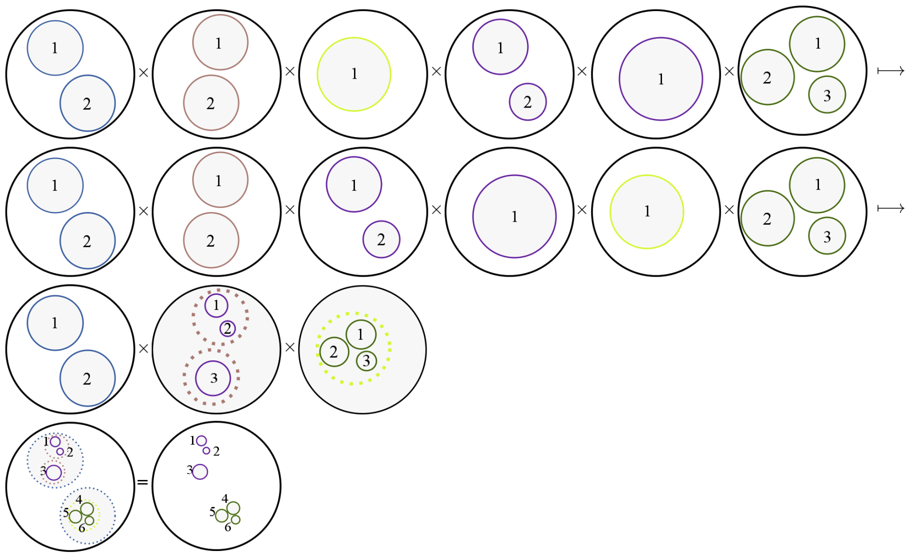


Figura 3.8: Manera 2 de asociar la composición.

Compatibilidad de la composición con la acción: Mediante dos ejemplos, veamos también que la acción de S_n sobre $\mathcal{P}(n)$ es compatible con γ:

- Dados discos de colores azul, rojo, verde y amarillo, y $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in S_3$ es equivalente que apliquemos γ a σ actuando sobre el disco de color azul y los discos de color rojo, verde y amarillo (Figura 3.9), a aplicar γ al disco de color azul junto con los discos restantes con las posiciones permutadas por σ, es decir, el disco de color rojo en primera posición, luego el de color amarillo en segunda posición, y el de verde en la tercera posición, y por último debemos reorganizar los rótulos con cierta permutación σ', que depende de σ (Figura 3.10).

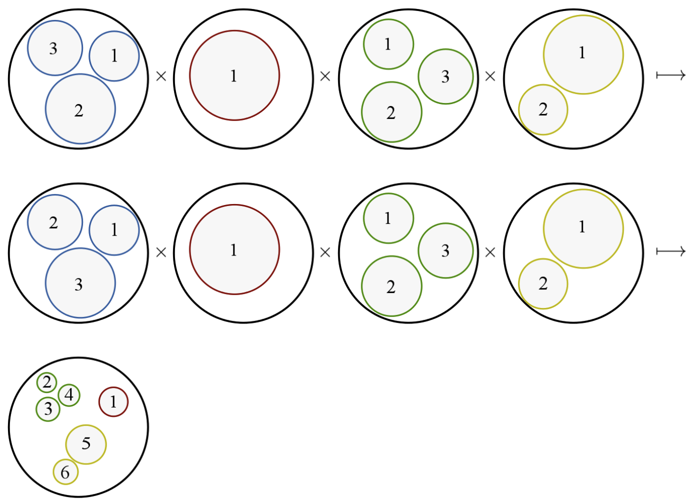


Figura 3.9: Manera 1 de actuar sobre la composición.

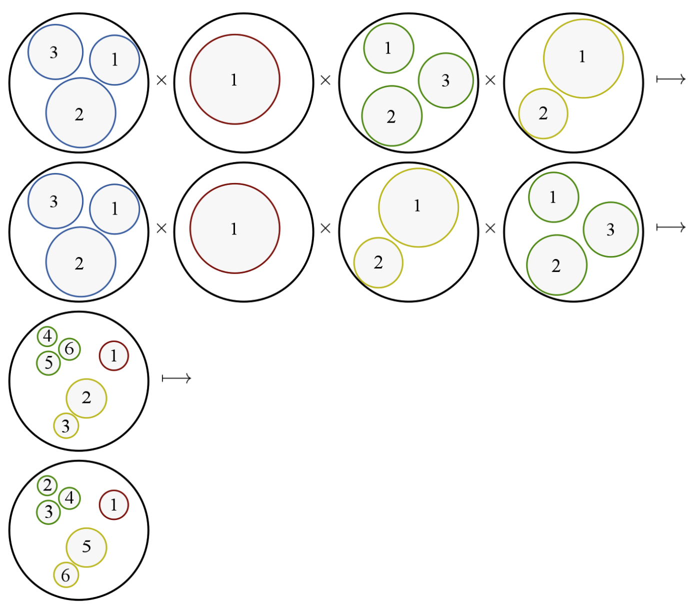


Figura 3.10: Manera 2 de actuar sobre la composición.

- Dados discos de colores azul, rojo, verde y amarillo, y $\tau_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in S_1$, $\tau_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in S_3$ y $\tau_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in S_2$, y $\tau_1 \times \tau_2 \times \tau_3$, $\tau_1 \times \tau_2 \times \tau_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \end{smallmatrix}\right) \in S_{1+3+2}$, la concatenación de las τ_i's, es equivalente que apliquemos γ a el disco de color azul junto con τ_1 actuando sobre el disco de color rojo, τ_2 actuando sobre el disco de color verde, y τ_3 actuando sobre el disco de color amarillo (Figura 3.11), a aplicar γ a $\tau_1 \times \tau_2 \times \tau_3$ actuando sobre el disco de color azul junto con los discos de colores rojo, verde y amarillo (Figura 3.12).

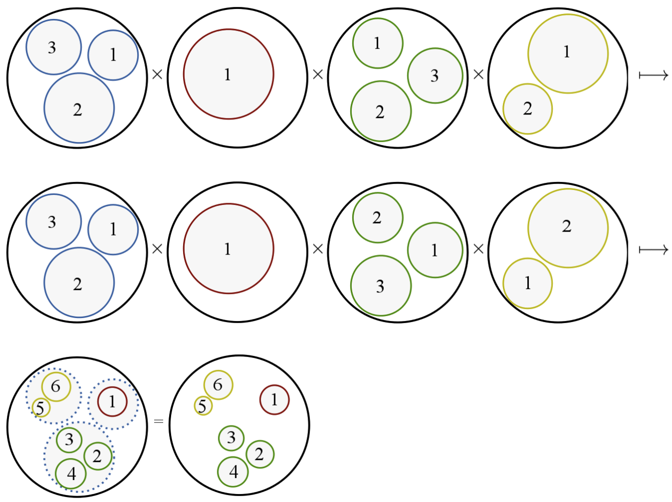


Figura 3.11: Manera 1 de actuar sobre la composición.

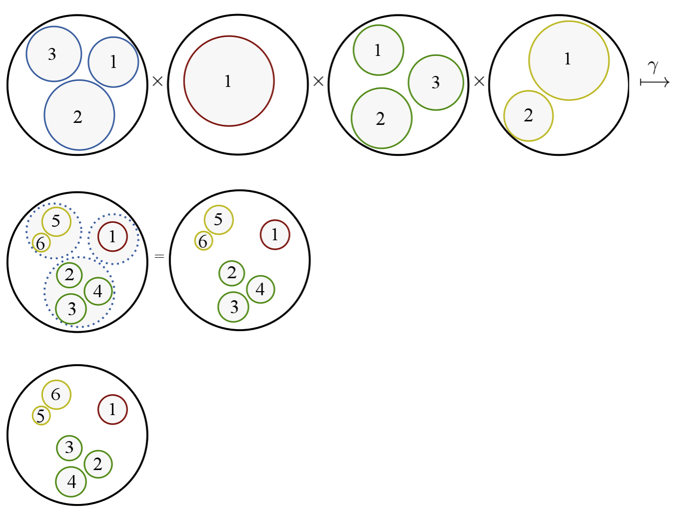


Figura 3.12: Manera 2 de actuar sobre la composición.

Definición 25. *La familia* $\{\mathcal{P}(i)\}_{i\geq 1}$ *junto con la* ***Acción de*** S_n ***sobre*** $\mathcal{P}(n)$***, Composición, Identidad, Morfismos Identidad, Asociatividad de la composición*** *y* ***Compatibilidad de la composición con la acción****, es llamada el* ***Operad de los Discos Pequeños****.*

En la definición 25 se consideró la bola unitaria en $\mathbb{R}^2$, pero en general, dada la bola unitaria en $\mathbb{R}^k$, se puede definir el Operad $\{P_k(i)\}_{i\geq 1}$ de forma análoga [18].

3.2. Operad de Cubos Pequeños

En esta sección daremos la definición del Operad de Cubos Pequeños, basándonos fuertemente en la definición del Operad de Discos Pequeños, definido en la sección anterior.

Definición 26. *Dado un entero* $k \geq 1$*, sea* $[0,1]^k$ *el cubo unitario en* $\mathbb{R}^k$*. El* ***Operad de Cubos Pequeños*** *es la familia* $\{\mathcal{Q}_k(i)\}_{i\geq 1}$*, dotada con la siguiente estructura:*

- $\mathcal{Q}_k(n)$ *es el espacio del cubo unitario* $[0,1]^k$ *en* $\mathbb{R}^k$ *junto con* n *subcubos,* $C_1, \ldots, C_n$*, tales que:*

  (i) Los lados de C_i *son paralelos a los lados de* $[0,1]^k$*, para todo* i*.*

  (ii) La intersección de los interiores de C_i *y* C_j *es vacía, para todo* $i \neq j$*.*

- *Sean* $\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_n) \in \mathcal{Q}_k(n)$ *y* $\boldsymbol{D}^i = (D_1^i, \ldots, D_{m_i}^i) \in \mathcal{Q}_k(m_i)$*, para* $1 \leq i \leq n$*. La composición* $\gamma(\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D}^1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{D}^n) \in \mathcal{Q}_k(m_1 + \cdots + m_n)$ *se obtiene reemplazando el subcubo* C_i *por la configuración* $\mathcal{D}^i$*.*

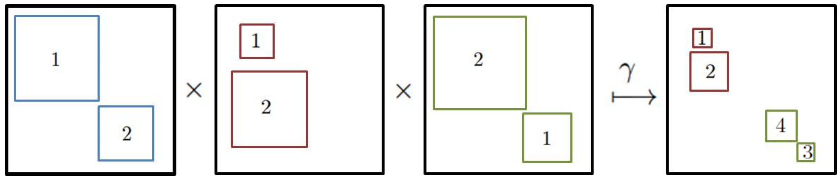


Figura 3.13: Ejemplo de composición.

- *La acción de S_n sobre $\mathcal{Q}_k(n)$ está dada por la permutación del orden de los subcubos,*

$$\sigma \cdot (C_1, \ldots, C_n) := (C_{\sigma(1)}, \ldots, C_{\sigma(n)}).$$

- *El elemento $1 \in \mathcal{Q}_k(1)$ es la configuración que tiene como único subcubo a todo $[0,1]^k$*

El Operad de Cubos Pequeños es definido de manera similar al Operad de los Discos Pequeños. De hecho, los axiomas de asociatividad, unidad y compatibilidad con la acción pueden ser probados de manera análoga.

3.3. Operad de Endomorfismos

En esta sección definiremos el Operad de Endomorfismos, y daremos un ejemplo de cada uno de los axiomas de asociatividad, unidad y compatibilidad. Sea $\mathbf{Vect}\,(k)$ categoría simétrica monoidal, donde consideraremos $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Denotaremos por $k^n \in \mathrm{Ob}\,(\mathbf{Vect}\,(k))$ al espacio vectorial de dimensión n sobre k. Denotaremos por $\mathrm{Func}(n)$=$\mathrm{Func}(k^n, k)$ al espacio vectorial de todas las transformaciones lineales de k^n a k. Vamos a estudiar las propiedades que tienen los espacios $\mathrm{Func}(n)$ cuando consideramos simultáneamente para $n \geq 0$:

Composición: Dada $f \in \mathrm{Func}(n)$ y transformaciones lineales $g_i \in \mathrm{Func}(j_i)$, $v_i \in k^{j_i}$, para $1 \leq i \leq n$, y $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} j_i = j$, definimos la ley de composición entre las aplicaciones así:

$$\gamma : \mathrm{Func}(n) \otimes \mathrm{Func}(j_i) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Func}(j_n) \to \mathrm{Func}(j)$$

$$\gamma(f; g_1, \cdots, g_n)(v_1, \cdots, v_n) \mapsto f(g_1(v_1), \cdots, g_n(v_n)).$$

De esa manera, $f(g_1, \cdots, g_n) \in \mathrm{Func}(j)$.

Acción de S_n sobre Func(n): Consideremos la acción de S_n sobre k^n, $n \geq 0$:

$$S_n \otimes k^n \to k^n$$
$$(\sigma, (v_1, \cdots, v_n)) \mapsto (v_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, v_{\sigma^{-1}(n)})$$

para $\sigma \in S_n, (v_1, \cdots, v_n) \in k^n$.

Identidad: Consideremos $1_k \in \mathrm{Func}(1)$ la aplicación identidad.

Veamos que los anteriores datos cumplen determinados axiomas de asociatividad, equivarianza e identidad:

Axioma de asociatividad: Dadas $f \in \mathrm{Func}(n), g_i \in \mathrm{Func}(j_i)$, para $1 \leq i \leq n$ y $\sum j_i = j$, $h_{sl_s} \in \mathrm{Func}(m_{sl_s})$, $1 \leq s \leq n$, $1 \leq l \leq j_s$ y $v_{sl_s} \in k^{m_{sl_s}}$. Para $\sum m_{sl_s} = m$, debemos ver que la siguiente ecuación se cumple:

$$f(g_1(h_{11}, \cdots, h_{1l_1}), \cdots, g_n(h_{n1}, \cdots, h_{nl_n})) = (f(g_1, \cdots, g_n))(h_{11}, \cdots, h_{nl_n}).$$

Para ver esto, veamos que:

$$\begin{aligned}
&f(g_1(h_{11}, \cdots, h_{1l_1}), \cdots, g_n(h_{n1}, \cdots, h_{nl_n}))(v_{11}, \cdots, v_{nl_n}) \\
=&f(g_1(h_{11}(v_{11}), \cdots, h_{1l_1}(v_{1l_1})), \cdots, g_n(h_{n1}(v_{n1}), \cdots, h_{nl_n}(v_{nl_n}))) \\
=&(f(g_1, \cdots, g_n))(h_{11}(v_{11}), \cdots, h_{1l_1}(v_{1l_1}), \cdots, h_{n1}(v_{n1}), \cdots, h_{nl_n}(v_{nl_n})) \\
=&(f(g_1, \cdots, g_n))(h_{11}, \cdots, h_{nl_n})(v_{11}, \cdots, v_{nl_n}).
\end{aligned}$$

Compatibilidad de la composición con la acción:

- Para $\sigma \in S_n$, $v \in k^n$, con $v = (v_1, \cdots, v_n)$, definamos

  $$(\sigma f)(v) = f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(n)}).$$

  Para $v_i \in k^{j_i}$, con $1 \leq i \leq n$, y $\sigma \in S_n$, denotaremos por $\sigma(j_1, \cdots, j_n) \in S_j$ la permutación de j letras que permuta n bloques de letras determinada por la partición dada de j cuando σ permuta n letras. Veamos que la composición es compatible con la acción anteriormente definida, es decir, que cumple la siguiente ecuación:

$$(\sigma \cdot f)(g_1, \ldots, g_n) = \sigma(j_1, \ldots, j_n) \cdot f(g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n)}),$$

En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\sigma \cdot f)(g_1(v_1), \ldots, g_n(v_n)) &= f(g_{\sigma(1)}(v_{\sigma(1)}), \ldots, g_{\sigma(n)}(v_{\sigma(n)})) \\
&= f((g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n)})(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) \\
&= \sigma(j_1, \ldots, j_n) \cdot f(g_{\sigma(1)}, \ldots, g_{\sigma(n)}).
\end{aligned}$$

- Dadas $\tau_s \in S_{j_s}$, para $1 \leq s \leq n$, denotaremos por $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n$ la concatenación de las τ_i's. Veamos que la siguiente ecuación se satisface:

$$f(\tau_1 \cdot g_1, \ldots, \tau_n \cdot g_n) = (\tau_1 \times \cdots \times \tau_n) \cdot f(g_1, \cdots, g_n).$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(\tau_1 \cdot g_1, \ldots, \tau_n \cdot g_n)(v_1, \ldots v_n) &= f(g_1(\tau_1 v_1), \ldots, g_n(\tau_n v_n)) \\
&= (\tau_1 \times \ldots \times \tau_n) \cdot f(g_1, \ldots, g_n)(v_1, \ldots v_n).
\end{aligned}$$

Axiomas de Identidad

- *Identidad a derecha.* Dada $f \in \mathrm{Func}(n)$, $1_k \in \mathrm{Func}(1)$, y $(v_1, \cdots, v_n) \in k^n$, se tiene que:

$$\gamma : \mathrm{Func}(n) \otimes 1_k^{\otimes n} \to \mathrm{Func}(n),$$

es decir, que la siguiente ecuación se cumple:

$$\gamma(f; 1_k, \cdots, 1_k) = f.$$

Esto se tiene ya que:

$$\begin{aligned}
\gamma(f; 1_k, \cdots, 1_k)(v_1, \cdots, v_n) &= f(1_k, \cdots, 1_k)(v_1, \cdots, v_n) \\
&= f(1_k(v_1), \cdots, 1_k(v_n)) \\
&= f(v_1, \cdots, v_n).
\end{aligned}$$

- *Identidad a izquierda.* Dada $f \in \text{Func}(n)$, $1_k \in \text{Func}(1)$, y $(v_1, \cdots, v_n) \in k^n$, se tiene que:

$$\gamma : 1_k \otimes \text{Func}(n) \to \text{Func}(n),$$

es decir, debemos ver que se cumple lo siguiente:

$$\gamma(1_k; f) = f.$$

En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned}\gamma(1_k; f)(v_1, \cdots, v_n) &= 1_k(f)(v_1, \cdots, v_n) \\ &= f(v_1, \cdots, v_n).\end{aligned}$$

Definición 27. *La familia $\{Func(n)\}_{n\geq 1}$, junto con la **Composición, Acción de** S_n**sobre Func**(n)**, Identidad, Axioma de Asociatividad** y **Compatibilidad de la composición con la acción**, es llamado el **Operad de Endomorfismos**.*

A continuación veremos un ejemplo concreto de la estructura de $\{\text{Func}(n)\}_{n\geq 1}$:

Ejemplo 28. *Sea $k = \mathbb{R}$, y Func(n) el Operad de Endomorfismos asociado a $\mathbb{R}$. Definimos las siguientes transformaciones lineales:*

$f, g_1, j_1, h_1 \in Func(2)$ y $g_2, h_2, 1_{\mathbb{R}} \in Func(1)$, tal que

$$\begin{aligned} f(s_1, s_2) &= 2s_1 + s_2 & g_1(t_1, t_2) &= 10t_1 - t_2 \\ g_2(w_1) &= 3w_1 & h_1(x_1, x_2) &= 5x_1 + 3x_2 \\ h_2(y_1) &= 5y_1 & j_1(z_1, z_2) &= \frac{z_1}{4} - \frac{z_2}{9} \end{aligned}$$

$$1_{\mathbb{R}}(x) \equiv 1(x) = x$$

Como se quiere probar igualdades entre funciones, ésto se debe hacer tomando un vector y aplicarle la función.

- ***Composición***

$$\begin{aligned}\gamma(f;g_1,g_2)(t_1,t_2,w_1) &= 2(g_1(t_1,t_2))+(g_2(w_1))\\ &= 2(10t_1-t_2)+3w_1\\ &= 20t_1-2t_2+3w_1.\end{aligned}$$

- ***Acción de*** S_n ***sobre Func***(n)

$$(\sigma f)(v)=f(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(n)}).$$

Sea $\sigma=\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)\in S_2,$ *entonces*

$$\begin{aligned}(\sigma f)(s_1,s_2) &= f(s_{\sigma(1)},s_{\sigma(2)})\\ &= f(s_2,s_1)\\ &= \ 2s_2+s_1.\end{aligned}$$

- ***Identidad***

  - *Izquierda*

$$\begin{aligned}\gamma(f;1,1)(s_1,s_2) &= 2(1(s_1))+(1(s_2))\\ &= 2s_1+s_2.\end{aligned}$$

  - *Derecha*

$$\begin{aligned}\gamma(1;f)(s_1,s_2) &= 1(f(s_1,s_2))\\ &= 2s_1+s_2.\end{aligned}$$

- ***Axioma de asociatividad*** *Tenemos que ver que*

$$\gamma(\gamma(f;g_1,g_2);h_1,h_2,j_1)=\gamma(f;\gamma(g_1;h_1,h_2),\gamma(g_2;j_1))$$

Haremos el lado izquierdo de la igualdad primero:

$\gamma(\gamma(f;g_1,g_2)(t_1,t_2,w_1);h_1,h_2,j_1)(x_1,x_2,y_1,z_1,z_2)$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma(20t_1 - 2t_2 + 3w_1; h_1, h_2, j_1)(x_1, x_2, y_1, z_1, z_2)\\
&= 20(h_1(x_1, x_2)) - 2(h_2(y_1)) + 3(j_1(z_1, z_2))\\
&= 20(5x_1 + 3x_2) - 2(5y_1) + 3(\tfrac{z_1}{4} - \tfrac{z_2}{9}).\\
&= 100x_1 + 60x_2 - 10y_1 + \tfrac{3}{4}z_1 - \tfrac{1}{3}z_2.
\end{aligned}
$$

Ahora el lado derecho:

$$
\begin{aligned}
&\gamma(f; \gamma(g_1; h_1, h_2)(x_1, x_2, y_1), \gamma(g_2; j_1)(z_1, z_2))(x_1, x_2, y_1, z_1, z_2)\\
&\qquad = \gamma(f; 10(h_1(x_1, x_2)) - (h_2(y_1)), 3(j_1(z_1, z_2)))(x_1, x_2, y_1, z_1, z_2)\\
&\qquad = \gamma(f; 10(5x_1 + 3x_2) - (5y_1), 3(\tfrac{z_1}{4} - \tfrac{z_2}{9}))(x_1, x_2, y_1, z_1, z_2)\\
&\qquad = 2(50x_1 + 30x_2) - 5y_1) + \tfrac{3}{4}z_1 - \tfrac{1}{3}z_2\\
&\qquad = 100x_1 + 60x_2 - 10y_1 + \tfrac{3}{4}z_1 - \tfrac{1}{3}z_2.
\end{aligned}
$$

- ***Compatibilidad de la composición con la acción***

  - *Debemos ver que*

$$\gamma((\sigma \cdot f); g_1, g_2) = \sigma(2,1) \cdot \gamma(f; g_1, g_2).$$

Haremos el lado izquierdo primero, sabiendo que
$(f\sigma)(s_1, s_2) = f(s_2, s_1) = 2s_2 + s_1$*:*

$$
\begin{aligned}
\gamma((\sigma \cdot f); g_1, g_2)(t_1, t_2, w_1) &= 2(3w_1) + (10t_1 - t_2)\\
&= 6w_1 + 10t_1 - t_2.
\end{aligned}
$$

Ahora el lado derecho:

$$
\begin{aligned}
\sigma(2,1) \cdot \gamma(f; g_1, g_2)(t_1, t_2, w_1) &= \gamma(f; g_2, g_1)(w_1, t_1, t_2)\\
&= 2(3w_1) + (10t_1 - t_2)\\
&= 6w_1 + 10t_1 - t_2.
\end{aligned}
$$

  - *Sean* $\tau_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in S_2$ *y* $\tau_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in S_1$*. Veamos que*

$$(\tau_1 \times \tau_2) \cdot \gamma(f; g_1, g_2) = \gamma(f; \tau_1 \cdot g_1, \tau_2 \cdot g_2),$$

sabiendo que $\tau_1 \times \tau_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \in S_3$. *Veamos primero el lado derecho:*

$$\begin{aligned}(\tau_1 \times \tau_2) \cdot \gamma(f; g_1, g_2)(t_1, t_2, w_1) &= (\tau_1 \times \tau_2) \cdot (20t_1 - 2t_2 + 3w_1) \\ &= 20t_2 - 2t_1 + 3w_1.\end{aligned}$$

Ahora el lado derecho:

$$\begin{aligned}\gamma(f; \tau_1 \cdot g_1, \tau_2 \cdot g_2)(t_1, t_2, w_1) &= \gamma(f; g_1, g_2)(t_2, t_1, w_1) \\ &= 20t_2 - 2t_1 + 3w_1.\end{aligned}$$

3.4. Definición Formal de Operad

A continuación presentaremos la definición formal de Operad, sobre una categoría simétrica monoidal:

Definición 29. *Un* ***Operad*** $\mathcal{P}$ *sobre una Categoría Simétrica Monoidal* $(\mathcal{C}, \odot)$ *es una familia de objetos* $\{\mathcal{P}(n)\}_{n \geq 1}$ *de* $\mathcal{C}$ *provistos de:*

1. *Una acción a izquierda de* S_n *sobre* $\mathcal{P}(n)$*, para todo* $n \geq 1$.

2. *Un elemento identidad* $1 \in \mathcal{P}(1)$,

3. *Para cada familia de números naturales* $n, m_1, \ldots, m_n$*, un morfismo en* $\mathcal{C}$

$$\gamma_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}(n) \odot \mathcal{P}(m_1) \odot \cdots \odot \mathcal{P}(m_n) \to \mathcal{P}(m_1 + \cdots + m_n)$$

Donde las aplicaciones cumplen las siguientes propiedades de asociatividad, de identidad, y compatibilidad de $\gamma_{\mathcal{P}}$ *con la acción de* S_n.

[*i*] ***Asociatividad de*** γ. *Dados números naturales* $n, m_1, \cdots, m_n, r_1^1, \cdots, r_{m_1}^n, \cdots, r_{m_n}^n$,

el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(n) \odot \bigodot_{j=1}^{n} \mathcal{P}(m_j) \odot \bigodot_{k=1}^{n} \bigodot_{s=1}^{m_k} \mathcal{P}(r_s^k) \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{P}} \odot id"] \arrow[dd, "id \odot \tau"'] & \mathcal{P}(m) \odot \bigodot_{k=1}^{n} \bigodot_{s=1}^{m_k} \mathcal{P}(r_s^k) \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{P}}"'] \\
 & \mathcal{P}(r) \\
\mathcal{P}(n) \odot \bigodot_{k=1}^{n} (\mathcal{P}(m_k) \odot \bigodot_{s=1}^{m_k} \mathcal{P}(r_s^k)) \arrow[r, "id \odot \gamma_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{P}(n) \odot \bigodot_{k=1}^{n} \mathcal{P}(r^k) \arrow[u, "\gamma_{\mathcal{P}}"]
\end{tikzcd}
$$

donde

- $\tau((f_1 \odot \cdots \odot f_n) \odot (g_1^1 \cdots \odot g_{m_n}^n)) := (f_1 \odot g_1^1 \odot \cdots \odot g_{m_1}^1) \odot \cdots \odot (f_n \odot g_1^n \odot \cdots \odot g_{m_n}^n)$,
- $m := \sum_{i=1}^{n} m_i$,
- $r^k := \sum_{i=1}^{m_k} r_i^k$,
- $r := \sum_{k=1}^{n} r^k$.

[*ii*] ***Identidad***. *Dados* $d \in \mathcal{P}(j)$, $c \in \mathcal{P}(k)$, *se tiene que:*

- $\gamma(1, d) = d$,
- $\gamma(c, 1^k) = c$.

[*iii*] ***Compatibilidad de*** $\gamma_{\mathcal{P}}$ ***con la acción sobre*** S_n. *Sean* $f \in \mathcal{P}(n), g_1 \in \mathcal{P}(m_1), \cdots,$ $g_n \in \mathcal{P}(m_n)$.

- *Para toda permutación* $\sigma \in S_n$, *se tiene que*

  $$\gamma_{\mathcal{P}}((\sigma \cdot f) \odot g_1 \odot \cdots \odot g_n) = \sigma(m_1, \cdots, m_n) \cdot \gamma_{\mathcal{P}}(f \odot g_{\sigma(1)} \odot \cdots \odot g_{\sigma(n)}),$$

  donde $\sigma(m_1, \cdots, m_n)(i) := m_1 + \cdots + m_{k-1} + l$, *para* $i = m_{\sigma(1)} + \cdots + m_{\sigma(k-1)} + l$, *con* $1 \leq l \leq m_{\sigma(k)}$.

- *Dadas permutaciones* $\tau_i \in S_{m_i}$, *para* $1 \leq i \leq n$, *se tiene que*

  $$(\tau_1 \times \cdots \times \tau_n) \cdot \gamma_{\mathcal{P}}(f \odot g_1 \odot \cdots \odot g_n) = \gamma_{\mathcal{P}}(f \odot \tau_1 \cdot g_1 \odot \cdots \odot \tau_n \cdot g_n),$$

  donde $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n \in S_{m_1+\cdots+m_n}$ *es la concatenación de las* τ_i*'s.*

Capítulo 4

Álgebras sobre Operads

En este capítulo presentaremos la definición de álgebra sobre un Operad, motivada por el Operad de Endomorfismos. Daremos la definición formal y por último veremos cómo modelar estructuras conocidas a través de las álgebras sobre Operads, como espacios de lazos, álgebras asociativas y conmutativas [29].

De la misma forma que los axiomas de Operad están modelados sobre composiciones en un espacio vectorial, la noción de álgebra sobre Operad es modelada por la acción de endomorfismos sobre el espacio vectorial.

Tomemos Func(n)=Func(V^n, V). Existen morfismos naturales

$$\theta = \theta_n : \mathrm{Func}(n) \otimes V^{\otimes n} \to V.$$

Estos morfismos satisfacen propiedades de asociatividad, unidad, y de equivarianza, ejemplificadas a continuación:

Axioma de Asociatividad: La conmutatividad del siguiente diagrama se tiene gracias a que se evalúan las funciones de cada $Func(i)$ en su correspondiente V^i de dos formas distintas, pero naturalmente equivalentes.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Func}(2) \otimes \mathrm{Func}(4) \otimes \mathrm{Func}(3) \otimes V^{\otimes 7} \arrow[r, "\gamma \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dd, "\mathrm{shuffle}"'] & \mathrm{Func}(7) \otimes V^{\otimes 7} \arrow[d, "\theta"'] \\
 & V \\
\mathrm{Func}(2) \otimes (\mathrm{Func}(4) \otimes V^{\otimes 4}) \otimes (\mathrm{Func}(3) \otimes V^{\otimes 3}) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \theta \otimes \theta"'] & \mathrm{Func}(2) \otimes V \otimes V \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}
$$

Axioma de Unidad: Por un lado, se tiene el isomorfismo de $k \otimes V$ en V definido como $a \otimes v \mapsto av$. Además η está definido como $\eta(1) := 1_k$, donde $1 \in k$ es la identidad en k y $1_k \in Func(1)$ es la aplicación identidad, y por lo tanto, $\eta(a) = a1_k$. Así, como $a1_k(v) = av$, se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
k \otimes V \arrow[r] \arrow[d, "\eta \otimes \mathrm{id}"'] & V \\
\mathrm{Func}(1) \otimes V \arrow[ur, "\theta"] &
\end{tikzcd}
$$

Axioma de Equivarianza: Se tiene que es equivalente evaluar con θ a permutar las variables de $f \in Func(3)$ y hacer la acción inversa con sus argumentos. Por lo tanto, se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Func}(3) \otimes V^{\otimes 3} \arrow[rr, "\sigma \otimes \sigma^{-1}"] \arrow[dr, "\theta"'] & & \mathrm{Func}(3) \otimes V^{\otimes 3} \arrow[dl, "\theta"] \\
 & V &
\end{tikzcd}
$$

La Definición 30 es tomada de [29].

Definición 30. *Sea $\mathcal{P}$ un Operad. Una $\mathcal{P}-$**álgebra** A es un espacio vectorial junto con morfismos*

$$\theta_n : \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \to A,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, que satisfacen:

***Axioma de Asociatividad**:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(i_n) \otimes A^{\otimes i} \arrow[r, "\gamma \otimes id"] \arrow[dd, "shuffle"'] & \mathcal{P}(i) \otimes A^{\otimes i} \arrow[d, "\theta"'] \\
 & V \\
\mathcal{P}(n) \otimes (\mathcal{P}(i_1) \otimes A^{\otimes i_1}) \otimes \cdots \otimes (\mathcal{P}(i_n) \otimes A^{\otimes i_n}) \arrow[r, "id \otimes \theta_{i_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{i_n}"'] & \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n}, \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

donde $i = \sum_{1}^{n} i_k$.

***Axioma de Unidad**:*

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A \arrow[r] \arrow[d, "\eta \otimes id"'] & A \\
\mathcal{P}(1) \otimes A \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

***Axioma de Equivarianza**:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \arrow[rr, "\sigma \otimes \sigma^{-1}"] \arrow[dr, "\theta"'] & & \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \arrow[dl, "\theta"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

El Ejemplo 31 corresponde al espacio de lazos visto como un álgebra sobre el Operad de Cubos Pequeños. J.P. May trabajó en la geometría en los espacios de lazos iterados, viendo este objeto como un álgebra bajo el Operad de Cubos Pequeños [24]. Cabe resaltar que éste no es el objeto de estudio de este trabajo, y se muestra sólo como ejemplo de Operad topológico. La topología que tiene cada espacio de lazos es la topología compacto abierta [7].

Ejemplo 31. *Dado X espacio topológico y $x_0 \in X$ un punto, consideramos el espacio de lazos*

$$\Omega(X, x_0) := \{\gamma \ : \ [0,1] \to X | \ \gamma \textit{ es continua}, \ \gamma(0) = x_0 = \gamma(1)\},$$

con la topología compacto abierta. Si X es conexa por arcos, $\Omega(X, x_0)$ no depende del punto x_0 elegido. Dado $n \geq 1$, definimos la función continua

$$\rho_n : \mathcal{Q}_1(n) \times \Omega(X, x_0)^n \to \Omega(X, x_0),$$

$$\rho((C_1, \dots, C_n), \gamma_1, \dots, \gamma_n)(t) := \begin{cases} x_0, & \textit{si } t \notin \bigcup_{i=1}^{n} C_i \\ \gamma_i\left(\frac{t-t_0^i}{t_1^i - t_0^i}\right), & \textit{si } t \in C_i, \end{cases}$$

donde $\mathcal{Q}_1$ es el Operad de Cubos Pequeños definido en la Sección 3.2 y C_i es el intervalo $[t_0^i, t_1^i]$, para $1 \leq i \leq n$. Es fácil ver que ρ_n está bien definida y que es continua. Los morfismos ρ_n definen una estructura de $\mathcal{Q}_1-$álgebra sobre $\Omega(X, x_0)$.

El Ejemplo 33 de álgebra sobre Operad es puramente algebraico. Para ello necesitamos la definición de álgebra de un grupo, obtenida de [26].

Definición 32. *Dado $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ un grupo finito y k un cuerpo, definimos el álgebra del grupo G como*

$$k[G] = \{a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n | \ a_i \in k \textit{ para todo } i\}.$$

La suma de dos elementos de $k[G]$ está dada de la forma

$$(a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n) + (b_1 g_1 + \cdots + b_n g_n) = (a_1 + b_1) g_1 + \cdots + (a_n + b_n) g_n.$$

La multiplicación es de la forma

$$(a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n)(b_1 g_1 + \cdots + b_n g_n) = c_1 g_1 + \cdots + c_n g_n,$$

donde cada $c_i \in k$ para todo i. La identidad aditiva de $k[G]$ es $0g_1 + \cdots + 0g_n$, y la identidad multiplicativa es $0g_1 + \cdots + g_i + \cdots + 0g_n$, donde g_i es la identidad del grupo G.

Ejemplo 33. *Consideremos $Ass(n) := k[S_n]$ como un $k[S_n]-$módulo, con $|S_n| = s$, donde $k[S_n]$ es el álgebra del grupo S_n. La familia $\{Ass(n)\}_{n\geq 1}$ es un Operad con las siguientes propiedades:*

1. *Acción sobre S_n:*

   Dados $\sigma, \delta_i \in S_n$,

$$\sigma \cdot (a_1\delta_1 + \cdots + a_s\delta_s) = a_1\sigma\delta_1 + \cdots + a_s\sigma\delta_s$$

2. *Identidad:*

   $Ass(1) = k[S_1] = k$, entonces $1 \in k$ es la identidad.

3. *Composición:*

   Sean $\lambda \in Ass(n)$ y $\delta_i \in Ass(m_i)$ permutaciones, con $1 \leq i \leq n$. Definimos la composición así:

$$\gamma_{Ass}(a\lambda \otimes b_1\delta_1 \otimes \cdots \otimes b_n\delta_n) := ab_1 \cdot \cdots \cdot b_n\lambda(m_1, \ldots, m_n) \cdot (\delta_1 \times \cdots \times \delta_n),$$

   donde $\lambda(m_1, \ldots, m_n)$ es la permutación definida en el axioma de compatilidad de la composición con la acción en la Definición 29, y $\delta_1 \times \cdots \times \delta_n$ es la concatenación de las δ_i's.

Luego, un $Ass-$álgebra, en particular, cuenta con morfismos

$$\theta_n : k[S_n] \otimes A^{\otimes n} \to A.$$

Sea $e_n \in S_n$ la permutación unidad. Se define una multiplicación en A como

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n := \theta(e_n \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n).$$

En particular, se tiene que $ab = \theta(e_2 \otimes a \otimes b)$.

La condición de asociatividad de A, para todos $a, b, c \in A$, $a(bc) = (ab)c$, se obtiene considerando el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Ass(2) \otimes Ass(2) \otimes Ass(1) \otimes A^{\otimes 3} \arrow[r, "\gamma \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dd, "\text{shuffle}"'] & Ass(3) \otimes A^{\otimes 3} \arrow[d, "\theta"'] \\
 & A \\
Ass(2) \otimes (Ass(2) \otimes A^{\otimes 2}) \otimes (Ass(1) \otimes A) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \theta \otimes \theta"] & Ass(2) \otimes A \otimes A \arrow[u, "\theta"]
\end{tikzcd}$$

Hacia la izquierda, se tiene que

$$e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 \otimes a \otimes b \otimes c \mapsto e_3 \otimes a \otimes b \otimes c \mapsto abc.$$

Hacia abajo, se tiene que

$$e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 \otimes a \otimes b \otimes c \mapsto e_2 \otimes (e_2 \otimes a \otimes b) \otimes (e_1 \otimes c) \mapsto e_2 \otimes ab \otimes c \mapsto (ab)c.$$

Por la conmutatividad del diagrama, se tiene que $abc = (ab)c$. Si intercambiamos $Ass(2)$ y $Ass(1)$, obtendremos de manera similar que $abc = a(bc)$, y por lo tanto $(ab)c = a(bc)$. Esto prueba que la noción de $Ass-$álgebra es equivalente a aquella de álgebra asociativa, ya que si quisiéramos obtener una $Ass-$álgebra a partir de un álgebra asociativa simplemente podemos definir los morfismos θ_n como la multiplicación usual de n argumentos.

Para modelar las álgebras asociativas unitarias, es necesario considerar $Ass(0) := k$, y $A^{\otimes 0} = k$. Así, tendremos un morfismo $\theta = \theta_0 : k \to A$, que produce un elemento distinguido $1_A \in A$. Para ver que este elemento es de hecho el elemento identidad en el álgebra, consideremeos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
Ass(2) \otimes Ass(0) \otimes Ass(1) \otimes A \arrow[r, "\gamma \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dd, "\text{shuffle}"'] & Ass(1) \otimes A \arrow[d, "\theta"'] \\
 & A \\
Ass(2) \otimes (Ass(0) \otimes A^{\otimes 0}) \otimes (Ass(1) \otimes A) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \theta \otimes \theta"] & Ass(2) \otimes A \otimes A \arrow[u, "\theta"]
\end{tikzcd}
$$

Hacia la derecha, se tiene que

$$e_2 \otimes e_0 \otimes e_1 \otimes a \mapsto e_1 \otimes a \mapsto a,$$

Donde e_1 es la unidad del Operad. Hacia abajo, se tiene que

$$e_2 \otimes e_0 \otimes e_1 \otimes a \mapsto e_2 \otimes (e_0 \otimes 1_k) \otimes (e_1 \otimes a) \mapsto e_2 \otimes 1_A \otimes a \otimes 1_A a.$$

Así, $a = 1_A a$. Si cambiamos $Ass(0)$ y $Ass(1)$, tendremos que la multiplicación a derecha por 1_A es de hecho el operador identidad.

Para el Ejemplo 34, utilizaremos la noción de un cuerpo k como la representación trivial del grupo S_n, [26].

Ejemplo 34. *El Operad Com es dado por $Com(n) := k$ como la representación trivial de grupo S_n, es decir, cada permutación de S_n actúa de manera trivial (como la identidad) sobre k. (S_n-módulo trivial).*

1. *Acción sobre S_n:*

   La acción sobre S_n es la trivial, es decir, toda permutación $\sigma \in S_n$ actúa sobre $Com(n)$ como la identidad.

2. *Identidad:*

   Como $Com(1) = k$, tomaremos como la identidad $1 \in k$.

3. *Composición:*

   Para cada $Com(n) = k$, tenemos $1_n \in Com(n)$. Definimos la composición así:

$$\gamma(1_n \otimes 1_{m_1} \otimes \ldots \otimes 1_{m_n}) = 1_{m_1+\ldots+m_n},$$

   y en general,

$$\gamma(a_n \otimes b_{m_1} \otimes \ldots \otimes b_{m_n}) = a_n \cdot b_{m_1} \cdot \ldots \cdot b_{m_n},$$

   con $a_n \cdot b_{m_1} \cdot \ldots \cdot b_{m_n} \in k$ pensado como un S_M-módulo, donde $M = \sum m_i$.

La asociatividad y la unidad se prueba de manera análoga a como se hizo para Ass, porque únicamente utilizamos los elementos identidad $e_n \in k[S_n] = Ass(n)$, que los tenemos de la forma $1_n \in Com(n)$.

Para ver la conmutatividad, consideremos el siguiente diagrama, con σ la transposición en S_2:

$$\begin{tikzcd}
Com(2) \otimes A^{\otimes 2} \arrow[rr, "\sigma \otimes \sigma^{-1}"] \arrow[dr, "\theta"'] & & Com(2) \otimes A^{\otimes 2} \arrow[dl, "\theta"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Hacia abajo, se tiene que

$$1 \otimes a \otimes b \mapsto ab.$$

Hacia la derecha, se tiene que

$$1 \otimes a \otimes b \mapsto 1 \otimes b \otimes a \mapsto ba,$$

Luego $ab = ba$, y finalmente se tiene que la noción de $Com-$álgebra es equivalente a la de álgebra conmutativa y asociativa.

Bibliografía

[1] J. Bénabou. Catégories avec multiplication. *CR Acad. Sci. Paris*, 256(1.963):1887–1890, 1963.

[2] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures*, volume 67. Cambridge University Press, 1997.

[3] P. Bernays and A. Fraenkel. *Axiomatic set theory*. North-Holland, 1958.

[4] J. M. Boardman. *Homotopy invariant algebraic structures: a conference in honor of J. Michael Boardman: AMS Special Session on Homotopy Theory, January 7-10, 1998, Baltimore, MD*, volume 239. American Mathematical Soc., 1999.

[5] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological algebra*. Princeton University Press, 1999.

[6] E. Castillo. Teorías homológicas de campos cuánticos. Master's thesis, Teorías homológicas de campos cuánticos, Universidad Central de Venezuela, 2008.

[7] J. Dugundji. Topology, 1966. *Ally and Bacon, Boston*.

[8] D.S. Dummit and R. Foote. *Abstract Algebra*. 2004.

[9] S. Eilenberg and S. Mac Lane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58(2):231–294, 1945.

[10] D.B.A. Epstein. Steenrod operations in homological algebra. *Inventiones mathematicae*, 1(2):152–208, 1966.

[11] M. Gelfand, I.M. Kapranov and A.V. Zelevinsky. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Birkhauser, 2008.

[12] E. Getzler and M. M. Kapranov. Modular operads. *Compositio Math*, 110:65–126, 1994.

[13] V. Ginzburg and M. Kapranov. Koszul duality for Operads. *ArXiv e-prints*, September 2007.

[14] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algebre homologique, thoku math. j., 9 (1957), 119-221. *Mathematical Reviews (MathSciNet): MR102537 Zentralblatt MATH*, 118.

[15] I. Kriz and J.P. May. *Operads, algebras, modules and motives*. Société mathématique de France, 1995.

[16] W. Lawvere. Functorial semantics of algebraic theories. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 50(5):869, 1963.

[17] M. Lazard. Lois de groupes et analyseurs. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 72, pages 299–400. Société mathématique de France, 1955.

[18] J.L. Loday and B. Vallette. *Algebraic operads*. Springer, 2012.

[19] S. Mac Lane. *Categorical algebra*. American Mathematical Society, 1963.

[20] S. Mac Lane. Natural associativity and commutativity. *Rice Univ. Studies*, 49(4):28–46, 1963.

[21] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer verlag, 1998.

[22] M. Markl, S. Shnider, and J. Stasheff. *Operads in algebra, topology and physics*, volume 96. Amer Mathematical Society, 2007.

[23] J.P. Marquis. Category theory. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2013 edition, 2013.

[24] J.P. May. *The geometry of iterated loop spaces*. Springer-Verlag, 1972.

[25] M. Ronco. Introducción a la teoría de operads. http://www.famaf.unc.edu.ar/publicaciones.

[26] B. Sagan. *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, volume 203. Springer, 2001.

[27] J. Stasheff. Homotopy associativity of h-spaces. i. *Transactions of the American Mathematical Society*, 108(2):275–292, 1963.

[28] J. Stasheff. From operads to 'physically' inspired theories. *Contemporary Mathematics*, 202:53–82, 1997.

[29] J.E. Vatne. Introduction to operads. folk.uib.no/nmajv/Operader.ps.