

**DISEÑO DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA LA OPTIMIZACIÓN DE DOS
ESLABONES DE LA CADENA DE SUMINISTRO PARA OBTENER
EL PRECIO Y EL NIVEL DE INVENTARIOS UTILIZANDO EL
LOGIT RESTRINGIDO**

Propuesta de investigación

**Elaborado por
Yeison Eduardo Díaz Mateus
Bibiana Alejandra Forero Gacha
Mayo de 2016**

**Directores
Héctor Andrés López Ospina
Gabriel Mauricio Zambrano Rey**

**Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Ingeniería
Departamento de ingeniería industrial
Bogotá D.C**

Contenido

1.	Glosario de términos	7
1.1.	Diseño de un modelo matemático	7
1.2.	Optimización	7
1.3.	Cadena de suministro (por sigla en inglés: SC, Supply Chain).....	7
1.4.	Precio.....	8
1.5.	Nivel de inventarios	8
1.6.	Regresión lineal.....	8
1.7.	Modelos de elección discreta	9
1.8.	Regresión logística	9
1.9.	Programación matemática	10
1.10.	Programación entera.....	10
1.11.	Meta-heurística.....	12
1.12.	Análisis de varianza (por sus siglas en inglés ANOVA, Analysis of Variance)	12
1.13.	Método de diferencia mínima de Fisher.....	13
1.14.	Cantidad económica de pedido.....	13
2.	Resumen ejecutivo	15
3.	Planteamiento del problema	16
4.	Objetivo general	18
5.	Objetivos específicos.....	18
6.	Antecedentes	19
7.	Metodología implementada.....	23
8.	Resultados	25
8.1.	Descripción del problema.....	25
8.2.	Formulación de la demanda con base en un logit restringido	26
8.3.	Diseño del modelo logístico multi-escalón	34
8.4.	Solución del modelo.....	35
8.4.1.	Restricción del espacio de soluciones	36
8.5.	Implementación.....	39
8.5.1.	Selección del producto	39
8.5.2.	Definición de grupos socioeconómicos y atributos.....	40
8.5.3.	Función de utilidad percibida y coeficientes de sensibilidad	40
8.5.4.	Definición de costos	42
8.5.5.	Parámetro de escala del logit (w) y proporción de la población que viola la restricción (η)	44

8.6.	Validación de la solución	44
8.6.1.	Modelo base: logit restringido con demanda agregada	45
8.6.2.	Meta heurística	47
8.6.3.	Resultados	47
8.6.4.	Análisis de atracción	50
8.6.5.	Escenario 1: Análisis de descuentos.....	51
8.6.6.	Escenario 2: Modelo logit	53
8.6.7.	Escenario 3: Demanda desagregada	54
8.7.	Evaluación del impacto de la solución propuesta	57
8.7.1.	Análisis del margen de ganancia bruta.....	58
8.7.2.	Análisis de rotación de inventario para el vendedor	58
8.7.3.	Análisis de la participación en el mercado.....	59
9.	Conclusiones	60
10.	Recomendaciones.....	63
11.	Bibliografía	64
12.	Anexos.....	68
12.1.	Anexo 1 - Análisis del proveedor y el vendedor	68
12.2.	Anexo 2 -Diagrama de solución.....	71
12.3.	Anexo 3- Selección de producto	72
12.4.	Anexo 4 -Desarrollo de la encuesta.....	74
12.5.	Anexo 5-Análisis del coeficiente del precio.....	83
12.6.	Anexo 6-Variación de parámetros η y ω	86
12.7.	Anexo 7-Precio de venta del producto seleccionado en el mercado	87
12.8.	Anexo 8-Implementación del modelo PSO en R- statistics	89
12.9.	Anexo 9- Resultados de la atraktividad.....	92
12.10.	Anexo 10 – Margen de ganancia bruta.....	93
12.11.	Anexo 11- Rotación de inventarios	94
12.12.	Anexo 12- Participación en el mercado	95

Índice de ecuaciones

Ecuación 1 Ecuación regresión general RL	9
Ecuación 2 Forma canónica de la programación entera.....	11
Ecuación 3. Método de significancia mínima	13
Ecuación 4 Cantidad económica de pedido.....	14
Ecuación 5 Ecuación logit restringido	21
Ecuación 6 Segmento de la población.....	27
Ecuación 7 Utilidad percibida por el modelador.....	28
Ecuación 8 Probabilidad de elección	29
Ecuación 9 Logit para la demanda	29
Ecuación 10 Función de utilidad ajustada.....	30
Ecuación 11 Demanda.....	31
Ecuación 12 Demanda agregada	31
Ecuación 13 Probabilidad de no compra.....	31
Ecuación 14 Utilidad compensatoria.....	32
Ecuación 15 Factibilidad.....	32
Ecuación 16 Demanda con logit restringido	32
Ecuación 17 Restricción superior.....	33
Ecuación 18 Restricción inferior.....	33
Ecuación 19 Población que excede la restricción	33
Ecuación 20 Componentes de la ecuación general	34
Ecuación 21 Función objetivo.....	34
Ecuación 22. Velocidad de la partícula	35
Ecuación 23. Posición de la partícula.....	36
Ecuación 24 Relación entre Tp y m	36
Ecuación 25 Derivada de la función objetivo con respecto a m	37
Ecuación 26 Derivada en función de m	37
Ecuación 27 Punto crítico de la función.....	37
Ecuación 28 Segunda derivada de la función objetivo con respecto a m	37
Ecuación 29 Punto máximo de m	38
Ecuación 30 Valor de m	38
Ecuación 31 Normalización del precio	47
Ecuación 32 definición de costo de compra para el vendedor	51
Ecuación 33 Costo de compra el vendedor relacionado con el porcentaje de ganancia	51
Ecuación 34 Relación entre los descuentos y el porcentaje de ganancias.....	51
Ecuación 35 Utilidad ajustada con descuento	51
Ecuación 36 demanda ajustada con descuento.....	51
Ecuación 37 Función objetivo ajustada con descuento	52

Índice de graficas

Gráfica 1 Relación entre ILP y LP (Marchand, Martin, Waismantel, & Wolsey, 2002).....	11
Gráfica 2 Metodología	24
Gráfica 3 Penalizaciones	39
Gráfica 4 Relación costo de compra del proveedor	42
Gráfica 5 Convergencia de la función objetivo para el modelo base	48
Gráfica 6 Convergencia de PSO para el modelo logit con ganancias del 50%	54
Gráfica 7 Convergencia del PSO para el estrato medio	56

Índice de tablas

Tabla 1 Costos logísticos (<i>González, 2012</i>)	17
Tabla 2 Resultados de las encuestas para la máxima disposición a pagar	40
Tabla 3 Coeficiente de precio para cada grupo de individuos.....	41
Tabla 4 intervalos para los estratos definidos	42
Tabla 5 Relación entre los costos del vendedor y el proveedor	43
Tabla 6 Valores finales para ω y η	44
Tabla 7 Variables de decisión para el modelo.....	45
Tabla 8 Valores de los parámetros definidos	46
Tabla 9 Valores del PSO	47
Tabla 10 Resultados del modelo base	48
Tabla 11 Análisis de varianza entre el estrato y la atracción	50
Tabla 12 datos obtenidos para el 20% de descuento	52
Tabla 13 Resultados del modelo logit	53
Tabla 14 Resultados del modelo con demanda segregada	55
Tabla 15 Influencia de los subgrupos en la demanda agregada	55

1. Glosario de términos

1.1. Diseño de un modelo matemático

Un modelo matemático se define como la descripción teórica de un objeto que existe fuera del campo de las matemáticas el cual está definido en tres partes: la primera parte es la construcción definiéndose como el proceso en que se convierte el objeto al lenguaje matemático. La segunda parte es el análisis, siendo este el estudio del modelo diseñado con el fin de conocer el estado inicial de dicho modelo para finalmente crear un diseño, y la tercera parte es la interpretación donde se comprende el análisis anteriormente realizado y se aplica al objeto del cual se partió en un inicio (Wordpress, 2015).

1.2. Optimización

La optimización se enfoca en determinar un conjunto de valores que toman las variables que podemos controlar con el fin de regular el rendimiento de un sistema, con el objetivo de maximizar o minimizar la respuesta de dicho sistema. Esta respuesta es un indicador del tipo “costo”, “producción”, “ganancia”, etc., de acuerdo a las variables independientes de la función del sistema. La respuesta se denomina objetivo, y la función asociada se llama función objetivo. (Baquela & Redchuk, 2013).

1.3. Cadena de suministro (por sigla en inglés: SC, SupplyChain)

La cadena de suministros es definida como la secuencia de eventos que se realizan dentro del ciclo de vida de un producto o servicio desde su inicio hasta que se entrega al cliente final. La cadena de suministros en la actualidad no se limita a las empresas manufactureras, sino que, es un término que ha cogido fuerza en las empresas de servicios, siendo a su vez, un subsistema incluido en el sistema organizacional que interviene en la planificación de

las actividades de búsqueda, obtención y transformación de los productos o servicios (Meindl & Sunil, 2006).

1.4. Precio

El precio de un producto se conoce como la cantidad de dinero que el consumidor debe dar a cambio de un bien o servicio. Este precio es una herramienta utilizada dentro del mercadeo, con el fin de aumentar la participación del mercado dependiendo de la aceptación del precio establecido. Tanto así que, existen estrategias de precios usadas por las empresas para asignar un correcto valor monetario a sus productos y servicios, teniendo en cuenta variables como fuerza laboral, publicidad invertida, costos de producción y margen de recuperación (Ferrel & Hartline, 2006).

1.5. Nivel de inventarios

Es la cantidad de bienes tangibles que se tienen para la venta en el curso ordinario del negocio o para ser consumidos en la producción de bienes o servicios para su posterior comercialización. El nivel de inventarios debe tener en cuenta el movimiento de un producto, las causas externas e internas de la empresa, los históricos de ventas, etc., con el fin de determinar un nivel de inventario mínimo que no aumente los costos de almacenamiento, y tener un balance entre la atención al cliente y los activos de la empresa. (Hinestroza, 2012)

1.6. Regresión lineal

La relación entre una variable que depende de k variables explicativas caracterizada en un modelo matemático corresponde a un modelo de regresión. Entonces un modelo de regresión lineal con k predictores describe el hiper-plano en el espacio de k dimensiones que representa a la variable dependiente en función lineal y aditiva de sus variables

explicativas. El modelo básico de regresión lineal se puede expresar así:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^K \beta_k * X_k + \varepsilon_k$$

Ecuación 1 Ecuación regresión general RL

En donde β_0 representa el corte con el eje x cuando el valor de las variables explicativas es 0, β_k es un parámetro del modelo que indica el cambio en la variable dependiente por cada unidad de la variable explicativa X_k y la componente ε_k que representa la distribución del error en la modelación. (Montgomery, 2006)

1.7. Modelos de elección discreta

Los modelos de elección discreta son una de las principales herramientas usadas para predecir y analizar la elección de una única alternativa, que realiza un individuo o agente, entre un conjunto de posibilidades mutuamente excluyentes, finito y conocido por el tomador de decisiones, bajo el supuesto de racionalidad de los agentes por medio de la maximización de una función de utilidad (Manski, 1977).

1.8. Regresión logística

La regresión logística es un tipo de regresión que se utiliza para explicar y predecir una variable categórica binaria (dos posibles respuestas) en función de diferentes variables independientes, que a su vez, pueden ser cuantitativas o cualitativas. Además, permite modelar la probabilidad de que ocurra un evento dado en una serie de variables independientes. Existen razones importantes para utilizar una regresión logística:

- a. La razón para una variable dicotómica cuyo comportamiento sigue una distribución binomial, invalidando el supuesto básico de normalidad.

- b. La función de relación es una regresión intrínsecamente no lineal.(Sandoval, 2011)

Una extensión de la regresión logística es la regresión logística multinomialo logit multinomial, la cual generaliza la regresión logística a problemas multiclase, es decir, con más de dos posibles resultados discretos. A partir de lo anterior, la regresión logística multinomial es un modelo que se utiliza para predecir las probabilidades de los diferentes resultados posibles de una distribución categóricamente variable dependiente, dado un conjunto de variables independientes que puede ser de valor real, binario valorado, categórico valorado, entre otros(Greene, 2012).

1.9. Programación matemática

Conjunto de teoremas, métodos y técnicas que buscan minimizar o maximizar una función objetivo en presencia de algunas restricciones asociadas. Los problemas de optimización tienen asociado un objetivo modelado matemáticamente al cual se desean encontrar los valores máximos o mínimos de acuerdo a unas restricciones que son impuestas por la misma naturaleza del problema. Según sea la naturaleza de las variables, la función objetivo y las restricciones, la programación matemática se divide principalmente en programación lineal, entera-mixta y no lineal (Montgomery, 2010).

1.10. Programación entera

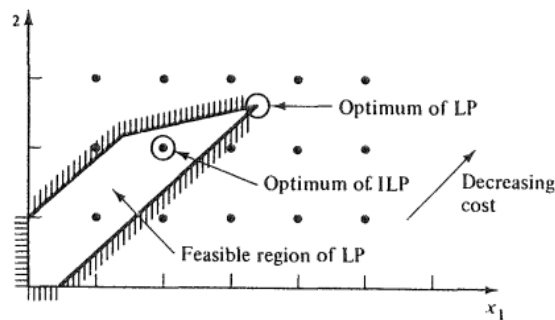
Los problemas de programación entera (por sus siglas en inglés: ILP, *Integer Linear Programming*), son aquellos en los cuales todas las variables de decisión asociadas pertenecen al conjunto de los números enteros positivos (Z^+). Formalmente un problema ILP, en su forma canónica puede expresarse como:

$$\text{Min}\{C^t x : x \in X\}$$

$$X = \{x \in \mathbb{Z}_+^n : A * X = B\}$$

Ecuación 2 Forma canónica de la programación entera

La necesidad de formular, implementar y solucionar problemas ILP se debe principalmente a que en algunos problemas de programación lineal las soluciones fraccionadas en las que $x^*: x \in \mathbb{R}$, no son factibles. Esto se debe principalmente a que las variables de decisión pertenecen a objetos que sólo tienen sentido si están expresados en cuantías discretas, por ejemplo, el recurso humano, número de aviones asociados a una ruta, etc. De todas maneras, existe una gran conexión entre la programación entera y la programación lineal (LP), ya que esta última puede ser usada para solucionar instancias del ILP e incluirse en los métodos de solución a través de relajación de las restricciones del problema, si x se considera un número relativamente grande en el que redondear la cifra no afecta significativamente la solución. Aunque en ciertas ocasiones redondear la cifra podría afectar la factibilidad del problema, esto se observa claramente en la GraficaNo. 1 en la cual el óptimo del problema ILP relajado a LP no está dentro de la región factible.



Gráfica 1 Relación entre ILP y LP (Marchand, Martin, Waismantel, & Wolsey, 2002).

Por esta razón se han desarrollado varios métodos y procedimientos para atacar los ILP que garantizan su convergencia y factibilidad, según lo presentan Marchand, Martin-Waismantel & Wolsey, (2002).

1.11. Meta-heurística

Son procedimientos generales que mezclan estrategias de alto nivel con implementos de búsqueda local. Estos procedimientos tienen inmersas estrategias que permiten escapar de óptimos locales para poder aumentar la probabilidad de encontrar una buena solución.

Estos procedimientos genéricos permiten atacar diferentes tipos de problemas de optimización debido a la generalidad de sus lineamientos. Las meta-heurísticas solucionan instancias de problemas que son considerados como complejos, disminuyendo el espacio de solución del problema al explorarlo de manera eficiente (Hillier, 2003). Existen dos tipos de modelos:

1) Tipo poblacional: *“El procedimiento consiste en generar, seleccionar, combinar y reemplazar un conjunto de soluciones en la búsqueda de la mejor solución. Por ejemplo: Cumulo de partículas, Colonia de hormigas, Algoritmo genético entre otros.* (Suárez, 2013).

2) Tipo de acercamiento: *“El procedimiento realiza en cada paso un movimiento de una solución a otra con mejor valor. El método finaliza cuando, para una solución, no existe ninguna solución accesible que la mejore. Por ejemplo: búsqueda tabú, recocido simulado, entre otros”* (Suárez, 2013).

1.12. Análisis de varianza (por sus siglas en inglés ANOVA, Analysis of Variance)

Es un análisis estadístico de datos que permite conocer en qué grado está asociada una variable con respecto a otra. Permite determinar si se presentan diferencias significativas entre las medias de dos poblaciones. Existen diferentes tipos de análisis de ANOVA, entre

ellos el análisis de un factor que es utilizado para comparar varios grupos con una variable cuantitativa. (NCS Pearson, 2016):

1.13. Método de diferencia mínima de Fisher

(Por sus siglas en inglés LSD, least significant difference). Una vez se rechaza la hipótesis inicial en el ANOVA el problema radica en identificar las diferencias en parejas entre las medias de las variables de estudio con respecto a un estadístico de prueba asociado a la tasa de error residual. El estadístico de prueba para cada una de las hipótesis es la correspondiente diferencia en valor absoluto entre sus medias muestrales. Se rechaza la hipótesis de $H_0 = \mu_i = \mu_j$ si, (Montgomery, 2006):

$$LSD = |\bar{Y}_i - \bar{Y}_j| > t_{\frac{\alpha}{2}, N - K} \sqrt{CM_E \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

Ecuación 3. Método de significancia mínima

Donde el valor de $t_{\frac{\alpha}{2}, N - K}$ se lee en las tablas de la distribución t de student con $N - K$ grados de libertad que corresponden al error y se obtiene de la tabla ANOVA n_i y n_j son el número de observaciones para los tratamientos i y j.

1.14. Cantidad económica de pedido (por sus siglas en inglés EOQ, Economic Order Quantity)

La EOQ se define como la cantidad de orden pendiente para el reabastecimiento que minimiza los costos de inventario totales en un periodo de tiempo dado. La orden pendiente se desencadena cuando el nivel de inventario llega al punto de re-orden. La EOQ se calcula con el objetivo de minimizar una combinación de costos, que comprenden el costo de

compra, el costo de almacenaje de inventario, el costo de ordenamiento mediante la siguiente formula, (Vermorel, 2012):

$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

Ecuación 4 Cantidad económica de pedido

D: demanda anual

S = costo de ordenar por lote

H = costo de mantener unidades en inventario (Costo por unidad de tiempo)

2. Resumen ejecutivo

Actualmente, la gestión y la toma de decisiones en la cadena de suministros se ven afectadas por variaciones en el comportamiento de la demanda, generando diferencias importantes entre las ventas y las ordenes de pedido. Como consecuencia, estas diferencias inciden directamente en el manejo y gestión de inventarios. Un trabajo relevante en la modelación logística es la integración de decisiones de precio y gestión de inventarios donde el parámetro más relevante es la demanda de los clientes, con base en el precio de venta de los productos. Es importante mencionar que el precio de venta tiene en cuenta variables propias como las promociones, las estacionalidades, el ciclo de vida del producto, la disponibilidad, la calidad del producto y el reconocimiento de una marca, entre otras (Yaghina, 2014). En este trabajo de grado se diseñó un modelo de optimización logístico no lineal multi-escalón integrando el precio de venta de un producto y el nivel de inventarios para obtener su precio óptimo bajo la restricción de la máxima disposición a pagar de los clientes, teniendo en cuenta las diferencias socioeconómicas de los mismos. Para obtener los resultados mencionados se utilizó el modelo de elección discreta logit restringido con el fin de estimar la demanda y una meta-heurística, en este caso PSO (por sus siglas en inglés: *particleswarmoptimization*) para dar solución al modelo planteado. Adicionalmente, se realizó un análisis entre escenarios: un modelo con descuentos, un modelo sin restricciones en la demanda y un modelo con demanda para cada grupo socioeconómico. Para el primer escenario se estableció el impacto de los descuentos en la decisión de compra de los consumidores. En el segundo escenario se observó la sobrestimación de la demanda y del precio al omitir los ingresos de las personas. Finalmente, el tercer escenario permitió evidenciar cómo el precio de venta de un producto

y la capacidad adquisitiva de los grupos socioeconómicos influyen en el comportamiento de la demanda.

3. Planteamiento del problema

De acuerdo con un estudio de la Asociación de empresarios de Colombia (ANDI), las empresas colombianas están poniendo en riesgo su operatividad y competitividad, debido a los altos costos logísticos en que incurren (Elpais.com.co, 2015). Además, el Departamento Nacional de Planeación, (DNP), presentó una encuesta mostrando que *“el 14,9% del valor de las ventas de la industria se invierte en logística, es decir, almacenamiento, transporte y distribución, compras, etc.”* (Elpais.com.co, 2015). A partir de lo anterior, se evidencia la importancia de controlar las variables que intervienen en la cadena de suministros, identificando los costos logísticos que más impactan. La tabla 1 resume en la columna A las buenas prácticas de gestión logística que pueden mitigar los costos relacionados por las variaciones en la demanda de un producto, y en la columna B los costos logísticos:

A. Práctica de gestión logística	B. Costos logísticos
Integración del sistema de producción a la administración de la cadena de suministro	<ul style="list-style-type: none"> - Costo de inventarios de materias primas, suministros, producto en proceso y producto terminado - Costos de administración de inventario
Outsourcing y alianzas	<ul style="list-style-type: none"> - Costos de distribución, costos de fletes - Costos de administración de inventario - Costos de mantenimiento de vehículos y equipos utilizados en la administración del inventario
Justo a tiempo Modelo de maximización de beneficios de una empresa de múltiples productos Inventario administrado por el proveedor y mercancía en consignación	<ul style="list-style-type: none"> - Costo de inventario de materia prima y suministros - Costo de procesamiento de pedidos - Costo de administración de inventario - Costo de oportunidad de los inventarios de materia prima y suministros
Matriz Krajlic Desarrollo de proveedores Integración horizontal	<ul style="list-style-type: none"> - Costo de inventario de materia prima y suministros - Costo de procesamiento de pedidos - Costo de oportunidad de los inventarios de materia prima y suministros
- Comercio electrónico	- Costo de procesamiento de pedidos
- Cross docking	<ul style="list-style-type: none"> - Costo de inventario de producto terminado - Costo de distribución, costo de fletes

Tabla 1 Costos logísticos (González, 2012)

De la tabla anterior se evidencia que del total de las prácticas logísticas mostradas el 83% se enfocan en reducir los costos de inventarios, mientras que el 17% hace énfasis en costos de transporte y mantenimiento. Así mismo, el costo que se quiere reducir está relacionado con el nivel de inventario, que a su vez tiene dos factores importantes a tener en cuenta, las ventas de un producto que dependen del precio máximo que los clientes están dispuestos a pagar, y la rotación de dicho producto. De esta deducción se infiere que es importante formular soluciones o modelos que permitan integrar la relación entre el precio y el nivel de inventario en las unidades de negocio. Por ello, uno de los desafíos de las empresas es utilizar una función de demanda que integre el comportamiento de los clientes y capture elementos que otros modelos no consideran. Por esta razón, el presente trabajo de grado tuvo como finalidad estudiar el modelo logit restringido para el modelamiento de la demanda dentro de un contexto industrial y su impacto en la planeación de dos eslabones de la cadena de suministros, el vendedor y el proveedor, con el fin de controlar los costos logísticos asociados a la gestión de inventarios, entre ellos el costo de mantener, el costo de ordenar y el costo de comprar. Lo anterior se hizo tomando como modelo inicial el I-JPLMSP (*integrated joint pricing and lotsizing model with sales promotion*, por sus siglas en inglés) (Yaghina, 2014) donde inicialmente se integró el precio óptimo y el nivel de inventario. Sin embargo, este modelo supone que la demanda sigue un comportamiento bajo una distribución logit multinomial, con un sólo segmento de clientes y sin consideraciones de restricciones en la disposición a pagar o de la capacidad adquisitiva (Yaghina, 2014). Entonces, la contribución de este trabajo se centró en analizar, describir y modelar el impacto que tiene la inclusión de la segmentación de los clientes y su máxima disposición a pagar en la estimación de la demanda, y por consiguiente su impacto en la

gestión de los inventarios y en el precio óptimo, dentro de un modelo de optimización para la cadena de suministro.

4. Objetivo general

Diseñar un modelo logístico de optimización no lineal que incorpore dos eslabones de la cadena de suministros y que permita la toma de decisiones relacionadas con la gestión de inventarios y el precio óptimo de un producto, teniendo en cuenta la segmentación de clientes y su máxima disposición a pagar.

5. Objetivos específicos

- a) Analizar el impacto de restricciones endógenas en el comportamiento de compra de los clientes por medio de funciones de utilidad discretas con penalización a atributos, tales como la máxima disposición a pagar.
- b) Diseñar un modelo logístico de optimización no lineal enfocado a la gestión de inventarios y la asignación del precio óptimo de un producto utilizando el logit restringido para el cálculo de la demanda.
- c) Determinar e implementar una técnica para la resolución del modelo logístico de optimización.
- d) Determinar el impacto financiero del modelo logístico de optimización mediante su validación en una cadena logística en el contexto industrial.

6. Antecedentes

En la literatura es común encontrar modelos de la cadena de suministros enfocados a la minimización de los costos de inventario, y por otro lado modelos de mercadeo para la maximización de ingresos con base en la aceptación de un precio establecido. Esta disyuntiva causa una coyuntura a la hora de maximizar las ganancias totales. Por lo tanto, se han desarrollado modelos que han incorporado los conceptos de teoría de inventarios y el precio económico (Whitin, 1955). Varios investigadores han considerado métodos para establecer el precio de un producto junto con un modelo de inventarios donde la demanda depende del precio y otros factores, en un horizonte de planeación. Por ejemplo, Daesoo & Won (1998), determinan los valores óptimos del precio de venta y cantidad económica de pedido donde la demanda es sensible a los precios de venta. Por otro lado, se han desarrollado modelos relacionados con las estrategias de mercadeo estudiados por Berger & Nasr Bechwati (2001), pero no se ha estudiado a profundidad la integración de los enfoques de mercadeo y logísticos para encontrar una solución práctica y comprensiva que facilite la toma de decisiones encaminados a la optimización multi-escalón en la cadena de suministro.

A partir de lo anterior, se puede deducir que cuando no se integran los conceptos de precio y nivel de inventarios en la cadena logística, surge un incierto al intentar establecer el precio de un producto sin conocer el comportamiento de los clientes. Esta relación es comprensible de establecer en el sector de tecnología debido a los rápidos cambios en la preferencia de los clientes. Por ejemplo, en el caso de Nokia, no se tuvo en cuenta el precio que los clientes estaban dispuestos a pagar por sus productos, y en consecuencia se presentó un descenso en las ventas del 30% (Ballestín, 2014), desencadenando una serie de efectos logísticos, particularmente relacionados con la baja rotación y el aumento del nivel de

inventarios. Por consiguiente, Nokia dejó de ser la empresa líder en la industria descendiendo considerablemente dentro del listado mundial de las mejores empresas innovadoras en tecnología (El financiero, 2013).

Es así como la variación de los precios incide en el comportamiento de la demanda, y por ende un aspecto fundamental a tener en cuenta dentro de los procesos logísticos es el precio de los productos. Por ello se han evaluado diferentes funciones de la demanda que expliquen de forma más adecuada el comportamiento de los clientes, entre ellas el logit multinomial usado en el modelo I-JPLMSP (por sus siglas en inglés, *integrated joint pricing and lot sizing model with sales promotions*) que tiene por objetivo decidir niveles de inventario y precio con relación a descuentos y promociones de ventas. Este modelo realiza una serie de suposiciones, entre ellas, un solo vendedor y un proveedor que distribuye un único producto con las siguientes características: es un producto no perecedero y sin estacionalidades, con una tasa de producción infinita y su demanda de precio está evaluada mediante una función logit multinomial para un único grupo de clientes. Este modelo optimiza las ganancias multi-escalón entre el vendedor y el proveedor (Yaghina, 2014). Adicionalmente, se encontró una aplicación en un entorno de industria Colombiana basado en el logit multinomial (González & Serna, 2013), relacionada con el sector tecnológico donde el objetivo era obtener la probabilidad que un consumidor escogiera un tipo de pantalla entre cinco opciones: televisor estándar, LCD, plasma, proyector y LED. Los resultados muestran que el estatus socioeconómico juega un papel importante en la compra de televisores, sin embargo complementos como DVDs y/o sistemas de audio incrementan la probabilidad de elegir un televisor. (...) *“Este estudio contribuyó al entendimiento de la teoría de la maximización de la utilidad en consumidores racionales y resaltó la importancia de analizar la estructura del mercado y cambios en el bienestar y la*

eficiencia” (González & Serna, 2013). Sin embargo, al analizar los estudios mencionados anteriormente, se encontró que no se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:

1. La segmentación de los clientes para evaluar la demanda, por lo cual es conveniente un modelo de logit que capture la segmentación para predecir e interpretar el resultado de un grupo de individuos con características similares cuando se enfrentan a una decisión entre un conjunto de posibilidades mutuamente excluyentes, en donde la elección final está sujeta a un supuesto de racionalidad del individuo asociado a generar la mayor utilidad para él.
2. La no compensación entre atributos de la utilidad del consumidor; es decir, en el modelo clásico las variables pueden asumir distintos valores sin que se presente ninguna restricción y con la posibilidad de intercambiar valores manteniendo la misma decisión (Ospina, 2013). Dicho supuesto se conoce como compensación, el cual no siempre es cierto en diferentes procesos de toma de decisiones.

Para evitar incorporar este supuesto de no compensación entre atributos en el modelo propuesto, en este proyecto se usará el modelo de elecciones discretas conocido como logit restringido (Martínez F. , 2009). El logit restringido asume que la utilidad percibida por un agente que pertenece al segmento o grupo socioeconómico (h) asociada al bien discreto (i) y denotada por V_{hi} es separada en un término compensatorio (\bar{V}_{hi}) y otra parte no compensatoria ($\frac{1}{\mu} \ln(\varphi_{hi}(z_i))$) que indica la factibilidad de esa alternativa para h :

$$V_{hi} = \bar{V}_{hi} + \frac{1}{\mu} \ln(\varphi_{hi}(z_i)) + \xi_{hi}$$

Ecuación 5 Ecuación logit restringido

Donde $\ln(\varphi_{hi}(z_i))$ es una función de límite (cut-off en inglés) o de penalización impuesto por el grupo h a la alternativa i . Dicha penalización con una función logaritmo logra que se tenga una transición suave entre el espacio compensatorio y el no compensatorio, permitiendo que las restricciones puedan ser sutilmente incumplidas por el tomador de decisiones (Martínez F. , 2009). El componente aleatorio ξ_{hi} representa y recoge la incapacidad del analista de apreciar todos los atributos y variaciones en los gustos o comportamiento de los individuos, los errores de medición y modelación, la falta de información precisa dada a la función de utilidad determinística. Por lo tanto, si se asume que los errores ξ_{hi} permiten una distribución Gumbel con parámetro de escala (μ) independientes e idénticos (*iid*), entonces se establece un modelo logit restringido.

Existen algunas aplicaciones interesantes y novedosas del modelo logit restringido, que se utilizan en el modelamiento de la demanda en el contexto de las elecciones discretas en diversas áreas, como para la elección del modo de transporte (Castro, Martinez, & Munizaga, 2013), la localización y capacidad de escuelas (Castillo López & López Ospina, 2015) (Tamblay, Martinez, & Weintraub, 2011), la ruta del metro (Herrera, 2014), el lugar de residencia y la elección de vivienda (Martínez & Donoso, 2010), la elección de alimentos (Ding, Veeman, & Adamowicz, 2012), la gestión de la demanda en parqueaderos (Caicedo, López Ospina, & Malagrida, 2015), las decisiones de otros viajeros sobre si debe o no utilizan diferentes formas de ICT (Información de viajes y teletrabajo) en el contexto de los tiempos de viaje y de riesgo de tiempo de llegada (Lu, Chorus, & Van Wee, 2014), entre otros. En estas aplicaciones se hace evidente la gran cantidad de variables a controlar o restringir en distintos contextos, lo que implica alta no linealidad tanto en la estimación de la demanda, como en los modelos logísticos de optimización en donde existe una relación directa entre la demanda restringida con las decisiones de dichos

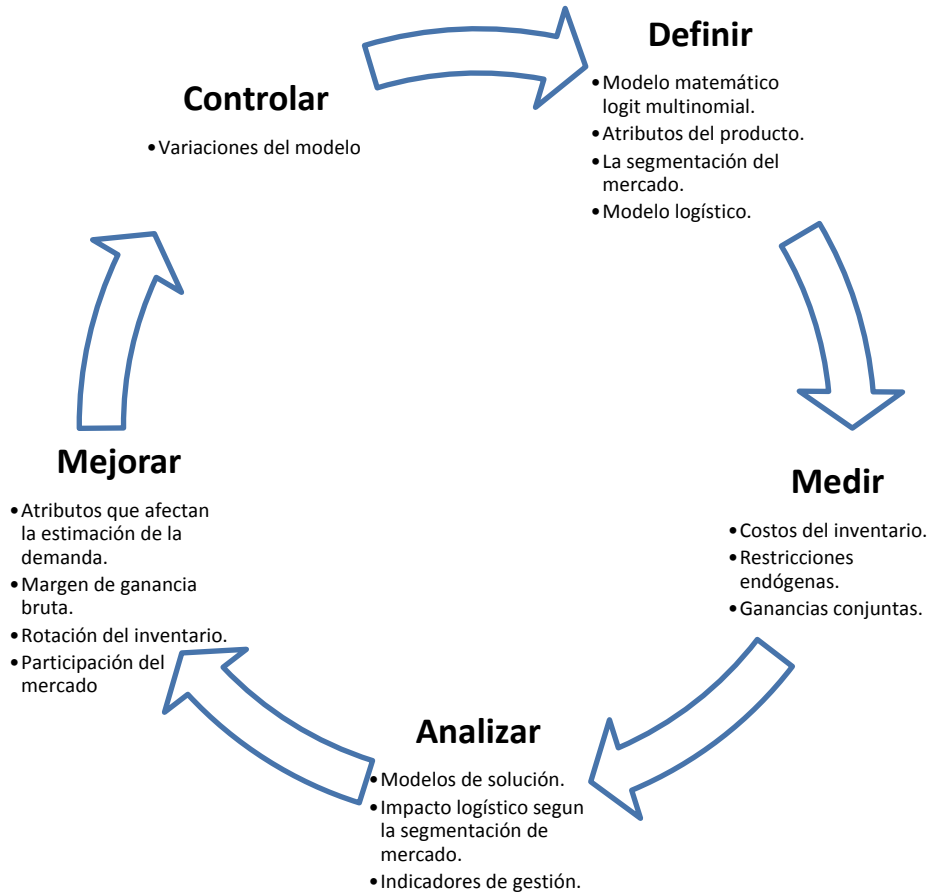
modelos. Además, no es posible obtener una solución de forma analítica o con el uso de un modelo exacto, razón por la cual se debe recurrir a las meta-heurísticas. Por ejemplo, en el caso del modelo I-JPLMSP, el problema fue resuelto mediante el algoritmo PSO (por sus siglas en inglés *particleswarmoptimization*) para poder obtener la maximización de las utilidades (Yaghina, 2014).

En este trabajo de grado se utilizó un modelo de logit restringido para estimar la demanda asociada a los precios con base en la segmentación de los clientes y la máxima disposición a pagar, con el fin de diseñar un modelo logístico de optimización no lineal. Así mismo, se implementó un tipo de solución para el modelo utilizando la optimización de enjambre de partículas que permitió conocer el impacto en las decisiones logísticas. La integración de los conceptos de asignación de precios, la gestión de inventario y logit restringido no se habían realizado anteriormente y por tanto esta es la contribución investigativa de este trabajo.

7. Metodología implementada

La metodología desarrollada en este proyecto se basó en la norma ISO 13053-1 2011, que enfatiza el uso de la metodología de seis sigma, comprimida en cinco etapas fundamentales: definir, medir, analizar, mejorar y controlar. La norma ISO 13053 se focaliza en la mejora de las empresas centrada en la reducción de las variaciones en todos los procesos, y de efectos secundarios no deseados y operaciones ineficaces (Icontec, 2011).

Los detalles de la metodología implementada se muestran a continuación:



Gráfica 2 Metodología

8. Resultados

8.1. Descripción del problema

El problema que se desarrolla en este trabajo está enfocado en la optimización de una cadena de abastecimiento de dos eslabones, donde existe una coordinación de los tiempos de inventario entre un único vendedor y un único proveedor, que comercializan un único producto no perecedero. Una vez formulado el problema inicial, la contribución principal de este trabajo se centró en analizar, describir y modelar el impacto que tiene la inclusión de la segmentación de los clientes y su máxima disposición a pagar en la estimación de la demanda, y por consiguiente su impacto en la gestión de los inventarios y en el precio óptimo. Para la formulación del problema se tuvo en cuenta los siguientes parámetros y variables:

Parámetros

$H_v = \text{Costos de mantener para el vendedor}$

$A_v = \text{Costos de ordenar para el vendedor}$

$C_v = \text{Costo de comprar del vendedor}$

$H_p = \text{Costos de mantener para el proveedor}$

$A_p = \text{Costos de ordenar para el proveedor}$

$C_p = \text{Costo de comprar del proveedor}$

$D_h(P) = \text{Demanda de cada grupo socioeconómico } h \text{ dependiente del precio del producto}$

$Q = \text{Cantidad óptima de pedido}$

VARIABLES DE DECISIÓN

A continuación, se muestran las variables de decisión establecidas para el modelo:

$m = \text{Número de pedidos del vendedor dentro de un ciclo del proveedor (}$
 $\quad \quad \quad \text{* Constante de coordinación)}$

$T_v = \text{Duración del inventario para el vendedor}$

$P = \text{Precio de venta del producto } i$

$T_p = \text{Duración del inventario para el proveedor}$

**Para coordinar los inventarios entre proveedor y vendedor se supone que los tiempos de ciclo están relacionados de la forma $T_p = mT_v$. (Anexo 1)*

Supuestos

Para el desarrollo del modelo se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones:

- La demanda del modelo es una demanda agregada determinística y constante asociada a los grupos socioeconómicos h con base en un modelo logit restringido.
- Se conoce la penalización que cada grupo h asigna al precio del producto
- Existe una coordinación de los tiempos de ciclo de inventario entre el vendedor y el proveedor.
- El inventario se abastece instantáneamente.
- Un tiempo de planeación infinito.
- Una tasa de entrega infinita para el proveedor.

8.2. Formulación de la demanda con base en un logit restringido

Para la formulación de la demanda fue necesario tener en cuenta que se requiere un modelo que integre el comportamiento de diferentes tipos de clientes y que capture elementos que otros modelos no consideran como la máxima disposición a pagar, el mínimo precio de

venta y la valoración de atributos de un producto, de tal manera se obtendrá un modelo para la estimación de la demanda con base en la elección de un producto, el comportamiento de los diferentes grupos de clientes y sus restricciones endógenas.

Por lo tanto desde el punto de vista de la modelación microeconómica, el análisis de elección discreta sobre un producto usa el principio de maximización de utilidad donde el precio está directamente relacionado con las características inherentes del producto.

Además, se supone que el individuo toma la decisión con base en la utilidad percibida del producto, bien o servicio, de tal manera que se puede modelar esta situación mediante los modelos de utilidad aleatoria (MUA) desarrollados inicialmente por Block y Marschak (1960) y extendidos por diferentes autores.

En los modelos MUA se evidencia que para un segmento homogéneo de la población (grupo socioeconómico) (N) y un conjunto de alternativas (A_n) disponibles para el individuo (n), existe un valor de utilidad $U_{ni} \forall n \in N$ asociado a la alternativa o producto i , $\forall i \in A_n$ (Arenas, 2009). Se supone que la alternativa escogida es la que maximiza la utilidad del individuo. De esta forma, la probabilidad de que el individuo (n) elija la alternativa (i), corresponde a la probabilidad de que la utilidad de esta alternativa sea mayor que la asociada a cualquiera de las restantes (j), todas ellas pertenecientes al conjunto de alternativas disponibles para el individuo (A_n) (Arenas, 2009), como se muestra a continuación:

$$P_n(i) = P(U_{ni} \geq U_{nj}, \forall j \in A_n) \quad \forall i \in A_n$$

Ecuación 6 Segmento de la población

En 1968 Mc Fadden hace una extensión econométrica de esta teoría “*considerando que una población de individuos realiza la misma elección sobre un conjunto de alternativas y*

determina la fracción de la población que elige una alternativa determinada” (Martínez F. , 2009), es decir, que la población se puede dividir teniendo como referencia factores socioeconómicos comunes para un grupo de individuos, que condicionan sus decisiones (salario, edad, religión, etc.). Cada grupo (h) dentro de la población se denomina clúster (Martínez F. , 2009).

Es por ello que la utilidad percibida por el grupo (h) asociada a la alternativa (i), es conocida por el tomador de la decisión, pero no por el modelador representando dicha utilidad como la suma de dos componentes

$$U_{hi} = V_{hi} + \varepsilon_{hi}$$

Ecuación 7 Utilidad percibida por el modelador

Donde el componente determinístico V_{hi} , es conocido por el modelador y es función del vector de atributos y el precio que definen la alternativa (forma funcional de la utilidad); y el componente aleatorio ε_{hi} representa tanto la incapacidad del analista de apreciar todos los atributos y variaciones en los gustos que rigen el comportamiento de los individuos, como también los errores de medición, la imperfección de la información disponible y las variaciones de la función de utilidad determinística (distribución del error de modelación).

Para los modelos Logit Multinomial MNL (Mc Fadden, 1974), se asume que el error se distribuye idéntica e independientemente (*iid*) Gumbel con un parámetro de escala (μ) que es inversamente proporcional a la varianza del error, donde la probabilidad de elección se define como:

$$P_{hi} = \frac{e^{\mu V_{hi}}}{\sum_{j \in A_n} e^{\mu V_{hj}}}$$

Ecuación 8 Probabilidad de elección

Dada su forma funcional, simple y de fácil calibración e interpretación de los parámetros estimados, este modelo ha tenido diversas aplicaciones en la estimación de la demanda. Tal es el caso del modelo I-JPLMSP (por sus siglas en inglés I-JPLMSP, *integrated join pricing and lotsizing model with sales promotions*), que asume el uso de un modelo Logit para la demanda de un único producto teniendo en cuenta descuentos y promociones de ventas, y que está dado de la siguiente manera (Yaghina, 2014):

$$D(P) = \alpha \frac{e^{-bP}}{1 + e^{-bP}}, \quad \alpha, b > 0$$

Ecuación 9 Logit para la demanda

Este modelo contiene los siguientes aspectos:

1. El parámetro de escala (μ) en la Ecuación 8 se fija con el valor en 1, debido a que en la práctica este factor no puede ser fácilmente separado de los coeficientes de regresión. (Arenas, Repositorio universidad de Chile, 2009)
2. La función de utilidad en la Ecuación 9 está definida por: $-bP$, asumiendo un único atributo de valoración (P), que indica el precio de venta y su coeficiente de variación $-b$, el cual muestra la variación en la función de utilidad por cada unidad de precio que se modifique. Se tiene en cuenta su valor negativo debido a que para cualquier consumidor un aumento en el precio disminuye la utilidad percibida.

3. El tamaño del mercado (Ecuación 9) está dado por α , que es la base para obtener una demanda determinística pues al multiplicar el número de clientes por la probabilidad de compra, con base en un precio específico, se obtiene la demanda de dicho producto.

Con el fin de analizar, describir y modelar el impacto que tiene la inclusión de la segmentación de los clientes y su máxima disposición a pagar en la estimación de la demanda y con base en el modelo descrito en la ecuación 9, este proyecto propone una nueva modelación incorporando los siguientes aspectos:

1. **Incluir múltiples grupos socioeconómicos con características similares:** se propone realizar una segmentación con el fin de analizar y describir los impactos logísticos y las variaciones en la estimación de la demanda. Es importante aclarar que se obtendrá una demanda agregada, es decir, la suma de la demanda de cada uno de los segmentos.

2. **Incluir las características del producto:** Se asume que la decisión de compra por cada grupo de individuos (h) está condicionada tanto por el precio del producto como por las características observables del mismo. La función de utilidad asociada a cada producto depende del precio de venta (P_i) del bien discreto i y un conjunto de características ($C_{ik}, k = 1, \dots, K$) definidas como un componente de la atracción del producto i que serán valoradas por cada grupo (h). Entonces, la función de utilidad ajustada se define como:

$$U_{hi} = \underbrace{-b_h P_i}_{\text{valoración del precio}} + \underbrace{\sum_k^K \beta_{hk} C_{ik}}_{\text{atracción de } i} + \underbrace{\varepsilon_{hi}}_{\text{error de modelamiento}} \quad \forall h \in N \wedge \forall i \in I$$

Ecuación 10 Función de utilidad ajustada

Donde β_{hk} es el vector de los coeficientes de variación asociados a cada característica (k) del producto dentro del vector de características (C) valoradas por un grupo h . Por lo tanto, si se asume que el error se distribuye idéntica e independientemente (iid) Gumbel con un parámetro de escala μ , la demanda de cada grupo o clúster (h) por la alternativa (i) se define como:

$$D_h(P_i) = \alpha_h \frac{e^{-b_h P_i + \sum_k^K \beta_{hk} C_{ik}}}{1 + \sum_j e^{-b_h P_j + \sum_k^K \beta_{hk} C_{jk}}}, \quad \forall h \in N$$

Ecuación 11 Demanda

Teniendo en cuenta la demanda de cada grupo socioeconómico descrita en la Ecuación 11 se establece una única demanda agregada de la siguiente manera:

$$\text{Demanda agregada} = \sum_h D_h(p_i)$$

Ecuación 12 Demanda agregada

Con base en la demanda agregada, se obtiene la probabilidad de no compra para cada grupo h .

$$(\text{Probabilidad de no compra})_h = \alpha_h \frac{1}{1 + \sum_j e^{-b_h P_j + \sum_k^K \beta_{hk} C_{jk}}}, \quad \forall h \in N$$

Ecuación 13 Probabilidad de no compra

3. **Incorporar restricciones de compra y venta:** Para el modelo propuesto en la ecuación 13 se agregó una penalización asociada a la máxima disposición a pagar de cada grupo (h) por un producto discreto (i) y una penalización asociada al precio mínimo de venta del producto (i) que la empresa ha dispuesto, con el fin de incorporar el supuesto de no compensación entre atributos. Por lo tanto, la modelación de la demanda pasa de un modelo logit multinomial a un modelo de elecciones discretas conocido como logit

restringido (Martínez F. , 2009) descrito por la ecuación 16. Este modelo asume que la utilidad percibida por un agente que pertenece al grupo socioeconómico (h) asociada al producto discreto (i) denotada por U_{hi} (ecuación 15) es separada en un término compensatorio (V_{hi}) asociado a la utilidad percibida para cada grupo socioeconómico (ecuación 14) y en uno no compensatorio ($\frac{1}{\mu} \ln(\varphi_{hi}^U(P_i))$) con base en la máxima disposición a pagar de cada grupo (h) por un producto discreto (i) (Ecuación 17) y otra parte no compensatoria ($\frac{1}{\mu} \ln(\varphi_i^L(P_i))$) con relación al precio mínimo que la empresa está dispuesta a vender su producto discreto (i) (Ecuación 18), que en conjunto indican la factibilidad de esa alternativa para h :

$$V_{hi} = -b_h P_i + \sum_{k=1}^K \beta_{hk} C_{ik}$$

Ecuación 14 Utilidad compensatoria

$$U_{hi} = V_{hi} + \frac{1}{\mu} \ln(\varphi_{hi}^U(P_i)) + \frac{1}{\mu} \ln(\varphi_i^L(P_i)) + \varepsilon_{hi} \forall h \in N \wedge \forall i \in$$

Ecuación 15 Factibilidad

Asumiendo de la Ecuación 15 que el error se distribuye idéntica e independientemente (iid) Gumbel, la demanda se define como:

$$D_h(P_i) = \alpha_h \frac{\varphi_{hi}^U(P_i) \varphi_i^L(P_i) e^{V_{hi}}}{1 + \sum_{j \in Z} \varphi_{hj}^U(P_j) \varphi_j^L(P_j) e^{V_{hj}}}, \quad \forall h \in N$$

Ecuación 16 Demanda con logit restringido

Siendo φ_{hi}^U una restricción superior, asociada a la máxima disposición a pagar del grupo (h) por un bien (i) y φ_i^L una restricción inferior, asociada al precio mínimo de venta que la empresa ha dispuesto para el producto discreto (i). Estas restricciones están definidas por

medio de un modelo logit binomial, donde cada grupo (h) acota la elección del producto discreto (i) con base en el precio de venta, (Martínez F. , 2009), tal como se muestra a continuación:

$$\varphi_h^U = \frac{1}{1 + \text{Exp} (w(a_h - p_i + \rho))}$$

Ecuación 17 Restricción superior

$$\varphi_h^L = \frac{1}{1 + \text{Exp} (w(p_i - \gamma + \rho))}$$

Ecuación 18 Restricción inferior

Donde γ y a_h son las cotas inferior y superior del precio respectivamente, w es el parámetro de escala del logit binomial, y ρ es un parámetro definido por la siguiente ecuación.

$$\rho = \frac{1}{w} \ln\left(\frac{1 - \eta}{\eta}\right)$$

Ecuación 19 Población que excede la restricción

Adicionalmente η es el valor asociado a la proporción de la población que viola la restricción asociada. Es importante anotar que si el parámetro η toma el valor 0 ó 1, entonces la expresión dada para ρ se indefine; esto es debido a que las funciones logit binomial sólo pueden predecir elecciones determinísticas (probabilidades iguales a cero o uno) cuando las variables tienden a más o menos infinito (Martínez F. , 2009).

Una vez definida la nueva función de la demanda (ecuación 16) con la inclusión de los nuevos aspectos, la siguiente sección muestra cómo esta demanda es considerada en un modelo logístico.

8.3. Diseño del modelo logístico multi-escalón

El modelo logístico a desarrollar con dos eslabones de la cadena de suministro (vendedor y proveedor), pretende optimizar simultáneamente, el precio de venta, el nivel de inventario del vendedor y el número de órdenes de compra dentro del ciclo del proveedor, con el objetivo de maximizar las ganancias de cada agente logístico, partiendo del supuesto que existe una coordinación entre el ciclo de inventarios de ambos eslabones. Es importante mencionar que este modelo asume una relación entre el vendedor y el proveedor para la toma de decisiones conjuntas, con el fin de obtener un beneficio global.

Por lo tanto, se tomó como base el modelo I-JPLMSPobteniendo una estructura básica en función del vendedor y el proveedor donde se asocian los costos y las ventas de cada uno para obtener unas ganancias conjuntas definidas en la ecuación 20:

$$\text{Ganancias} = (\text{Ventas vendedor} - \text{Costos vendedor}) + (\text{Ventas proveedor} - \text{Costos proveedor})$$

Ecuación 20 Componentes de la ecuación general

De acuerdo con el análisis del vendedor y el proveedor presentado en el Anexo 1, se estableció la siguiente función de ganancias conjuntas bajo el supuesto de coordinación de inventarios:

$$Ganancia(P, m, T_v, T_p)$$

$$= \sum_h D_h(P) (P + C_v) - \left\{ 0,5(m-1)T_v H_p \sum_h D_h(P) + \frac{A_p}{mT_v} + \sum_h D_h(P) C_p \right\} \\ - \left\{ 0,5H_v T_v \sum_h D_h(P) + \frac{A_v}{T_v} + \sum_h D_h(P) C_v \right\}$$

Ecuación 21 Función objetivo

8.4. Solución del modelo

El modelo logístico planteado implica alta no linealidad en la estimación de la demanda, donde existe una relación directa, y no lineal, entre la demanda restringida con las decisiones del modelo logístico. Por tal razón, no es posible obtener una solución de forma analítica o con el uso de un modelo exacto, y por lo tanto se debe hacer uso de meta-heurísticas. Existen diferentes estudios evidenciando que las meta-heurísticas basadas en población presentan un mejor desempeño en todos los casos estudiados con un 60% de buenos resultados (precisión mayor al 98%), con respecto a las técnicas meta-heurísticas basadas en trayectoria (Gil González, Mora Flórez, & Pérez Londoño, 2013).

Adicionalmente, dentro de las meta-heurísticas basadas en población se ha demostrado que existen modelos con una mayor eficiencia que otros en funciones que presentan alta no linealidad como es el caso del PSO (Guerra Álvarez & Broderick Crawford, 2006). Por lo tanto, para solucionar el modelo logístico propuesto, fue necesario ajustarlo a la interpretación del modelo PSO.

Las ecuaciones 22 y 23 muestran la velocidad y posición de cada partícula i para cada dimensión d en la iteración t , donde ω es la inercia de la partícula, C_1 y C_2 son las constantes de aceleración, $best_{id}$ es la mejor posición que la partícula ha alcanzado hasta la iteración actual, y $best_{gd}$ es la posición de la mejor partícula de toda la población, considerando una población totalmente conectada (Mendes & Kennedy, 2002). En el anexo 2 se describe el procedimiento de resolución del modelo.

$$Vel_{id}(t) = \omega * Vel_{id}(t - 1) + C_1 * rnd * (Best_{id} - pos_{id}(t - 1)) + C_2 * rnd * (Best_{gd} - pos_{id}(t - 1))$$

Ecuación 22. Velocidad de la partícula

$$pos_{id}(t) = pos_{id}(t - 1) + Vel_{id}(t)$$

Ecuación 23. Posición de la partícula

En la codificación de la partícula, es importante tener en cuenta que en la formulación inicial existen cuatro variables de decisión, mientras que el espacio de soluciones del modelo de PSO se definió de tres dimensiones debido al supuesto de coordinación de inventarios, donde existe una relación entre las variables de decisión (anexo 1) descrita en la siguiente ecuación:

$$T_p = mT_v$$

Ecuación 24 Relación entre T_p y m

Por lo tanto, cada partícula o individuo de la población tendrá tres componentes; el primero asociado al precio de venta del producto (P), el segundo tiene en cuenta el número de envíos dentro del ciclo del único proveedor (m), y por último la duración del inventario para el vendedor (T_v). Luego, para identificar el mejor individuo de la población se estableció la función de ganancia conjunta descrita en la ecuación 21 como la función objetivo del modelo. Para el cálculo de la función objetivo, el precio de venta se tomó directamente de los valores resultantes del PSO asociados al primer componente de cada individuo, mientras que para la estimación de la demanda fue importante normalizar el valor de este precio con el fin de evitar que magnitudes muy grandes dominen el cálculo de ésta.

8.4.1. Restricción del espacio de soluciones

A partir de las variables que definen el espacio de soluciones, fue importante establecer para cada una de ellas ciertas restricciones de factibilidad

1. m : número de pedidos en el tiempo de ciclo del proveedor

Teniendo en cuenta la función objetivo, se asumió que la variable m es continua, con el fin de definir la primera derivada con respecto a m :

$$\frac{\partial G}{\partial m} = \sum_h D_h(P) (P + C_v) - \left\{ 0,5(m-1)T_v H_p \sum_h D_h(P) + \frac{A_p}{mT_v} + \sum_h D_h(P) C_p \right\} \\ - \left\{ 0,5H_v T_v \sum_h D_h(P) + \frac{A_v}{T_v} + \sum_h D_h(P) C_v \right\}$$

Ecuación 25 Derivada de la función objetivo con respecto a m

Entonces, se obtiene:

$$\frac{\partial G}{\partial m} = \left[\frac{A_p}{m^2 T_v} - A_v \right] - 0,5 T_v H_p \sum_h D_h(P)$$

Ecuación 26 Derivada en función de m

Por lo tanto, se halló un punto crítico dentro del dominio de la función inicial donde al igualar a 0 con respecto a la primera derivada se obtuvo:

$$m = \frac{\sqrt{2} \sqrt{A_p}}{\sqrt{T_v [T_v H_p \sum_h D_h(P) + 2A_v]}}$$

Ecuación 27 Punto crítico de la función

Posteriormente, se analizó la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial m^2} = -\frac{2A_p}{m^3 T_v}$$

Ecuación 28 Segunda derivada de la función objetivo con respecto a m

Dado que es negativo entonces el punto crítico es un máximo relativo. Por la ecuación 26 se tiene que m es una función no decreciente de P . Entonces, el número máximo de envíos es

- $m_{max} \rightarrow T_v min \neq 0 \rightarrow 0,1$
- $P \rightarrow P_{max}$, i.e $\sum_h D_h(P) \rightarrow 0$

$$m_{max} = \left\lceil \sqrt{\frac{A_p}{0,1 * A_v}} \right\rceil$$

Ecuación 29 Punto máximo de m

Donde $\lceil \cdot \rceil$ es la parte-entera superior de un número. De esta forma se puede concluir que el máximo valor de la función de ganancias está asociado a un valor de m entero en el siguiente intervalo:

$$m = (0, \left\lceil \sqrt{\frac{A_p}{0,1 * A_v}} \right\rceil)$$

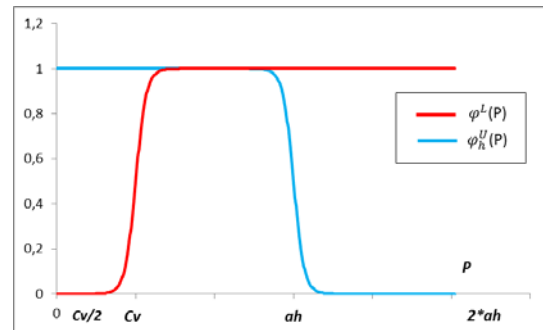
Ecuación 30 Valor de m

2. T_v : Tiempo de duración del inventario del vendedor

Se estableció que T_v asume unas cotas de tiempo máximo y mínimo de duración, éstas dependen de la dinámica del mercado y la obsolescencia del producto que se modele. Por lo tanto, T_v queda sujeto al tipo de mercado y al producto que se evalúe con el modelo propuesto, considerando que $T_v \neq 0$.

3. Precio

Dentro del modelo logístico planteado se estableció un precio de compra (C_v) para el vendedor, el cual se define como la cota inferior del precio (P), asumiendo que no hay pérdidas ni ganancias por parte del vendedor. A su vez, la cota superior del precio está dada por la máxima disposición a pagar entre todos los grupos socioeconómicos h . Teniendo en cuenta que el logit restringido permite que el precio no cumpla estas restricciones de forma estricta, se supone una penalización suave como se muestra en la siguiente grafica 3:



Gráfica 3 Penalizaciones

Se estableció para el PSO, los límites inferiores y superiores estrictos hasta la mitad del precio de compra C_v y el doble de la máxima disposición a pagar entre todos los grupos socioeconómicos, obteniendo el siguiente intervalo:

$$\frac{C_v}{2} \leq P \leq 2 * \Lambda$$

Definiendo Λ como la máxima disposición a pagar del grupo entre los grupos socioeconómico.

8.5. Implementación

Para validar el modelo propuesto se contempló la selección de un producto con base en el análisis de diferentes sectores industriales, la recolección de datos a través de instrumentos de investigación descriptiva y la definición de parámetros con base en la observación directa del mercado y la revisión de la literatura.

8.5.1. Selección del producto

Para seleccionar el producto y el sector industrial se estableció que el sector tecnológico cumple con las características establecidas en la sección 6. Posteriormente, se analizó el crecimiento de las ventas y aquellos elementos de mayor impacto en el sector como se observa en el anexo 3. En consecuencia, el producto seleccionado fue el televisor LED de 32 pulgadas.

8.5.2. Definición de grupos socioeconómicos y atributos

Con el fin de obtener las características de las personas que inciden directamente en la máxima disposición a pagar, se diseñó una encuesta para definir de forma exploratoria la máxima disposición a pagar e identificar las características de las personas y del producto que inciden directamente en esta restricción. El diseño de la encuesta, los resultados y análisis detallado de los mismos se encuentran en el Anexo 4. A partir de estos datos se concluyó, con un nivel de significancia del 5%, que la única variable estudiada que afecta significativamente la máxima disposición a pagar es el estrato social, obteniendo tres grupos socioeconómicos (Bajo, Medio, Alto), la máxima disposición a pagar de cada grupo socioeconómico y el tamaño del mercado con base en la población objetivo definida por las encuestas (193436 habitantes), resultados que se muestra en la siguiente tabla.

Grupos socioeconómicos	Máxima disposición a pagar	Tamaño del mercado
Bajo	\$ 894.615	50.294
Medio	\$ 1.190.604	115.288
Alto	\$1.958.333	27.855

Tabla 2 Resultados de las encuestas para la máxima disposición a pagar

Finalmente, mediante la observación directa del mercado se estableció que el mínimo precio de venta de los televisores es de \$ 620.999.

8.5.3. Función de utilidad percibida y coeficientes de sensibilidad

Cada grupo socioeconómico tiene una función de utilidad percibida definida por la ecuación⁷, la cual depende del precio de venta del producto y las características observables del mismo, agrupadas en una función de atracción. Estos dos componentes son valorados de manera distinta por cada grupo socioeconómico, donde estas valoraciones se convierten en coeficientes de sensibilidad para el precio y las características del producto.

8.5.3.1. Coeficientes de sensibilidad del precio

El precio se asumió como una variable de decisión continua dentro del modelo logístico por lo cual, se propuso realizar la normalización de esta variable entre un intervalo de [0,1] solo para el cálculo del logit restringido, de tal forma que se asume que el 1 está asociado al máximo valor del intervalo descrito en el método de solución del modelo logístico propuesto (sección 8.4.1). Para determinar el impacto dentro de cada grupo socioeconómico por cada unidad de precio que se modifique en la función de utilidad del logit restringido se realizó el análisis descrito en el Anexo 5 obteniendo los siguientes resultados:

Grupos	Coefficientes
Bajo	0.725
Medio	0.5375
Alto	0.225

Tabla 3 Coeficiente de precio para cada grupo de individuos

8.5.3.2. Características y coeficientes de variación del producto seleccionado

El estudio de la influencia de las características del producto (i.e., resolución, puertos HDMI, wifi, entre otras) sobre la elección de compra de cada grupo socioeconómico esta fuera del alcance de este trabajo, por tal razón se resolvió agrupar las características asociadas al televisor LED de 32 pulg dentro de una función de atracción. Esta función fue normalizada de igual forma que el precio para realizar un análisis de sensibilidad entre un intervalo de [0,1] y de esta forma ser comparable con la valoración del precio.

En este orden de ideas, para realizar el análisis de sensibilidad sobre la función de atracción fue necesario establecer niveles para ella, definidos por intervalos proporcionalmente divididos entre el número de grupos socioeconómicos o clústeres seleccionados:

Baja atracción		Media atracción		Alta atracción	
Lim. Inferior	Lim. Superior	Lim. Inferior	Lim. Superior	Lim. Inferior	Lim. Superior
0	0,33	0,34	0,66	0,67	0,99

Tabla 4 intervalos para los estratos definidos

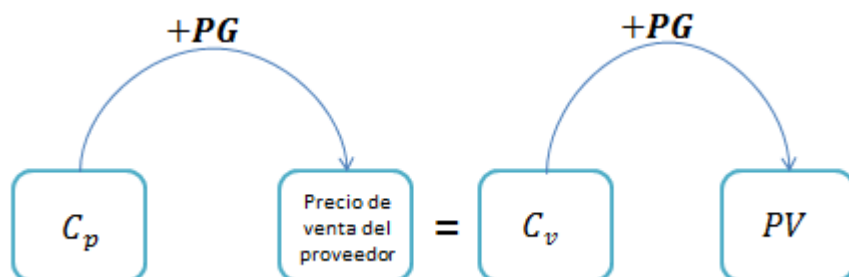
Debido a que cada grupo socioeconómico tiene diferente valoración de la atracción y no se conoce esta valoración, se evaluó el modelo propuesto con todas las posibles combinaciones entre los niveles de la atracción y los grupos socioeconómicos.

8.5.4. Definición de costos

Para estimar los costos asociados en la ecuación 21, se incluyó el parámetro PV que referencia el precio de venta actual en el mercado de \$927.104 (Anexo 7) y el parámetro PG que representa el porcentaje de ganancia esperada y para el cual se establecieron tres niveles de referencia del 30%, 40 y 50%. El parámetro PG es igual para el proveedor y el vendedor pues el modelo logístico tiene como objetivo balancear las ganancias percibidas para los dos eslabones de la cadena.

8.5.4.1. Costo de compra del vendedor y del proveedor

El costo de compra del proveedor y el vendedor representan una dificultad a la hora de obtener un valor exacto, por tal motivo se definió la relación mostrada en la gráfica 4 entre el vendedor y el proveedor.



Gráfica 4 Relación costo de compra del proveedor

C_p : Costo de compra del proveedor

C_v : Costo de compra del vendedor

PV : Precio de venta del producto encontrado en el mercado

PG : Porcentaje de ganancia esperada

A partir de lo anterior, se realizó un análisis de forma inversa que permitió definir el costo de compra del vendedor y el proveedor en términos de un porcentaje de ganancia esperada.

El costo de compra del vendedor será igual al precio de venta encontrado en el mercado menos el porcentaje de ganancia esperada y el costo de compra del proveedor será el costo del vendedor menos el porcentaje de ganancia

8.5.4.2. Costos de mantener y ordenar

Para establecer los costos de mantener y ordenar fue necesario consultar la literatura, pues estos costos no son fáciles de establecer dado que están sujetos a la confidencialidad de cada empresa. A partir de lo anterior, se analizaron las magnitudes de los costos y se establecieron con base en el costo de compra del vendedor (C_v), las siguientes relaciones (Yaghina, 2014):

	Costo	Relación
Vendedor	Mantener	0,15 veces
	Ordenar	41,67 veces
Proveedor	Mantener	0,08 veces
	Ordenar	125,00 veces

Tabla 5 Relación entre los costos del vendedor y el proveedor

De la tabla anterior se muestra que una vez se obtienen los costos de compra del vendedor, los demás costos para el vendedor y el proveedor quedan en función de los costos de compra.

8.5.5. Parámetro de escala del logit (w) y proporción de la población que viola la restricción (η)

Teniendo en cuenta que los parámetros (w) y (η) inciden significativamente en la flexibilidad de la penalización establecida, se analizó el impacto de las restricciones con base en el hecho que las restricciones son independientes y por lo tanto sus umbrales asociados también lo son. La penalización se define como el producto de las restricciones tanto superior como inferior, según lo propuesto por Arenas (2009).

En el Anexo 6 se muestran los diferentes valores del producto de las restricciones al variar los parámetros w y η . Finalmente, se evidenció que las penalidades son demasiado estrictas cuando η tomaba valores inferiores de 0.9 y después de este valor las variaciones no fueron significativas. Al mismo tiempo se observó que no existían grandes variaciones a medida que w aumentaba. Por tal razón, se estableció que se tomaría una penalidad intermedia, la cual permitirá que no se penalice en gran medida la alternativa que sobrepase los umbrales propuestos obteniendo los siguientes resultados.

ω	0,5
η	0,9

Tabla 6 Valores finales para ω y η

8.6. Validación de la solución

Finalmente se planteó la descripción general del problema de optimización teniendo en cuenta los datos descritos previamente. Se evaluó el modelo propuesto frente a dos consideraciones. La primera es determinar el impacto de los descuentos mediante un análisis de sensibilidad y la segunda es comparar el modelo sin tener en cuenta las restricciones en la demanda obteniendo la estimación de la misma mediante un modelo logit clásico. Adicionalmente, para obtener un acercamiento a la influencia del

comportamiento de los clientes en la demanda, se evaluó una tercera consideración asociada a establecer una demanda para cada grupo socioeconómico, es decir se utilizó una demanda desagregada.

8.6.1. Modelo base: logit restringido con demanda agregada

Con el fin de evaluar la veracidad del modelo y su comportamiento frente a los diferentes escenarios propuestos, se tomó el modelo inicial excluyendo la atracción (valoración de los atributos diferentes al precio en la función de utilidad), debido a que su impacto se analizará posteriormente con un análisis de sensibilidad. Por otro lado, la estimación de un valor exacto para la atracción está fuera del alcance de este proyecto.

Conjuntos: Grupos socioeconómicos H: {Bajo, medio, Alto}

Variables:

	Descripción
P	Precio de venta del producto
m	Número de envíos en un ciclo del proveedor
T_v	Tiempo de duración del inventario para el vendedor
T_p	Tiempo de duración del inventario para el proveedor

Tabla 7 Variables de decisión para el modelo

Parámetros:

	Descripción	Valores [Bajo – Medio - Alto]
$D_h(P_i)$	Demanda para cada grupo h	Modelo logit restringido
α_h	Tamaño del mercado para cada grupo h	{50,294- 115,288 – 27,855}
$-b_h$	Coefficientes del precio por cada grupo h	{0.725 - 0.5375 - 0.225}
A_h	Atracción del producto para cada grupo socioeconómico h	{0 - 0 - 0}
PV	Precio de venta en el mercado de un T.V de 32 pulg	\$ 927 104
γ	Min. Precio de venta	\$ 620 999

Λ_h	Max. Disposición a pagar por cada grupoh	{894,615 – 1,190,604 – 1,958,333}
w	Parámetro de escala del Logit binomial	0.5
η	Asociado a la proporción de la población que viola la restricción	0.9
PG	Porcentaje de ganancia esperada	30%, 40% y 50%
C_v	Costo de compra del vendedor	$PV * (1 - PG)$
C_p	Costo de compra del proveedor	$C_v * (1 - PG)$
H_v	Costos de mantener para el vendedor	$C_v * 0.15$
H_p	Costos de mantener para el proveedor	$C_v * 0.08$
A_v	Costos de ordenar para el vendedor	$C_v * 41.67$
A_p	Costos de ordenar para el proveedor	$C_v * 125$

Tabla 8 Valores de los parámetros definidos

Restricciones:

De acuerdo a las restricciones establecidas en la sección 8.3.1. y reemplazando con los valores obtenidos, se definen las siguientes restricciones:

$$\frac{C_v}{2} \leq P \leq (\Lambda_h * 2), \quad \max \Lambda \in H$$

$$0 \leq m \leq 7$$

$$0,08 \leq T_v^* \leq 2$$

* T_v Se define como el tiempo de ciclo de inventario en años para el vendedor. Por lo tanto, la restricción inferior se estableció con base en la rotación de los televisores, donde se espera al menos un pedido al mes, es decir 12 pedidos al año, obteniendo un valor mínimo para T_v , de 0,08. Para la restricción superior se tuvo en cuenta que la obsolescencia en la tecnología está definida con un valor máximo de 2 años debido a que se estima que en el transcurso de ese tiempo ocurren grandes cambios tecnológicos.

Normalización del precio para el logit restringido:

Para la estimación de la demanda se tuvo en cuenta la siguiente normalización del precio:

$$P_{norm} = 1 - \frac{(\Lambda * 2) - P}{(\Lambda * 2) - 0}$$

$$0 \leq P_{norm} \leq 1$$

Ecuación 31 Normalización del precio

8.6.2. Meta heurística

Teniendo en cuenta la solución planteada en la sección 8.3, se utilizó el software computacional R statistics para implementar dicha solución a partir de las ventajas comparativas que se muestran en el Anexo 8. Dentro de este software se utilizó la librería de PSO y mediante instancias de control se establecieron los siguientes parámetros que permitieron una convergencia del modelo:

Parámetros	Valores
Par (Componentes de cada individuo)	Vector vacío de longitud 3
Fn (Función de adaptabilidad)	Función de ganancias conjuntas ecuación 21
Lower (Restricciones inferiores)	Vector que contiene los límites inferiores para cada variable
Upper (Restricciones superiores)	Vector que contiene los límites superiores para cada variable
Maxit (Número de iteraciones)	1500
S (Tamaño de la población)	60
W (Inercia)	Valor mínimo: 0,02 Valor máximo: 2

Tabla 9 Valores del PSO

En el anexo 8 se muestra con mayor detalle el funcionamiento del software y la descripción de los parámetros

8.6.3. Resultados

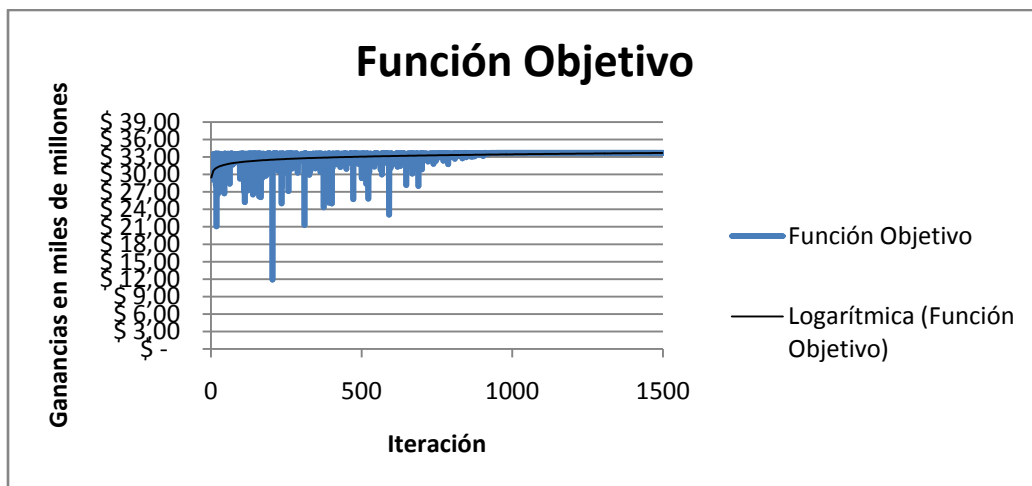
Una vez se estableció el modelo base se ejecutó su solución obteniendo los siguientes resultados:

Parámetros	Ganancia esperada 30%	Ganancia esperada 40%	Ganancia esperada 50%
FO	\$24,171,500,000	\$29,250,350,000	\$33,720,110,000
Precio	\$ 1,079,779	\$ 1,050,611	\$ 1,030,514
Número envíos en el tiempo del proveedor (m)	2	2	2

Duración del inv. Vendedor (Tv)	0.1503	0.1470	0.1450
Tv en días	55	54	53
Número de envíos al año	7	7	7
Duración del inv. Proveedor (Tp)	0.301	0.294	0.290
Tp en días	110	107	106
Q	6023	6159	6243
Demanda	40081	41903	43050
Total costos vendedor	\$ 6,484,300,000	\$23,723,450,000	\$20,305,930,000
Total costos proveedor	\$ 18,634,300,000	\$14,359,020,000	\$10,293,500,000

Tabla 10 Resultados del modelo base

Con el fin observar el comportamiento del PSO a lo largo de las iteraciones, en la gráfica 5 se muestra la variación de la función objetivo para el caso de la ganancia esperada del 50%, la cual evidencia la convergencia del modelo.



Gráfica 5 Convergencia de la función objetivo para el modelo base

Al realizar un análisis comparativo entre los 3 porcentajes, se observó que la mayor ganancia obtenida fue con el 50%. Este valor obtenido está por encima en 1.39 y 1.15 veces de las ganancias del 30% y 40% respectivamente. Este comportamiento se debe a que a medida que aumenta la ganancia esperada para la empresa, la función objetivo se ve afectada en la misma medida debido a su relación directamente proporcional.

En cuanto a la demanda se evidencia que, a un menor precio de venta del producto, la demanda aumenta mediante la siguiente relación: por cada 2 puntos porcentuales que disminuya el precio, la demanda aumenta en un 2,7 % aproximadamente.

Respecto al nivel de inventario se puede observar que para la ganancia esperada del 50% se hacen 7 pedidos al año para suplir su demanda anual. Estos pedidos se realizarán cada 53 días con una cantidad óptima por pedido de 6243 unidades. Por otro lado, el tiempo de ciclo del inventario del proveedor será de 106 días en los cuales el vendedor realizará 2 pedidos dentro de ese ciclo.

Para la ganancia esperada del 30% y 40%, se observa que tienen el mismo número de pedidos al año con respecto a la ganancia del 50%. Sin embargo, es posible apreciar que los costos totales aumentan a medida que disminuye el porcentaje de ganancias esperada. Por lo tanto, el modelo de ganancia esperada del 50%, presenta los menores costos totales siendo inferiores en un 47,4 % y 19,6 % con respecto a los modelos del 30% y 40% respectivamente. Este fenómeno está asociado con los costos de mantener, pues para el vendedor y el proveedor la duración de inventario aumenta a medida que el porcentaje de ganancia disminuye.

Finalmente, al comparar el precio promedio que se obtuvo mediante la observación directa del mercado fue \$ 927.104 con los tres modelos estudiados, el modelo que más se acerca a esta cifra es el modelo con la ganancia del 50 %. Por tal razón para los siguientes análisis se utilizó una ganancia esperada del 50%.

8.6.4. Análisis de atracción

Para la atracción se realizó un análisis de sensibilidad sobre dos factores de estudio (grupo socioeconómico y atracción) con tres niveles cada uno (Bajo, Media, Alto) siendo su variable respuesta el precio. Debido a que el modelo facilita la obtención de los resultados en cuanto a tiempo y dinero, se evaluó todos los posibles valores de atracción dentro de los intervalos definidos anteriormente. Por lo tanto, se obtuvieron 33 resultados para cada posible combinación entre los niveles socioeconómicos y la atracción. (Ver anexo 9)

Una vez obtenidos estos datos se realizó un análisis de varianza como se muestra a continuación:

ANÁLISIS DE VARIANZA					
Origen de las variaciones	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Promedio de los cuadrados	F	Valor- p
Estrato(E)	\$ 6,484,778,577,204	2	8.24E+12	1.49E+06	0.00%
Atractividad (A)	\$ 9,750,856,924	2	4.88E+09	8.83E+02	0.00%
E&A	\$ 2,409,729,336	4	6.02E+08	1.09E+02	0.00%
Error	\$ 1,590,787,406	288	5.52E+06		
Total	\$ 16,498,529,950,870	296	5.57E+10		
$\alpha = 5\%$					

Tabla 11 Análisis de varianza entre el estrato y la atracción

Con un nivel de significancia del 5% se evidenció que el nivel socioeconómico, la atracción y la combinación de ambos factores afectan significativamente el precio óptimo del modelo, por lo tanto, también afecta significativamente todo el modelo logístico. Con base en el coeficiente de determinación ajustado se estableció que el 99.9% de la variación observada del precio es explicada por el modelo.

Dado los resultados anteriores, se observa que la atracción toma gran relevancia en el modelo tanto para la definición de precios como para la gestión de inventarios. Sin

embargo, se estableció que la atracción tuvo un valor de 0, debido a que el cálculo de esta se encuentra por fuera de este estudio.

8.6.5. Escenario 1: Análisis de descuentos

Con el fin de analizar el impacto logístico al incorporar el parámetro de descuentos de ventas (r), se definió el descuento con base en el porcentaje de ganancia percibida (PG).

Teniendo en cuenta lo anterior, y para que no se presenten pérdidas con respecto al parámetro PG , es importante relacionar el valor del precio de venta encontrado en el mercado con los descuentos y con el costo de compra del vendedor mediante la siguiente relación:

$$C_v \leq PV * (1 - r)$$

Ecuación 32 definición de costo de compra para el vendedor

$$C_v \leq \frac{C_v}{(1 - PG)} (1 - r)$$

Ecuación 33 Costo de compra el vendedor relacionado con el porcentaje de ganancia

Despejando r se obtiene la siguiente relación:

$$r \leq PG$$

Ecuación 34 Relación entre los descuentos y el porcentaje de ganancias

Se observa que el límite superior del descuento será el porcentaje de ganancia esperada que se establezca. De esta manera, la función de utilidad del modelo logit restringido se ajustó como se muestra en la ecuación 35 y 36:

$$U_{hi} = -b_h P_i (1 - r) \forall h \in N \wedge i = 1$$

Ecuación 35 Utilidad ajustada con descuento

$$D_h(P_i) = \alpha_h \frac{e^{-b_h P_i (1 - r)}}{1 + e^{-b_h P_i (1 - r)}}, \quad \forall h \in N$$

Ecuación 36 demanda ajustada con descuento

Adicionalmente se ajustó la función objetivo de la siguiente manera:

$$Ganancia(P, m, T_v, T_p) = \sum_h D_h(P_i) (P(1-r) + C_v) - \left\{ 0,5(m-1)T_v H_p \sum_h D_h(P_i) + \frac{A_p}{mT_v} + \sum_h D_h(P_i) C_p \right\} - \left\{ 0,5H_v T_v \sum_h D_h(P_i) + \frac{A_v}{T_v} + \sum_h D_h(P_i) C_v \right\}$$

Ecuación 37 Función objetivo ajustada con descuento

Finalmente, con base en la ganancia esperada del 50% (límite superior) y la observación directa en el mercado, se estableció que el descuento más frecuente es del 20% sobre el precio de venta.

Datos obtenidos para el 20% de descuento

Parámetros	Ganancia 50%
FO	\$ 24,690,610,000
Precio	\$ 1,030,514
Número envíos en el tiempo del proveedor	2
Duración del inv. Vendedor (Tv)	0.1450
Tv en días	53
Número de envíos al año	7
Duración del inv. Proveedor (Tp)	0.2900
Tp en días	106
Q	6510
Demanda	44896
Total costos vendedor	\$ 20,305,930,000
Total costos proveedor	\$ 10,293,500,000
Precio con 20% de descuento	\$ 824,411

Tabla 12 datos obtenidos para el 20% de descuento

A partir de la tabla anterior, se observa que al incorporar el descuento todos los parámetros asociados se ven afectados, especialmente la demanda y las ganancias. Con un 20% de descuento, la demanda aumentó con respecto al modelo base en un 4,29% pero las ganancias totales decrecieron en un 36,6%.

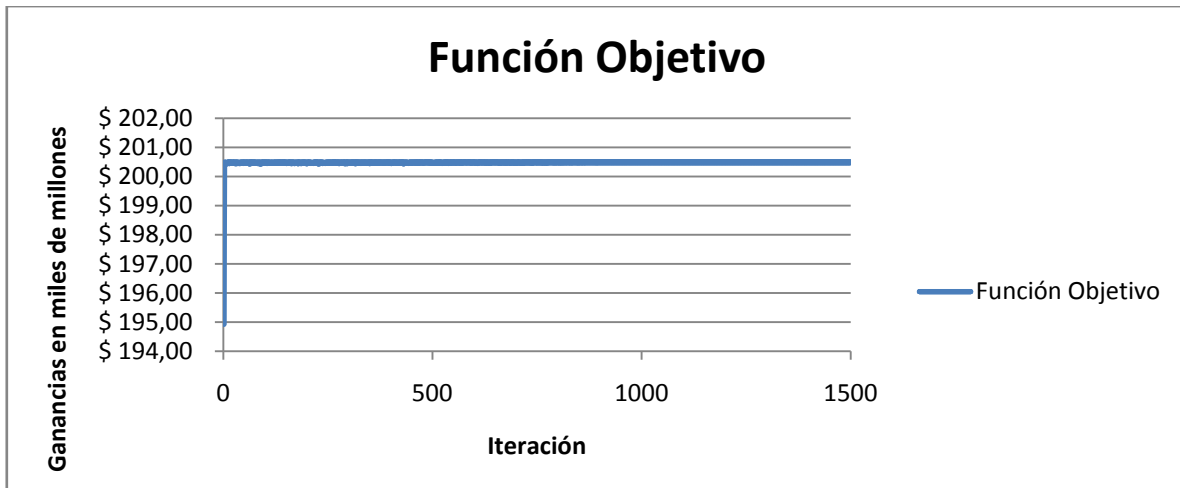
8.6.6. Escenario 2: Modelo logit

Con el fin de analizar el impacto de las restricciones, se omitió la inclusión de estas para la demanda logrando el análisis de sensibilidad sobre el modelo logit clásico. A continuación, se presenta los datos obtenidos:

Parámetros	Ganancia esperada 50%
FO	\$ 200,486,000,000
Precio	\$ 3,916,667
Número envíos en el tiempo del proveedor	2
Duración del inv. Vendedor (Tv)	0.1287
Tv en días	47
Número de envíos al año	8
Duración del inv. Proveedor (Tp)	0.2575
Tp en días	94
Q	7031
Demanda	54611
Total costos vendedor	\$ 25,709,260,000
Total costos proveedor	\$ 13,012,920,000

Tabla 13 Resultados del modelo logit

Con el fin observar el comportamiento del PSO a lo largo de las iteraciones, en la gráfica 6 se muestra la variación de la función objetivo para el caso del modelo logit clásico, la cual evidencia la convergencia del modelo.



Gráfica 6 Convergencia de PSO para el modelo logit con ganancias del 50%

A partir de los resultados obtenidos, se observó que al no tener en cuenta las restricciones dentro del modelo, la demanda se sobrevaloró en 26,8% con respecto al modelo base. A su vez, esta sobrevaloración implicó que las ganancias aumentarían 4 veces con respecto al modelo base. Adicionalmente, se evidenció que el precio tiende al límite superior impuesto, de tal manera que para un producto como el televisor LED de 32 pulgadas se tuvo un precio elevado de 4,2 veces al encontrado en el mercado. Este resultado muestra la contribución del modelo logit restringido en relación al modelo clásico.

8.6.7. Escenario 3: Demanda desagregada

Con el objetivo de analizar la influencia y el impacto logístico de cada subgrupo definido dentro de la demanda, se ejecutó un modelo por cada grupo socioeconómico, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- Atracción igual a 0
- Ganancia esperada igual al 50%
- Estimación de la demanda mediante un modelo de logit restringido.

A partir de lo anterior se muestran los resultados obtenidos:

Parámetros	Bajo	Medio	Alto
FO	\$ 912,741,000	\$ 22,901,800,000	\$ 1,457,199,000
Precio	\$ 962,381	\$ 1,042,319	\$ 1,386,959
Número envíos en el tiempo del proveedor	2	2	2
Duración del inv. Vendedor (Tv)	0.2535	0.1769	0.8146
Tv en días	93	65	297
Número de envíos al año	4	6	1.2
Duración del inv. Proveedor (Tp)	0.5070	0.3538	1.6293
Tp en días	185	129	595
Q	3571	5117	823
Demanda	14089	28928	1010
Logit restringido	0.280	0.251	0.0489
Total costos vendedor	\$,731,220,000	\$ 13,696,550,000	\$ 694,587,900
Total costos proveedor	\$,446,009,000	\$ 6,963,481,000	\$ 372,309,900

Tabla 14 Resultados del modelo con demanda desagregada

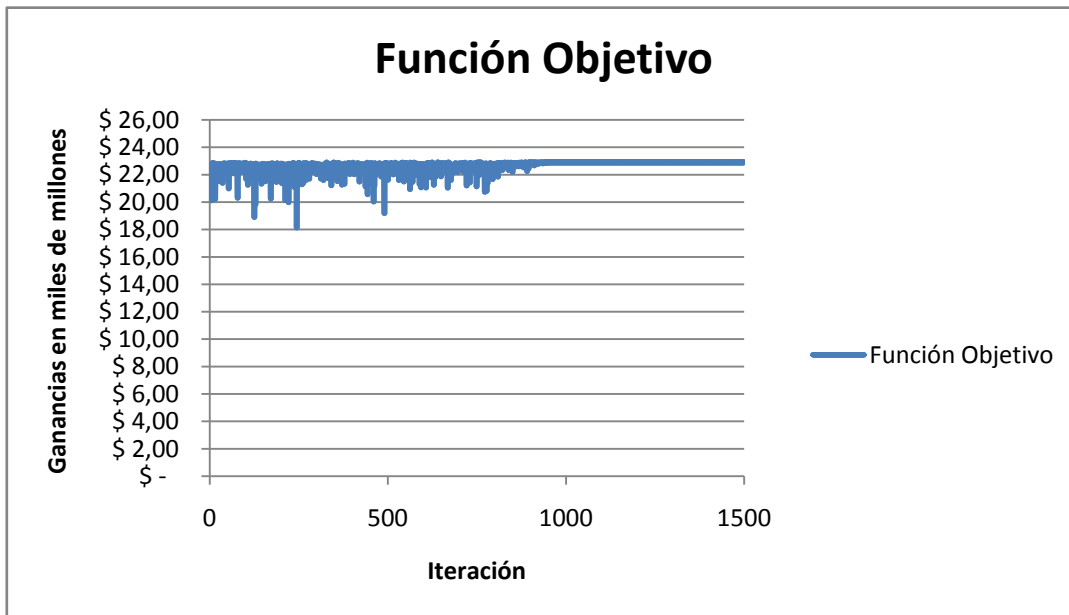
Adicionalmente se muestra el aporte de cada grupo socioeconómico a la demanda agregada del modelo base:

Subgrupos	Bajo	Medio	Alto
Ganancia del 50%	12623	29341	1086

Tabla 15 Influencia de los subgrupos en la demanda agregada

Con el fin observar el comportamiento del PSO a lo largo de las iteraciones, en la gráfica 7 se muestra la variación de la función objetivo para el caso del estrato medio, la cual

evidencia la convergencia del modelo.



Gráfica 7 Convergencia del PSO para el estrato medio

Se observó que al igual que en modelo base la mayor demanda está asociada al estrato medio seguida del estrato bajo y por último el estrato alto. Este comportamiento de la demanda es explicado debido a la distribución de la población encuestada, la cual fue del 26 % correspondiente al nivel bajo, el 59,6% al nivel medio y el 14,4% al nivel alto. Adicionalmente, se observa que la demanda de cada grupo varía en diferente proporción con relación precio de venta establecido, por lo tanto, al tomar como referencia el precio del modelo base se evidenció que en el estrato bajo el precio disminuyó en un 7% lo cual produjo un aumento del 12% en su demanda. Para el estrato medio el precio aumentó en 1% lo cual trajo como consecuencia una disminución en la demanda del 1,4%. Para el último grupo, el estrato alto, el precio aumentó en un 26% provocando una disminución del 7% de la demanda.

Respecto a la duración del inventario del proveedor se puede observar que para el estrato alto se hacen un pedido cada 297 días para suplir su demanda anual siendo su ciclo de inventario de 595 días. Esta larga duración puede afectar significativamente la devaluación del inventario, es decir que a medida que pase el tiempo la unidad perderán su valor comercial debido a que los avances de tecnología inciden significativamente en el mercado de televisores provocando que la mercancía se convierta en obsoleta.

Finalmente se observa que la población objetivo está ubicada en el estrato medio puesto que este estrato aporta un 65,7% de la demanda total. Por tal motivo para facilitar la comparación entre los diferentes escenarios propuestos, se evaluará el impacto de este escenario sólo mediante el estrato medio.

8.7. Evaluación del impacto de la solución propuesta

Para evaluar el comportamiento de todos los escenarios respecto al modelo base se utilizaron los siguientes indicadores

- Margen de utilidad bruta: este indicador refleja la capacidad de la empresa en la generación de ganancias antes de los gastos de administración, ventas y otros. (Ver anexo 10).
- Rotación de inventario: Este indicador permite cuantificar el tiempo que se demora los costos en inventarios en convertirse en dinero y permite saber el número de veces que el inventario va al mercado y cuántas veces se repone. (Javeriana, 1999) (Ver anexo 11).
- Participación en el mercado: este indicador determina el porcentaje del mercado total que cubre el vendedor. (Ver anexo 12).

8.7.1. Análisis del margen de ganancia bruta

Debido a que no existe un margen de ganancia bruta específica para cada sector de la economía, se estableció un nivel de margen de ganancia bruta del 30%. Se observó que entre los cuatro modelos, que el modelo logit es el que presenta mayor margen de ganancia bruta con un valor del 83,81%, debido a la sobrestimación de la demanda, lo cual aleja este resultado de la realidad. En segundo lugar, está el modelo de demanda desagregada con 52,57%, que tampoco se asemeja a la realidad ya que no se tiene un servicio de venta especializado por nivel socioeconómico. En tercer lugar, el modelo base obtuvo una ganancia bruta del 52,43%, seguido por el modelo con descuentos que obtuvo una ganancia bruta del 42,7%. Por lo tanto, los descuentos no alcanzan a capturar la demanda para incrementar la ganancia bruta del modelo base, es decir, bajo este escenario no se recomendaría aplicar una política de descuentos.

8.7.2. Análisis de rotación de inventario para el vendedor

Teniendo en cuenta que los televisores son un producto de baja rotación anual, se consideró que una rotación superior a dos veces por año sería aceptable. El mejor resultado se obtuvo en el modelo con descuentos con una rotación de 5,7 veces al año. Mientras que el peor escenario se presentó en el modelo logit obteniendo una rotación de 1,4 veces por año. Por otro lado, el modelo de demanda desagregada presentó una rotación de 3,9 veces al año que no describe con exactitud la dinámica del mercado, pues se asume un servicio de venta especializado por nivel socioeconómico lo cual se aleja de la realidad. Finalmente, el modelo base obtuvo una rotación de inventario de 4,8 veces al año, evidenciando que la estimación de la demanda afecta directamente las decisiones de inventarios. Por ello, es

importante tener una buena estimación en la demanda que se ajuste al comportamiento real del mercado como en el caso del modelo base.

8.7.3. Análisis de la participación en el mercado

Considerando que la estimación de la demanda es fundamental en los cuatro modelos, se utilizó este indicador para percibir la cobertura de la población objetivo que asume cada modelo. Es necesario aclarar que solamente el modelo base y el modelo con descuentos serán evaluados debido a que los otros dos modelos no son reales. Entonces, se evidenció que el mejor resultado se obtuvo en el modelo con descuentos con una participación del 23 %, mientras que la participación del modelo base fue del 22%. Adicionalmente, se observó que los descuentos aumentan la participación en el mercado, pero no generan ganancias superiores al modelo base, pues las ganancias del modelo base son 36,6% superiores al modelo con descuentos. Por lo tanto, mediante este análisis no se recomendaría aplicar una política de descuentos.

9. Conclusiones

Durante el desarrollo de este trabajo de grado fue importante incorporar el comportamiento de los consumidores mediante la segmentación del mercado objetivo en diferentes grupos socioeconómicos con valoraciones de compra distintas y diferentes restricciones de los atributos de los productos. En particular, para nuestro ejemplo de aplicación se segmentó la población entre los ingresos bajos, medios y altos de acuerdo a la estratificación colombiana. Al evaluar el comportamiento de cada grupo socioeconómico frente a la elección de un mismo artículo, la elección se ve condicionada a la alternativa que no sobrepase sus restricciones endógenas. Por ello, surge la necesidad de utilizar el modelo logit restringido en la modelación de la demanda lo cual permitió la incorporación de dos restricciones asociadas a la máxima disposición a pagar por estrato y el mínimo precio al que el vendedor está dispuesto a vender.

Otro aspecto importante que surgió al analizar el comportamiento de los grupos previamente definidos fue el impacto de las características asociadas a un producto. Se evidenció que las características son evaluadas y apreciadas de manera distinta por cada grupo, por lo tanto, se determinó que las características, e.g., resolución, puertos HDMI, wifi, entre otras, influyen de forma diferenciada en la elección de compra del producto analizado en este proyecto, i.e., los televisores LED de 32 pulgadas. Adicionalmente se puede concluir que con base en el análisis de varianza para establecer un precio de venta de los televisores es importante tener en cuenta la interacción entre el estrato social de la población objetivo y su percepción de las características propias de un televisor.

Además, se pudo analizar el comportamiento del modelo propuesto con la demanda agregada frente a tres escenarios. El primer escenario se basó en el modelo base con análisis de sensibilidad sobre posibles descuentos, el segundo escenario estimó la demanda mediante un modelo logit sin restricciones y el tercer escenario fue un modelo con demanda desagregada para cada segmento socioeconómico. A partir del primer escenario se observó que al tener en cuenta una política de descuentos basada en la ganancia esperada del vendedor, los descuentos aumentan la participación en el mercado pero no generan ganancias superiores al modelo base. Es decir, el valor de la función objetivo disminuyó con respecto al modelo base y a su vez la demanda presentó un aumento lo cual puede ser tomado como una estrategia de crecimiento para aumentar la participación en el mercado a largo plazo.

Para el segundo escenario, el modelo logit obtuvo resultados favorables en comparación con los otros escenarios propuestos. Al omitir las restricciones se observó un aumento significativo en la demanda y las ganancias conjuntas del proveedor y el vendedor, sin embargo, al no incluir las restricciones el modelo, se presenta poca confiabilidad al no adaptarse a un comportamiento más real de los consumidores. Lo anterior, hace que el nivel de inventario aumente al menos en un 12,6%, lo cual no significa que los costos en inventario se conviertan en efectivo debido a la poca veracidad del modelo trayendo como consecuencia una sobreestimación de la demanda y una gran cantidad de producto en inventario. Además, se evidencia que el valor del producto que el modelo propone está lejos de la máxima disposición a pagar de la población objetivo lo cual hace que el producto no esté dentro de los intereses de los consumidores y bajo dicho precio su demanda finalmente sea cero asumiendo la restricción de ingreso o disposición máxima a pagar.

Por otro lado, el tercer escenario con demanda desagregada permite identificar una población objetivo teniendo en cuenta el grupo socioeconómico con mayor demanda, permitiendo que las empresas seleccionen un nicho de mercado para el desarrollo de estrategias enfocadas en las necesidades de esta población y desarrollando productos o servicios personalizados con base en las características del grupo de interés

Adicionalmente, se podría definir una política de ventas la cual esté fundamentada en la localización de una empresa y el ambiente socioeconómico en el que se encuentre con el fin de establecer diferentes precios que estén alineados con la máxima disposición a pagar del grupo más influyente obteniendo un mejor margen de ganancias

Finalmente, al evaluar las suposiciones descritas del modelo en cuanto a la relación única del vendedor y el proveedor, se concluye que este supuesto puede ocasionar grandes impactos logísticos pues el vendedor está supeditado a un solo proveedor corriendo el riesgo de que la capacidad del proveedor no le permita abastecer por completo la demanda del vendedor. Por otro lado, esta única relación permite la posibilidad de crear estrategias de precio conjuntas para obtener mayores ganancias.

10. Recomendaciones

- Para dar continuidad a este trabajo, se propone realizar un estudio econométrico con el fin de establecer y cuantificar las características que más influyen en la decisión de compra para un determinado producto. Por otro lado, sería de gran utilidad analizar el impacto de políticas de mercadeo en el comportamiento y predicción de la demanda.
- Se recomienda incorporar modalidades de pago para los clientes con el fin de determinar y cuantificar el impacto de las ventajas y desventajas de estas modalidades dentro de la utilidad percibida por las personas en el modelo logit, como por ejemplo el impacto que tienen los intereses en las personas, con el fin de establecer modalidades de pago que permitan aumentar la demanda.
- Debido a la importancia de la gestión de inventarios y con el fin de mantener la relación entre el vendedor y el proveedor, se podría analizar la posibilidad de gestionar el inventario seagestionado por el proveedor bajo un modelo VMI (por sus siglas en inglés VMI, VendorManagmentInventory), dado que presenta ventajas significativas como la alta disponibilidad de los productos, la reducción en los costos de inventario, disminución en los incidentes en los pedidos, y reducción del tiempo de reaprovisionamiento. En cuanto al cliente, se crean relaciones más sólidas debido al aumento en el nivel de servicio en la cadena de abastecimiento.

11. Bibliografía

- Alelú Hernández, M., Cantín García, S., López Abejón, N., & Rodríguez Zazo, M. (2014). *Estudio de Encuestas*. Medellín: Universidad Autónoma de Medellín.
- Alvarado, J., & Obagi, J. (2010). *Fundamentos de inferencia estadística*. Bogotá: Javeriana.
- Arenas, M. A. (2009). *Calibración de un modelo de elección discreta logit con restricción del conjunto de alternativas*. Santiago de Chile: Repositorio Universidad de Chile.
- Arenas, M. A. (2009). *Calibración de un modelo de elección discreta Logit con restricción del conjunto de alternativas*. Santiago de Chile: Universidad de Chile.
- Arenas, M. A. (Enero de 2009). *Repositorio universidad de Chile*. Recuperado el 16 de 04 de 2016, de <http://repositorio.uchile.cl/handle/2250/102178>
- Ballestín, A. (29 de Abril de 2014). *Quesabesde*. Recuperado el 14 de Septiembre de 2015, de Quesabesde: http://www.quesabesde.com/noticias/las-ventas-de-nokia-caen-30-por-ciento_11699
- Baquela, E., & Redchuk, A. (2013). *Optimización Matemática con R Volumen I: Introducción al modelado y resolución de problemas*. Madrid: Bubok Publishing S.L.
- Bendtsen, C. (2012). Package 'pso'. *Repositorio CRAN*, 5-7.
- Berger, P., & Nasr Bechwati, N. (2001). *The Allocation of Promotion Budget to Maximize Customer Equity*. Omega.
- Caicedo, F., López Ospina, H., & Malagrida, P. (2015). Environmental repercussions of parking demand Management strategies using a constrained logit model. *Submitted to Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 1-4.
- Caicedo, R. F. (20 de Mayo de 2013). *Repositorio Universidad Javeriana*. Recuperado el 23 de 02 de 2016, de <http://repository.javeriana.edu.co/bitstream/10554/15673/1/OteroCaicedoRicardoFernando2013.pdf>
- Castillo López, I., & López Ospina, H. (2015). School location and capacity modification considering the existence of externalities in students school choice. *Computers & Industrial Engineering*, 1-4.
- Castro, M., Martinez, F., & Munizaga, M. (2013). Estimation of a constrained multinomial logit model. *Transportation*. Springer, 1-2.
- Cataldoa, A., Lopez Ospina, A., Pérez, J., & Ferrera, J. (2015). Pricing and Composition of Bundles with Constrained Multinomial Logit. *International Journal of Production Research*, 1-3.

- Ciencias, U. N. (2006). *DETERMINACIÓN DEL CONSUMO FINAL DE ENERGÍA EN LOS SECTORES RESIDENCIAL URBANO Y COMERCIAL Y DETERMINACIÓN DE CONSUMOS PARA EQUIPOS DOMÉSTICOS DE ENERGÍA ELÉCTRICA Y GAS*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias.
- Daesoo, K., & Won, L. (1998). *Optimal Joint Pricing and Lot Sizing with Fixed and Variable Capacity*. Milwaukee: European Journal of Operational Research.
- Ding, Y., Veeman, M., & Adamowicz, W. (2012). The influence of attribute cutoffs on consumers' choices of a functional food. *European Review of Agricultural Economics*, 39(5), 745-769.
- Dirección de Metodología y Producción Estadística - DIMPE. (2013). *Gran Encuesta Integrada de Hogares - GEIH*. Bogotá: DANE.
- Duarte Guterman & Cia. Ltda. (2015). *CARACTERIZACIÓN SOCIOECONÓMICA DE BOGOTÁ Y LA REGIÓN*. Bogotá: SDP.
- El financierocr. (01 de Noviembre de 2013). Nokia, la historia de una estrepitosa caída. *El financiero*, 1.
- Elpais.com.co. (27 de Agosto de 2015). Altos costos ponen en riesgo la operatividad de las empresas del país. *ELpais.com.co*.
- espectador, E. (4 de Enero de 2015). ¿Cómo se distribuye un salario mínimo en Colombia? *El espectador*, pág. 1.
- Ferrel, O., & Hartline, M. (2006). Estrategia de Marketing. En O. Ferrel, & M. Hartline, *Estrategia de Marketing* (págs. 229-242). Pearson/Prentice Hall.
- Gil González, W. J., Mora Flórez, J. J., & Pérez Londoño, S. (2013). Análisis comparativo de metaheurísticas para calibración de localizadores de fallas en sistemas de distribución. *Scielo*, 4-6.
- González, C., & Serna, N. (2013). The consumer's choice among television displays:A multinomial logit approach. *Lecturas de Economía*, 2-3.
- González, N. G. (2012). *bdigital universidad nacional*. Recuperado el 13 de Septiembre de 2015, de bdigital universidad nacional:
http://www.bdigital.unal.edu.co/9035/1/7709509.2012_.pdf
- Greene, W. (2012). *El análisis econométrico*. Boston: Pearson Educación.
- Guerra Álvarez, N., & Broderick Crawford, L. (2006). Optimización de funciones a través de Optimización por Enjambre de Partículas y Algoritmos Genéticos. *Pontificia Universidad Católica de Valparaíso*, 9.

- Herrera, C. (2014). Desarrollo de un modelo de elección de ruta en metro. *Tesis de Maestría En Ingeniería de Transporte*.
- Hillier, F. (2003). Handbook of metaheuristics. En F. Hillier, *Handbook of metaheuristics* (pág. 621). Kluwer Academic Publishers.
- Hinestroza, O. M. (2012). *Trabajo de investigación*. Bogotá: Universidad Uniminuto.
- Icontec. (2011). *ISO 13053:2011, Métodos Cuantitativos para la mejora de procesos – Six Sigma*. Bogotá: comité tecnico ISO/TC.
- Javeriana. (03 de 12 de 1999). *Pontificia Universidad Javeriana*. Recuperado el 07 de 05 de 2016, de <http://www.javeriana.edu.co/decisiones/analfin/capitulo2.pdf>
- Kantor, D. (2014-2015). Crece 30% la TV pero se enfría la demanda de electrodomésticos. *Clarín*, 1-2.
- LG. (2014). *¿Cuál es la diferencia entre televisores LCD, plasma y LED LG?* Bogotá: LG.
- Lu, R., Chorus, C., & Van Wee, B. (2014). Travelers' use of ICT under conditions of risk and constraints: an empirical study based on stated and induced preferences. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 41(5), 928-944.
- Manski, C. (1977). *Alternative estimators and sample desing for discrete choice analysis*. MIT Press.
- Marchand, H., Martin, A., Waismantel, R., & Wolsey, L. (2002). Cutting planes in integer and mixed integer programming. En H. Marchand, A. Martin, R. Waismantel, & L. Wolsey, *Cutting planes in integer and mixed integer programming* (págs. 1-2). Louvain la neuve: Discrete Applied Mathematics.
- Marchand, H., Martin, A., Waismantel, R., & Wolsey, L. (2002). Cutting planes in integer and mixed integer programming. En H. Marchand, A. Martin, R. Waismantel, & L. Wolsey, *Cutting planes in integer and mixed integer programming*. Discrete Applied Mathematics.
- Martínez, F. (2009). *The constrained multinomial logit: a semi- compensatory choice model*. Santiago de Chile: Universidad de Chile.
- Martínez, F., & Donoso, P. (2010). The MUSSA II land use auction equilibrium model. In Residential Location Choice. *Springer Berlin Heidelberg*, 1-2.
- Meindl, P., & Sunil, C. (2006). Supply Chain Management. En P. Meindl, & C. Sunil, *Entender qué es la cadena de suministro*. (págs. 10-12). Pearson/Prentice Hall.
- Mendes, R., & Kennedy, J. (2002). Population Structure and Particle Swarm Performance. *Universidade do Minho*, 5-6.

- Merino Maestre, M. (2009). *Técnicas Clásicas de Optimización*. Recuperado el 06 de 11 de 2015, de http://www.ehu.es/mae/html/prof/Maria_archivos/plnlapuntes.pdf
- Montgomery, D. (2006). Design and analysis of experiments. En D. Montgomery, *Design and analysis of experiments* (págs. 94-96, 111-114). Limusa.
- NCS Pearson. (2016). *TutorVista*. Recuperado el 14 de 01 de 2016, de TutorVista: <http://formulas.tutorvista.com/math/anova-formula.html>
- Ospina, H. A. (Julio de 2013). *Repositorio universidad de Chile*. Recuperado el 1 de Septiembre de 2015, de Repositorio universidad de Chile: http://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/114573/cf-lopez_ho.pdf?sequence=1
- Parsopoulos, K. a. (2002). Recent approaches to global optimization problems through Particle Swarm Optimization. *Natural Computing*.
- Portafolio. (2015). En 12% creció el sector tecnología y electrodomésticos. *Portafolio*, 1-3.
- Prieto, G. (s.f.). *Uniandes*. Recuperado el 16 de 02 de 2016, de <http://www.prof.uniandes.edu.co/~gprieto/classes/compufis/interpolacion.pdf>
- Rodríguez Donate , M. C., & Cáceres Hernandez, J. j. (Marzo de 2013). *Modelos de elección discreta y especificaciones ordenadas: una reflexión metodológica*. Recuperado el 12 de Octubre de 2015, de Modelos de elección discreta y especificaciones ordenadas: una reflexión metodológica: www.uam.es/personal_pdi/economicas/eva/pdf/logit.pdf
- Sandoval, O. C. (2011). *www.urs.edu*. Recuperado el 2 de Octubre de 2015, de www.urs.edu: <http://www.urs.edu/fondoeditorial/libros/pdf/manualdestatistix/cap10.pdf>
- Secretaria Distrital de Planeación. (2015). *Población de Bogotá D.C. y sus localidades*. Bogotá: SDP.
- Semana. (2015). Este año se han vendido un millón de televisores. *Semana*, 1-3.
- Tamblay, L., Martinez, F., & Weintraub, A. (2011). School locations and vacancies: a constrained logit equilibrium model. *Environment and Planning*, 1-2.
- Vermorel, J. (01 de 2012). *Lokad*. Recuperado el 16 de 01 de 2016, de <https://www.lokad.com/es/cantidad-economica-orden-definicion-y-formula>
- Whitin, T. M. (1955). *Inventory Control and Price Theory*. Management Science 2.
- Wordpress. (22 de Mayo de 2015). *Definición.de*. Recuperado el 22 de Septiembre de 2015, de Definición.de: definicion.de/modelo-matematico/
- Yaghina, R. G. (2014). Enhanced joint pricing and lotsizing problem in a two-echelon. *International Journal of Production Research*, 1-3.

12. Anexos

12.1. Anexo 1- Análisis del proveedor y el vendedor

Análisis del vendedor

Para el modelo logístico no lineal se tomó como base un modelo de inventario básico para posteriormente analizar sus variaciones y conocer sus impactos dentro de un modelo conjunto. Se asumió entonces que el vendedor es un distribuidor minorista que se encarga de comprar un producto y revenderlo, por esta razón su función de ganancias en un intervalo de tiempo T_v esta descrita de la siguiente manera:

$$Ganancias = QP - (H_v \frac{Q}{2} T_v + A_v + QC_v)$$

Ganancias generales

Para obtener las ganancias totales anuales la función de ganancias generales se multiplica por el número de pedidos al año $n = \frac{D}{Q}$, obteniendo la siguiente función:

$$Ganancia = \frac{D}{Q} (QP - (H_v \frac{Q}{2} T_v + A_v + QC_v))$$

Análisis de ganancias

Simplificando y teniendo en cuenta la relación entre el tiempo de duración de inventario y el número de envíos dentro de un año $T_v = \frac{1}{n}$ se obtiene la siguiente ecuación:

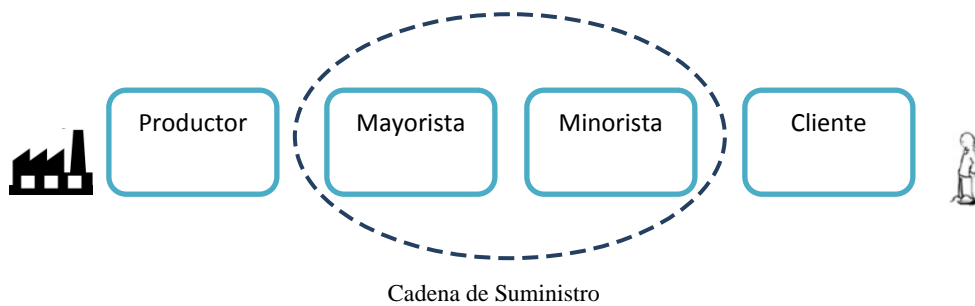
$$Ganancia = \sum_h D_h(P_i) P - \left\{ 0,5 H_v T_v \sum_h D_h(P_i) + \frac{A_v}{T_v} + \sum_h D_h(P_i) C_v \right\}$$

Ganancias anuales

Análisis del proveedor

Para el caso del proveedor se asumió que este es un mayorista que compra un producto para comercializar dentro de sus canales de distribución y obtener un beneficio. Por lo tanto, se asume un modelo EOQ dando como resultado una función de ganancia similar a la del vendedor dada en la ecuación de las ganancias anuales, con las siguientes diferencias:

1. Las ganancias del proveedor son calculadas con base en el precio de compra del vendedor del producto a distribuir.



2. Una vez se definieron estas dos ecuaciones y con el fin de integrarlas correctamente, fue necesario crear una relación para coordinar los inventarios entre ellos con base en el tiempo de reabastecimiento del proveedor para evitar un modelo de inventarios con faltantes de producto.

$$T_p = mT_v$$

Relación entre T_p y m

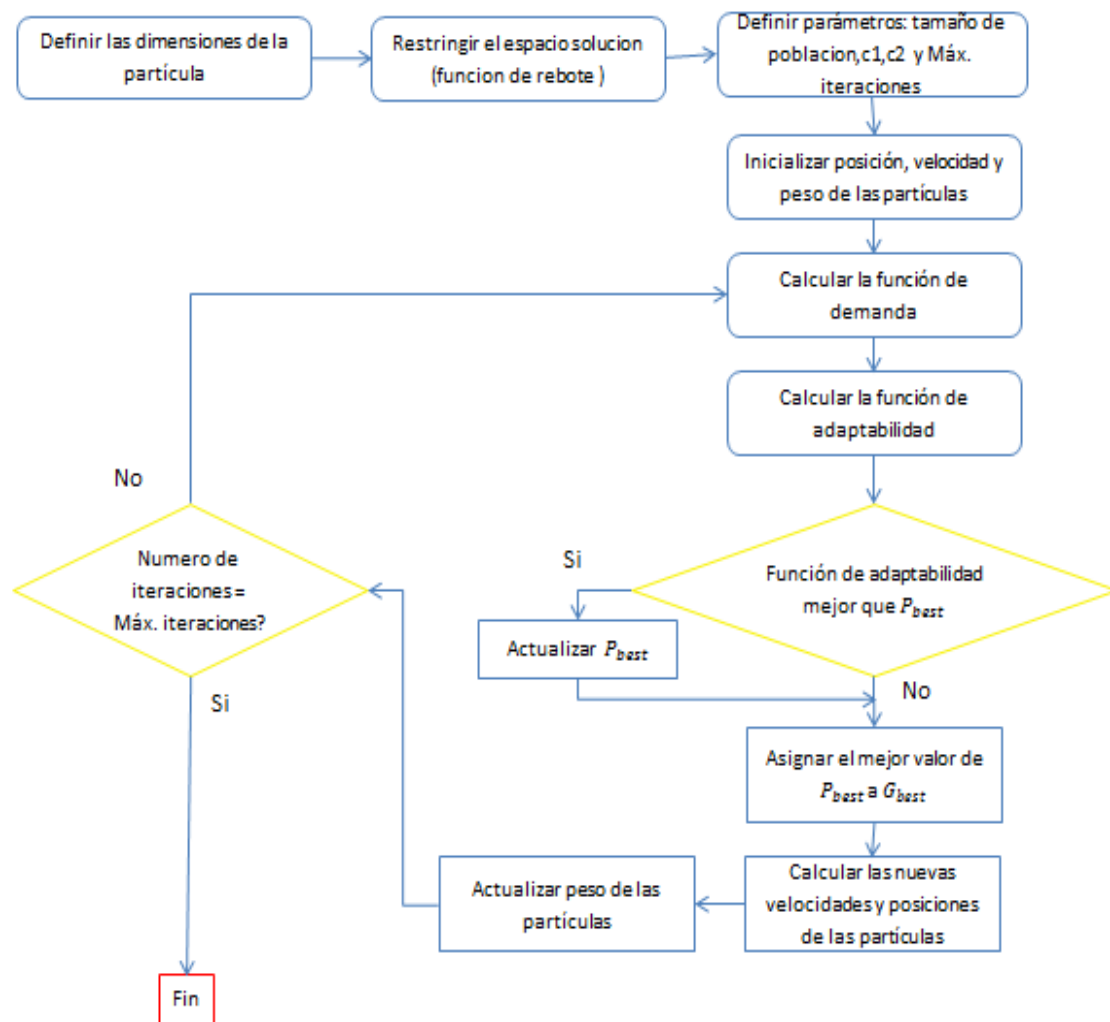
Mediante la relación anterior se establece que m será el número de pedidos que realiza el vendedor en el tiempo de ciclo del proveedor T_p .

3. El número de pedidos que mantiene el proveedor es uno menos con relación a los del vendedor pues el reabastecimiento es instantáneo.

Finalmente se obtiene una función conjunta teniendo en cuenta que no se tuvo presente un modelo con descuentos ya que el beneficio percibido en los costos de compra del vendedor impactaría negativamente en la misma medida a las ventas del proveedor. Por tal razón el beneficio no se ve reflejado dentro de la función objetivo conjunta, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 & \text{Ganancia}(P, m, T_v, T_p,) \\
 &= \sum_h D_h(P_i) (P + C_v) - \left\{ 0,5(m-1)T_v H_p \sum_h D_h(P_i) + \frac{A_p}{mT_v} + \sum_h D_h(P_i) C_p \right\} \\
 &- \left\{ 0,5H_v T_v \sum_h D_h(P_i) + \frac{A_v}{T_v} + \sum_h D_h(P_i) C_v \right\}
 \end{aligned}$$

12.2. Anexo 2-Diagrama de solución



12.3. Anexo 3- Selección de producto

Para el inicio del 2015 las ventas en tecnología tuvieron un incremento del 12%, divididas entre el 21,1% para los electrodomésticos y el 78,8% para otros dispositivos electrónicos, donde el artículo más vendido fueron los televisores con unas ventas anuales de 2,1 billones de pesos, en segundo lugar los celulares con un total de 1,9 billones de pesos y los computadores ocuparon el tercer lugar con ventas de 1,2 billones de pesos siendo el grupo de electrodomésticos el de mayor crecimiento y proyección en ventas en el mercado, por ello se eligió trabajar con el sector de tecnología enfocando la elección del producto a los electrodomésticos, (Portafolio, 2015).

Luego de este análisis y con el fin de facilitar la recolección de datos del producto que se iba a seleccionar, se tomó como referencia estudios anteriormente realizados para conocer el grupo de electrodomésticos que presentan un alto uso en las familias colombianas encontrando los siguientes dispositivos: la luminaria, la estufa, el televisor, la nevera, la plancha, la licuadora, la lavadora y el calentador de agua, (Ciencias, 2006). Es importante mencionar que la encuesta nacional de hogares 2012-2013 realizada por el DANE (Departamento Administrativo Nacional de Estadística) en 13,4 millones de familias informa que en Colombia hay 14,3 millones de televisores, es decir que 91 % de los hogares tienen televisor, (Dirección de Metodología y Producción Estadística - DIMPE, 2013). De los productos anteriormente nombrados el televisor muestra números positivos que representan una ventaja significativa frente al enfriamiento de la demanda en el resto de la categoría de la industria tecnológica (Kantor, 2014-2015), con cifras importantes de 601.000 millones de televisores según el DANE para el 2013 y con ventas por encima de 787.000 millones de pesos para el mismo año, (Semana, 2015). En consecuencia, el grupo

seleccionado fue el de los televisores teniendo en cuenta los aspectos anteriormente nombrados: el comportamiento de la demanda, sus cifras significativas en ventas y la presencia en los hogares colombianos.

Una vez escogido el grupo de los televisores fue importante seleccionar un artículo más específico con base en el tipo y el tamaño para facilitar la recolección de datos. Con respecto al tipo de televisor, en la actualidad se encuentran tres tipos: LED, Plasma y LCD. La tabla 2 muestra algunas características de cada uno de los tipos de televisores en el mercado.(LG, 2014):

	LED	PLASMA	LCD
Pantalla	Alta percepción de los colores y resolución de la pantalla. Integración de un plasma y LCD	Media percepción de los colores. Tiende a reflejar la luz debido a su pantalla en vidrio.	Menor contraste de colores.
Precio	Costo medio-alto en el mercado	Costo menor en el mercado	Costo promedio en el mercado
Consumo eléctrico	Ahorro de energía de un 25 a 30%	Alto consumo de energía	Medio consumo de energía
Diseño	Ultra delgados y livianos	Entre más grandes generan más calor.	Variedad e pulgadas. Diseño estándar.

Comparación entre categorías de televisores

Teniendo en cuenta que los televisores plasma y LCD son considerados como tecnología obsoleta y que actualmente los televisores LED presentan un mejor funcionamiento debido a su resolución, diseño y consumo eléctrico, se escogió un televisor tipo LED. Con respecto al tamaño del televisor LED y de acuerdo con las cifras de GFK (Gesellschaft für Konsumforschung, consultora alemana en investigación de mercados), en mayo del 2015 el 20 % de las unidades vendidas eran de 32 pulgadas, el 18,7 % eran de 42 a 49 pulgadas y de más de 50 pulgadas solo el 6,2 %. Por tal motivo se tomó el tamaño de 32 pulgadas al ser el más comprado entre las familias colombianas

12.4. Anexo 4-Desarrollo de la encuesta

El diseño de la encuesta se hizo con el fin de investigar y obtener de forma exploratoria la máxima disposición a pagar teniendo en cuenta características del cliente y del producto:

- Cliente: género, edad, localidad donde habita.
- Producto: resolución, tamaño, puertos HDMI, peso, grosor

Adicionalmente, se planteó el siguiente objetivo:

- Realizar una segmentación con base en las diferencias significativas observadas en la máxima disposición a pagar asociadas a las características de un cliente.

Definición de variables

Con el fin de desarrollar el objetivo propuesto se establecieron las siguientes variables:

Variable	Tipo de variable
Edad	Cuantitativa discreta
Género	Cualitativa nominal
Localidad	Cualitativa nominal
Barrio	Cualitativa nominal
Precio	Cuantitativa continua

Tipo de variables

Selección de la muestra

Para definir la selección de la muestra se remitió a la fórmula estadística del tamaño de muestra con un nivel de confianza del 90% como se muestra a continuación, (Alvarado & Obagi, 2010):

$$K = \frac{N * \sigma^2 * Z_{\alpha}^2}{\varepsilon^2 * (N - 1) + \sigma^2 * Z_{\alpha}^2}$$

Tamaño de muestra

K = Número de encuestas

N = Tamaño de la población

σ = Desviación estándar de la población

Z_{α} = Valor obtenido mediante niveles de confianza

ε = Error muestral aceptable

Para obtener el tamaño de muestra (N), se tomó como base la cifra de la dirección

de inversiones y finanzas públicas (DIFP) y con ayuda del DANE en donde la población actual de la ciudad de Bogotá es de 7.862.277 habitantes, de los cuales el 70% corresponde a la población activa entre la edad de 15 y 65 años quienes están en la capacidad de generar un ingreso, (Secretaría Distrital de Planeación, 2015), a su vez el 3,5 % corresponde a la población que realiza una inversión en tecnología (espectador, 2015), dando como resultado una población objetivo de 193.435 habitantes. Entonces, remplazando en la ecuación tamaño de muestra y teniendo en cuenta los siguientes valores de los parámetros en la siguiente tabla se obtuvo un número de encuestas de 250:

Símbolo	Valor
N	193.435 habitantes
σ	0.5
Z_{α}	90%
ε	0,052

Valores para la ecuación de tamaño de muestra

Elección del método de la encuesta

Según las tres modalidades de encuesta (Personal, telefónica y via internet), se escogió la tercera modalidad debido a la facilidad de la recolección de los datos teniendo en cuenta las

restricciones de tiempo y dinero. Adicionalmente, se evidenciaron algunas ventajas y desventajas al seleccionar este método:

Ventajas

- Rapidez en la recolección y análisis de datos.
- La falta de intermediario entre la encuesta y el entrevistado hace que los sondeos sean más objetivos.
- Se evita que el entrevistador condicione al entrevistado.
- Amplia cobertura.
- Los bajos costos.
- El ahorro de tiempo.

Desventajas

- No todo el mundo tiene acceso a internet.
- Se puede mentir muy fácilmente.
- Si no se garantiza el anonimato pueden darse bajas tasas de respuesta.
- La dificultad en controlar la selección informantes (por ejemplo, evitar que la misma persona conteste varias veces la encuesta, asegurar que la persona sea la indicada)(Alelú Hernández, Cantín García, López Abejón, & Rodríguez Zazo, 2014).

Estrategias

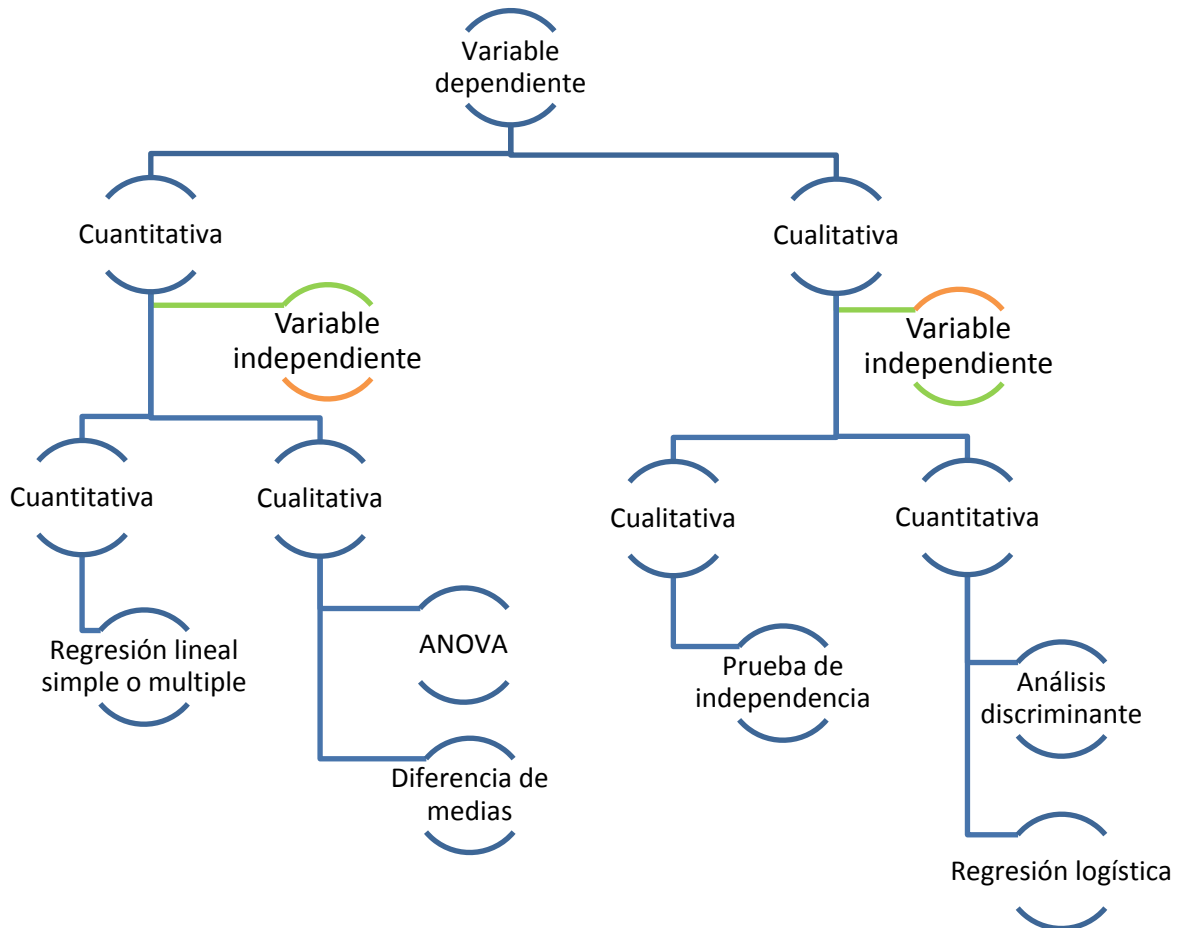
Para disminuir las desventajas que se podrían presentar se estableció una serie de estrategias con el fin de mitigar su impacto en el análisis de los datos

- Se procuró difundir la encuesta mediante redes sociales solo a personas que cumplieran con las características de estudio. Adicionalmente, se implementó una estrategia para facilitar el acceso a internet mediante el uso de un tablet en lugares donde hubiera mayor tráfico de personas.
- Con el fin de tener un alto nivel de veracidad en las respuestas, las preguntas fueron redactadas de un manera simple lo cual permitiría que las respuestas fueran sencillas. Finalmente se realizó la depuración de la encuesta para eliminar posibles puntos extremos en los resultados.
- Se garantizó el anonimato de los encuestas al no preguntar nombres ni apellidos. Adicionalmente no se preguntó de manera explícita el estrato social de la persona para evitar sesgos en las respuestas debido a la sensibilidad de la pregunta, por lo tanto el estrato social se asoció con las variables localidad y barrio.

Análisis e interpretación de los datos

Con base en la clasificación de variables presentada anteriormente, se elaboró un árbol de decisión para seleccionar la técnica inferencial de asociación más adecuada según el tipo de

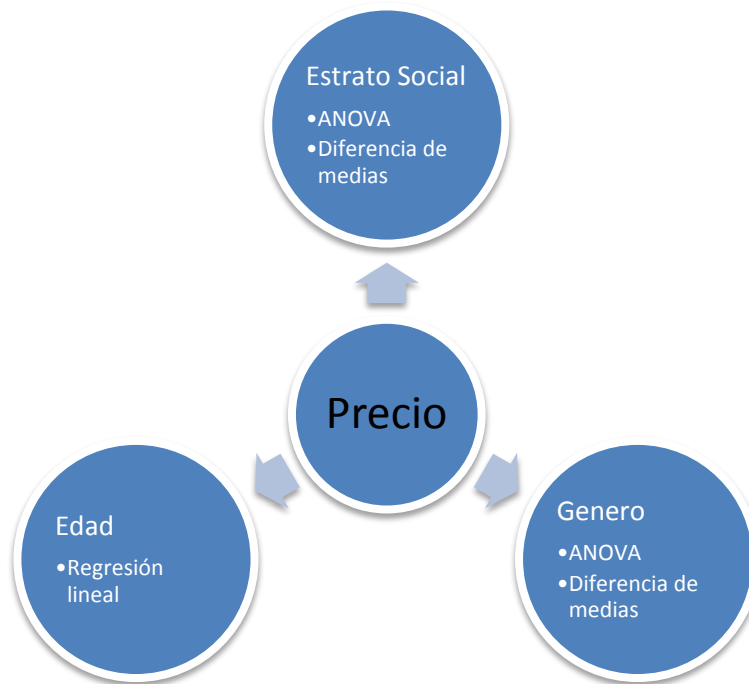
variable:



Tipos de Variables.(Alvarado & Obagi, 2010)

Teniendo en cuenta que las variables: localidad y barrio se investigaron con el fin de obtener implícitamente una variable cualitativa nominal asociada al estrato de cada persona, se obtuvieron tres posibles resultados de estratos sociales (Bajo, Medio, Alto) según la caracterización demográfica de Bogotá, (Duarte Guterman & Cia. Ltda, 2015).

Luego con relación al diagrama anterior y considerando que la variable dependiente en nuestro estudio es el precio, se obtuvo las siguientes asociaciones:



VARIABLES DEPENDIENTES

Precio y estrato social

Por medio de un análisis de varianza se estudió si existían diferencias significativas entre el precio dispuesto a pagar de cada persona por un televisor de 32 pulgadas y su estrato social, obteniendo los siguientes resultados:

RESUMEN				
<i>Grupos</i>	<i>Número de individuos</i>	<i>Suma</i>	<i>Promedio</i>	<i>Varianza</i>
Bajo	65	58.150.000,00	894.615,38	1,1196E+11
Medio	149	177.400.000,00	1.190.604,03	1,1187E+11
Alto	36	70.500.000,00	1.958.333,33	3,705E+11

Análisis de varianza

Se estableció con un nivel de significancia del 5%, que existen diferencias significativas entre al menos un estrato social y la máxima disposición a pagar por el mismo tipo de televisor. Para establecer cuales estratos sociales son diferentes entre sí se diseñó una comparación de medias utilizando el método de diferencia mínima significativa (LSD), obteniendo los siguientes resultados:

ANÁLISIS DE VARIANZA					
Origen de las variaciones	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Promedio de los cuadrados	F	Valor P
Estratos	2,6631E+13	2	1,33156E+13	89,6415 351	5,3748E -30
Error	3,669E+13	247	1,48542E+11		
Total	6,3321E+13	249			
$\alpha = 5\%$					
Método LSD					
Estadístico de prueba	138.419,43				
	Bajo	Medio	Alto		
Bajo	-	295.988,64	1.063.717,95		
Medio	-	-	767.729,31		
Alto	-	-	-		
Método LSD					

De tal manera al comparar el estadístico de prueba y las diferencias entre medias se puede afirmar que existe una diferencia significativa a un nivel del 5% entre todos los estratos, por ello se evidenció que el estrato social era un factor importante para realizar la segmentación de los clientes.

Precio y género

Por medio de un análisis de varianza (ANOVA) se estudió si existían diferencias significativas entre el precio dispuesto a pagar de cada persona por un televisor de 32 pulgadas y su género, obteniendo los siguientes resultados:

ANÁLISIS DE VARIANZA					
<i>Origen de las variaciones</i>	<i>Suma de cuadrados</i>	<i>Grados de libertad</i>	<i>Promedio de los cuadrados</i>	<i>F</i>	<i>Valor P</i>
Género	4,6088E+10	1	46088069995	0,18063755	0,67119444
Error	6,3275E+13	248	2,55141E+11		
Total	6,3321E+13	249			

$$\alpha = 5\%$$

Análisis de varianza 2

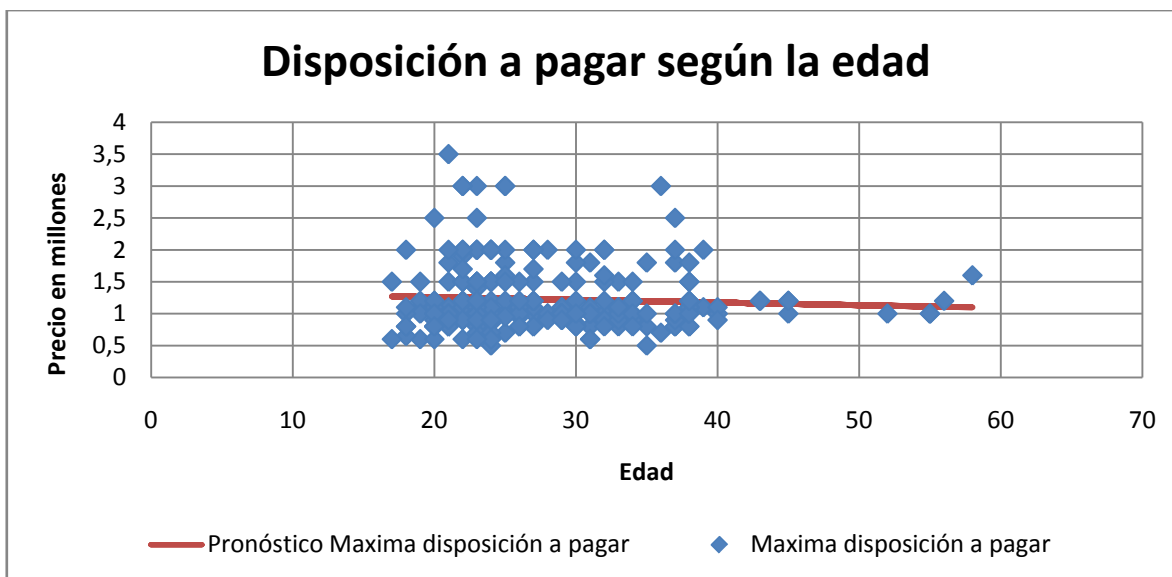
RESUMEN				
<i>Grupos</i>	<i>Número de individuos</i>	<i>Suma</i>	<i>Promedio</i>	<i>Varianza</i>
Mujeres	134	162.350.000,00	1.211.567,16	2,4725E+11
Hombres	116	143.700.000,00	1.238.793,10	2,6426E+11

Resumen de resultados

Se estableció con un nivel de significancia del 5%, que no existen diferencias significativas entre el género de las personas y la máxima disposición a pagar por un mismo tipo de televisor. Por lo tanto el género no se tuvo en cuenta al realizar la agrupación de los clientes.

Precio y edad

Para determinar si la disposición a pagar de las personas estaba en función de la edad, se planteó una regresión lineal simple, obteniendo los siguientes resultados:



Disposición a pagar según la edad

Estadísticas de la regresión	
Coefficiente de correlación múltiple	0,06086175
Coefficiente de determinación R ²	0,00370415
R ² ajustado	0,00031317
Error típico	504362,177
Observaciones	250

Estadística de la regresión

Por lo tanto, se estableció con base en el coeficiente de determinación ajustado, que solo el 0,03% de la variación observada en la máxima disposición a pagar por un mismo tipo de televisor es explicada por el modelo, al mismo tiempo el coeficiente de correlación nos mostró que no existe una correlación lineal entre las variables y por lo tanto se concluyó que la edad no afecta significativamente la disposición a pagar de los clientes y no se tuvo en cuenta para la segmentación de los clientes.

Finalmente, solo el estrato social (Bajo, Medio, Alto) fue tenido en cuenta para realizar la segmentación de los clientes.

12.5. Anexo 5-Análisis del coeficiente del precio

Dentro de la ciudadanía Bogotana existe gran diversidad cultural, étnica, económica y financiera, a su vez, está se puede ver agrupada con base en los patrones y comportamientos similares presentes en los individuos que la componen tengan entre sí. Pero al agrupar todos los habitantes de la ciudad de esta manera, se evidencia una gran desigualdad y es por ello que surge la estratificación social.

Desde el punto de vista solidario y de la redistribución del ingreso, la comunidad es clasificada en estratos principalmente para cobrar de manera diferencial los servicios públicos domiciliarios permitiendo asignar subsidios y cobrar contribuciones entre ellos. De esta manera, quienes tienen más capacidad económica pagan más por los servicios públicos y contribuyen para que los estratos bajos puedan pagar sus facturas (DANE, 2015). Teniendo en cuanto lo anterior, el régimen tarifario de los servicios públicos domiciliarios residenciales en Colombia (SPD), se basa en unos porcentajes de contribución o subsidio dependiendo de la estratificación socioeconómica de las personas, esto con el fin de determinar qué porcentaje de lo que se denomina "TARIFA"(costos y gastos de la operación) es posible pagar de acuerdo al estrato, de tal manera que se mantenga el principio constitucional de solidaridad y redistribución de ingresos en materia de SPD. (DANE, 2015). Estos porcentajes se encuentran regulados por el decreto 057 de 2006.

Se analizaron estos porcentajes y se evidenció que el máximo valor que se podría pagar de la "TARIFA", sin tener en cuenta la regulación gubernamental, es del 200%, es decir el doble. Por lo tanto, se calculó por estratos que porcentaje se pagaba de la "TARIFA". Tal como se muestra en la siguiente tabla:

Estrato	Concepto	Monto	Pago de la tarifa
1	Subsidio	50%	50%
2	Subsidio	40%	60%
3	Subsidio	15%	85%
4	N.A	0%	100%
5	Contribución	50%	150%
6	Contribución	60%	160%
Máximo valor que puede tomar			200%

Máxima disposición a pagar

Con el fin de establecer un mismo criterio de medición para todos los estratos evitando los conceptos de subsidio y contribución, se analizó el porcentaje que se paga del valor máximo posible de la denominada “TARIFA”, por ejemplo el estrato 1 paga el 50% de la “TARIFA” que equivale solo al 25% del máximo valor posible, donde el complemento de este resultado es el porcentaje que no están dispuestos a pagar con relación al máximo valor, esto establece un coeficiente de sensibilidad relacionado a la afectación por estratos de un mismo valor monetario. Tal como se muestra en la siguiente tabla:

Estrato	% Máximo posible a pagar	% Dispuesto a no pagar
1	0.25	0.75
2	0.3	0.7
3	0.425	0.575
4	0.5	0.5
5	0.75	0.25
6	0.8	0.2

Máxima disposición a pagar

El comportamiento de este complemento se aplicó para nuestro caso como el coeficiente de variación del precio de los televisores, pues el coeficiente de variación del precio indica en qué medida la utilidad esperada por un grupo de individuos se ve afectada por una variación del precio, adicionalmente se evidenció que hay coeficientes que no tienen una

diferencia significativa, por eso para nuestro estudio se agruparon y promediaron sus coeficientes de la siguiente manera:

Grupos	Coeficientes
Estrato 1-2	0.725
Estrato 3-4	0.5375
Estrato 5-6	0.225

Coeficiente de precio para cada grupo de individuos

12.6. Anexo 6-Variación de parámetros η y ω

η/ω	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
0,0001	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
0,15	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
0,2	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
0,25	0,06	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
0,3	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,07	0,07	0,07
0,35	0,11	0,11	0,11	0,11	0,10	0,10	0,10	0,10
0,4	0,15	0,15	0,14	0,14	0,14	0,14	0,13	0,13
0,45	0,19	0,19	0,18	0,18	0,18	0,17	0,17	0,17
0,5	0,23	0,23	0,23	0,22	0,22	0,22	0,21	0,21
0,55	0,28	0,28	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26
0,6	0,34	0,34	0,33	0,33	0,33	0,32	0,32	0,31
0,65	0,40	0,40	0,40	0,39	0,39	0,38	0,38	0,38
0,7	0,47	0,47	0,46	0,46	0,45	0,45	0,45	0,44
0,75	0,54	0,54	0,54	0,53	0,53	0,52	0,52	0,52
0,8	0,62	0,62	0,62	0,61	0,61	0,61	0,60	0,60
0,85	0,71	0,70	0,70	0,70	0,70	0,69	0,69	0,69
0,9	0,80	0,80	0,79	0,79	0,79	0,79	0,78	0,78
0,95	0,90	0,90	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89
0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98

Resultados obtenidos al variar los parámetros η y ω

12.7. Anexo 7-Precio de venta del producto seleccionado en el mercado

Precio de venta de los televisores

En el mercado de televisores en Colombia existen marcas líderes con gran rentabilidad y crecimiento que evidencian un mercado estable, que ha venido aumentando en los últimos años como consecuencia de las innovaciones en los productos, esto ha atraído a más compradores elevando sus niveles de ventas significativamente. Las cifras de GFK, “muestran que LG es el fabricante con más ventas entre enero y mayo del 2015. Al cierre de mayo LG tenía 41,1 % del mercado, seguido de Samsung con 26,8 %, Sony con 13,1 % y Panasonic con cerca de 6 %.”(Semana, 2015).

El precio encontrado en el mercado para un televisor LED de 32 pulgadas para las marcas nombradas anteriormente se muestra a continuación:

	Éxito	Alkosto
Lg	\$ 1 030.830	\$ 1 049 000
Samsung	\$ 900.000	\$ 949.000
Sony	\$ 999.999	\$979.000
Panasonic	\$ 620.999	\$ 889.000

Precios de venta de los televisores

Teniendo en cuenta los datos presentados se realizó su respectivo análisis estadístico,

Estadística descriptiva	
Media	927103.625
Error típico	29996.20125
Mediana	949000
Moda	949000
Desviación estándar	84842.06
Varianza de la muestra	7198176714
Mínimo	790000
Máximo	1049000
Suma	7416829

Estadística descriptiva para el precio de venta

Con un nivel de confianza del 95% se estimó que el precio fluctúa en un rango de \$ 842,262 y \$1'011,946 pesos, donde en promedio un televisor LED de 32 pulg tiene un precio de venta de \$927,104 pesos con una desviación estándar de \$84,843 pesos.

12.8. Anexo 8-Implementación del modelo PSO en R-statistics

Implementación

Para la implementación de la solución se propuso utilizar el paquete computacional R statistics debido a la gran cantidad de funciones que se incluyen en el momento de usar el programa, a su vez ofrece una gran gama de paquetes especializados. Las grandes ventajas que se observa sobre otros paquetes computacionales son, (Caicedo R. F., 2013):

1. Es un software de versión libre
2. Existe la posibilidad de realizar foros para la colaboración global
3. Permite combinar varias funciones de programación y estadística convirtiéndolo en un paquete flexible
4. El uso de librerías permite que la programación sea más amena para el usuario.

Adicionalmente se propuso el uso de la librería PSOPTIM que se usa como una función para minimizar, pero también puede ser utilizada para maximizar si se ajusta la función de adaptabilidad negativamente. Este algoritmo sigue un estándar PSO 2007 implementado por Maurice Clerc (Bendtsen, 2012), a su vez esta función puede ser modificada para diferentes problemas cambiando sus argumentos. Durante cada iteración, cada partícula actualiza su velocidad (V) y posición (X) con base en las siguientes formulas:

$$V_i^{t+1} = w V_i^t + C_1 r_1 (Pbest_i^t - X_i^t) + C_2 r_2 (Pglobal_i^t - X_i^t)$$

Velocidad de partícula PSO

$$X_i^{t+1} = (X_i^t - V_i^{t+1})$$

Posición de partícula PSO

Dónde:

V_i^t : Velocidad de la partícula i en la iteración t.

X_i^t : Posición de la partícula i en la iteración t.

$Pbest_i^t$: La mejor posición alcanzada por la partícula i dentro de las iteraciones anteriores a t .

$Gbest_i^t$: La mejor posición alcanzada por cualquier partícula del enjambre dentro de las iteraciones anteriores a t .

C_1 : Coeficiente del componente de auto reconocimiento.

C_2 : Coeficiente del componente de social.

r_1 y r_2 : Números aleatorios entre 0 y 1.

W : Inercia

El valor de C_1 y C_2 están predeterminados dentro del PSOPTIM con base en los estudios realizado por Maurice Clear, (Bendtsen, 2012). En cuanto a la inercia, se usa para controlar la velocidad de búsqueda de las partículas a lo largo del tiempo con el fin de obtener un balance entre el mejor valor global y el local dentro de la búsqueda del enjambre, el parámetro se establece como decreciente a lo largo de las iteraciones estableciendo w como un vector de longitud 2 donde el primer número va cambiando gradualmente hasta el alcanzar al segundo. (Parsopoulos, 2002).

Adicionalmente, se definieron los argumentos mediante el uso de instancias de control como se muestra a continuación:

`psoptim(par, fn, gr = NULL, ..., lower = -1, upper = 1, control = list)`

- `par`: es un vector cuya longitud define el espacio de solución, para nuestro caso son 3 dimensiones.
- `fn`: la función de adaptabilidad la cual se va a maximizar o minimizar y retorna un número escalar, en este caso será la función objetivo teniendo en cuenta que antes

de obtener la ganancia resultante se debe calcular la demanda mediante el logit restringido.

- Lower: es la restricción inferior de las dimensiones definidas en **par**
- Upper: es la restricción superior de las dimensiones en **par**
- control = list: este parámetro se usa para modificar otros argumentos del algoritmo, de los cuales se usaron:
 - I. maxit: es el máximo de número de iteraciones, se definió en 1500
 - II. S: Tamaño de la colonia, se definió en 60
 - III. W: la constante de exploración, se tomó como un vector de longitud dos, donde el primer número va cambiando gradualmente hasta el alcanzar al segundo, para este caso se establece que el primer números 2 y el segundo número es 0,2 con el fin de obtener una inercia decreciente a medida que pasan las iteraciones.

12.9. Anexo 9- Resultados de la atractividad

Estrato									
Bajo Atractividad			Medio Atractividad			Alto Atractividad			
Bajo	Medio	Alto	Bajo	Medio	Alto	Bajo	Medio	Alto	
\$ 804,008	\$ 813,397	\$ 825,219	\$ 950,915	\$ 954,406	\$ 959,365	\$ 1,367,234	\$ 1,371,876	\$ 1,376,190	
\$ 804,302	\$ 813,554	\$ 825,524	\$ 950,994	\$ 954,603	\$ 959,531	\$ 1,367,200	\$ 1,372,284	\$ 1,376,337	
\$ 804,590	\$ 813,987	\$ 825,940	\$ 951,117	\$ 954,653	\$ 959,706	\$ 1,367,598	\$ 1,372,388	\$ 1,376,216	
\$ 804,740	\$ 814,323	\$ 826,352	\$ 951,191	\$ 954,841	\$ 959,858	\$ 1,367,638	\$ 1,372,372	\$ 1,376,781	
\$ 805,075	\$ 814,568	\$ 826,835	\$ 951,213	\$ 955,020	\$ 960,099	\$ 1,367,818	\$ 1,372,709	\$ 1,376,795	
\$ 805,320	\$ 814,894	\$ 827,239	\$ 951,329	\$ 955,099	\$ 960,314	\$ 1,368,005	\$ 1,372,653	\$ 1,376,695	
\$ 805,701	\$ 815,186	\$ 827,624	\$ 951,505	\$ 955,227	\$ 960,399	\$ 1,368,116	\$ 1,372,732	\$ 1,376,778	
\$ 805,923	\$ 815,629	\$ 828,023	\$ 951,597	\$ 955,426	\$ 960,640	\$ 1,368,223	\$ 1,372,869	\$ 1,376,863	
\$ 806,032	\$ 815,949	\$ 828,543	\$ 951,635	\$ 955,530	\$ 960,795	\$ 1,368,388	\$ 1,372,915	\$ 1,377,015	
\$ 806,184	\$ 816,245	\$ 828,878	\$ 951,798	\$ 955,631	\$ 961,046	\$ 1,368,679	\$ 1,373,116	\$ 1,377,108	
\$ 806,539	\$ 816,650	\$ 829,283	\$ 951,816	\$ 955,789	\$ 961,177	\$ 1,369,053	\$ 1,373,377	\$ 1,377,160	
\$ 806,846	\$ 816,951	\$ 829,679	\$ 952,006	\$ 955,943	\$ 961,375	\$ 1,368,886	\$ 1,373,313	\$ 1,377,445	
\$ 807,117	\$ 817,258	\$ 830,141	\$ 952,051	\$ 956,004	\$ 961,555	\$ 1,369,041	\$ 1,373,558	\$ 1,377,464	
\$ 807,324	\$ 817,608	\$ 830,592	\$ 952,169	\$ 956,217	\$ 961,809	\$ 1,369,198	\$ 1,373,627	\$ 1,377,648	
\$ 807,684	\$ 818,051	\$ 831,083	\$ 952,253	\$ 956,331	\$ 961,995	\$ 1,369,432	\$ 1,373,658	\$ 1,377,740	
\$ 807,923	\$ 818,304	\$ 831,579	\$ 952,381	\$ 956,461	\$ 962,158	\$ 1,369,448	\$ 1,373,796	\$ 1,377,822	
\$ 808,136	\$ 818,664	\$ 831,889	\$ 952,522	\$ 956,646	\$ 962,412	\$ 1,369,830	\$ 1,374,010	\$ 1,377,984	
\$ 808,532	\$ 819,067	\$ 832,375	\$ 952,521	\$ 956,709	\$ 962,615	\$ 1,369,693	\$ 1,374,287	\$ 1,377,975	
\$ 808,765	\$ 819,454	\$ 832,883	\$ 952,682	\$ 956,884	\$ 962,793	\$ 1,370,045	\$ 1,374,159	\$ 1,378,164	
\$ 809,108	\$ 819,786	\$ 833,306	\$ 952,858	\$ 957,059	\$ 963,053	\$ 1,369,920	\$ 1,374,470	\$ 1,378,332	
\$ 809,271	\$ 820,227	\$ 833,798	\$ 952,938	\$ 957,211	\$ 963,169	\$ 1,370,219	\$ 1,374,608	\$ 1,378,368	
\$ 809,574	\$ 820,563	\$ 834,227	\$ 952,978	\$ 957,352	\$ 963,421	\$ 1,370,327	\$ 1,374,689	\$ 1,378,551	
\$ 809,890	\$ 820,803	\$ 834,732	\$ 953,135	\$ 957,546	\$ 963,651	\$ 1,370,505	\$ 1,374,897	\$ 1,378,622	
\$ 810,101	\$ 821,273	\$ 835,192	\$ 953,294	\$ 957,690	\$ 963,855	\$ 1,370,823	\$ 1,375,000	\$ 1,378,759	
\$ 810,585	\$ 821,705	\$ 835,639	\$ 953,394	\$ 957,905	\$ 964,096	\$ 1,370,791	\$ 1,374,968	\$ 1,378,811	
\$ 810,797	\$ 822,041	\$ 836,053	\$ 953,517	\$ 957,950	\$ 964,299	\$ 1,370,935	\$ 1,375,045	\$ 1,379,113	
\$ 811,111	\$ 822,388	\$ 836,511	\$ 953,664	\$ 958,160	\$ 964,506	\$ 1,371,038	\$ 1,375,400	\$ 1,379,057	
\$ 811,395	\$ 822,790	\$ 837,161	\$ 953,758	\$ 958,314	\$ 964,831	\$ 1,371,182	\$ 1,375,412	\$ 1,378,918	
\$ 811,736	\$ 823,180	\$ 837,473	\$ 953,817	\$ 958,477	\$ 964,968	\$ 1,371,330	\$ 1,375,465	\$ 1,379,311	
\$ 812,036	\$ 823,517	\$ 838,115	\$ 953,968	\$ 958,732	\$ 965,192	\$ 1,371,651	\$ 1,375,567	\$ 1,379,326	
\$ 812,347	\$ 824,047	\$ 838,513	\$ 954,108	\$ 958,851	\$ 965,478	\$ 1,371,639	\$ 1,376,007	\$ 1,379,532	
\$ 812,598	\$ 824,439	\$ 839,028	\$ 954,235	\$ 958,972	\$ 965,670	\$ 1,371,584	\$ 1,375,859	\$ 1,379,675	
\$ 813,000	\$ 824,712	\$ 839,483	\$ 954,358	\$ 959,159	\$ 965,940	\$ 1,371,886	\$ 1,376,048	\$ 1,379,644	

Resultados obtenidos de laatractividad

12.10. Anexo 10– Margen de ganancia bruta

INDICADOR														
Nombre	Margen de Ganancia Bruta		Objetivo	Reflejar la capacidad de la empresa en la generación de utilidades antes de los gastos de administración, ventas, otros ingresos y egresos.										
Fórmula	$\text{Margen de Ganancia Bruta} = \frac{\text{Ganancia Bruta}}{\text{Ventas}}$													
Unidades	Porcentaje (%)		Nivel de referencia	Mayor o igual al 30%										
Frecuencia	Anual													
Gráficas	<div style="text-align: center;"> <p>Margen de Ganancia Bruta</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Modelo</th> <th>Porcentaje</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>52%</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>43%</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>84%</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>53%</td> </tr> </tbody> </table> </div>				Modelo	Porcentaje	1	52%	2	43%	3	84%	4	53%
Modelo	Porcentaje													
1	52%													
2	43%													
3	84%													
4	53%													
	1. Modelo base	2. Modelo con descuentos	3. Modelo logit	4. Modelo con demanda segregada										
Datos	\$ 33.720.110.000 \$ 64.319.541.300 52%	\$ 24.690.610.000 \$ 57.824.395.827 43%	\$ 200.486.000.000 \$ 239.208.139.809 84%	\$ 22.901.800.000 \$ 43.561.836.288 53%										

12.11. Anexo 11- Rotación de inventarios

<u>INDICADOR</u>														
Nombre	Rotación de inventarios		Objetivo	Conocer las veces que los costos en inventario se convierten en efectivo										
Fórmula	$\text{Rotación de inventario} = \frac{\text{Costos de mercancía vendida}}{\text{Inventario Promedio}}$													
Unidades	Veces		Nivel de Referencia	Mayor a 2 veces por año										
Frecuencia	Anual													
Gráficas	<div style="text-align: center;"> <p>Rotación de inventarios</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Modelo</th> <th>Rotación</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>4,8</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>5,7</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1,4</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>3,9</td> </tr> </tbody> </table> </div>				Modelo	Rotación	1	4,8	2	5,7	3	1,4	4	3,9
Modelo	Rotación													
1	4,8													
2	5,7													
3	1,4													
4	3,9													
Datos	1. Modelo base		2. Modelo con descuentos	3. Modelo logit	4. Modelo con demanda segregada									
	\$ 30.599.430.000	4,8	\$ 30.599.430.000	1,4	\$ 20.660.031.000	3,9								
	\$ 6.433.049.871		\$ 5.366.850.959		\$ 27.538.052.365		\$ 5.333.794.395							

12.12. Anexo 12- Participación en el mercado

INDICADOR														
<i>Nombre</i>	Participación en el mercado		<i>Objetivo</i>	Determinar el porcentaje del mercado total que maneja la empresa.										
<i>Fórmula</i>	$Participación = \frac{Demanda}{Total\ de\ mercado}$													
<i>Unidades</i>	Porcentaje (%)		<i>Nivel de Referencia</i>	Mayor al 20%										
<i>Frecuencia</i>	Anual													
<i>Gráficas</i>	<div style="text-align: center;"> <p>Participación en el mercado</p> <table border="1"> <caption>Data for Market Participation Bar Chart</caption> <thead> <tr> <th>Modelo</th> <th>Participación (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>22%</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>23%</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>28%</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>15%</td> </tr> </tbody> </table> </div>				Modelo	Participación (%)	1	22%	2	23%	3	28%	4	15%
Modelo	Participación (%)													
1	22%													
2	23%													
3	28%													
4	15%													
<i>Datos</i>	1. Modelo base	2. Modelo con descuentos	3. Modelo logit	4. Modelo con demanda segregada										
	43050 193437	44896 193437	54611 193437	28928 193437										
	22%	23%	28%	15%										