

Anexo Resultados

En este apartado se presenta el análisis de la información recolectada a lo largo del estudio. Este análisis se realiza a partir de matrices que organizan los datos y permiten observar tendencias tanto de forma cuantitativa como cualitativa por medio de enunciaciones y porcentajes de éxito.

Por tal razón, a continuación, se ilustran matrices por cada categoría y subcategoría, ellas corresponden a dos estructuras descritas en el capítulo metodología. La primera matriz, presenta los porcentajes de aciertos de las respuestas en cada indicador específico a investigar según una subcategoría, y enseña de forma paralela los resultados a lo largo de las tres situaciones que componen la prueba final. Lo anterior con el fin de detectar si hay un cambio considerable en el éxito de los estudiantes según el tipo de situación. En la segunda matriz, se muestran los enunciados de los estudiantes catalogados como correctos ó los enunciados catalogados como incorrectos, de cada indicador específico investigado, a lo largo de las tres situaciones, según cada caso. Ello con el fin de establecer las prácticas prototípicas, los invariantes en ellas y las posibles fuentes de los errores, a fin de esbozar una estructura común.

Para realizar la tarea descrita en los párrafos anteriores hemos considerado las siguientes codificaciones para efectos de síntesis y organización: entenderemos por Sit.1 la situación 1 correspondiente al proceso de llenado, Sit.2 la situación 2 correspondiente a la subida de la plataforma del super shot, Sit.3 la situación 3 correspondiente a la carrera de los 100 metros planos, y adicionalmente los rótulos como E1PF-p1.1 indican el estudiante del cual se hace un estudio detallado de caso y el

número de la pregunta de la prueba final; en este caso específico la codificación E1PF-p1.1 quiere decir que es una enunciación del “estudiante 1 quien responde la pregunta 1.1 de la prueba final”, adicionalmente, aclaramos que las enunciaciones que no tienen este tipo de rótulo se asocian a respuestas de alguno de los otros 24 estudiantes del curso.

Así pues, a continuación, se presentan los resultados y sus respectivos análisis caategoría por categoría.

6.1 De aplicaciones en situaciones conocidas y cercanas a su contexto a situaciones menos conocidas

Son cuatro las subcategorías correspondientes a esta categoría: Identificación de variables, relación cualitativa de la forma de dependencia, relación cuantitativa de la covariación sin uso de la razón de cambio y relación cuantitativa de la covariación con uso de la razón de cambio, como ya se dijo se estudiará la información para cada una de estas subcategorías.

6.1.1 Identificación de variables.

En esta subcategoría se analiza si el estudiante Identifica en la situación las dos variables de las que se va a estudiar la covariación.

La tabla 1 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C1-1 de esta categoría.

Tabla 1 Porcentajes de respuestas correctas categoría 1, Subcategoría 1, según cada situación

Subcategoría C1-1	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
Identificación de magnitudes para las cuáles sus valores	I.A. Cuando se trata de la variable dependiente	92(*)	87	79

varían o permanecen constantes durante el fenómeno.	de la covariación estudiada			
	I.B. Cuando se trata de otra magnitud variable pero que no es del par de la covariación estudiada	92	96	75
	I.C. Cuando se trata de una magnitud constante	92	83	96

(*) Cantidad de estudiantes del curso 24.

Origen: fuente propia

En general los estudiantes dan muestra de poder identificar cuándo una magnitud cambia su valor o permanece constante durante el desarrollo del fenómeno. No se observa una diferencia consistente en los porcentajes de éxito entre las tres situaciones, que permita afirmar que alguna de las tres situaciones resulta a los estudiantes más difícil que las otras. Sin embargo, la situación novedosa se le dificulta aproximadamente a una cuarta parte de los estudiantes.

Las siguientes son las enunciaciones características para cada situación relativas a este indicador estudiado, cuando las respuestas son correctas.

Tabla 2 Enunciados característicos para respuestas correctas de C1-1, Indicador IA.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.A. Cuando se trata de la variable dependiente de la covariación estudiada	<i>“Cambia. Porque aumenta a lo que cae el chorro”</i> (ver anexo E1PF-p1.1)	<i>“Cambia. Porque el supershot sube hasta el límite”</i>	<i>“Cambia. A lo que avanza cambia la distancia”</i> (ver anexo E1PF-p5.1)

<p><i>“Cambia porque según se va llenando va subiendo el nivel” (ver anexo E2PF-p1.1)</i></p> <p><i>“cambia porque va llenando” (ver anexo E3PF-p1.1)</i></p> <p><i>“cambia ya que dice que arroja agua a lo largo del tiempo”</i></p>	<p><i>de este”.(ver anexo E1PF-p3.1)</i></p> <p><i>“cambia porque los mecanismos hacen que suba y baje”(ver anexo E2PF-p3.1)</i></p> <p><i>“cambia porque va subiendo y bajando”(ver anexo E3PF-p3.1)</i></p> <p><i>“cambia porque mientras sube hay mayor distancia”</i></p>	<p><i>“cambia según va recorriendo la pista” (ver anexo E2PF-p5.1)</i></p> <p><i>“cambia de distancia con el tiempo” (ver anexo E3PF-p5.1)</i></p> <p><i>“cambia porque cada vez corre más rápido”</i></p>
--	---	--

Se reescriben los enunciados de los estudiantes textualmente, sólo se corrige ortografía y en algunos casos puntuación cuando se considera necesario para su comprensión. La codificación E2PF-p1.1 corresponde a la respuesta del estudiante dos, a la pregunta 1.1 de la prueba final de la secuencia didáctica. Enunciaciones sin referencia corresponde a estudiantes diferentes a los tres casos analizados.

Origen: fuente propia

Al analizar los enunciados parece que los estudiantes además de identificar que la cantidad de una magnitud varía, identifican la dependencia de esa cantidad con relación a otra. En Sit. 1 enunciados como “cambia ya que dice que arroja agua a lo largo del tiempo” hacen referencia a la dependencia del nivel del agua con el tiempo. En la Sit. 3 cuando se dice: “cambia de distancia con el tiempo” se reafirma la apreciación anterior sobre dependencia.

Tabla 3 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C1-1, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
<p>I.A. Cuando se trata de la variable independiente de la covariación estudiada</p>	<p><i>“No cambia porque es el mismo chorro”</i></p>	<p><i>“no cambia porque es la base”</i></p> <p><i>“No cambia. Porque la plataforma está pegada a la silla”</i></p>	<p><i>“no cambia porque la pista tiene la misma medida”</i></p> <p><i>“No cambia. La distancia no cambia porque un punto a otro no se mueve”</i></p>

Origen: fuente propia

Al analizar los enunciados pareciera que el error no está tanto en que los estudiantes no puedan identificar que cambia o no el valor de la magnitud sobre la cual se pregunta, sino en considerar equivocadamente que se pregunta por otra magnitud. En Sit. 1 cuando el estudiante dice: *“No cambia porque es el mismo chorro”*, parece que el sujeto confunde la magnitud nivel del agua con la constancia del chorro, en la Sit. 3 cuando se dice: *“no cambia porque la pista tiene la misma medida”*, parece que el sujeto no se refiere a la distancia recorrida por el atleta a medida que transcurre la carrera, sino a la distancia total de la carrera.

Entre los estudiantes que ofrecen respuestas erradas en este Indicador, hay uno que responde de forma consistente en las tres situaciones abordadas, para la situación uno dice: *“No cambia porque es el mismo chorro”*, en la situación dos: *“No cambia. Porque la plataforma está pegada a la silla”* y en la tres: *“No cambia. La distancia no cambia porque un punto a otro no se mueve*, los demás cometen errores en una o dos, pero no en las tres.

Tabla 4 Enunciados característicos para respuestas correctas de C1-1, Indicador I.B.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.B. Cuando se trata de otra magnitud variable pero que no es del par de la covariación estudiada	<i>“Cambia. Porque va subiendo cada que cae chorro”</i> (ver anexo E1PF-p1.4) <i>“cambia porque cuando se llena de agua ese espacio desaparece”</i> (ver anexo E2PF-p1.4) <i>“cambia porque se supone que llena”</i> (ver anexo E3PF-p1.4)	<i>“Si cambia. Porque cada vez que sube se acorta la distancia de subida”</i> (ver anexo E1PF-p3.6) <i>“cambia ya que por ejemplo cuando vaya por la mitad le falta la otra mitad”</i> (ver anexo E2PF-p3.6) <i>“cambia porque al subir da menos altura”</i>	<i>“Cambia. A lo que avanza recorta la distancia que le falta”</i> (ver anexo E1PF-p5.6) <i>“cambia según va recorriendo la pista”</i> (ver anexo E2PF-p5.6) <i>“cambia porque se acorta la distancia a la meta a medida que va corriendo”</i> <i>“cambia porque va disminuyendo cada vez más”</i>

<p><i>“cambia porque se hace más pequeño cuando aumenta el agua”</i></p> <p><i>“cambia porque aumenta todo el tiempo y el agua toma el lugar”</i></p>	<p><i>“cambia porque cuando baja queda espacio”</i></p> <p><i>“cambia porque se acorta la distancia al llegar a la cima”</i></p> <p><i>“cambia porque cada que sube se acorta la distancia de subida”</i></p>
---	---

Origen: fuente propia

Además de identificar las cantidades de magnitud propias del fenómeno los estudiantes identifican otras magnitudes que varían su cantidad en ese mismo fenómeno. Parece ser que en su gran mayoría los estudiantes de este grado escolar, sin importar la situación, están en condiciones de identificar si una magnitud que interviene en un fenómeno varía o no en su cantidad.

Tabla 5 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C1-1, Indicador I.B.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.B. Cuando se trata de otra magnitud variable pero que no es del par de la covariación estudiada	<i>“No cambia. No es lo mismo porque el tanque es diferente”</i>	<i>“no cambia porque sube la misma velocidad”</i> (ver anexo E3PF-p3.6)	<i>“No cambia porque solo tiene que recorrer 100 metros”</i> (ver anexo E3PF-p5.6) <i>“No cambia. Porque sólo tiene que recorrer 100 metros”</i>

Origen: fuente propia

Al analizar los enunciados persiste el error identificado en preguntas anteriores, pues algunos estudiantes consideran equivocadamente que se pregunta por otra magnitud. En Sit. 1 cuando los estudiantes dicen: *“No cambia. No es lo mismo porque el tanque es diferente”*, parece que el sujeto confunde el espacio vacío del tanque en el transcurso del fenómeno con la altura del tanque, y, por tanto, para que ésta varíe el tanque debe cambiar. En la Sit. 3 cuando al parecer otro estudiante dice: *“No cambia*

porque solo tiene que recorrer 100 metros”, parece que el sujeto no se refiere a la distancia que le falta por recorrer al atleta en el transcurso de fenómeno sino a la distancia total que debe recorrer. Al avanzar en las distintas situaciones estudiadas, la cantidad de estudiantes que no identifican variación en la cantidad de magnitudes abordadas aumenta, posiblemente por la incidencia que tiene el que esta sea una situación no trabajada durante la secuencia didáctica.

Tabla 6 Enunciados característicos para respuestas correctas de C1-1, Indicador I.C.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.C. Cuando se trata de una cantidad de magnitud constante	<p><i>“No cambia. Porque no se puede estirar o cambiar”</i> (ver anexo E1PF-p1.2)</p> <p><i>“No cambia porque es un objeto no deforme”</i> (ver anexo E2PF-p1.2)</p> <p><i>“no cambia porque la forma no cambia”</i></p> <p><i>“no se puede cambiar”</i> (ver anexo E3PF-p1.2)</p> <p><i>“no cambia porque el agua no hace que crezca o algo por el estilo”</i></p>	<p><i>“No cambia. Porque ya tiene altura desde que la construyeron”</i> (ver anexo E1PF-p3.3)</p> <p><i>“no cambia ya que la torre está fija”</i> (ver anexo E2PF-p3.3)</p> <p><i>“no cambia porque no se mueve”</i> (ver anexo E3PF-p3.3)</p> <p><i>“cambia porque la plataforma sube o baja”</i></p>	<p><i>“No cambia. Porque el reto es de 100 metros”</i> (ver anexo E1PF-p5.3)</p> <p><i>“No cambia ya que es algo fijo”</i> (ver anexo E2PF-p5.3)</p> <p><i>“No cambia porque no pueden cambiar las medidas”</i> (ver anexo E3PF-p5.3)</p>

Origen: fuente propia

Con base en los enunciados de esta tabla parece que los estudiantes identifican magnitudes para las cuáles no varían su valor durante el fenómeno estudiado, es decir, identifican las cantidades constantes, que son caracterizadas como algo fijo, que no cambian por los efectos de otras que sí varían. En Sit.1 cuando los estudiantes dicen *“no cambia porque el agua no hace que crezca o algo por el estilo”* posiblemente conciben que el nivel de agua puede cambiar pero que este suceso no afectará la altura

del tanque ya que es fijo. La afirmación en la Sit. 3 es más explícita “No cambia ya que es algo fijo”. En la situación del super shot algunos estudiantes presentaron confusión frente a la cantidad de magnitud estudiada. Podría decirse que sin importar la situación, en su mayoría los estudiantes identifican las magnitudes que NO varían su valor.

Tabla 7 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C1-1, Indicador I.C.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.C. Cuando se trata de una magnitud constante	<p><i>“cambia porque siempre aumenta con el chorro”</i></p> <p><i>“Cambia. Porque son tanques diferentes”</i></p>	<p><i>“Si cambia. Si es más alta sería más extremo”</i></p>	<p><i>“cambia porque cada vez va corriendo más”</i></p>

Origen: fuente propia

Nuevamente se puede apreciar que algunos estudiantes vuelven, como en los casos anteriores, a ofrecer la respuesta para una magnitud diferente a la que se pregunta, en Sit. 1 cuando algunos estudiantes dicen: “Cambia. Porque son tanques diferentes”, se presume que piensan en que se pueden tener tanques diferentes con alturas distintas, además en Sit. 3 probablemente se confunde la magnitud longitud de la pista con la distancia recorrida, al decir: “cambia porque cada vez va corriendo más” parece ser, como ya se dijo arriba, que no es tanto que los estudiante se equivoquen al valorar si dada una magnitud se mantienen o no constantes sus valores, más bien lo que hacen es confundir la magnitud, o, por el contrario, el hecho de que se confundan de magnitud es precisamente porque no tienen claro el asunto de lo constante y variable.

Al revisar la respuesta de los estudiantes con relación a esta categoría podría decirse que en su gran mayoría están en condiciones de identificar si una magnitud varía su cantidad o no a lo largo del desarrollo del fenómeno estudiado, y parece que

poco importa el contenido de las tres situaciones estudiadas, aunque, se aprecia una pequeña diferencia en la situación 3, quizá por ser una situación no estudiada durante la secuencia didáctica. Cuando incurren en error parece ser que al contestar terminan cambiando la magnitud por la que se les interroga (p. ej. no cambio, la distancia recorrida, porque hay que recorrer 100 m.)

6.1.2 Relación cualitativa de la forma de dependencia

En esta subcategoría se analiza si el estudiante relaciona de forma cualitativa el sentido del cambio de una de las variables en relación con el sentido de cambio de la otra (p. ej. mientras una aumenta la otra aumenta)

La tabla 8 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C1-2 de esta categoría.

Tabla 8 Porcentajes de respuestas correctas categoría C1, Subcategoría C1-2, según cada situación

Subcategoría C1-2:	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit.3 %
Relación cualitativa de la forma de covariación entre pares de cantidades de magnitud, a través del sentido del cambio de una de las variables en relación con el sentido de cambio de la otra (p. ej. mientras una aumenta la otra aumenta).	I.A. Cuando se trata de la relación del par de variables de la covariación estudiada.	91.6	95.8	100
	I.B. Cuando se trata del estudio de dos magnitudes que no tienen relación con el fenómeno estudiado.	87.5	29.1	37.5
	I.C. Cuando se trata de dos magnitudes que no covarían.	12.5	12.5	41.6

Origen: fuente propia

En general, los estudiantes logran identificar la relación de dependencia entre las magnitudes de la covariación estudiada, pero cuando se trata de magnitudes que no tienen tal relación se da una diferencia fuerte entre la sit. 1 y las otras dos. También se observa una baja de respuestas exitosas cuando se trata de magnitudes que no covarían (I.C.), aunque en la situación 3 sube un poco el porcentaje. Como veremos en la tabla 13 algunos estudiantes mencionan en Sit.2: *“si conviene porque si hay sobrecarga la atracción se daña”* esto lleva a concluir que la diferencia en el porcentaje de éxito se debe a que en el contexto del fenómeno de la situación 2 y 3 la variación de la cantidad de magnitud por la que se pregunta podría ser crucial en el desarrollo del fenómeno.

Tabla 9 Enunciados característicos para respuestas correctas de C1-2, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.A. Cuando se trata de la relación del par de variables de la covariación estudiada	<p><i>“Sí conviene estudiar la relación. Porque con estas dos sabemos cuánto se demora y que altura alcanza”</i>(ver anexo E1PF-p2.3)</p> <p><i>“Si conviene porque cuando el nivel llegue a tope al pasar el tiempo se podrá desbordar”</i>(ver anexo E2PF-p2.3)</p> <p><i>“si me conviene porque el tiempo puede variar”</i>(ver anexo E3PF-p2.3)</p> <p><i>“si conviene para saber el problema en las próximas veces</i></p> <p><i>si conviene porque pudo haber una alteración del tiempo de llenado o del nivel del tanque”</i></p> <p><i>“si conviene para saber cuánto alcanza y así poder saber cuándo parar”</i></p>	<p><i>“Sí conviene estudiar la relación. Porque así sabría qué alto está la plataforma y que tiempo se demora”</i> (ver anexo E1PF-p4.3)</p> <p><i>“si conviene porque cuando llegue al tope puede pasar lo mismo se romperá o soltará”</i> (ver anexo E2PF-p4.3)</p> <p><i>“si conviene porque puede que choque al subir o bajar si no calculamos bien”</i>(ver anexo E3PF-p4.3)</p> <p><i>“si conviene porque tenemos que ver cuánto sube”</i></p> <p><i>“si conviene porque debemos saber si siempre sube igual”</i></p> <p><i>“si conviene porque con eso sabrá que tan alto están las personas”</i></p>	<p><i>“Sí conviene estudiar la relación. Se podría saber en qué momento de la carrera el posible fraude”</i> (ver anexo E1PF-p6.3)</p> <p><i>“conviene porque si recorre menos distancia que los demás es que hace trampa”</i>(ver anexo E2PF-p6.3)</p> <p><i>“conviene porque toca tener calculado la distancia”</i> (ver anexo E3PF-p6.3)</p> <p><i>“conviene porque así miramos si todos recorren la misma distancia”</i></p> <p><i>“sí porque pueden promediar la velocidad de las presentaciones y el que sea más rápido un poco se sabe si está haciendo trampa”</i></p>

Origen: fuente propia

Al estudiar los enunciados parece que algunos estudiantes establecen la relación de dependencia entre magnitudes que covarían y que incluso, en algunos casos, además mencionan que si tienen datos sobre esta covariación podrían describir la

velocidad o razón de cambio, tal como lo mencionan los estudiantes en Sit. 2 al decir: *“si conviene porque debemos saber si siempre sube igual.”*

Estos enunciados muestran que estos estudiantes establecen con claridad la relación de dependencia entre las dos magnitudes del par del cual se estudia la covariación. Sin embargo los enunciados *“Si conviene porque cuando el nivel llegue a tope al pasar el tiempo se podrá desbordar”*, *“si conviene porque cuando llegue al tope puede pasar lo mismo se romperá o soltará”* y *“Si conviene estudiar la relación, se podría saber en qué momento de la carrera el posible fraude”*, permiten identificar que algunos estudiantes realizan asociaciones con otras condiciones del fenómeno distintas a las propias de la covariación, para saber la conveniencia en el estudio, pareciera como si todavía persistiera en ellos algo de dificultad de diferenciar claramente las diversas magnitudes intervinientes en el fenómeno y, especialmente, los efectos de estas.

Tabla 10 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C1-2, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.A. Cuando se trata de la relación del par de variables de la covariación estudiada	<i>“No conviene estudiar la relación. No porque el tanque siempre va a tener la misma medida”</i>	<i>“No conviene estudiar la relación”</i> <i>“No me interesa que las sillas vayan subiendo con el tiempo porque eso tiene su propio tiempo”</i>	

Origen: fuente propia

Estas respuestas incorrectas ilustran que efectivamente en algunos estudiantes persiste la dificultad de confundir las variables, en Sit.1 cuando los estudiantes dicen: *“No conviene estudiar la relación. No porque el tanque siempre va a tener la misma*

medida”, parece que el sujeto confunde la magnitud nivel del agua con la altura del tanque, para asignar que no covarían. Este tipo de error ha sido repetitivo sin importar el tipo de situación.

Tabla 11 Enunciados característicos para respuestas correctas de C1-2, Indicador I.B.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.B. Cuando se trata del estudio de dos magnitudes que no tienen relación con el fenómeno estudiado	<p><i>“No conviene estudiar la relación. La temperatura del interior no varía entonces no tiene sentido en el experimento”</i> (ver anexo E1PF-p2.2)</p> <p><i>“No conviene porque la temperatura no influye con el llenado del agua”</i> (ver anexo E2PF-p2.2)</p> <p><i>“No me interesa la temperatura pero si la altura para que no se me desperdicie”</i>(ver anexo E3PF-p2.2)</p> <p><i>“no conviene porque con el tiempo de llenado sea el mismo”</i></p>	<p><i>“No conviene estudiar la relación. Eso no afectaría el experimento del supershot”</i> (ver anexo E1PF-p4.2)</p> <p><i>“no conviene porque está claro que no habrá más del máximo de personas mientras transcurre el tiempo”</i> (ver anexo E2PF-p4.2)</p> <p><i>“no se necesita ya que saber el número de pasajeros no es necesario”</i></p>	<p><i>“No conviene estudiar la relación. Porque no todos llegan al mismo tiempo”</i> (ver anexo E1PF-p6.2)</p> <p><i>“no conviene porque la cantidad de atletas no influye en la velocidad del atleta”</i>(ver anexo E2PF-p6.2)</p> <p><i>“no conviene porque la cantidad de atletas siempre es la misma”</i></p>

Origen: fuente propia

Al observar los enunciados, se puede inferir que algunos estudiantes pueden identificar la covariación entre cantidades de magnitud y reconocen cuando una magnitud no es relevante para un estudio específico, en Sit. 1 cuando los estudiantes dicen:

“No conviene estudiar la relación. La temperatura del interior no varía, entonces no tiene sentido en el experimento”, el sujeto reconoce que la magnitud no hace parte de la covariación estudiada en el fenómeno, pero además aclara que ella es constante.

Tabla 12 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C1-2, Indicador I.B.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.B. cuando se trata del estudio de dos magnitudes que no tienen relación con el fenómeno estudiado	<p>“conviene porque se debe tener en cuenta la temperatura”</p> <p>“sí conviene estudiar la relación. Porque si no sabemos cuánto es la temperatura y el tiempo podría haber una catástrofe”</p>	<p>“si conviene porque si hay sobrecarga la atracción se daña” (ver anexo E3PF-p4.2)</p> <p>“sí conviene saber cuántas personas pueden subir y que las demás no esperen todo el día”</p> <p>“Sí conviene estudiar la relación. Porque si hay sobrecarga la atracción no resiste”</p>	<p>“si conviene porque toca estudiar el tiempo de todos los atletas”</p> <p>“Si conviene estudiar la relación. Porque se necesita saber cuántos hay y cuanto se demora cada uno”</p>

Origen: fuente propia

Estudiando los enunciados se tiene la impresión que algunos estudiantes no reconocen cuando una magnitud es irrelevante para el estudio del fenómeno, sin embargo al detenerse en sus enunciaciones se puede apreciar que se debe a que en el contexto del fenómeno la variación de la cantidad de magnitud por la que se pregunta podría ser crucial en el desarrollo del fenómeno tal como lo mencionan en Sit.2: “si conviene porque si hay sobrecarga la atracción se daña”, aunque no ofrezca información para resolver el problema requerido; quizá esto explica el porcentaje de respuesta no correctas, **tabla 8**, en Sit. 2 y Sit. 3.

Tabla 13 Enunciados característicos para respuestas correctas de C1-2, Indicador I.C.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
cuando se trata de una relación donde no hay covariación	<p><i>“No conviene estudiar la relación. Porque entonces sabría dónde está el desperfecto y no tendría que saber nada porque ya sabe”</i> (ver anexo E1PF-p2.1)</p> <p><i>“No conviene porque la altura no tiene nada que ver a no ser que alteren el tiempo de llenado”</i></p>	<p><i>“No conviene estudiar la relación. Porque entonces sabría dónde están las plataformas”</i> (ver anexo E1PF-p4.1)</p>	<p><i>“No conviene porque la longitud de la pista no influye en la velocidad del atleta”</i> (ver anexo E2PF-p6.1)</p> <p><i>“No conviene porque la longitud de la pista es la misma siempre”</i></p>

Origen: fuente propia

Como pudo verse en la tabla 8 los porcentajes de respuestas correctas en este caso son muy bajos. Este indicador específico causa mucha dificultad. ya que el porcentaje de éxito es muy bajo en todas las situaciones estudiadas. Los estudiantes que logran hacerlo intuyen que no se puede establecer una relación de covariación con una cantidad de magnitud constante y más aún que este tipo de cantidades no producen cambios en otras, tal como lo dicen en Sit.3: *“No conviene porque la longitud de la pista no influye en la velocidad del atleta”* (ver anexo E2PF-p6.1).

Tabla 14 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C1-2, Indicador I.C.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
cuando se trata de una relación donde no hay covariación	<p><i>“Si conviene porque cuando pase el tiempo el agua va a llegar al tope y se llegará a desbordar”</i> (ver anexo E2PF-</p>	<p><i>“Si conviene porque si no se controla esto la plataforma de las sillas se rompería o soltara al llegar al tope”</i> (ver</p>	<p><i>“Sí conviene estudiar la relación. Porque se puede evaluar respecto con el tiempo y la longitud de la</i></p>

<p>p2.1) <i>“si conviene porque así pueden tener el tiempo contado para las próximas veces”</i> <i>“Si conviene para saber cuánto dura en llenar el tanque”</i> <i>“Si conviene porque de pronto en algún momento el tiempo puede cambiar”</i> (ver anexo E3PF-p1.1) <i>“Sí conviene estudiar la relación. La altura del tanque no cambia pero el tiempo de llenado puede variar”</i></p>	<p>anexo E2PF-p4.1) <i>“si conviene porque tenemos que calcular la altura de la torre y el tiempo de funcionamiento”</i> (ver anexo E3PF-p4.1) <i>“si conviene porque es necesario para ver si siempre es igual</i> <i>si conviene porque se sabrá dónde están las plataformas”</i> <i>“Sí conviene estudiar la relación.”</i></p>	<p><i>pista”</i>(ver anexo E1PF-p6.1) <i>“Si conviene porque toca tener las medidas para cuando termine”</i> (ver anexo E3PF-p6.1)</p>
---	--	---

Origen: fuente propia

Considerando los enunciados de los estudiantes y el porcentaje alto de fracaso se podría señalar que la causa de estas enunciaciones se deba al error prototípico señalado ya en varias ocasiones, confundir la cantidad de magnitud por la que se pregunta. Adicionalmente pareciera que los estudiantes hacen una composición de tres cantidades de magnitud, relacionan la dependencia entre el nivel del agua y el tiempo como forma de establecer una posible predicción de un tiempo máximo de llenado según la altura del tanque, tal como lo mencionan en Sit. 1: *“Si conviene porque cuando pase el tiempo el agua va a llegar al tope y se llegará a desbordar”* en este enunciado se aprecia claramente que es importante conocer la altura del tanque así esta no varíe, ya que se debe conocer el rango máximo de variación para que el agua no se riegue o la plataforma de las sillas no se salga de la torre. Teniendo estos presupuestos se podría pensar que estos estudiantes posiblemente identifican la

dependencia de magnitudes en la relación de covariación estudiada, pero por las implicaciones del enunciado de la pregunta, acuden a su experiencia para hacer las suposiciones que derivan en sus enunciados.

Una vez estudiadas las respuestas de los estudiantes a las preguntas correspondientes a esta subcategoría es posible afirmar que la mayoría identifica si el estudio del par de variables de la covariación estudiada arroja información útil sobre el desarrollo de un fenómeno y parece que esto se da con relativa independencia del contenido de la situación. Pero cuando se trata de distinguir la importancia de estudiar dos magnitudes que no tienen relación con el fenómeno estudiado, se tiene la impresión que algunos estudiantes no reconocen cuando una magnitud es irrelevante para el estudio del fenómeno. Y parece que sucede esto, porque ellos consideran importante estudiar la covariación de estas magnitudes porque tiene que ver con algún aspecto que podría ser crucial en el desarrollo del fenómeno. Así ocurre en la situación medianamente conocida y la situación novedosa. Cuando se trata de una relación donde no hay covariación el porcentaje de acierto es mínimo, una causa de ello se detectada en las enunciaciones pues constantemente confunden la cantidad de magnitud por la que se pregunta.

En este momento vale la pena hacer un alto y observar el nivel de complejidad de las enunciaciones que van creando los diferentes sujetos a investigar, dado que estos enunciados son ilustrativos de la inestabilidad del significado según la subjetividad de cada estudiante.

Tabla 15 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 2.3, 4.3 y 6.3 de la prueba final.

Situación	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
-----------	-----------------------	------------------------	-----------------------

1	<i>“Sí conviene estudiar la relación. Porque con estas dos sabemos cuánto se demora y que altura alcanza”</i> (ver anexo E1PF-p2.3)	<i>“Si conviene porque cuando el nivel llegue a tope al pasar el tiempo se podrá desbordar”</i> (ver anexo E2PF-p2.3)	<i>“si me conviene porque el tiempo puede variar”</i> (ver anexo E3PF-p4.3)
2	<i>“Sí conviene estudiar la relación. Porque así sabría qué alto está la plataforma y que tiempo se demora”</i> (ver anexo E1PF-p4.3)	<i>“si conviene porque cuando llegue al tope puede pasar lo mismo se romperá o soltará”</i> (ver anexo E2PF-p4.3)	<i>“si conviene porque puede que choque al subir o bajar si no calculamos bien”</i> (ver anexo E3PF-p4.3)
3	<i>“Sí conviene estudiar la relación. Se podría saber en qué momento de la carrera el posible fraude”</i> (ver anexo E1PF-p6.3)	<i>“conviene porque si recorre menos distancia que los demás es que hace trampa”</i> (ver anexo E2PF-p6.3)	<i>“conviene porque toca tener calculado la distancia”</i> (ver anexo E3PF-p6.3)

Origen: fuente propia

Aunque los tres casos coinciden en que conviene estudiar la variación entre las dos magnitudes (nivel del agua y tiempo, altura de la plataforma de sillas y el tiempo, la distancia recorrida y el tiempo), las razones que dan muestran diferencias. El sujeto de nivel alto en sus enunciados muestra que asocia claramente la relación de covariación entre las dos magnitudes y la información que se necesita. El sujeto de nivel medio, lo hace con menos claridad y el de nivel bajo, ofrece razones que no enuncian la covariación sino un instante (el momento extremo). Estas formas de enunciar sugieren una diferencia al referirse a la covariación, una que hace referencia a algunos momentos y otra que hacer referencia no a momentos sino a la relación de covariación.

6.1.3. Relación cuantitativa de la covariación sin uso de la razón de cambio (C1-3)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante a partir de la situación cuantifica la coordinación de la variación de la variable dependiente con relación a cambios de la variable independiente. Lo hace utilizando estrategias aditivas o multiplicativas, sin hacer uso explícito de razón de cambio. (p. ej. a intervalos iguales de x (Δx) corresponden intervalos iguales de y (Δy)).

La tabla 16 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C1-3 de esta categoría.

Tabla 16 Porcentajes de respuestas correctas categoría C1, Subcategoría C1-3, según cada situación

Subcategoría C1-3:	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %	
A partir de la situación cuantifica la coordinación de la variación de la variable dependiente con relación a cambios de la variable independiente. Lo hace utilizando estrategias aditivas o multiplicativas, sin hacer uso explícito de razón de cambio. (p. ej. a intervalos iguales de x (Δx) corresponden intervalos iguales de y (Δy)).	I.A. Cuando el valor desconocido es la variable independiente y se pregunta por el cambio entre dos estados de la variación diferente a la inicial.		75	84	66
	I.B. Cuando el valor desconocido es la variable dependiente y se pregunta por el cambio del estado inicial al estado final.		67	83	50

Origen: fuente propia

En el indicador I.A., la cantidad de estudiantes que dan muestra de cuantificar la variación de la variable dependiente con relación a los cambios de la variable independiente, se reducen a cerca de tres cuartos de los estudiantes. Estos estudiantes despliegan dos tipos de estrategias, aquellos sujetos que hacen uso de la razón de cambio para resolver el problema y aquellos

estudiantes que usan estrategias aditivas o multiplicativas para hacer aproximaciones que los lleven a establecer la cuantificación del cambio. De manera similar en el Indicador I.B., se puede observar que cerca de dos tercios de los estudiantes emplean o hacen referencia a la razón de cambio en su enunciado, pero en la situación 3 se presenta dificultad para identificar la razón de cambio y hacer uso efectivo de ella.

Adicionalmente, se podría llegar a decir que de forma consistente y sin importar la situación o el tipo de indicador específico, un tercio de los estudiantes se les dificulta hacer este tipo de cuantificaciones.

Tabla 17 Enunciados característicos para respuestas correctas de C1-3, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.A. Cuando el valor desconocido es la variable independiente y se pregunta por el cambio entre dos estados de la variación diferente al inicial.	<p><i>“32 minutos. Ya que cada minuto sube 3 metros pero tenía 11 metros reste 11 metros a 107 metros y el resultado lo dividí en 3”</i> (ver anexo E1PF-p8)</p> <p><i>“107-11= 96 y 96/3= 32”</i></p>	<p><i>“45 segundos: ya que es la mitad de segundos de metros entonces si multiplicamos 45x2 da 90 esos son los metros que subieran.”</i> (ver anexo E1PF-p11)</p> <p><i>“109-29=90 y 90/2=45”</i></p>	<p><i>“35 seg: ya que resto 15 a 85 = 70 y divido en 1=70 y le resto la mitad. Ya que es cada 2 metros cada segundo o sea la mitad”</i> (ver anexo E1PF-p14)</p>

<p><i>“porque si es 3 cada minuto, es 1 cada 20 segundos; por lo cual $3 \times 4 = 12$ entonces $3:40=17$; y $3 \times 36=108$ y $35:40=107$” (ver anexo E2PF-p8)</i></p> <p><i>“32 minutos porque cada 3 metros de agua pasa 1 minuto”</i></p>	<p><i>“$2 \times 9=18$ entonces $9:30=19$ y $2 \times 55=110$ entonces $54:30=109$” (ver anexo E2PF-p11)</i></p>	<p><i>“$2 \times 7=14$ entonces $7:30=15$ y $2 \times 43=86$ entonces $42:30=85$” (ver anexo E2PF-p14)</i></p> <p><i>“35 metros”</i></p>
--	--	--

Origen: fuente propia

Al considerar los enunciados de los estudiantes se observa que hay dos tipos de estrategias para calcular el aumento de una cantidad de magnitud dado el aumento de la otra. En la primera estrategia se calcula el aumento de una magnitud utilizando una estrategia aditiva, luego usa la razón de cambio para establecer el aumento en la otra magnitud tal como se muestra en Sit. 1 cuando dice: *“32 minutos. Ya que cada minuto sube 3 metros pero tenía 11 metros reste 11 metros a 107 metros y el resultado lo dividí en 3”*, el segundo recurso de solución consiste en realizar diferentes aproximaciones utilizando estrategias aditivas o multiplicativas para establecer el aumento de una cantidad de magnitud en relación a el aumento de otra. En ningún momento de la segunda estrategia, se esboza justificación que permita identificar si hace uso de la razón de cambio tal como se menciona en Sit. 1 cuando dice: *“porque si es 3 cada minuto, es 1 cada 20 segundos; por lo cual $3 \times 4 = 12$ entonces $3:40=17$; y $3 \times 36=108$ y $35:40=107$ ”*.

Adicionalmente se puede apreciar que Sin importar cuál estrategia utiliza el estudiante es constante en cada una de las tres situaciones, se puede identificar que los estudiantes de nivel alto, medio y bajo, hacen uso de su estrategia particular, en cada situación.

Tabla 18 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C1-3, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.A. Cuando el valor desconocido es la variable independiente y se pregunta por el cambio entre dos estados de la variación diferente al inicial.	<i>“ha transcurrido 34,5 minutos”</i> <i>“35 minutos. Porque el agua sube cada 3 metros y divide $107 \div 3$”</i>	<i>“38 minutos porque cada segundo sube 2 metros”</i>	<i>“30 minutos”</i> <i>“42 metros”</i>

Origen: fuente propia

Estudiando las enunciaciones de los estudiantes podemos identificar que realizan diferentes aproximaciones utilizando estrategias aditivas o multiplicativas, pero no pueden calcular el cambio de una cantidad de magnitud al darle información sobre la razón de cambio, porque desconocen que ha habido un cambio en la otra cantidad de magnitud, por ejemplo, en Sit.1 cuando dice *“35 minutos. Porque el agua sube cada 3 metros y divide $107 \div 3$ ”* se puede apreciar que el estudiante no consideró que hay un cambio en la cantidad de magnitud dependiente y que la pregunta se refiere al tiempo que se toma para ir de un estado inicial (diferente de cero) a un estado final, y simplemente aplica la razón de cambio para conocer el tiempo que se toma para llegar al estado final, partiendo desde cero.

Tabla 19 Enunciados característicos para respuestas correctas de C1-3, Indicador I.B.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.B. Cuando el valor desconocido es la variable dependiente y se pregunta por el cambio del estado inicial al estado final.	<p><i>“405 metros: multiplique 85x5 y el resultado fue 405”</i> <i>(ver anexo E1PF-p9)</i> <i>“425. 5x85=425”</i> <i>“425 metros porque cada minuto sube 5 metros”</i> <i>“porque si es 5 cada minuto, es 1 cada 12 segundos, por lo cual 5x5=25 y 5x85=425”</i> <i>(ver anexo E2PF-p9)</i> <i>“405 metros porque multiplican 85 por 5”</i></p>	<p><i>“405 metros.: multiplique 75 segundos x 5 metros y coloque el resultado”</i> <i>(ver anexo E1PF-p12)</i> <i>“5x75=375”</i> <i>(ver anexo E2PF-p12)</i> <i>“375 segundos”</i> <i>“375 metros después de 75 segundos”</i> <i>“375 metros”</i></p>	<p><i>“450 metros: multiplico 90x5 y coloco el resultado”</i> <i>(ver anexo E1PF-p15)</i> <i>“5x90=450”</i> <i>(ver anexo E2PF-p15)</i> <i>“450 metros”</i></p>

Origen: fuente propia

Revisando las enunciaciones propias de este indicador específico, se puede determinar que dos tercios de los estudiantes identifican y aplican de forma efectiva el cambio de una cantidad de magnitud utilizando la información dada sobre la razón de cambio, de un fenómeno de variación en un enunciado verbal, y dan cuenta de la covariación entre las cantidades de magnitud sin importar el cambio de situaciones.

Tabla 20 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C1-3, Indicador I.B.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.B. Cuando el valor desconocido es la variable dependiente y se pregunta por el cambio del estado inicial al estado final.	<p><i>“17 minutos. Porque el agua sube 5 metros cada minuto y dividí $85 \div 5$”</i></p> <p><i>“4 minutos porque $25 - 5 = 20$ y $20/5 = 4$”</i></p> <p><i>“ha transcurrido 34,5 minutos”</i></p> <p><i>“35 minutos. Porque el agua sube cada 3 metros y divide $107 \div 3$”</i></p>	<i>“38 minutos porque cada segundo sube 2 metros”</i>	<p><i>“30 minutos”</i></p> <p><i>“42 metros”</i></p>

Origen: fuente propia

Los enunciados presentes en este indicador específico dan cuenta que un tercio de los estudiantes no pueden calcular el cambio de una cantidad de magnitud al darle información sobre la razón de cambio, como se observa en Sit.1 se enuncia que: *“17 minutos. Porque el agua sube 5 metros cada minuto y dividí $85 \div 5$ ”*, el error consiste en aplicar inadecuadamente la razón de cambio como estrategia para calcular el valor de la cantidad de magnitud indagada, pero en la Sit. 3 se presenta dificultad para identificar la razón de cambio y hacer uso efectivo de ella, pues confunden el sentido de la razón de cambio, es decir, cuando se considera un isomorfismo entre las magnitudes que covarían, la razón de cambio para ir de la variable independiente a la dependiente es la inversa de la razón de cambio para ir de la variable dependiente a la variable independiente.

Luego de considerar las respuestas de los estudiantes a las situaciones planteadas para esta subcategoría se aprecia que el porcentaje de los sujetos que logra cuantificar la coordinación de la variación de la variable dependiente con relación a cambios

de la variable independiente por medio de la razón de cambio se reduce a cerca de los tres quintos de los estudiantes, mientras que unos pocos lo logran hacer usando estrategias aditivas y multiplicativas en un proceso de aproximación. Esta dificultad se acentúa cuando se aborda la situación novedosa.

La dificultad constatada en las enunciaciones de los estudiantes tiene que ver con la imposibilidad de ver o caer en cuenta que ha habido un cambio en la variable independiente y por ello la pregunta se refiere al tiempo que se toma para ir de un estado inicial (diferente de cero) a un estado final. Por otro lado, cuando se trata de calcular el aumento de una cantidad de magnitud de la variable independiente dada la razón de cambio de la covariación, al parecer los estudiantes confunden el sentido de la razón de cambio que hay entre el par de magnitudes que covarían.

Llegado el final de esta subcategoría, ilustramos la diferencia en el nivel de complejidad de las enunciaciones que van creando los diferentes sujetos que se investigan a profundidad, dado que ello es evidencia de la inestabilidad del significado según la subjetividad de cada estudiante.

Tabla 21 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 16, 17 y 18 de la prueba final.

Sit	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	“32 minutos. Ya que cada minuto sube 3 metros, pero tenía 11 metros, reste 11 metros a 107 metros y el resultado lo dividí en 3” (ver anexo E1PF-p8)	“porque si es 3 cada minuto, es 1 cada 20 segundos; por lo cual $3 \times 4 = 12$ entonces $3:40=17$; y $3 \times 36=108$ y $35:40=107$ ” (ver anexo E2PF-p8)	No responde

2	<i>“45 segundos: ya que es la mitad de segundos de metros entonces si multiplicamos 45×2 da 90 esos son los metros que subieran.”</i> (ver anexo E1PF-p11)	<i>“$2 \times 9 = 18$ entonces $9:30 = 19$ y $2 \times 55 = 110$ entonces $54:30 = 109$”</i> (ver anexo E2PF-p11)	<i>No responde</i>
3	<i>“35 seg: ya que resto 15 a $85 = 70$ y divido en $1 = 70$ y le resto la mitad. Ya que es cada 2 metros cada segundo o sea la mitad”</i> (ver anexo E1PF-p14)	<i>“$2 \times 7 = 14$ entonces $7:30 = 15$ y $2 \times 43 = 86$ entonces $42:30 = 85$”</i> (ver anexo E2PF-p14)	<i>No responde</i>

Origen: fuente propia

En las enunciaciones y procedimientos que realizan estos tres sujetos se nota que hay prácticas prototípicas en cada sujeto ya que mantiene su enunciación y procedimiento a lo largo del campo de situaciones, por ejemplo, en Sit.1 cuando el sujeto 1 dice: *“32 minutos. Ya que cada minuto sube 3 metros pero tenía 11 metros reste 11 metros a 107 metros y el resultado lo dividí en 3”* (ver anexo E1PF-p8), refleja la práctica prototípica frente a estos problemas, como se ve en los enunciados que emite en Sit.2 y Sit.3. Pero esto no sólo sucede con el sujeto 1, ya que los demás sujetos actúan siempre con una la misma pauta en las distintas situaciones.

Otra característica que se puede inferir en la tabla de arriba es que las prácticas prototípicas de los sujetos son muy dispares, si miramos la práctica del sujeto 1, podemos decir que esta persona siempre tiene en cuenta que hay un cambio en una de las magnitudes del fenómeno estudiado, cuantifica este aumento y a partir de él aplica la razón de cambio que relaciona el par de

magnitudes que covarían. Mientras que el sujeto de nivel medio hace diferentes aproximaciones por métodos aditivos y multiplicativos para establecer la relación entre pares de cantidades de magnitud que covarían más sin embargo no da cuenta del cambio de magnitud cuando la otra varía y sólo se da cuenta de ello en la entrevista cuando se le sugiere que a partir de las aproximaciones que el realiza es posible conocer dicho cambio. El sujeto de nivel 3 no da cuenta de sus enunciados.

6.1.4. Relación cuantitativa de la covariación con uso de la razón de cambio (C1-4)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante a partir de la situación cuantifica la coordinación de la variación de la variable dependiente con relación a cambios de la variable independiente. Hace uso explícito de razón de cambio. ($\Delta x / \Delta y$).

La tabla 22 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C1-4 de esta categoría.

Tabla 22 Porcentajes de respuestas correctas categoría C1, Subcategoría C1-4, según cada situación.

Subcategoría C1-4	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
A partir de la situación cuantifica la coordinación de la variación de la variable dependiente con relación a cambios de la variable independiente. Hace uso explícito de razón de cambio. ($\Delta x / \Delta y$).	I.A. Cuando se trata verificar que una covariación es constante a partir de la razón de cambio en un registro tabular.	83	54	54

Origen: fuente propia

En este indicador I.A., el porcentaje refleja la cantidad de estudiantes que identifican la razón de cambio de la situación a partir de un registro tabular y la usan para describir y predecir consecuencias sin importar el tipo de situación, como se puede ver

la cantidad de sujetos que aciertan se reduce a cerca de dos tercios de los estudiantes. Algunos estudiantes hallan la razón de cambio entre la variable dependiente con relación a la variable independiente y la usan para justificar que una covariación es constante, y otros mediante ensayo y error tratan de coordinar los resultados de las variaciones, acudiendo a las diferencias relativas entre los datos de la tabla para establecer aumentos constantes de forma aditiva sin acudir a la razón de cambio.

Tabla 23 Enunciados característicos para respuestas correctas de C1-4, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.A. Cuando se trata verificar que una covariación es constante a partir de la razón de cambio en un registro tabular.	<p><i>“La C. Ya que avanza a una velocidad constante cada minuto avanza 3 metros”</i> (ver anexo E1PF-p16)</p> <p><i>“la C porque si fuera 1 se ve cómo se puede multiplicar por 3”</i> (ver anexo E2PF-p16)</p>	<p><i>“la A. Porque avanza continuamente en el tiempo que en metros”</i> (ver anexo E1PF-p17)</p> <p><i>“La A porque $1 \times 4 = 4$, $4 \times 3 = 12$, $7 \times 4 = 28$ o sea que sube de 4 en 4 cada minuto”</i> (ver anexo E2PF-p17)</p> <p><i>“La A porque 4 se multiplica por el tiempo”</i> (ver anexo E3PF-p17)</p> <p><i>“La A porque cada minuto sube 4 metros”</i></p>	<p><i>“La B. ya que avanza en una velocidad cada sg avanza 5 metros”</i> (ver anexo E1PF-p18)</p> <p><i>“La B porque $1 \times 5 = 5$, $5 \times 3 = 15$ o sea sube de 5 en 5 cada minuto”</i> (ver anexo E2PF-p18)</p> <p><i>“La B porque el segundo sube cada 5 metros”</i> (ver anexo E3PF-p18)</p>
	<p><i>“La C porque el tiempo sube cada 3 minutos”</i> (ver anexo E3PF-p16)</p> <p><i>“La C porque la altura es ideal con la del tanque”</i></p> <p><i>“La c porque da los datos constantes”</i></p>	<p><i>“La A porque el tiempo y la altura son similares”</i></p>	<p><i>“La B porque la velocidad aumenta constante”</i></p>

Origen: fuente propia

Apreciando los enunciados de los estudiantes se podría manifestar que identifican la razón de cambio haciendo una descomposición de la tabla para hacer una reducción a la unidad, como se observa en la Sit.1 cuando se dice: “*la C porque si fuera 1 se ve cómo se puede multiplicar por 3*”, en la Sit.2: “*La A porque $1 \times 4 = 4$, $4 \times 3 = 12$, $7 \times 4 = 28$ o sea que sube de 4 en 4 cada minuto*” y en la SIT 3 “*La B porque $1 \times 5 = 5$, $5 \times 3 = 15$ o sea sube de 5 en 5 cada minuto*”, para posteriormente multiplicar por cada valor de la magnitud independiente y poder tanto describir cómo predecir consecuencias a lo largo de las tres situaciones.

Aunado a lo anterior en los enunciados inferiores se evidencia que los estudiantes identifican que una covariación es constante en el registro tabular pero no hacen explícita la razón de cambio como se observa en la Sit.1 cuando dice: “*La C porque la altura es ideal con la del tanque*”, por el contrario, en este enunciado asocia su justificación a las diferencias relativas entre los datos de la tabla para establecer aumentos constantes de forma aditiva.

Tabla 24 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C1-4, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
------------------	---------------	---------------	---------------

I.A. Cuando se trata verificar que una covariación es constante a partir de la razón de cambio en un registro tabular.

“La B ya que es más constante que las otras y tiene más sentido pero ninguna es constante”
“La A. Porque sube 1, 2, 3, 4,56, etc. Por cada 2 minutos”
“La B. La más coherente es la B aunque no es ninguna”

“La C esta es mucho más constante que las otras”
“La B porque los datos informan que sube a velocidad constante”
“La B. porque sube 1 metro cada minuto”
“La C. esta es más constante que las otras ya que las otras no van a la misma velocidad”

“La A. porque cada 2 segundos recorre 2 metros”
“La A es más constante que las demás”
“ La A porque es constante tanto el tiempo como la distancia”

Origen: fuente propia

En los enunciados arriba descritos, aparentemente los estudiantes presentan dificultad para identificar la razón de cambio en el registro tabular, por lo tanto el reconocer una covariación constante lo hacen a través de tanteo o regularidades en una cantidad de magnitud independiente, como se observa en la Sit.2 cuando dice: *“La C esta es mucho más constante que las otras”*, se puede inferir que la respuesta es a través de regularidades presentes en una de las magnitudes, identifican crecimiento constante en una sola magnitud y lo asocian para toda la covariación.

Teniendo en cuenta las respuestas que dieron los estudiantes para los ítems planteados en esta categoría advertimos que menos de la mitad de los estudiantes logra establecer de forma explícita la razón de cambio entre la variable dependiente con relación a la variable independiente a partir de un registro tabular, aquellos sujetos que logran identificar la razón de cambio hacen una descomposición de la tabla para hacer una reducción a la unidad y a partir de allí establecer relaciones multiplicativas o acudir a las diferencias relativas entre los datos de la tabla para establecer aumentos constantes de forma aditiva. Aunado a

esto, los enunciados de los estudiantes con dificultad en esta categoría permiten presumir que estos sujetos intentan reconocer una covariación constante a través de tanteo o regularidades en una cantidad de magnitud independiente, pero como en las tablas propuestas no es visible ello, tienden a establecer especulaciones.

Concluida esta subcategoría, exponemos la diferencia encontrada en las enunciaciones que van creando los diferentes sujetos que se investigan a profundidad.

Tabla 25 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 19 de la prueba final.

Sit	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	<i>“La C. Ya que avanza a una velocidad constante cada minuto avanza 3 metros”(ver anexo E1PF-p16)</i>	<i>“la C porque si fuera 1 se ve cómo se puede multiplicar por 3”(ver anexo E2PF-p16)</i>	<i>“La C porque el tiempo sube cada 3 minutos” (ver anexo E3PF-p16)</i>
2	<i>“la A. Porque avanza continuamente en el tiempo que en metros”(ver anexo E1PF-p17)</i>	<i>“La A porque $1 \times 4 = 4$, $4 \times 3 = 12$, $7 \times 4 = 28$ o sea que sube de 4 en 4 cada minuto” (ver anexo E2PF-p17)</i>	<i>“La A porque 4 se multiplica por el tiempo” (ver anexo E3PF-p17)</i>
3	<i>“La B. ya que avanza en una velocidad cada sg avanza 5 metros”(ver anexo E1PF-p18)</i>	<i>“La B porque $1 \times 5 = 5$, $5 \times 3 = 15$ o sea sube de 5 en 5 cada minuto” (ver anexo E2PF-p18)</i>	<i>“La B porque el segundo sube cada 5 metros” (ver anexo E3PF-p18)</i>

Origen: fuente propia

Teniendo en cuenta los datos anteriormente presentados y las justificaciones que dan los sujetos para establecer las relaciones entre las covariaciones de las diferentes situaciones podemos mencionar que:

Según los datos arriba expuestos, aunque todos pueden determinar la covariación lineal en un registro tabular a partir de la razón de cambio vemos que las prácticas prototípicas de cada sujeto si tienen diferencias, por ejemplo, el sujeto 1 en Sit.1 dice: *“La C. Ya que avanza a una velocidad constante cada minuto avanza 3 metros”*(ver anexo E1PF-p16), lo que indica que esta persona relaciona de forma global cada par de cantidades de magnitud de la covariación estudiada por medio de la razón de cambio, mientras que el sujeto 2 cuando enuncia: *“la C porque si fuera 1 se ve cómo se puede multiplicar por 3”*(ver anexo E2PF-p16), tiene que hacer una descomposición de la tabla para encontrar el valor unitario de la covariación y por medio de cálculos aditivos comprobar que todo par de cantidades de magnitud cumplen con la razón de cambio. En el caso de la estudiante de nivel bajo se nota que carece argumentos que puedan explicar su forma de proceder.

Continuaremos con las enunciaciones correspondientes a la segunda categoría denotada como: De situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre ellas.

6. 2. De situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre situaciones

Son cuatro las subcategorías correspondientes a esta categoría: relación analógica entre situaciones, identificación del tipo de dependencia entre magnitudes, cuantificación de la variación a partir de un registro verbal e identificación de la razón de cambio a partir de un registro gráfico, como ya se dijo se estudiará la información para cada una de estas subcategorías.

6.2.1. Relación analógica entre situaciones (C2-1)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante identifica analogías en las relaciones de dependencia entre pares de cantidades de magnitud en las tres situaciones.

La tabla 26 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C2-1 de esta categoría.

Tabla 26 Porcentajes de respuestas correctas categoría C2, Subcategoría C2-1, según cada situación.

Subcategoría C2-1	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
Identifica analogías en las relaciones de dependencia entre pares de cantidades de magnitud en las tres situaciones	I.A. Cuando se trata de establecer analogías en las tres situaciones asociadas con la covariación directa del par de cantidades de magnitud, que se estudia en el fenómeno	83	N/A	70
	1.B. Cuando se trata de establecer analogías en las tres situaciones asociadas con la covariación inversa de un par de cantidades de magnitud, que NO se estudia en el fenómeno	80	79	N/A

Origen: fuente propia

En esta categoría se pretende observar las relaciones que establecen los estudiantes en tres situaciones de diferente cercanía a su contexto, al revisar los porcentajes de éxito de los estudiantes, se observa que aproximadamente cuatro quintos de ellos dan muestra de poder identificar analogías en las relaciones de dependencia entre pares de cantidades de magnitud en las tres situaciones. No se observa una diferencia consistente en los porcentajes de éxito entre las tres situaciones, que permita afirmar que alguna de ellas resulta a los estudiantes más difícil que las otras. Sin embargo, parece ser que la situación novedosa se le dificulta aproximadamente a una cuarta parte de los estudiantes.

Tabla 27 Enunciados característicos para respuestas correctas de C2-1, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.A. Cuando se trata de establecer analogías en las tres situaciones asociadas con la covariación directa del par de cantidades de magnitud, que se estudia en el fenómeno	<p><i>“La altura del agua en el tanque al transcurrir el tiempo”</i> (ver anexo E1PF-p19.1.1)</p> <p><i>“el nivel del agua al transcurrir el tiempo”</i> (ver anexo E2PF-p19.1.1)</p>	N/A	<p><i>“La cantidad de metros que ha avanzado al transcurrir el tiempo”</i> (ver anexo E1PF-p19.1.3)</p> <p><i>“la distancia que recorre el atleta”</i> (ver anexo E2PF-p19.1.3)</p>

Origen: fuente propia

Al analizar las enunciaciones tanto de las analogías como de las justificaciones, se infiere que los estudiantes en este indicador específico de covariación directa, identifican una estructura común en las tres situaciones estudiadas, como se observa en E1 cuando dice *“las tres se relacionan en que han avanzado cierta cantidad de metros al transcurrir el tiempo”* (ver anexo E1PF-

p19.1.1), de lo anterior se puede señalar que el estudiante logra conectar la relación altura-tiempo con la relación distancia-tiempo viendo que son análogas. De forma similar cuando E2 menciona “estas 3 se parecen ya que sufren cambios al pasar el tiempo” (ver anexo E2PF-p19.1.1), se confirma que esta estructura se torna común en los estudiantes observados.

Tabla 28 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C2-1, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.A. Cuando se trata de establecer analogías en las tres situaciones asociadas con la covariación directa del par de cantidades de magnitud, que se estudia en el fenómeno	“la altura del tanque” (ver anexo E3PF-p19.1.1) “El tiempo de llenado del tanque”	N/A	“la distancia de la pista de la carrera la longitud de la pista atlética” (ver anexo E3PF-p19.1.3) “Velocidad de los atletas” “el tiempo que demora”

Origen: fuente propia

Observamos en estas enunciaciones que los estudiantes asocian no una relación entre par de magnitudes que covarían, sino sólo una cantidad de magnitud que es constante, lo cual confirma repetición del error prototípico al confundir las magnitudes de análisis, eligiendo solo una magnitud para establecer relación entre situaciones, lo anterior se puede verificar al tener en cuenta la justificación que establecen estos sujetos, ya que dicen: “las tres son muy parecidas y no hay cambio en el tiempo”, se nota que han tergiversado el nivel del agua por la altura del tanque, la altura de la plataforma de las sillas por la altura de la torre y la distancia recorrida por la longitud de la pista.

Tabla 29 Enunciados característicos para respuestas correctas de C2-1, Indicador I.B.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.B. Cuando se trata de establecer analogías en las tres situaciones asociadas con la covariación inversa de un par de cantidades de magnitud, que NO se estudia en el fenómeno	<p><i>“La distancia que le falta al llenado a medida que pasa el tiempo”</i> (ver anexo E1PF-p19.2.1)</p> <p><i>“lo que falta por llenar del tanque”</i> (ver anexo E2PF-p19.2.1)</p> <p><i>“el espacio que falta para llenar el tanque”</i> (ver anexo E3PF-p19.2.1)</p>	<p><i>“la distancia que le hace falta a medida que va subiendo la plataforma”</i> (ver anexo E1PF-p19.2.2)</p> <p><i>“lo que falta por subir a las sillas”</i> (ver anexo E2PF-p19.2.2)</p> <p><i>“la distancia que falta por subir a la máquina a medida que sube”</i> (ver anexo E3PF-p19.2.2)</p>	N/A

Origen: fuente propia

Estudiando las enunciaciones tanto de las analogías como de las justificaciones, observamos que los estudiantes en este indicador específico de covariación inversa, identifican una estructura común en las tres situaciones estudiadas, como se observa en E1 cuando dice *“Las tres se relacionan en que le falta distancia al recorrido para concluir la actividad”* (ver anexo E1PF-p19.1.1), de lo anterior se puede señalar que el estudiante logra conectar la relación espacio vacío-tiempo con la relación distancia-tiempo viendo que son análogas. Algo semejante ocurre cuando E2 menciona *“estas 3 se parecen porque determinan cuánto falta para llegar al límite”* (ver anexo E2PF-p19.1.1), esto confirma que se presenta una estructura común en los estudiantes observados.

Tabla 30 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C2-1, Indicador I.B.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.B. Cuando se trata de establecer analogías en las tres situaciones asociadas con la covariación inversa de un par de cantidades de magnitud, que NO se estudia en el fenómeno	<i>“se parece al tiempo que le falta llenarse al tanque”</i> <i>“se llena a minutos correspondientes”</i>	<i>“se parece al tiempo que le falta subir o bajar la plataforma”</i> <i>“sube depende de los minutos”</i>	N/A

Origen: fuente propia

Al detenernos en las enunciaciones entreveremos que los estudiantes asocian no una relación entre par de magnitudes que covarían de forma inversa, sino sólo la cantidad de magnitud independiente, esto nos trae de nuevo al error de confundir las magnitudes de análisis, eligiendo solo una magnitud para establecer relación entre situaciones, lo anterior se puede verificar al observar en Sit.1 cuando dicen: *“se parece al tiempo que le falta llenarse al tanque”*, se nota que han confundido la magnitud asociada con la longitud por la magnitud- tiempo.

Teniendo en cuenta las respuestas que dieron los estudiantes para los ítems planteados en esta subcategoría, señalamos que cerca de los cuatro quintos de los estudiantes logra identificar analogías en las relaciones de dependencia entre pares de cantidades de magnitud y establecen una estructura común en las tres situaciones estudiadas ya que perciben que existe una analogía entre la relación altura-tiempo con la relación distancia-tiempo. Por otra parte, al detenernos en las enunciaciones de las

respuestas incorrectas entre vemos que los estudiantes asocian no una relación entre par de magnitudes que covarían de forma inversa, sino sólo la cantidad de magnitud independiente, esto nos trae de nuevo al error de confundir las magnitudes de análisis.

Finalizada esta subcategoría, resaltamos los aspectos de desencuentro hallados en las enunciaciones que van creando los diferentes sujetos que se investigan a profundidad.

Tabla 31 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 19 de la prueba final.

Sit	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	<i>“La altura del agua en el tanque al transcurrir el tiempo” (ver anexo E1PF-p19.1.1)</i>	<i>“el nivel del agua al transcurrir el tiempo” (ver anexo E2PF-p19.1.1)</i>	<i>“la altura del tanque” (ver anexo E3PF-p19.1.1)</i>
2	<i>N/A</i>	<i>N/A</i>	<i>N/A</i>
3	<i>“La cantidad de metros que ha avanzado al transcurrir el tiempo” (ver anexo E1PF-p19.1.3)</i>	<i>“la distancia que recorre el atleta” (ver anexo E2PF-p19.1.3)</i>	<i>“la distancia de la pista de la carrera la longitud de la pista atlética” (ver anexo E3PF-p19.1.3)</i>

Origen: fuente propia

Teniendo en cuenta los datos anteriormente presentados y las justificaciones que dan los sujetos para establecer las relaciones entre las covariaciones de las diferentes situaciones podemos mencionar que:

Primero, tanto el estudiante de nivel alto como el de nivel medio explican que en todas las situaciones se estudia una covariación cuya variable independiente siempre varía en relación al tiempo, tal como se puede apreciar en su justificación de E1 “*las tres se relacionan en que han avanzado cierta cantidad de metros al transcurrir el tiempo*”(ver anexo E1PF-p19.1.3)” y E2 “*estas 3 se parecen ya que sufren cambios al pasar el tiempo*”, es decir, estos sujetos al parecer realizan la transferencia de la covariación lineal a lo largo de las situaciones e identifican una estructura común en ellas, evidenciando que ese tipo de covariación engloba el campo de situaciones trabajados.

Segundo, el estudiante de nivel bajo es consistente en relacionar la covariación de estudio con una sola cantidad de magnitud que no varía, evidenciando en ello el error prototípico descrito con anterioridad. Dado que este sujeto no presenta justificación alguna, se puede pensar que el hecho de confundir la magnitud por la cual se pregunta se relaciona más con la dificultad de concebir una relación de covariación, en otras palabras, al sujeto de nivel bajo se le dificulta identificar cantidades de magnitud que varían y su respectiva relación de dependencia.

6.2.2. Identificación del tipo de dependencia entre magnitudes. (C2-2)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante generaliza o relaciona el sentido de cambio de la covariación en las tres situaciones de forma cualitativa (directa e Inversa).

La tabla 32 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C2-2 de esta categoría.

Tabla 32 Porcentajes de respuestas correctas categoría C2, Subcategoría C2-2, según cada situación.

Subcategoría C2-2	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
Generaliza o relaciona el sentido de cambio de la covariación en las tres situaciones de forma cualitativa (directa e Inversa)	I.A. Cuando se trata de generalizar la covariación directa en las tres situaciones de estudio	100	58	91
	I.B. Cuando se trata de generalizar la covariación inversa en las tres situaciones de estudio	75	71	96

Origen: fuente propia

En este aspecto se observa las relaciones que establecen los estudiantes en las tres situaciones con el fin de generalizar los cambios entre magnitudes, al revisar los porcentajes de éxito de los estudiantes, se observa que aproximadamente cuatro quintos de ellos dan muestra de poder generalizar cualitativamente el sentido del cambio de una de las variables en relación con el sentido de cambio de la otra, a partir de un registro verbal en las tres situaciones. Se observa una diferencia consistente en los porcentajes de éxito entre las tres situaciones, lo que permite afirmar que la situación asociada a la atracción mecánica presenta dificultad en aproximadamente a una tercera parte de los estudiantes.

Tabla 33 Enunciados característicos para respuestas correctas de C2-2, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.A. Cuando se trata de generalizar la covariación directa en las tres situaciones de estudio	<p><i>“Directa. A lo que aumenta el tiempo también aumenta el nivel del agua del tanque”</i> (ver anexo E1PF-p20.1)</p> <p><i>“Directa porque los 2 aumentan al tiempo”</i> (ver anexo E2PF-p20.1)</p> <p><i>“Directa porque el tanque se va llenando mientras el tiempo pasa”</i> (ver anexo E3PF-p20.1)</p>	<p><i>“directa porque aumentan al mismo tiempo”</i> (ver anexo E2PF-p20.3)</p> <p><i>“directa suben al mismo tiempo”</i> (ver anexo E3PF-p20.3)</p> <p><i>“Directa. Si covaría porque la plataforma sube con el tiempo igual”</i></p>	<p><i>“Directa. Ya que a lo que corre aumenta metros y el tiempo también aumenta”</i>(ver anexo E1PF-p20.6)</p> <p><i>“directa porque los dos aumenta al mismo tiempo”</i> (ver anexo E2PF-p20.6)</p> <p><i>“directa porque mientras el atleta corre la distancia aumenta y el tiempo también”</i></p>

Origen: fuente propia

Según las anteriores enunciaciones interpretamos que los estudiantes en este indicador específico generalizan la covariación directa como estructura común en las tres situaciones estudiadas, como se observa en la Sit.1 cuando dicen: *“Directa. A lo que aumenta el tiempo también aumenta el nivel del agua del tanque”*, alcanzan a identificar esta relación tanto en la situación más cercana al contexto como en la situación novedosa, es decir, sin importar las características específicas de las situaciones los estudiantes logran clasificar la covariación presente en ellas bajo un mismo criterio. Enunciaciones similares se visibilizan en los demás sujetos.

Tabla 34 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C2-2, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.A. Cuando se trata de generalizar la covariación directa en las tres situaciones de estudio		<p><i>“Inversa. Ya que cuando la plataforma sube el tiempo de funcionamiento disminuye”</i> (ver anexo E1PF-p20.3) <i>“inversa porque mientras sube es igual pero cuando baja es más tiempo”</i></p>	<p><i>“directa porque es el que dura el atleta”</i> (ver anexo E3PF-p20.6) <i>“Inversa. No covaría porque la distancia que recorre el atleta no es la misma”</i></p>

Origen: fuente propia

Hecha la observación de los enunciados, cabe resaltar que si bien los estudiantes identifican cambios en una cantidad de magnitud con relación a otra, no logran englobar el tipo de covariación presente en las tres situaciones como uno sólo, debido al error prototípico pues confunde la magnitud tiempo de funcionamiento con el tiempo que le falta para finalizar la situación de estudio, esto se podría ver en la Sit.2 cuando dicen: *“Inversa. Ya que cuando la plataforma sube el tiempo de funcionamiento disminuye”*.

Tabla 35 Enunciados característicos para respuestas correctas de C2-2, Indicador I.B.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.B. Cuando se trata de generalizar la covariación inversa en las tres situaciones de estudio	<p><i>“Inversa. El agua aumenta pero el espacio disminuye”</i> (ver anexo E1PF-p20.4)</p> <p><i>“Inversa porque el espacio disminuye pero el nivel del agua aumenta”</i> (ver anexo E2PF-p20.2)</p> <p><i>“Inversa porque en el espacio ya no sube más”</i></p> <p><i>“Inversa porque es más grande el nivel que alcanza el tanque”</i></p>	<p><i>“Inversa”</i> (ver anexo E1PF-p20.4)</p> <p><i>“Inversa porque lo que le falta por subir disminuye pero la altura que sube aumenta”</i> (ver anexo E2PF-p20.2)</p> <p><i>“Inversa por el tiempo covaria”</i> (ver anexo E3PF-p20.2)</p> <p><i>“Inversa porque es más grande la altura que alcanza la plataforma”</i></p>	<p><i>“Inversa. Ya que aumenta la que ya recorrió y la falta disminuye”</i>(ver anexo E1PF-p20.2)</p> <p><i>“Inversa porque la distancia que recorre aumenta pero la distancia que falta se resta”</i> (ver anexo E2PF-p20.2)</p> <p><i>“Inversa porque una va aumentando y la otra disminuyendo”</i> (ver anexo E3PF-p20.2)</p> <p><i>“Inversa porque mientras corre recorta”</i></p>

Origen: fuente propia

Resultado del análisis de los enunciados, inferimos que los estudiantes en este indicador específico, generalizan la covariación inversa como estructura común en las tres situaciones estudiadas a pesar de no ser tematizada con rigor, como se observa en todas las enunciaciones que brinda E2, por ejemplo en Sit.2 dice: *“Inversa porque lo que le falta por subir disminuye pero la altura que sube aumenta”* (ver anexo E2PF-p20.2), aquí se nota que alcanza a identificar esta relación tanto en la situación más cercana al contexto como en la situación novedosa, es decir, sin importar las características específicas de las situaciones los estudiantes logran clasificar la covariación presente en ellas bajo un mismo criterio. Enunciaciones similares se visibilizan en los demás sujetos.

Tabla 36 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C2-2, Indicador I.B.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
I.B. Cuando se trata de generalizar la covariación inversa en las tres situaciones de estudio	<i>“Directa. El espacio vacío del tanque disminuye y el agua que alcanza el tanque también disminuye”</i>	<i>“Directa porque los datos aumentan” “Directa. El espacio que falta por subir a la plataforma disminuye y la plataforma también”</i>	<i>“Directa. Porque mientras el que recorre la pista lo suma a lo que ya ha recorrido”</i>

Origen: fuente propia

De los enunciados anteriores se observa que los estudiantes relacionan equivocadamente el sentido del cambio de una de las variables en relación con el sentido de cambio de la otra a partir de un registro verbal, esto se podría ver en la Sit.2 cuando dicen: *“Directa. El espacio que falta por subir a la plataforma disminuye y la plataforma también”*, lo que nos conduce al análisis de un nuevo error, que tiene relación con el Indicador de estudio de la subcategoría C1-2, donde se indaga por la relación cualitativa del sentido del cambio de la covariación.

Según las enunciaciones que emiten los estudiantes para los ítems planteados en esta subcategoría, indicamos que cuatro quintos de ellos dan muestra de poder generalizar cualitativamente el sentido del cambio de una de las variables en relación con el sentido de cambio de la otra, a partir de un registro verbal en las tres situaciones. Es preciso señalar que se observa una diferencia consistente en los porcentajes de éxito entre las tres situaciones, lo que permite afirmar que la situación asociada a la atracción mecánica presenta dificultad en aproximadamente a una tercera parte de los estudiantes.

Los sujetos cuyos enunciados son correctos logran generalizar la covariación directa y la covariación inversa como estructuras comunes en las tres situaciones estudiadas. Por otra parte, se observa que hay estudiantes que no logran englobar el tipo de covariación presente en las tres situaciones como uno sólo, debido al error prototípico pues confunde la magnitud tiempo de funcionamiento con el tiempo que le falta para finalizar la situación de estudio.

Concluida esta subcategoría, señalamos las diferencias encontradas en las enunciaciones que van creando los diferentes sujetos que se investigan a profundidad.

Tabla 37 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 20 de la prueba final.

Sit	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	<i>“Directa. A lo que aumenta el tiempo también aumenta el nivel del agua del tanque” (ver anexo E1PF-p20.1)</i>	<i>“Directa porque los 2 aumentan al tiempo” (ver anexo E2PF-p20.1)</i>	<i>“Directa porque el tanque se va llenando mientras el tiempo pasa” (ver anexo E3PF-p20.1)</i>
2	<i>“Inversa. Ya que cuando la plataforma sube el tiempo de funcionamiento disminuye” (ver anexo E1PF-p20.3)</i>	<i>“directa porque aumentan al mismo tiempo” (ver anexo E2PF-p20.3)</i>	<i>“directa suben al mismo tiempo” (ver anexo E3PF-p20.3)</i>

3	<i>“Directa. Ya que a lo que corre aumenta metros y el tiempo también aumenta”</i> (ver anexo E1PF-p20.6)	<i>“directa porque los dos aumenta al mismo tiempo”</i> (ver anexo E2PF-p20.6)	<i>“directa porque es el que dura el atleta”</i> (ver anexo E3PF-p20.6)
---	---	--	---

Origen: fuente propia

En consecuencia de la información de la tabla, se puede decir que aunque los sujetos reconozcan cualitativamente el sentido del cambio de las variables a partir de un registro verbal, hay grandes diferencias en las enunciaciones que ilustran estos sujetos, por ejemplo, al examinar lo que dice E.1, se nota claramente que este sujeto explica el sentido del cambio de cada una de las variables en consecuencia del sentido del cambio de la otra variable y aunque se equivoque en la sit.2 por considerar que el tiempo corre en cuenta regresiva (según lo mencionado en la entrevista) se puede llegar a pensar que generaliza el sentido de cambio de la covariación en las tres situaciones de forma cualitativa. Mientras que el sujeto de nivel medio da cuenta del sentido del cambio de las variables, pero no explica que el cambio en el sentido de una depende del sentido del cambio de la otra. Por otra parte, el sujeto de nivel bajo cuando dice en Sit.3 *“directa porque es el que dura el atleta”* deja dudas en cuanto al reconocimiento del sentido del cambio de la covariación estudiada ya que al parecer nuevamente está confundiendo las cantidades de magnitud por las que se le pregunta.

6.2.3. Cuantificación de la variación a partir de un registro verbal. (C2-3)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante generaliza o relaciona la estructura de las preguntas desde la estrategia de solución utilizada para cuantificar la variación de la variable dependiente con relación a los cambios de la variable independiente a partir de un registro verbal en las tres situaciones.

La tabla 38 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C2-3 de esta categoría.

Tabla 38 Porcentajes de respuestas correctas categoría C2, Subcategoría C2-3, según cada situación.

Subcategoría C2-3	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
Generaliza o relaciona la estructura de las preguntas desde la estrategia de solución utilizada para cuantificar la variación de la variable dependiente con relación a los cambios de la variable independiente a partir de un registro verbal en las tres situaciones				

Origen: fuente propia

Esta Subcategoría no fue abordada por la extensión de la prueba.

6.2.4. Cuantificación de la variación a partir de un registro verbal. (C2-4)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante generaliza o relaciona la estructura de las preguntas desde la estrategia de solución utilizada para cuantificar la variación de la variable dependiente con relación a los cambios de la variable independiente a partir de un registro verbal en las tres situaciones.

La tabla 39 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C2-4 de esta categoría.

Tabla 39 Porcentajes de respuestas correctas categoría C2, Subcategoría C2-4, según cada situación.

Subcategoría C2-4	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
Generaliza o relaciona un registro gráfico, con la razón de cambio de las tres situaciones distintas	I.A. Cuando se trata de asociar un mismo gráfico de representación cartesiana con la razón de cambio en tres diferentes situaciones	92	67	79

Origen: fuente propia

Por lo expuesto en la tabla de porcentajes se deduce que cerca de cuatro quintos de los estudiantes logran asociar un registro de representación cartesiana con uno de representación verbal, mediante la razón de cambio en diferentes situaciones, aparentemente ellos logran identificar que el registro de representación cartesiana de una covariación lineal, se puede asociar a diversas situaciones. El tránsito de un registro a otro no presenta dificultad salvo que se observa una diferencia consistente en los porcentajes de éxito cuando se enfrentan a la situación relacionada con la atracción mecánica, probablemente la enunciación de la pregunta genera confusión.

Tabla 40 Enunciados característicos para respuestas correctas de C2-4, Indicador IA.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
	<p><i>“Verdadero. Ya que aumenta 3 cada 2 min”</i> (ver anexo E1PF-P21.A)</p> <p><i>“verdadero porque cada 2 min aumenta 3 metros”</i> (ver anexo E2PF-P21.A)</p>	<p><i>“Verdadero ya que aumenta metro y medio cada segundo”</i> (ver anexo E1PF-P21.B)</p> <p><i>“cierto porque empieza en 1 y sube a 2,5m en 1 segundo”</i> (ver anexo E2PF-P21.B)</p>	<p><i>“Verdadero. ya que la velocidad es de 1.5 metros por segundo”</i> (ver anexo E1PF-P21.C)</p> <p><i>“cierto, lo que dije en la b”</i> (ver anexo E2PF-P21.C)</p>
<p>cuando se trata de asociar un mismo gráfico de representación cartesiana con la razón de cambio en tres diferentes situaciones</p>	<p><i>“Verdadero”</i> (ver anexo E3PF-P21.A)</p> <p><i>“cierto, en la gráfica se ve esto”</i></p> <p><i>“Verdadero y son los metros y el tiempo”</i></p>	<p><i>“Verdadero”</i> (ver anexo E3PF-P21.B)</p> <p><i>“verdadero porque según la gráfica concuerda”</i></p> <p><i>“verdadero porque sube metro y medio”</i></p>	<p><i>“Verdadero”</i> (ver anexo E3PF-P21.C)</p> <p><i>“verdadero porque tal vez tenga las piernas largas y puede correr rápido”</i></p> <p><i>“verdadero porque va por la mitad”</i></p>

Origen: fuente propia

Con el análisis de los enunciados se llega a identificar dos tipos de respuestas, la primera, cuando en Sit.1 y en Sit.2 enuncian: *“cierto, en la gráfica se ve esto”* y *“verdadero porque según la gráfica concuerda”*, se puede pensar que los estudiantes señalan que un mismo gráfico cartesiano se puede asociar a diversas situaciones o siendo más atrevidos, tal vez puedan llegar a identificar que ese gráfico cartesiano generaliza la covariación en diversos tipos de situaciones que cumplen con esa razón de

cambio. El segundo tipo de respuesta se presenta de forma clara en Sit.2 cuando dicen: “*cierto porque empieza en 1 y sube a 2,5 m en 1 segundo*”, el sujeto hace uso de la razón de cambio dada para verificarla en el correspondiente gráfico cartesiano.

Tabla 41 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C2-4, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
cuando se trata de asociar un mismo gráfico de representación cartesiana con la razón de cambio en tres diferentes situaciones	<i>“Falso. porque el agua no alcanza, tendría que subir más lento para que alcance”</i>	<i>“no, porque en la gráfica no lo muestra” “falso porque no sube tan rápido” “Falso porque cada segundo sube dos metros y medio” “Falso. Porque el gráfico sube de a 3 metros”</i>	<i>“falso según la tabla lo hace más rápido” “Falso porque cada segundo aumenta 1.5 metros se lesionaría” “falso”</i>

Origen: fuente propia

Como consecuencia de los enunciados anteriores identificamos dos tipos de respuesta, primero, los estudiantes tienen dificultad para interpretar el registro de representación cartesiana, tal como en Sit.2 lo dicen: “*Falso porque cada segundo sube dos metros y medio*”, se puede notar que el estudiante lee las coordenadas de un punto específico de la gráfica, pero desconoce que es un proceso que no comienza en cero; y en segunda instancia, en la SIT 3 cuando dice “*Falso porque cada segundo aumenta 1.5 metros se lesionaría*”, pareciera que el sujeto extrapola la situación, se hace una imagen de la misma y considera irreal la propuesta.

Teniendo en cuenta las respuestas que brindan los estudiantes a los ítems planteados en esta subcategoría, indicamos que cerca de cuatro quintos de los estudiantes identifican que un registro de representación cartesiana puede generalizar la

covariación en diversos tipos de situaciones que cumplen con una razón de cambio específica. Por otra parte, hay algunos estudiantes que les cuesta hacer este tipo de asociaciones ya que en sus enunciados evidencian dificultad para interpretar el registro de representación cartesiana.

Como cierre de esta subcategoría, mencionamos las discrepancias encontradas en las enunciaciones que van creando los diferentes sujetos que se investigan a profundidad.

Tabla 42 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 21 de la prueba final.

Sit	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	<i>“Verdadero. Ya que aumenta 3 cada 2 min” (ver anexo E1PF-P21.A)</i>	<i>“verdadero porque cada 2 min aumenta 3 metros” (ver anexo E2PF-P21.A)</i>	<i>“Verdadero” (ver anexo E3PF-P21.A)</i>
2	<i>“Verdadero ya que aumenta metro y medio cada segundo” (ver anexo E1PF-P21.B)</i>	<i>“cierto porque empieza en 1 y sube a 2,5m en 1 segundo” (ver anexo E2PF-P21.B)</i>	<i>“Verdadero” (ver anexo E3PF-P21.B)</i>
3	<i>“Verdadero. ya que la velocidad es de 1.5 metros por segundo” (ver anexo E1PF-P21.C)</i>	<i>“cierto, lo que dije en la b” (ver anexo E2PF-P21.C)</i>	<i>“Verdadero” (ver anexo E3PF-P21.C)</i>

Según los datos suministrados por la tabla se puede decir que los tres sujetos pueden relacionar un registro gráfico con la razón de cambio, pero sólo los estudiantes de nivel alto y medio pueden justificar sus enunciaciones por medio de argumentos explícitos sobre la covariación entre las magnitudes estudiadas dando cuenta de una lectura e interpretación del gráfico del cual parte la pregunta; mientras que el sujeto de nivel bajo no enuncia justificación alguna de su respuesta.

Enseguida las enunciaciones correspondientes a la tercera categoría denotada como: De escasa coordinación entre representaciones de registros diferentes a mayor coordinación entre ellas.

6.3 De escasa coordinación entre representaciones de registros diferentes a mayor coordinación entre ellas

Son dos las subcategorías correspondientes a esta categoría: identificación de registros cartesiano y tabular, e identificación de registros cartesiano y verbal, como ya se dijo se estudiará la información para cada una de estas subcategorías.

6.3.1. Identificación de registros cartesiano y tabular (C3-1)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante relaciona los registros cartesiano y tabular en diferentes situaciones.

La tabla 43 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C3-1 de esta categoría.

Tabla 43 Porcentajes de respuestas correctas categoría C3, Subcategoría C3-1, según cada situación.

Subcategoría C3-1	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
relaciona los registros cartesiano y tabular en diferentes situaciones	I.A. Cuando se trata de asociar un registro de representación cartesiana a un registro de representación tabular	75	67	62,5

Origen: fuente propia

En general cerca de los dos tercios de los estudiantes presenta acierto en este indicador, dan muestra de poder relacionar un registro de representación cartesiana con un registro de representación tabular en diferentes situaciones. No se observa una diferencia consistente en los porcentajes de éxito entre las tres situaciones, que permita afirmar que alguna de las tres resulta a los estudiantes más difícil que las otras. Sin embargo, el porcentaje de éxito tiende a disminuir conforme la situación se torna más lejana.

Las siguientes son las enunciaciones características para cada situación relativas a este indicador estudiado, cuando las respuestas son correctas.

Tabla 44 Enunciados característicos para respuestas correctas de C3-1, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
cuando se trata de asociar un registro de representación cartesiana a un registro de representación tabular	<p><i>“A. ya que representa bien la gráfica.” (ver anexo E1PF-P22.1)</i></p> <p><i>“El tanque A, porque si el tiempo va de 2 en 2, en 2 es 6 si también la altura es de 2 en 2” (ver anexo E2PF-P22.1)</i></p> <p><i>“El tanque A porque tiene el mismo tiempo de inicio y llenado”</i></p> <p><i>“el tanque A porque llega más bajo”</i></p>	<p><i>“Disney” (ver anexo E1PF-P27.1)</i></p> <p><i>“Disney, porque en la gráfica empieza en 0 metros” (ver anexo E2PF-P27.1)</i></p> <p><i>“Disney porque se parece en la altura”</i></p>	<p><i>“Nairo.” (ver anexo E1PF-P31.1)</i></p> <p><i>“Nairo porque empieza en 3” (ver anexo E2PF-P31.1)</i></p> <p><i>“Nairo porque recorre 2 metros en 4 segundos”</i></p> <p><i>“Nairo porque tarda un poco más”</i></p>

“El A porque se llena lento y en más tiempo”

Origen: fuente propia

A partir de los enunciados expuestos es posible afirmar que la estrategia consistente en las tres situaciones y de la cual se valen los sujetos para asociar el registro cartesiano al tabular consiste en observar el punto de corte con Y en la representación cartesiana y observar cuál registro tabular presenta esta información, como se observa en la Sit.2 cuando expresa: *“Disney, porque en la gráfica empieza en 0 metros”*, más sin embargo en otra enunciación se puede observar que algunos de estos estudiantes se valen de la razón de cambio para establecer esta asociación tal como se aprecia en Sit.3 cuando dice: *“Nairo porque recorre 2 metros en 4 segundos”*

Tabla 45 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C3-1, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
cuando se trata de asociar un registro de representación cartesiana a un registro de representación tabular	<p><i>“B. porque en la gráfica se ve que está en 4 metros de altura”</i></p> <p><i>“no responde”</i> (ver anexo E3PF-P22.1)</p>	<p><i>“Disney porque empieza en 2 y sube de 4 en 4”</i></p> <p><i>“Salitre mágico porque en la gráfica se muestra”</i></p> <p><i>“no responde”</i> (ver anexo E3PF-P27.1)</p>	<p><i>“Usaint porque Nairo falla en la última”</i></p> <p><i>“Usaint”</i></p>

Origen: fuente propia

Desde la perspectiva de los enunciados anteriores al parecer la dificultad de asociar un registro de representación cartesiana a uno tabular puede consistir en que los estudiantes hacen una lectura equivocada de la escala de la gráfica tal como se puede apreciar en Sit.1 cuando dicen: *“B. porque en la gráfica se ve que está en 4 metros de altura”*, o confunde la etiqueta de los dos procesos de covariación allí representados tal como se puede apreciar en Sit.2 cuando dicen: *“Disney porque empieza en 2 y sube de 4 en 4”*. Otra dificultad presente en esta asociación se observa en la Sit.3 cuando dice: *“Usaint porque Nairo falla en la última”*, el sujeto realiza una comparación coordinada por coordinada en el registro cartesiano, y al agotarse el gráfico asume que no corresponde con la tabla, presuntamente por falta de la idea de proyección en la función.

Según lo que manifiestan los estudiantes en los ítems planteados en esta subcategoría, resaltamos que cerca de los dos tercios de los estudiantes dan muestra de poder relacionar un registro de representación cartesiana con un registro de representación tabular en diferentes situaciones, estos estudiantes al parecer observan el punto de corte con Y en la representación cartesiana y contrastan esta información con los registros tabulares. Por otra parte, se puede señalar que la dificultad que presentan los

estudiantes puede consistir en una lectura equivocada de la escala de la gráfica o en realizar una comparación coordinada por coordinada en el registro cartesiano, y al agotarse el gráfico asume que no corresponde con la tabla.

Llegado el final de esta subcategoría, ilustramos la comparación de enunciaciones que van creando los diferentes sujetos que se investigan a profundidad.

Tabla 46 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 22, 27 y 31 de la prueba final.

Sit	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	<i>“A. ya que representa bien la gráfica.” (ver anexo E1PF-P22.1)</i>	<i>“El tanque A, porque si el tiempo va de 2 en 2, en 2 es 6 si también la altura es de 2 en 2” (ver anexo E2PF-P22.1)</i>	<i>“El tanque A” (ver anexo E3PF-P22.1)</i>
2	<i>“Disney” (ver anexo E1PF-P27.1)</i>	<i>“Disney, porque en la gráfica empieza en 0 metros” (ver anexo E2PF-P27.1)</i>	<i>“Disney” (ver anexo E3PF-P27.1)</i>
3	<i>“Nairo.” (ver anexo E1PF-P31.1)</i>	<i>“Nairo porque empieza en 3” (ver anexo E2PF-P31.1)</i>	<i>“Nairo ” (ver anexo E3PF-P31.1)</i>

Origen: fuente propia

De este tipo de enunciaciones es complejo sacar algún tipo de inferencia debido a que sólo escriben la respuesta correcta sin alguna justificación y en el momento de la entrevista se limitan a repetir la misma opción y señalar en la gráfica la respuesta correcta y argumentan que ello es obvio.

6.3.2. Identificación de registros cartesiano y tabular (C3-2)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante relaciona los registros cartesiano y verbal en diferentes situaciones.

La tabla 47 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C3-2 de esta categoría.

Tabla 47. *Porcentajes de respuestas correctas categoría C3, Subcategoría C3-1, según cada situación.*

Subcategoría C3-2	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
Relaciona los registros cartesiano y verbal en diferentes situaciones	I.A. Cuando se trata de identificar y diferenciar en un registro de representación cartesiana el intercepto y asociarlo a un registro verbal.	71	67	92
	I.B. Cuando se trata de identificar y diferenciar en un registro de representación cartesiana la razón de cambio y asociarla a un registro verbal.	75	67	62,5

Tabla 47 *Porcentajes de respuestas correctas categoría C3, Subcategoría C3-2, según cada situación*

Origen: fuente propia

Al observar los porcentajes de acierto se infiere que a nivel global los dos tercios de los estudiantes pueden relacionar los registros cartesiano y verbal en diferentes situaciones, se logra identificar que sin importar la situación los sujetos asocian estos

dos registros, es decir, pueden discriminar y diferenciar dos procesos de covariación representados en cartesiano tanto por el punto de corte con el eje Y como por la razón de cambio.

Tabla 48 Enunciados característicos para respuestas correctas de C3-2, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
Cuando se trata de identificar y diferenciar en un registro de representación cartesiana el intercepto y asociarlo a un registro verbal.	“A. El tanque A” (ver anexo E1PF-P23) “El tanque A” (ver anexo E2PF-P23)	“Salitre Mágico” (ver anexo E1PF-P28) “Salitre mágico” (ver anexo E2PF-P28)	“Nairo” (ver anexo E1PF-P32) “Nairo” (ver anexo E2PF-P32)

Origen: fuente propia

Los enunciados presentes en este indicador carecen de argumentación, por lo tanto, la apreciación siguiente surge del análisis del gráfico y la opción elegida por el estudiante. A partir de un registro de representación cartesiana reconoce y diferencia el punto de corte con el eje Y de dos covariaciones y lo asocia con un fenómeno en representación verbal sin importar la situación en la que se presente.

Tabla 49 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C3-2, Indicador I.A.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
Cuando se trata de identificar y diferenciar en un registro de representación cartesiana el intercepto y asociarlo a un registro verbal.	“no responde” (ver anexo E3PF-P23) “El tanque B tiene más proceso de llenado” “B. porque sube más rápido”	“no responde” (ver anexo E3PF-P28) “Disney”	“no responde” (ver anexo E3PF-P32) “Usaint”

Origen: fuente propia

Tomando como base de análisis las anteriores enunciaciones nos permitimos afirmar que cerca de un tercio de los sujetos parecen tener dificultad a la hora de indagar por el intercepto con el eje Y en diferentes situaciones y lo confunden con el punto máximo de la función.

Tabla 50 Enunciados característicos para respuestas correctas de C3-2, Indicador I.B.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
Cuando se trata de identificar y diferenciar en un registro de representación cartesiana la razón de cambio y asociarla a un registro verbal.	<i>“B. el tanque B” (ver anexo E1PF-P24) “El B porque debe ser más angosto” (ver anexo E2PF-P24) “El B porque se demora menos segundos y consigue más altura”</i>	<i>“Disney” (ver anexo E1PF-P29) “Disney porque va más rápido o tiene menos altura” (ver anexo E2PF-P29) “Disney porque tiene menor tiempo de subida” “Disney porque sube 2 metros en 1 segundo”</i>	<i>“Usaint” (ver anexo E1PF-P33) “Usaint” (ver anexo E2PF-P33)</i>

Origen: fuente propia

Dados los enunciados previos, convenimos que, en el proceso de relacionar el registro cartesiano y verbal, a partir de la razón de cambio, se logra identificar que algunos estudiantes justifican su asociación mediante un proceso de lectura e interpretación del registro cartesiano, por ejemplo cuando en Sit. 2 dicen: *“Disney porque sube 2 metros en 1 segundo”*, se nota que estos estudiantes identifican la razón de cambio de los dos procesos de covariación, las comparan y seleccionan la correspondiente a lo que se les solicita; por otra parte, se puede decir que algunos de ellos hacen una lectura global, pero que da cuenta de las

covariaciones presentes en el registro cartesiano para seleccionar su respuesta tal como se aprecia en Sit. 1 cuando dicen: *“El B porque se demora menos segundos y consigue más altura”*.

Tabla 51 Enunciados característicos para respuestas incorrectas de C3-2, Indicador I.B.

Indicador	Sit. 1	Sit. 2	Sit. 3
Cuando se trata de identificar y diferenciar en un registro de representación cartesiana la razón de cambio y asociarla a un registro verbal.	<p><i>“no responde”</i> (ver anexo E3PF-P24)</p> <p><i>“El tanque A porque inicia desde 2”</i></p> <p><i>“El A porque inicia en 2”</i></p> <p><i>“A. ya que tenía menos agua y menos altura”</i></p>	<p><i>“no responde”</i> (ver anexo E3PF-P29)</p> <p><i>“salitre mágico”</i></p>	<p><i>“no responde”</i> (ver anexo E3PF-P33)</p> <p><i>“Nairo por los 3 metros iniciales”</i></p> <p><i>“Nairo”</i></p>

Origen: fuente propia

De los enunciados anteriores se desprende que los sujetos confunden la razón de cambio con el intercepto de Y para identificar la rapidez en el crecimiento de una covariación, como se observa en Sit. 1 y Sit. 3 respectivamente cuando afirman: *“El tanque A porque inicia desde 2”* y *“Nairo por los 3 metros iniciales”*, permiten dar validez a la presunción de este equívoco.

Gracias a las enunciaciones expuestas por los estudiantes en los ítems planteados en esta subcategoría, resaltamos que cerca de los dos tercios de los estudiantes pueden relacionar los registros cartesiano y verbal en diferentes situaciones, tanto por el punto de corte con el eje Y como por la razón de cambio, en sus escritos se nota que ellos identifican la razón de cambio de dos procesos de covariación, las comparan y seleccionan la correspondiente a lo que se les solicita. Por otra parte, de los enunciados concernientes a las respuestas incorrectas se deduce que los sujetos confunden la razón de cambio con el intercepto de Y.

Como cierre de esta subcategoría se presenta el comparativo de las enunciaciones de los sujetos estudiados a profundidad.

Tabla 52 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 24, 29 y 33 de la prueba final.

Sit	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	<i>“B. el tanque B”</i> (ver anexo E1PF-P24)	<i>“El B porque debe ser más angosto”</i> (ver anexo E2PF-P24)	<i>“El B”</i> (ver anexo E3PF-P24)
2	<i>“Disney”</i> (ver anexo E1PF-P29)	<i>“Disney porque va más rápido o tiene menos altura”</i> (ver anexo E2PF-P29)	<i>“Disney”</i> (ver anexo E3PF-P29)
3	<i>“Usaint”</i> (ver anexo E1PF-P33)	<i>“Usaint”</i> (ver anexo E2PF-P33)	<i>“Usaint”</i> (ver anexo E3PF-P33)

Origen: fuente propia

De este tipo de enunciaciones es complejo sacar algún tipo de inferencia debido a que sólo escriben la respuesta correcta sin alguna justificación y en el momento de la entrevista se limitan a repetir la misma opción y señalar en la gráfica la respuesta correcta y argumentan que ello es obvio.