INTERPRETACIÓN DE “LA FRACCIÓN COMO RELACIÓN PARTE-TODO” EN CONTEXTOS CONTINUOS Y DISCRETOS, A PARTIR DE LA IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA QUE PRIVILEGIA LA COMPETENCIA COMUNICATIVA

ALBA LUCÍA NIÑO PÉREZ Y YACENY RAAD VILORIA

Pontificia Universidad
JAVERIANA
Bogotá

Facultad de Educación

Maestría en Educación

Línea Didáctica de las Matemáticas

Bogotá, D.C.

2018

INTERPRETACIÓN DE "LA FRACCIÓN COMO RELACIÓN PARTE-TODO" EN CONTEXTOS CONTINUOS Y DISCRETOS, A PARTIR DE LA IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA QUE PRIVILEGIA LA COMPETENCIA COMUNICATIVA

ALBA LUCÍA NIÑO PÉREZ Y YACENY RAAD VILORIA

Trabajo de grado para optar por el título de Magíster en Educación

Directora:

YADIRA SANABRIA MEJÍA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

Facultad de Educación

Maestría en Educación

Línea Didáctica de las Matemáticas

Bogotá, D.C.

2018

NOTA DE ADVERTENCIA

"La universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Sólo velará porque no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y porque las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vean en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia." Artículo 23, resolución No 13 del 6 de Julio de 1946, por la cual se reglamenta lo concerniente a Tesis y Exámenes de Grado en la Pontificia Universidad Javeriana.

Resumen

El presente trabajo de investigación de tipo mixto, tiene como propósito describir y analizar la interpretación de la fracción como relación parte-todo, en contextos continuos y discretos, de los estudiantes de grado quinto de básica primaria del colegio Bosanova Sede-B, de la ciudad de Bogotá. Se hace una revisión documental que delimita el objeto de estudio a la relación parte-todo, acorde con lo citado por Behr (1983) cuando afirma que esta interpretación constituye la base para la comprensión de posteriores construcciones matemáticas. Una vez detectada la dificultad en el manejo de la fracción, gracias a las apreciaciones de los profesores de matemáticas y a los resultados obtenidos en las pruebas internas y externas, entre otros, se procedió a aplicar una prueba diagnóstica escrita, a partir de la cual se escogieron tres estudios de caso, clasificados como nivel bajo, medio y alto. Posteriormente, se enunciaron cuatro categorías de análisis para trabajar el reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes; la construcción del concepto de fracción y fraccionario; la noción y reconstrucción de la unidad, relaciones aditiva, de equivalencia y multiplicativa de la fracción y la formación de la unidad en fracciones mayores que la unidad. Para estas cuatro categorías de análisis se retomaron los atributos de la fracción y contextos enunciados por Llinares & Sánchez (1997), los registros de representación propuestos por Lesch citado por Llinares & Sánchez (1998) y las problemáticas en el tratamiento de la fracción de Poveda (s.f.). Seguidamente, al total de la población escogida y a la muestra se le aplicó una secuencia didáctica que constó de seis situaciones didácticas, que permitieron abordar de manera dinámica la fracción como relación parte-todo, para que después de cada una de ellas se procediera a hacer la entrevista clínico crítica a cada uno de los estudios de caso y así poder establecer la interpretación y posibles construcciones cognitivas, gracias a la competencia comunicativa que permitió generar conexiones entre las representaciones concretas, orales, simbólicas, gráficas y mentales de las ideas matemáticas. Fruto de los hallazgos, se justificó la selección de las categorías de análisis, ya que a través de su interrelación, se lograron establecer junto con las interpretaciones, las falencias y aciertos cognitivos de los estudiantes, en cuanto a la relación de la fracción como parte-todo.

PALABRAS CLAVE: matemáticas, fracción, interpretaciones de la fracción, atributos de la fracción, relación parte-todo, registros de representación, contextos, secuencia didáctica, competencia comunicativa en matemáticas.

Abstract

The present investigation of mixed type, consists of describing and analyzing the interpretation of the fraction as whole-part at continuous and discrete contexts of the students of fifth course of elementary school of Bosanova Sede-B, of the Bogotá city. Once detected the difficulty around the fraction manage, thanking to the math teachers' appraisals and the obtained results through internal and external tests, among others, it proceeded to apply a diagnostic written exam since three chosen study cases, classified as low, medium, or high average level. Afterwards, it was enunciated four categories of analysis for working the recognizant of the unit, the similar parts and equality of the parts; the consolidation of the fraction and fractional concept; the notion and re-building of the unit, additive ratio, equivalence and multiplicative of the fraction at the same time as the formation of the unit by fractions greater than the unit. For these four categories of analysis, were retaken *the attributes of the fraction and the contexts* mentioned by Llinares & Sanchez (1997), the *records of representation* proposed by Lesch and cited by Llinares & Sánchez (1998) and *the problematics at the fraction treatmen*t of Poveda (*n.d.*). Consequently, to the total population and to the sample was applied a didactic sequence which considered six didactic situations, that allowed to approach in a dynamic way the fraction like a whole-part relation in order that, after all from each of these, the clinical critical interview was made to each one of the study cases reaching the establishment of the interpretation as well as the possible cognitive constructions. This, thanks to the communicative competence which allows the generation of connections within the concrete, oral, graphic, symbolic and mental representations of mathematics. As a result of the findings, the selection of the analysis categories was justified, since through its interrelation, the students' cognitive shortcomings and

failures were established together with the interpretations, regarding the relation of the fraction as whole-part.

KEY WORDS: mathematics, fraction, interpretations of the fraction, attributes of the fraction, part-whole relation, representation registers, contexts, didactic sequence, communicative competence in mathematics.

AGRADECIMIENTOS

Al Dios que guía nuestras vidas y que ha permitido este nuevo galardón.
A nuestras familias, por el apoyo incondicional que desde el primer día nos brindaron, dándonos fortaleza y confiando en nosotras.
A nuestra tutora Yadira Sanabria Mejía, por su compromiso y entrega a lo largo de nuestra investigación y por creer en nuestro proyecto.
A la institución educativa por abrirnos las puertas y a los estudiantes que participaron en esta investigación.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

"Dime algo, y lo olvidaré.
Enséñame algo, y lo recordaré.
Hazme partícipe de algo, y lo aprenderé."
Confucio

Esta investigación, surge como respuesta a la necesidad de abordar los vacíos conceptuales y procedimentales que en el ámbito escolar se han detectado en el tratamiento de la fracción, específicamente, en su relación como parte-todo, siendo esta la base para la construcción de conceptualizaciones matemáticas abstractas posteriores e inminentes para el entendimiento algebraico y el buen uso de los números racionales, entre otros.

El estudio se desarrolla y focaliza con los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Distrital Bosanova-Sede B, de la ciudad de Bogotá; bajo el enfoque metodológico de tipo mixto, que permite describir y analizar un fenómeno educativo como lo es la interpretación que hacen los estudiantes de la fracción en su relación como parte-todo.

Inicialmente, se hace una revisión documental de antecedentes nacionales e internacionales, que posibilita asentar, enfocar e inspirar la presente investigación teniendo en cuenta las dificultades identificadas que sigue presentando la noción escolar de fracción, basada en la relación parte-todo.

Luego, se lleva a cabo un análisis conceptual de la relación parte-todo, para profundizar en dicha relación y alcanzar precisión y dominio en su uso en el campo de las fracciones. En esta incursión teórica, se identifican los atributos de esta relación (Llinares & Sánchez, 1997), que permiten fundamentarla y establecer sus interpretación, sobre todo la de los estudiantes objeto de este estudio.

Como fruto de este reconocimiento conceptual, surgen las categorías de análisis que se erigen como hilo conductor dentro de la investigación y que se basan en cuatro criterios a saber: atributos de la relación parte-todo (Llinares & Sánchez, 1997), contextos continuo y discreto (Llinares & Sánchez, 1997), registros de representación (Lesch citado por Llinares & Sánchez, 1998) y problemáticas escolares con el número fraccionario como relación parte-todo (Poveda, s.f.).

Ya en los momentos del trabajo empírico, se procede a diseñar y aplicar una prueba piloto a un curso de grado quinto diferente al grupo objeto de estudio, para depurar las preguntas que luego fueron utilizadas con el curso 501 (poblacion escogida), como prueba diagnóstica de los conocimientos previos que los estudiantes traían sobre la fracción, sus atributos, contextos, registros de representación y posibles problemáticas en el tratamiento de esta.

Posteriormente, de acuerdo con los resultados obtenidos, se procede a elegir los tres estudiantes estudios de caso que son clasificados en nivel alto, medio y bajo, los cuales participan de este proceso investigativo.

Una vez diseñada la secuencia didáctica como respuesta a lo detectado en la prueba diagnóstica, se procede a hacer seis sesiones en el aula, inicialmente, con la totalidad de la población y luego con los estudios de caso a quienes se les aplicó la entrevista clínico-crítica, para dar alcance a los procesos cognitivos, interpretaciones y procedimientos que estos estudiantes hacen frente a cada una de las actividades planteadas.

Es así como, durante los momentos de la investigación se privilegia la competencia comunicativa, por cuanto es inminente tener presente que muchos problemas de entendimiento tienen que ver con la forma como el que enseña y como el que aprende, se comunican. Es decir, con las destrezas propias de la competencia comunicativa, que permiten lograr aprendizajes. Luego, gracias a la entrevista clínico-crítica, los estudiantes exteriorizan, verbalizan o plasman gráficamente sus respuestas, logrando construir así, un lenguaje matemático que les permita evidenciar un registro concreto, verbal, gráfico o simbólico de las distintas razones expresadas.

Posteriormente, el análisis de la información obtenida se desarrolla bajo la modalidad intra e intersujeto, tanto en el componente cuantitativo como en el componente cualitativo. También se hace triangulación metodológica de la información entre los resultados de estos dos enfoques y así mismo, se destaca el análisis de alcance en la competencia comunicativa en matemáticas.

El informe del trabajo de investigación se estructura en ocho capítulos, seguido del listado de los referentes bibliográficos y los anexos. A continuación, se describe el contenido de cada uno de los capítulos:

Capítulo 1. Se presenta una síntesis de las investigaciones previas, relacionadas con las fracciones y la relación parte-todo, bajo la clasificación de aquellas que tratan las interpretaciones de la fracción, la fracción como relación *parte-todo,* el aprendizaje y enseñanza de la fracción y la competencia comunicativa en matemáticas.

Capítulo 2. Este capítulo contiene el planteamiento del problema y problema de investigación, enmarcados dentro del contexto de la fracción en su relación como parte-todo.

Capítulo 3. Presenta el objetivo general y específicos que se proponen abordar.

Capítulo 4. Se justifica el trabajo de investigación desde las perspectivas del desconocimiento por parte de los docentes, del proceso de construcción cognitiva que siguen los estudiantes frente a la relación parte todo, las dificultades de los estudiantes frente a la interpretación de las fracciones, observadas directamente en clase; los resultados en las pruebas Saber de los estudiantes en grado tercero y grado quinto; las respuesta a los referentes de calidad colombianos; la revisión de las mallas curriculares del Colegio Bosanova, Sede B; la necesidad de cimentar buenas bases matemáticas para construcciones abstractas posteriores y el papel de la competencia comunicativa en matemáticas.

Capítulo 5. Se presenta la fundamentación teórica de la investigación, desde el marco legal, marco histórico y marco teórico conceptual.

Capítulo 6. Se explicitan los aspectos metodológicos con la descripción de la metodología, caracterización de la población, momentos de la investigación, categorías de análisis, el estudio de casos, instrumentos de recolección de la información y la competencia comunicativa en matemáticas como instrumento constante en la metodología.

Capítulo 7. Se hace el análisis e interpretación de los datos, desde lo cuantitativo, cualitativo y de alcance en la competencia comunicativa en matemáticas.

Capítulo 8. Por último, se presentan las conclusiones que se derivan del desarrollo de esta investigación, iniciando con la respuesta a los objetivos propuestos en el capítulo 3, describiendo aportes, limitaciones, implicaciones investigativas y sugerencias para futuras investigaciones.

1. Antecedentes

Las matemáticas siempre se han tomado como un campo del conocimiento inalcanzable y de alta complejidad, destinado sólo para las mentes brillantes que deciden abordarlo. En las aulas se desarrollan sentimientos negativos hacia las mismas y rara vez son tenidas en cuenta para ser escogidas como una opción de estudio profesional, por la infundada dificultad que se les ha asignado. Cockcroft (1985) citado por Riviere (1990, p. 155-182), muestra que un gran porcentaje de estudiantes presenta inconvenientes para incursionar en el aprendizaje de las matemáticas porque experimentan fracasos, temores e insatisfacciones.

También, muchas veces se encuentran obstáculos entre los mismos maestros que evaden asumir el orientar esta asignatura en la escuela, frecuentemente por el desconocimiento de los saberes propios o por las malas experiencias que en algún momento fueron afrontadas en su vida escolar.

De igual manera, dentro del campo de las matemáticas, la fracción y sus diferentes interpretaciones, hacen parte de los conflictos escolares en el momento de enseñar como también de aprender, llenando de incertidumbre la construcción de saberes más abstractos, que Behr (1983), define como la medida, la equivalencia, la multiplicación y la resolución de problemas, entre otros. Del mismo modo, se dice que al desarrollar la competencia algebraica como un sistema simbólico operatorio, que sirve para modelar y tratar situaciones donde se requiere del manejo de los números racionales de la forma $\frac{a}{b}$, un estudiante debe desenvolverse eficientemente, porque de lo contrario, difícilmente podrá avanzar con otros sistemas numéricos más abstractos (Arteta, 2013).

Como se enunció en la introducción, en la Institución Educativa Distrital Bosanova-Sede B, de la ciudad de Bogotá, se ha detectado en el día a día escolar, la dificultad que presentan los estudiantes para comprender y distinguir las diferentes interpretaciones de la fracción en las clases de matemáticas, situación reportada por varios profesores que orientan esta disciplina desde los primeros años escolares y por las mismas investigadoras que lideran este proyecto.

Ahora bien, a pesar que desde grado tercero se trabaja sobre las fracciones, los estudiantes llegan a grado quinto y aún presentan las mismas dificultades de interpretación y confusión lo que hace prever que el mismo problema se presentará en bachillerato y aún con más solicitud al enfrentarse a las proposiciones algebraicas, entre otros.

De igual manera, los resultados en las pruebas externas aplicadas en el Colegio Bosanova, que se exponen en el capítulo de la justificación, muestran los bajos resultados que reflejan que los estudiantes de grado 3º "no usan fracciones comunes para describir situaciones en contextos continuos y discretos" y que en grado 5º "los estudiantes no reconocen las diferentes representaciones de fracciones" (MEN, 2016).

Teniendo en cuenta que la literatura sobre la fracción es muy extensa, se realizó la consulta acudiendo a los catálogos de bibliotecas nacionales, las bases de datos EBSCOHOST, PROQUEST y otras fuentes como Google Académico, utilizando como descriptores combinaciones de los términos: matemáticas, construcción cognitiva matemática, fracción, interpretaciones de la fracción, atributos de la fracción, relación parte-todo, fraccionario, recomposición de la unidad y competencia comunicativa en matemáticas.

También, se hizo una segunda revisión bibliográfica en el portal de Dialnet, especializado en publicaciones sobre temas hispánicos, encontrando el artículo de Fazio, L., & Siegler, R. (2011) bajo el nombre de *Enseñanza de las fracciones,* en el cual afirma que la comprensión de las fracciones es una de las competencias más importantes que necesitan ser desarrolladas en el currículo de matemáticas.

Al mismo tiempo y de acuerdo con lo específico del rastreo bibliográfico, entre los trabajos identificados con los descriptores, se seleccionaron las publicaciones más pertinentes con la propuesta planteada y, por consiguiente, se establecieron 5 categorías para abordar el interés de investigación: construcción cognitiva de las matemáticas, interpretaciones de la fracción, la fracción como relación parte-todo, aprendizaje y enseñanza de la fracción y competencia comunicativa en matemáticas.

Se reconoce que la fracción como relación parte-todo, hace parte de las interpretaciones de la fracción, peros siendo el objeto de estudio de esta investigación, se le ha sido asignado un apartado exclusivo en el numeral 1.3.

1.1. Construcción Cognitiva de las Matemáticas

Los especialistas en educación matemática, interesados por los procesos cognitivos que de allí se derivan, se han cuestionado frente a la interiorización de las matemáticas, su comprensión, proceso de construcción y evolución del mismo:

> (…) en lugar de plantearnos la pregunta general: "¿Cómo piensa la gente?", nos preguntamos: "¿Cómo piensa la gente en matemáticas?". En vez de preguntarnos "¿Cómo se desarrollan los procesos de pensamiento de la gente?", nos preguntamos: "¿Cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos matemáticos?". Queremos conocer qué proporción de experiencia y de intelecto hace posible aquello que llamamos *capacidad matemática*. (...) queremos saber no solamente cómo la ejecución humana adquiere habilidad, sino cómo la ejecución humana de habilidades matemáticamente significativas adquiere soltura, y cómo se integran dichas habilidades en el contexto de la resolución de problemas matemáticos.
> (Resnick y Ford, 1981, p. 15)

Estos autores se hacen las preguntas fundamentales que continuamente rodean el interés por darle el enfoque adecuado al currículo en matemáticas, caracterizado por unos propósitos educativos, acompañados de un contenido y metodología pertinentes.

Comparablemente con las afirmaciones de Resnick y Ford, desde los primeros años de infancia, el niño tiene un acercamiento con el mundo circundante y se evidencia la necesidad de desarrollar el sentido de lo numérico para que le permita interpretar en términos de cantidad su relación con los objetos que comúnmente manipula y seguramente resolver sus primeros problemas matemáticos.

Es así como:

> (...) paralelamente a la habilidad de contar, los niños van desarrollando cierta experiencia con distintas formas de relaciones numéricas que son importantes para el desarrollo posterior del número y la aritmética. Estas relaciones han sido definidas por Resnick (1992) como "esquemas protocuantitativos". (...) Por otro lado, y desde el esquema protocuantitativo parte-todo, los preescolares son capaces de conocer que cualquier "pieza”, por ejemplo, un pastel, puede ser dividida en partes más pequeñas y que volviéndose a juntar dan lugar a la pieza original. Desde este contexto, los esquemas de razonamiento protocuantitativos constituyen un elemento básico para el desarrollo matemático posterior.
> (Orrantia, 2006, p.166)

De tal forma que, si se toma como punto de partida lo anterior, para fundamentar la investigación sobre la importancia de dar continuidad a la construcción de los esquemas de razonamiento antes descritos, en especial, inquirir en la construcción del concepto de la fracción como relación parte-todo; es preciso decir que, en esta revisión documental se delimita el objeto de estudio a esta interpretación, acorde con lo citado por Behr (1983) y por Resnick (1992) cuando afirman que esta interpretación constituye la base para la comprensión de posteriores construcciones matemáticas.

1.2. Interpretaciones de la Fracción

Martínez y Lascano (2001), asumen lo expuesto por Llinares y Sánchez (1988) en cuanto a los atributos de la fracción; y al hacer su intervención, concluyeron que la población seleccionada para su investigación -36 estudiantes de grado séptimo, con edades que oscilaban entre los 11 y 16 años- presentó dificultad al intentar descomponer y recomponer la unidad, a su vez en el manejo de fracciones mayores que la unidad, fracciones impropias, y concluyen que se prueba la gran dificultad que representa la adquisición cognitiva para pasar de un atributo a otro de la fracción y sus diferentes interpretaciones.

Del mismo modo, Fernández y Ortiz (2014) centran su investigación en el proceso algorítmico y no hicieron intervención en el aula, sino que se dedicaron a revisar la literatura sobre el tema de fracciones y la forma como se ha venido tratando la fracción en la clase de matemáticas. Como consecuencia de esta revisión, encontraron que lo publicado enfatiza en el estudio de la dimensión del pensamiento numérico; pero las dimensiones del pensamiento métrico, espacial, variacional y aleatorio, poco se han explorado. Lo que acarrea una fractura entre la comprensión del número fraccionario y sus diferentes relaciones, situación reflejada en los resultados de pruebas de conocimientos internas y externas estandarizadas. Se recomienda que para estudiar el concepto de fracción se haga uso de dos o más de las dimensiones ya enunciadas, lo cual evitaría dificultades de comprensión del tema.

1.3. La Fracción como Relación ***Parte-Todo***

Prieto y González (2015), destacan la conceptualización de la fracción en su relación parte-todo como base para la construcción de los conceptos de razón, proporción y probabilidad, destacando las relaciones existentes entre estas interpretaciones. Además, recomiendan trabajar sobre la reconstrucción del todo con relación a la fracción y viceversa y establecer una conexión entre lo verbal, lo pictórico y lo simbólico de la fracción.

De igual manera, López (2012) considera que el significado de parte-todo en la fracción, es el más extenso y complejo en la enseñanza de fracciones, sumándole el hecho de tener que dominar el manejo de cantidades continuas y discretas. Añadiendo, que no es conveniente abordar todas las interpretaciones de la fracción de una sola vez, que este proceso debe ser gradual. Y que, para encaminarse en el éxito de esta tarea, se debe acudir a las representaciones concretas, diagramas, lenguaje natural y simbólico.

Así mismo, de acuerdo con la aproximación al concepto de fracción en su relación parte-todo, desde las investigaciones a nivel internacional, Zarzar (2013) realizó un estudio concluyente después de haber hecho varias sesiones en el aula de grado 6°, de educación primaria de una escuela pública de México en el 2013. En su diagnóstico evidenciaba dificultad de los estudiantes al hacer la transición de los números enteros a los números fraccionarios; ya que la mayoría de estudiantes carecían de la comprensión de las relaciones parte-todo y parte-parte, cociente, razón, operador y medida, por lo que estas relaciones y el paso de la una a la otra (diversificación de los soportes de representación) no se trabajaba en la escuela, quedándose solamente con el concepto inicial de parte-todo sin propiciar un mejor alcance a este campo conceptual.

Cerrando esta parte y de acuerdo con lo expuesto por los anteriores autores, se extiende una invitación a construir el bagaje matemático de los números racionales desde la relación de la fracción como parte-todo, atendiendo a lo expuesto por Behr (1983), cuando afirma que esta relación es la piedra angular de construcciones matemáticas posteriores.

1.4. Aprendizaje y Enseñanza de la Fracción

Godino (2010) sostiene que en el campo matemático no hay unificación y claridad en algunos símbolos utilizados, por ejemplo, la $\times$ es utilizada para denotar operación multiplicativa, pero en otros casos puede ser asumida como la incógnita en una ecuación.

Adicionalmente, Coronado (2015) abre la puerta pedagógica para evitar la mecanización de procesos matemáticos y más bien manejar un aprendizaje más dinámico y aplicado a la realidad contextual.

Del mismo modo, Hoyos (2015), hizo su intervención en la ciudad de Medellín, con estudiantes de educación primaria, y le apostó a estudiar las fracciones y sus interpretaciones en los diferentes contextos en los que el estudiante se desenvuelve, como también a la preponderancia de la pregunta orientadora y situaciones problema. El autor enmarca la necesidad de manejar unidades definidas y universales, para evitar generar confusión entre los estudiantes.

En cambio, Arteta y Rodríguez (2013), plantean la necesidad de capacitar a los maestros que orientan matemáticas para erradicar las dificultades que continuamente se presentan en el momento de enseñar la temática de fracciones, debido a que por falta de apropiación del conocimiento de la fracción, sus atributos y contextos, crean vacíos conceptuales y confusión entre los estudiantes. Se afirma que el hecho de que muchos de los maestros que asumen la responsabilidad de enseñar, no sean especialistas en la materia, o no hayan sido formados para ello, hace inminente la necesidad de una adecuada capacitación docente.

1.5. Competencia Comunicativa en Matemáticas

Para Coronado (2015), si se le diera mayor importancia al lenguaje utilizado en la clase de matemáticas y se hiciera la debida trasposición didáctica, el aprendizaje sería significativo y de calidad. El autor afirma que el lenguaje se debe convertir en un puente que ayuda al estudiante a traspasar la barrera de lo desconocido a través de la decodificación de lo dicho y lo escuchado. Planteamiento que coincide con Chevallard (1989), cuando asevera que el estudiante puede tener la pericia para resolver situaciones matemáticas complicadas, pero si no entiende la estructura gramatical y el significado de lo que se le propone resolver, no podrá dar respuesta a lo solicitado. Luego, este mismo discurso lo maneja Coronado (2015), quien privilegia el discurso docente y el lenguaje utilizado en la clase de matemáticas.

Adicionalmente, para Forero (2008), la comunicación en la clase de matemáticas y el discurso docente desempeña un papel fundamental, ya que es a través del lenguaje que se hace la transposición didáctica (adaptación) a los estudiantes. Dice Forero, que el lenguaje permite la construcción del conocimiento compartido en escenarios cotidianos y que, en la praxis, también se genera una forma de pensar, hacer y comunicar matemáticas.

En esta investigación, se asume la competencia comunicativa como el puente que permite que los estudiantes exterioricen, verbalicen o plasmen gráficamente sus respuestas, logrando construir así, un lenguaje matemático que les permita evidenciar un registro concreto, verbal, gráfico o simbólico.

Luego, en los Lineamientos curriculares en matemáticas (MEN, 1998), se habla de *la competencia escrita*, entendida como la forma en que el estudiante "usa y representa las relaciones matemáticas, cómo codifica las expresiones del lenguaje común que deben ser expresadas en lenguaje matemático y, también, la lectura en lenguaje común de las expresiones dadas en lenguaje matemático" (p. 88).

También, en los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas, se habla de *los cinco procesos generales de la actividad matemática* y entre ellos se cita a la comunicación como:

> (…) La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos.
> (MEN, 2006, p. 54)

Por lo que, la importancia del buen uso del lenguaje matemático y la competencia que de allí deriva, la competencia comunicativa, pone de manifiesto su necesidad para avanzar en la profundización del mundo matemático.

2. Problema de Investigación

El reconocimiento de las investigaciones nacionales e internacionales previamente realizadas frente a la interpretación de la fracción como relación parte-todo, ha permitido establecer la necesidad de seguir explorando el papel que desempeña esta interpretación para la resolución de problemas aritméticos de estructura aditiva y el futuro manejo algebraico por parte de los estudiantes.

Basándose en ello, Castro (2016), afirma que el esquema parte-todo desde lo cognitivo y la relación parte-todo como base matemática y su dominio, deben alcanzarse en los primeros años escolares:

> En la matemática escolar, encontramos la relación parte-todo en el estudio de las estructuras aritméticas, tanto en la estructura aditiva como en la multiplicativa, con diferente significado. La relación parte-todo es el origen para entender dichas estructuras, ya que da lugar a acciones por las cuales se presenta la estructura aditiva (agregar, reunir, segregar, separar) y multiplicativa (reiterar o hacer partes iguales).
> (Castro, 2016, p. 17)

Luego, las fracciones surgen de una relación multiplicativa parte-todo, como la forma de expresar la relación entre una parte y el todo del que procede, e inicialmente los estudiantes aprenden fracciones como las partes que componen un todo.

En general, los estudios alrededor de este contexto permiten establecer la necesidad de seguir indagando y estableciendo las diferentes interpretaciones y comprensiones que surgen en los niños ante una construcción mental que es necesaria para dar lugar al pensamiento aditivo, al pensamiento multiplicativo y más adelante a un pensamiento matemático más estructurado como el de los números racionales.

En torno a esto, y a partir de una indagación teórica rigurosa -como la búsqueda de investigaciones previas, reflejadas en el capítulo de antecedentes y la consulta de los autores citados en el marco teórico-, se espera identificar y abordar las falencias que continuamente presentan los estudiantes al estudiar la fracción, que salen a la luz cuando se desarrollan actividades pertenecientes a los diferentes momentos de la clase.

Sumado a lo anterior, se espera que haya apropiación de los conceptos relacionados con la fracción, gracias a la aplicación de la secuencia didáctica que entre otros, pretende esclarecer dudas y facilitar la construcción mental que es necesaria para dar lugar a nuevos aprendizajes.

En cuanto a la trascendencia de la competencia comunicativa en esta investigación, es inminente tener presente que muchos problemas de entendimiento tienen que ver con la forma como el que enseña y como el que aprende, se comunican. Es decir, con las destrezas propias de la competencia comunicativa, que permiten lograr aprendizajes. Es importante que los estudiantes "…puedan dialogar, compartir y contrastar saberes, acceder y producir información escrita, llegar a acuerdos, entenderse; en una palabra, aprender" (Ordoñez, 2007, p. 1).

Desde esta perspectiva, este proyecto se centrará en contestar la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo interpretan la fracción como relación parte-todo, en contextos continuos y discretos, los estudiantes de grado quinto de básica primaria del colegio Bosanova Sede-B, a partir de la implementación de una secuencia didáctica que relaciona los atributos de la fracción, los contextos y los registros de representación, privilegiando la competencia comunicativa?

3. Objetivos

3.1. Objetivo General

Describir y analizar la interpretación de la fracción como relación parte-todo, en contextos continuos y discretos, de los estudiantes de grado quinto de básica primaria del colegio Bosanova Sede-B, a partir de la implementación de una secuencia didáctica que relaciona los atributos de la fracción, los contextos y los registros de representación, privilegiando la competencia comunicativa.

3.2. Objetivos Específicos

-Explorar los procesos cognitivos de los estudiantes, haciendo uso del método de entrevista clínico-crítica, como herramienta que permite analizar la interpretación de la fracción como relación parte-todo, en contextos continuos y discretos, a través de la competencia comunicativa en matemáticas.

-Analizar la interpretación de la fracción como relación parte-todo, que se observa en un grupo de estudiantes de grado quinto, desde los atributos, los contextos y los registros de representación, trabajados a partir de la implementación de la secuencia didáctica.

-Relacionar las interpretaciones de la fracción como relación parte-todo, que hacen los estudiantes, con las categorías de análisis -atributos, contextos y registros de representación-.

4. Justificación

El aprendizaje de las fracciones y sus diferentes interpretaciones se consideran una dificultad que existe a nivel mundial en las diferentes instituciones educativas. Según Fazio, L. & Siegler,

R. (2011), aún en países como China y Japón, cuyos resultados académicos son muy buenos, se registra que el trato con las fracciones se torna difícil para los estudiantes, en primera medida, cuando se enteran de que muchas propiedades de los números enteros no aplican para todos los números, y ya en bachillerato se aumenta la dificultad, al tener que entender que entre una fracción y la otra existen números infinitos. No obstante, es un conocimiento que se debe tener como base para seguir haciendo construcciones conceptuales y procedimentales en las matemáticas superiores.

Adicionalmente, existe complicación en la enseñanza de las fracciones porque a veces se pretende enseñar fórmulas que apliquen a todos los casos o algoritmos repetitivos, sin antes analizar los procesos necesarios para obtener un resultado; procesos que, para ser comprendidos y aprendidos según Llinares & Sánchez (1998), requieren de una representación concreta, oral, gráfica y simbólica.

Revisando los resultados en el informe suministrado por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes, 2015), en las Pruebas Saber (evaluaciones que los estudiantes colombianos deben presentar cuando cursan tercer y quinto grado de educación básica primaria y noveno de bachillerato), se encuentra que en aprendizajes como: “usar fracciones comunes para describir situaciones continuas y discretas” y “reconocer e interpretar números naturales y fracciones en contextos”, los estudiantes presentan bajos resultados, permitiendo respaldar la necesidad de reforzar su enseñanza y aprendizaje.

Por consiguiente, este trabajo se sustenta bajo la necesidad de una construcción y manejo conceptual de las fracciones por parte de los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Bosanova-Sede B, de la ciudad de Bogotá y como argumentos se declaran los siguientes:

4.1. Desconocimiento por parte de los docentes del proceso de construcción cognitivo que siguen los estudiantes frente a la *relación parte-todo*

A pesar de que la construcción matemática desde la relación parte-todo se configura como la base de los números racionales, en concordancia con los autores ya citados, continuamente se detectan lagunas de aprendizajes que debieron construirse en años anteriores y esto hace que los estudiantes se limiten y se estanquen en esquemas anteriores, como el de los números naturales.

Además, se encuentran errores inducidos por una enseñanza que ha abordado la fracción en forma global sin entrar en detalle desde sus atributos, sumado al desconociendo del proceso de construcción cognitiva que siguen los estudiantes frente a la relación parte-todo, la unidad y reconstrucción de la unidad.

Estos aspectos, entre otros, más la no retroalimentación constante de los resultados obtenidos en este aprendizaje, limitan los avances en la cimentación de la red de conocimientos matemáticos del estudiante y la formalización de otros esquemas numéricos.

4.2. Las dificultades de los estudiantes frente a la interpretación de las fracciones, observadas directamente en el aula

Es de gran importancia para conocer el problema de investigación, tener en cuenta la narración de la experiencia de los profesores que han trabajado con los niños de grado quinto en el colegio Bosanova Sede-B jornada tarde; quienes describen como situación particular que en el año 2015 la sede B pertenecía al Colegio Motorista y los docentes intentaron llevar a cabo lo planeado en la malla curricular del colegio en lo correspondiente a grado tercero (ver en *Anexo1*). Comenzaron por realizar una prueba diagnóstica y se encontraron con caras de asombro y desconocimiento por parte de los estudiantes al respecto de conceptos previos indagados en la prueba. En general, los estudiantes presentaban falencias en los aprendizajes matemáticos desde cada uno de los pensamientos: numérico, espacial, geométrico métrico, aleatorio y variacional, específicamente, en grado tercero, donde los estudiantes debían saber interpretar, formular y resolver problemas aditivos de composición, transformación y comparación en diferentes contextos y en sentido inverso, a su vez, situaciones problema en contexto de tipo multiplicativo directos e inversos y las primeras nociones de la fracción.

En grado cuarto la interpretación de las fracciones como razón, relación parte-todo, cociente y operador en diferentes contextos; y así mismo, llegar al grado quinto para interpretar y utilizar los números naturales y racionales en su representación fraccionaria para formular y resolver problemas aditivos, multiplicativos que involucran operaciones de potenciación; de acuerdo a los Derechos Básicos de Aprendizaje[1] (MEN, 2016).

Luego, esto lleva al grupo de investigadoras a realizar un trabajo de reconstrucción de los saberes hasta lograr ubicar a los estudiantes en los mínimos requeridos del grado, más cuando se estudia la interpretación de la fracción como razón, como relación parte-todo, como cociente y como operador en diferentes contextos. Una vez detectada la confusión de los estudiantes en el desarrollo de ejercicios relacionados con la interpretación de la fracción como parte-todo, en contextos continuos y discretos, como también la fracción como relación multiplicativa, surge la motivación por diseñar una propuesta pedagógica que permita indagar sobre las dificultades encontradas.

4.3. Los resultados en las pruebas Saber de los estudiantes en grado tercero y grado quinto, del Colegio Bosanova-Sede B

Al analizar los resultados en cada una de las competencias de matemáticas de la prueba Saber

[1] De aquí en adelante DBA.

Icfes del grado tercero del Colegio Motorista[2], pertenecientes al grupo de estudiantes objeto de estudio en el proyecto, hoy en día, grado quinto: Se puede distinguir entre los aprendizajes por mejorar y con mayor porcentaje de dificultad en la competencia de comunicación que el 46% de los estudiantes no usa las fracciones comunes para describir situaciones continuas y discretas. Lo cual se puede observar en la **Figura 1**:

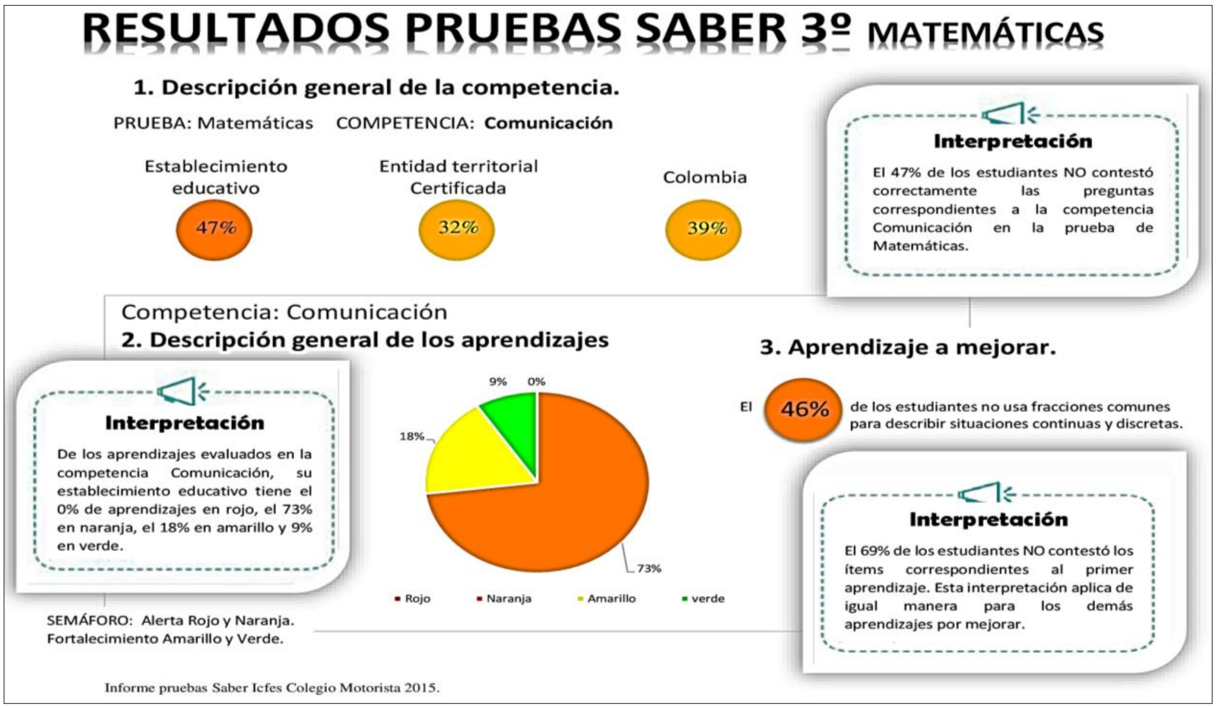


Figura 1. Fuente: Informe pruebas Saber Icfes Colegio Motorista 2015. Elaboración propia

Y de acuerdo con la **Figura 2,** en grado quinto el 49% de los estudiantes no reconoce ni interpreta números naturales y fracciones en diferentes contextos.

---

[2] Nombre del colegio en el año 2015. Informe pruebas Saber Icfes Colegio Motorista 2015.

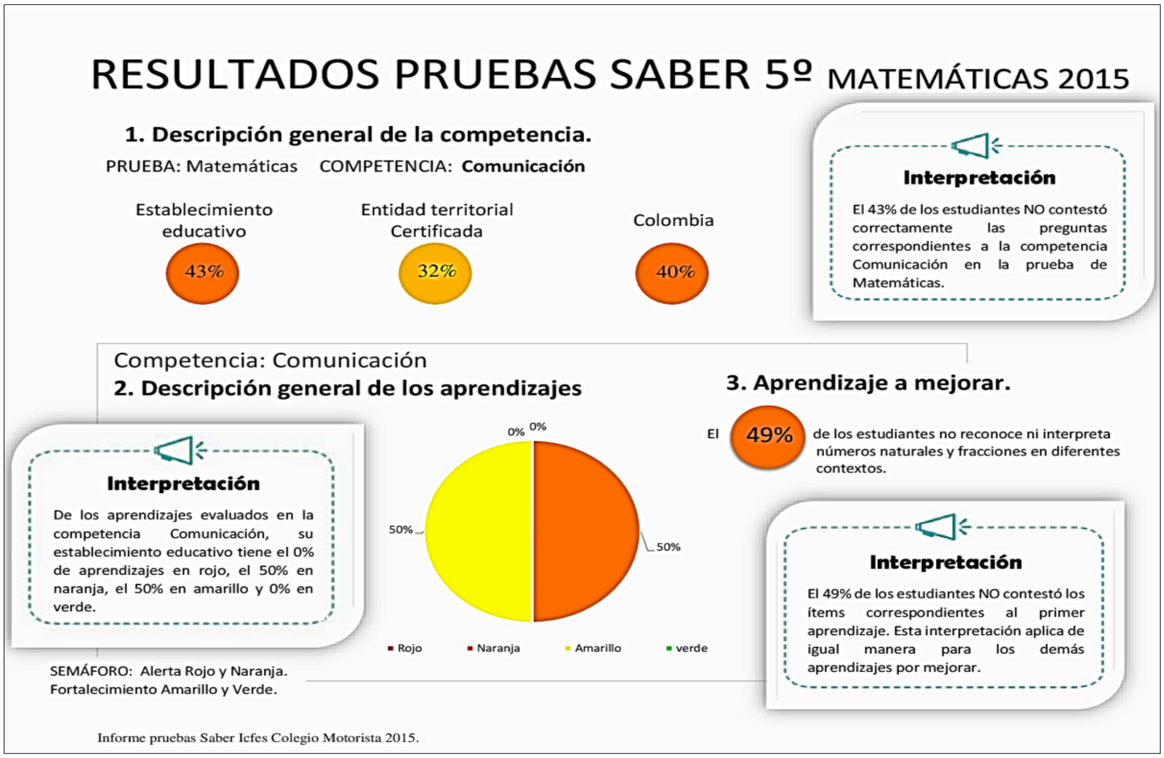


Figura 2. Fuente: Informe pruebas Saber Icfes Colegio Motorista 2015. Elaboración propia

Por consiguiente, aproximadamente la mitad de los estudiantes de grado quinto presentan dificultad para usar las fracciones y describir situaciones continuas y discretas, lo cual se manifiesta notablemente el buen desarrollo de los aprendizajes relacionados con respecto a las fracciones en grado quinto.

Se puede concluir que tanto en grado tercero como en grado quinto, los estudiantes presentan dificultad para usar las fracciones comunes para describir situaciones continuas y discretas; además no reconoce ni interpreta números naturales y fracciones en diferentes contextos.

4.4. Articulación con los referentes de calidad colombianos

Teniendo en cuenta que los referentes de calidad son orientaciones educativas emitidas por el Ministerio de Educación Nacional, bajo las cuales se rigen los establecimientos educativos de educación formal, es inminente la necesidad de responder a las políticas emanadas por las autoridades académicas y apoyarse en los documentos que el Ministerio de Educación Nacional brinda para el desarrollo de la labor docente, los cuales dan una estructura a la enseñanza de las matemáticas en las escuelas colombianas. Por lo cual, dentro de las consideraciones legales se han tenido en cuenta los siguientes Referentes de Calidad: la Ley General de Educación (1994), los Lineamientos curriculares para el área de matemáticas (1998), los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (2006), y los documentos de fortalecimiento curricular: la Matriz de Referencia (2015) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016).

Estos referentes serán tratados en detalle en el capítulo 5 correspondiente al marco teórico, específicamente, dentro del marco legal.

4.5. Revisión de las mallas curriculares del Colegio Bosanova-Sede B

Al realizar la revisión de las mallas curriculares del colegio Bosanova (ver en *Anexo1*), sede B, se encontró una malla curricular para matemáticas de la sección primaria, con las siguientes características:

Es una malla que propone 4 períodos durante el año escolar. En el año 2015, en el grado tercero se estudia la fracción como parte de un todo (muy someramente), clases de fracciones y adiciones y sustracciones de fracciones homogéneas, restándole profundización e importancia a la relación parte-todo de la fracción.

En el año 2016, en grado cuarto, los mismos estudiantes trabajan sobre la clasificación de fracciones, las comparaciones de fracciones, las relaciones de equivalencia entre las fracciones, las operaciones entre fracciones (suma, resta, multiplicación y división de fracciones homogéneas y heterogéneas) y problemas con fracciones; todo esto sin tener fuertes y claras bases de la relación parte-todo para que procesos como la clasificación, comparación y operaciones entre fracciones muestren los resultados esperados, además retoma la clasificación de las fracciones vista el año anterior (según la malla en estudio).

Para el año 2017, con intervención del grupo de investigadoras se logra realizar un ajuste teniendo en cuenta los DBA, Estándares Básicos de Competencia y Lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional, sobre toda la malla de la básica primaria y se determina que se hace necesario retomar la suma y resta de fracciones, la conversión e interpretación de fracciones decimales y fracciones como decimales, para tener un espacio donde los estudiantes puedan realizar la conexión de la relación parte-todo y lograr aprendizajes esperados sobre las operaciones de las fracciones y todo lo concerniente a ellas. Como resultado, se llega a las siguientes conclusiones acerca de la malla, después de analizar el ***Anexo 11***, correspondiente a la malla curricular de Colegio Bosanova años 2015, 2016 y 2017, donde se concreta que:

- Hay una inexistente articulación entre los Referentes de calidad y la malla curricular.
- Falta de linealidad entre los diferentes aprendizajes de los grados de la básica primaria.
- El trabajo en las diferentes habilidades del pensamiento matemático no se encuentra relacionado entre sí y está organizado en forma dispersa.
- Adicional a lo observado en la malla curricular, se suma la incoherencia entre lo planteado en ella y lo desarrollado en las clases.

Las anteriores situaciones dan cabida a pensar que no sólo en grado tercero se vea afectado el buen desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, sino que en grado quinto se trunca el proceso para el desarrollo de los aprendizajes que dan lugar al conocimiento adecuado de la interpretación de la fracción en su relación parte-todo y su respectiva relación multiplicativa.

4.6. La necesidad de cimentar buenas bases matemáticas para construcciones abstractas posteriores

El desarrollo del entendimiento y uso numérico se vislumbra desde los primeros años de escolaridad y nace de la interacción con el mundo que rodea al niño y de la necesidad de interpretarlo y querer cuantificarlo, por eso Resnick (1992), en su publicación habla de la formación temprana del razonamiento proto-cuantitativo (sin números) afirmando el manejo de tres esquemas protocuantitativos: el de aumento-disminución, el esquema parte-todo y el esquema de comparación.

Es así, como dentro del campo de las matemáticas, la fracción y sus diferentes interpretaciones -por ejemplo: como relación parte-todo, entre otras- hace parte de los conflictos escolares en el momento de enseñar como también de aprender, ya que constituye la construcción de saberes futuros más abstractos. Así pués, Behr (1983) se refiere a su incidencia en el estudio de la medida, la equivalencia, la multiplicación y la resolución de problemas.

Además, al desarrollar la competencia algebraica, como un sistema simbólico operatorio que sirve para modelar y tratar situaciones donde se requiere del manejo de los números racionales, de la forma $\frac{a}{b}$, un estudiante debe manejar eficientemente los sistemas simbólicos operatorios correspondientes, porque de lo contrario, difícilmente podrá avanzar con otros sistemas numéricos más abstractos (Arteta, 2012).

4.7. El Papel de la Competencia Comunicativa en Matemáticas

La competencia comunicativa corresponde a la capacidad de una persona para emplear el lenguaje oral o escrito en diferentes contextos. Esta capacidad y su afinación dependen de las diferentes experiencias vividas y las necesidades y motivaciones a las cuales una persona se vea sometida.

Para el caso de la competencia comunicativa en matemáticas, se habla de la habilidad para utilizar un sistema de símbolos que permitan pensar y comunicar ideas, explicar procedimientos para resolver situaciones matemáticas o tener la capacidad de proponerlas. Cuando el estudiante no interpreta adecuadamente, se ve limitado en su comunicación y por ende, no puede relacionar sus experiencias con los conocimientos matemáticos y tratar de hacer algún tipo de transferencia.

Por esto, Niss y Jensen (2002) distinguen ocho competencias básicas en el ámbito de las matemáticas: competencia de modelización, competencia de solución de problemas, competencia de pensamiento matemático, competencia de representación, competencia de símbolos y formalismos, competencia de comunicación, competencia de ayudas y herramientas y competencia de razonamiento.

Más adelante en el capítulo 5, referido al marco teórico, se profundizará en la competencia comunicativa en matemáticas y su importancia.

5. Marco teórico

La investigación realizada se enmarca en el conocimiento de *la fracción en su relación como parte-todo* y la perspectiva teórica de construcciones matemáticas posteriores a partir de esta relación. En este capítulo se compilan los saberes necesarios y pertinentes para fundamentar la importancia de estudiar la fracción en términos de marco legal, marco histórico y marco conceptual, teniendo en cuenta los referentes teóricos que sustentan el presente estudio.

Para dar alcance a lo propuesto, se traza el siguiente esquema que presenta los conocimientos que se tienen en cuenta para apoyar teórica y conceptualmente la investigación, y que se desarrollarán a lo largo de este apartado (**Figura 3**):

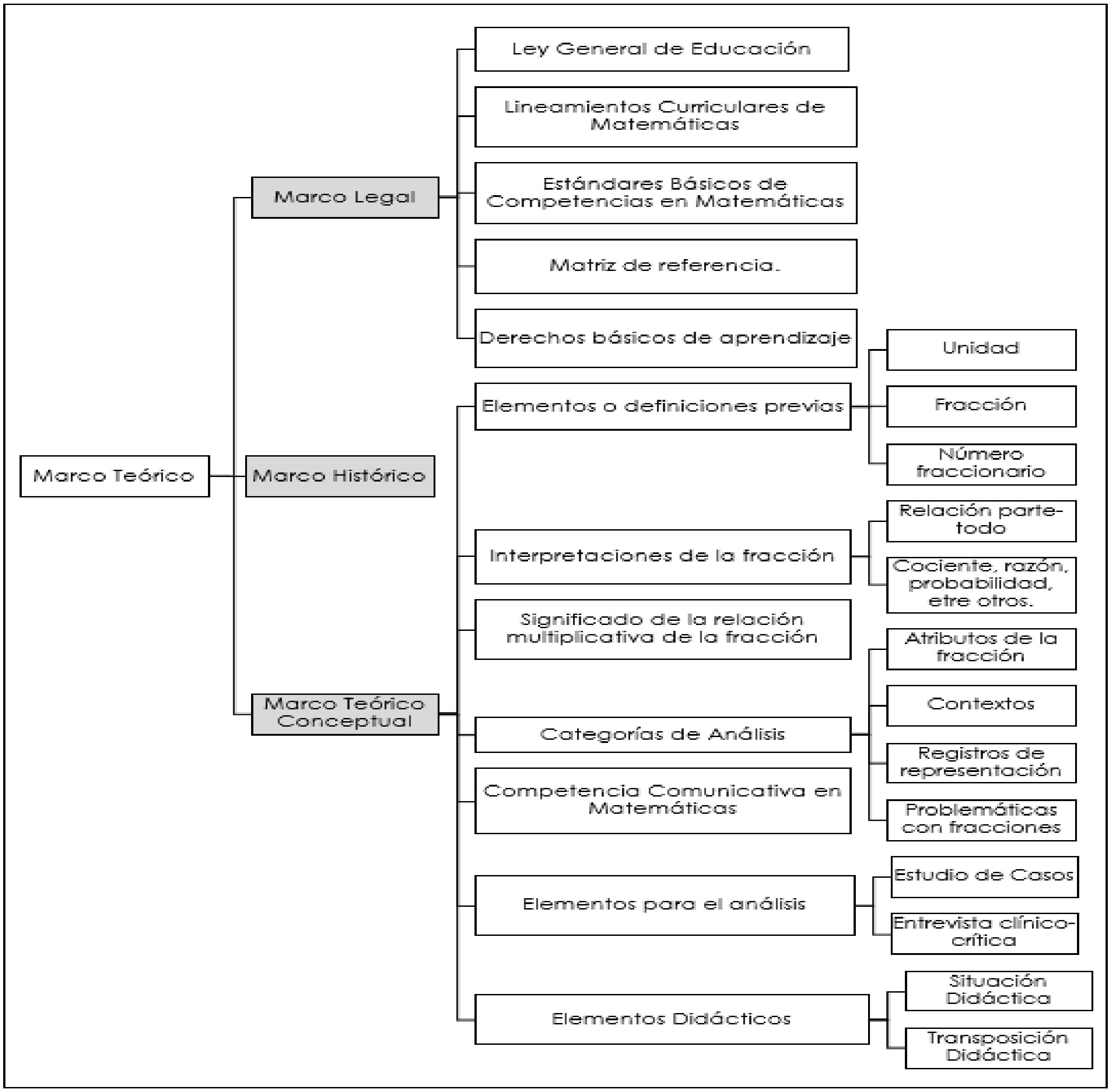


Figura 3. Esquema del marco teórico de la investigación. Fuente: elaboración propia

5.1. Marco Legal

Los referentes de calidad son los parámetros que orientan los procesos educativos y pedagógicos en el país y corresponden a los esfuerzos del Ministerio de Educación Nacional (MEN) por brindar pautas claras sobre los aprendizajes que deben alcanzar los estudiantes de acuerdo con su desarrollo educativo.

Partiendo de esto y con la necesidad de responder a lo estipulado en las políticas educativas colombianas, conviene decir que esta investigación se enmarca en la Ley General de Educación del año 1994, Los Lineamientos curriculares en matemáticas del año 1998, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del año 2006, la Matriz de Referencia del año 2015 y los Derechos Básicos de Aprendizaje del año 2016. Por lo que, en la **Figura 4** se muestra la línea de tiempo de los referentes nombrados:

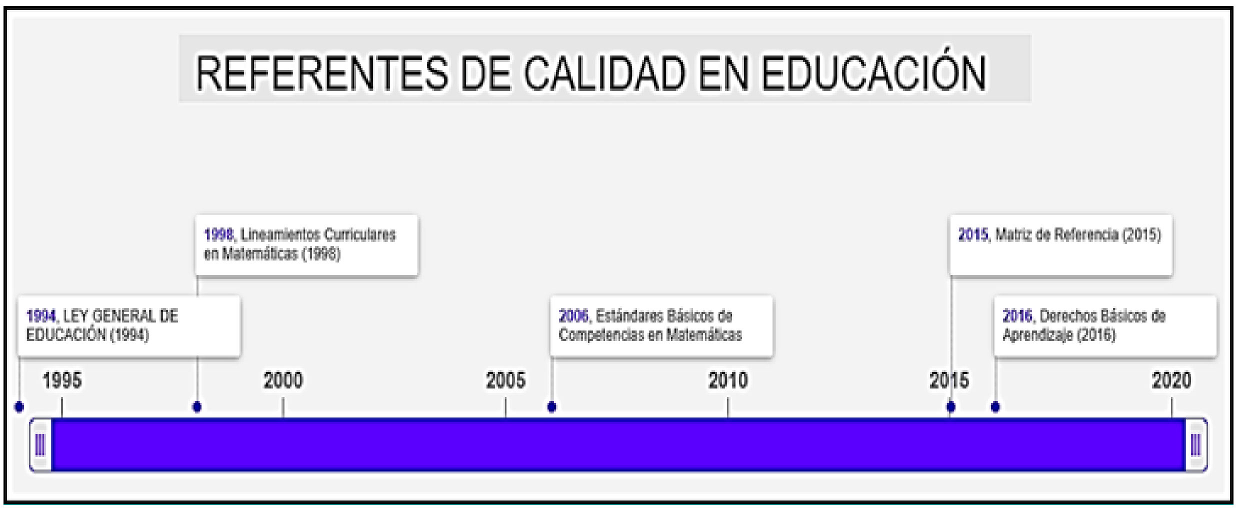


Figura 4. Referentes de calidad en educación de Colombia. Fuente: elaboración propia

5.1.1. Ley general de educación. La Ley general de educación, señala que la persona debe ser educada bajo un proceso integral y que dicha educación debe ser un proceso permanente, personal, cultural y social; además se fundamenta en los principios de la Constitución Política sobre el derecho a la educación que tiene toda persona, en las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra y en su carácter de servicio público (Ley 115, 1994).

En referencia a este contexto, se establece el vínculo entre la investigación y lo descrito en el artículo 5° de la Ley 115 y el artículo 67 de la Constitución Política Colombiana (1991), sobre los fines de la educación, específicamente el literal 9, que afianza el desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de vida de la población, y la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país (Ministerio d. E., 1994); con el cual se afirma que el ser humano se educa no solo para su beneficio sino para la transformación de una sociedad y un país. Adicionalmente, en la sección tercera, artículo 21°, con respecto a los objetivos específicos de la educación básica en el ciclo de primaria de 1° a 5°, establece en el numeral "e" lo fundamental que es para el niño de primaria el desarrollo de los conocimientos matemáticos básicos en la utilización de cálculos y procedimientos lógicos en la solución de problemas, dando así una real importancia -de manera implícita- a la comunicación matemática con un fin en contexto.

5.1.2. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Este documento busca suministrar, promover y encaminar los procesos curriculares en las instituciones, dándole la exactitud del objetivo de la enseñanza de las matemáticas cuando plantea lo siguiente: "El aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás" (p. 18). Lo que impulsa a diseñar un currículo bajo tres aspectos fundamentales: el primero toma el nombre de *procesos generales,* el segundo se refiere a *procesos básicos,* y el tercero, *el contexto.* El documento da pautas acerca de cómo debe ser ese proceso matemático especialmente en el proceso de formulación y solución de problemas, entre las que se puede citar la siguiente: "Desarrollar habilidad para comunicarse matemáticamente: expresar ideas, interpretar y evaluar, representar, usar consistentemente los diferentes tipos de lenguaje, describir relaciones y modelar situaciones cotidianas" (Lineamientos curriculares para el área de matemáticas, 1998, p. 53).

5.1.3. Estándares Básicos de Competencias en matemáticas. Los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas responden a las demandas de la globalización en la educación y la cultura; es decir; a la formación integral del ser humano, desde allí se propone la formación de seres humanos competentes, comenzando con un aprendizaje por competencias basado en los cinco procesos generales de la actividad matemática, descritos en los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas, donde el pensamiento matemático coincide con la función de los pensamientos numérico, espacial, métrico o de medida, aleatorio, probabilístico y variacional. Aunque no se menciona el pensamiento lógico, éste posibilita el desarrollo de cada uno de ellos.

Por consiguiente, dentro de los Estándares Básicos de Competencias para los grados cuarto y quinto, en el pensamiento numérico y sistemas numéricos, se encuentra un estándar pertinente a esta investigación, en la publicación del Ministerio de Educación Nacional (2006): "Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte-todo, cociente, razones y proporciones" (p.82) ; como uno de los aspectos fundamentales que el estudiante al terminar grado quinto debe demostrar.

5.1.4. Matriz de referencia. La matriz de referencia muestra los aprendizajes que el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes) evalúa por área a través de las pruebas Saber. Allí se relacionan las competencias y evidencias que se espera alcancen los estudiantes, con el fin de que la comunidad educativa pueda identificar los aprendizajes esperados para los estudiantes en los grados tercero, quinto, séptimo y noveno; comprende competencias -saber hacer en contexto-componentes -conceptos y desempeños-, aprendizajes -conocimientos, capacidades y habilidades del estudiante- y evidencias -acciones a las que se refieren los aprendizajes-; organizados de la siguiente manera en matemáticas: ***competencias***: comunicación, razonamiento y resolución; y ***componentes***: Aleatorio, Espacial Métrico y Numérico Variacional; entre los cuales se presentan aprendizajes y evidencias.

Dentro de la pertinencia de esta investigación que está centrada en estudiantes de grado quinto de educación primaria, la **Figura 5** muestra las competencias y evidencias que se espera alcancen los estudiantes en el *componente numérico variacional*:

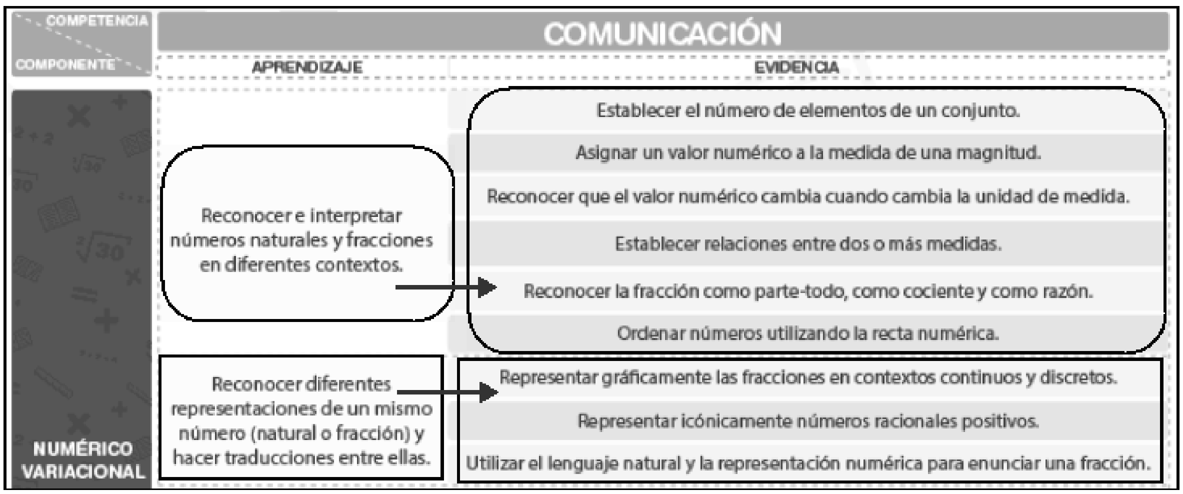


Figura 5. Matriz de referencia (2015). Matemáticas. Colombiaaprende.edu.co. Recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/articles-352712_matriz_m.pdf

Y la **Figura 6** muestra las competencias y evidencias que se espera alcancen los estudiantes en el *componente resolución*:

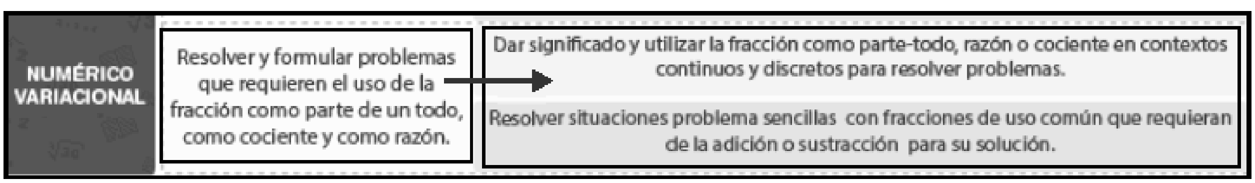


Figura 6. Matriz de referencia (2015). Matemáticas. Colombiaaprende.edu.co. Recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/articles-352712_matriz_m.pdf

Lo que sugiere la necesidad de que los estudiantes alcancen los aprendizajes esperados, con altas expectativas para el cumplimiento de aprendizaje de calidad.

5.1.5. Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). Explicitan los aprendizajes estructurantes para un grado y un área particular, los DBA se organizan guardando coherencia con los

Lineamientos curriculares y Estándares Básicos de Competencias. Su importancia radica en que plantean elementos para construir rutas de enseñanza que promueven la consecución de aprendizajes año a año para que, como resultado de un proceso, los estudiantes alcancen los EBC propuestos por cada grupo de grados (MEN, 2016).

En la **Tabla 1**, se observa una trazabilidad en los DBA al desarrollar de manera progresiva los aprendizajes desde el primer hasta el quinto grado, con relación al objeto de estudio de esta investigación se destacan los siguientes aprendizajes:

Tabla 1
DBA relacionados con el objeto de investigación

Grado 1	Grado 2	Grado 3	Grado 4	Grado 5
Identifica los usos de los números -como código, cardinal, medida, ordinal- y las operaciones -suma y resta- en contextos de juego, familiares, económicos, entre otros	**Interpreta, propone y resuelve problemas aditivos -de composición, transformación y relación-** que involucren la cantidad en una colección, la medida de magnitudes -longitud, peso, capacidad y duración de eventos- y problemas multiplicativos sencillos	**Interpreta, formula y resuelve problemas aditivos de composición, transformación y comparación en diferentes contextos**; y multiplicativos, directos e inversos, en diferentes contextos	**Interpreta las fracciones como razón, relación parte-todo**, cociente y operador en diferentes contextos	**Interpreta y utiliza los números naturales y racionales en su representación fraccionaria** para formular y resolver problemas aditivos, multiplicativos y que involucren operaciones de potenciación

Fuente: elaboración propia

Se evidencia en la tabla que desde los grados primero y segundo se realiza un tratamiento con los números naturales para en grado tercero comenzar a abordar la fracción, lo que demuestra que cada eslabón cursado en cada uno de los grados de la básica primaria asegura que la cadena del conocimiento matemático se estructure de forma adecuada.

Por lo anteriormente descrito, puede decirse que el marco legal aquí constituido, permite demostrar la inclusión del estudio de la fracción en los documentos legales, los cuales, a pesar de estar escritos en diferentes momentos de la educación en Colombia, realizan un engranaje y aporte significativo a la adquisición de conocimientos en la escuela. Su secuencialidad demuestra la preocupación existente por generar concordancia y búsqueda de calidad educativa.

5.2. Marco Histórico

Para abordar la historia de la fracción y su impacto en el mundo matemático, se ha tomado como base la publicación de Fandiño (2009) donde habla de su historia y sus distintas transformaciones. Con la información descrita, el grupo investigador ilustra la siguiente línea de tiempo de la **Figura 7**:

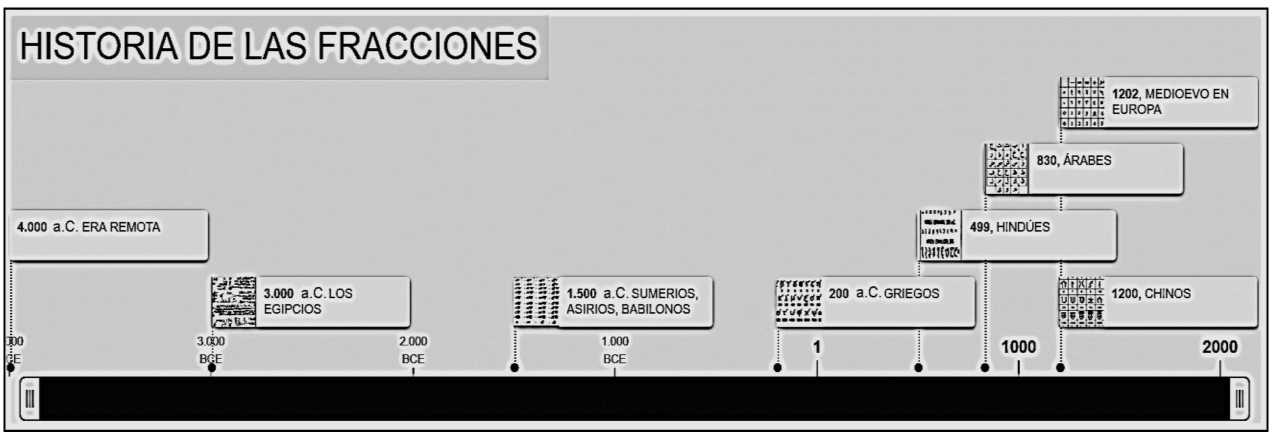


Figura 7. Línea del tiempo de las fracciones. Fuente y elaboración propia.

Inicialmente, se destaca que la manera como se representan los números ha ido cambiando a través de los siglos. No solamente se ha contado con diferentes sistemas de numeración, sino con diferentes formas de escribir la misma cantidad, en sistemas de numeración similares. Por ejemplo, el sistema de numeración decimal existía antes de la invención de los numerales indo arábigos, previo a la invención de dichos numerales, fueron utilizadas otras formas de escribir cantidades, utilizando el sistema de numeración posicional de base 10, que utilizamos actualmente. Luego, esto indica la importancia de distinguir entre un concepto y la forma de representarlo. En esta parte se tratará la fracción, en el contexto del desarrollo histórico que hace un rastreo con los egipcios, los babilonios -sumerios y asirios-, la matemática griega, los aportes de los chinos, los hindúes, pasando por los árabes hasta llegar a el medioevo en Europa.

Los egipcios (3.000 a.C.), utilizaron un sistema de numeración aditivo y elaboraron una forma de escribir la fracción en dicho sistema. Este sistema era un sistema pictográfico-jeroglífico. Además, lo interesante de la matemática egipcia era que ellos no utilizaban todas las fracciones, toda fracción la expresaban como una suma de fracciones unitarias. Por ejemplo: un medio no la escribían $\frac{1}{2}$ **,** como se conoce, sino que la descomponían como suma de fracciones unitarias (**Figura 8**):

Figura 8. Recuperado de http://slideplayer.es/slide/3507147/

Una fracción unitaria es una fracción cuyo denominador es cualquier número y el numerador es siempre la unidad. También a cambio de fracción unitaria, se habla de inversos, porque una fracción unitaria es el inverso multiplicativo de un número. Por ejemplo: si se tiene el número 3, $\frac{1}{3}$ es el inverso multiplicativo de 3.

Así pues, los egipcios toda fracción la expresaban como suma de fracciones unitarias y nunca repetían una fracción, ya que consideraban que una fracción era única. Algunos historiadores afirman que solamente escribían fracciones unitarias, porque para ellos conceptualmente era muy fácil entender la división de la unidad en partes iguales y les era necesario utilizar las fracciones que hoy en día se utilizan.

Luego, ellos escribían todos los números de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y q

un número diferente de cero.

Por otra parte, se desconoce también qué método utilizaban los egipcios para descomponer una fracción dada como una suma de fracciones unitarias. Se han encontrado papiros donde aparecen fracciones expresadas de esta forma y a raíz de estos hallazgos es como matemáticos contemporáneos han elaborado conjeturas acerca del manejo de las fracciones, ya que a ciencia cierta se desconoce su manejo.

En la **Figura 9**, se observa el Papiro de Ahmes, que refiere al manejo de fracciones por parte de los egipcios:

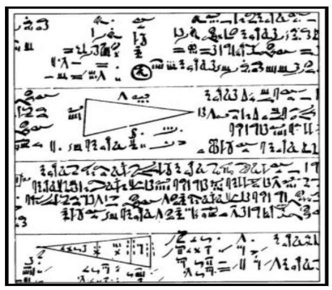
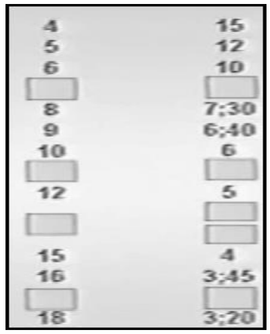


Figura 9. Papiro de Ahmes. Tomada de https://kellyeartblog.wordpress.com/category/uncategorized/

De la misma forma, en **los babilonios (1500 a.C.),** se encuentran los primeros elementos de un sistema de notación posicional. Los babilonios utilizaron este sistema con base 60, y lo utilizaron para hacer muchos cálculos.

Hay muchas especulaciones acerca del por qué los babilonios escogieron el número 60 para sus operaciones, al parecer por ser un número relativamente pequeño que tiene varios divisores. Este sistema de numeración posicional y de base 60, les permitió a los babilonios realizar un gran número de cálculos, lo cual se registra en muchos documentos conservados. También, esta técnica, les permitió hacer cálculos con fracciones para manejo de tipo astronómico y otros. Dentro de las ventajas de este sistema se encuentra la cantidad de tablas numéricas compiladas para diferentes fines, que puede dar una idea de cómo los babilonios manejaban ese sistema. Ellos presentaban los números en arreglos de dos columnas, tal y como lo muestra la **Figura 10**:



4	15
5	12
6	10
8	7;30
9	6;40
10	6
12	5
15	4
16	3;45
18	3;20

Figura 10. Tomado de: https://conlamenteabierta.wordpress.com/2009/11/17/sistema-de-numeracion-babilonico/

El punto y la coma se utilizaban para separar la parte entera de la parte fraccionaria y las comas para separar los dígitos correspondientes a cada potencia de 60. Estos símbolos (;) no fueron utilizados por los babilonios, sino que se adaptaron para la comprensión del método. También, al multiplicar cada par de números en la misma fila, se obtiene 60. Se tiene entonces, que cada fila de la tabla contiene un número y a la derecha su recíproco sexagesimal. Los vacíos de la tabla corresponden a que las fracciones sexagesimales finitas eran las únicas comprensibles para los babilonios. Los recíprocos sexagesimales de los números faltantes (7, 11, 13, 14 y 17) no tienen una representación sexagesimal finita.

Los babilonios interpretaban la expresión $\frac{a}{b}$ como: **a** multiplicado por el recíproco de **b**. Interpretación que se conserva y maneja hoy en día:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = a\ \frac{1}{b}}$$

Adicionalmente, en **la civilización griega (200 a.C.),** en el área de los sistemas de numeración y las operaciones numéricas, no hubo avances como los encontrados en la geometría. Los griegos usaban las letras del alfabeto como numerales. No desarrollaron un sistema posicional y hubo uso excesivo de símbolos -hasta 27-. El historiador alemán de las matemáticas, Georg Cantor, afirma que la falta de un sistema de numeración avanzado obstaculizó el desarrollo del álgebra por parte de los griegos.

Los griegos utilizaban un símbolo diferente para cada potencia de 10, lo que hacía dispendioso su manejo (**Figura 11**):

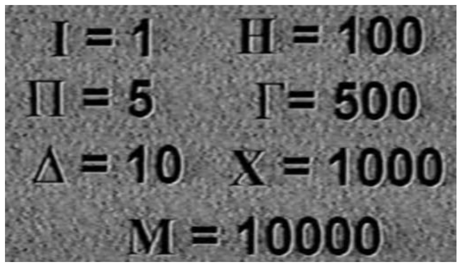


Figura 11. Recuperada de: https://www.pinterest.es/pin/226446687492671997/?lp=true

Al igual, fueron inconsistentes en el desarrollo de algoritmos para el cálculo aritmético, dada su tendencia a cambiar de sistemas de numeración. Todos los cálculos los hacían de manera geométrica y utilizaban las fracciones sexagesimales de los babilonios expresando las fracciones con cierta similitud al manejo de hoy en día. Pero las fracciones decimales nunca fueron utilizadas por ellos; estas aparecieron en el renacimiento europeo y fueron introducidas de manera organizada en la escuela a través de los textos escolares en el siglo XVIII y XIX, es decir que su uso es relativamente reciente dentro de la historia de las matemáticas y de la enseñanza.

En la **antigua China (1200 d. C.),** se destacó el hecho de que, en la división de fracciones, se exigía la previa reducción de estas a un común denominador. Los chinos conocían bien las operaciones con fracciones ordinarias, hasta el punto de hallar el mínimo común denominador de varias fracciones. Algunas veces adoptaron ciertas tretas de carácter decimal para facilitar la manipulación de las fracciones. Llamaron al numerador “hijo” y al denominador “madre”.

Los hindúes (499 d. C.), en su libro Mahariva, recopilaron el saber matemático de su época y se exponen todos los conocimientos de forma sencilla y educativa. Allí se encuentra la indicación de cómo hallar la incógnita **x** en la igualdad de relaciones (x = b . c / a).

Además, establecieron reglas para efectuar operaciones con fracciones. Las reglas que en la actualidad se emplean al operar con fracciones están basadas en las obras de Mahavira del siglo IX y de Bháskar del siglo XII.

Más adelante, con **los árabes (830 d. C.)**, se encuentra que el sistema numérico actual -llamado arábigo- no fue inventado por ellos, sino que su papel consistió en copiarlo de los hindúes e introducirlo a Europa. También introdujeron el uso de la línea horizontal y vertical, para simbolizar la fracción:

$$\frac{1}{2} \quad 1/2$$

Sus aportes en fracciones decimales se encuentran en el manuscrito del Kitab.

Ya en **el medioevo (1202 d.C.)**, según Fandiño (2009), Fibonacci "da las reglas de las operaciones sobre las fracciones, encuentra máximos comunes denominadores entre fracciones, transforma las fracciones en suma de fracciones con numerador 1, resuelve las ecuaciones encontrando raíces enteras, racionales e irracionales, usa las fracciones sexagesimales, etc." (p. 70):

> (...) las palabras "numerador" y "denominador" se afirman en el curso del siglo XV; la llamada "reducción de las fracciones a los términos mínimos" o "fracción irreducible" se encuentra explícitamente en Luca Pacioli (445-1515) y en Nicoló Fontana de Brescia llamado Tartamudo (1499-1557), bajo el nombre de "exprimir"; la distinción entre fracciones "propias" e "impropias" es del siglo XVIII.
> (Fandiño, 2009, p.73)

Con el paso del tiempo, cada civilización hizo sus aportes por medio de expresiones que facilitaron su uso, hasta llegar a conocer la fracción como es hoy en día. Sin embargo, a pesar de que la fracción lleva tantos siglos en la escena histórica, aún es dispendioso para los estudiantes operarlas.

5.3. Marco Teórico Conceptual

En el marco teórico conceptual se define el bagaje matemático que da fundamento epistemológico a la investigación, permitiendo citar los elementos teóricos que componen el contexto matemático de la fracción, la enunciación de las categorías de análisis, la competencia comunicativa en matemáticas y los elementos para el análisis de la información. Así mismo, los elementos didácticos inherentes a la propuesta pedagógica planteada en la secuencia didáctica.

5.3.1. Elementos o definiciones previas. En esta parte se considera necesario definir algunos términos que se utilizarán a lo largo de la investigación, evitando así confusión en el manejo matemático de los conceptos estudiados.

5.3.1.1. Unidad. Para llegar al concepto de *unidad*, es preciso entender que, desde los orígenes de las matemáticas, se presentaron problemas para expresar las nociones de fracción y la relación de la unidad con sus partes, como números; debido a los sistemas de numeración de cada cultura y para el caso de los griegos, se presentó la dualidad entre número y magnitud, obligando a generar la noción de *unidad*. De acuerdo con lo escrito por Obando (2003), por una parte, el número estaba vinculado a lo discreto, es decir a lo contable y, por otra parte, la magnitud estaba ligada a lo continuo, es decir a lo medible. Para ese entonces, la ciencia del número era la aritmética, mientras que la de las magnitudes era la geometría. Luego, bajo estos antecedentes, se hablaba de dos tipos de *unidad*: la *unidad* aritmética y la *unidad* geométrica.

Platón (1997) citado por Obando (2003, p. 283), menciona que la *unidad* aritmética —es decir, el “uno”— no era un número, pues siendo el principio generador de todos los números, debía tener naturaleza distinta[3]. Además, por ser la esencia de todos los números, el uno era único, universal e indivisible. Platón en su libro VII de La República expresa lo siguiente a propósito de la indivisibilidad del uno: "Si intentas en su presencia dividir la *unidad* propiamente dicha, se burlan de ti y no te escuchan, y si la divides, ellos la multiplican otras tantas veces, temiendo que la *unidad* no parezca como ella es, es decir, una, sino un conjunto de partes".

Por lo que, en el siglo XVI, se vieron avocados a unificar esta dualidad, movidos por las transacciones comerciales de finales de la edad media, necesitando precisión en toda transacción y estandarización. La tarea la asumió Simón Stevin -matemático de la época-, quien se apoyó del sistema de numeración decimal y propuso nuevos sistemas de medida para longitudes, pesos, etc., tomando como base una unidad fundamental o patrón. Esta operación llevó a Stevin a "determinar que la unidad aritmética es también un número divisible en fracciones de unidad -como la unidad geométrica-. Así pues, Stevin establece el carácter de número de la unidad, así como su divisibilidad, sin que por ello deje de ser unidad" (Obando, 2003, pp. 160-161).

Por tanto, Stevin borra los límites entre lo continuo y lo discreto, es decir, magnitudes y números y además extiende la notación decimal para escribir las fracciones de unidad, para que sean consideradas como números.

Por lo que, para investigaciones contemporáneas, se habla de la noción de *unitizar* que consiste en: "la asignación cognitiva de una unidad de medida para una cantidad dada; es el tamaño del byte mental en términos de los cuales se piensa acerca de la unidad, es un proceso

[3] En la filosofía griega se tenía una distinción entre esencia y sustancia, siendo la esencia la *unidad* básica y elemental de la cual se compone la sustancia, y, por ende, sin posibilidad de ser descompuesta en componentes más simples. Así, sustancia y esencia son de naturaleza diferente. De esta manera, dado que cualquier número natural mayor o igual que dos es en última instancia una repetición del uno, entonces éste se constituye en el principio generador de todos los números. Como tal, es entonces la *unidad* más simple y elemental que da origen a todos los números, y por tanto es la esencia de la cual se compone la sustancia (los números).

que está en la mente de la persona” (Lamon, 1999, p. 42).

Y para efectos de esta investigación, de acuerdo con los estudios de Lamon se advierte que:

> (…) este proceso es un proceso diferente al de decidir la unidad, agregando que, no solamente es importante para los estudiantes el ser capaces de identificar la unidad en una situación particular; sino que, con objeto de desarrollar sofisticación en el razonamiento, es importante reconceptualizar la unidad en términos de piezas de diferentes tamaños; es decir, es de utilidad ser capaces de *unitizar* y *reunitizar* en el curso de la solución del problema.
> (Lamon, 1999, p. 48).

Por lo que se entiende por *reunitizar*, la capacidad de recomponer la *unidad*.

5.3.1.2. *Fracción.* Para comprender el tema de fracciones, se trabajará con el singular *fracción*. Lo primero es hablar del origen de la palabra *fracción*. Esta palabra “deriva del término latino *fractio*, es decir, *parte obtenida rompiendo*, es decir *romper*” (Fandiño, 2009, p.37). Es una palabra que se viene usando aproximadamente desde el siglo XII y fue usada como idea matemática desde hace varios siglos, de acuerdo con el apartado anterior (historia de las fracciones), desde la época de los egipcios.

La idea o concepto de fracción, se refiere a la porción, trozo y también como la parte quebrada de un objeto. Leonardo Fibonacci, según Fandiño (2009), describió a los fraccionarios como “rupti” -rotos- o también “fracti” -pedazos-.

Pero no es suficiente con esta definición, por cuanto para el contexto de las matemáticas se requiere que “las partes obtenidas con la acción de romper sean *iguales*” (Fandiño, 2009, p.38).

Por su parte y en referencia a la necesidad de definir la fracción, los autores de la publicación *Diferencias entre número racional, número fraccionario, número decimal, expresión decimal y fracción*, dicen:

> El nombre de fracción nace en el libro de aritmética de “Al-Huwarizmi” quien usaba la palabra árabe “al-kasr”, que significa quebrar o romper, y fue Juan de Luna quien lo

tradujo al latín como "Fractio", y las fracciones, entendidas hoy en día como representaciones de números racionales.
(Camargo & Beltrán, 2013, p.23)

5.3.1.3. *Número fraccionario.* Existe un dominio numérico al que se le denomina conjunto de los números fraccionarios y que es diferente al de las fracciones. Por lo que algunos autores resaltan que:

> Se denomina "número fraccionario" al conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada. Matemáticamente hablando, este paso significa introducir en el conjunto de las fracciones, la relación de "ser equivalentes", para el caso en que sus productos cruzados sean iguales. Se tiene así el concepto de "números fraccionarios" que es asignado al conjunto de las "clases de equivalencia" de las fracciones que son equivalentes entre sí -sus productos cruzados son iguales-.
> (Cabrera & Pérez, 2013, pp. 135-136)

Luego, como ejemplo de un número fraccionario se tiene:

$$\boxed{\left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16} \; \ldots\right\} \textbf{ es un número fraccionario.}}$$

donde todas las fracciones corresponden a fracciones equivalentes a una fracción dada.

Lo que indica que "en la práctica, los números fraccionarios se identifican con cualquiera de las fracciones que lo forman, por ello estos números también se representan por fracciones, escritas como fracciones comunes o en notación decimal" (Cabrera & Pérez, 2013, pp. 135-136).

Entonces se tiene que al conjunto de los números fraccionarios se les llama Q, donde el conjunto de los números naturales viene a ser un subconjunto de Q.

5.3.2. Interpretaciones de la fracción. Hay varias formas de entender el concepto de *fracción*, y tomando como base lo expuesto y detallado por Fandiño (2009), en su publicación *Las fracciones. Aspectos conceptuales y Didácticos*, se habla de las posibles interpretaciones que puede asumir la *fracción* en el mundo de las matemáticas y a su vez, en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje.

5.3.2.1. *La fracción como relación parte-todo.* El sentido numérico se desarrolla desde los primeros años de infancia, gracias a las múltiples experiencias que tiene el niño cuando manipula los objetos de su entorno y además cuando siente la necesidad de cuantificar como lo hacen los adultos. Para Resnick (1990), ese conocimiento experimental, adquirido gracias a la manipulación, permite que el niño desarrolle un razonamiento sin la presencia de números, que se llama proto-cuantitativo. Por lo que, de acuerdo con algunas investigaciones acerca de la adquisición de la noción aritmética desde la infancia, se proponen tres tipos de esquemas proto-cuantitativos: el de aumento-disminución, el esquema parte-todo y el esquema de comparación. De tal forma que, de acuerdo con Castro (2015), el esquema parte-todo, considerado desde lo cognitivo y desde la parte lógico-matemática, corresponde a la comprensión del número, las operaciones, y la resolución de problemas aritméticos y algebraicos y el dominio de este concepto facilita el trabajo posterior con el valor de posición y los conceptos numéricos.

Castro también afirma que en la matemática escolar, el esquema parte-todo, ayuda en el estudio de las estructuras aritméticas aditiva -agregar, reunir, segregar, separar) y multiplicativa -reiterar o hacer partes iguales), dando lugar a las fracciones, como el modo de expresar la relación entre una parte y el todo del que procede, entendiéndose esto como la relación multiplicativa en la **Figura 12**:

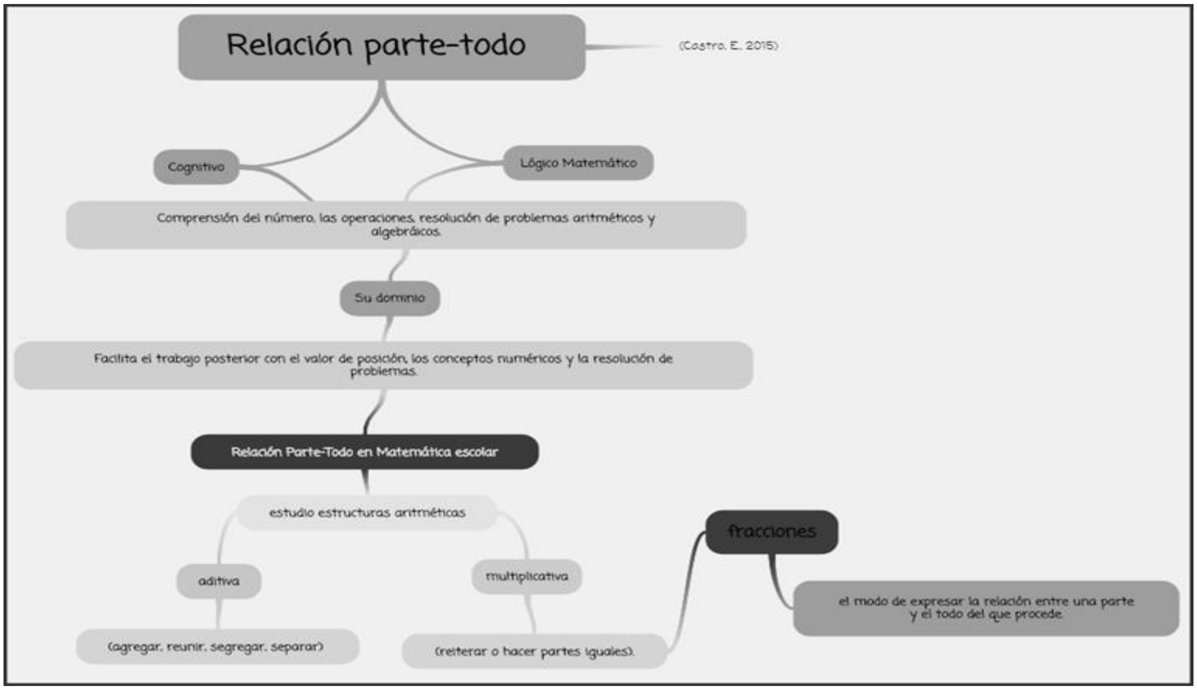


Figura 12. La Relación parte-todo. Fuente: Castro (2015). Elaboración propia.

Construcciones a partir de la interpretación parte-todo. En Behr (1983) se puede encontrar que a partir de la relación parte-todo se da lugar a otras construcciones; estas relaciones han sido conceptualizadas para la enseñanza a través del esquema de la **Figura 13**:

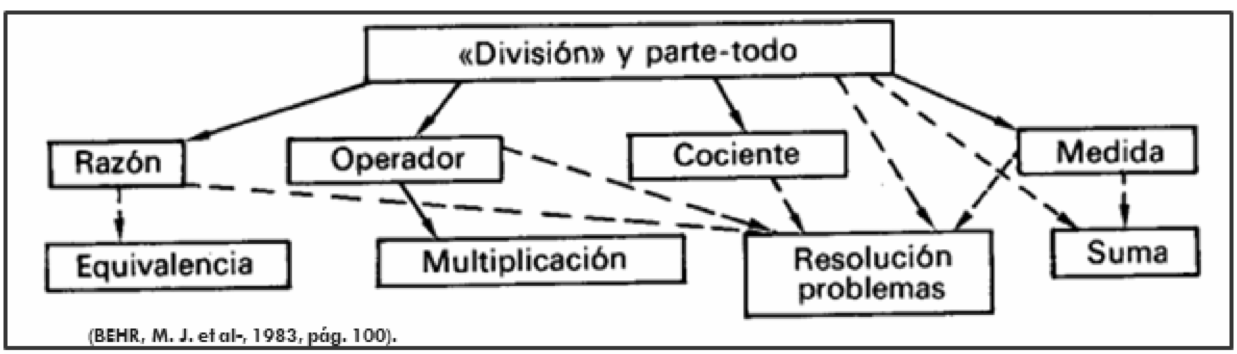


Figura 13. Construcciones a partir de la relación parte-todo. Fuente: BEHR, M. J. et al-, 1983, pág. 100

Es por ello por lo que “no es posible aislar por completo cada una de las interpretaciones de las demás. Algunas de ellas tienen vinculaciones «naturales» que no se pueden ignorar, y hacen que, al tratar un determinado aspecto del número racional, implícitamente estén presentes otros aspectos” (Behr, 1983, p. 100).

Según el esquema, se señalan mediante flechas continuas las relaciones establecidas y mediante flechas discontinuas las relaciones que se suponen. Por lo que, Llinares & Sánchez (1997) y gracias a distintas investigaciones sobre los conceptos relacionados con la fracción -como los de Behr (1983)- afirman que este esquema refleja la relación como parte-todo con estas dependencias, y también las aproximaciones de unas interpretaciones de la fracción con otras, cuando se habla de contextos más abstractos.

Así mismo, Fandiño (2009), plantea que, de acuerdo con la recopilación de conceptos de varios autores citados en su libro, se refiere a que se tiene una unidad-todo y **se divide en extensiones equitativas, congruentes**, sobrepuestas e intercambiables; cada una de estas partes es una unidad fraccionaria. De igual manera, Llinares & Sánchez (1988), afirman que cuando un "todo" -continuo o discreto- **se divide en partes "congruentes"** -equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de "objetos"-. La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes -que puede estar formado por varios "todos"-. Así mismo, Kieren, T. (1993), expresa que la relación parte-todo la considera como un todo -continuo o discreto- **subdividido en partes iguales** y señala como fundamental la relación que existe entre el todo y un número designado de partes. A la par, Obando (2003), enuncia que se considera como un todo “continuo o discreto” que **se divide en partes iguales** indicando esencialmente la relación existente entre el todo y un número designado de partes. La fracción, por tanto, es la parte en sí misma y no, una relación entre dos cantidades: la medida de la parte con respecto a la medida del todo.

Por otra parte, Vasco, C. (1994), afirma que es un sistema concreto pre-matemático desde el cual se puede construir el concepto de partidor de unidad de cada magnitud, e igualmente, Escolano & Gairín, (2007), expresan que con el significado parte todo se establece una relación simbólica entre dos números naturales a partir de una representación gráfica, desde la cual se formulan definiciones sobre los componentes de la fracción: el denominador indica las partes que existen y el numerador las partes que se consideran.

Corolario: para efectos de la presente investigación, se asumen las definiciones coincidentes de Fandiño, Llinares & Sánchez y Kieren, en cuanto a que *la fracción como parte de la unidad*, corresponde a un todo que se divide en partes equitativas, congruentes o iguales. Las definiciones dadas por Vasco, Escolano & Gairín, se toman como referencia pero no se contemplan.

5.3.2.2. *Otras interpretaciones de la fracción.*

✓ ***La fracción como cociente:***

Obando (2003), plantea que la fracción como cociente indicado es el **resultado de dividir uno o varios objetos entre un número de personas o partes.** También, se puede definir como el valor numérico de la fracción $\frac{a}{b}$, en este caso, la fracción es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir a unidades en b partes iguales. Así mismo, Flores y Morcote (1999), expresan que cuando una fracción **se relaciona directamente con la operación división sugerida por ella**, estamos dándole una interpretación de cociente. Un cociente de dos números. De la misma manera, Kieren (citado en Flores y Morcote, 2001), manifiesta que la representación más general de la fracción de la forma $\frac{a}{b}$ **conduce a la idea inmediata de cociente de dos números**: “a unidades en b partes iguales” con lo cual aparece la noción de reparto en cantidades iguales, equivalentemente, (Kieren, 1980, 1983, 1988, 1992), afirma que la fracción como cociente **la**

refiere como el resultado de la división de uno o varios objetos entre un número determinado de personas o partes.

<u>*Corolario:*</u> los autores anteriormente citados, coinciden en que la *fracción como cociente*, corresponde a la operación división sugerida por ella.

- ✓ ***La fracción como medida:***

Fandiño (2009), plantea que la fracción como medida **representa una cantidad, una medida, como parte de una unidad.** Al igual, Kieren (1980), dice que la fracción como medida **la reconoce como la asignación de un número a una región o a una magnitud** -de una, dos o tres dimensiones- producto de la partición equitativa de una unidad.

<u>*Corolario:*</u> los autores anteriormente citados, coinciden en que la *fracción como medida*, representa una cantidad, una medida, como parte de una unidad.

- ✓ ***La fracción como operador:***

Fandiño, M. (2009), afirma que **es una operación que combina división y multiplicación**. De igual manera, Kieren (1980), enuncia que el papel de la fracción como operador es el de **transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente**. Esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura asociada al uso de fracciones.

<u>*Corolario:*</u> los autores anteriormente citados, coinciden en que la *fracción como operador*, es el de transformador multiplicativo e inverso.

- ✓ ***La fracción como razón (relación):***

Fandiño, M. (2009), afirma que la relación entre dos magnitudes (a:b). El numerador y el denominador **son intercambiables**. "3 es a 4", es decir 3/4. "4 es a 3", es decir 4/3. Igualmente, Flores y Morcote (2001), dicen que si la fracción se usa para mostrar la relación entre dos cantidades de determinada magnitud, es decir, **se establece un índice de comparación entre esas partes**, se habla de la fracción como razón. En estos casos no existe una unidad, un todo que permita ver la fracción. Se asocia esta interpretación a la relación parte- parte y a la relación conjunto a conjunto. También, Kieren (1980), enuncia que la fracción como razón es considerada por Kieren (1980) como **la comparación numérica entre dos magnitudes.** Así mismo, Llinares, S., Sánchez, M. (1988), expresa que cuando se usa como un **"índice comparativo"** entre dos cantidades de una magnitud -comparación de situaciones-. Entonces no existe de forma natural una unidad -un "todo"-. La comparación puede ser bidireccional (Ibídem, 84).

Corolario: los autores anteriormente citados, coinciden en que la *fracción como razón (relación)***,** establece una **comparación numérica entre dos magnitudes.**

- ✓ ***La fracción como probabilidad:***

Llinares, S., Sánchez, M. (1988), enuncian que se establece una "comparación" todo-todo entre el conjunto de casos favorables y el conjunto de casos posibles en una situación. Esta definición que se toma como sólo como referencia, por cuanto no hace parte del objeto de estudio de la presente investigación.

Las interpretaciones de la fracción como cociente, medida, operador, razón y probabilidad, se toman sólo como referencia, por cuanto no hacen parte del objeto de estudio de la presente investigación.

A continuación, se profundiza en la definición que permite detallar la interpretación estudiada en esta investigación:

5.3.3. Significado de la relación multiplicativa de la fracción. Para establecer la relación multiplicativa de la fracción, algunos investigadores registran que “Las fracciones surgen como una relación multiplicativa parte-todo, como el modo de expresar la relación entre una parte y el todo del que procede" (Castro, 2015, p. 204).

Para Obando (2003) desde el punto de vista matemático, existe la opción de la interpretación de la fracción como una relación multiplicativa sobre la interpretación usual de la fracción como una partición. Esto, teniendo en cuenta que como relación multiplicativa parte-todo, la fracción se interpreta como un número que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad de magnitud tomada como unidad -todo- y otra cantidad de magnitud tomada como parte. En este sentido, es importante señalar que la cantidad tomada como unidad puede presentar dos características básicas: tipo de unidad -simple o compuesta- y tipo de magnitud -continua o discreta-. De acuerdo con Obando (2003), el establecimiento de tal relación cuantitativa implica un proceso de medición.

Así pues:

la relación $x = n \cdot y$ es equivalente a la relación $y = \frac{1}{n} \cdot x$

> Esto es, la relación multiplicativa "n veces…", define la relación inversa "n-ésima parte de…" y viceversa. En términos de las magnitudes, dicha equivalencia se puede interpretar así: Si x y y son dos cantidades de magnitud tales que una de ellas (y) está contenida un número entero de veces en la otra cantidad de magnitud (x), entonces se puede concluir que la cantidad de magnitud y es la n-ésima parte de la cantidad de magnitud x. (Obando, 2003, p. 175)

Trabajar la interpretación de la fracción como relación multiplicativa, es afín con la matemática de las cantidades y permite formar procesos de conceptualización a partir de la medición, y no de la partición y el conteo. Así, para Obando (2003) la fracción es efectivamente una relación cuantitativa entre dos cantidades de magnitud -la parte y el todo-; además, como relación que es, la fracción ya no es una propiedad o un nombre de la parte, sino que la fracción es el resultado de una comparación[4].

5.3.4. Categorías de análisis.

5.3.4. Categorías de análisis. Dado que este es un estudio de tipo mixto, como se amplía en el capítulo de la metodología, se han construido las categorías de análisis a partir del marco teórico presentado anteriormente.

Para el objeto de estudio en cuestión, interpretación de la fracción en su relación parte-todo, se han establecido cuatro (4) categorías de análisis que permiten analizar la información obtenida -en la prueba diagnóstica, la secuencia didáctica y la prueba de salida- relacionando los atributos de la fracción, los contextos, los registros de representación, y problemáticas escolares, con la fracción como relación parte-todo. A continuación, se enuncian, explican y relacionan, cada una de estas categorías:

5.3.4.1. *Atributos de la fracción.* Los atributos de la fracción, como primera categoría de análisis, tienen que ver con los diferentes matices de su significado y las propiedades que esta cumple. En esta sección se hizo un rastreo de diferentes referentes bibliográficos -Piaget, Inhelder y Szeminska (1960), Payne (1976), Godino, J. (2010) y Llinares & Sánchez (1997)- que dan cuenta de los atributos de la fracción, obteniendo la **Tabla 2**:

[4] Por ejemplo, se puede ver que una determinada cantidad de magnitud puede ser la mitad de una segunda, pero la cuarta parte de una tercera, o incluso, el doble de una cuarta. Así, las fracciones dejan de ser nombres para las partes sombreadas y se toman como relaciones entre cantidades de magnitud (Obando, 2003).

Tabla 2

Atributos de la fracción

INTERPRETACIONES / ATRIBUTOS DE LA RELACIÓN PARTE-TODO			
Piaget, Inhelder Y Szeminska (1960)	**Payne (1976)**	**Godino, J. (2004)**	**(Llinares & Sánchez,1997) Página 80-81**
Reconocer el todo.	Las partes también se pueden considerar como la totalidad.	Cada parte en sí misma se puede considerar como un "todo".	Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.
Dividir un todo en partes.	Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.	Hay que considerar que una región entera se puede dividir en partes.	La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El "todo" se puede dividir en el número de partes pedido.
Reconocer las partes del todo.	La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El "todo se puede dividir en el número de partes pedido".	Darse cuenta de que el mismo todo se puede dividir en diferente número de partes iguales, y podemos elegir el número de partes.	Las subdivisiones cubren el todo.
	Las subdivisiones cubren el todo.	Las partes de la partición agotan el todo.	El número de partes no coincide con el número de cortes.
	El número de partes no coincide con el número de cortes.	El número de partes puede no ser igual al número de cortes; por ejemplo, con dos cortes podemos hacer cuatro partes de una tarta.	Los trozos o partes son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño (congruentes).
Realizar divisiones congruentes.	Los trozos (partes) son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño (congruentes).	Cuando todas las partes son iguales.	Las partes se pueden considerar como totalidad.
	El 'todo" se conserva.	El "todo" se conserva, aun cuando se haya dividido en partes.	El todo se conserva.
	Control simbólico de las fracciones, es decir, el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones. Las fracciones mayores que la unidad.		Control simbólico de las fracciones, es decir, el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones. Las relaciones parte todo en contextos continuos y discretos.
Hacer fracciones equivalentes.	Subdivisiones equivalentes.		Fracciones mayores que la unidad
			Subdivisiones equivalentes.

Fuente: elaboración propia

Para el caso de la interpretación de la fracción como relación parte-todo, Piaget, Inhelder y Szeminska (1960, citado en Llinares y Sánchez, 1988, pp. 80 y 81) proponen siete atributos que caracterizan dicha relación:

> 1.Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible. 2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes.

> El “todo” se puede dividir en el número de partes pedido. 3. Las subdivisiones cubren el todo. 4. El número de partes no coincide con el número de cortes. 5. Los trozos —partes—son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño —congruentes—. 6. Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades). 7. El “todo” se conserva.

Luego, Payne (1976) citado por Llinares y Sánchez (1988, p. 81), propone otros cuatro atributos: 8. Manejar el control simbólico de las fracciones, 9. Considerar las relaciones parte-todo en contextos continuos y discretos, 10. Trabajar con fracciones mayores que la unidad y 11. Reconocer subdivisiones equivalentes.

Después de hacer esta recopilación bibliográfica, se asumieron los once (11) atributos planteados por Llinares & Sánchez (1988), para contemplar más posibilidades de significado y obtener una información más completa en la investigación. Determinando así, la *categoría* de análisis llamada *atributos de la fracción*.

5.3.4.2. *Contextos.* En la segunda categoría de análisis, se encuentra que los contextos continuos tienen que ver con la cantidad de superficie y los contextos discretos con la cantidad de objetos. Por lo cual, para Llinares & Sánchez (1988), la fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes -que puede estar formado por varios todos-.

Russell (1902) y Freudenthal (1983) citados por Castro (2015, p. 81), mencionan respectivamente, que “Un todo es un nuevo término único, distinto de cada una de sus partes y de todas ellas: es unidad, no pluralidad, y se relaciona con sus partes, pero tiene un ser distinto del de ellas”; “Usualmente en las matemáticas escolares se utilizan totalidades sencillas como una cantidad de superficie o de longitud, para el caso continuo, o bien colecciones de elementos para el caso discreto”.

Para Castro (2015), en un *contexto continuo* deben hacerse las siguientes consideraciones didácticas: Las partes en las que se “separa” el todo deben ser equivalentes entre sí. La partición no debe dejar restos. La “reunión” de las partes reconstituye el todo. A mayor cantidad de partes, menos extensión en cada una de ellas. La cantidad de las partes no tiene por qué ser igual al número de cortes.

Ya en un *contexto discreto* deben hacerse las siguientes consideraciones didácticas: Las partes en la que se separa el todo deben ser equivalentes entre sí, es decir, subconjuntos con la misma cantidad de elementos. La partición no debe dejar resto. La “reunión” de las partes reconstituye el todo. A mayor cantidad de partes, menor cantidad de elementos.

Para Poveda (s. f.), el *contexto de la recta numérica* les permite a los estudiantes asociar un punto de esta, a una fracción, por lo que pueden ver los números fraccionarios como puntos similares a los números naturales. Además, constituyen un contexto para la interpretación de las fracciones como medida, pues una vez que se identifica una unidad de medida admite subdivisiones congruentes.

En la presente investigación, se trabaja con la *categoría de contextos continuo y discreto*, dejando pendiente el contexto de la recta numérica para posteriores estudios.

5.3.4.3. ***Registros de representación de las fracciones.*** Siendo los registros de representación, la tercera categoría de análisis, se encuentra en esta parte que, Duval (2004) citado por Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen & Gorrochategui (2011, p. 30), indica que el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieren además del lenguaje natural o el de las Figuras, la utilización de distintos registros de representación y de expresión.

En el ambiente escolar, específicamente en el aprendizaje de las matemáticas, se considera a la Noética, como la adquisición por parte del estudiante del concepto matemático. Por otra parte, y de acuerdo con lo expuesto por Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen & Gorrochategui (2011), en su publicación *Los registros semióticos de representación en matemática:*

> En la matemática encontramos distintos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraicas, lógicas, funcionales que se tornan en lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas de barra, diagramas de torta, etc. Cada una de las actividades anteriores constituye una forma semiótica diferente, entendiéndose por tal a la actividad de formación de representaciones realizadas por medio de signos.
> (Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen & Gorrochategui, 2011, p. 30)

Para Duval (1998, p.175), en matemática se habla de “objetos matemáticos” y no de “conceptos”. Por esta causa surge la necesidad de recurrir a signos concretos para representar los objetos matemáticos, los cuales no son objetos reales. Situación que puede llevar a una gran confusión porque las representaciones permiten manipular los objetos matemáticos, pero su aprendizaje es conceptual y el estudiante puede llegar a confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas.

Según Duval (1993) citado por Fandiño (2009, p. 135) la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa sobre dos de sus características fuertes: • el uso de más de un registro de representación semiótica, • la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos se constituye en símbolo de progreso de conocimiento.

A continuación, se observa un ejemplo encontrado en la publicación de Fandiño (2009, pp. 133), donde se puede apreciar que, para una representación semiótica, existen varios registros posibles (**Figura 14)**:

Supongamos que queremos representar en distintos registros el concepto que en matemática formaliza la idea de dividir en mitades un entero:

registro semiótico: el lenguaje común:
representación semiótica: un medio
otra representación semiótica: la mitad, etc.

registro semiótico: el lenguaje aritmético:
representación semiótica: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$ (escritura fraccionaria)
otra representación semiótica: 0,5 (escritura decimal)
otra representación semiótica: $5 \cdot 10^{-1}$ (escritura exponencial)
otra representación semiótica: 50% (escritura con porcentajes)
otra representación semiótica: $4,\overline{9}$ (escritura decimal), etc.

registro semiótico: el lenguaje algebraico:
representación semiótica: $\{x \in Q^+ \ / \ 2x-1=0\}$ (escritura de conjuntos)
otra representación semiótica: $y=f(x)$: $x \rightarrow \frac{x}{2}$ (escritura funcional), etc.

Figura 14. Ejemplo de registros de representación. Fuente: Fandiño (2009)

En el aula de clases se hace necesario que varios sistemas de representación semiótica se manejen y que se hagan los cambios correctos entre ellos, para poder evidenciar el aprendizaje. Esta es una situación que no es de fácil manejo entre los estudiantes, porque les cuesta reconocer el mismo objeto a través de sus representaciones en distintos registros semióticos.

Teniendo en cuenta que los conceptos matemáticos no son objetos reales, se hace necesario recurrir a distintas representaciones para estudiarlos (ver figura 18), ya que, que estas representaciones no son el objeto matemático en sí, sino que ayudan a su comprensión. Si no se logra distinguir el objeto matemático -números, funciones, rectas, triángulos, fracciones, etc.- de sus representaciones -escritura decimal o fraccionaria, gráficos, trazados de figuras, etc.- no se puede llegar al entendimiento en matemáticas.

Una vez definida la Semiótica y la Noética de la fracción, se presenta un recorrido bibliográfico y cronológico, en cuanto a los registros de representación que varios autores formulan para la representación de un objeto matemático, que para este caso se retoma para la fracción:

-Bruner (1963), habla de una representación enactiva, icónica y simbólica (**Figura 15**):

Figura 15. Registros de representación propuestos por Bruner (1963). Elaboración propia.

-Piaget (1977), Báez y Hernández (2002) y Godino, Batanero y Font (2003), muestran una representación desde lo concreto, lo pictórico y lo abstracto o simbólico (**Figura 16**):

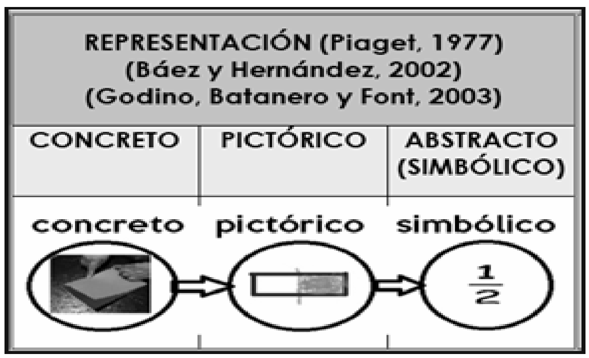


Figura 16. Registros de representación propuestos por Piaget (1977). Elaboración propia.

-Llinares & Sánchez (1998), enuncian una representación de tipo concreto, oral, gráfico y simbólico (**Figura 17):**

Figura 17. Registros de representación propuestos por Llinares & Sánchez (1998). Elaboración propia.

-Por último, Duval (2004), enuncia una representación desde el lenguaje natural, el registro gráfico, el registro tabular y el registro simbólico, teniendo en cuenta que este autor habla de más tipos de representación (**Figura 18**):

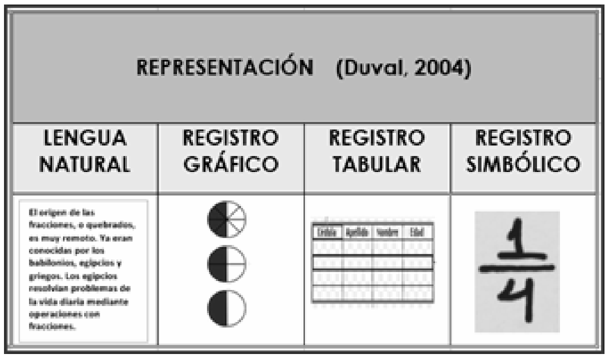


Figura 18. Registros de representación propuestos por Duval (2004). Elaboración propia.

Para efectos de la presente investigación, se asume la representación planteada por -Llinares & Sánchez (1998), que enuncia una representación de tipo concreto, oral, gráfico y simbólico. Representación que ya se encuentra codificada en la tabla de Categorías de análisis.

5.3.4.4. *Problemáticas escolares con la fracción como relación parte-todo.* En la cuarta y última categoría de análisis, ligada a las problemáticas presentadas con el uso de la fracción, se evidencia que en la práctica directa en el aula y de acuerdo con investigaciones de algunos autores de la didáctica de las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en general, desencadena confusión y falta de comprensión, aún más cuando su tratamiento no se hace en forma adecuada.

Aunque Fandiño (2009) habla de las dificultades en el aprendizaje de las fracciones y didáctica de la matemática, se considera que este aporte es general a todas las interpretaciones de las fracciones, razón por la cual, se opta por los aportes y las experiencias en el aula colombiana de Poveda (s.f.), quien registra y ejemplifica tanto las problemáticas generadas por una mala enseñanza, como los errores que como consecuencia se registran por parte de los estudiantes (**Figura 19**):

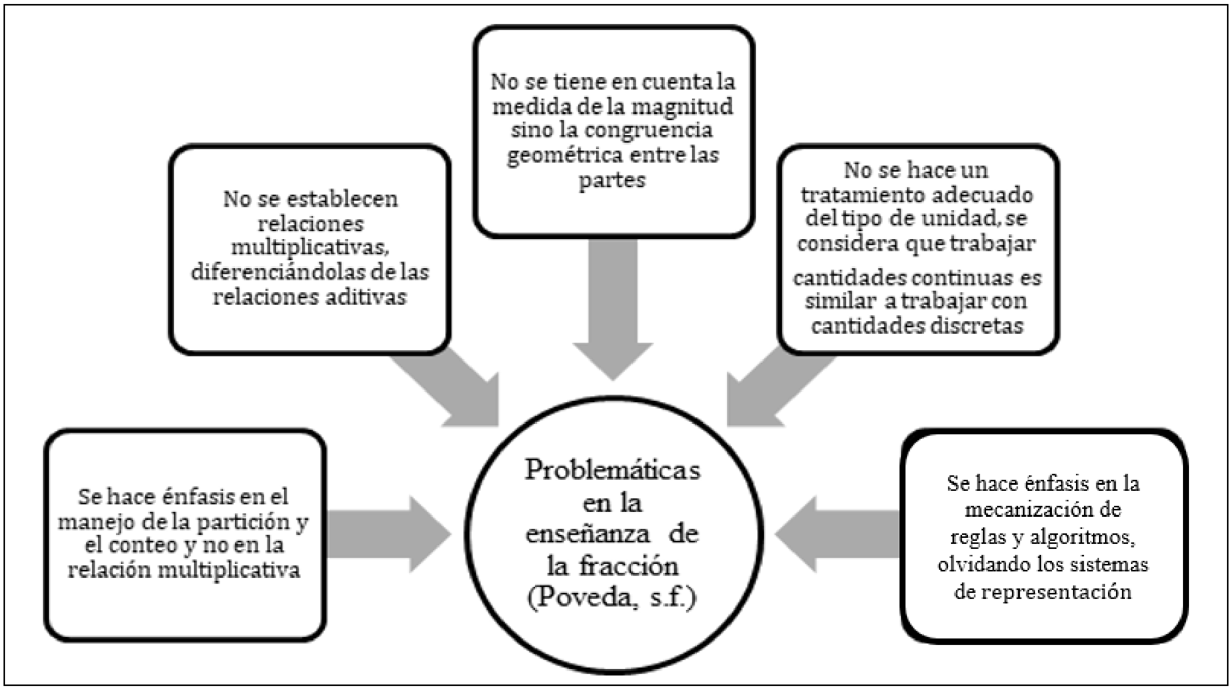


Figura 19. Problemáticas en la enseñanza de la fracción, (Poveda, s.f.). Fuente: elaboración propia basada en (Poveda, s.f., p. 2)

Errores frecuentes en el tratamiento de la fracción*:*

En esta parte, a cada una de estos errores o problemáticas presentadas en el manejo de la fracción, se le denomina como P1, P2, P3, P4 o P5[5].

P1: el fraccionario se interpreta no como una relación, sino como dos cantidades separadas por una raya:

[5] **P1**: El fraccionario se interpreta no como una relación, sino como dos cantidades separadas por una raya. **P2**: Las partes se juzgan más por su forma visual que por su cantidad de magnitud. **P3:** La equivalencia entre fracciones queda ligada a la congruencia de las partes en que se ha dividido la unidad y no a la equivalencia de la relación entre el todo y las partes. **P4**: No se trabaja mucho la relatividad de la unidad y de las partes; las actividades privilegian la partición de la unidad, pero no la reconstrucción de la unidad a partir de las partes, ni tampoco la manera en que una parte puede asumirse como una nueva unidad para establecer una nueva relación parte-todo. **P5**: Es difícil llegar al concepto de fracción impropia por cuanto si el numerador indica las partes que se toman de la unidad, es imposible tomar más partes de las que la constituyen (ver Anexo 11).

Son muy pocas las actividades en las que se propicia que el estudiante encuentre la relación entre la cantidad de magnitud del todo y las partes.	Una vez establecida la relación multiplicativa parte-todo no se establece la relación inversa todo-parte.	Tampoco se establecen relaciones aditivas entre las partes y el todo y entre las partes.

P2: las partes se juzgan más por su forma visual que por su cantidad de magnitud:

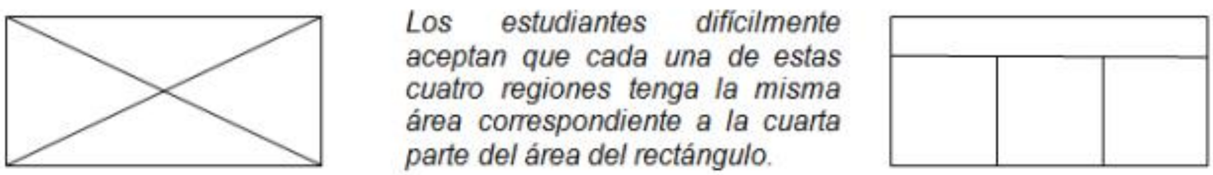


Figura 20. Problemáticas en la enseñanza de la fracción (Poveda, s.f.). Problema 2.

P3: la equivalencia entre fracciones queda ligada a la congruencia de las partes en que se ha dividido la unidad y no a la equivalencia de la relación entre el todo y las partes:

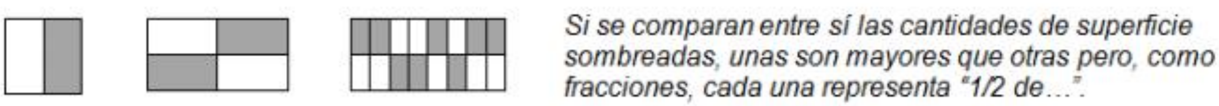
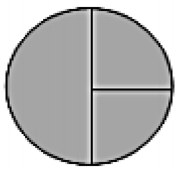


Figura 21. Problemáticas en la enseñanza de la fracción (Poveda, s.f.). Problema 3.

P4: no se trabaja mucho la relatividad de la unidad y de las partes; las actividades privilegian la partición de la unidad, pero no la reconstrucción de la unidad a partir de las partes, ni tampoco la manera en que una parte puede asumirse como una nueva unidad para establecer una nueva relación parte-todo:

Figura 22. Problemáticas en la enseñanza de la fracción (Poveda, s.f.). Problema 4.

P5: es difícil llegar al concepto de fracción impropia por cuanto si el numerador indica las partes que se toman de la unidad, es imposible tomar más partes de las que la constituyen:



Con frecuencia, al querer representar una fracción impropia los niños dividen primero la unidad en el número de partes correspondiente, pero luego, como no saben de dónde tomar más partes, hacen otras divisiones, por lo que una representación como la de la figura correspondería a 3/2 del área de la figura.

Figura 23. Problemáticas en la enseñanza de la fracción (Poveda, s.f.) Problema 5.

Como recomendaciones finales, Poveda (s.f.) indica:

- Se hace necesario ligar el contexto de parte-todo a la medida de magnitudes y al establecimiento de relaciones multiplicativas directas e inversas entre la cantidad de magnitud de la parte y la cantidad de magnitud del todo.
- Se debe facilitar el tratamiento de la fracción n/a como la repetición n veces 1/a (2/3 es dos veces un tercio y viceversa).
- Es importante flexibilizar las actividades para que los estudiantes asimilen el concepto de unidad y parte como conceptos relativos, a través de experiencias que les permitan medir las partes para establecer la relación con el todo, tomar partes de diferente forma y con la misma magnitud para establecer la relación con el todo, dar diferentes partes para reconstruir el todo, comparar diferentes fracciones para buscar las que son equivalentes.

Como síntesis de las 4 categorías de análisis antes presentadas, a continuación se observa la integración de estas, en la **Tabla 3**:

Tabla 3

Categorías de análisis para el estudio de la fracción como relación parte-todo

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Atributos relación parte-todo (Llinares & Sánchez,1997) páginas 80-81		**Categoría Contextos (Llinares & Sánchez,1997) página 56**		**Categoría Representaciones (Lesh, 1983, citado en Llinares y Sánchez 1988, p. 88)**		**Problemáticas escolares con el número fraccionario como relación parte-todo (Poveda, s.f.)**	
1. Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.	A1			Concreto	R1	1.El fraccionario se interpreta no como una relación, sino como dos cantidades separadas por una raya.	P1
2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El "todo" se puede dividir en el número de partes pedido.	A2 A3 A4	Continuo	C1	Oral	R2	2. Las partes se juzgan más por su forma visual que por su cantidad de magnitud.	P2
3. Las subdivisiones cubren el todo.	A5					3. La equivalencia entre fracciones queda ligada a la congruencia de las partes en que se ha dividido la unidad y no a la equivalencia de la relación entre el todo y las partes.	P3
4. El número de partes no coincide con el número de cortes.	A6	Discreto	C2	Simbólico	R3		
5. Los trozos o partes son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño (congruentes).	A7 A8 A9			Gráfico	R4	4. No se trabaja mucho la relatividad de la unidad y de las partes; las actividades privilegian la partición de la unidad, pero no la reconstrucción de la unidad a partir de las partes, ni tampoco la manera en que una parte puede asumirse como una nueva unidad para establecer una nueva relación parte-todo.	P4
6. Las partes se pueden considerar como totalidad.	A10 A11						
7. El todo se conserva.						5. Es difícil llegar al concepto de fracción impropia por cuanto si el numerador indica las partes que se toman de la unidad, es imposible tomar más partes de las que la constituyen.	P5
8. Control simbólico de las fracciones, es decir, el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones.							
9. Las relaciones parte todo en contextos continuos y discretos.							
10. Fracciones mayores que la unidad.							
11. Subdivisiones equivalentes.							

Nota: A= Atributo; C=Contexto; R= Registro de representación; P= Problemática
Fuente: elaboración propia

Esta categorización obedece a un exhaustivo estudio teórico de los autores interesados en el estudio de la fracción. Es así como de Llinares & Sánchez (1997, pp. 80-81), se retoman los once *atributos de la fracción*, codificados como A1, A2, A3, entre otros. En cuanto a los *contextos* *continuo y discreto*, también de Llinares & Sánchez (1997, p. 56), se trabajan y codifican como C1 (Continuo) y C2 (Discreto). Así mismo, los *registros de representación*: concreto (R1), oral (R2), simbólico (R3) y gráfico (R4), se rescatan de Lesh (1983, citado en Llinares y Sánchez 1988, p. 88). Y por último, las problemáticas escolares con el número fraccionario como relación parte-todo de Poveda (s.f., pp. 1-6), son codificadas como P1, P2, P3, P4 y P5, respectivamente.

5.3.5. La competencia comunicativa como mediador de construcción matemática[6]. Una de las necesidades pedagógicas por abordar tiene que ver con el fortalecimiento de la competencia de comunicación en el tratamiento del concepto de fracción. Esto es, a través de estrategias didácticas que tengan en cuenta el histórico inconveniente que existe en cuanto a la comprensión de esta y las construcciones cognitivas que se deben llegar a hacer a partir de este concepto.

Inicialmente, y para definir lo que es la competencia comunicativa, Niss & Jensen (2007) citados por Arteaga (2009, p. 8), la denominan "competencia de comunicación", y para definirla se acude a las contribuciones de Habermas (1981), en su Teoría de la acción comunicativa:

> El concepto de acción comunicativa se refiere a la interacción de al menos dos sujetos capaces de lenguaje y acción que entablan -ya sea con medios verbales o extraverbales- una relación interpersonal. Los actores buscan entenderse sobre una situación de acción para poder así coordinar de común acuerdo sus planes de acción y con ello sus acciones. El concepto aquí central, el de interpretación, se refiere primordialmente a la negociación de definiciones de la situación susceptibles de consenso. En este modelo de acción el lenguaje ocupa, como veremos, un puesto prominente.
> (Habermas, 1981, p.124)

[6] La competencia comunicativa, en esta investigación, permite generar conexiones entre las representaciones concretas, orales, simbólicas, gráficas y mentales de las ideas matemáticas. Luego, no es considerada una categoría de análisis.

Una vez hecha esta definición, se puede definir la competencia comunicativa en matemáticas:

5.3.5.1. *Competencia Comunicativa en matemáticas.* Existen referencias basadas en investigación en didáctica de las matemáticas que se concentran en torno al concepto de "competencias matemáticas" (Godino, 2002). Entre los años 2000 y 2002, Mogens Niss dirigió un proyecto llamado KOM[7], un proyecto centrado en el análisis y estudio de las competencias matemáticas. La definición del término competencia en el proyecto KOM es semánticamente idéntica a la que se usa: "Competencia es la predisposición para actuar en respuesta a los retos de una situación dada" (Blomhoj & Jensen, 2003, p. 123).

De acuerdo con esto, Niss y Jensen (2002) distinguen ocho competencias básicas en el ámbito de las matemáticas: competencia de modelización, competencia de solución de problemas, competencia de pensamiento matemático, competencia de representación, competencia de símbolos y formalismos, *competencia de comunicación*, competencia de ayudas y herramientas y competencia de razonamiento.

De manera más aterrizada a la realidad colombiana, en los Lineamientos curriculares para el área de matemáticas (1998) se dice que la competencia matemática de Comunicación es aquella que:

> "…juega un papel fundamental, al ayudar a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas; cumple también una función clave como ayuda para que los alumnos tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas." (p.74).

[7] Niss, M. & Jensen, T.H. (eds.) (to appear). Competencies and Mathematical Learning – Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. English translation of part I-VI of Niss & Jensen (2002). Under preparation for publication in the series Texts from IMFUFA. Roskilde University, Denmark: IMFUFA

Ahora bien, para este trabajo de investigación se hará énfasis en la implementación de la competencia de comunicación, llamándola *competencia comunicativa en matemáticas*, por lo que en cualquier tipo de actividad matemática, se necesita de un sistema de símbolos para pensar, para comprender, para discutir, para analizar, para profundizar, para comunicar ideas y para explicar procedimientos en la resolución de problemas o en el planteamiento de ejercicios.

De manera contraria, el no tener un lenguaje adecuado que permita expresar ideas matemáticas, limita de forma radical, pero más grave aún, es no poder relacionar el lenguaje escrito de la matemática con la experiencia diaria, con los conocimientos de ella. No poder comprender el mensaje que esos símbolos escritos están tratando de comunicar, restringe la comprensión y aprendizaje de las matemáticas.

En esta investigación, se asume la competencia comunicativa como la capacidad que tiene un estudiante para expresarse a nivel individual o grupal, generando conexiones entre las representaciones concretas, orales, simbólicas, gráficas y mentales de las ideas matemáticas. Entendiendo la representación mental, como el "conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación o sobre aquello que le está asociado" (Duval, 1999, p.14). Luego, la representación semiótica, se refiere a las "producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en el lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica….) y no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. La representación semiótica pues, estaría subordinada por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que una función de comunicación" (Duval, 1999).

El estudiante produce representaciones mentales las cuales las da a conocer por medio de representaciones semióticas, a su vez la semiosis es el producto de un proceso mental de un intérprete, que se inicia con un objeto y finaliza con la representación de ese objeto, es decir, entre más información tenga el intérprete mayor tratamiento semiótico podrá realizar de lo representado (Duval, 1999). Por consiguiente, un sistema de representación involucra el lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los esquemas, las figuras geométricas, los grafos cartesianos, las tablas (Duval, 1999, p.31).

5.3.6. Conceptos relacionados con la metodología. A continuación, se definen los elementos clave para el análisis de la información obtenida a partir de las interpretaciones y producciones de los estudiantes. Estos corresponden al estudio de casos, en esta investigación, tres casos, que se detallan en el marco metodológico. También se tiene la entrevista semi-estructurada de tipo clínico crítico:

5.3.6.1. ***Estudio de casos.*** Un estudio de caso se usa para delimitar el campo de acción de una investigación y así poder especificar la problemática a estudiar. Corresponde a una situación particular que es estudiada en detalle y que se hace a cambio de una encuesta a gran escala. Por lo que, aunque muchas veces no permite esclarecer preguntas de investigación, sí permite generar hipótesis y en algunos casos comprobar la generalidad y aplicabilidad de teorías. Es un método válido en el campo de educación que ha permitido tomar casos específico**s** que se pueden llevar a generalizaciones comprobadas:

> Para Yin (1992) el estudio de casos consiste en una descripción y análisis detallados de unidades sociales o entidades educativas únicas. Para Stake (1998) es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas.
> (Barrio, González, Padín, Peral, Sánchez y Tarín, 2015, p.2)

También, otros autores citan que:

> (...) la particularidad más característica de este método es el estudio intensivo y profundo de un/os caso/s o una situación con cierta intensidad, entendido éste como un "sistema acotado" por los límites que precisa el objeto de estudio, pero enmarcado en el contexto global donde se produce.

(Muñoz y Muñoz, 2001)

Más adelante, en el capítulo de Metodología, se caracterizarán los estudios de caso escogidos para la investigación, como también la codificación correspondiente, para efectos de proteger su identidad.

5.3.6.2. ***Entrevista clínico-crítica.*** El método de entrevista clínico-crítica consiste en una entrevista en donde participan por lo menos dos personas -el que dirige la entrevista y el sujeto que es interrogado sobre una situación específica-. Se lleva a cabo una conversación libre, pero con una línea u objetivo definido y con la dirección del entrevistador que orienta y dirige hacia los aspectos a explorar. El entrevistador debe manejar una hipótesis que sirve de guía para llevar la conversación y debe ir observando y dejando hablar al entrevistado.

Es de carácter cualitativo y semiestructurado, donde participan los individuos interactuando con ideas que comunican sentimientos, experiencias y/o conocimientos, permeados por el Método Clínico Crítico Piagetano que describe Ducret (2004) y que permite comprender y explorar el desarrollo del razonamiento y la forma de pensar del entrevistado.

De manera que se caracteriza porque es un procedimiento por el cual el investigador interactúa dialécticamente, ajustándose al entrevistado de forma neutral, genera un clima de confianza sin inducir las respuestas, con sentido de escucha, mostrando interés y absteniéndose de calificativos.

Por lo cual, "ciertas preguntas se plantean al entrevistado, dándole el tiempo para que realice asociaciones que crea pertinentes, a la vez que el investigador mantiene atención a estos encadenamientos con el fin de realizar una nueva pregunta centrada en la respuesta recibida" (Palacios, 2014, p.1052). A partir de un número considerable de entrevistas, el investigador intentará sistematizar la información haciendo hincapié en las transformaciones y reconstrucciones cognoscitivas relevadas.

Jean Piaget, a partir de su experiencia, propuso una clasificación del tipo de respuestas posibles que pueden emitir los niños:

> -*Importaquismo*: la respuesta carece de derivaciones, se evidencia ausencia de interés, el comportamiento del niño muestra apatía y distracción a otros elementos de su entorno.
> -*Fabulación*: suele comparar su respuesta con la de otros niños. Su argumento es muy elaborado y sólo muestra representaciones primarias -anteriores a lo esperado- de su pensamiento.
> -*Creencia sugerida*: es un tipo de respuesta ecoica -copia lo que se le dice- a lo que el entrevistador le expresa.
> -*Creencia disparada o desencadenada*: las respuestas son uniformes. Se denota un proceso de reflexión o razonamiento propio, como revelación de un planteamiento nuevo para él.
> -*Creencia espontánea -también denominada perseverante-*: es cuando el niño responde sin reflexionar y sin esfuerzo, a una pregunta cuya respuesta ya es por él conocida o que el niño poseía sin intervención del entrevistador o el adulto.
> (Fernández, 2007, p.3)

En el aparte de la metodología, se describe detalladamente la utilidad de la entrevista clínico-crítica como valioso elemento para el análisis.

5.3.7. Elementos didácticos. A continuación, se definen los elementos didácticos que mediaron para abordar el objeto de estudio de la investigación. Estos corresponden a las situaciones didácticas y a la transposición didáctica:

5.3.7.1. *Situación didáctica.* Se entiende como *situación didáctica* el instrumento a través del cual se concretan los objetivos de la enseñanza, de la investigación, los momentos, los métodos y los materiales utilizados para llevar a cabo un acto pedagógico. Por ello, debe ser flexible y adaptarse a la realidad del contexto que pretende intervenir. Se utiliza para evitar la improvisación y la dispersión, ya que corresponde a una planificación determinada y lleva la intención de enseñar a otro. Por lo que para Brousseau (1986) citado por Vergnaud (1990, p. 14), las *situaciones didácticas* son en primer lugar instrumentos para el análisis de las situaciones y para el análisis de las dificultades conceptuales encontradas por los estudiantes.

Por lo tanto, en ella participan estudiantes, educadores, saberes, procesos, procedimientos y el contexto, permitiendo así, cuestionar la práctica educativa mediando valores, actitudes y habilidades cognitivas.

Para el contexto de las matemáticas, la *situación didáctica*, según lo expuesto Brousseau (1999), se trata de una teoría de la enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea.

Brosseau (1999), plantea los tipos siguientes tipos de situaciones didácticas:

-Situación adidáctica, donde el estudiante acepta el problema como suyo y produce su propia respuesta, sin la intervención del educador.

-Situación fundamental, donde cada conocimiento matemático posee al menos una situación que lo caracteriza y lo diferencia de los demás.

-Situación didáctica, es una situación o problema elegido por el educador que lo involucra a él mismo, para que entre en juego con la interacción del estudiante y el contexto.

También, en medio de la situación didáctica se habla del *contrato didáctico,* que se refiere a las actitudes esperadas por los estudiantes y por el educador en medio de una situación de enseñanza y en medio de una situación de aprendizaje.

5.3.7.2. *Transposición didáctica.* En esta parte se hace necesario aclarar que uno de los objetivos tácitos de la investigación consiste en dejar abierta la inquietud de convertir la información recogida -*las interpretaciones de los estudiantes frente a la relación de la fracción como parte-todo*- en insumo para continuar con su estudio y seguramente lograr impacto en el aula, teniendo en cuenta las diferentes problemáticas ocasionadas por una errada enseñanza de la fracción y las consecuencias que esto acarrea. Además, procurando lograr la transformación del "saber" en "saber enseñar", es decir, haciendo *transposición didáctica;* como lo expresa Fandiño (2009) cuando aclara que este acto constituye la razón de ser del oficio pedagógico.

Por lo cual, es imprescindible que se tome ese *saber* y se aterrice al estudiante conforme a su capacidad cognitiva y a su nivel de desarrollo, gracias al profesionalismo del educador implicado.

6. Marco Metodológico

6.1. Descripción de la Metodología

Teniendo en cuenta que el objetivo de esta investigación corresponde a estudiar y profundizar en un fenómeno educativo como lo es la interpretación que hacen los estudiantes de la fracción en su relación como parte-todo, surge la necesidad de establecer estudios tanto cualitativos como cuantitativos, dando lugar a una investigación de tipo mixto.

En este sentido, se tiene en cuenta la fuerza que en investigación en el campo educativo han tomado los dos enfoques que al ser combinados arrojan resultados más profundos que permiten establecer mejores estrategias para aumentar los conocimientos y así superar las barreras conceptuales de los estudiantes.

Es así como Hernández, Fernández y Baptista (2003) señalan que los diseños mixtos:

> (…) representan el más alto grado de integración o combinación entre los enfoques cualitativo y cuantitativo. Ambos se entremezclan o combinan en todo el proceso de investigación, o, al menos, en la mayoría de sus etapas (…) agrega complejidad al diseño de estudio; pero contempla todas las ventajas de cada uno de los enfoques. (p. 21)

Luego, teniendo en cuenta que la investigación está basada en las interpretaciones que realizan los estudiantes sobre la fracción en su relación como parte-todo y de cómo comunican dichas interpretaciones, se logra establecer una caracterización y medición del fenómeno estudiado y se da lugar a la triangulación entendida como la concurrencia e interpretación de los datos recolectados y relacionados entre sí sobre el mismo fenómeno (Driessnack, M., Sousa, V. y Costa, I., 2007), llegando a una profundización que permite enunciar nuevos planteamientos teóricos que escudriñan en las ideas y arrojan una amplia riqueza cognitiva.

Dado que la investigación de tipo mixto integra los métodos cualitativo y cuantitativo en un mismo estudio, para obtener una radiografía más completa del objeto de investigación, para este caso *las interpretaciones que hacen los estudiantes de la fracción en su relación como parte-todo*, se hace posible implementar esta combinación conservando las características de cada una de estas aproximaciones, adaptando los métodos a cada situación pedagógica planteada.

En atención a lo cual, el *elemento cuantitativo*, es de tipo descriptivo porque organiza y clasifica las respuestas de los estudiantes -del curso 501 de la I.E.D Bosanova, sede B- frente a ejercicios que indagan por medio de una prueba de entrada o diagnóstica -de quince preguntas- sobre los conocimientos y los procedimientos que los estudiantes utilizan para solucionar situaciones matemáticas que tienen que ver con *la fracción como relación parte-todo, sus atributos, contextos y registros de representación*. De igual manera, se aplica una prueba de salida o final, después de que los estudiantes participan de las seis (6) situaciones didácticas, con el ánimo de registrar los posibles avances conceptuales y procedimentales.

Así mismo, tanto las preguntas de la prueba de entrada, como las de la prueba de salida, son de tipo escrito y permiten una descripción cuantitativa admitiendo hacer comparaciones entre las respuestas de los estudiantes frente a las categorías de análisis definidas, y a su vez, confrontar el resultado de la prueba de entrada con el resultado de la prueba de salida.

Por otra parte, el *elemento cualitativo* es de tipo descriptivo-interpretativo, porque es *un estudio de tres casos clasificados como nivel de desempeño Bajo, Medio y Alto*, que a través de las actividades sugeridas en las seis (6) situaciones didácticas planificadas, que conforman la Secuencia Didáctica, describe y analiza las interpretaciones que hacen los estudiantes de la fracción como relación parte-todo, del mismo curso e institución educativa ya nombrados.

Adicionalmente, para capturar y analizar detenidamente las interpretaciones de los niños, se realizan entrevistas semiestructuradas -clínico-críticas- a los tres estudios de caso, en medio de las cuales se les entrega el mismo material concreto con el que trabajaron en la plenaria, junto con sus compañeros, y por medio de la pregunta y la observación se les indaga acerca de la forma como resolvieron las situaciones planteadas, al mismo tiempo que se hace un registro audiovisual que permite reconocer las interpretaciones que los estudiantes verbalizan.

Finalmente, se aclara que el estudio de casos se propone con un análisis de tipo *intrasujeto e intersujeto.* Entendido el primero, como el estudio en profundidad de cada estudiante frente a las actividades propuestas, y el segundo, como la comparación de lo que hacen dos o tres estudiantes distintos, al resolver una misma tarea determinada. En este sentido, se realiza la descripción de lo que los estudiantes hacen durante las sesiones de entrevista, al resolver las tareas que les propone el entrevistador. En la **Figura 24**, se observa el diseño metodológico:

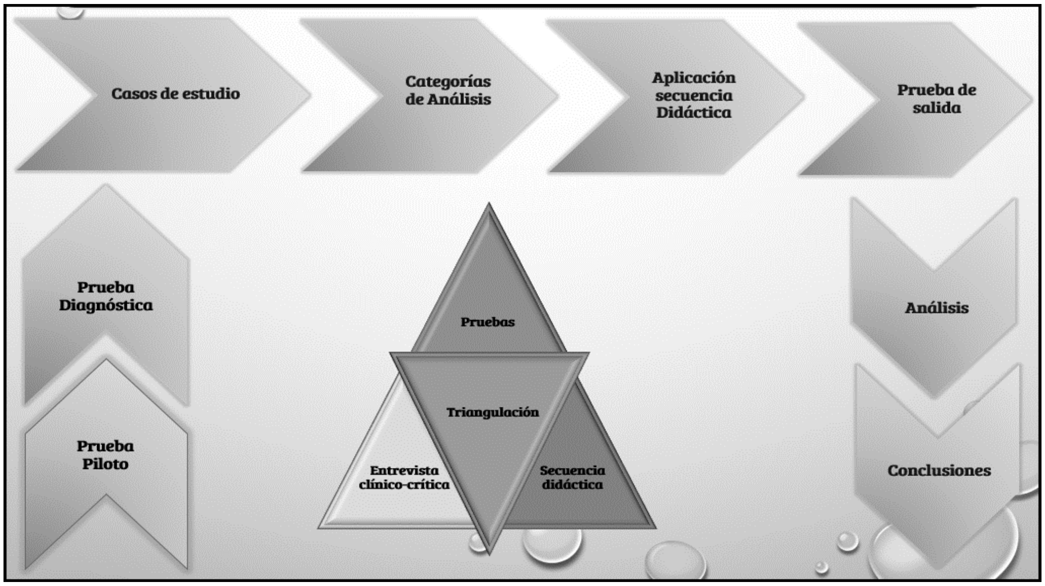


Figura 24. Diseño metodológico. Fuente y elaboración propia.

6.2. Población y muestra

6.2.1. Contexto social del colegio. La Institución Educativa Distrital Bosanova sede-B, adscrita a la Secretaría de Educación de Bogotá, se encuentra ubicada en la localidad de Bosa frente al parque central de Bosa Centro en un local en arriendo. Cuenta con un promedio de 900 estudiantes repartidos en 18 cursos, por jornada.

Inicialmente, este colegio se fundó con el nombre de Motorista sede B por la fuerte demanda de cupos educativos que presenta la localidad de Bosa, debido a que en la zona centro de dicha localidad, no existía ningún colegio distrital. La población que reunió el rector Javier Ruiz correspondía a estudiantes que en otras instituciones educativas privadas y /o públicas habían sido expulsados o tenían pérdida de año escolar debido a su comportamiento o a que no alcanzaron los logros exigidos en el grado donde se desempeñaban.

6.2.2. Caracterización de la población. La propuesta está dirigida a la Institución Educativa Bosanova Sede-B, jornada tarde, en la localidad de Bosa de la ciudad de Bogotá. Los estudiantes pertenecen al estrato socioeconómico 1 y 2, de grado quinto de Básica Primaria con edades entre los 10 y 13 años, como se puede ver en la **Figura 25**:

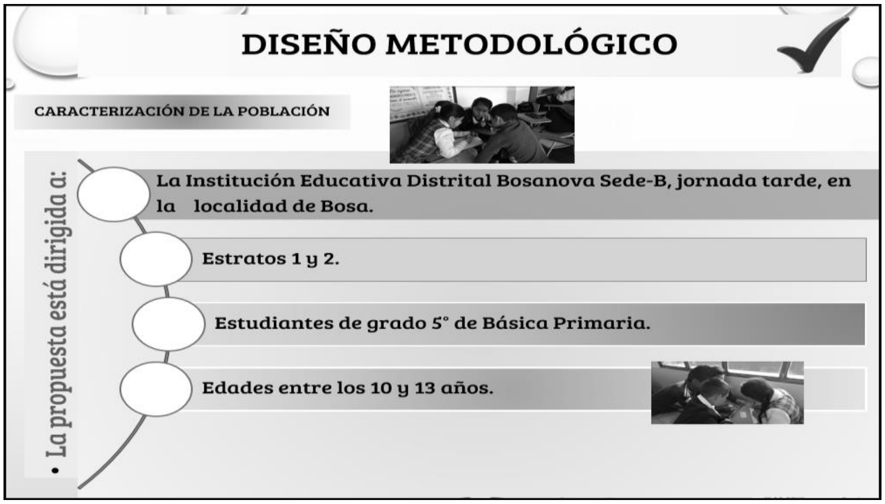


Figura 25. Caracterización de la población. Fuente y elaboración propia.

6.2.3. Contexto pedagógico. El colegio, además de su trabajo con niños de primaria tiene programas como: “Proyecto para la primera infancia” [8], “Fortalecimiento de procesos básicos”[9] y “Aceleración para el aprendizaje”[10]. También, el Colegio Bosanova Sede-B presenta el tipo de dificultades que en la población del sector público puede verse con regularidad y es la población flotante que se da en la mayoría de los casos porque los padres no suelen ser de la región central del país y luego de algún tiempo de no poder lograr lo que esperaban en la ciudad, se desplazan a su “lugar seguro” llevando consigo su proyecto de vida y el estilo de educación de los maestros de las escuelas de donde provienen.

[8] Programa de la secretaría de educación que proporciona la oportunidad de aprender a niños de las edades de 4 a 5 años, bajo un modelo pedagógico lúdico.
[9] Programa de la secretaría de educación que se encarga de fortalecer los procesos requeridos en el grado que los estudiantes cursan.
[10] Programa de la secretaría de educación dirigido a aquellos estudiantes que no se encuentran en las edades correspondientes para cursar ciertos grados de primaria con el fin de nivelarlos con respecto a las metas trazadas en la básica primaria.

6.2.4. Muestra. La muestra, entendida como el subconjunto de los individuos de la población (curso 501), corresponde a los tres estudios de caso seleccionados a partir del referente pedagógico de la profesora de matemáticas de la población escogida y los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica aplicada.

De acuerdo con estos criterios, se procedió a escoger tres estudiantes que fueron clasificados con nivel de desempeño matemático en nivel bajo, medio y alto.

6.3. Momentos de la investigación

A continuación, se describe la ruta de investigación y el modo de operar de cada uno de los instrumentos de recolección de la información, tal y como se observa en la Figura 24:

El primer momento se inició con una prueba piloto que permitió depurar las preguntas para la aplicación de la prueba de entrada o diagnóstica. Posteriormente se aplicó la prueba de entrada o diagnóstica (ver ***Anexo 8***), compuesta por 15 preguntas, que permitió *indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes* con relación: al concepto de fracción, al manejo de los atributos, al reconocimiento de los contextos continuo y discreto y las evidencias de manejo de algunos registros de representación, como también, la transversalidad de la competencia comunicativa en matemáticas, presente durante la prueba.

Después de tabular los resultados de la prueba, se escogieron los tres estudiantes caso de estudio, clasificándolos internamente y sólo para efectos de la investigación, como Nivel Bajo, Nivel Medio y Nivel Alto. Para ello y como medida de protección de la identidad de los estudiantes escogidos, se utilizó la siguiente codificación relacionada en la **Tabla 4**:

Tabla 4
Edad cronológica y nivel de desempeño en la prueba diagnóstica

	EST1	**EST2**	**EST3**
Edad	11 años	11 años	11 años
Nivel de desempeño	Bajo	Medio	Alto

Fuente: elaboración propia

Luego se procedió a hacer la entrevista a los tres estudiantes casos de estudio, para examinar cómo respondieron cada una de las preguntas de la prueba, y a su vez, se hizo registro audiovisual, realizando luego las transcripciones respectivas, para poder explorar procesos cognitivos.

En el segundo momento, se aplicó la secuencia didáctica -compuesta por seis (6) situaciones didácticas -previamente diseñadas- a la totalidad de los estudiantes del curso tomado como base para la investigación, prestando atención constantemente a los procedimientos, respuestas escritas, respuestas verbalizadas, y diferentes registros hechos por los estudiantes, para inquirir constantemente sobre sus procesos cognitivos (ver ***Anexo 9***).

En el tercer momento, que era paralelo con las situaciones didácticas que se aplicaron en diferentes sesiones, se hicieron las entrevistas a los estudiantes estudio de caso utilizando el mismo material concreto que se utilizaba en la situación junto con sus compañeros de clase. Todo este proceso se enmarcó en el objetivo constante de describir y analizar la interpretación que hacen los estudiantes frente a la fracción como relación parte-todo, en contextos continuos y discretos, sus representaciones y el manejo de los atributos de la fracción; sin desconocer las problemáticas frecuentemente presentadas. Las convenciones o códigos utilizados en esta investigación para referencia en el análisis de datos, se relacionan en el ***Anexo 10***.

Es imprescindible aclarar, que se transcribe en su totalidad tan sólo las entrevistas de la prueba diagnóstica por cuanto se hace indagación pregunta por pregunta, durante la misma. Mientras que, en las situaciones didácticas, tan sólo se transcriben los fragmentos relevantes para la investigación).

En el cuarto momento, se aplicó una prueba de salida, conservando las mismas preguntas de la prueba de entrada y obedeciendo a la inquietud por conocer los alcances logrados, gracias a la aplicación de la secuencia didáctica, en cuanto a los avances de los estudiantes en la comprensión del tratamiento de la fracción. Se aclara que el verificar el nivel de avance o no de los estudiantes, en los aprendizajes trabajados, no hace parte de los objetivos de esta investigación, pero se deja abierta la inquietud para posteriores estudios.

En el quinto y último momento, correspondiente al análisis de la información, presente en el capítulo siete, se tuvo en cuenta la información recopilada en la prueba diagnóstica, la secuencia didáctica y la entrevista clínico crítica; que permitieron establecer a la luz de las categorías de análisis unos hallazgos de tipo cognitivo y procedimental, en la forma como los estudiantes interpretan la relación de la fracción como parte-todo. Este análisis se realizó tanto cuantitativa como cualitativamente.

6.4. Selección de Estudios de Caso

Para esta investigación se tomaron 3 estudios de caso: uno llamado nivel bajo, otro nivel medio y el último nivel alto. Esta clasificación se da a partir de los resultados de la prueba diagnóstica, donde el estudiante designado con nivel bajo es el que acertó menos de la mitad de los 15 puntos evaluados en la prueba, el tipificado con nivel medio es el estudiante que obtuvo entre 7 y 8 puntos correctos y el categorizado con nivel alto arrojó puntajes desde los 13 a los 15 puntos en acierto.

6.5. Instrumentos de Recolección de la información

Para realizar un análisis detallado que permita dar cuenta de cómo comunican las interpretaciones sobre la relación parte-todo, los estudiantes vinculados al estudio, se utilizaron los siguientes instrumentos: prueba piloto, prueba diagnóstica, entrevistas clínico-críticas, secuencia didáctica (compuesta de 6 situaciones didácticas), observación directa e indirecta y prueba de salida; instrumentos que se describen a continuación:

6.5.1. Pruebas. Las pruebas son un instrumento de medición que permiten determinar cuánto se conoce de un determinado saber conforme a una predeterminada escala de medición, que comprueba qué tan aproximado o no está el sujeto a la misma, que brinda cierto grado de seguridad y confiabilidad de la información que arroja.

6.5.1.1. *Prueba piloto.* Es una aplicación previa o ensayo para depurar las pruebas que se piensan aplicar para el estudio. Para poder darle paso a las pruebas diagnóstica y final. Se realizó una prueba piloto que se aplicó a estudiantes de grado quinto de la misma institución, pero de diferente curso al tomado como objeto de estudio. Luego de realizarla, se sometió a un proceso de revisión tomando como referentes los criterios descritos por Carla Förster Marín y Cristian A. Rojas-Barahona (2008), dando los siguientes resultados, en:

✓ *Validez de contenido* **(**debe existir una real correspondencia entre el contenido y las habilidades que evalúa la prueba). Se encontró mediante revisiones realizadas entre pares académicos, que 13 de las 15 preguntas realizadas se localizaban dentro de las categorías de análisis planteadas en el marco teórico, lo que ocasionó que se cambiaran las preguntas que no cumplían con los requerimientos por 2 nuevas preguntas.

- ✓ *Validez instruccional-validez curricular* (contiene situaciones evaluativas coherentes con las actividades que curricularmente pueden realizar los estudiantes). Mediante revisiones realizadas por pares académicos, se encontró que las preguntas descritas en la prueba estaban acorde al grado quinto para la cual se realizó, en cuanto al contenido; pero en cuanto al lenguaje debieron realizarse algunas modificaciones en su escritura que resultaron de mucho provecho al momento de obtener información pertinente para la investigación.
- ✓ *Validez consecuencial* (demuestra un propósito claro) la finalidad descrita de la prueba diagnóstica estaba vislumbrada en la prueba piloto. De acuerdo con las sugerencias de realizadas por pares académicos.

6.5.1.2. ***Prueba de entrada o diagnóstica.*** Es un instrumento que permite determinar cuáles son los puntos fuertes o débiles del individuo, en el tópico a tratar en la prueba, antes de comenzar a aplicar una secuencia didáctica. Como es de carácter escrito (en este caso), los estudiantes pueden describir el procedimiento realizado para resolver cada uno de los puntos de la prueba, logrando comunicar aspectos claves para la investigación. Una vez construidas las categorías de análisis, se procedió a diseñar la prueba de entrada o diagnóstica compuesta por 15 preguntas abiertas y cerradas, que tratan de la relación de la fracción parte-todo sobre los atributos propuestos por (Llinares & Sánchez, 1997). Dentro de estas quince preguntas, doce de ellas corresponden al contexto continuo y tres de ellas al contexto discreto. En su diseño, de autoría del grupo investigador, se encuentran preguntas inspiradas en el estilo de las pruebas Saber con algunas Figuras y contextos de las Pruebas Saber de matemáticas Icfes 2016 y 2017, de las pruebas Supérate con el Saber Matemáticas MEN 2017 y del examen de primaria de la Secretaría de Educación de Durango (México, 2008). Adicionalmente, contiene un espacio para colocar respuestas en las preguntas abiertas y para todas las preguntas en general tiene otro espacio para justificar las respuestas, junto a Figuras y contextos creados por el grupo investigador (ver ***Anexo 8***- Prueba de Entrada o Diagnóstica).

6.5.1.3. ***Prueba de salida o final.*** La prueba final o de salida, tiene la misma validez que la prueba diagnóstica o de entrada, solo que permite comprobar que las sesiones realizadas en el aula han generado o no cambios significativos sobre el estudiante. Esta puede tener un nuevo diseño en cuanto a preguntas o ubicación de estas se refiere; igualmente puede ser la misma prueba inicial. Para la presente investigación, se toma sin variaciones, obteniendo resultados que se pueden comparar directamente sobre puntos idénticos con la prueba diagnóstica (ver ***Anexo 8***) Comparación de las pruebas de entrada y salida con relación a las Categorías de Análisis).

A continuación, la tabla 5, corresponde a la ficha técnica estructurada para la prueba diagnóstica o de entrada y para la prueba final o de salida:

6.5.1.4. ***Ficha técnica: prueba diagnóstica- prueba final.***

En la **Tabla 5**, se muestra la ficha correspondiente a los componentes trabajados en las respectivas pruebas:

Tabla 5
Ficha técnica: prueba diagnóstica- prueba final

Pregunta	Atributos relación parte-todo (Llinares & Sánchez,1997)	Categoría Contextos (Llinares & Sánchez, 1997)	Categoría Representaciones (Lesch citado por Llinares & Sánchez, 1998)	Problemáticas escolares con el número fraccionario como relación parte-todo (Poveda, A, s. f.)
Pregunta que permite determinar si el estudiante reconoce o hace uso de los atributos, contextos y registros de representación, afines a lo solicitado.	Atributos citados por el autor para el manejo de las fracciones.	Contexto continuo o contexto discreto.	Registros de representación inmersos en la situación planteada (concreto, oral, simbólico, o gráfico).	Afinidad de la situación presentada con las problemáticas frecuentes, enunciadas por la autora.

Fuente: elaboración propia

En el ***Anexo 5*** se puede observar la ficha técnica de la prueba diagnóstica y prueba final codificada.

6.5.2. Secuencia didáctica. En esta la investigación, la secuencia didáctica corresponde al conjunto de situaciones didácticas que fueron diseñadas e implementadas con los estudiantes del objeto de estudio. Para este caso se efectuaron seis (6) situaciones didácticas.

El carácter o definición de la situación didáctica ya se trató en el capítulo del marco teórico a profundidad, sin embargo, se recuerda que se describe a la secuencia didáctica como el conjunto de situaciones didácticas dentro de un ciclo de enseñanza y aprendizaje, para generar procesos cognitivos adecuados, donde todos sus elementos interactúan y se ven afectados entre sí.

Por consiguiente, en esta investigación pedagógica, la secuencia didáctica se dividió en seis situaciones didácticas aplicadas en el aula a través de las cuales se trabajaron los atributos de la fracción (Llinares & Sánchez, 1997), los contextos continuo y discreto (Llinares & Sánchez, 1997), las representaciones (Lesch, 1983, citado en Llinares y Sánchez 1988, p. 88) y también se tuvieron en cuenta las problemáticas observadas por Poveda, M. (s. f.), en su publicación digital de Problemáticas Escolares con el Número Fraccionario como Relación Parte-todo.

Así pues, se asignó un nombre a cada situación didáctica relacionado con los saberes a trabajar; se registró el número de la situación didáctica, el nombre, la fecha de aplicación, la descripción global de la sesión, los objetivos de aprendizaje de los estudiantes, los objetivos específicos de la investigación, los momentos de la intervención y materiales utilizados (***Ver anexo 9***-Secuencia didáctica).

En la secuencia didáctica se procuró plantear situaciones variadas y dinámicas para acercar a los estudiantes a la fracción, sus atributos, contextos y registros de representación:

-En la primera situación se trabajó el reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes, para un contexto continuo que consistió en hacer divisiones o cortes a figuras geométricas con diferentes formas. Luego, los objetivos de los estudiantes redundaron en dividir superficies en partes iguales manteniendo la forma; y comprender que, al dividir una superficie, se obtienen subregiones iguales en área sin importar la forma.

-En la segunda situación se abordó la construcción del concepto de fracción y fraccionario a través de la relación parte-todo para un contexto continuo. Consistiendo en hacer dobleces y coloreados específicos, a hojas de papel. Por consiguiente, los objetivos de los estudiantes consistieron en trabajar la relatividad de la unidad y de las partes, como también la reconstrucción de la unidad a partir de las partes; y entender la manera en que una parte puede asumirse como una nueva unidad para establecer una nueva relación parte-todo.

-En la tercera situación se trató la noción y reconstrucción de la unidad, relaciones de equivalencia y relación multiplicativa de la fracción en contexto continuo. Esto, trabajando con el tangram de 7 piezas. Por tanto, los estudiantes debían establecer relaciones de equivalencia entre las piezas del tangram con el fin de hallar figuras equivalentes en área, pero no en forma; establecer relaciones de equivalencia entre las piezas del tangram inicialmente mediante la sobreposición de fichas; evidenciar que se pueden encontrar piezas del tangram equivalente sin ser estas congruentes y establecer que la fracción es una relación cuantitativa entre dos cantidades de magnitud -la parte y el todo-, porque la fracción es el resultado de una comparación.

-En la cuarta situación se manejó la relación aditiva entre el todo y su parte en fracciones menores que la unidad y reconstrucción de la unidad en contexto continuo. Intervención que se trabajó por medio de medición y comparación de líquidos. Por ello, los estudiantes pudieron conocer la relación cuantitativa de tipo aditivo entre el todo y sus partes; reconstruir parte de la unidad utilizando otras subdivisiones y reconstruir la unidad utilizando partes de ella.

-En la quinta situación se propuso abordar la relación multiplicativa entre el todo y su parte y su parte y el todo en fracciones menores que la unidad en contexto continuo. Se trabajó por medio del Tangram F, permitiendo así, conocer la relación cuantitativa de tipo aditivo para reconstruir fracciones mayores que la unidad y formar una fracción mayor que la unidad utilizando subdivisiones relacionadas con la unidad.

-Ya en la sexta situación, se trabajó la formación de la unidad en fracciones mayores que la unidad en contexto discreto, intervención para la cual se utilizaron alimentos en situaciones cotidianas. Permitiendo que los estudiantes conocieran la relación cuantitativa de tipo aditivo para reconstruir fracciones mayores que la unidad y formar una fracción mayor que la unidad utilizando subdivisiones relacionadas con la unidad. A continuación, en la **Tabla 6**, se observa la estructura general de cada una de las situaciones didácticas planteadas:

Tabla 6
Estructura general de la Secuencia didáctica

Situación 1	**Situación 2**	**Situación 3**	**Situación 4**	**Situación 5**	**Situación 6**
Reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes (divisiones o cortes).	Construcción del concepto de fracción y fraccionario a través de la relación parte-todo (dobleces).	Noción y reconstrucción de la unidad, relaciones de equivalencia y relación multiplicativa de la fracción (tangram de 7 piezas).	Relación Aditiva entre el Todo y su Parte en fracciones menores que la unidad y reconstrucción de la unidad (líquidos).	Relación Multiplicativa entre el Todo y su Parte y su Parte y el Todo en fracciones menores que la unidad (Tangram F).	Formación de la unidad en fracciones mayores que la unidad (alimentos-situaciones cotidianas).

Fuente: elaboración propia

6.5.2.1. ***Ficha técnica de la situación didáctica.*** En la **Tabla 7**, se presenta la estructura para cada una de las situaciones didácticas, que se aplicó a los estudiantes considerados como la muestra de este estudio:

Tabla 7
Ficha técnica situación didáctica

Situación Didáctica No. ___	
1. Nombre de la situación didáctica	Nombre sugestivo de la situación didáctica (enuncia los temas a trabajar).
2. Fecha de implementación	Fecha en que se planea aplicar.
3. Descripción global de la sesión.	Descripción general de los momentos de la sesión.
4. Objetivos de aprendizaje de los estudiantes	Objetivos que se plantean con respecto al desarrollo del aprendizaje del estudiante.
5. Objetivos de investigación	Objetivos que se plantearon en la investigación y que se vinculan a esta situación didáctica.
6. Momentos	Descripción de cada uno de los momentos que se trabajaron en la sesión de acuerdo con la actual situación didáctica.
7. Materiales	Materiales utilizados para la situación didáctica.

Fuente: Castaño, J. (2017); Grupo Alquerque, Sevilla (2004) y Díaz-Barriga, A. (1996). Elaboración propia.

6.5.2.2. ***Esquema de las situaciones didácticas aplicadas.*** En el ***Anexo 9***, se muestra el esquema de las sesiones de la secuencia didáctica. Se observa cada una de las situaciones didácticas en relación con los objetivos de aprendizaje de los estudiantes, los objetivos de la investigación, los atributos de la fracción parte-todo, la categoría contextos, la categoría representaciones y las problemáticas escolares con el número fraccionario como relación parte-todo.

6.5.3. Entrevista clínico-crítica. Es una técnica de carácter cualitativo y semiestructurado, donde participan por lo menos dos personas (el que dirige la entrevista y el sujeto que es interrogado sobre una situación específica), interactuando con ideas que comunican sentimientos, experiencias y/o conocimientos, permeados por el método clínico crítico piagetiano, que según Ducret (2004) permite comprender y explorar el desarrollo del razonamiento y la forma de pensar del entrevistado. En esta investigación, se utiliza esta técnica de recolección de información como la herramienta más apropiada para que las investigadoras puedan obtener mayor detalle sobre el análisis que realiza el estudiante de la relación parte-todo de la fracción, en momentos clave como: después de la prueba inicial o de entrada, después de cada una de las situaciones didácticas y al terminar, en la prueba final.

De manera que, las entrevistas de tipo clínico crítico se llevaron a cabo en las instalaciones del colegio donde estudian los sujetos escogidos para el estudio de casos, utilizando en la primera entrevista el cuestionario de la prueba de entrada y luego, para cada una de las situaciones didácticas, se utilizó el mismo material concreto que fue usado en la situación que se llevó a cabo con todos los compañeros de curso de los estudiantes escogidos para el estudio.

Más adelante, en el capítulo 7 (Análisis, sistematización e interpretación de la información), se expondrá en detalle la información obtenida con esta técnica.

6.5.3.1. ***Ficha técnica de la entrevista clínico-crítica.*** Las entrevistas semi-estructuradas se desarrollaron bajo las características de un guión con preguntas para indagar sobre los conocimientos de los estudiantes, para ampliar o explicar los conocimientos expresados, para delimitar las respuestas dadas y para explorar emociones que se consideraron latentes e importantes dentro del desarrollo de la entrevista. En la **Tabla 8** se puede observar la estructura de este guión:

Tabla 8
Ficha técnica de la entrevista clínico-crítica

Entrevista Clínico-Crítica Semi-estructurada	
Categoría	**Preguntas**
Para indagar conocimientos	¿De qué otra manera se hubiera comido la misma cantidad de chocorramo? ¿Cuál de las siguientes figuras representa 1/3? ¿Con qué fracción es posible representar la torta de cumpleaños que se repartió a los invitados? ¿A qué corresponde? ¿Cuál de las siguientes opciones representa la situación planteada?
Para ampliar o explicar lo expresado	¿Qué entendiste del problema? ¿Cuáles son los datos del problema? ¿Qué te pide la pregunta del problema? ¿Cómo justificaste tu respuesta? ¿Qué significa rellenado? ¿Cuál escogiste? ¿Qué representa?
Para delimitar las respuestas	¿Por qué no la dibujaste en el momento? ¿Me puedes explicar qué hiciste? ¿Por qué decidiste dividir? ¿Por qué sumas? ¿Cómo compruebas que esa es la parte que falta por dibujar?
Para explorar emociones	¿Qué piensas de la actividad? ¿Te pareció difícil? ¿Cuál tangram te gustó más?

Fuente: elaboración propia

6.5.4. Observaciones. La observación, como otra de las técnicas de recolección de la información más usadas, es considerada la más natural, puesto que los instrumentos utilizados son los sentidos y el pensamiento. Debido a que utiliza la vista para la recepción visual de la información y el oído para el registro de audio, los registros suelen ser reales y perdurables en la memoria del investigador, es por esto, que se ha incluido su uso en esta investigación, por considerarse una de las herramientas más poderosas en la educación, porque registra de forma sistemática lo ocurrido en el aula, para luego procesarla e interpretarla.

6.5.4.1. ***Observación directa.*** Como método de recolección de datos, la observación directa actúa sin intervenir ni alterar el ambiente en el que el objeto de estudio se desenvuelve. Se identifica por ser de primera mano, ocurre cuando el investigador se pone en contacto con el hecho a indagar, se considera como una de las piezas con más relevancia en un proceso de recolección de la información ya que los datos son originales; situación que se vivencia en este estudio cuando el docente observa a los estudiantes mientras realizan las diferentes actividades expuestas en las situaciones didácticas y en las entrevistas clínico-críticas, como ayuda para logra interpretar el porqué de las diferentes respuestas e inferencias que el estudiante registra, para este caso, frente a la fracción como relación parte-todo.

6.5.4.2. ***Observación indirecta.*** Como instrumento de recolección de datos cualitativo, la observación indirecta obtiene datos de características y propiedades de lo observado. Con la observación indirecta, se debe recurrir a declaraciones y registros recopilados por otros expertos del área, es decir, con las impresiones derivadas de fuentes secundarias.

En este trabajo, las investigadoras observan de manera indirecta a sus estudiantes a través de la prueba entrada y de salida (enriquecidas con fuentes secundarias) y se sustentan en las investigaciones previas registradas en los antecedentes, permitiendo describir y estudiar las características del objeto de investigación.

7. Análisis e interpretación de los datos

La investigación se centra en el análisis de los instrumentos de recolección de la información utilizados en el estudio, específicamente en las pruebas diagnóstica y final, las situaciones didácticas y las entrevistas clínico-críticas. Primero se presentan los resultados obtenidos a partir del análisis cuantitativo y a continuación los resultados producto del análisis cualitativo, obteniendo así un enfoque de tipo mixto, tal y como se había previsto en el capítulo de la metodología. Adicionalmente, se irán estableciendo las relaciones entre dichos análisis a medida que se avanza en el estudio de los resultados.

Es necesario resaltar que este estudio comprende una población de 31 estudiantes del curso 501 y una muestra de 3 estudiantes de estudio de caso, clasificados en los niveles bajo, medio y alto.

7.1. Análisis cuantitativo

En el análisis cuantitativo de la prueba diagnóstica, se revisan los conocimientos previos que los estudiantes tienen sobre la fracción, sus atributos, contextos y registros de representación, partiendo de la tabulación de cada una de las preguntas junto al cálculo del porcentaje obtenido en cada una de las respuestas abiertas y cerradas.

Para el análisis cualitativo, se retoman estos resultados, primero para establecer los estudiantes que interesan como estudios de caso y luego como insumo para analizar la información cualitativamente, por medio de las entrevistas realizadas luego de la prueba diagnóstica y también luego de cada experiencia en el aula tras aplicar las situaciones didácticas.

De igual manera, gracias al componente cuantitativo, se confrontan los resultados de la prueba diagnóstica con los de la prueba final, con relación a las categorías de análisis presentadas, para establecer avances cognitivos de los estudiantes tomados como muestra para este estudio.

El análisis cuantitativo se presentará de la siguiente manera: en un primer momento un análisis de cada una de las preguntas realizadas en la prueba diagnóstica y en la prueba final, en donde se observan el número de estudiantes y los porcentajes calculados para cada opción de respuesta (abierta o cerrada) dada por la totalidad de la población; en un segundo momento se verá un análisis comparativo de las pruebas diagnóstica y final con cada uno de los estudiantes de estudio de caso, (*intrasujeto*); en un tercer momento se muestra un análisis de las pruebas diagnóstica y final de cada estudiante con el total del grupo investigado, (*intra e intersujeto*); y por último, en un cuarto momento otro análisis comparativo de las pruebas diagnóstica y final entre los tres estudiantes de estudio de caso, (*intersujeto*). La ampliación de estos análisis se encontrará en los anexos de este documento.

7.1.1. Análisis de las pruebas diagnóstica y final del grupo investigado. Para el presente análisis se mostrará un **análisis de contraste** entre cada una de las preguntas de la prueba diagnóstica y final, que aparece en el **Anexo 14**. En primera instancia se señala el contexto de cada pregunta, se indican los registros de representación presentes en cada pregunta, luego, contiene las respuestas en gráficas (figuras) organizadas en tres grupos: respuesta correcta, no sabe o no responde y las respuestas incorrectas que se agruparan en un solo porcentaje; esto se verá en cada pregunta para las pruebas diagnóstica y final junto con sus resultados desde la prueba diagnóstica y la prueba final y el número de estudiantes que corresponde a cada respuesta; encontrándose así un gráfico comparativo de cada pregunta en la prueba diagnóstica y final (figura 26); luego, en un segundo espacio se encuentran algunas **consideraciones desde la categoría de atributos de la fracción**, en un tercer espacio **consideraciones desde la categoría de los contextos** y por último se encuentran algunas **consideraciones desde las pruebas diagnóstica y final relacionadas con la secuencia didáctica;** para cada una de estas apreciaciones se tendrán en cuenta las preguntas y sus resultados. Para una mejor lectura las preguntas serán codificadas como PG y de acuerdo con el número serán PG1, PG2, PG3 hasta PG15, que corresponden al total de preguntas.

A continuación, se analiza la información de la **Figura 26**:

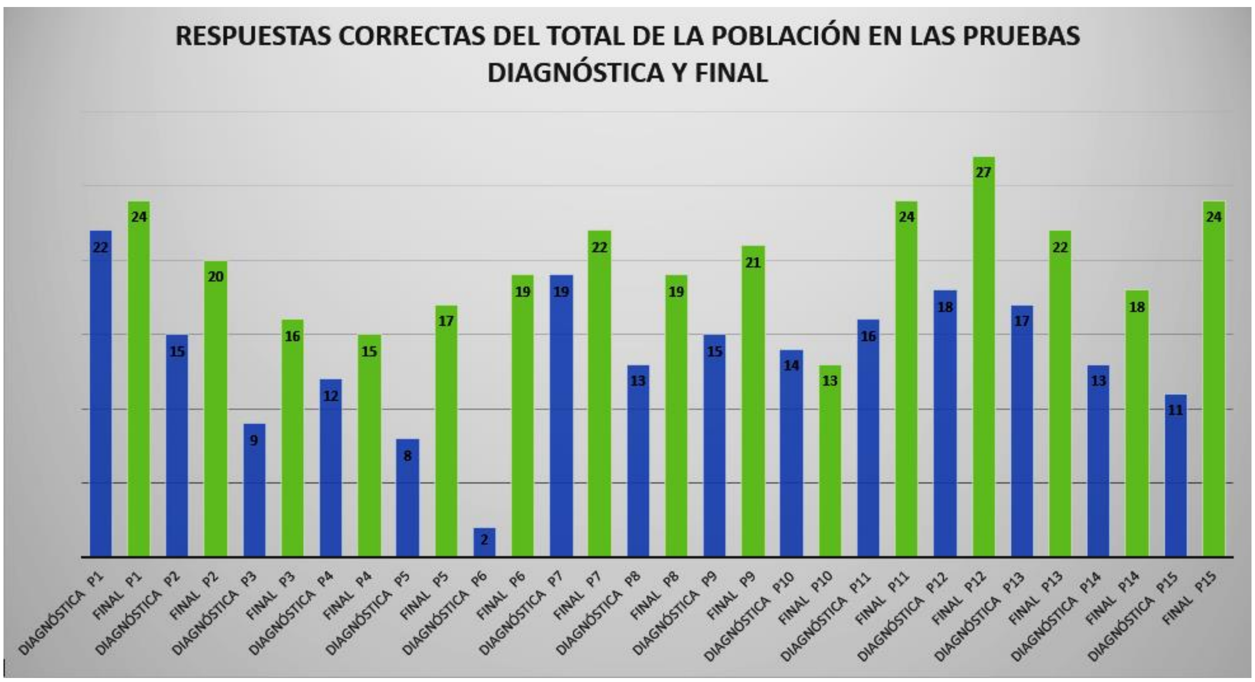


Figura 26. Análisis comparativo respuestas prueba diagnóstica y final. Fuente y elaboración propia

La **Figura 26** muestra la cantidad de estudiantes que respondieron de forma acertada cada una de las preguntas en la prueba diagnóstica (barras de color azul) y en la prueba final (barras de color verde), con respecto al total de la población (31 estudiantes); los resultados por cada pregunta son:

En P1, 22 de los 31 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica perteneciendo a un 71%, mientras que, en la prueba final 24 estudiantes contestaron de forma correcta lo que reconoce a un 77%, obteniendo un avance de un 6% correspondiente a 2 estudiantes.

En P2, 15 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica concerniente a un 48%, en tanto que, en la prueba final 20 estudiantes respondieron de forma correcta lo que registra a un 65%, arrojando un avance de un 16% que representa a 5 estudiantes.

Para P3, solo 9 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica que equivale a un 29%, por otro lado, en la prueba final 16 de los 31 estudiantes contestaron de forma correcta lo que reconoce a un 52%, logrando un avance de un 23% perteneciente a 7 estudiantes.

En P4, 12 de los 31 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica perteneciendo a un 39%, mientras que, en la prueba final 15 estudiantes contestaron de forma correcta lo que reconoce a un 48%, obteniendo un avance de un 10% correspondiente a 3 estudiantes.

En P5, 8 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica concerniente a un 26%, en tanto que, en la prueba final 17 estudiantes respondieron de forma correcta lo que registra a un 55%, arrojando un avance de un 29% que representa a 9 estudiantes.

Para P6, solo 2 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica que equivale a un 6%, por otro lado, en la prueba final 19 de los 31 estudiantes contestaron de forma correcta lo que reconoce a un 61%, logrando un avance de un 55% perteneciente a 17 estudiantes.

En P7, 19 de los 31 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica perteneciendo a un 61%, mientras que, en la prueba final 22 estudiantes contestaron de forma correcta lo que reconoce a un 71%, obteniendo un avance de un 10% correspondiente a 3 estudiantes.

En P8, 13 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica concerniente a un 42%, en tanto que, en la prueba final 19 estudiantes respondieron de forma correcta lo que registra a un 61%, arrojando un avance de un 19% que representa a 6 estudiantes.

Para P9, 15 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica que equivale a un 48%, por otro lado, en la prueba final 21 de los 31 estudiantes contestaron de forma correcta lo que reconoce a un 68%, logrando un avance de un 19% perteneciente a 6 estudiantes.

En P10, 14 de los 31 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica perteneciendo a un 45%, mientras que, en la prueba final 13 estudiantes contestaron de forma correcta lo que reconoce a un 42%, obteniendo un retroceso de un 3% correspondiente a 1 estudiante.

En P11, 16 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica concerniente a un 52%, en tanto que, en la prueba final 24 estudiantes respondieron de forma correcta lo que registra a un 77%, arrojando un avance de un 26% que representa a 8 estudiantes.

Para P12, 18 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica que equivale a un 58%, por otro lado, en la prueba final 27 de los 31 estudiantes contestaron de forma correcta lo que reconoce a un 87%, logrando un avance de un 29% perteneciente a 9 estudiantes.

En P13, 17 de los 31 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica perteneciendo a un 55%, mientras que, en la prueba final 22 estudiantes contestaron de forma correcta lo que reconoce a un 71%, obteniendo un avance de un 16% correspondiente a 5 estudiantes.

En P14, 13 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica concerniente a un 42%, en tanto que, en la prueba final 18 estudiantes respondieron de forma correcta lo que registra a un 58%, arrojando un avance de un 16% que representa a 5 estudiantes.

Para P15, solo 11 estudiantes contestaron acertadamente en la prueba diagnóstica que equivale a un 35%, por otro lado, en la prueba final 24 de los 31 estudiantes contestaron de forma correcta lo que reconoce a un 77%, logrando un avance de un 42% perteneciente a 13 estudiantes.

7.1.1.1. Consideraciones desde la categoría de atributos de la fracción. Se encuentra que en las preguntas PG1[11], PG7, PG11, PG12 y PG13 donde más hubo aciertos en la prueba diagnóstica son las que favorecen los atributos *A8* y *A9*[12]; a su vez, en las preguntas de la prueba final donde más hubo aciertos fueron PG1, PG2, PG3, PG5, PG6, PG7, PG8, PG9, PG11, PG12, PG13 y PG14 que se relacionan con el atributo *A8* exceptuando a PG14.

7.1.1.2. Consideraciones desde la categoría de los contextos. Se pueden observar preguntas como PG1, PG7, PG11, PG12 y PG13 con un porcentaje de más 50% en aciertos donde PG1, PG7 y PG11 son de naturaleza C1, advirtiendo que es favorecido C1 en un 60%, además se ve que las 5 preguntas confluyen al pertenecer a R3; en tanto que, en las preguntas pertenecientes al más del 50% en aciertos de la prueba final PG1, PG2, PG3, PG5, PG6, PG7, PG8, PG9, PG11, PG12, PG13 y PG14, coincidieron en que PG1, PG2, PG3, PG5, PG6, PG7, PG9 y PG11 de

[11] PG: pregunta

[12] **A1**: Reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes. **A2:** La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El "todo" se puede dividir en el número de partes pedido. **A3:** Las subdivisiones cubren el todo. **A4**: El número de partes no coincide con el número de cortes. **A5:** Los trozos o partes son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño (congruentes). **A6:** Las partes se pueden considerar como totalidad. **A7:** El todo se conserva. **A8:** Control simbólico de las fracciones, es decir, el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones. **A9:** Las relaciones parte todo en contextos continuos y discretos. **A10:** fracciones mayores que la unidad. **A11:** Subdivisiones equivalentes (Ver anexo 11).

naturaleza C1, obtienen más de 66% sobre C2, adicionalmente vuelven a coincidir todas estas preguntas en R3.

7.1.1.3. Consideraciones desde las pruebas diagnóstica y final relacionadas con la secuencia didáctica. Para este análisis se tiene en cuenta que cada situación didáctica puede relacionarse con todas y cada una de las preguntas realizadas en las pruebas, sin embargo, se han observado características que pueden permitir las siguientes agrupaciones:

Situación didáctica 1: Reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes. Esta situación puede comprender las preguntas PG1, PG10 y PG11. A través de los resultados obtenidos en PG1 y PG11 se puede observar que existe cierto grado de dificultad en el reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes, ya que, los porcentajes de acierto en la prueba diagnóstica difieren de la prueba final en un bajo rango, además, se distingue que en PG10 la dificultad se fortalece, puesto que el porcentaje de aciertos en la prueba diagnóstica es más alto que en la prueba final.

Situación didáctica 2: Construcción del concepto de fracción y fraccionario a través de la relación parte-todo. Para esta situación didáctica se encuentra PG2, PG5 y PG7. Los porcentajes obtenidos en las respuestas correctas en PG2, PG5 y PG7 desde la prueba diagnóstica dan cuenta de que se presenta dificultad en la construcción del concepto de fracción y fraccionario a través de la relación parte-todo, puesto que dichos porcentajes de acierto son bajos; lo contrario ocurre en la prueba final, ya que los porcentajes de acierto arrojados son altos.

Situación didáctica 3: Noción y reconstrucción de la unidad, relaciones de equivalencia. En esta situación didáctica se encuentra PG9. Por medio de los resultados obtenidos en PG9 acerca del bajo porcentaje en aciertos desde la prueba diagnóstica se logran considerar dificultades en la noción y reconstrucción de la unidad, relaciones de equivalencia, y al contrastar con los porcentajes altos en este tipo de respuestas en la prueba final se pueden ver avances importantes.

Situación didáctica 4: Reconstrucción de la unidad, relación aditiva y multiplicativa (todo-parte y parte-todo) en fracciones menores que la unidad. Alrededor de esta situación didáctica se agrupan PG3, PG4, PG8, PG12 y PG13 que al analizar los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica cuyos porcentajes de acierto son bajos, se reconoce que existe dificultad en la relación aditiva entre el todo y sus partes en fracciones menores que la unidad y reconstrucción de la unidad; en cuanto a la prueba final en la cual sus porcentajes de acierto son altos, se logra ver un avance.

Situación didáctica 5: Relación entre el todo y sus partes y sus partes y el todo en fracciones menores que la unidad. En esta pueden encajar PG14 y PG15. Los resultados obtenidos en PG14 y PG15 en la prueba diagnóstica pueden indicar que se presentan dificultades en la relación multiplicativa entre el todo y sus partes, puesto que los porcentajes de acierto en estas preguntas son bajos; a diferencia del porcentaje de aciertos en la prueba final que son altos.

Situación didáctica 6: Tratamiento de la unidad en fracciones mayores que la unidad. Presente en esta situación didáctica se encuentra PG6. De acuerdo a los resultados obtenidos en PG6 acerca del bajo porcentaje de aciertos en la prueba diagnóstica, se considera que hay complicaciones en la formación de la unidad en fracciones mayores que la unidad, lo que contrasta con el porcentaje alto del número de aciertos que emite la prueba final.

7.1.2. Análisis comparativo intrasujeto de las pruebas diagnóstica y final de cada estudio caso. Este análisis contiene inicialmente una gráfica del total de aciertos del estudiante sobre las 15 preguntas de las pruebas diagnóstica (color naranja) y final (color azul).

7.1.2.1. Análisis comparativo intrasujeto de las pruebas diagnóstica y final de EST1.

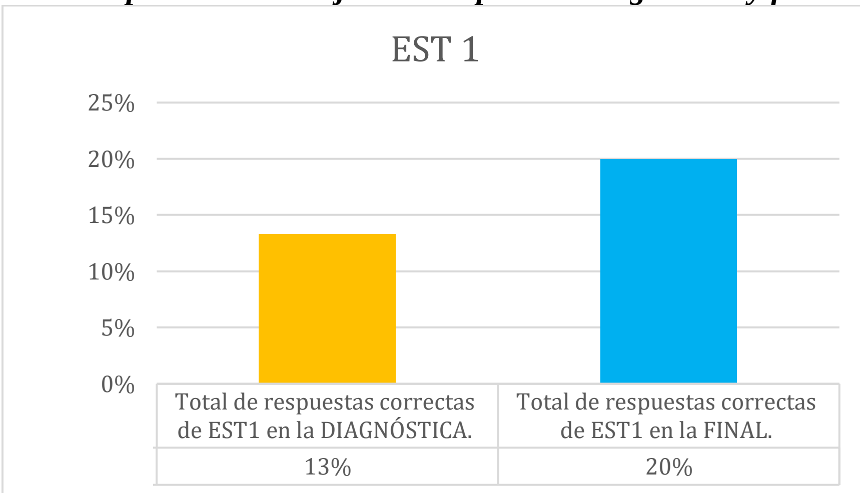


Figura 27. Fuente y elaboración propias

Al observar el total de aciertos en la prueba diagnóstica del estudiante EST1 y compararlos con el número de aciertos obtenidos en su prueba final, puede verse un avance del 7%, lo que significa que en su prueba final tiene una respuesta correcta más.

7.1.2.2. Análisis comparativo intrasujeto de las pruebas diagnóstica y final de EST2.

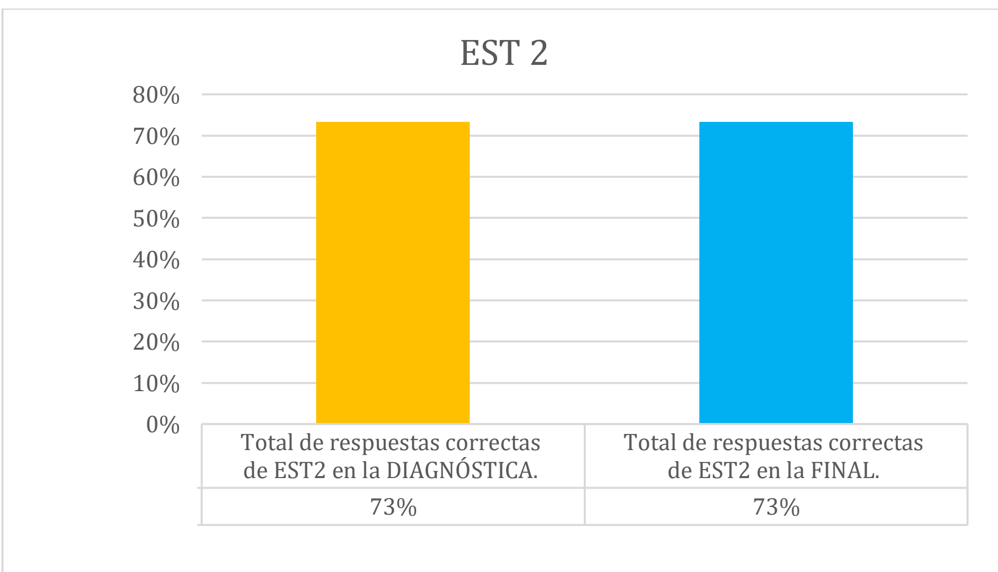


Figura 28. Fuente y elaboración propias

Después de conocer el total de aciertos en la prueba diagnóstica del estudiante EST2 y compararlos con el número de aciertos obtenidos en su prueba final, puede verse que no existe ningún avance ni retroceso en ello, lo cual significa que obtuvo el mismo número de respuestas acertadas en ambas pruebas, siendo este resultado 11 de las 15 preguntas.

7.1.2.3. Análisis comparativo intrasujeto de las pruebas diagnóstica y final de EST3.

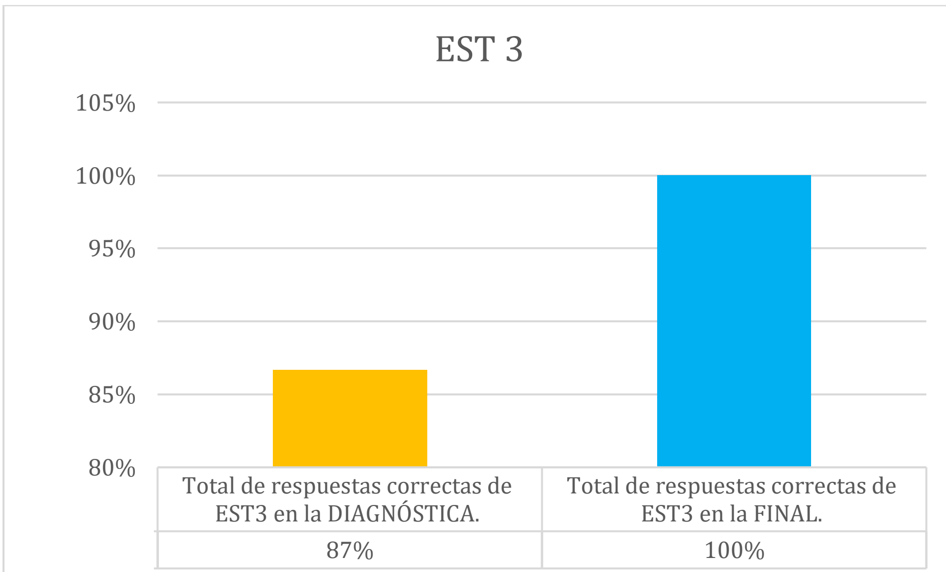


Figura 29. Fuente y elaboración propias

Cuando se examina el total de aciertos en la prueba diagnóstica del estudiante EST3 y compararlos con el número de aciertos obtenidos en su prueba final, puede verse un avance del 13%, lo que significa que en su prueba final tiene dos respuestas correctas más.

7.1.3. Análisis comparativo intra e intersujeto de las pruebas diagnóstica y final de cada estudio caso. En este análisis, que corresponde al **Anexo 15, Anexo 16 y Anexo 17**, se comparan las respuestas obtenidas por cada estudiante estudio de caso frente a las respuestas correctas de la población en la prueba diagnóstica, así mismo se realiza una comparación similar con la prueba final, en donde las respuestas correctas aparecerán de color verde y las incorrectas de color rojo.

7.1.4. Análisis comparativo intersujeto de las pruebas diagnóstica y final de los tres estudiantes de estudio de caso (EST1, EST2 y EST3). Para este análisis tendremos en cuenta las preguntas 6, 7, 9, 10, 13 y 15 en las cuales se han visto particularidades en sus porcentajes, bien sea porque suben considerablemente sus porcentajes de una prueba a otra o porque bajan dichos porcentajes desde la prueba inicial a la prueba final. Para efectos de una mejor lectura las preguntas se organizan en la **Tabla 9,** la cual posee el total de la población subdividido de acuerdo con su respuesta (correcta, incorrecta y no sabe o no responde), las cuales serán denominadas así: C (respuesta correcta), I (respuesta incorrecta) y N (no sabe o no responde).

Tabla 9

Análisis comparativo intersujeto de las pruebas diagnóstica y final

PREGUNTA No.	Cantidad de estudiantes del total de la POBLACIÓN						EST1			EST2			EST3			EST1			EST2			EST3		
	ENTRADA			SALIDA			ENTRADA									SALIDA								
	C	I	N	C	I	N	C	I	N	C	I	N	C	I	N	C	I	N	C	I	N	C	I	N
6	2	26	3	19	10	2		X			X			X			X			X		X		
7	19	10	2	22	8	1		X			X		X			X			X			X		
9	15	12	4	21	8	2		X			X			X		X				X		X		
10	14	15	2	13	17	1	X			X			X			X			X			X		
13	17	8	6	22	6	3		X			X		X				X		X			X		
15	11	8	12	24	4	3		X		X			X				X		X			X		

Fuente: elaboración propia

Pregunta 6

Respuesta correcta: d. Los tres estudiantes estudio de caso en este tipo de pregunta, respondieron incorrectamente en la prueba diagnóstica y solo uno de ellos logró contestar correctamente en la prueba final, mostrando un avance en 1 de 3 estudiantes, que puede denotar cierto manejo en los atributos *A1, A2, A3, A5, A8, A9 y A10* en uno de ellos después del proceso de la secuencia didáctica.

Pregunta 7

Respuesta correcta: b. En este tipo de preguntas, 1 de los 3 estudiantes estudio de caso respondió correctamente en la prueba diagnóstica, pero los tres estudiantes lograron contestar correctamente en la prueba final, mostrando un avance de 3 sobre 3, que puede indicar cierto manejo en los atributos *A2, A6, A7, A8 y A9* en cada uno de ellos después del proceso de la secuencia didáctica.

Pregunta 9

Respuesta correcta: a. Los tres estudiantes estudio de caso en este tipo de pregunta, respondieron incorrectamente en la prueba diagnóstica y solo dos de ellos lograron contestar correctamente en la prueba final, mostrando un avance en 2 de 3 estudiantes, que puede mostrar cierto manejo en los atributos *A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 y A11* en dos de ellos después del proceso de la secuencia didáctica.

Pregunta 10

Respuesta correcta: d. En este tipo de pregunta los tres estudiantes estudio de caso, respondieron correctamente en la prueba diagnóstica y también en la prueba final, mostrando una constante de apropiación en sus conceptos, lo que puede denotar cierto manejo en los atributos *A3, A4, A5, A6, A7, A8 y A9,* en cada uno de ellos después del proceso de la secuencia didáctica.

Pregunta 13

Respuesta correcta: $\frac{4}{12}$ En este tipo de preguntas, 1 de los 3 estudiantes estudio de caso respondió correctamente en la prueba diagnóstica, pero 2 de 3 estudiantes lograron contestar correctamente en la prueba final, mostrando un avance en 1 de 3 estudiantes y una constante de apropiación en sus conceptos en uno de ellos, que puede indicar cierto manejo en los atributos *A6, A8 y A9,* en dos de ellos después del proceso de la secuencia didáctica.

Pregunta 15

Respuesta correcta: El óvalo completo dividido en dos partes. En este tipo de preguntas, 1 de los 3 estudiantes estudio de caso respondió correctamente en la prueba diagnóstica, pero 2 de 3 estudiantes lograron contestar correctamente en la prueba final, mostrando un avance en 1 de 3 estudiantes y una constante de apropiación en sus conceptos en uno de ellos, que puede indicar cierto manejo en los atributos *A3, A5, A6, A7 y A9,* en dos de ellos después del proceso de la secuencia didáctica. Es importante anotar que en estas preguntas los estudiantes no dejaron de responder, ni tampoco su respuesta fue que no hayan entendido.

7.2. Análisis cualitativo

En este análisis, se destaca la importancia de las entrevistas clínico-críticas como insumo principal, y su objetivo consiste en recoger información suficiente para describir y analizar las interpretaciones que los estudiantes hacen de la fracción en su relación como parte-todo, teniendo en cuenta el manejo de los atributos, contextos y registros de representación, todo esto mediado por la competencia comunicativa.

Debido a lo cual, a cada estudiante se le entrevistó después de la prueba diagnóstica por aproximadamente 25 minutos y ya en la secuencia didáctica el tiempo varió de acuerdo con el tema tratado y con el ritmo de cada uno; manteniendo siempre los mismos cuestionamientos sobre los mismos aspectos a los tres estudiantes y considerando los modelos de pregunta contemplados en la ficha técnica de la entrevista clínico crítica ya explicados en la Tabla 8 de la metodología.

En la prueba diagnóstica, las entrevistas fueron transcritas en su totalidad y en las situaciones didácticas, se tuvieron en cuenta los fragmentos de diálogo más importantes. Estas transcripciones se encuentran en los anexos de esta investigación, con sus respectivas codificaciones y convenciones.

Por consiguiente, este análisis corresponde a dos componentes tanto en la prueba diagnóstica como en la secuencia didáctica, considerando los atributos de la fracción, los contextos y registros de representación en forma variada:

Inicialmente se hace un análisis *intrasujeto*, describiendo la forma como cada estudio de caso responde las preguntas en la entrevista y el segundo análisis corresponde a un abordaje de tipo *intersujeto*, donde se detalla y compara la forma como resuelven los tres estudios de caso las actividades que se les propusieron durante las entrevistas semiestructuradas.

Durante este proceso, se registran las interpretaciones que los estudiantes hacen de cada pregunta y su respectiva respuesta, teniendo en cuenta: cómo manifiestan sus ideas, cómo las comunican, cómo manejan los argumentos, cuáles son las dificultades, de qué manera piensan resolver lo propuesto y por qué cambian de opinión, entre otros.

7.2.1. Análisis cualitativo intra e intersujeto de la prueba diagnóstica. En el ***Anexo 18,*** se observan las preguntas con sus respuestas en relación con las categorías de análisis. En cada pregunta se contemplan algunos atributos (A= Atributo) que permiten revisar las interpretaciones del estudiante. También se tiene en cuenta el contexto utilizado (C= Contexto) y el tipo de representaciones (R= Representación) implícitas en cada pregunta, teniendo en cuenta las respectivas convenciones.

Al final del ***Anexo 18***, se observa la cantidad de respuestas correctas por estudiante y las observaciones iniciales frente a la experiencia obtenida a través de las entrevistas semiestructuradas. En la Tabla 10, se resumen algunos resultados:

Tabla 10
Análisis cualitativo intra e intersujeto de la prueba diagnóstica

EST1	**EST2**	**EST3**
Respuestas correctas: 3	**Respuestas correctas: 10**	**Respuestas correctas: 13**
Observación: se destaca que en aquellas preguntas que EST1 no respondió, no entendía el enunciado o la situación, después de la explicación de PA, lograba entender y emitir una posible respuesta. Por lo cual, se hace evidente la importancia de la comunicación y aclaración, como también la transposición didáctica efectuada por PA.	**Observación:** Aquellas respuestas que EST2 marcó como incorrectas o no respondió, corresponden a que no entendía el enunciado o la situación y después de la explicación de PA, lograba entender y emitir una posible respuesta. Por lo cual, se hace evidente la importancia de la comunicación y aclaración, como también la transposición didáctica efectuada por PA.	**Observación:** Al preguntar a EST3 sobre la dificultad de las preguntas de la prueba, identifica la pregunta que requiere manejo de la fracción mayor que la unidad (impropia) y la pregunta que se identifica con P2, donde las partes se juzgan más por su forma visual que por su cantidad de magnitud.

Nota: las transcripciones que soportan esta tabla se encuentran en el ***Anexo 11.*** *Transcripción prueba diagnóstica.*

.

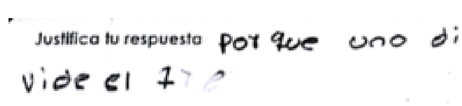
Así mismo, al confrontar las respuestas registradas durante las entrevistas clínico-críticas, de los tres estudios, frente a la prueba, se encuentra que las preguntas que concuerdan con mayor nivel de dificultad para los tres estudiantes son las: 6, 7, 9, 10, 13 y 15. Las transcripciones de las entrevistas correspondientes se encuentran en el **Anexo 11.** Como ejemplo se muestra lo correspondiente a EST1 (estudiante de nivel bajo), para la pregunta número 6:

<table>
<tr>
<td>Atributos referidos: A9, A10
Contexto: C1
Registros: R2, R3, R4
Problemática: P2, P5
Respuesta: incorrecta</td>
<td rowspan="2">Pregunta seis

PA: listo, en el sexto punto nos dicen: si tenemos esto, mira, supón que esto es una panela, ¿a ti te gusta la panela?
EST1: si señora
PA: ¿listo, entonces supón que tienes una panela y la partiste en cuántas partes?
EST1: cuatro
PA: listo, aquí hay otra panela, ¿en cuántas partes la repartiste?
EST1: 3
PA: ¿seguro que en 3? Mira, cuántas?
EST: cuatro
PA: ¡¡¡listo!! Cuatro. Aquí hay 4 pedazos, aquí hay 4 pedazos. ¿cuántas panelas hay?
EST1: dos
PA: ¿dos panelas, cada una repartida en cuántos pedazos?
EST1: cuatro
PA: Listo, ¿si esta es la panela, te preguntan: eee... que...¿esto a qué equivale?, según tú, ¿dime a qué equivale la parte sombreada?..lo oscurito, lo negrito...¿a cuántas partes de la panela equivale?
EST1: ¿a las cuatro partes mismas?
PA: muéstrame en ¿dónde equivale a 4 partes?
EST1:pues....lo rayo a la mitad
PA: ¿listo, pero resulta que me estás hablando de una sola panela y arriba cuántas tienes?
EST1: dos
PA: listo, entonces se te desapareció una panela...si tú tuvieras que decir o representar ¿qué sucedió acá, qué se te ocurre que sucedió acá, sabiendo que una panela está dividida en 4 partes, tú lo acabas de decir y aquí aparece otra panela, dividida en 4 partes...te preguntan que ¿qué sucedió acá respecto a una panela entera?...¿qué se te ocurre que sucedió ahí?.. que ¿qué hicieron con las panelas?
EST: sacaron 2 panelas y las repartieron ...eee...cada una la repartieron en 4 pedazos.
PA: perfecto!...y después ¿qué hicieron? ¿cuántos pedazos se comieron?
EST1: uno
PA: ¿seguro? Cuál se comieron?
EST1: este
PA: ¿se comieron sólo ese?
PA: ...e...pasemos, ¿tú qué escribiste ahí como respuesta?..lee
EST1: e..porque uno divide el 7
PA: ¿cuál fue la que escogiste?
EST1: yo escogí...e...
PA: mira en la hoja de respuestas...
EST1: ¿cuál es esa?..la quinta, la sexta...la a
PA: a donde tienes el puntico, tu dijiste que siete octavos porque uno divide el 7, ¿o sea tú dices que este 7 lo divides entre cuánto?
EST1: entre 8
PA: ¿por qué?
EST1: porque...e...lo divido así como hice con la respuesta anterior que fue la primera.</td>
</tr>
<tr>
<td>Inicialmente, EST1 desconoce A10 ya que sólo reconoce la existencia de una unidad, lo que hace difícil llegar al concepto de fracción impropia (P5), adicionalmente, en el diálogo sombreado se observa la dificultad de EST1 para aceptar que la unidad está constituida por más de una panela.

Para A9, aunque el enunciado se refiere a la parte sombreada, EST1 insiste en nombrar la parte no sombreada, lo cual corresponde a P2.

EST1 toma la cantidad de partes sombreadas como numerador y la cantidad de divisiones como denominador, interpretando la situación como un cociente y procede a realizar la división reflejando una apropiación errada del algoritmo de la división.


</td>
</tr>
</table>

También en el **Anexo 11**, se encuentran las transcripciones y análisis cualitativo de las otras preguntas que fueron registradas con mayor dificultad en la prueba diagnóstica, permitiendo así, relacionar en la **Tabla 11**, las dificultades detectadas en esta primera fase diagnóstica, en términos de atributos, contextos y registros de representación:

Tabla 11

Dificultades detectadas en la prueba diagnóstica

Pregunta	Atributos	Contextos	Registros	Problemática
6	A9, A10	C1	R2, R3, R4	P5
7	A2, A5, A8, A9	C1	R2, R3	P1
9	A5, A11	C1	R2, R4	P2
10	A8, A9	C1	R2, R3, R4	P2
13	A6, A9	C2	R2, R3, R4	P4
15	A1, A6, A7	C1	R2, R4	P4

Fuente: elaboración propia

Nota: para ver la descripción de cada categoría, remitirse a las convenciones del Anexo 11

7.2.2. Análisis cuantitativo versus análisis cualitativo de la prueba diagnóstica. En esta parte, se confrontan los resultados del análisis cuantitativo con los del cualitativo, encontrando que coinciden en las preguntas en las que los estudiantes presentaron dificultad para dar respuesta en la prueba diagnóstica. Estas preguntas se relacionan en la **Tabla 12** y a su vez, se vinculan con las problemáticas detectadas por Poveda (s. f.), ya enunciadas en el marco teórico:

Tabla 12

Análisis cuantitativo versus análisis cualitativo de la prueba diagnóstica

Porcentaje de dificultad de la totalidad de la población en el análisis cuantitativo	Preguntas con dificultad análisis cualitativo estudios de caso	Problemática
94%	6	P5
39%	7	P1
52%	9	P2
55%	10	P2
45%	13	P4
65%	15	P4

Nota: El porcentaje de dificultad corresponde al porcentaje de estudiantes de la totalidad de la población que presentaron dificultad al responder la pregunta correspondiente. *Fuente:* elaboración propia.

Luego, se observa que los niveles de dificultad registrados en los resultados del análisis cuantitativo, de la prueba diagnóstica de la totalidad de la población, coinciden con las dificultades encontradas bajo el análisis cualitativo, aplicado a la misma prueba.

7.2.3. Análisis cualitativo de la secuencia didáctica. Se diseñaron seis situaciones didácticas descritas detalladamente en el ***Anexo 9,*** que permitieron explorar sobre el manejo de los atributos, los contextos, las representaciones, y a su vez, detectar las problemáticas en el manejo de la fracción como relación parte-todo. Sus descripciones son:

- reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes;
- construcción del concepto de fracción y fraccionario a través de la relación parte-todo;
- noción y reconstrucción de la unidad, relaciones de equivalencia y relación multiplicativa de la fracción;
- Reconstrucción de la unidad, relación aditiva y multiplicativa (todo-parte y parte-todo) en fracciones menores que la unidad;
- Relación entre el todo y sus partes y sus partes y el todo en fracciones menores que la unidad;
- Tratamiento de la unidad en fracciones mayores que la unidad.

A continuación, se presenta el análisis de los resultados obtenidos en cada una de ellas:

7.2.4. Análisis cualitativo de la secuencia didáctica. Este análisis se establece a través de las respuestas obtenidas en las entrevistas clínico-críticas que se hicieron a los tres estudios de caso, luego de cada una de las situaciones didácticas aplicadas.

Para este análisis, se transcribieron en su totalidad las entrevistas hechas a los estudiantes objeto de estudio EST1, EST2 y EST3. Según las respuestas obtenidas por cada uno de ellos y a la luz de las categorías de análisis, se analizó cada respuesta, relacionándola con el o los atributos (A) trabajados, los contextos (C), las representaciones o registros de representación (R) y las problemáticas en el tratamiento de la fracción (P).

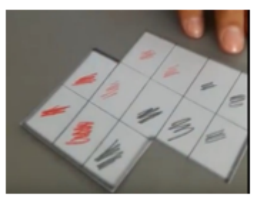
Las respuestas obtenidas por los estudiantes ante una pregunta determinada se analizaron a la luz de las cuatro categorías definidas en el marco teórico.

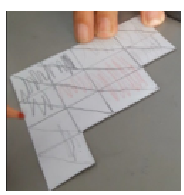
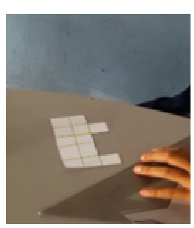
Por lo anterior, se establecieron los correspondientes análisis que aparecen al final de la enunciación de cada uno de los siguientes numerales:

7.2.4.1. ***Análisis cualitativo de la situación didáctica 1 (intra e intersujeto).*** *Reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes*: en el desarrollo de esta sesión, se propuso inicialmente, dividir la unidad entregada en un número de partes de igual forma y cantidad de magnitud y en un segundo momento, se enfatiza que hay varias formas de dividir una superficie y puede darse el caso que las partes tengan la misma cantidad de magnitud (área), pero no necesariamente tienen la misma forma.

En el ***Anexo 19,*** se observa el análisis *intrasujeto* correspondiente a cada estudio de caso. Para este análisis, se adjuntan fragmentos de la entrevista correspondiente a la situación didáctica planteada:

A EST1, le cuesta entender que a pesar de que las subdivisiones son equivalentes (A11), no son congruentes en su forma (P3).	 EST1: ya profe! PA: ¿los tres pedazos de terreno quedaron de la misma forma? EST1: no señora! PA: ¿pero son iguales? EST1: eee.si señoraaa… PA: ¿tú me garantizas que al que le tocó el pesado verde y al que le tocó el pedazo café, junto con el del pedazo naranja, van a estar contentos porque les tocó la misma parte? EST1: no señora… PA: ¿por qué? EST1: porque el naranja está más grande! PA: seguro?..pero si tú dijiste que les había tocado el mismo número de cuadritos!..si tú cuentas, revisa, parece que a todos les tocó de a cuatro cuadritos… EST1: (se rasca la cabeza)..si señora..igual… PA: ¿a qué se deberá que tengas confusión?...¿a qué se debe que dos partes quedaron en forma de cuadrado y la otra no? EST1: porque la parte naranja es como diferente a las demás?

EST2, elige una unidad de mediana dificultad para hacer las divisiones solicitadas, mostrando buen manejo de A11.	 PA: ¿por qué quisiste dividir esa unidad? EST2: porque me pareció chévere y vi las formas que se podían armar desde el inicio.
EST2 logra hacer las subdivisiones correctas, para proceder al reparto, relacionando su actividad con A11.	 PA: Cuéntame, ¿cómo dividiste el terreno? EST2: tracé cuadros por la hoja de igual tamaño, midiendo bien, de lado a lado y de esquina a esquina…después los conté y dividí PA: y esas divisiones ¿qué significan? EST2: ….que vamos con cuatro cuadritos hasta que todo el cuadro quede lleno.

Aunque en el trazo solicitado, EST3 no cumple con A5 para este ejercicio, se evidencia buen manejo de A2, A3, A6, A7, A11.	 PA: con esa división hecha, quedan bien los hermanos herederos del terreno? EST3: si! PA: antes de hacer los trazos de los triángulos que hiciste, ¿se te hubiera ocurrido cómo dividir el terreno? EST3: no mucho
EST3 logra hacer las subdivisiones correctas, para proceder al reparto, relacionando su actividad con A11.	 PA: ¿por qué los cuadritos no están iguales? EST3: porque los tracé mal! PA: por qué no mediste? EST3….. PA: bueno, vamos a suponer que están iguales!...divide ese terreno entre tres hermanos..¿de a cuántos pedazos le toca a cada uno? EST3: de a tres! PA: colorea, para ver qué es lo que dices!

La **Tabla 13** muestra el resultado a nivel *intersujeto* para la situación didáctica de ***Reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes:***

Tabla 13

Análisis cualitativo de la situación didáctica 1-Intersujeto

EST1-E2	EST2-E2	EST3-E2
Cuando hay simetría en la unidad y cuando la cantidad de subdivisiones solicitada es mínima, EST1, presenta relativa facilidad en el manejo de los atributos de la fracción en contexto continuo (A1, A2, A5, A9). Al aumentar el nivel de dificultad de la forma de la unidad o la cantidad de subdivisiones solicitadas, no puede realizar lo propuesto. A EST1, se le dificulta comprender que, al dividir una superficie, se obtienen subregiones iguales en área sin importar la forma.	EST2, comprende que, al dividir una superficie, se obtienen subregiones iguales en área sin importar la forma. EST2, presenta facilidad en el manejo de los atributos de la fracción en contexto continuo (A1, A3, A6, A9, A11), cuando hay asimetría en la unidad y las subdivisiones solicitadas aumentan, se observa dificultad media y requiere de acompañamiento para la resolución.	EST3 comprende que, al dividir una superficie, se obtienen subregiones iguales en área sin importar la forma. En contexto continuo, EST3, presenta facilidad en el manejo de los atributos de la fracción (A1, A3, A6, A9, A11), cuando hay asimetría en la unidad presenta cierta dificultad para dividirla, y eventualmente, requiere de acompañamiento para la resolución.

Observación**:** se observa que EST1 hace un reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes mientras no se aumente la asimetría y subdivisiones de la superficie propuesta. Mientras que EST2, muestra mayor manejo de los atributos, pero cuando se aumentan las subdivisiones, presenta dificultad para resolver la situación planteada y requiere de acompañamiento para resolverla. Por el contrario, a EST3, se le facilita el reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes, entendiendo que al dividir una superficie, se obtienen subregiones iguales en área sin importar la forma.

Fuente: elaboración propia.

7.2.4.2. *Análisis cualitativo de la situación didáctica 2 (intra e intersujeto).* *Construcción del concepto de fracción y fraccionario a través de la relación parte-todo:* En esta sesión, se comienza el proceso de construcción del concepto de fracción y número fraccionario mediante la relación parte-todo, inicialmente manejada en conjuntos continuos. Se elige una región que será considerada como unidad, la cual podrá siempre dividirse en un número de partes de igual tamaño, tantas como sean necesarias, estas restituyen el todo. A su vez, cada una, en algún momento, puede ser considerada como un todo. En esta sesión se trabajan los atributos citados por Llinares (1997):

-Las subdivisiones cubren el todo; las partes tienen que ser del mismo tamaño (congruentes); subdivisiones equivalentes y manejo de los símbolos relacionados a las fracciones.

En el ***Anexo 20,*** se observa el análisis *intrasujeto* correspondiente a cada estudio de caso. Para este análisis, se adjuntan fragmentos de la entrevista correspondiente a la situación didáctica planteada:

EST1, hace reconocimiento A1, A5, A6 y logra establecer la relación entre las divisiones del todo y su representación R3. Para A8, establece adecuadamente la relación.	 PA: ¿en cuántas Partes quedó dividida la unidad? EST1: en dos PA: ¿cuántas coloreaste? EST1: una PA: si necesitas representar lo coloreado con una fracción, ¿cómo lo harías? EST!: un medio? PA:listo!, ¿qué significa el dos? EST1: que hay dos Partes! PA: ¿el uno? EST1: que coloree una parte.  PA: ¿en cuántas Partes quedó dividida la unidad? EST1: en cuatro Partes! PA: si te dicen: representa numéricamente la Parte que está de azul, ¿qué escribes?? EST1: …(pensativo) PA: en cuántas Partes está dividida la hoja? EST1: en cuatro! PA:Te dicen que por favor representes las Partes que están de azul EST1:coloreada de azul hay una! PA: cómo quedaría la representación de la fracción? EST1: un cuarto PA: un cuarto! Excelente!...y lo morado? Si lo tienes que escribir como fracción?

EST2, entiende la relación de A1, A2, A5, A7 y también establece la equivalencia entre partes (A11). Aunque EST2 contesta lo solicitado correctamente, sus dudas constantes hacen prever relación con P3. Para A8, establece adecuadamente la relación.	EST2: no PA: ¿por qué? EST2: porque ocupan el mismo espacio?  PA: ahora que la hoja está con más dobleces, cuántas partes tienes? EST2: ocho PA: si hay ocho, ¿lo azul a qué fracción corresponde? EST2: dos octavos! PA: ¿la parte roja a qué fracción corresponde? EST2: cuatro sextos? PA: ¿estás seguro? EST2: cuatro octavos? PA: ¿las tres fracciones que has escrito son diferentes?  EST2: si! PA: ¿por qué? EST2: las escribí diferente! PA: pero tú tienes escrito que son iguales! EST2: ah sí! PA: entonces puedo escribir que un medio es equivalente o igual a dos cuartos? EST2: si PA: puedes decir que un medio es igual o equivalente a cuatro octavos? EST2: si PA: y dos cuartos es equivalente a cuatro octavos? EST2: si PA: hubo cambios en la unidad que coloreaste? EST2: no, es la misma!

Cuando se han hecho más subdivisiones, EST3 demuestra dominio de la relación parte-todo expresada a través de A2, A5, A6, A8 y A11.	 PA: me estás diciendo que cuando la hoja estaba dividida en dos, lo azul era un medio, ahora que la unidad está dividida en ocho Partes, a qué equivale lo azul? EST3: cuatro octavos PA: ¿yo podría decir que un medio es igual a cuatro octavos? EST3: si señora! PA: ¿por qué? EST3: porque primero era un medio y cuando doble más ahora es cuatro partes de toda la hoja, solo que más dividido PA: ¿puedes decir que un medio es igual o equivalente a cuatro octavos? EST1: si señora!  PA: se puede decir que un medio es equivalente o igual a dos cuartos? EST3: si PA: puedes decir que un medio es igual o equivalente a cuatro octavos? EST3: si PA: y dos cuartos es equivalente a cuatro octavos? EST3: si PA: ¿por qué? EST3: porque al inicio había dos partes y luego cuando doble y doble fueron a pareciendo más partes pero no vi cambios en la hoja que coloree, sólo que se dividió más.

La **Tabla 14** muestra el resultado a nivel *intersujeto* para la situación didáctica de ***Construcción del concepto de fracción y fraccionario a través de la relación parte-todo:***

Tabla 14

Análisis cualitativo de la situación didáctica 2-Intersujeto

EST1-E3	EST2-E3	EST3-E3
EST1, reconoce el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones. A medida que la unidad se subdivide en más partes, EST1 establece el reconocimiento de las partes (P4) y la relación de equivalencia de ellas frente al todo (A11, P3), en forma básica. EST1 presenta dificultad para entender la manera en que una parte puede asumirse como una nueva unidad para establecer una nueva relación parte-todo.	EST2 maneja adecuadamente los atributos de la fracción referentes al reconocimiento de la unidad, en su relación parte-todo (A1, A2, A5, A7). De igual manera, para A8 observa buen manejo. Se observa relativa dificultad para establecer el reconocimiento de las partes y la relación de equivalencia entre ellas y el todo (A11, P3). EST2, entiende la manera en que una parte puede asumirse como una nueva unidad para establecer una nueva relación parte-todo.	EST3 evidencia dominio del manejo de la relación parte-todo tanto en el manejo de los atributos (A2, A5, A6, A8 y A11), contexto C1 y registros de representación R1, R2, R3. EST3, trabaja la relatividad de la unidad y de las partes, como también la reconstrucción de la unidad a partir de las partes. De igual manera, entiende que una parte puede asumirse como una nueva unidad para establecer una nueva relación parte-todo.

Observación: EST2 y EST3, manejan adecuadamente los atributos de la fracción referentes al reconocimiento de la unidad, en su relación parte-todo. Entienden la manera en que una parte puede asumirse como una nueva unidad, para establecer una nueva relación parte-todo. Trabajan la relatividad de la unidad y de las partes, como también la reconstrucción de la unidad a partir de las partes. EST1, reconoce el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones.

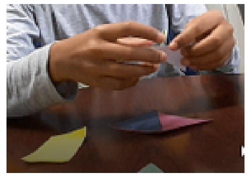
Fuente: elaboración propia.

7.2.4.3. ***Análisis cualitativo de la situación didáctica 3 (intra e intersujeto).*** *Noción y reconstrucción de la unidad, relaciones de equivalencia y relación multiplicativa de la fracción:* lo que se busca con la actividad del tangram es reflexionar sobre la equivalencia y darse cuenta de que un triángulo puede ser equivalente a un cuadrado mediante el concepto de área. También, manejar la equivalencia entre dos figuras rompiendo la idea de que son equivalentes si son la misma figura con las mismas dimensiones.

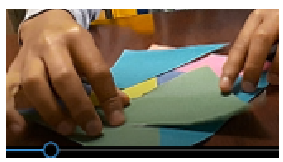
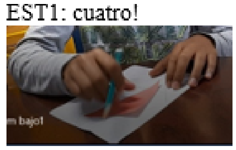
En el ***Anexo 21,*** se observa el análisis *intrasujeto* correspondiente a cada estudio de caso. Para este análisis, se adjuntan fragmentos de la entrevista correspondiente a la situación didáctica planteada:

<table>
<tr>
<td>EST1, entiende que hay una relación entre las partes que conforman la unidad llamada tangram (A1, A2), también identifica que con algunas partes puede conformar otras, pero no identifica la equivalencia por área sino por forma (P3)

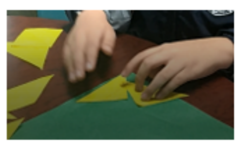
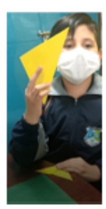
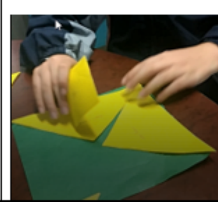
Cuando las equivalencias son ocasionadas por subdivisiones grandes de la unidad, EST1, logra identificar la formación de unas partes con las otras (A1, A2, A3).</td>
<td>EST1: porque son las mismas fichas?


PA: ¿el cuadrado y el paralelogramo son iguales en su forma?
EST1: no señora!
PA: ¿en qué son iguales?
EST1:¿en las mismas fichas?
PA: hablamos que el paralelogramo tiene un área y el cuadrado tiene otra área…¿tú me dices que el cuadrado y el paralelogramo no son iguales en forma, pero que los triángulos pequeños forman un área que se hace igual al cuadrado y al paralelogramo?
EST1: si señora!

PA: ¿por qué, comprueba…?
EST1: los dos triángulos son iguales al paralelogramo…
PA: y el área de los dos triángulos es igual a la del cuadrado?
EST1: si señora!
PA: entonces cuál es la diferencia del cuadrado y el paralelogramo?
EST1: en la forma?


PA: los dos triángulos grandes a qué equivalen respecto a la unidad?
EST1: a dos partes?
PA: explícate mejor!
EST1: que es la mitad de la hoja?
PA: cuántos triángulos grandes se necesitan para formar la unidad?
EST1: …uno
PA: con uno solo ya formas la unidad?...¿cuántos de esos necesitas para cubrir toda la unidad?
EST1: otros dos más!
PA: ¿en total cuántos?
EST1: cuatro!

PA: ¿con varios triángulos medianos puedes formar la unidad?
EST1: ..(utiliza el triángulo mediano para medir y trazar…traza mal)…</td>
</tr>
</table>

Atributo referido: A1, A2, **Contexto:** C1 **Registros:** R1, R2 **Problemática:** P3 *EST2, entiende que hay una relación entre las partes que conforman la unidad llamada tangram (A1, A2), también identifica que con algunas partes puede conformar otras.* *Cuando se le solicita reconstruir la unidad (tangram) a partir de una parte más pequeña, no lo logra. Se evidencia así, relación con P3.*	 PA:¿Qué parte del tangram, es cada una de las fichas? EST2: una de siete? PA: ¿qué haces para formar el paralelogramo? EST2: con los dos triángulos pequeños  PA: si quisiéramos formar el tangram con una solo ficha, es posible? Est1: con cuatro triángulos grandes! PA: compruébalo! Est1: estas dos y dos más!  PA:Hay otra ficha con la que se pueda armar el tangram? EST2: con nueve cuadrados! PA: entonces el cuadrado a qué corresponde comparado con el tangram? EST2: uno de nueve? PA: como fracción: un noveno?  PA: el triángulo pequeño a qué parte corresponde? EST2: …(mide y traza con el triángulo pequeño)…uno de dieciocho? PA: o sea… EST2: un dieciochoavo! PA: ¿seguro? EST2: …(piensa)….

EST3, entiende que hay una relación entre las partes que conforman la unidad llamada tangram (A1, A2, A3), también identifica que con algunas partes puede conformar otras. *Cuando se le solicita reconstruir la unidad (tangram) a partir de otra parte, lo logra fácilmente. (A11).* *EST3, demuestra manejo de la relación multiplicativa de la fracción.*	 PA: ¿cuántos triángulos grandes necesitas para formar la unidad o el tangram armado? EST3: se necesitan dos más adicional a estas! O sea cuatro!  PA: ¿qué otra ficha diferente me serviría? EST3: el triángulo pequeño! PA: muéstrame! EST3: (toma en la mano el triángulo grande, hace cuentas y dice…) dieciséis!  PA: ¿cómo hiciste eso? EST3: porque si de estas se necesitan cuatro, entonces cuatro triángulos de los pequeños forman el grande y como son cuatro grandes…cuatro por cuatro—66ieciséis!  A: ¿ y qué pasa con el cuadrado? EST3: (EST3: mide el cuadrado dentro de la unidad)…sólo ocho! PA: ¿sólo ocho? EST3: ¿estás seguro?

La **Tabla 15** muestra el resultado a nivel *intersujeto* para la situación didáctica de ***Noción y reconstrucción de la unidad, relaciones de equivalencia y relación multiplicativa de la fracción:***

Tabla 15

Análisis cualitativo de la situación didáctica 3-Intersujeto

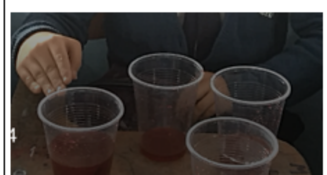
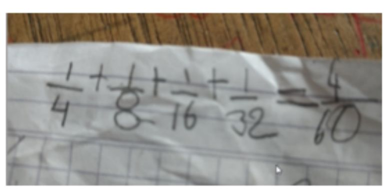
EST1-E4	**EST2-E4**	**EST3-E4**
EST1, establece relaciones de equivalencia entre las piezas del tangram mediante la sobreposición de fichas y ocasionalmente consigue establecer relaciones de equivalencia entre algunas piezas del tangram con el fin de hallar figuras equivalentes, pero por su forma (A11). Se evidencia P3.	EST2, establece relaciones de equivalencia entre las piezas del tangram inicialmente mediante la sobreposición de fichas. De igual manera, establece relaciones de equivalencia entre las piezas del tangram con el fin de hallar figuras equivalentes en área, pero no en forma (A11); y eventualmente, evidencia que se pueden encontrar piezas del tangram equivalente sin ser estas congruentes (P3).	EST3, establece relaciones de equivalencia entre las piezas del tangram inicialmente mediante la sobreposición de fichas. Además, establece relaciones de equivalencia entre las piezas del tangram con el fin de hallar figuras equivalentes en área, pero no en forma (A11). También logra evidenciar que se pueden encontrar piezas del tangram equivalente sin ser estas congruentes y que la fracción es una relación cuantitativa entre dos cantidades de magnitud -la parte y el todo.

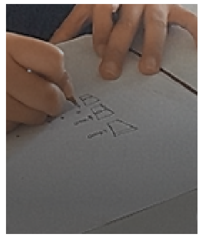
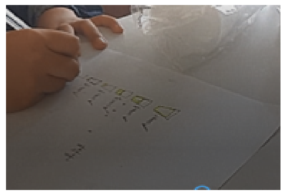
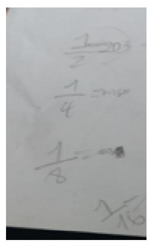
***Observación*:** se observa que los estudiantes establecen relaciones de equivalencia, inicialmente mediante la sobreposición de las fichas. Así mismo, eventualmente establecen relaciones de equivalencia entre las partes sin ser estas congruentes o por su forma. Excepcionalmente, el sujeto EST3, logra establecer que la fracción es una relación cuantitativa de tipo multiplicativo, entre dos cantidades de magnitud “la parte y el todo”.

Fuente: elaboración propia.

7.2.4.4. *Análisis cualitativo de la situación didáctica 4.* *Reconstrucción de la unidad, relación aditiva y multiplicativa (todo-parte y parte-todo) en fracciones menores que la unidad:* se manejan relaciones cuantitativas de tipo aditivo entre las partes y el todo para reconstruir parte de la unidad o la unidad en sí. En el ***Anexo 22***, se observa el análisis intrasujeto correspondiente a cada estudio de caso. Para este análisis, se adjuntan fragmentos de la entrevista correspondiente a la situación didáctica planteada:

Atributos referidos: A1, A2, A3 **Contexto:** C1 **Registros:** R1, R2 **Problemática:** P4 *EST1 no establece la relación entre el R1 y el R2 porque cuando se le indaga por las representaciones de la fracción ante la situación planteada, no logra hacerlo (P4). De igual manera, no logra manejar las subdivisiones correspondientes (A6)*	PA: EST1, explícame cómo hiciste estas divisiones de líquido?  EST1: cogí un vaso de refresco y lo divide por la mitad y luego por otra mitad y así… PA: ¡me puedes decir a qué corresponde cada una de esas mitades, es decir, qué fracción es cada una de ellas? EST1: ….(no habla) PA: el vaso completo a qué corresponde? EST1: a uno? PA: o sea la unidad? EST1: si! PA: ahora el que dividiste a la mitad, si yo lo quiero expresar como fracción cómo queda? EST1: un medio? PA: bien! Y ahora la mitad de ese medio, a qué corresponde? EST1: …otro medio? PA: pero cómo le llamamos al medio del medio? EST1: ….(no responde)

Atributo referido: A1, A3, A6, A7, A8, A9 **Contexto:** C1 **Registros:** R1, R2, R3 **Problemática:** *EST2, maneja relaciones cuantitativas de tipo aditivo entre las partes y el todo para reconstruir parte de la unidad o la unidad en sí (A1, A3, A6, A7, A8, A9). Cuando se le solicita hacer la comprobación, no maneja el algoritmo adecuadamente.*	 PA: EST2, por favor explícame qué fue lo que hiciste con el líquido? EST2: tomé el vaso lleno y lo comencé a dividir por mitades! PA: ¿por mitades? ¿cómo así? EST2: sí, cogí el completo… PA: o sea la unidad? EST2: si señora (sonríe)…tomé la unidad y le saqué la mitad en el otro vaso, luego a esa mitad le saqué otra mitad y a esa mitad otra mitad! PA: por favor me dices esa primera mitad a qué fracción corresponde? EST2: a un medio? PA: si…y la mitad de la mitad? EST2: a un cuarto? PA: si….y la mitad del cuarto? EST2:….(piensa)…a un octavo? PA: si! Muy bien!... y la mitad del octavo? EST2: un dieciseisavo! PA: y si yo te dijera que la mitad del dieciseisavo a qué corresponde? EST2: a un treinta y dos avo? PA: muy bien!..ahora si yo quisiera armar con las divisiones que tengo la unidad o vaso original, qué hago? EST2: los sumo todos!  PA: ahora qué debo hacer para formar medio vaso? EST2: sumo un dieciseisavo, un cuarto, un octavo y un treinta y dos avo! PA: estás seguro?...revisa EST2: (suma y no le cuadran las cuentas)

EST3, conoce la relación cuantitativa de tipo aditivo entre el todo y sus partes. Además, reconstruye parte de la unidad utilizando otras subdivisiones y reconstruye la unidad utilizando partes de ella (A1, A3, A6, A7, A8, A9). De igual manera, hace un adecuado manejo de los registros R1, R2, R3 y R4.	 EST3: (hace dibujos…) PA: ve hablando para que yo sepa qué es lo que estás pensando, por favor! EST3: este es el vaso completo y el otro representa la mitad, o sea un medio del vaso! PA: y luego la mitad de ese medio vaso a qué corresponde? EST3: a un cuarto del vaso! PA: y si quiero la mitad de ese cuarto de vaso? EST3: sería un octavo del vaso! PA: y la mitad de ese octavo? EST3: un dieciseisavo!  PA: bien¡ Ahora dime ¿cuál de estas medidas tiene mayor cantidad de agua? EST3: ésta, la del vaso completo! PA: ¿y cuál tiene menor cantidad? EST3: la del dieciseisavo! PA: si yo te dijera que unas matemáticamente lo que acabas de dividir, cómo queda? EST3: (comienza a sumar los resultados…)  PA: Est3, si yo quisiera formar medio vaso con las divisiones que tengo, cómo sería? EST3: …(piensa) …con dos vasos de un cuarto! PA: muy bien!

La **Tabla 16** muestra el resultado a nivel *intersujeto* para la situación didáctica de ***Reconstrucción de la unidad, relación aditiva y multiplicativa (todo-parte y parte-todo) en fracciones menores que la unidad:***

Tabla 16

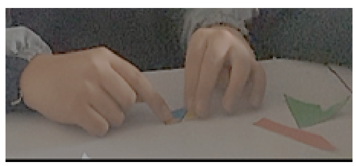
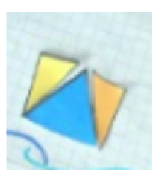
Análisis cualitativo de la situación didáctica 4-Intersujeto

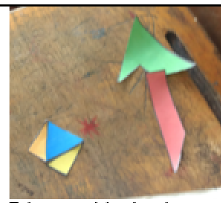
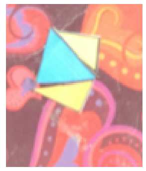
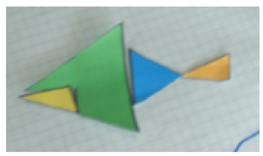
EST1-E5	EST2-E5	EST3-E5
EST1, no maneja relaciones cuantitativas de tipo aditivo entre las partes y el todo para reconstruir parte de la unidad o la unidad en sí (A6, P4).	EST2, conoce la relación cuantitativa de tipo aditivo entre el todo y sus partes. Además, puede reconstruir parte de la unidad utilizando otras subdivisiones (A1, A3, A6, A7, A8, A9).	EST3, conoce la relación cuantitativa de tipo aditivo entre el todo y sus partes. Además, reconstruye parte de la unidad utilizando otras subdivisiones y reconstruye la unidad utilizando partes de ella (A1, A3, A6, A7, A8, A9). Logra establecer que la fracción es una relación multiplicativa. De igual manera, hace un adecuado

	manejo de los registros R1, R2, R3 y R4.
Observación: se observa que EST2 y EST3, manejan relaciones cuantitativas de tipo aditivo entre las partes y el todo para reconstruir parte de la unidad o la unidad en sí. Excepcionalmente, el sujeto EST3, logra establecer que la fracción es una relación multiplicativa.	

Fuente: elaboración propia.

7.2.4.5. *Análisis cualitativo de la situación didáctica 5.* *Relación entre el todo y sus partes y sus partes y el todo en fracciones menores que la unidad:* se trata de la relación cuantitativa del todo y sus partes, donde se establece una la relación entre ellas desde el todo y sus partes y en sentido contrario. En el ***Anexo 24,*** se observa el análisis *intrasujeto* correspondiente a cada estudio de caso. Para este análisis, se adjuntan fragmentos de la entrevista correspondiente a la situación didáctica planteada:

Atributos referidos: A3, A6, A7, A8, A9 **Contexto:** C1 **Registros:** R1, R2 **Problemática:** P4	 PA: EST1: ¿explícame en qué consiste esta actividad? EST1: ¿en armar las figuras? PA: ¿si, pero primero dime cada figura qué fracción representa frente al tangram total? EST1: …(piensa mucho)…uno de cinco? PA: ¿en fracción? EST1: un quinto? PA: si, ahora por favor arma la F del tangram! EST1: …(le cuesta trabajo armarlo)
A EST1, le cuesta reconocer que la relación cuantitativa se puede dar en dos sentidos, entre el todo y sus partes y la parte con su todo (A3, A6, A7, A8, A9).	 PA: ahora por favor arma la figura uno! EST1: listo! PA: esa figura a qué fracción corresponde respecto del tangram F? EST1: … PA: cuántas partes del tangram componen ese cuadrado? EST1: tres PA: entonces, ¿a qué fracción corresponde la figura uno respecto del tangram? EST1: no sé.

Atributo referido: A3, A6, A7, A8, A9 **Contexto:** C1 **Registros:** R1, R2 **Problemática:** *EST2, reconoce que la relación cuantitativa se puede dar en dos sentidos, entre el todo y sus partes y la parte con su todo (A3, A6, A7, A8, A9). También, hace adecuado manejo de R1 y R2.*	 PA: EST2, cómo se llama este tangram EST2: tangram F PA: ¿cuántas fichas tiene este tangram F? EST2: cinco! PA: ¿qué fracción del tangram f es cada una de las figuras? EST2: ¿un quinto? PA: muy bien!...ahora por favor arma la figura uno!  PA: a qué fracción del tangram F corresponde ese cuadrado? EST2: a tres! PA: tres qué? EST2: tres de cinco? PA: la fracción? EST2: tres quintos  PA: a qué fracción corresponde la figura tres? EST2: a cuatro quintos

Atributo referido: A1, A3, A6, A7, A8, A9 **Contexto:** C1 **Registros:** R1, R2, R3 y R4 **Problemática:** *EST3, reconoce de manera sobresaliente que la relación cuantitativa se puede dar en dos sentidos, entre el todo y sus partes y la parte con su todo (A3, A6, A7, A8, A9). También, hace adecuado manejo de R1 y R2.*	 PA: ¿de cuántas fichas consta este tangram F? EST3: de cinco! PA: ¿qué fracción del tangram f es cada una de las figuras? EST3: ¿un quinto? PA: muy bien!...ahora por favor arma la figura uno!  PA: cuántas fichas utilizaste para formar la figura uno? EST3: dos PA: ¿cuál es la relación numérica entre la figura uno y el tangram F? EST3: dos quintos? PA: bien! Cuál es la relación entre la figura dos y el tangram F? EST3: cuatro quintos? PA: bien…¿cuál es la relación entre la figura tres y el tangram? EST3: cuatro quintos! PA: cuando las figuras están unidas, ¿qué representan? EST3: el tangram F? PA: si yo te pregunto ¿con cuántos triángulos de color amarillo puedes formar la F, qué me dices? EST3: …(hace mediciones)….con dieciséis!

La **Tabla 17** muestra el resultado a nivel *intersujeto* para la situación didáctica de ***Relación entre el todo y sus partes y sus partes y el todo en fracciones menores que la unidad:***

Tabla 17

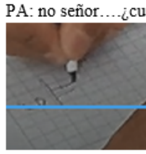
Análisis cualitativo de la situación didáctica 5-Intersujeto

EST1-E6	EST2-E6	EST3-E6
EST1, no reconoce la relación cuantitativa entre el todo y sus partes (P4). Además, le cuesta reconocer que la relación cuantitativa se puede dar en dos sentidos, entre el todo y sus partes y la parte con su todo (A3, A6, A7, A8, A9).	EST2, reconoce que la relación cuantitativa se puede dar en dos sentidos, entre el todo y sus partes y la parte con su todo (A3, A6, A7, A8, A9). También, hace adecuado manejo de R1 y R2.	EST3, reconoce de manera sobresaliente que la relación cuantitativa se puede dar en dos sentidos, entre el todo y sus partes y la parte con su todo (A3, A6, A7, A8, A9). También, hace adecuado manejo de R1 y R2.

Observación: se observa que EST2 y EST3, conocen la relación cuantitativa del todo y sus partes, donde se establece una la relación entre ellas desde el todo y sus partes y en sentido contrario.

Fuente: elaboración propia.

7.2.4.6. *Análisis cualitativo de la situación didáctica 6.* *Tratamiento de la unidad en fracciones mayores que la unidad:* se maneja el concepto de unidad a través de fracciones impropias, donde se requiere un proceso de construcción aditivo de las partes de la unidad para consolidar una unidad conformada por fracciones más pequeñas. En el ***Anexo 24,*** se observa el análisis *intrasujeto* correspondiente a cada estudio de caso. Para este análisis, se adjuntan fragmentos de la entrevista correspondiente a la situación didáctica planteada:

Atributos referidos: A3, A6, A7, A8, A9 **Contexto:** C1 **Registros:** R1, R2, R3, R4 **Problemática:** P4, P5	 PA: Juan prepara unas onces para comer con sus 5 amigos con una torta de seis porciones, pero al rato imagínate que golpean a la puerta y llegan cinco amigos más…¿qué puede hacer? EST1: comprar otra torta! PA: bien, cuántos son en total? EST1: once amigos…. PA: ¿cómo queda la fracción que representa la repartición? EST1: ….(no contesta)
EST1, no puede formar una fracción mayor que la unidad utilizando subdivisiones relacionadas con la misma (A10). Intenta hacer el registro R4, pero no logra hacer las subdivisiones necesarias. *Luego, no maneja la relación cuantitativa de tipo aditivo para reconstruir fracciones mayores que la unidad (P5).*	PA: la pregunta ¿cuál es? EST1: ¿cuántos ponqués se comieron? PA: no señor….¿cuál es la fracción que se comieron?  EST1: ah…ya…un doceavo! PA: ¿seguro? EST1: seis onceavos!.....se comieron dos paquetes! PA: ¿al fin qué? ¿la unidad en cuántas partes estaba dividida? EST1: en seis! PA: representa eso numéricamente! EST1: seis onceavos! PA: ¿sólo se comieron seis partes? EST1: once onceavos…uno sobre once! (no logra establecer la relación)

Atributo referido: A10 **Contexto:** C1 **Registros**: R2, R3, R4 **Problemática:** P5	 PA: Juan prepara unas onces para comer con sus 5 amigos con una torta de seis porciones, pero al rato imagínate que golpean a la puerta y llegan cinco amigos más…¿qué puede hacer? EST2: ¿cuántos son? PA: cuéntalos! EST2: once con Juan! PA: entonces ¿qué hace Juan? EST2: sacar otra torta? PA: bien…saca otra torta…EST2, el ponqué en cuantas tajadas estaba repartido? EST2: en seis pedazos! PA: si la unidad estaba dividida en seis partes, ¿cómo hicieron para comerse once?
EST2, no maneja la relación cuantitativa de tipo aditivo para reconstruir fracciones mayores que la unidad (P5). Luego, no puede formar una fracción mayor que la unidad utilizando subdivisiones relacionadas con la misma (A10). Intenta hacer el registro R4, pero no logra hacer las subdivisiones necesarias.	 EST2: ….(piensa…) porque sacaron otra torta! PA: listo, pero ¿cómo queda la fracción que representa la repartición? EST2: cinco sextos de la torta que sobró! PA: la torta estaba dividida en seis, pero sólo comieron cinco porciones? EST2: no…eran once amigos…. PA: ¿cómo queda la fracción que representa la repartición? EST2: ….(no contesta)  PA: si la unidad estaba dividida en 6 partes, ¿cómo hicieron para comerse once?

Atributo referido: A1, A3, A6, A7, A8, A9 **Contexto:** C1 **Registros:** R1, R2, R3 y R4 **Problemática:**	 PA: Juan prepara unas onces para comer con sus 5 amigos con una torta de seis porciones, pero al rato imagínate que golpean a la puerta y llegan cinco amigos más…¿qué puede hacer? EST3: dividirla más pequeña? PA: ¿será?...en tu casa ¿qué harían? EST3: comprar otra… PA: ah! PA: dime entonces cómo queda la fracción que representa la situación de los amigos de Juan, si se compra una torta adicional?
EST3, puede formar una fracción mayor que la unidad utilizando subdivisiones relacionadas con la misma (A10). Sin embargo, al tratar de justificar evidencia no manejar la relación cuantitativa de tipo aditivo para reconstruir fracciones mayores que la unidad (P5), pues sólo hace asociación con el papel del numerador y el denominador. Intenta hacer el registro R4, pero no logra hacer las subdivisiones necesarias.	 EST3: quedaría así! PA: ¿y la fracción? EST3: cinco sextos? PA: por qué? EST3: nooooo….ya sé! EST3: once sextos! PA: ¿Por qué? EST3: porque se comen once pedazos! Y sobra uno! PA: explícame! EST3: la torta está dividida en seis pero se comen once porque tocó poner otra, entonces debajo de la fracción escribo las divisiones de la torta y arriba las que se comieron! PA: muy bien pero…explica mejor! EST3: que como tocó comprar otra se pueden comer las once!

La **Tabla 18** muestra el resultado a nivel *intersujeto* para la situación didáctica de

Tratamiento de la unidad en fracciones mayores que la unidad:

Tabla 18

Análisis cualitativo de la situación didáctica 6-Intersujeto

EST1-E7	EST2-E7	EST3-E7
EST1, reconoce el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones. EST1 hace un reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes. EST1, no puede formar una fracción mayor que la unidad utilizando subdivisiones relacionadas con la misma (A10). Intenta hacer el registro R4, pero no logra hacer las subdivisiones necesarias. Luego, no maneja la relación cuantitativa de tipo aditivo para reconstruir fracciones mayores que la unidad (P5).	EST2, comprende que, al dividir una superficie, se obtienen subregiones iguales en área sin importar la forma. EST2, no maneja la relación cuantitativa de tipo aditivo para reconstruir fracciones mayores que la unidad (P5). Luego, no puede formar una fracción mayor que la unidad utilizando subdivisiones relacionadas con la misma (A10). Intenta hacer el registro R4, pero no logra hacer las subdivisiones necesarias.	EST3, puede formar una fracción mayor que la unidad utilizando subdivisiones relacionadas con la misma (A10). Sin embargo, al tratar de justificar evidencia no manejar la relación cuantitativa de tipo aditivo para reconstruir fracciones mayores que la unidad (P5), pues sólo hace asociación con el papel del numerador y el denominador. Intenta hacer el registro R4, pero no logra hacer las subdivisiones necesarias.

Observación: los estudiantes no manejan el concepto de unidad a través de fracciones impropias, donde se requiere un proceso de construcción aditivo de las partes de la unidad para consolidar una unidad conformada por fracciones más pequeñas.

Fuente: elaboración propia.

7.3. Análisis de avance en la competencia comunicativa en matemáticas

Tal y como se expresó en los capítulos anteriores, la competencia comunicativa es inherente al desarrollo del conocimiento matemático. Por lo cual, este análisis surge de los registros de las pruebas y las transcripciones de las entrevistas clínico-críticas, específicamente de los diálogos allí sostenidos con los estudiantes objeto de estudio, quienes al verbalizar sus interpretaciones y evidenciar el uso de registros de representación en la prueba diagnóstica y durante las situaciones didácticas, permitieron establecer la relación en la cual se tienen en cuenta criterios como:

- Maneja nociones de la fracción;
- Utiliza lenguaje matemático para expresar sus ideas;

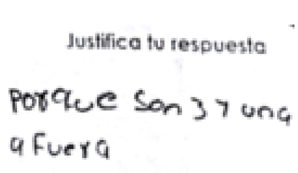
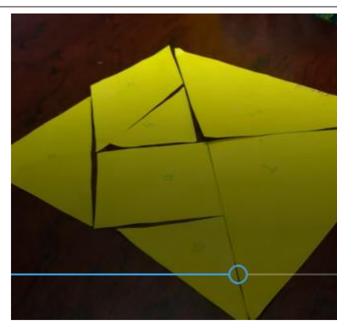
– Entiende y contesta preguntas utilizando lenguaje matemático;

– Interpreta pequeños textos relacionados con el lenguaje matemático;

– Utiliza registros de representación oral, gráfico y simbólico e

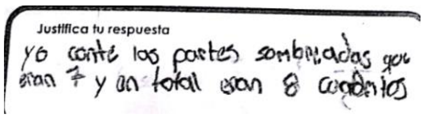
– Interpreta situaciones planteadas y construye registros de representación de tipo concreto.

De acuerdo con los resultados, se observa que **EST1** para la **prueba diagnóstica** registraba el uso **básico** de la actividad individual de la competencia comunicativa donde **interpreta situaciones planteadas y construye registros de representación de tipo concreto** y después de haber participado en la secuencia didáctica, registra el **manejo de nociones de la fracción; utilización del lenguaje matemático para expresar sus ideas; el entendimiento y contestación de preguntas utilizando lenguaje matemático; la interpretación de pequeños textos relacionados con lenguaje matemático; la utilización de registros de representación oral, gráfico y simbólico;** y **la interpretación de situaciones planteadas y construcción de registros de representación de tipo concreto;** nuevamente en el uso **básico** de la competencia comunicativa, denotando así, avances en la comunicación en matemáticas, tal y como se observa en algunas de las transcripciones de diálogo obtenidas:

EST1 – nivel bajo	
Prueba diagnóstica	**Situación didáctica**
Pregunta seis  PA: listo...hay cuatro. Te dicen: la fracción que representa el conjunto de canicas encerradas ..¿cuántas hay encerradas? EST1: tres PA: listo..con relación al total es...te preguntan ...tú tienes todas estas canicas pero encerraron éstas....tú	 PA: ¿qué fracción de todo el tangram, representa el triángulo pequeño? EST1:¿un sexto? PA: hay seis piezas?...¿cuántas piezas hay en total? EST1: hay siete! PA: ¿entonces? EST1: uno de siete?

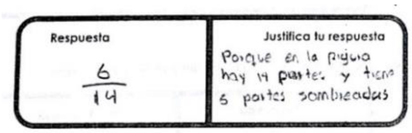
¿cómo podrías colocar esta relación aquí como una fracción, tú qué escribiste? EST1: ...e...son tres.. PA: ¿por qué? EST1: porque están encerradas y ésta la dejaron por fuera. PA: listo, ¿tú qué escribiste? EST1: acá? Tres porque son 3 y una la dejaron por fuera.	PA: ¿Cómo lo enuncias como una fracción? EST1: un séptimo?

Para el caso de **EST2**, comenzó en la **diagnóstica** registrando el uso **básico** de la competencia comunicativa en el **manejo de nociones de la fracción; la utilización del lenguaje matemático para expresar sus ideas; el entendimiento y contestación de preguntas utilizando lenguaje matemático** y en **la interpretación de situaciones planteadas y construcción de registros de representación de tipo concreto;** además **interpreta pequeños textos relacionados con lenguaje matemático y utiliza registros de representación oral, gráfico y simbólico** en una usanza **clara.** Ya al finalizar la aplicación de la secuencia didáctica, se evidencia un uso **claro** del **manejo de nociones de la fracción; la utilización del lenguaje matemático para expresar sus ideas**; **la interpretación de pequeños textos relacionados con lenguaje matemático** y **la utilización de registros de representación oral, gráfico y simbólico** y se evidencia **básicamente el entendimiento y contestación de preguntas utilizando lenguaje matemático;** y **la interpretación de situaciones planteadas y construcción de registros de representación de tipo concreto**, entendiendo así un progreso en la competencia comunicativa de **EST2,** de acuerdo con algunas de las transcripciones de diálogo obtenidas:

EST2 – nivel medio	
Prueba diagnóstica	**Situación didáctica**
Pregunta seis  EST2: Si la región sombreada en…esa sí más o menos no la entendí!...o sea que aquí hay cuatro y tres..siete! y en total son ocho PA: si, y ¿cuál contestaste? EST2: la “a” PA: listo, tú contestaste “a” que es siete octavos porque viste que aquí había qué? EST2: cuatro…sombreados y siete …e…cuatro y tres, siete sombreados… PA: te dio siete, si EST2: y ocho en total…(el estudiante lee su propia justificación) “yo conté las partes sombreadas que había eran 7 y en total eran ocho cuadritos”.	 EST2: tomé el vaso lleno y lo comencé a dividir por mitades! PA: ¿por mitades? ¿cómo así? EST2: sí, cogí el completo… PA: o sea la unidad? EST2: si señora (sonríe)…tomé la unidad y le saqué la mitad en el otro vaso, luego a esa mitad le saqué otra mitad y a esa mitad otra mitad! PA: por favor me dices esa primera mitad a qué fracción corresponde? EST2: a un medio? PA: si…y la mitad de la mitad? EST2: a un cuarto? PA: si….y la mitad del cuarto? EST2:….(piensa)…a un octavo? PA: si! Muy bien!... y la mitad del octavo? EST2: un dieciseisavo! PA: y si yo te dijera que la mitad del dieciseisavo a qué corresponde? EST2: a un treinta y dozavo?

Finalmente, **EST3**, en la **prueba diagnóstica** evidencia **básicamente** la **utilización del lenguaje matemático para expresar sus ideas** y **la utilización de registros de representación oral, gráfico y simbólico;** y se evidencia **claramente** el **manejo de nociones de la fracción; utilización del lenguaje matemático para expresar sus ideas; el entendimiento y contestación de preguntas utilizando lenguaje matemático; la interpretación de pequeños textos relacionados con lenguaje matemático;** y **la interpretación de situaciones planteadas y construcción de registros de representación de tipo concreto**. Luego de haber participado de la secuencia didáctica, presenta en una evidencia **clara** el uso competente de la comunicación matemática en el **manejo de nociones de la fracción; utilización del lenguaje matemático para expresar sus ideas; el entendimiento y contestación de preguntas utilizando lenguaje matemático; la interpretación de pequeños textos relacionados con lenguaje matemático; la**

utilización de registros de representación oral, gráfico y simbólico; y **la interpretación de situaciones planteadas y construcción de registros de representación de tipo concreto.** Esto se puede observar en algunas de las transcripciones de diálogo obtenidas:

EST3 – nivel alto	
Prueba diagnóstica	**Situación didáctica**
 PA: ¿ qué contestaste? EST3: seis de catorce! PA: ¿cuéntame por qué?...está bien, pero explícame por favor! EST3: porque si tú cuentas todas las partes de esta figura hay catorce en total, pero sólo hay sombreadas seis! PA: listo, ¿qué escribiste acá? EST3: porque en la figura hay catorce partes y tiene seis partes sombreadas! PA: muy bien!...ayúdame con la seis!	 EST3: (hace dibujos…) PA: ve hablando para que yo sepa qué es lo que estás pensando, por favor! EST3: este es el vaso completo y el otro representa la mitad, o sea un medio del vaso! PA: y luego la mitad de ese medio vaso a qué corresponde? EST3: a un cuarto del vaso! PA: y si quiero la mitad de ese cuarto de vaso? EST3: sería un octavo del vaso! PA: y la mitad de ese octavo? EST3: un dieciseisavo!

8. Hallazgos y Conclusiones

En este último capítulo, se presentan las conclusiones derivadas del desarrollo de esta investigación. Se inicia atendiendo a la consecución de los objetivos planteados en el capítulo 2 y se describen los principales aportes. Finalmente, se presentan las limitaciones de este estudio, las implicaciones investigativas y se expresan las sugerencias para futuras investigaciones.

8.1. Hallazgos y conclusiones frente a los objetivos planteados

Esta investigación obedeció a un estudio fundamentado teóricamente, con desarrollo basado en la experiencia pedagógica, en el que se abordó la interpretación de la fracción en su relación como parte-todo, siendo esta la estructura básica que cimenta las fracciones.

Tal y como se describió en el capítulo 1, el problema de investigación se incorporó a una pregunta, la cual surgió después de detectar las falencias en el manejo de la fracción por parte de los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Distrital Bosanova-Sede B, específicamente desde la relación parte-todo:

¿Cómo interpretan la fracción como relación parte-todo -en contextos continuos y discretos- los estudiantes de grado quinto de básica primaria del colegio Bosanova Sede-B, a partir de la implementación de una secuencia didáctica que relaciona los atributos de la fracción, registros de representación y contextos, privilegiando la competencia comunicativa?

Ante lo cual, se propusieron los siguientes objetivos específicos en la investigación:

Primer objetivo específico: explorar procesos cognitivos haciendo uso del método de entrevista clínico-crítica, como herramienta que permite analizar la interpretación de la fracción como relación parte-todo, en contextos continuos y discretos, a través de la competencia comunicativa en matemáticas.

Segundo objetivo específico: analizar la interpretación de la fracción como relación parte-todo, que se observa en un grupo de estudiantes de grado quinto, a partir de los atributos, registros de representación y los contextos, definidos en el marco teórico.

Tercer objetivo específico: relacionar las interpretaciones de la fracción como relación parte-todo, que hacen los estudiantes, con las categorías de análisis definidas.

Se abordó el *primer objetivo específico,* a través de un estudio práctico, soportado por el método cualitativo, que se presenta en el capítulo 7. En este capítulo, gracias a las entrevistas clínico críticas, se compila información suficiente para describir y analizar las interpretaciones que los estudiantes hacen de la fracción en su relación como parte-todo, gracias a la mediación de la competencia comunicativa, que ayudó a los estudiantes a exteriorizar, verbalizar o plasmar gráfica o concretamente sus conocimientos matemáticos, logrando en la medida de lo posible, que se utilizara un lenguaje matemático adecuado y a su vez, se hiciera un registro de las distintas razones expresadas.

El *segundo objetivo específico*, se contempló tanto en el capítulo 5, del marco teórico de la investigación, como en el capítulo 7, del análisis e interpretación de datos. En el capítulo 5, se hizo un estudio teórico que identificó los atributos de la fracción, los registros de representación o representaciones y los contextos.

En el capítulo 7, se analizaron bajo el enfoque mixto -cuantitativo y cualitativo-, las interpretaciones de la fracción como relación parte-todo, que se observó tanto en la totalidad de la población del grupo de estudiantes de grado quinto elegido como muestra, como también, de cada uno de los seleccionados como estudios de caso. Este análisis se llevó a cabo en la modalidad de intrasujeto e intersujeto.

El *tercer objetivo específico*, fue tratado tanto en el capítulo 5, del marco teórico de la investigación, como en el capítulo 7, del análisis e interpretación de datos. En el capítulo 5, se evidencia que las categorías de análisis tienen que ver con los componentes conceptuales que tienen características comunes dentro de una misma jerarquía y corresponden a los conceptos que se observan de forma clara dentro de la investigación. Por lo cual, se habla de cuatro categorías: la categoría atributos, la categoría contextos, la categoría representaciones y la categoría problemáticas, todas estas definidas y sustentadas en el mismo capítulo.

En el capítulo 7, se relacionan las interpretaciones de la fracción como relación parte-todo, que hacen los estudiantes, con las categorías de análisis definidas, permitiendo analizar la información obtenida a través de la prueba diagnóstica, la secuencia didáctica aplicada, la entrevista clínico-crítica y la prueba de salida, bajo el enfoque de tipo mixto.

Por consiguiente, para dar respuesta a lo que se requiere en este capítulo, se enuncia a continuación:

Con relación al primer objetivo específico: las entrevistas de tipo clínico-crítico efectuadas con los estudiantes de la Institución Educativa Distrital Bosanova-Sede B, permitieron explorar y comprender el desarrollo del razonamiento y la forma de pensar de los estudiantes inmersos en la investigación. A su vez, viabilizaron la sistematización de la información, haciendo hincapié en las transformaciones y reconstrucciones cognoscitivas sobresalientes, por parte de los estudiantes.

En el capítulo siete, en el análisis cualitativo, se registraron las transcripciones de los diálogos sostenidos con los estudiantes objeto de estudio, quienes al verbalizar sus interpretaciones y demostrar el uso de registros de representación en la prueba diagnóstica y durante las situaciones didácticas, permitieron establecer el tratamiento de la fracción en su relación como parte-todo. Igualmente, cada fragmento de transcripción permitió inferir el conocimiento o no, de las situaciones planteadas, así como, clasificar cada respuesta de acuerdo con las categorías de análisis.

Por lo anterior, se justifica que efectivamente el método de entrevista clínico crítica con la mediación de la competencia comunicativa, se caracterizaron por ser óptimos recursos para obtener las interpretaciones esperadas.

Con relación al segundo objetivo específico: se hizo un estudio teórico, que identificó los *atributos de la fracción* como los diferentes matices de su significado y las propiedades que esta cumple. De igual manera, se enunciaron los *registros de representación* como la actividad de formación de representaciones realizadas por medio de signos. Así mismo, se trataron los *contextos*, como el *continuo* que tiene que ver con la cantidad de superficie y el *discreto* con la cantidad de objetos. También, se vinculó a este análisis como apoyo, la experiencia de (Poveda, s.f.), en cuanto a las problemáticas escolares en el tratamiento de las fracciones.

Fruto del análisis con enfoque mixto -cuantitativo y cualitativo- desarrollado en el capítulo 7, y a medida que se aplicaba la secuencia didáctica, se hizo más evidente el acierto al haber escogido esos parámetros como aquellos que permitieron revisar el tratamiento de la fracción, amplia y detalladamente, observando que a través de su interrelación, se lograron establecer junto con las interpretaciones, las falencias y aciertos cognitivos de los estudiantes, en cuanto a la relación de la fracción como parte-todo.

Con relación al tercer objetivo específico: en relación con este objetivo, en el capítulo 7, se integraron las cuatro categorías de análisis definidas (atributos, contextos, registros de representación y problemáticas) con los análisis cuantitativo y cualitativo, permitiendo llegar a resultados en la prueba diagnóstica, en la secuencia didáctica y en la prueba de salida, respectivamente. Por ejemplo, en el *análisis cuantitativo versus análisis cualitativo de la prueba diagnóstica*, se visibiliza que los niveles de dificultad registrados en el análisis cuantitativo de la prueba diagnóstica de la totalidad de la población coinciden con las dificultades encontradas bajo el análisis cualitativo, aplicado a los estudios de caso, en la misma prueba:

Porcentaje de dificultad de la totalidad de la población en el análisis cuantitativo	Preguntas con dificultad análisis cualitativo estudios de caso	Problemática
94%	6	P5
39%	7	P1
52%	9	P2
55%	10	P2
45%	13	P4
65%	15	P4

Nota: El porcentaje de dificultad corresponde al porcentaje de estudiantes de la totalidad de la población que presentaron dificultad al responder la pregunta correspondiente. *Fuente:* elaboración propia

y a su vez, se observa en la tabla de *problemáticas detectadas en la prueba diagnóstica*, la estrecha relación de las categorías enunciadas, con cada una de las preguntas: *Relación atributos, contextos, representaciones y problemáticas con las preguntas 6,7,9,10,13 y 15:*

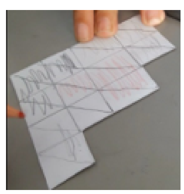
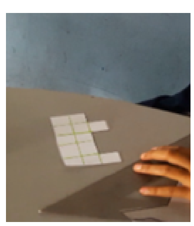
Pregunta	Atributos	Contextos	Registros	Problemática
6	A9, A10	C1	R2, R3, R4	P5
7	A2, A5, A8, A9	C1	R2, R3	P1
9	A5, A11	C1	R2, R4	P2
10	A8, A9	C1	R2, R3, R4	P2
13	A6, A9	C2	R2, R3, R4	P4
15	A1, A6, A7	C1	R2, R4	P4

Luego, las categorías de análisis seleccionadas se constituyeron un el hilo conductor de la investigación.

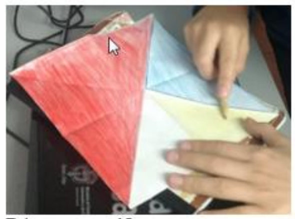
Con relación al objetivo general: Además de lo ya expuesto y para dar alcance al objetivo general: "*Describir y analizar la interpretación de la fracción como relación parte-todo, en contextos continuos y discretos, de los estudiantes de grado quinto de básica primaria del colegio*

*Bosanova Sede-B, a partir de la implementación de una secuencia didáctica que relaciona los atributos de la fracción, registros de representación y contextos, privilegiando la competencia comunicativa"; s*e citan los resultados obtenidos luego del análisis de la información que se obtuvo en cuanto a:

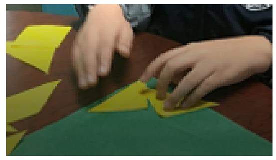
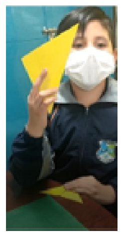
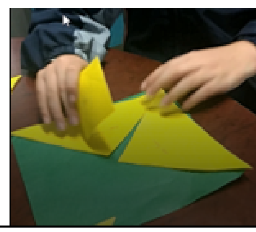
- **Reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes:** en la tabla de *Análisis cualitativo de la situación didáctica 1-Intersujeto,* se observa que EST1 hace un reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes mientras no se aumente la asimetría y subdivisiones de la superficie propuesta. Mientras que EST2, muestra mayor manejo de los atributos, pero cuando se aumentan las subdivisiones, presenta dificultad para resolver la situación planteada y requiere de acompañamiento para resolverla. Por el contrario, a EST3, se le facilita el reconocimiento de la unidad, las partes e igualdad de las partes, entendiendo que al dividir una superficie, se obtienen subregiones iguales en área sin importar la forma:

Aunque en el trazo solicitado, EST3 no cumple con A5 para este ejercicio, se evidencia buen manejo de A2, A3, A6, A7, A11.	 PA: con esa división hecha, quedan bien los hermanos herederos del terreno? EST3: si! PA: antes de hacer los trazos de los triángulos que hiciste, ¿se te hubiera ocurrido cómo dividir el terreno? EST3: no mucho
EST3 logra hacer las subdivisiones correctas, para proceder al reparto, relacionando su actividad con A11.	 PA: ¿por qué los cuadritos no están iguales? EST3: porque los tracé mal! PA: por qué no mediste? EST3….. PA: bueno, vamos a suponer que están iguales!...divide ese terreno entre tres hermanos..¿de a cuántos pedazos le toca a cada uno? EST3: de a tres! PA: colorea, para ver qué es lo que dices!

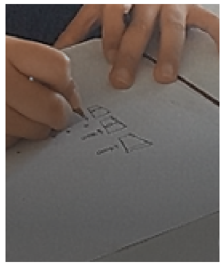
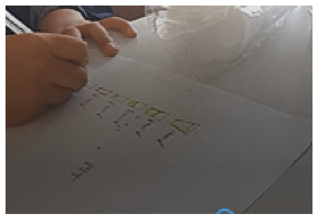
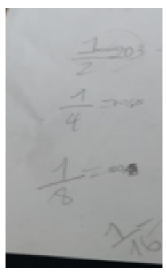
- ***Construcción del concepto de fracción y fraccionario a través de la relación parte-todo:*** en la tabla de *Análisis cualitativo de la situación didáctica 2-Intersujeto,* se observa que, EST2 y EST3, manejan adecuadamente los atributos de la fracción referentes al reconocimiento de la unidad, en su relación parte-todo. Entienden la manera en que una parte puede asumirse como una nueva unidad, para establecer una nueva relación parte-todo. Trabajan la relatividad de la unidad y de las partes, como también la reconstrucción de la unidad a partir de las partes. EST1, reconoce el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones:

Cuando se han hecho más subdivisiones, EST3 demuestra dominio de la relación parte-todo expresada a través de A2, A5, A6, A8 y A11.	 PA: me estás diciendo que cuando la hoja estaba dividida en dos, lo azul era un medio, ahora que la unidad está dividida en ocho Partes, a qué equivale lo azul? EST3: cuatro octavos PA: ¿yo podría decir que un medio es igual a cuatro octavos? EST3: si señora! PA: ¿por qué? EST3: porque primero era un medio y cuando doble más ahora es cuatro partes de toda la hoja, solo que más dividido PA: ¿puedes decir que un medio es igual o equivalente a cuatro octavos? EST1: si señora!  PA: se puede decir que un medio es equivalente o igual a dos cuartos? EST3: si PA: puedes decir que un medio es igual o equivalente a cuatro octavos? EST3: si PA: y dos cuartos es equivalente a cuatro octavos? EST3: si PA: ¿por qué? EST3: porque al inicio había dos partes y luego cuando doble y doble fueron a pareciendo más partes pero no vi cambios en la hoja que coloree, sólo que se dividió más.

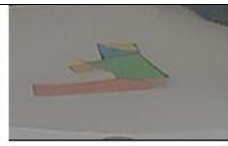
- ***Noción y reconstrucción de la unidad, relaciones de equivalencia y relación multiplicativa de la fracción:*** en la tabla de *Análisis cualitativo de la situación didáctica 3-Intersujeto,* se observa que, los estudiantes establecen relaciones de equivalencia, inicialmente mediante la sobreposición de las fichas. Así mismo, eventualmente establecen relaciones de equivalencia entre las partes sin ser estas congruentes o por su forma. Excepcionalmente, el sujeto EST3, logra establecer que la fracción es una relación cuantitativa de tipo multiplicativo, entre dos cantidades de magnitud "la parte y el todo":

EST3, entiende que hay una relación entre las partes que conforman la unidad llamada tangram (A1, A2, A3), también identifica que con algunas partes puede conformar otras. *Cuando se le solicita reconstruir la unidad (tangram) a partir de otra parte, lo logra fácilmente. (A11).* *EST3, demuestra manejo de la relación multiplicativa de la fracción.*	 PA: ¿cuántos triángulos grandes necesitas para formar la unidad o el tangram armado? EST3: se necesitan dos más adicional a estas! O sea cuatro!  PA: ¿qué otra ficha diferente me serviría? EST3: el triángulo pequeño! PA: muéstrame! EST3: (toma en la mano el triángulo grande, hace cuentas y dice…) dieciséis!  PA: ¿cómo hiciste eso? EST3: porque si de estas se necesitan cuatro, entonces cuatro triángulos de los pequeños forman el grande y como son cuatro grandes…cuatro por cuatro—66ieciséis!  A: ¿ y qué pasa con el cuadrado? EST3: (EST3: mide el cuadrado dentro de la unidad)…sólo ocho! PA: ¿sólo ocho? EST3: ¿estás seguro?

- ***Reconstrucción de la unidad, relación aditiva y multiplicativa (todo-parte y parte-todo) en fracciones menores que la unidad:*** en la tabla de *Análisis cualitativo de la situación didáctica 4-Intersujeto* se observa que EST2 y EST3, manejan relaciones cuantitativas de tipo aditivo entre las partes y el todo para reconstruir parte de la unidad o la unidad en sí. Excepcionalmente, el sujeto EST3, logra establecer que la fracción es una relación multiplicativa:

EST3, conoce la relación cuantitativa de tipo aditivo entre el todo y sus partes. Además, reconstruye parte de la unidad utilizando otras subdivisiones y reconstruye la unidad utilizando partes de ella (A1, A3, A6, A7, A8, A9). De igual manera, hace un adecuado manejo de los registros R1, R2, R3 y R4.	 EST3: (hace dibujos…) PA: ve hablando para que yo sepa qué es lo que estás pensando, por favor! EST3: este es el vaso completo y el otro representa la mitad, o sea un medio del vaso! PA: y luego la mitad de ese medio vaso a qué corresponde? EST3: a un cuarto del vaso! PA: y si quiero la mitad de ese cuarto de vaso? EST3: sería un octavo del vaso! PA: y la mitad de ese octavo? EST3: un dieciseisavo!  PA: bien¡ Ahora dime ¿cuál de estas medidas tiene mayor cantidad de agua? EST3: ésta, la del vaso completo! PA: ¿y cuál tiene menor cantidad? EST3: la del dieciseisavo! PA: si yo te dijera que unas matemáticamente lo que acabas de dividir, cómo queda? EST3: (comienza a sumar los resultados…)  PA: Est3, si yo quisiera formar medio vaso con las divisiones que tengo, cómo sería? EST3: …(piensa) …con dos vasos de un cuarto! PA: muy bien!

➢ ***Relación entre el todo y sus partes y sus partes y el todo en fracciones menores que la unidad***: en la tabla de *Análisis cualitativo de la situación didáctica 5-Intersujeto* se observa que, los estudiantes conocen la relación cuantitativa del todo y sus partes, donde se establece una la relación entre ellas desde el todo y sus partes y en sentido contrario:

Atributo referido: A1, A3, A6, A7, A8, A9 **Contexto:** C1 **Registros:** R1, R2, R3 y R4 **Problemática:** *EST3, reconoce de manera sobresaliente que la relación cuantitativa se puede dar en dos sentidos, entre el todo y sus partes y la parte con su todo (A3, A6, A7, A8, A9). También, hace adecuado manejo de R1 y R2.*	 PA: ¿de cuántas fichas consta este tangram F? EST3: de cinco! PA: ¿qué fracción del tangram f es cada una de las figuras? EST3: ¿un quinto? PA: muy bien!...ahora por favor arma la figura uno!  PA: cuántas fichas utilizaste para formar la figura uno? EST3: dos PA: ¿cuál es la relación numérica entre la figura uno y el tangram F? EST3: dos quintos? PA: bien! Cuál es la relación entre la figura dos y el tangram F? EST3: cuatro quintos? PA: bien…¿cuál es la relación entre la figura tres y el tangram? EST3: cuatro quintos! PA: cuando las figuras están unidas, ¿qué representan? EST3: el tangram F? PA: si yo te pregunto ¿con cuántos triángulos de color amarillo puedes formar la F, qué me dices? EST3: …(hace mediciones)….con dieciséis!

Se intuye que a medida que avanzaba la secuencia didáctica, los estudiantes progresaron en el manejo conceptual y procedimental del tratamiento de la fracción en su relación como parte-todo, razón por la cual, los resultados obtenidos muestran avance.

- ***Tratamiento de la unidad en fracciones mayores que la unidad:*** en la tabla de *Análisis cualitativo de la situación didáctica 6-Intersujeto* se observa que, los estudiantes presentan dificultad con el concepto de unidad a través de fracciones impropias, donde se requiere un proceso de construcción aditivo de las partes de la unidad para consolidar una unidad conformada por fracciones más pequeñas:

Atributo referido: A1, A3, A6, A7, A8, A9 **Contexto:** C1 **Registros:** R1, R2, R3 y R4 **Problemática:**	 PA: Juan prepara unas onces para comer con sus 5 amigos con una torta de seis porciones, pero al rato imagínate que golpean a la puerta y llegan cinco amigos más…¿qué puede hacer? EST3: dividirla más pequeña? PA: ¿será?...en tu casa ¿qué harían? EST3: comprar otra… PA: ah! PA: dime entonces cómo queda la fracción que representa la situación de los amigos de Juan, si se compra una torta adicional?
EST3, puede formar una fracción mayor que la unidad utilizando subdivisiones relacionadas con la misma (A10). Sin embargo, al tratar de justificar evidencia no manejar la relación cuantitativa de tipo aditivo para reconstruir fracciones mayores que la unidad (P5), pues sólo hace asociación con el papel del numerador y el denominador. Intenta hacer el registro R4, pero no logra hacer las subdivisiones necesarias.	 EST3: quedaría así! PA: ¿y la fracción? EST3: cinco sextos? PA: por qué? EST3: nooooo….ya sé! EST3: once sextos! PA: ¿Por qué? EST3: porque se comen once pedazos! Y sobra uno! PA: explícame! EST3: la torta está dividida en seis pero se comen once porque tocó poner otra, entonces debajo de la fracción escribo las divisiones de la torta y arriba las que se comieron! PA: muy bien pero…explica mejor! EST3: que como tocó comprar otra se pueden comer las once!

Hallazgos con relación al análisis cuantitativo luego de la secuencia didáctica: Se destaca que el anterior análisis citado, para soportar el alcance del objetivo general, corresponde al enfoque cualitativo descriptivo. A continuación, se enuncian las observaciones del análisis cuantitativo, de la Tabla de *análisis comparativo intersujeto de las pruebas diagnóstica y final de los tres estudiantes de estudio de caso (EST1, EST2 y EST3):*

Tabla 20

Análisis comparativo intersujeto de las pruebas diagnóstica y final de los tres estudiantes de estudio de caso

PREGUNTA No.	Cantidad de estudiantes del total de la POBLACIÓN						EST1			EST2			EST3			EST1			EST2			EST3		
	ENTRADA			SALIDA			ENTRADA									SALIDA								
	C	I	N	C	I	N	C	I	N	C	I	N	C	I	N	C	I	N	C	I	N	C	I	N
6	2	26	3	19	10	2		X			X			X			X			X		X		
7	19	10	2	22	8	1		X			X		X			X			X			X		
9	15	12	4	21	8	2		X			X			X		X				X		X		
10	14	15	2	13	17	1	X			X			X			X			X			X		
13	17	8	6	22	6	3		X			X		X				X		X			X		
15	11	8	12	24	4	3		X		X			X				X		X			X		

Fuente y elaboración propia

Luego de la aplicación de las seis situaciones didácticas y como evidencia la prueba de salida, se puede apreciar que:

- Para la pregunta 6 (fracción mayor que la unidad o impropia), los tres estudiantes estudio de caso en este tipo de pregunta, respondieron incorrectamente en la prueba diagnóstica y solo uno de ellos logró contestar correctamente en la prueba final, mostrando que la problemática en el tratamiento en fracciones mayores que la unidad, se sigue presentando (P5).
- Para las preguntas 7, 9, se observa que los estudiantes en general comenzaron con respuestas incorrectas en la prueba diagnóstica, pero los tres estudiantes lograron contestar correctamente en la prueba final, logrando avances positivos en el reconocimiento de que las partes se deben juzgar por su cantidad de magnitud y no por su forma visual.

- En las preguntas 13 y 15, que tienen que ver con la relatividad de la unidad y las partes, se registra que los estudiantes EST2 (nivel medio) y EST3 (nivel alto) muestran avance o continuidad en este atributo.

8.2. Principales aportes

Los aportes de esta investigación corresponden con las evidencias recogidas del tratamiento que en grado quinto de la Institución Educativa Distrital Bosanova-Sede B, de la ciudad de Bogotá, se hace de la fracción y su relación como parte-todo. Evidencias que permiten apoyar la tesis de que es necesario fortalecer el estudio de esta relación, tanto por parte de profesores como de los estudiantes. Por cuanto a través de las interpretaciones que los estudiantes expresaron, como también, los procedimientos previamente adquiridos por ellos, se revela que con frecuencia, el manejo de la fracción se realiza en las aulas con una orientación docente que hace más difícil la comprensión de esta. Así mismo, para que los estudiantes logren dominar *el reconocimiento de la unidad, la reconstrucción de la unidad, las partes e igualdad de las partes, la relación entre el todo y sus partes y sus partes y el todo en fracciones menores que la unidad, las relaciones de equivalencia, relación aditiva y multiplicativa (todo-parte y parte-todo) en fracciones menores que la unidad, la construcción del concepto de fracción y fraccionario a través de la relación parte-todo y el tratamiento de la unidad en fracciones mayores que la unidad*, se exige un recorrido previo que denota comprensión, si y sólo si, el estudiante está en la capacidad de manejar los atributos de la fracción, sus contextos y representaciones. Adicionalmente, debe tener la capacidad de trasladar un hecho matemático de un registro de representación al otro.

Finalmente, el gran aporte consiste en extender una invitación a construir el bagaje matemático de los números racionales desde la relación de la fracción como parte-todo, atendiendo a lo expuesto por Behr (1983), cuando afirma que esta relación es la piedra angular de construcciones matemáticas posteriores.

8.3. Limitaciones

Esta investigación se realizó con rigor y minuciosidad, guiada por un análisis detallado y exhaustivo de los datos recogidos, confiriendo validez a las interpretaciones y conclusiones expresadas. Sin embargo, se presentaron limitaciones que se enuncian a continuación:

- Los resultados obtenidos competen a la población y estudios de caso seleccionados, por lo cual no es conveniente generalizar para todos los estudiantes de grado quinto de básica primaria de otras instituciones. Queda abierta la invitación para replicar este estudio en otras instituciones, permitiendo así, establecer generalidades, de ser posible.
- El origen socioeconómico de los estudios de caso, y sus previas experiencias académicas, pueden incidir sobre los resultados obtenidos por cada uno de ellos. Se estima la utilidad de haber obtenido un estudio de los círculos interpersonales de cada estudiante, anticipadamente, para establecer factores que favorecen o no la disposición y conocimiento de estos. Por ejemplo, puede existir fortalecimiento cognitivo hacia la relación parte-todo, en aquellos casos en que los estudiantes tienen la oportunidad de repartir y compartir alimentos u otros, eventualmente.
- La población escogida corresponde a 31 estudiantes. Se tomó una muestra del 10%, que equivale a 3 estudiantes considerados muestra para el estudio de caso. Sin embargo, podría resultar oportuno considerar el porcentaje de error hallado en dicho rango.

8.4. Implicaciones investigativas

- Fortalecer la formación de profesores en el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares.
- Profundizar a partir de la relación parte-todo de la fracción, otras relaciones como relación multiplicativa y equivalencia, entre otras.

8.5. Sugerencias para futuras investigaciones

Como ayuda para la comprensión escolar de la relación parte-todo, es importante que a nivel conceptual e investigativo se enlace el estudio parte-todo con la mereología[13] y sus aportes. Por ejemplo, analizar la relación parte-todo desde el manejo lingüístico, cuando se enseña que la unidad de una superestructura textual (texto total) está compuesta por su título, párrafos, palabras, fonemas y letras, entre otros, y que cada una de estas partes componen un todo o unidad y tienen una función dentro del mismo, entendiendo que la coherencia de ese todo depende de las partes.

Así mismo, desde la biología en el manejo de las taxonomías, se puede aprovechar esta relación. Esto es, establecer la presencia de la relación parte-todo, también, fuera del campo matemático.

[13] Estudio de las relaciones entre una parte y el todo del que procede (Castro, 2015).

Referentes Bibliográficos

American Psychological Association. (2010). *Manual de publicaciones de la American Psychological Association* (No. 808.066 A512m). Edit. Manual Moderno.

Arteta Vargas, J., & Rodríguez, M. S. (2013). *Los fraccionarios en primaria: retos, experiencias didácticas y alianzas para aprender matemáticas con sentido*.

Arteaga, Á. M. R., & Díez-Palomar, J. *La competencia de comunicación en el desarrollo de las competencias matemáticas en secundaria.* Barcelona, septiembre 07 de 2009. (pp. 8).

Artigue, M. (2004). *Problemas y Desafíos en Educación Matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos?* Educación Matemática, 16(3), 5-28.

Ávila, A., Block, D. y Carvajal A. (2003). *Investigaciones sobre educación preescolar y primaria.* En: Ángel D. López y Mota (Coord.) *Saberes Científicos, Humanísticos y Tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje.* Tomo I. El campo de la educación matemática, 19932001. Educación en ciencias naturales. (pp. 49 - 170) México: COMIE.

Barrio del Castillo, I., González Jiménez, J., Padín Moreno, L., Peral Sánchez, P., Sánchez Mohedano, I., & Tarín López, E. (2015). *El estudio de casos*. Recuperado de http://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Est_Casos_doc.pdf

Behr, M. J., Lesh, R. Post, T. R. and Silver, E. A. (1983). *Rational number concept.* In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisittions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-126). New York: Academy Press.

Blomhoj, M., Jensen, T.H. (2003). *Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning*. Teaching Mathematics and its Applications, 22(3), 123-139.

Bonotto, C. (1993). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós. Barcelona. España.

Brousseau G. (1999). *Educación y Didáctica de las matemáticas*, en Educación Matemática, México.

Butto, C. (2013). *El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes*. Revista de la Unidad de Educación de la Facultad de Ciencias Humanas y Sociales. Horizontes Pedagógicos Volumen 15. Nº 1. 2013 / págs. 33-45 / ISSN: 0123-8264.

Cabrera, C. R., & Pérez, L. C. (2013). *Fracciones y números fraccionarios en la escuela elemental: el caso de la escuela primaria cubana.* Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, (12), 133-140.

Castro, E. (2016). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros*.

Chaffe-Stengel, P. Noddings, N. *Facilitar la comprensión simbólica de fracciones. Para el aprendizaje de Matemáticas.* Una revista internacional de educación matemática Vol.3 No.2 (1983).

Chevallard, Y. (1989). *Le concept de rapport ausavoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*. Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, 108, 103-117.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockroft*. Ministerio de

Educación y Ciencia, Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado.

Coronado, S. D. (2015). *El papel del lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas.* Panorama, 9(16), 32-42. De Educación, L. G. (1994). Ley 115 de 1994. *Constitución Política de Colombia*.

D'Amore, B., Fandiño, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* Prefacios de Raymond Duval, Luis Radford. Prólogo a la edición en idioma español de Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio.

De Educación, L. G. (1994). Ley 115 de 1994. *Constitución Política de Colombia*.

De Colombia, C. P. (1991). Revisada y actualizada. Bogotá: *Leyer*.

Díaz-Barriga, A. (1996), Didáctica y curriculum, México, Paidós, Colección Educador (la versión anterior del texto se publicó en Editorial Nuevo Mar en 1984).

Driessnack, M., Sousa, V. y Costa, I. (setiembre-octubre, 2007). Revisión de los diseños de investigación relevantes para la enfermería: parte 3: métodos mixtos y múltiples. *Revista Latino Americana de Enfermagem*, 15(5), 179-182. Recuperado de: http://www.scielo.br/pdf/rlae/v15n5/es_v15n5a24.pdf

Ducret, J-J. (2004). Método Clínico Crítico. Recuperado de http://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/textes/ve/jjd2004_metodo_clinico_critico_ducret.pdf

Duval, R. (1999), "Semiósis y Pensamiento Humano", Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*.(Segunda edición. Trad. Myriam Vega Restrepo). *Cali, Colombia: Peter Lang/Universidad del Valle.[Original: Sémiosis et pensée humaine. Bern: Peter Lang, 1995. Primera edición en español: Universidad del Valle, 1999]*

Escolano, R., & Gairín, J. M. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en educación* *primaria: propuesta didáctica con modelos de medida.* Investigaciones en Educación Matemática: pensamiento numérico, 185-212.

Fandiño, M. (2009). Las fracciones. *Aspectos conceptuales y Didácticos.* Bogotá. Editorial Magisterio.

Fazio, L., & Siegler, R. (2011). *Enseñanza de las fracciones*.

Fernández Fernández, P. Y., & Ortiz Ordoñez, V. H. (2014). *La fragmentación de la matemática escolar en pensamientos. Elementos para la reflexión en torno al tratamiento de la Fracción* (Bachelor's thesis, Universidad Distrital Francisco José de Caldas).

Fernández, N. (2007). *Método crítico de Jean Piaget*. Recuperado de: https://es.scribd.com/doc/5622599/MetodoCriticoJeanPiaget-practica

Freudenthal, H. (1994). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. México: Ernesto Sánchez Editores.

Flores, P., y Morcote, O. (1999). *Algunos elementos del conocimiento profesional en la planeación de clases de futuros profesores de secundaria (un caso: las fracciones)*. Disponible en línea en: http://www.ugr.es/~pflores/textos/ARTICULOS/Investigacion/MorcoteFloresEMA. pdf (Acceso 10.02.2012)

Forero-Sáenz, A. (2008). Interacción y discurso en la clase de matemáticas. Universitas Psychologica, 7(3).

Förster, C.; Rojas C. (2008). *Evaluación al interior del aula: una mirada desde la validez, confiabilidad y objetividad.* Revista Pensamiento Educativo, Vol. 43, 2008. pp. 285-305. Online.

Galeano, M., (2004). *Diseño de proyectos de investigación cualitativa.* Medellín: Fondo editorial universidad EAFIT. p.38.

Godino, J. D. (2002). *Competencia y comprensión matemática: ¿Qué son y cómo se consiguen?.* Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8(29), 9-19.

Godino, J. D. (2010). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* Granada, España: Universidad de Granada/Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

Gómez, P., Castro, P., Bulla, A., Mora, M. F., & Pinzón, A. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas: revisión crítica y propuesta de ajuste*. Educación y Educadores, 19(3), 315-338.

Habermas, J., & Jimenez Redondo, M. (2001). T*eoría de la acción comunicativa: complementos y estudios previos.* (No. 316.286). Cátedra.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación*. Ciudad de México.

Hoyos Duque, J. R. (2015). *Diseño y aplicación de una propuesta didáctica para favorecer el aprendizaje significativo de las fracciones en los estudiantes del grado cuarto de la Institución Educativa José Asunción Silva del municipio de Medellín.* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia-Sede Medellín).

ICFES. (2016). Ejemplos de preguntas Pruebas Saber Matemáticas 3° [Imágen]. Recuperado de: https://s3.amazonaws.com/portal.icfes/datos/SB3579_2017/Grado+3/Ejemplos+de+preguntas+saber+3+matematicas+2012+v3.pdf

ICFES. (2017). *Ejemplos de preguntas Pruebas Saber Matemáticas 3° [Contexto]*. Recuperado de http://www.instruimos.com.co/programacion/archivosPHP/resultadosNuevos/carpetacuaderno/201500753.pdf

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación.* México McGraw-Hill..

Kieren, T.E. (1976). *On the mathematical, cognitive, and instruccional foundations of rational numbers.* In R. Lesh (ed.) *Number and measurement* (pp. 101-144). Columbus: ERIC-SMEAC.

Kieren, T. E (1993). "*Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding*". En Th. P, Carpenter, E Fennema, Th. A y Romberg, (eds), Rational Numbers: An Integration of Research. 49-84. Mahwah, NJ:Erlbaum.

Lamon, SJ (2006). *Enseñanza de fracciones y razones para la comprensión: Conocimiento de contenido esencial y estrategias de instrucción para los maestros* . Routledge.

Llinares, S., & Sanchez, M. (1987). *Las creencias sobre las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas en profesores de EGB en formación. Conocimientos, creencias y teorías de los profesores. Implicaciones para el curriculum de formación de profesores.* Alcoy: Marfil.

Llinares Ciscar, S., & Sánchez García, M. V. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo,* Editorial Síntesis, España.

LLinares, S., & Sánchez, M. V. (1997). *Aprender a enseñar, modos de representación y número racional.* Recuperado de https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/17916/file_1.pdf?sequence=1

López, J. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de Fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo.*

López, J. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de Fracción en el grado séptimo considerando la relación parte-todo*. Manizales: Universidad Nacional de Colombia. Carlos Alfredo Cárdenas Solano.

Martínez, C., & Lascano, M. (2001). *Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.* Revista EMA, 6(2), 156-179.

MEN, M. D. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

MEN. (2017). *Ejemplos de preguntas Supérate con el Saber Matemáticas 3° [Contexto]*. Recuperado de: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/ naspublic/contenidosaprender/g_4/m/sm/sm_m_g04_u01_l05.pdf

Ministerio, d. E. (7 de junio de 1998). LINEAMIENTOS CURRICULARES. Obtenido de: MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio, d. E. (8 de febrero de 1994). mineducacion.gov.co. Obtenido de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Ministerio, d. E. (7 de junio de 1998). *LINEAMIENTOS CURRICULARES.* Obtenido de MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio, d. E. (mayo de 2006). http://www.mineducacion.gov.co . Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio, d. E. (26 de abril de 2016). Colombiaaprende.edu.co. Obtenido de Colombiaaprende.edu.co: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/articles-

352712_matriz_m.pdf

Ministerio, d. E. (2016). Santillana. Obtenido de Santillana: http://www.santillana.com.co/www/pdf/dba_mat.pdf

Muñoz Serván, P. & Muñoz Serván, I. (2001). Intervención en la familia: estudio de casos, en Pérez Serrano, G. (Coord.), *Modelos de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: aplicaciones prácticas* (pp. 221-252). Madrid: Narcea Ediciones.

Niss, M. & Jensen, T.H. (eds.) (to appear). *Competencies and Mathematical Learning – Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.* English translation of part I-VI of Niss & Jensen (2002). Under preparation for publication in the series Texts from IMFUFA. Roskilde University, Denmark: IMFUFA

Jensen, TH (2007). *Evaluar la competencia en modelos matemáticos.* 2007). Modelado Matemático (ICTMA 12): Educación, Ingeniería y Economía , 141-148.

Obando, G. (2003). *La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo*. Revista Ema, 157-182.

Ohlsson, S. (1988). *Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts.* En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (vol. 2, pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ordoñez, C. (2007). El lenguaje da vida. *Al Tablero*. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-122046.html

Orrantia, J. (2006). *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva.*

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2011). *Los registros semióticos de representación en matemática.* Aula Universitaria, 1(13), 29-36.

Palacios, M. I. G., & Castorina, J. A. (2014). M*étodo clínico-crítico e etnografia em pesquisas sobre conhecimentos sociais*. Cadernos de Pesquisa, 44(154), 1052-1068.

Payne, J.W. (1976). *Task complexity and contingent processing in decision making: An information search and protocol analysis*. Organizational Behavior and Human Decision Processes, 16, 366-387.

Piaget, J., Inhelder, B., y Szeminska, A. *La gèomètrie spontanèe chez l`enfant. Paris, P. U.F*., 1948. Trad. Inglesa: The Child`s conception of geometry. London, Routledge & Kegan Paul 1960,1966.

Pérez, M. (2005). *Un marco para pensar configuraciones didácticas en el campo del lenguaje, en la educación básica. La didáctica de la lengua materna.* Estado de la discusión en Colombia, 47-65

Prieto Hernández, D. P., González, V., & Stiff, M. (2015). *Propuesta de una secuencia de actividades sobre interpretación de la Fracción como parte-todo en contextos continuos y discretos, a partir de la propuesta de Sáenz*

Poveda, A., (Sin fecha), Promigas, F. + *Problemáticas escolares con el número fraccionario como relación parte-todo.* Recuperado de https://drive.google.com/drive/u/0/folders/1VnYbkATXcIt-YsEbsKgXou4C_phhIJDn

Riviere, A. (1990). *Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva.* En A. Marchesi, C. Coll y J. Palacios (comps.), Desarrollo psicológico y educación (pp. 155-182). Madrid: Alianza.

Resnick, L.B. (1992). *From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge*. In G. Leinhardt, R.

Resnick LB. *Developing mathematical knowledge*. Am Psychol 1989;44:162-9.

Resnick LB. *From protocuantities to operators: building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge.* In: Leinhardt G, Putnam R, Hattrup RA, eds. Analysis of arithmetic for mathematics teaching. Hillsdale:LEA;1992.

Resnick, L., & Ford, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas*. Barcelona, Labor-MEC.

Secretaria de Educación. (2008). *Durango se Transforma. Examen 3° Primaria.* Recuperado de: https://es.scribd.com/document/29916976/Examen-3o-Primaria

Schwartz, J. (1988). *Intensitive quantity and referent transforming arithmetic operations*. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (vol. 2, pp. 41-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Thompson, P. W. y Saldanha, L.A. (2003). *Fractions and multiplicative reasoning*. En: J., Kilpatrick, G., Martin y D., Schifter (Eds.), *Research companion to the priciples and standards for school mathematics* (pp. 95-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). *How many decimals are there between two fractions?Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation*. *Cognition and instruction*, *28*(2), 181-209.

Vasco, C. E. (1994). *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas II*.

Vergnaud, G. (1990). *La teoría de los campos conceptuales.* Recherches en didactique des mathématiques, 10(2), 3.

Vidal, R. y Díaz, M.A., (2004). Resultados de las pruebas PISA 200 y 2003 en México. *Habilidades para la vida en estudiantes de 15 años.* México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Wiske, M. S. (2003). *La enseñanza para la comprensión*. En M. S. Wiske, La enseñanza para la comprensión. (págs. 237-239). Buenos Aires, Barcelona, México: Paidós.

Yin, RK (1992). *El papel de la teoría en la realización de estudios de casos y evaluaciones. Revista Europea De Oncología Ginecológica. 290 , 97-97.*

Zarzar, C. B. (2013). *El aprendizaje de fracciones en educación primaria: Una propuesta de enseñanza en dos ambientes*. Revista Horizontes Pedagógicos, *15(1).*