



**ESTRATEGIA PARA LA NEGOCIACIÓN DE TÍTULOS TES EN EL MERCADO DE
DEUDA PÚBLICA COLOMBIANO UTILIZANDO PRONÓSTICOS FUERA DE
MUESTRA DE LA INFLACIÓN NACIONAL: UNA APROXIMACIÓN NO LINEAL**

Trabajo de Grado Presentado por:
Juan Enrique Barco Echeverri

Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas
Maestría en Economía

Bajo la dirección de:
Luis Fernando Melo Velandia
Econometrista Principal del Banco de la República de Colombia

Bogotá, Octubre de 2014.

1	<u>INTRODUCCIÓN.</u>	3
2	<u>DINÁMICA DE LA INFLACIÓN EN COLOMBIA.</u>	4
3	<u>ESTRATEGIA DE NEGOCIACIÓN Y DEFINICIÓN DEL PORTAFOLIO.</u>	7
3.1	LA CURVA DE RENDIMIENTOS.	7
3.2	¿CÓMO SE RELACIONA LA CURVA DE RENDIMIENTOS Y LA INFLACIÓN?	8
3.3	ESTRATEGIA DE NEGOCIACIÓN.	9
4	<u>METODOLOGÍA ECONÓMICA.</u>	12
4.1	MODELOS DE TRANSICIÓN SUAVE.	13
4.2	PROCESO DE ESTIMACIÓN.	16
5	<u>RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN.</u>	28
5.1	TRANSICIÓN DEL MODELO NO LINEAL.	31
5.2	BENCHMARCK.	33
6	<u>CONCLUSIONES.</u>	34
	<u>REFERENCIAS.</u>	35

1 Introducción.

El Banco de la República de Colombia tiene por tarea constitucional el control de la inflación a través del esquema conocido como inflación objetivo. Los encargados de la política monetaria y la academia han invertido gran cantidad de recursos para poder representar de la mejor forma posible el proceso generador de la inflación e identificar qué metodología puede llegar a ser la más adecuada para generar información útil sobre el comportamiento futuro de la misma y así anticipar de forma más eficiente posibles fluctuaciones en los precios que requieran ajustes en las herramientas de política.

Por su parte, los agentes del mercado financiero se encuentran en la búsqueda de nuevas formas de obtener información adelantada que permita tomar decisiones de inversión con un menor grado de incertidumbre. En el caso del mercado de deuda pública, las tasas de interés negociadas en títulos TES tasa fija, denominados en pesos y unidades de valor real (UVR)¹, reflejan las expectativas de inflación de los operadores. Por tal razón, los valores inesperados de inflación producen correcciones en la valoración de algunos de los plazos de la curva de rendimientos, haciendo relevante para los fondos de pensiones, bancos, comisionistas de bolsa y demás entes del mercado financiero contar con métodos para la proyección de la variación del índice de precios que permitan anticipar estos ajustes en los precios.

Aparte del componente especulativo que se puede derivar del pronóstico de inflación, se debe considerar que información adelantada del índice de precios al consumidor puede tener implicaciones en la administración de riesgo de las entidades financieras. Estas deben clasificar en tres grupos sus inversiones en el mercado de deuda pública:

1. Portafolio de negociables: compuesto por títulos cuya utilidad se espera obtener en el corto plazo por fluctuaciones específicas del mercado.
2. Portafolio hasta el vencimiento: los títulos que se clasifiquen en este rubro deberán ser retenidos por la entidad hasta la fecha en la que venzan, sin posibilidad de negociación anticipada en el mercado secundario.
3. Portafolio de disponibles para la venta: se incluyen aquellos bonos que se mantendrán por un periodo mínimo de seis meses. Luego de este periodo, la entidad puede seleccionar si se mantendrá en este portafolio o si prefiere llevarlo a otro (negociables y hasta el vencimiento).

¹ UVR ó unidad de valor real es una medida de valor que refleja el poder adquisitivo con base en la variación del IPC. Una unidad UVR tiene una representación en pesos, su cálculo y publicación está a cargo del Banco de la República diariamente.

Si se tiene en cuenta, que las dos últimas cuentas se encuentran expuestas mes a mes a las fluctuaciones del mercado, se podría establecer en el portafolio de negociables estrategias de cobertura que anticipen sorpresas inflacionarias y mitiguen la desvalorización de los títulos que se deben mantener, por un lapso determinado por cumplimiento regulatorio (específicamente en los libros de disponibles para la venta y hasta el vencimiento).

En vista de la importancia que tiene comprender el comportamiento de la inflación, tanto para el sector privado como para el sector público, se ha invertido una gran cantidad de recursos en diversas metodologías de estimación y pronóstico. Rodríguez & Siado (2003) presentan estimaciones Kernel para la media histórica y especificaciones ARIMA; González, Grajales & Melo (2007) utiliza modelos VAR iterativos, VAR directos y ARX iterativos. Por su parte, González, Jalil & Romero (2010) utilizan expectativas inflacionarias extraídas a través de la encuesta mensual realizada por el Emisor y aquellas implícitas en el mercado de deuda pública para proyectar realizaciones futuras de la variable de interés. Adicionalmente, algunos autores han propuesto que la inflación es mejor representada por un proceso no lineal, por lo que se han evaluado modelos de transición suave, modelos de cambio de régimen (también conocidos como *regimen switching models*) y redes neuronales artificiales.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, se plantea como objetivo de este trabajo de grado, el desarrollo de un pronóstico no lineal de la inflación colombiana, con el fin de anticipar las sorpresas inflacionarias para la negociación de títulos TES en el mercado de deuda Nacional. La evaluación del modelo, aun cuando contará con medidas tradicionales del error de pronóstico, se centrará en el desempeño observado en un portafolio construido con papeles de deuda (tanto en tasa fija, como asociados a UVR). Se estimará un modelo lineal y otro no lineal con el fin de comparar el desempeño a través de las especificaciones y determinar si se genera algún valor agregado al incluir el factor no lineal.

Este trabajo esta ordenado en 6 secciones. La primera consiste en esta introducción. En la segunda se discutirá cuál ha sido la dinámica de la inflación en el país y se intentará construir un argumento que sustenta la utilización de modelos de transición suave. En la tercera se definirá cómo se construirán los portafolios de inversión para cada uno de los modelos de inflación estimados. En la cuarta se realizará una explicación extensa de la metodología de estimación y los datos utilizados. La quinta sección está dedicada a mostrar los resultados encontrados, para finalmente concluir en la sexta.

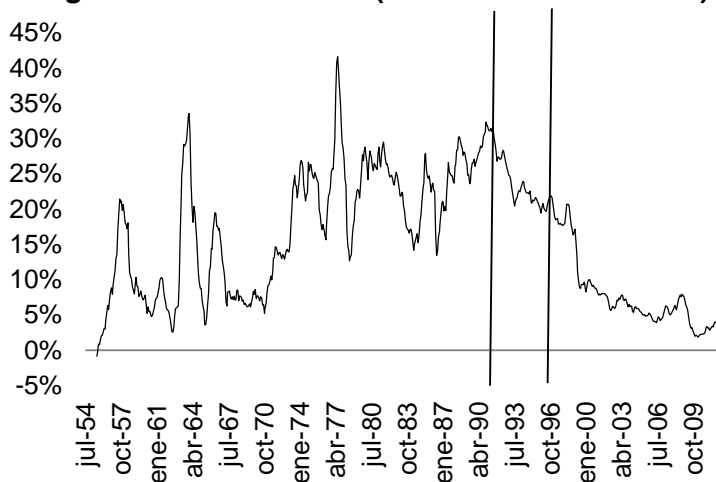
2 Dinámica de la inflación en Colombia.

Con la constitución de 1991 instaurada en Colombia se asignó la tarea específica de vigilar y controlar los precios de la economía al Banco de la República, al mismo tiempo que se declaraba su completa autonomía en las decisiones que tomara para

cumplir con su mandato. A partir de 1996, la Junta Directiva del Emisor decidió implementar el sistema de inflación objetivo como el modelo a seguir y a través del cual lograría reducir y estabilizar el crecimiento de los precios. Este modelo de banca central fue ampliamente aceptado alrededor del mundo en países como Inglaterra, Brasil, Suecia, Canadá, España, entre otros y consiste en llevar la inflación al nivel que permite alcanzar el crecimiento potencial de la economía y la tasa natural de desempleo. La meta debe ser siempre pública y el Emisor debe asegurarse de mantener su credibilidad, incentivando a los agentes de la economía a que anclen sus expectativas inflacionarias en la meta establecida.

En la Figura 1 se observa la inflación anual desde julio de 1954 hasta julio de 2013 y en esta se incluyeron dos marcadores como referencias visuales de la fecha en la que entró en vigencia la nueva constitución y en la que se instauró la política de inflación objetivo. Se hace evidente que en los años en los que la inflación no se consideraba como una variable relevante, su comportamiento era volátil, alcanzando un nivel mínimo de -0.85% (Julio de 1955) y un máximo de 41.6% (junio de 1977). Desde 1991 la inflación mostró una reducción significativa en su volatilidad y una clara tendencia a la baja. El comportamiento se afianza con la introducción de la tasa de intervención (Repo) en abril de 1995, principal herramienta de la política monetaria y que significó una completa reorganización del mercado interbancario de crédito y, posteriormente, el esquema de inflación objetivo.

Figura 1 Inflación anual (Julio 1954 – Julio 2013)

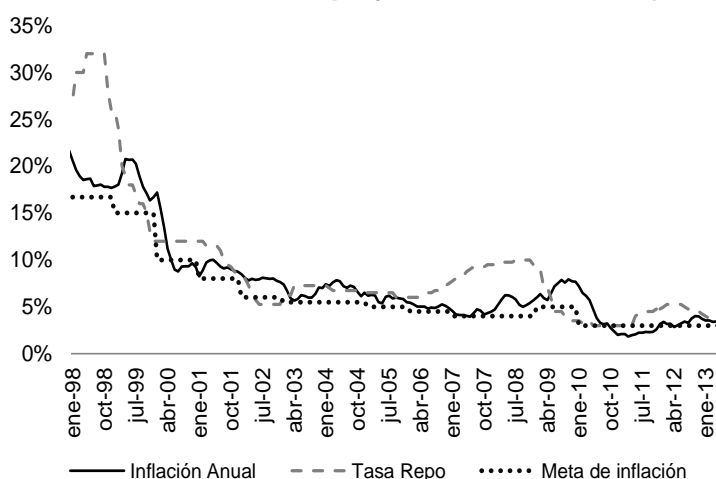


Fuente: DANE

La interacción entre la tasa Repo y la inflación se ilustra en la Figura 2 donde se identifican momentos en los que la política monetaria se anticipa a choques inflacionarios, buscando en todo momento cumplir con el valor central establecido como meta (que actualmente y desde enero de 2010 se ubica en 3,0%). Es importante considerar que la economía ha sufrido cambios estructurales a través del tiempo, lo que ha ocasionado que la meta de inflación haya sido modificada múltiples veces. Teniendo en cuenta que la serie de inflación objetivo no es encuentra disponible en las estadísticas

publicadas por el Emisor, esta debió ser construida a partir de la revisión histórica de los “Informes sobre Inflación” del Banco de la República, en donde se especifica en cada publicación cuál es la meta establecida, incluyendo sus rangos máximos y mínimos.

Figura 2 Inflación anual, tasa Repo y meta de inflación (Enero de 1998)



Fuente: DANE y Banco de la República

Al considerar que la inflación se ha encontrado sujeta a diferentes estructuras de política monetaria, como se mencionó anteriormente, la atención de la academia se centró a finales de los años 90 en algunos modelos no lineales que ofrecían una representación más fiel de la teoría económica frente a las herramientas econométricas tradicionales. La hipótesis principal que se planteó es que la inflación comenzó un proceso de ajuste desde que se instauró el modelo de inflación objetivo y comenzó a trasladarse desde un estado inicial de inflación alta y de gran volatilidad hacia otro de inflación baja y controlada.

En Colombia se han desarrollado una gran cantidad de trabajos que sugieren que el comportamiento observado de la inflación anual puede seguir un proceso no lineal, como los de Arango & González (1998), Melo & Jalil (1999), López, Misas & Querubín (2002), Melo & Núñez (2004) y Echavarría, López & Misas (2010). De forma más específica, Arango & González (1998) sugirieron que la variable en cuestión realiza una transición suave entre dos diferentes estados, los cuales son activados por los rezagos de la misma inflación. Por su parte, Melo & Jalil (1999) consideraron que choques a los agregados monetarios podrían generar respuestas asimétricas en la inflación, debido a la misma relación no lineal entre la variación del IPC y los agregados. Melo & Núñez (2004) y Echavarría, López & Misas (2010) utilizan modelos de cambio de régimen para capturar el proceso seguido por la inflación y López, Misas & Querubín (2002) proponen la utilización de redes neuronales artificiales para capturar de una mejor forma el proceso generador de la inflación colombiana.

Así las cosas, se decidió utilizar en este trabajo la estimación de modelos de transición suave (STAR)² para capturar el proceso de la inflación colombiana. Adicionalmente se incluyeron especificaciones lineales tradicionales, que serán utilizadas como referencias para evaluar el desempeño del modelo no lineal. El proceso de estimación seguido se explica detalladamente en la cuarta sección del documento.

3 Estrategia de negociación y definición del portafolio.

3.1 La curva de rendimientos.

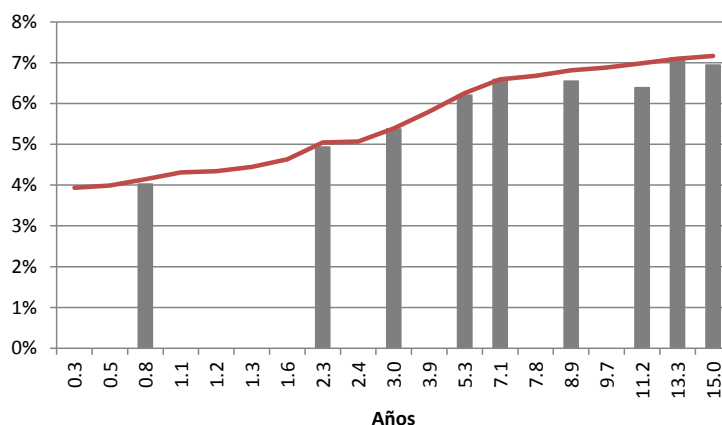
La emisión de bonos soberanos de tasa fija es uno de los principales métodos de financiación del Gobierno colombiano, el cual ofrece títulos en moneda extranjera (específicamente en dólares), moneda local (conocidos como TES tasa fija COP) y denominados en UVR (TES UVR), respaldados por él mismo. De los anteriores sólo se hará referencia de los TES tasa fija en pesos (TES TF COP) y TES UVR, ya que son aquellos que asocian su valor a la inflación colombiana.

Una de las premisas de cualquier Gobierno es la de contar con tasas de financiación a múltiples horizontes temporales, permitiendo amortizar proyectos de inversión de corto plazo con deuda de corto plazo y proyectos de largo plazo con títulos de deuda de largo plazo. A julio de 2013 el Estado contaba con 20 títulos de deuda vigentes, incluyendo TES TF COP y TES UVR, con fechas de vencimiento desde noviembre de 2013 hasta marzo de 2033. Una vez emitidos por el Gobierno, los papeles adquiridos por los bancos, comisionistas de bolsa y fondos de pensiones son negociados en el mercado secundario, por lo que diariamente las tasas de financiamiento cambian dependiendo de la demanda y oferta de los mismos. Aquellos TES a los que el mercado no les encuentra valor, son transados menos y llegan a ser reconocidos como ilíquidos.

En la Figura 3 se presenta la curva de rendimientos teórica (también conocida como curva cero cupón) para el 17 de julio de 2013, en donde es posible identificar cuál sería el costo de financiación del estado a diferentes plazos o en diferentes nodos de la curva. Las barras representan los títulos que efectivamente se operaron ese día y las tasas a las que cerraron la sesión de negociación. Para la estrategia de negociación sólo se utilizarán aquellos títulos negociados frecuentemente.

² STAR por sus siglas en inglés: Smooth Transition Autoregressive Models.

Figura 3 Curva de rendimientos (17 de julio de 2013)



Fuente: Construcción propia

3.2 ¿Cómo se relaciona la curva de rendimientos y la inflación?

Es de común entendimiento que las tasas de interés observadas a través de los diferentes nodos de la curva de rendimiento de los títulos del estado, incorporan las perspectivas de inflación de los agentes del mercado financiero. Por lo tanto, las sorpresas inflacionarias generan reajustes en las expectativas de precios y, por lo tanto, en las valoraciones de los bonos de deuda pública. La tasa de interés de los títulos tasa fija, al ser una tasa de interés nominal, se correlaciona de forma positiva con las sorpresas inflacionarias. En contraste, la relación entre los bonos asociados a UVR es inversa a los movimientos inesperados en las publicaciones del IPC.

La ecuación de Fisher ofrece una explicación a por qué la curva de rendimientos se puede asociar a las expectativas de inflación. Esta muestra que ajustes en las expectativas de inflación impacta la tasa de interés nominal $i_t = r_t + E_t\{\pi_{t+1}\}$ donde la tasa de interés nominal es representada por i_t , r_t es la tasa real y $E_t\{\pi_{t+1}\}$ representa las expectativas de los agentes del mercado en el momento t para $t + 1$. Arango & Flórez (2008) proponen un estudio para determinar si el tramo corto de la curva de rendimientos contiene información sobre las expectativas de inflación. En este parten de una transformación de la ecuación recién mencionada de Fisher que incluye la prima de riesgo inflacionaria. A través de esta especificación encuentran que, definiendo las expectativas de inflación como racionales, estas se encuentran altamente relacionadas con las tasas de interés de la curva de rendimientos. Mishkin (1990) encontró evidencia que sugería que en la curva de rendimiento de los Estados Unidos incorporaba las expectativas de inflación del mercado, también fundamentándose en la ecuación de Fisher recién mencionada y donde sugiere que los movimientos observados en las tasas de interés nominales son un reflejo del cambio en la senda de precios futura de los agentes del mercado.

Adicionalmente, Arango & Flórez (2008) hacen referencia a una no linealidad existente en el comportamiento de la inflación colombiana, la cual transita entre dos estados de la naturaleza. En el documento se menciona que si los agentes esperan que la inflación empiece en un futuro a migrar a su estado de niveles altos y de mayor volatilidad, la tasa de interés estará compuesta en una mayor proporción por las mismas expectativas inflacionarias.

Por último, Granados & Melo (2010) también fundamentan su análisis de compensación inflacionaria en cómo la curva cero cupón de TES cuenta con información sobre las expectativas de inflación. La diferencia entre la curva de rendimientos nominales (TES en pesos) y reales (TES denominados en UVR) refleja el valor de la inflación futura que debe alcanzarse para que los rendimientos de los dos tipos de bonos sean equivalentes. En el artículo se resalta que la diferencia entre los títulos nominales y reales no sólo incluye las expectativas de inflación, sino una prima de riesgo inherente los títulos.

3.3 Estrategia de negociación.

En este documento se define una sorpresa inflacionaria como la diferencia entre las expectativas del mercado y la inflación observada. Formalmente, una sorpresa inflacionaria se define como en la Ecuación (1):

$$S_t = \pi_t - E\{\pi_t|\Omega_{t-1}\} \quad (1)$$

donde π_t es el valor observado de la inflación anual³ para el periodo t y $E\{\pi_t|\Omega_{t-1}\}$ representa las expectativas del mercado para el mismo periodo construidas con el conjunto de información disponible hasta $t - 1$ (Ω_{t-1}). El objetivo de la modelación en este documento es el de estimar un valor de la inflación ($\hat{\pi}_t$) tal que la sorpresa inflacionaria estimada se acerque a la observada. En otras palabras se busca:

$$\min_{\hat{S}_t} |\hat{S}_t - S_t|$$

para $\hat{S}_t = \hat{\pi}_t - E\{\pi_t|\Omega_{t-1}\}$. Lo anterior es equivalente a $\min |\hat{\pi}_t - \pi_t|$.

Si lo anterior se cumple, es posible anticipar las sorpresas inflacionarias y tomar decisiones de inversión acordes al siguiente esquema de negociación de títulos⁴:

³ Se denominará a través de todo el documento como inflación la inflación anual, definida como: $\frac{\pi_t}{\pi_{t-12}} - 1$.

⁴ Para la construcción del portafolio se permitieron las ventas en corto de todos los papeles y no se contabilizaron costos transaccionales por las operaciones, factor que afecta negativamente el rendimiento del portafolio.

$$Si \begin{cases} |\hat{S}_t| > \tau \rightarrow \begin{cases} \hat{S}_t > \tau \rightarrow \text{Venta en corto TF y compra UVR} \\ \hat{S}_t < -\tau \rightarrow \text{Compra TF y venta en corto UVR} \end{cases} \\ |\hat{S}_t| < \tau \rightarrow \text{Se asume que no habrán sorpresas inflacionarias} \end{cases}$$

donde τ es un umbral de tolerancia, el cual sensibiliza si la sorpresa observada fue lo suficientemente significativa como para causar un ajuste en los precios de los títulos de deuda pública. Así las cosas, si el componente no anticipado de la inflación observada no supera en valor absoluto el umbral, se supondrá que no se dio una sorpresa inflacionaria, por lo que no se dará un cambio en la valoración de los TES a causa de la publicación de la inflación.

A modo de ejemplo, y con el fin de explicar con mayor atención la estrategia de negociación, suponga que las expectativas de inflación del mercado se encuentran por debajo del valor estimado por el modelo econométrico, de tal forma que $\hat{\pi}_t - E\{\pi_t|\Omega_{t-1}\} > \tau$. En este momento, el proceso de modelación activa una señal de venta en corto de los títulos TES TF y de compra de TES UVR, ya que se espera que la inflación que se publicará sea significativamente mayor a las expectativas del mercado. Lo anterior impulsaría una subida en las tasas de interés de negociación de los títulos de deuda asociados a tasa fija ($r_{TF,t+1} > r_{TF,t}$) y una reducción de los tipos de interés de los papeles UVR ($r_{UVR,t+1} < r_{UVR,t}$)⁵.

La venta en corto implica vender el título pidiéndolo prestado a un tercero, con el compromiso de devolverlo después de un cierto tiempo. En este ejercicio, se hacen ventas en corto por un día, lo que significa que se venderá el título a la tasa de cierre del día anterior a la publicación de la inflación a una tasa $r_{TF,t}$ para comprarlo luego de la publicación del dato a una tasa $r_{TF,t+1}$. Si efectivamente se da la sorpresa inflacionaria se habrá vendido el título a un precio mayor al que se compró, generando una utilidad representada por el diferencial de tasas ($r_{TF,t+1} - r_{TF,t} = U_t$, donde $U_t > 0$).

En el caso de los títulos UVR se espera que la sorpresa inflacionaria eleve la tasa de interés de negociación de los títulos, por lo que se deben comprar a una tasa $r_{UVR,t}$ el día antes de la publicación de la inflación para venderlo a $r_{UVR,t+1}$, una vez el DANE entregue la nueva cifra de inflación. Si la sorpresa se da, se recibirá una utilidad de ($r_{UVR,t} - r_{UVR,t+1} = U_t$, donde $U_t > 0$). Si las expectativas se encuentran sobre el valor estimado ($\hat{\pi}_t - E\{\pi_t|\Omega_{t-1}\} < \tau$) la estrategia se invertiría, vendiendo en corto títulos UVR y comprando TES TF.

⁵ Es de gran importancia recordar que en los títulos de deuda pública, las tasas se relacionan inversamente con los precios. Así que una reducción en la tasa de interés implica un incremento en el precio del activo.

Con el fin de facilitar la presentación de resultados del portafolio se asociará a los pronósticos calculados una medida de utilidad promedio diaria⁶, como se evidencia en la Ecuación (2).

$$U = \frac{\sum_{t=1}^T (\sum_{j=1}^J u_{j,t})}{T} \quad (2)$$

Para la implementación de esta estrategia de negociación, se debe considerar que la inflación se publica alrededor de las 4:00 p.m., hora en la que el mercado de deuda pública nacional ya se encuentra cerrado. Debido a esto, se supondrá que las posiciones del portafolio a simular se abrirán el mismo día de la publicación de la inflación a las tasas de cierre de cada título (si el día de la publicación es sábado o festivo, se abrirían la posición el día hábil inmediatamente anterior), para cerrarlas el primer día hábil siguiente a la publicación usando las tasas de apertura de los papeles.

El propósito de no mantener las posiciones abiertas por más de un día de negociación es evitar choques adicionales a la valoración de los títulos, los cuales podrían provenir de otros fundamentales o noticias ajenas a la cifra de inflación. Asociado a lo anterior, es importante entender que, aun cuando se pronostique acertadamente una sorpresa inflacionaria, la corrección en la curva de rendimientos puede responder a otros factores de mayor relevancia, generando una reacción exagerada de las utilidades o pérdidas en el portafolio para ese día.

En la Tabla 1 se presenta la lista con los títulos seleccionados para la construcción del portafolio de inversión, los cuales se caracterizan por encontrarse ubicados en los plazos cortos de la curva de rendimientos y por ser los más negociados. Sólo se tomaron los títulos más cercanos al vencimiento ya que, en la actualidad, el Banco Central ha logrado que las expectativas de inflación se anclen en el largo plazo a la meta de política establecida, lo que implica que en el momento que se da una sorpresa inflacionaria los ajustes en la curva de rendimientos se dan principalmente en los nodos del corto plazo.

⁶ La utilidad promedio diaria del portafolio será utilizada como uno de los argumentos de evaluación de los modelos estimados.

Tabla 1 Descripción de títulos TES

Denominado	Fecha de vencimiento
Pesos	14-mayo-2014
Pesos	12-septiembre-2014
Pesos	12-noviembre-2014
Pesos	28-octubre-2014
Pesos	11-noviembre-2015
Pesos	15-junio-2016
UVR	25-febrero-2015

Fuente: Construcción propia

Así las cosas, un pronóstico de sorpresas inflacionarias (\hat{S}_t) obtendrá utilidades para el j –ésimo título de⁷:

$$u_{j,t} = \begin{cases} \hat{S}_t > \tau \rightarrow & \begin{matrix} \text{TES TF} & \text{TES UVR} \\ r_{j,t+1} - r_{j,t} & r_{j,t} - r_{j,t+1} \end{matrix} \\ \hat{S}_t < -\tau \rightarrow & \begin{matrix} r_{j,t} - r_{j,t+1} & r_{j,t+1} - r_{j,t} \end{matrix} \\ |\hat{S}_t| < \tau \rightarrow & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{cases}$$

En este punto se hace relevante mencionar la hipótesis de mercados eficientes. Esta, en su versión débil y semi fuerte, indica que no es posible generar utilidades sostenidas a través del tiempo al invertir en el mercado financiero, ya que los agentes cuentan con expectativas racionales y los ajustes a nueva información publicada se hacen de forma inmediata. La estrategia de negociación propuesta no asume que la hipótesis de mercados eficientes se cumpla o se viole en el mercado de deuda pública nacional, pero si es posible conseguir utilidades se podría tomar el resultado como una evidencia en contra de la hipótesis específicamente en el mercado de deuda pública colombiano⁸.

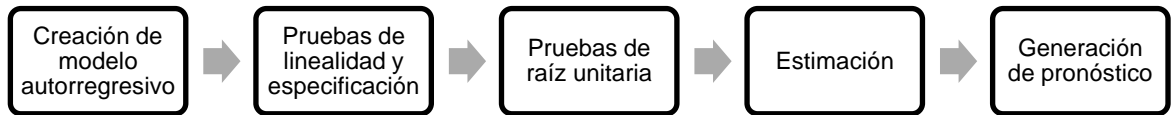
4 Metodología econométrica.

En esta sección se explica de forma detallada en qué consiste un modelo de transición suave y el proceso seguido en la estimación del mismo, incluyendo la prueba de raíz unitaria construida, las pruebas de linealidad y especificación, al igual que el procedimiento utilizado para simplificar el problema de optimización y otro para

⁷ La utilidad de la operación se evaluará a través del diferencial de tasa entre la compra y venta del título.

⁸ Para más información sobre qué es la hipótesis de mercados eficientes y las críticas que se han levantado en su contra favor referirse al artículo de Malkiel (2003).

establecer los valores iniciales usados en el proceso de búsqueda numérico. Es importante entender que actualmente no existe un procedimiento establecido por la literatura para llevar a cabo la estimación de un modelo STAR. El proceso de estimación que se seguirá se resume en el siguiente diagrama:



Una vez establecido este procedimiento, se presentarán en la sección número cinco las especificaciones estimadas, las medidas de error incluidas y, por último, el desempeño de los portafolios simulados con cada uno de los pronósticos elaborados. La información utilizada para las estimaciones se encuentra compilada en la Tabla 2, adicionalmente muestra la disponibilidad de la información necesaria para la elaboración de los portafolios.

Tabla 2 Datos usados en el estudio

Variables	Muestra	Frecuencia	Fuente
Inflación	jul-55 a Jul-13	Mensual	Dane
Inflación anual esperada	jul-05 a jul-13	Mensual	Bloomberg
Tasa bonos	04-feb-10 a 05-ago-13	Diario	Bloomberg

Fuente: Construcción propia

4.1 Modelos de transición suave.

Suponga una variable y_t que se mueve entre dos estados de la naturaleza. La ecuación que describe esta variable es la Ecuación (3).

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \cdot y_{t-j} + (\beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j \cdot y_{t-j}) \cdot F(x_{t-d}) + \varepsilon_t \quad (3)$$

donde $\varepsilon_t \sim i.i.d(\mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2)$.

La función de transición $F(x_{t-d})$ toma valores entre 0 y 1 y define la forma de la transición que seguirá y_t . x_{t-d} es la variable que indica en qué momento se inicia esta transición (el rezago d es conocido como el *delay*). Las dos funciones $F(x_{t-d})$ más

populares son la logística y la exponencial, que componen respectivamente los modelos LSTAR⁹ y ESTAR¹⁰.

Especificación LSTAR:
$$F(x_{t-d}) = (1 + \exp\{-\gamma(x_{t-d} - C)\})^{-1}$$

Con el fin de ilustrar el comportamiento de una variable cuyo proceso generador es descrito por la especificación LSTAR y el papel que juegan los parámetros γ y C , se simuló una serie con las siguientes características¹¹:

$$y_t = 1.80 \cdot y_{t-1} - 1.06 \cdot y_{t-2} + (0.02 - 0.90 \cdot y_{t-1} + 0.79 \cdot y_{t-2}) \cdot F(x_{t-d}) + \varepsilon_t$$

donde $\varepsilon_t \sim N(0,0.02)$. Adicionalmente se seleccionó como variable de transición el primer rezago de la misma variable y (es decir que $x_{t-d} = y_{t-1}$). En la Figura 4 se puede observar el comportamiento de la variable simulada a través del tiempo. Como el gráfico no revela detalles significativos sobre el comportamiento de la transición, se sugiere la utilización de un diagrama de dispersión ordenado (*Scatter plot*) de la función de transición, el cual se encuentra en la Figura 5.

La función de transición del modelo LSTAR inicia con $F(x_{t-d}) = 0$, por lo que el comportamiento de la variable y_t es lineal. A medida que y_t se acerca al valor C , $F(x_{t-d})$ comienza a incrementar su valor, hasta que llega a la unidad y el modelo tiene otra representación lineal. En el *scatter plot* se indica el valor de C (0.02 en la simulación), el cual funciona como un umbral, por el cual debe cruzar x_{t-d} para que la variable finalice su transición desde su estado inicial. Definiendo $\delta = x_{t-d} - C$, se puede decir que:

$$\text{si } \begin{cases} \delta_t \rightarrow -\infty \\ \delta_t \rightarrow \infty \end{cases} \text{ entonces } \begin{cases} F(\delta_t) = 0 \text{ (y se mantiene en su estado inicial)} \\ F(\delta_t) = 1 \text{ (y finalizó la transición a su segundo estado)} \end{cases}$$

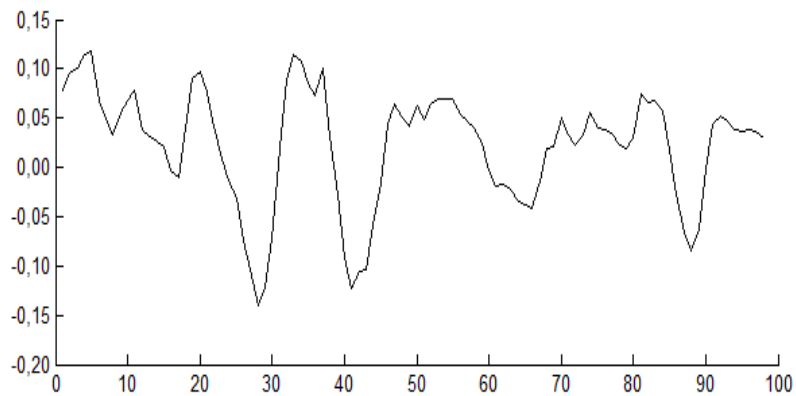
Por su parte, γ (70 para la simulación) es el parámetro que determina la velocidad de transición. Suponga que A y B marcan los puntos de inicio y fin de la transición de la variable y y la pendiente de la recta que conecta estos puntos es $\theta(\gamma)$. Si $\gamma_0 < \gamma_1$, se puede deducir que $\theta(\gamma_0) < \theta(\gamma_1)$. Cuando la velocidad de transición es igual a cero ($\gamma = 0$), nunca se da la transición y el modelo sigue una representación lineal. A medida que la velocidad de transición se haga mayor ($\gamma \rightarrow \infty$), el cambio de régimen se hará más rápidamente, hasta hacerse de forma discreta.

⁹ LSTAR por sus siglas en inglés: *Logistic Smooth Transition Autoregressive Models*.

¹⁰ ESTAR por sus siglas en inglés: *Exponential Smooth Transition Autoregressive Models*.

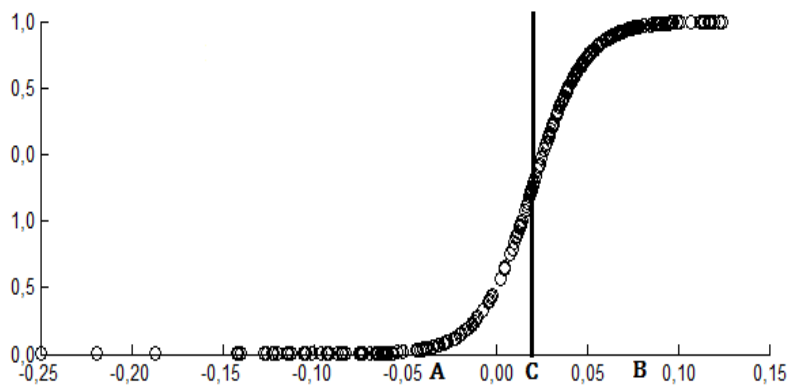
¹¹ Parámetros extraídos del artículo de Terasvirta (1994).

Figura 4 Serie simulada a través de la especificación LSTAR



Fuente: Construcción propia

Figura 5 Scatter plot de la función de transición LSTAR



Fuente: Construcción propia

En el caso en el que la especificación del modelo sea ESTAR, la función de transición tiene la siguiente estructura:

$$\text{Especificación ESTAR: } F(x_{t-d}) = [1 - \exp(-\gamma(x_{t-d} - C)^2)]$$

Tal como se hizo con el modelo LSTAR, se presenta en la Figura 6 una serie de tiempo obtenida a través de la simulación de una variable cuyo comportamiento es descrito por la anterior función de transición. Es de resaltar que los parámetros utilizados en la simulación son los mismos a los del ejemplo pasado y sólo se modificó $F(x_{t-d})$.

La diferencia con respecto al modelo de transición que utiliza la función logística se puede observar en la Figura 7, en la que se muestra el diagrama de dispersión ordenado del modelo ESTAR. En este caso, a medida que la variable de transición se acerca al umbral C , se inicia la transición al segundo estado de la naturaleza, para luego de alcanzarlo regresar a su estado inicial.

La velocidad también está determinada por el parámetro γ . Si este parámetro toma valores cercanos a cero o extremadamente altos, la variable no sufrirá ninguna transición y se puede pensar que el proceso es lineal en todo momento.

Figura 6 Serie simulada a través de la especificación ESTAR

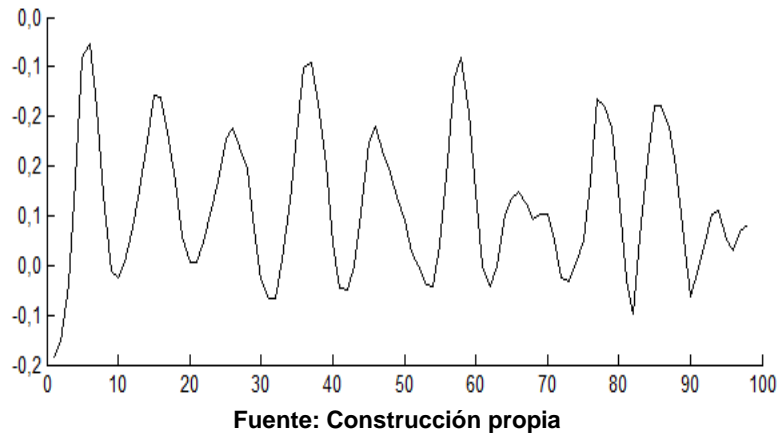
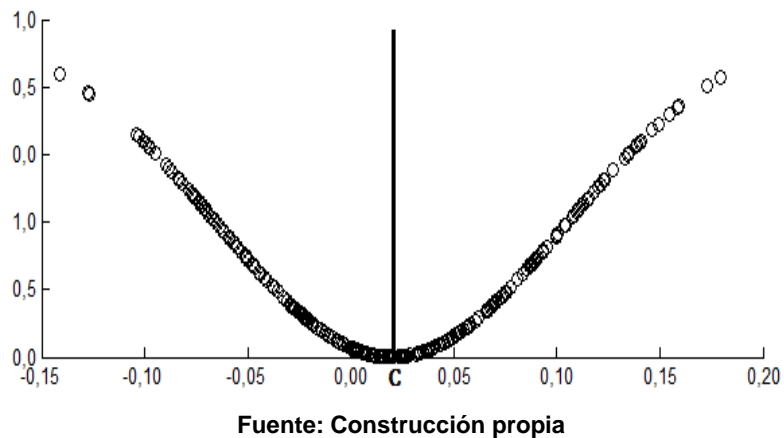


Figura 7 Scatter plot de la función de transición ESTAR



4.2 Proceso de estimación.

Terasvirta (1994) sugiere un procedimiento para la estimación de los modelos de transición suave. En este trabajo se propone agregar dos pruebas de raíz unitaria dirigidas a modelos no lineales, con el propósito de encontrar la representación más adecuada posible de la inflación colombiana. Una de ellas fue desarrollada por Eklund (2003)¹² y otra por Enders & Ludlow (1999).

¹² La prueba fue diseñada específicamente para encontrar la existencia de estacionariedad bajo un proceso generador de datos LSTAR.

Bajo un esquema de trabajo lineal las pruebas de raíz unitaria se llevan a cabo antes de iniciar el proceso de especificación y estimación, con el fin de asegurar de que la serie de tiempo de interés cumple con la condición de ser estacionaria. Lo anterior aplica para las pruebas lineales tradicionales, como son las de Dickey – Fuller, Phillips – Perron y KPSS. En el caso de la prueba desarrollada por Eklund (2003), es necesario especificar el número P de rezagos del modelo LSTAR y el “*delay*” a utilizar, por lo que se propone seguir el proceso de estimación de Terasvirta, suponiendo que la inflación es $I(1)$, para luego establecer si con los rezagos P y d establecidos efectivamente la especificación encontrada es estacionaria.

Así las cosas, en primer lugar es necesario elaborar un modelo lineal con las primeras diferencias de la inflación, que funcionará como la base del modelo de transición suave. Este debe ser construido a partir de una serie estacionaria y sus residuos deben comportarse como ruido blanco. Arango & González (1998), Jalil & Melo (1999) y López, Misas & Querubín (2002), a través de diferentes pruebas de raíz unitaria, encuentran que la inflación anual en Colombia es una serie integrada de primer orden. A pesar que estas pruebas no coinciden con aquella que se implementará, sus resultados hacen del supuesto principal para la estimación algo razonable.

El modelo autorregresivo se estimó utilizando la metodología propuesta por Box y Jenkins, a través de mínimos cuadrados ordinarios y con información desde julio de 1955 hasta diciembre de 2009, dejando como información fuera de muestra todas las observaciones entre enero de 2010 y julio de 2013 para la evaluación fuera de muestra. La selección de los rezagos se basó en un stepwise por eliminación, que consiste en incluir un número q de rezagos, para luego ir eliminando uno a uno aquellos que no sean significativos, asegurando que la especificación resultante con $q - i$ rezagos sea más parsimoniosa frente a la inicial. El resultado es presentado en la Tabla 3 y la función de autocorrelación parcial de los errores estimados se encuentra en el Anexo 1.

Tabla 3 Especificación lineal estimada (serie en diferencias)

Variables exógenas	Coeficiente (Prob)
Const	-0.00013 (0.707)
D(Inflación)(-1)	0.43493 (0.000)
D(Inflación)(-2)	0.09201 (0.009)
D(Inflación)(-3)	-0.07234 (0.030)
D(Inflación)(-5)	0.08398 (0.005)
D(Inflación)(-12)	-0.66526 (0.000)
D(Inflación)(-13)	0.22730 (0.000)
D(Inflación)(-16)	-0.05800 (0.044)
D(Inflación)(-19)	0.07865 (0.006)
D(Inflación)(-23)	0.06585 (0.036)
D(Inflación)(-24)	-0.33290 (0.000)
R-cuadrado	0.531
Log likelihood	2111
Durbin-Watson	1.906
AIC	-6.677
Schwarz	-6.599
Hannan-Quinn	-6.647
Suma de errores cuadrados	0.045

Fuente: Construcción propia

Una vez establecido el modelo lineal de referencia, es posible realizar las pruebas de linealidad y especificación. La hipótesis nula de la prueba es que la variable dependiente no es representada por un modelo de transición suave y el estadístico tipo LM se construye de la siguiente forma:

Suponga la Ecuación (4) como la ecuación auxiliar a estimar:

$$Y_t = \alpha_{10} + \sum_i \alpha_{1i} \cdot Y_{t-i} + \sum_i \alpha_{2i} \cdot Y_{t-i} \cdot Y_{t-d} + \sum_i \alpha_{3i} \cdot Y_{t-i} \cdot Y_{t-d}^2 + \sum_i \alpha_{4i} \cdot Y_{t-i} \cdot Y_{t-d}^3 + e_t \quad (4)$$

donde d es el rezago asociado a la variable de transición (delay). Se busca probar que $H_0: \alpha_{2i} = \alpha_{3i} = \alpha_{4i} = 0$.

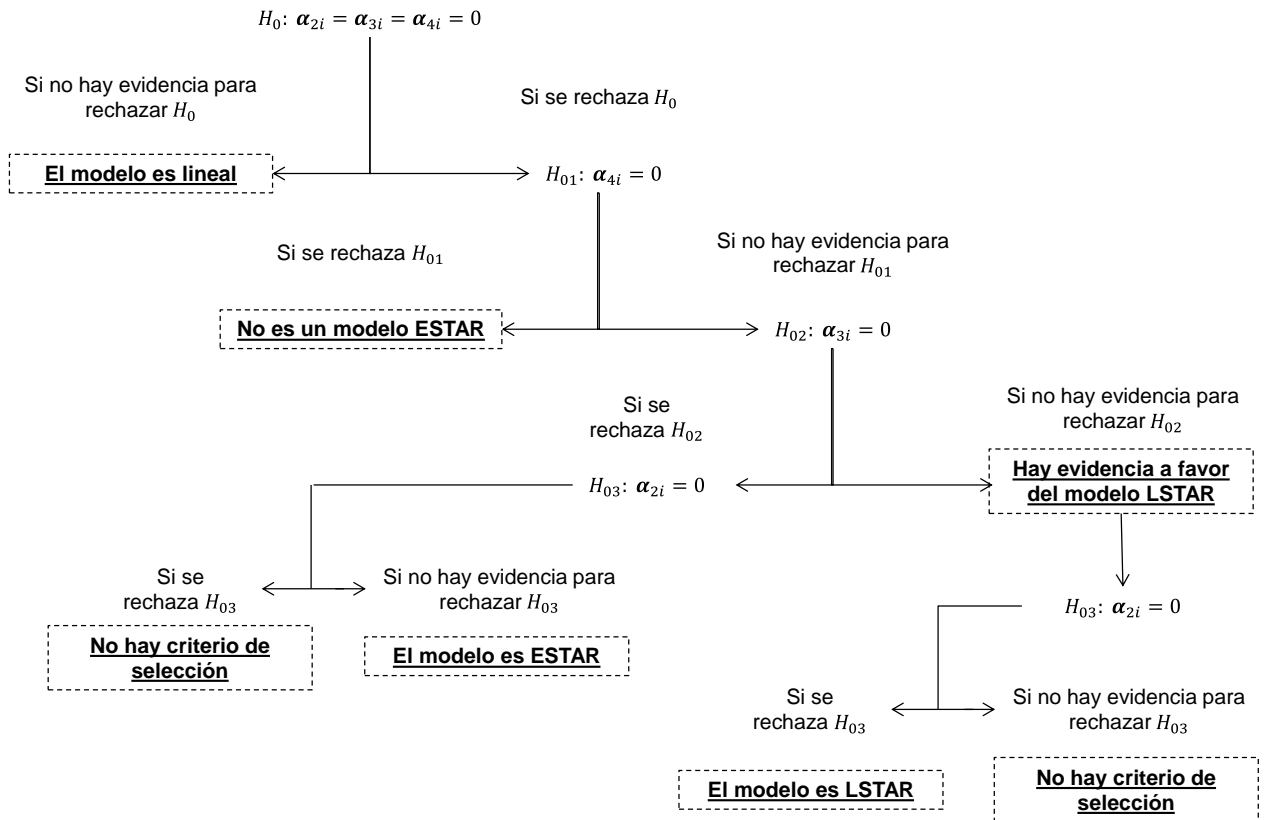
$$LM = \frac{(SRC_0 - SRC)}{\hat{\sigma}^2} \sim X^2$$

$$\begin{cases} SRC_0 \rightarrow \text{Suma de residuales al cuadrado del modelo restringido} \\ SRC \rightarrow \text{Suma de residuales al cuadrado del modelo completo} \end{cases}$$

De rechazarse la hipótesis nula, se puede decir que el modelo no sigue una especificación lineal. Si la variable prueba seguir un proceso no lineal, se debe realizar una prueba anidada de especificación, que permite definir qué función de transición se debe utilizar. Este proceso se resume en la Figura 8.

Teniendo en cuenta que la prueba de especificación depende del *delay*, que es desconocido, se sugiere realizar la prueba para múltiples rezagos, con el fin de identificar cuál tiene el menor p – valor de la prueba. Esta prueba anidada se realizó sobre la especificación lineal anteriormente presentada, utilizando rezagos de la primera diferencia de la inflación como la variable de transición. Los resultados se resumen en la Tabla 4, en donde se observa que al definir $d = 11$, se obtiene el menor p – valor y la especificación resultante es un LSTAR para la inflación.

Figura 8 Prueba de especificación



Fuente: Construcción propia

Tabla 4 Resumen de pruebas de linealidad y especificación (serie en diferencias)

Delay	p-valor	Modelo
D(inflación)(-1)	0.0187	LSTAR
D(inflación)(-2)	0.0215	LSTAR
D(inflación)(-3)	0.0424	LSTAR
D(inflación)(-4)	0.0382	LSTAR
D(inflación)(-5)	0.0122	LSTAR
D(inflación)(-6)	No hay criterio	
D(inflación)(-7)	0.0235	LSTAR
D(inflación)(-8)	0.0847	LSTAR
D(inflación)(-9)	No hay criterio	
D(inflación)(-10)	Modelo lineal	
D(inflación)(-11)	0.0012	LSTAR
D(inflación)(-12)	No hay criterio	
D(inflación)(-13)	0.0053	LSTAR
D(inflación)(-14)	0.0073	LSTAR
D(inflación)(-15)	No hay criterio	
D(inflación)(-16)	Modelo lineal	
D(inflación)(-17)	0.0136	LSTAR
D(inflación)(-18)	No hay criterio	
D(inflación)(-19)	0.0861	LSTAR
D(inflación)(-20)	0.0509	LSTAR

Fuente: Construcción propia

Del proceso anterior se identificó la combinación entre la especificación lineal considerada y los rezagos de la variable de transición que siguen un comportamiento descrito por un modelo LSTAR. Terasvirta (1994) sugiere en este paso del proceso de estimación, seleccionar la combinación de menor p – valor (en este caso aquella con $d = 11$) para estimar el siguiente modelo de transición suave definido en la Ecuación (5).

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \cdot y_{t-j} + (\beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j \cdot y_{t-j}) \cdot F(x_{t-d}) + \varepsilon_t \quad (5)$$

En este punto, y antes de realizar la estimación de los parámetros, se realiza la prueba de raíz unitaria, ya que se cuenta con los insumos necesarios (el “*delay*” y los rezagos p lineales a utilizar). La hipótesis nula propuesta por Eklund (2003) supone la existencia de una raíz unitaria y que el proceso generador de la serie es lineal, mientras que la hipótesis alterna sugiere estacionariedad en la serie bajo una especificación no lineal LSTAR. Siguiendo el trabajo de grado de Gaviria (2012), para $d > 1$, se supone la Ecuación (6) como la ecuación auxiliar para su estimación:

$$\Delta y_t = \delta_0 + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta y_{t-i} + \psi y_{t-1} + \psi_d y_{t-d} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i y_{t-d} \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6)$$

Si la hipótesis nula es cierta, se debe encontrar que en la estimación de la ecuación auxiliar $\psi_d = 0$, $\phi_i = 0 \forall i = 1, \dots, p - 1$, $\psi = 0$ y $\delta_0 = 0$. Así las cosas, es posible definir $\hat{\varepsilon}_t = y_t - (y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta y_{t-i})$, donde $\hat{\varepsilon}_t$ es un vector $T \times 1$ con los errores estimados, el cual se debe reorganizar a través de un remuestreo un total de B veces, generando $\hat{\varepsilon}^b$ para $b = 1, \dots, B$ ¹³. Una vez se cuenta con estos nuevos B vectores, se construyen B nuevos vectores de la variable dependiente, como muestra la Ecuación (7):

$$y_t^b = \sum_{i=1}^{p-1} \hat{\delta} \cdot \Delta y_{t-i} + y_{t-1} + \hat{\varepsilon}_t^b \quad (7)$$

Con los nuevos vectores de y_t^b se restiman B veces los parámetros de la regresión auxiliar bajo la hipótesis nula, con el fin de aplicar una prueba de significancia conjunta. El estadístico que sigue la prueba es $F \sim F(p + 1, T - k)$, bajo un esquema de multiplicadores de Lagrange, donde $p + 1$ representa el número de restricciones y $T - k$ los grados de libertad disponibles luego de estimar los k parámetros de la ecuación auxiliar. El p – valor asociado a la prueba es $prob(F^b > F)$, donde F es el p – valor de la prueba de significancia conjunta de los parámetros estimados en la ecuación auxiliar bajo la hipótesis alterna.

¹³ Los resultados que se derivan de esta prueba de raíz unitaria contarán con un total de 10,000 remuestreos del vector de error estimado bajo la hipótesis nula ($B = 10,000$).

La prueba de raíz unitaria debe ser aplicada tanto a la serie en niveles como a la serie en primeras diferencias, ya que sólo así es posible identificar si al modelar la inflación en diferencias, sobrediferenció innecesariamente la variable de interés. Por esta razón se aplicó el mismo proceso de estimación lineal a la inflación en niveles, utilizando el mismo tipo de stepwise para la selección de rezagos de la parte lineal y la prueba de especificación ya desarrollada. La Tabla 5 resume los parámetros estimados para el modelo lineal con la serie de la inflación en niveles¹⁴, mientras que la Tabla 6 contiene los resultados de la prueba de linealidad y especificación. Con lo anterior, se cuenta con los insumos suficientes para realizar las pruebas de raíz unitaria.

Tabla 5 Especificación lineal estimada (serie en niveles)

Variables exógenas	Coefficiente (Prob)
Const	0.00074 (0.351)
Inflación(-1)	1.45757 (0.000)
Inflación(-2)	-0.32959 (0.000)
Inflación(-3)	-0.22933 (0.000)
Inflación(-4)	0.11983 (0.001)
Inflación(-12)	-0.73322 (0.000)
Inflación(-13)	0.99449 (0.000)
Inflación(-14)	-0.17800 (0.001)
Inflación(-15)	-0.15373 (0.000)
Inflación(-18)	0.07565 (0.000)
Inflación(-24)	-0.41317 (0.000)
Inflación(-25)	0.48992 (0.000)
Inflación(-27)	-0.10578 (0.000)
R-cuadrado	0.991
Log likelihood	2115
Durbin-Watson	2.012
AIC	-6.704
Schwarz	-6.612
Hannan-Quinn	-6.668
Suma de errores cuadrados	0.043

Fuente: Construcción propia

¹⁴ En el Anexo 2 se presenta el autocorrelograma de los errores estimados de esta especificación.

Tabla 6 Resumen de pruebas de linealidad y especificación (serie en niveles)

Delay	p-valor	Modelo
Inflación(-1)		Modelo lineal
Inflación(-2)		Modelo lineal
Inflación(-3)		Modelo lineal
Inflación(-4)		Modelo lineal
Inflación(-5)		Modelo lineal
Inflación(-6)	0.2535	ESTAR
Inflación(-7)		Modelo lineal
Inflación(-8)	0.0623	LSTAR
Inflación(-9)	0.0411	LSTAR
Inflación(-10)		Modelo lineal
Inflación(-11)		Modelo lineal
Inflación(-12)	0.0862	LSTAR
Inflación(-13)		Modelo lineal
Inflación(-14)		Modelo lineal
Inflación(-15)		Modelo lineal
Inflación(-16)		Modelo lineal
Inflación(-17)		Modelo lineal
Inflación(-18)	0.0019	LSTAR
Inflación(-19)		Modelo lineal
Inflación(-20)		Modelo lineal

Fuente: Construcción propia

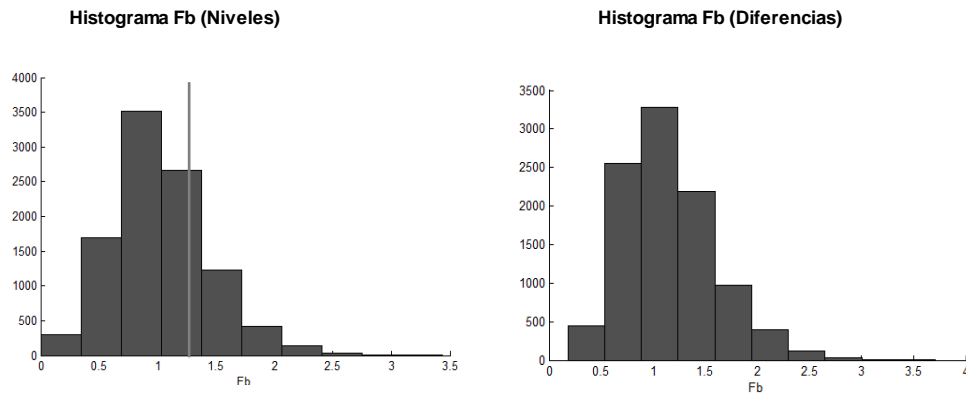
Los resultados de la prueba de hipótesis se resumen en la Tabla 7, tanto para la serie de la inflación en niveles, como en primeras diferencias. Como se observa, sólo se rechaza la hipótesis nula, a cualquier nivel de significancia, al diferenciar la serie. De esta forma es posible concluir que la inflación nacional cuenta con una raíz unitaria y es descrita de forma más adecuada por un proceso STAR frente a una caminata aleatoria. En la Figura 9 se presenta gráficamente los resultados de la prueba de Eklund, en donde es posible apreciar que para la serie en diferencias el valor F de referencia de 17.12 es significativamente superior a los encontrados luego de los 10,000 remuestreos, explicando por qué el $p - valor$ es igual a 0.000.

Tabla 7 Tabla de resultados prueba de raíz unitaria

Variable dependiente	Inflación	D(Inflación)
P	[1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 15, 18, 24, 25, 27]	[1, 2, 3, 5, 12, 13, 16, 19, 23, 24]
d	18	11
F	1.32	17.12
P-valor	0.2102	0.0000
H0	No rechaza	Rechaza

Fuente: Construcción propia

Figura 9 Distribución de F^B y p – valor asociado



Fuente: Construcción propia

Teniendo en cuenta la controversia que siempre se genera alrededor del grado de integración de la serie y la gran cantidad de pruebas de raíz unitaria que pueden ser aplicadas, se tomó la decisión de llevar a cabo un segundo test. Este fue diseñado por Enders & Ludlow (1999) y, a comparación de la prueba recién realizada, no asume ninguna forma específica de no linealidad, llegando a ser más flexible y general. Para esto, se parte de una especificación general:

$$y_t = \alpha(t) \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde la varianza de ε_t es igual a σ^2_ε y $\alpha(t)$ una función que depende del tiempo y puede ser no lineal. A partir de esta función se especifica la siguiente ecuación auxiliar:

$$\Delta y_t = \left[c + \beta_1 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{T} \cdot t\right) + \beta_2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{T} \cdot t\right) \right] \cdot y_{t-1} + \sum_{j=1}^P \gamma \cdot \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$$

De la anterior ecuación se derivan cuatro hipótesis nulas:

1. F_all $\rightarrow H_0: c = \beta_1 = \beta_2 = 0$
2. F_trig $\rightarrow H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$
3. C $\rightarrow H_0: c = 0$
4. CR $\rightarrow H_0: c = \frac{r^2}{4}$, donde $r = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$

Al rechazar la hipótesis nula F_{all} , F_{trig} y C se confirma la existencia de una raíz unitaria. La Tabla 8 resume el resultado de las cuatro pruebas de hipótesis para la serie de la inflación anual en niveles y diferencias. Allí se confirma la existencia de una raíz unitaria, luego de no rechazar las hipótesis nulas de la serie en niveles y rechazar las pruebas en diferencias.¹⁵

Tabla 8 Resultados prueba Enders & Ludlow

Serie de inflación en niveles					
F_all			C		
Prueba F	6.29	No rechazo H0	Prueba t	-2.48	No rechazo H0
Valores Críticos al 5%	7.12		Valores Críticos al 5%	-2.58	
F_trig			CR		
Prueba F	6.17	No rechazo H0	Prueba F	6.27	No rechazo H0
Valores Críticos al 5%	8.03		Valores Críticos al 5%	9.14	
Serie de inflación en diferencias					
F_all			C		
Prueba F	35.15	Rechazo H0	Prueba t	-8.79	Rechazo H0
Valores Críticos al 5%	7.12		Valores Críticos al 5%	-2.58	
F_trig			CR		
Prueba F	10.34	Rechazo H0	Prueba F	80.96	Rechazo H0
Valores Críticos al 5%	8.03		Valores Críticos al 5%	9.14	

Fuente: Construcción propia

Luego de intentar identificar el grado de integración de la inflación colombiana, se procede a la estimación del modelo no lineal a través de mínimos cuadrados ordinarios. Se debe considerar que la función de pérdida no cuenta con una solución analítica, por lo que se deben buscar los parámetros a través de un método numérico. Generalmente, los valores iniciales utilizados en la estimación de los modelos de transición suave son aquellos obtenidos de la regresión lineal (suponiendo que $\alpha_i = \beta_i$), pero con el fin de mejorar la calidad de las semillas del optimizador, se utilizó una malla de valores iniciales. El objetivo de esta es generar un determinado número de combinaciones de los parámetros γ y C , con el fin de dar un valor a la función de transición, eliminando la no linealidad del problema de optimización.

Para explicar cómo funciona esta malla suponga que para un “*delay*” específico se construye una matriz de parámetros:

$$\rho = \begin{bmatrix} \gamma_1, C_1 & \gamma_1, C_2 & \cdots & \gamma_1, C_M \\ \gamma_2, C_1 & \gamma_2, C_2 & \cdots & \gamma_2, C_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_K, C_1 & \gamma_K, C_2 & \cdots & \gamma_K, C_M \end{bmatrix}$$

¹⁵ Para mayor información en cómo se construye la prueba de raíz unitaria de Enders & Ludlow referirse al borrador de Jalil & Melo (1999).

de tal forma que pueda ser evaluada cada pareja de parámetros en la función de transición. Una vez se cuenta con un para γ_j , otro para C_i y un “delay” se obtiene un conjunto de valores de la función $F(\cdot)$:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} F(\rho_{1,1}) & F(\rho_{1,2}) & \cdots & F(\rho_{1,M}) \\ F(\rho_{2,1}) & F(\rho_{2,2}) & \cdots & F(\rho_{2,M}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(\rho_{K,1}) & F(\rho_{K,2}) & \cdots & F(\rho_{K,M}) \end{bmatrix}$$

donde $F(\rho_{k,m})$ para un modelo LSTAR es $F(\rho_{k,m}) = (1 + \exp\{-\gamma_k(x_{t-d} - C_m)\})^{-1}$.

Cada valor de $F(\rho_{k,m})$ se reemplaza en la ecuación original del modelo LSTAR, obteniendo la Ecuación (8).

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{pl} \alpha_j \cdot y_{t-j} + \left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{pnl} \beta_j \cdot y_{t-j} \right) \cdot F(\rho_{k,m}) + \varepsilon_t \quad (8)$$

La Ecuación (8) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$y_t = \alpha_0 + \varphi_0 + \sum_{j=1}^{pl} \alpha_j \cdot y_{t-j} + \sum_{j=1}^{pnl} \varphi_j \cdot \left(y_{t-j} \cdot F(\rho_{k,m}) \right) + \varepsilon_t \quad (9)$$

Esta especificación se puede estimar a través de MCO, de forma tradicional. De los diferentes conjuntos de parámetros obtenidos, aquel con la menor suma de errores al cuadrado ($\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$) entregará los valores iniciales para la estimación final del modelo:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0' = [\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \cdots, \hat{\alpha}_{pl}, \hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_1, \cdots, \hat{\varphi}_{pnl}, \gamma_k, C_m]$$

suponiendo que $\beta_j = \varphi_j$.

Las modificaciones a la estrategia de estimación propuesta por Terasvirta, aun cuando permiten elevar la posibilidad de encontrar una especificación que se ajuste de una forma más apropiada al proceso que domina la variable de interés, exige la utilización de mayores recursos computacionales. Frente a lo anterior es importante considerar que la búsqueda en la malla se puede limitar teniendo en cuenta¹⁶:

$$|\gamma| > 0$$

$$\min(x_{t-d}) < C < \max(x_{t-d})$$

Una vez establecida la estructura del modelo y los valores iniciales del optimizador, se procede a hacer la estimación. Los parámetros estimados y la función de autocorrelación de los errores se resumen en la Tabla 9 y Figura 10, respectivamente.

Tabla 9 Especificación LSTAR estimada

Variables exógenas	Coeficientes	
	Lineales	No lineales
Const	-0.0012	0.0078
D(Inflación)(-1)	0.5298	-0.5121
D(Inflación)(-2)	-0.0218	0.5674
D(Inflación)(-3)	-0.0057	-0.3232
D(Inflación)(-5)	0.1589	-0.4265
D(Inflación)(-12)	-0.5340	-0.8091
D(Inflación)(-13)	0.0647	0.8103
D(Inflación)(-16)	-0.0454	-0.0419
D(Inflación)(-19)	0.1406	-0.4178
D(Inflación)(-23)	0.0877	0.0466
D(Inflación)(-24)	-0.4064	0.4752
Gamma	150.47	
C	0.002%	

Fuente: Construcción propia

¹⁶ De no cumplirse alguna de las dos condiciones en los parámetros de la función de transición, no será posible que esta transición se dé.

Figura 10 Función de autocorrelación – errores especificación LSTAR

Autocorrelación	Autocorrelación parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.067	0.067	1.2192	0.270
		2	-0.039	-0.044	1.6474	0.439
		3	0.048	0.054	2.2892	0.515
		4	0.027	0.018	2.4901	0.646
		5	0.000	0.002	2.4901	0.778
		6	-0.047	-0.048	3.0998	0.796
		7	-0.002	0.003	3.1007	0.876
		8	0.002	-0.003	3.1022	0.928
		9	0.076	0.082	4.7449	0.856
		10	0.018	0.009	4.8377	0.902
		11	-0.031	-0.026	5.1139	0.926
		12	-0.048	-0.055	5.7734	0.927

Fuente: Construcción propia

5 Resultados de la estimación.

Como se mencionó anteriormente, en esta sección se analizará el desempeño del modelo estimado. Como referencia se comparará el desempeño del modelo no lineal con el lineal usado como base de la especificación LSTAR a través de las medidas de error tradicionales y el desempeño de los portafolios simulados a través de las proyecciones de inflación obtenidas. Adicionalmente se incluirá en la comparación una caminata aleatoria.

Se clasifican las medidas de error para cada modelo como dentro de muestra (hasta diciembre de 2009) y fuera de muestra (desde enero de 2010 hasta julio de 2013). Se destaca la utilización de dos medidas de error direccionales, denominadas como error Direccional y Sorpresas¹⁷. El primero busca calcular el porcentaje de veces en las que el modelo en cuestión acertó la dirección futura de la inflación. El segundo busca calcular la proporción de aciertos de una especificación pronostica correctamente la ocurrencia de una sorpresa inflacionaria y definir si la posibilidad de proyectar una sorpresa inflacionaria al alza es igual a anticipar una a la baja. Para esta última medida de error, se asumirá que el umbral para identificar una sorpresa inflacionaria (τ) será de 10 pbs¹⁸.

Para el periodo dentro de muestra se calcularon las dos medidas de error direccional únicamente para las fechas comprendidas entre julio de 2005 y diciembre de 2009, teniendo en cuenta que la serie de expectativas de Bloomberg no se encuentra en fechas anteriores a las recién mencionadas. En la Tabla 10 se presentan las medidas de error para los modelos estimados, en donde se resalta el mejor resultado según cada uno de los criterios calculados. Al observarlos, es posible identificar que el modelo no lineal logra mostrar ganancias en el MAE, SEC, en la medida de error direccional y en anticipar una mayor proporción de sorpresas inflacionarias. En este punto se hace de gran

¹⁷ Las medidas de error utilizadas para la comparación de los modelos se resumen en el Anexo 3 del documento.

¹⁸ Un puntos básicos (pbs) corresponde a 0.01%. De tal forma que 100 pbs equivalen a 1%.

importancia identificar si estas diferencias en las medidas de error son significativas, para lo cual se utilizó la prueba desarrollada por Diebold & Mariano (1995) cuyo objetivo es el de identificar si los pronósticos de un modelo A superan a los obtenidos a través de otro modelo B.

Tabla 10 Medidas de error de los modelos estimados

Medida de error	Especificación no lineal		Especificación lineal		Caminata aleatoria	
	Dentro de muestra	Fuera de muestra	Dentro de muestra	Fuera de muestra	Dentro de muestra	Fuera de muestra
MAE	0.5821%	0.1572%	0.5922%	0.1590%	0.8559%	0.1995%
SEC	0.0067%	0.0004%	0.0071%	0.0005%	0.0158%	0.0006%
Direccional ↑	35.135%	44.186%	34.499%	44.186%	27.82%	25.58%
Direccional ↓	38.633%	25.581%	39.428%	25.581%	36.72%	20.93%
Direccional	73.768%	69.767%	73.927%	69.767%	64.55%	46.51%
Sorpresas ↑	9.259%	6.977%	7.407%	4.651%	9.26%	4.65%
Sorpresas ↓	3.704%	2.326%	3.704%	2.326%	3.70%	2.33%
Sorpresas	12.963%	9.302%	11.111%	6.977%	12.96%	6.98%

Fuente: Construcción propia

Suponga que $e_{A,t}$ representa el error fuera de muestra obtenido a partir del modelo A, en un momento t , mientras que $e_{B,t}$ representa el error obtenido del modelo B, en el mismo momento t . Así las cosas, la hipótesis nula supone que el valor esperado de los errores es igual ($H_0: E(e_{A,t} - e_{B,t}) = 0$) y el estadístico asociado a la prueba es:

$$d_{A,B} = \frac{\sum_{t=1}^T (e^2_{A,t} - e^2_{B,t})}{T}$$

Los resultados se resumen en la Tabla 11, en donde se hace claro que a cualquier nivel de significancia se rechaza la hipótesis nula y, a partir de superioridad numérica en las medidas de error, se define que la ventaja de pronóstico la tiene el modelo LSTAR. Pero, ¿cómo se relacionarán las medidas de error en términos de las utilidades del portafolio?

Tabla 11 Diebold & Mariano Test

Modelo	Estadístico	H0
LSTAR Vs. AR	2.352	Rechazo
LSTAR Vs. Caminata aleatoria	2.947	Rechazo

Fuente: Construcción propia

Hay que recordar que las utilidades del portafolio dependen de qué tan sensible sea el mercado a valores inesperados de la inflación. Como se mencionó anteriormente, esta sensibilidad está determinada por τ , de tal forma que se asumirá que se dará una

sorpesa si $|\hat{S}_t| > \tau$. En vez de definir un único valor para τ , se presenta un ejercicio de sensibilidad, en el que se registra el comportamiento de los portafolios de cada modelo a través de diferentes valores del umbral. En la Tabla 12 se ordenan las utilidades promedio diarias, en donde se observa que la especificación no lineal es la que obtiene mayores ganancias (en algunos casos las menores pérdidas) para la gran mayoría de los valores de τ definidos. Adicionalmente, y como era de esperarse, a medida que mayor sea el τ , se observaran menos sorpresas inflacionarias y las utilidades promedio reflejarán un menor número de señales de compra o venta.

Tabla 12 Utilidad promedio diaria por especificación (Pbs)

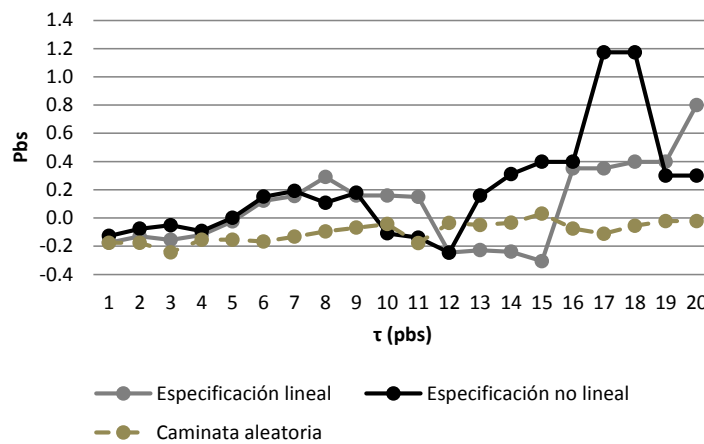
τ (pbs)	Número de sorpresas	Especificación no lineal	Especificación lineal	Caminata aleatoria
1	40	-0.13	-0.17	-0.18
2	38	-0.08	-0.13	-0.18
3	37	-0.05	-0.15	-0.24
4	36	-0.09	-0.12	-0.15
5	34	0.00	-0.02	-0.15
6	32	0.15	0.12	-0.17
7	30	0.19	0.16	-0.13
8	27	0.11	0.29	-0.10
9	24	0.18	0.16	-0.07
10	22	-0.11	0.16	-0.04
11	21	-0.14	0.15	-0.18
12	20	-0.25	-0.25	-0.04
13	15	0.16	-0.23	-0.05
14	15	0.31	-0.24	-0.03
15	15	0.40	-0.31	0.03
16	13	0.40	0.35	-0.08
17	12	1.17	0.35	-0.11
18	11	1.17	0.40	-0.06
19	10	0.30	0.40	-0.02
20	10	0.30	0.80	-0.02
Utilidad promedio		0.20	0.09	-0.10
Máxima pérdida		-0.25	-0.31	-0.24
Máxima ganancia		1.17	0.80	0.03

Fuente: Construcción propia

La Figura 11 representa gráficamente los resultados anteriormente presentados y allí se puede observar que sólo para algunos valores de τ el modelo lineal supera las utilidades del modelo no lineal, pero en general el modelo LSTAR logra anticipa mejor las sorpresas, lo que se refleja en una utilidad promedio del portafolio de hasta 1,17 pbs. Cabe señalar que esta ganancia corresponde a un valor de $\tau = 17$ pbs, con el cual se identificaron 12 sorpresas inflacionarias a lo largo de tres años y medio.

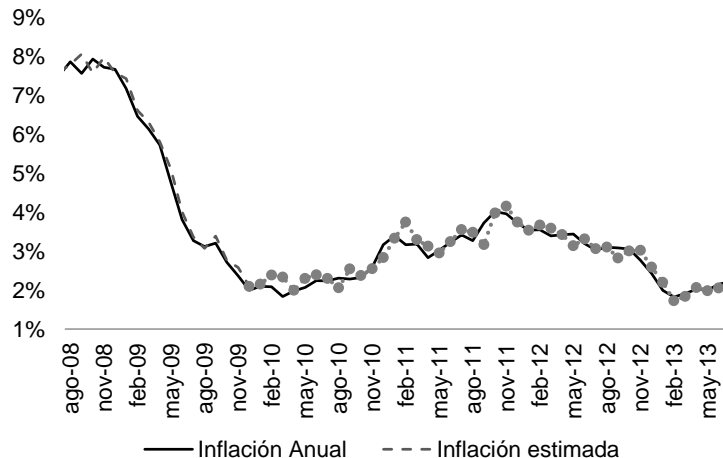
Así las cosas, es posible asociar mejores medidas de error a resultados favorables al momento de definir una estrategia de inversión en el mercado de TES colombiano. También se puede identificar que la especificación no lineal logra agregar valor a la descripción del proceso inflacionario colombiano, capturando mejor su proceso generador. El ajuste del modelo LSTAR se presenta gráficamente en la Figura 12.

Figura 11 Utilidad promedio diario por especificación (Pbs)



Fuente: Construcción propia

Figura 12 Ajuste fuera de muestra del modelo LSTAR



Fuente: Construcción propia

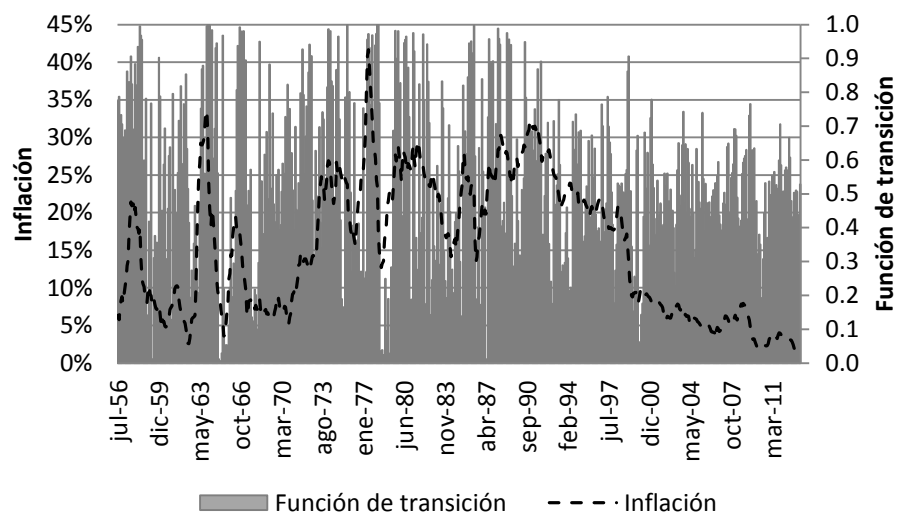
5.1 Transición del modelo no lineal.

Partiendo de la hipótesis principal planteada al inicio del documento, en la que se sugiere que la inflación comenzó un proceso de ajuste desde que se instauró el modelo de inflación objetivo y comenzó a trasladarse de un estado de inflación alta y volátil, hacia otro con inflaciones bajas y estables, se podría suponer que la función de transición tiende a cero con el transcurso del tiempo. Pero, al comparar el valor de la función de

transición y la inflación a través del tiempo (Figura 13), se hace claro que el componente no lineal sigue siendo activo mucho después de instaurada la meta de inflación objetivo.

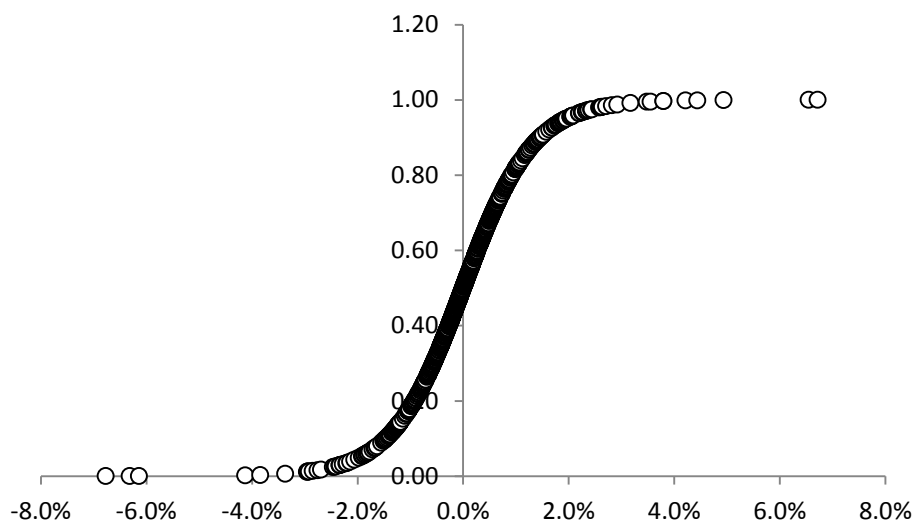
Lo anterior, sugiere que la hipótesis planteada no era correcta. En contraste, se podría asociar la activación de la función de transición con periodos de inflación al alza, teniendo en cuenta que el valor estimado de C es cercano a cero, de tal forma que variaciones mensuales positivas y significativas de la inflación, activan la transición del LSTAR. Por su parte, la Figura 14 muestra cómo se concentra la función de transición en los valores cercanos al eje y alcanza relativamente rápido la unidad.

Figura 13 Valor de la función de transición a través del tiempo



Fuente: Construcción propia

Figura 14 Scatter Plot función de transición modelo LSTAR

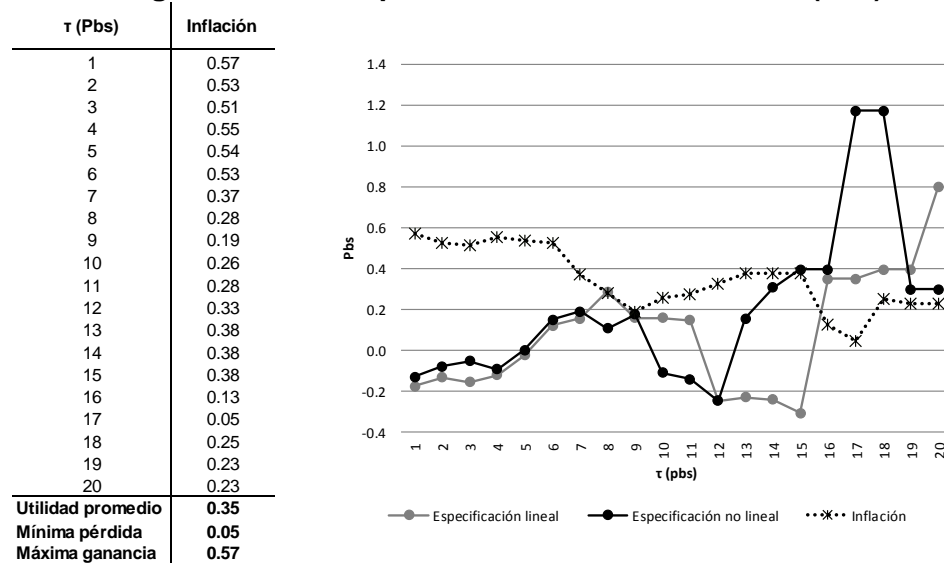


Fuente: Construcción propia

5.2 Benchmarck.

Se considera que vale la pena comparar el desempeño de los modelos considerados con un portafolio de referencia. Para esto, se propone construir un portafolio con la inflación observada como pronóstico, suponiendo que se cuenta con una estructura de modelación perfecta. Los resultados se presentan en la Figura 15.

Figura 15 Utilidad promedio diaria de la inflación (Pbs)



Fuente: Construcción propia

Es de suponerse que la utilidad más alta debería ser, independientemente del valor de τ , la obtenida por el portafolio construido a partir de la inflación. Cualquier resultado superior, respondería a factores ajenos a una sorpresa inflacionaria y no se deberían atribuir a que el modelo está mejor especificado o cuenta con propiedades más deseables. Lo anterior ocurre en el modelo LSTAR cuando se define como sorpresa inflacionaria diferencias de más de 15 Pbs. A parte de esto, en los puntos restantes, el modelo no lineal logra encontrarse más cerca en el valor del portafolio al modelo perfecto de inflación y obtener ganancias para la mayoría de valores de τ .

Aun excluyendo las utilidades para los umbrales con mayores resultados, el modelo de transición suave sigue mostrando un mejor desempeño. Esto es resumido en la Tabla 13, en donde se muestra para todos los valores de τ , la diferencia entre la utilidad de los portafolios obtenidos a partir de la inflación como pronóstico de las sorpresas y los encontrados para los tres modelos de referencia (LSTAR, lineal y caminata aleatoria), por lo que los valores negativos representan las utilidades esperadas sobrestimadas. Allí se observa, que las menores diferencias con los resultados óptimos son obtenidas por el modelo de transición suave, incluso para los valores de τ inferiores a 15 Pbs.

Tabla 13 Diferencias en utilidades (Pbs)

τ	Especificación no lineal	Especificación lineal	Caminata aleatoria
1	0.70	0.75	0.75
2	0.60	0.66	0.70
3	0.57	0.67	0.76
4	0.65	0.67	0.71
5	0.53	0.56	0.69
6	0.38	0.41	0.69
7	0.18	0.22	0.51
8	0.17	-0.01	0.38
9	0.01	0.03	0.26
10	0.37	0.10	0.30
11	0.42	0.13	0.46
12	0.57	0.57	0.36
13	0.22	0.61	0.43
14	0.07	0.62	0.41
15	-0.02	0.68	0.35
16	-0.27	-0.22	0.20
17	-1.12	-0.30	0.16
18	-0.92	-0.14	0.31
19	-0.07	-0.17	0.25
20	-0.07	-0.57	0.25
Diferencia promedio para todo τ	0.15	0.26	0.45
Diferencia promedio para $\tau < 15$	0.39	0.43	0.53

Fuente: Construcción propia

6 Conclusiones.

Este documento busca crear una conexión entre la teoría económica y el mercado financiero a través de una herramienta econométrica. Al establecer un modelo diseñado para proyectar el comportamiento de la inflación nacional se propone un esquema de inversión en títulos de deuda pública ya sea para la administración del riesgo de mercado al que se encuentran expuestas todas las entidades financieras que invierten en el mercado de TES o para especulación.

La primera conclusión que se deriva del ejercicio es que se hace evidente que en la medida que se logre capturar de forma más acertada y en acuerdo con la teoría económica el proceso de la inflación, se tendrá una mayor ventaja frente al mercado en términos de información, permitiendo anticipar ajustes en la valoración de las curvas de rendimiento, ya sea con el propósito de especular en el mercado de deuda o realizar coberturas a los portafolios de disponibles para la venta y hasta el vencimiento. Se considera de gran importancia resaltar que la estrategia de negociación de bonos de este documento no se basa en predecir las tasas futuras de los diferentes títulos, sino en anticipar publicaciones sorpresivas en términos de la información que el mercado recibirá e incorporará de forma inmediata en el valor de los activos.

De igual forma es importante resaltar el hecho que los operadores buscan en todo momento que la curva de rendimientos sea congruente con las expectativas de inflación establecidas por el mismo mercado como un colectivo, lo que sugiere la existencia de expectativas adaptativas y racionales. En los momentos en los que se identifica una sorpresa, se ajustan las expectativas sobre el comportamiento futuro del índice de precios y la curva de rendimientos es acomodada rápidamente. Este resultado se asocia directamente a la ecuación de Fisher mencionada.

Por otro lado, y luego de desarrollar el proceso de estimación del modelo de transición suave propuesto por Terasvirta (1994) con algunas modificaciones, se puede decir que bajo esta especificación, la inflación colombiana cuenta con una raíz unitaria, tal como evidenciaron los resultados de la prueba de Eklund (2003). Estos resultados son específicos de la muestra utilizada y el tipo de modelo, por lo que el resultado no puede generalizarse a cualquier otra muestra de la inflación utilizada.

También se reconoce un comportamiento asimétrico de la inflación luego de evaluar el comportamiento de la función de transición, comportándose bajo una especificación en los momentos en los que la inflación está cayendo y regida por otra cuando la inflación está subiendo. Por último, las medidas de error aplicadas y las utilidades simuladas del portafolio de renta fija sugieren que la modelación no lineal agrega valor al pronóstico de la inflación, tanto dentro como fuera de muestra, superando los resultados del modelo lineal y la caminata aleatoria. Por último se debe resaltar que en promedio las utilidades derivadas del modelo LSTAR son las que más se aproximan a las generadas por la misma inflación.

Referencias.

- Arango, L.E. & A. González, (1998), "Some evidence of smooth transition nonlinearity in colombian inflation", Borradores de Economía No. 105, Banco de la República de Colombia.
- Arango, L.E. & L.A. Flórez, (2005), "Tramo corto de la curva de rendimientos, cambio de régimen inflación y expectativas de inflación en Colombia", Borradores de Economía No. 360, Banco de la República de Colombia.
- Diebold, F.X. & R.S. Mariano (1995), "Comparing Predictive Accuracy," Journal of Business and Economic Statistics, 13, 253–263.
- Dijk, D., T. Teräsvirta & P.H. Franses, (2000), "Smooth transition autoregressive models: A survey of recent developments", Working Paper Series in Economics and Finance 380, Stockholm School of Economics, revised 17 Jan 2001.
- Echavarría, J., E. López & M. Misas, (2010), "La persistencia estadística de la inflación en Colombia", Borradores de Economía, No. 623, Banco de la República de Colombia.

- Eklund, B., (2003), "Testing the unit root hypothesis against the logistic smooth transition autoregressive model", Stockholm School of Economics.
- Enders, W. & J. Ludlow, (1999), "Non-linear Decay: Tests for an Attractor Using a Fourier Approximation", Iowa State University.
- Eitrheim, O. & T. Teräsvirta, (1996), "Testing the adequacy of smooth transition autoregressive models", Journal of Econometrics, Elsevier, Vol. 74(1), páginas 59 - 75, September.
- Gaviria, A. (2012), "Pronóstico de la tasa de cambio nominal en Colombia: una aplicación de modelos no lineales autorregresivos de transición suave", Maestría en Economía, Pontificia Universidad Javeriana.
- González, E., A. Grajales & L.F. Melo, (2007), "Pronósticos directos de la inflación colombiana", Borradores de Economía No. 458, Banco de la República de Colombia.
- González, E., M. Jalil & J.V. Romero, (2010), "Inflación y expectativas de inflación en Colombia", Borradores de Economía No. 618, Banco de la República de Colombia.
- Granados, J.C. & L.F. Melo, (2010), "Expectativas y primas por riesgo inflacionario bajo una medida de compensación a la inflación", Borradores de Economía No. 589, Banco de la República de Colombia.
- Jalil, M. & L.F. Melo (1999), "Una relación no lineal entre inflación y los medios de pago", Borradores de Economía, No. 145, Banco de la República de Colombia.
- Kock, A, & T. Teräsvirta, (2011), "Forecasting macroeconomic variables using neural network models and three automated model selection techniques", CREATES Research Papers 2011-27, School of Economics and Management, University of Aarhus.
- López, E., M. Misas & P. Querubín, (2002), "La inflación en Colombia: Una aproximación desde las redes neuronales", Borradores de Economía, No. 199, Banco de la República de Colombia.
- Malkiel, B.G., (2003), "The efficient market hypothesis and it's critics", CEPS Working Paper No. 91, Princeton University.
- Mishkin, F., (1990), "What Does The Term Structure Tells Us About Future Inflation?", Journal of Monetary Economics, Vol. 25, No. 1.
- Rodríguez, N. & P. Siado, (2003), "Un pronóstico no paramétrico de la inflación colombiana", Borradores de Economía No. 248, Banco de la República de Colombia.

- Teräsvirta, T. (1994), "Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models", *Journal of the American Association*, Vol. 89, No. 425.

Anexo 1 Función de autocorrelación – errores especificación lineal (serie en diferencias).

Autocorrelación	Autocorrelación parcial	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.047	0.047	1.3808	0.240
		2	0.058	0.056	3.4985	0.174
		3	0.018	0.013	3.7066	0.295
		4	-0.019	-0.024	3.9455	0.413
		5	-0.036	-0.036	4.7841	0.443
		6	-0.027	-0.022	5.2479	0.512
		7	0.047	0.054	6.6414	0.467
		8	-0.004	-0.005	6.6519	0.575
		9	0.058	0.053	8.8396	0.452
		10	0.010	0.001	8.9009	0.542
		11	0.059	0.054	11.170	0.429
		12	-0.090	-0.097	16.438	0.172

Fuente: Construcción propia

Anexo 2 Función de autocorrelación – errores especificación lineal (serie en niveles).

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.006	-0.006	0.0236	0.878
		2	0.005	0.005	0.0409	0.980
		3	0.015	0.015	0.1754	0.981
		4	-0.043	-0.042	1.3237	0.857
		5	-0.000	-0.001	1.3238	0.932
		6	-0.028	-0.028	1.8154	0.936
		7	0.042	0.043	2.9205	0.892
		8	-0.020	-0.021	3.1727	0.923
		9	0.039	0.040	4.1481	0.901
		10	-0.004	-0.007	4.1572	0.940
		11	0.042	0.046	5.2619	0.918
		12	-0.087	-0.091	10.065	0.610

Fuente: Construcción propia

Anexo 3 Medidas de evaluación de pronóstico.

Para la evaluación de resultados se utilizaron las siguientes medidas de error:

1. Error absoluto promedio (MAE):

$$MAE = \frac{\sum_{t=1}^T |y_t - \hat{y}_t|}{T}$$

2. Suma de errores al cuadrado (SEC):

$$SEC = \frac{\sum_{t=1}^T (y_t - \hat{y}_t)^2}{T}$$

3. Error direccional:

$$\text{Direccional } \uparrow = \text{prob}(\hat{y}_t - y_{t-1} > 0 | y_t - y_{t-1} > 0)$$

$$\text{Direccional } \downarrow = \text{prob}(\hat{y}_t - y_{t-1} < 0 | y_t - y_{t-1} < 0)$$

$$\text{Direccional} = \text{Direccional } \uparrow + \text{Direccional } \downarrow$$

4. Probabilidad de pronosticar correctamente una sorpresa inflacionaria.

$$\text{Sorpresa } \uparrow = \text{prob}(\hat{S}_t > \tau | S_t > 0)$$

$$\text{Sorpresa } \downarrow = \text{prob}(\hat{S}_t < \tau | S_t < 0)$$

$$\text{Sorpresa} = \frac{\text{Sorpresa } \uparrow + \text{Sorpresa } \downarrow}{2}$$

donde:

y_t : Realización de la variable en el periodo t .

\hat{y}_t : Pronóstico de la variable y para el periodo t .

S_t : Sorpresa inflacionaria observada en el periodo t .

\hat{S}_t : Sorpresa inflacionaria estimada en el periodo t .