



**SIGNIFICADOS QUE CONSTRUYEN LOS ESTUDIANTES SOBRE
COVARIACIÓN LINEAL: UNA EXPERIENCIA ESCOLAR EN
OCTAVO GRADO**

**IVÁN DARÍO PARRA GARCÍA
JOHN EDISON RAMOS BURBANO**

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
BOGOTÁ – 2018**



**SIGNIFICADOS QUE CONSTRUYEN LOS ESTUDIANTES SOBRE
COVARIACIÓN LINEAL: UNA EXPERIENCIA ESCOLAR EN
OCTAVO GRADO**

**IVÁN DARÍO PARRA GARCÍA
JOHN EDISON RAMOS BURBANO**

DIRECTOR TESIS: JORGE CASTAÑO GARCÍA

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS MATEMÁTICAS
BOGOTÁ - 2018**

NOTA DE ADVERTENCIA

“La universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Sólo velará porque no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y porque las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vean en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia.” Artículo

23, resolución No 13 del 6 de Julio de 1946,

DEDICATORIA

*Dedicado a Dios,
a mis padres, a mi esposa, a mis sobrinos
y cada estudiante quien con su participación constantemente me instruye.*

*Dedicado a Dios,
a mis padres y a mi hermano quienes me brindaron todo su apoyo,
y en especial a mi esposa e hijos que con su amor impulsan mi vida,
por último, quiero dedicar este trabajo a los estudiantes que permitieron y dieron todo
de si para que esta investigación se desarrollará.*

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos en primer lugar a Dios por la sabiduría y fortaleza, para el desarrollo de este documento. Reconocimiento al colegio Carlos Pizarro LeonGómez, a cada estudiante que participó en esta construcción. Especial agradecimiento al Dr. Jorge Castaño por su permanente apoyo, supervisión, asesoría, y aportes.

Contenido

Resumen.....	1
Abstract.....	2
Introducción.....	3
1. Antecedentes y problema de investigación.....	7
1.1. Investigaciones que describen la historia de la construcción del concepto de función..	8
1.2. Investigaciones basadas en el diseño y validación de estrategias didácticas	11
1.3. Investigaciones que dan cuenta de los procesos cognitivos de los estudiantes	13
2. Formulación del Problema	17
2.1. Justificación.....	18
2.1.1. Informe trayectoria de los resultados por Competencias en la Prueba Saber 9º. .	24
3. Objetivos	25
3.1. Objetivo General	25
3.2. Objetivos Específicos	25
4. Marco Teórico.....	27
4.1. El significado y sus alcances	27
4.2. La Comprensión y su delimitación en este proceso investigativo	32
4.3. Significados y representaciones.....	33
4.4. Covariación lineal desde la disciplina matemática	35
4.5. Covariación lineal desde la perspectiva histórica	37
4.6. Covariación lineal desde la perspectiva didáctica.....	40
5. Metodología	43
5.1. Enfoque de la investigación.....	43
5.2. Población.....	44
5.3. Descripción global del procedimiento de investigación.....	45
5.4. Procedimientos en el aula e instrumentos de recolección de información	47
5.5. Análisis de la información.....	55
5.6. Categorías de análisis	56
5.7. Organización de la información.....	62
6. Resultados	65
6.1. De aplicaciones en situaciones conocidas y cercanas a su contexto a situaciones menos conocidas	66
6.1.1. Identificación de variables.	66
6.1.2. Relación cualitativa de la forma de dependencia	67
6.1.3. Relación cuantitativa de la covariación sin uso de la razón de cambio (C1-3)....	69
6.1.4. Relación cuantitativa de la covariación con uso de la razón de cambio (C1-4)...	72

6.2.	De situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre situaciones..	75
6.2.1.	Relación analógica entre situaciones (C2-1)	75
6.2.2.	Identificación del tipo de dependencia entre magnitudes. (C2-2)	78
6.2.3.	Cuantificación de la variación a partir de un registro verbal. (C2-3)	80
6.2.4.	Cuantificación de la variación a partir de un registro verbal. (C2-4)	80
6.3.	De escasa coordinación entre representaciones de registros diferentes a mayor coordinación entre ellas	82
6.3.1.	Identificación de registros cartesiano y tabular (C3-1)	82
6.3.2.	Identificación de registros cartesiano y tabular (C3-2)	83
7.	Conclusiones	87
7.1.	Discusión	92
7.2.	Alcances y limitaciones	94
	Referencias	97

Índice de tablas

<i>Tabla 1 Aspectos conceptuales relacionados con procesos cognitivos, según Piaget (1968), Vasco (2003) y Carlson (2003).</i>	14
<i>Tabla 2 Resumen de características de los estadios y niveles según Piaget (1968) y Carlson (2003) respectivamente.</i>	15
<i>Tabla 3 Recopilación de referentes de calidad para grado octavo y noveno de educación básica secundaria.</i>	20
<i>Tabla 4 Malla Curricular Grado Octavo Colegio Carlos Pizarro León Gómez.</i>	22
<i>Tabla 5 Aprendizajes con dificultad, respecto al objeto de investigación entre los años 2015 y 2016, grado noveno.</i>	24
<i>Tabla 6 Recorrido Histórico de la covariación.</i>	38
<i>Tabla 7 Estructura general de la prueba inicial de la secuencia didáctica.</i>	48
<i>Tabla 8 Estructura general de la sesión 1 a la prueba final de la secuencia didáctica.</i>	49
<i>Tabla 9 Intuiciones sobre covariación. Prueba inicial.</i>	51
<i>Tabla 10 Elaboraciones sobre proporcionalidad directa. Prueba inicial.</i>	52
<i>Tabla 11 Manejo básico de los registros tabulares y cartesianos. Prueba inicial.</i>	52
<i>Tabla 12 Prueba final. Categoría C1 De aplicaciones particulares y conocidas a situaciones menos conocidas.</i>	53
<i>Tabla 13 Prueba final. Categoría C2. De situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre situaciones.</i>	54
<i>Tabla 14 Prueba final. Categoría C3. De escasa coordinación entre representación de registros diferentes a mayor coordinación entre ellas.</i>	54
<i>Tabla 15 Categoría C1. De aplicaciones en situaciones conocidas y cercanas a su contexto a situaciones menos conocidas.</i>	59
<i>Tabla 16 Categoría C2. De situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre situaciones.</i>	61
<i>Tabla 17 Categoría C3. De escasa coordinación entre representaciones de registros diferentes a mayor coordinación entre ellas.</i>	62
<i>Tabla 18 Porcentajes de respuestas correctas categoría 1, Subcategoría 1, según cada situación.</i>	66
<i>Tabla 19 Porcentajes de respuestas correctas categoría C1, Subcategoría C1-2, según cada situación.</i>	67
<i>Tabla 20 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 2.3, 4.3 y 6.3 de la prueba final.</i>	68
<i>Tabla 21 Porcentajes de respuestas correctas categoría C1, Subcategoría C1-3, según cada situación.</i>	69
<i>Tabla 22 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 8, 11 y 14 de la prueba final.</i>	71
<i>Tabla 23 Porcentajes de respuestas correctas categoría C1, Subcategoría C1-4, según cada situación.</i>	73
<i>Tabla 24 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 19 de la prueba final.</i>	74
<i>Tabla 25 Porcentajes de respuestas correctas categoría C2, Subcategoría C2-1, según cada situación.</i>	75

<i>Tabla 26 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 19 de la prueba final.</i>	<i>77</i>
<i>Tabla 27 Porcentajes de respuestas correctas categoría C2, Subcategoría C2-2, según cada situación.</i>	<i>78</i>
<i>Tabla 28 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 20 de la prueba final.</i>	<i>79</i>
<i>Tabla 29 Porcentajes de respuestas correctas categoría C2, Subcategoría C2-4, según cada situación.</i>	<i>80</i>
<i>Tabla 30 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 21 de la prueba final.</i>	<i>81</i>
<i>Tabla 31 Porcentajes de respuestas correctas categoría C3, Subcategoría C3-1, según cada situación.</i>	<i>82</i>
<i>Tabla 32 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 22, 27 y 31 de la prueba final.</i>	<i>83</i>
<i>Tabla 33 Porcentajes de respuestas correctas categoría C3, Subcategoría C3-2, según cada situación.</i>	<i>84</i>
<i>Tabla 34 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 24, 29 y 33 de la prueba final.</i>	<i>84</i>

Tabla de anexos

1. *Anexo Secuencia Didáctica*
2. *Anexo Análisis de resultados*
3. *Anexo E1PF (Estudiante 1 prueba final)*
4. *Anexo E2PF (Estudiante 2 prueba final)*
5. *Anexo E3PF (Estudiante 3 prueba final)*
6. *Anexo Otros PF (Otros Estudiantes prueba final)*

Resumen

Este trabajo de investigación tiene como fin la descripción de los significados de covariación lineal construidos por 24 estudiantes de grado octavo de educación básica secundaria, a partir de una secuencia didáctica diseñada y desarrollada con el fin de enseñar la covariación lineal mediante el estudio de fenómenos.

Para tal propósito, los sujetos de estudio fueron enfrentados a un campo de situaciones cuyos contextos son de diferente cercanía a los estudiantes, por medio de una secuencia didáctica en la que se incluye talleres grupales e individuales mediados por el uso de simulaciones en “Geogebra”.

La descripción del significado construido por los estudiantes se elabora con el estudio de la información obtenida en la prueba final de la secuencia didáctica a la luz de unas categorías de análisis inspiradas en los referentes teóricos trabajados, y valiéndonos de un enfoque investigativo de tipo mixto. A partir de ello se logra identificar invariantes o sistemas de prácticas prototípicas, cuando se enfrentan a situaciones de covariación lineal.

Como principales hallazgos podemos mencionar: a) algunos sujetos tienen dificultades para identificar las magnitudes que varían o son constantes durante un fenómeno, b) para cuantificar el cambio de una magnitud en relación al cambio de otra los sujetos usan diferentes métodos, algunos hacen estrategias aditivas o multiplicativas para el tanteo del cambio, mientras que unos pocos usan la razón de cambio para cuantificar dichos cambios y c) los sujetos son consistentes en sus enunciaciones a lo largo del campo de situaciones.

Palabras Claves: covariación lineal, función lineal, significado, secuencia didáctica.

Abstract

This research work aims to describe the meanings of linear covariation constructed by 24 eighth grade students of secondary basic education, from a didactic sequence designed and developed to teach linear covariation through the study of phenomena.

For this purpose, the study students were confronted with a field of situations whose contexts are of different proximity to the students, through a didactic sequence that includes group and individual workshops mediated using simulations in "GeoGebra".

The description of the meaning constructed by the students is elaborated with the study of the information obtained in the final test of the didactic sequence in the light of some categories of analysis inspired by the theoretical referents worked on, and using a mixed-type investigative approach. From this it is possible to identify invariants or systems of prototypical practices, when they faced with situations of linear covariation.

As main findings we can mention: a) some students have difficulties to identify the magnitudes that vary or are constant during a phenomenon, b) to quantify the change of one magnitude in relation to the change of another the students use different methods, some make additive or multiplicative strategies for the scoring of change, while a few use the change ratio to quantify these changes and c) the students are consistent in their statements throughout the field of situations.

Key words: linear covariation, linear function, meaning, didactic sequence.

Introducción

Los resultados de las pruebas internas (Pruebas Saber) y externas (PISA) realizadas a estudiantes de educación básica en Colombia han puesto de manifiesto la dificultad recurrente que tienen los estudiantes para estructurar el pensamiento variacional y sus diferentes representaciones, autores como Carlson (2003) y Azcárate (1990), entre otros, han manifestado que ésta es una problemática encontrada en diversos contextos sociales y en estudiantes de diferentes grados de escolaridad, inclusive en estudiantes de educación superior.

Esta problemática no es ajena y se ha agudizado en la institución educativa donde actualmente trabajamos, se hace entonces imprescindible enfrentar los índices expuestos por el Ministerio de Educación Nacional en el informe por colegio que se encuentra en los materiales de la caja Siempre Día E (2017), pues en ellos se indica que el 77% de los estudiantes de grado noveno de educación básica, no resuelve problemas en situaciones de variación, el 51% de los estudiantes no identifica características de las gráficas cartesianas en relación con la situación que representan y el 56% de los estudiantes no interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación.

Frente a estas evidencias e investigaciones nombradas, encontramos que la comunidad científica ha coincidido en señalar la importancia del estudio de covariación como proceso fundamental a la hora de enfrentar estas problemáticas, tal como lo menciona Carlson (2003): *“En forma colectiva, estos estudios sugieren que el razonamiento covariacional es fundamental para comprender conceptos principales del cálculo y que los currículos convencionales no ha sido efectivos para promover esta habilidad de pensamiento en los estudiantes”* (p.127).

En este sentido, investigar sobre la construcción del significado de covariación lineal en estudiantes del colegio Carlos Pizarro León Gómez (quienes cursan octavo grado de educación básica en Colombia), a partir de una secuencia didáctica enfocada en el estudio de fenómenos, cobra importancia, pues esta investigación aborda un tema de interés para la comunidad académica, ya que como lo manifiesta Azcárate “La finalidad de llegar a determinar con precisión cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras, es lo que da sentido al estudio de las funciones, así como al conocimiento de determinados modelos” (Azcárate y Deulofeu, 1990, p.58).

Las investigaciones y trabajos que se han nombrado hacen parte de una consulta previa de antecedentes, donde se logró estructurar tres categorías elementales para la elaboración de esta investigación. Las categorías se consolidaron agrupando trabajos e investigaciones con objetivos comunes, de esta manera tenemos como primera categoría aquellos referentes que hacen alusión a la epistemología e historia de la función, como segunda categoría aquellos aportes que se hacen entorno a los procesos cognitivos que intervienen en el pensamiento variacional, los cuales coinciden en afirmar que: el concepto de función depende en gran parte de la capacidad para leer e interpretar cada uno de los lenguajes de representación de dicho concepto, y en segunda instancia, por la capacidad para hacer una conversión de un lenguaje a otro, y finalmente la tercera categoría agrupa los trabajos que apuntan al diseño y validación de propuestas didácticas, en los cuales encontramos como punto coincidente: las actividades que parten de situaciones interactivas o que simulen un experimento, permiten al estudiante observar las implicaciones o efectos de la alteración de alguno de sus elementos y pueden potenciar al estudiante a dar significado a los símbolos propios de la notación funcional.

Los trabajos e investigaciones anteriores brindan grandes aportes para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de función ligada al pensamiento variacional, y la covariación lineal. Sin embargo, creemos que ellas no estudian a profundidad los significados que construyen los estudiantes cuando abordan situaciones de covariación lineal y que son usados para interpretar, resolver y comunicar una situación problema. Por tanto es propicio formular la pregunta que orienta esta investigación ¿Cómo son los significados que construyen los estudiantes acerca de covariación lineal, a partir de una secuencia didáctica llevada a cabo en grado octavo de la Institución Educativa Distrital Carlos Pizarro León Gómez?, en consonancia con ello es necesario elaborar un diagnóstico de la población a estudiar y formular la secuencia didáctica que permita identificar invariantes o prácticas prototípicas de los estudiantes cuando enfrentan situaciones de diferente cercanía al contexto, ligadas a fenómenos de covariación lineal.

Al preocuparnos por los significados de covariación lineal construidos por los estudiantes, trataremos aspectos teóricos de alta complejidad, dado que la comunidad académica ha presentado diversas oposiciones en cuanto uso de la palabra significado, tanto así que ha enfrentado a lingüistas y pragmáticos en cuanto a su constructo teórico. Por tal motivo, adoptamos la postura de autores como Godino (1994), en relación a la construcción de significado mediante un sistema de prácticas y la identificación de invariantes en ellas, Castaño (2014) referencia el significado desde el punto de vista cognitivo, Carlson (2003) sugiere niveles de razonamiento variacional y su complejización, y Duval (2006) registros de representación semiótica asociados a covariación lineal, entre otros, para tomar posición frente al uso de los vocablos significado y covariación lineal, de tal manera que nos permita estructurar un marco referencial que derive en estrategias metodológicas e investigativas.

Con el ánimo de describir los significados construidos por los estudiantes en torno a covariación lineal, el enfoque investigativo a utilizar es de tipo mixto, cuantitativo como excusa para determinar el diagnóstico de la población de estudio, cualitativo mediante la descripción de las enunciaciones propias de los estudiantes en todo el desarrollo de la secuencia didáctica y soportado en ampliaciones hechas a través de entrevistas clínico-críticas a tres sujetos seleccionados.

Al analizar las construcciones realizadas por los sujetos de estudio, se presentan invariantes o prácticas prototípicas como las siguientes: a) algunos sujetos tienen dificultades para identificar las magnitudes que varían o son constantes durante un fenómeno, b) para cuantificar el cambio de una magnitud en relación al cambio de otra los sujetos usan diferentes métodos, algunos hacen estrategias aditivas o multiplicativas para el tanteo del cambio, mientras que unos pocos usan la razón de cambio para cuantificar dichos cambios y c) los sujetos son consistentes en sus enunciaciones a lo largo del campo de situaciones.

1. Antecedentes y problema de investigación

En este capítulo presentaremos el estado de la cuestión refiriendo aquellos trabajos que se relacionan con la enseñanza y aprendizaje de la covariación lineal en específico, la función lineal.

Delimitado el campo de acción, se consultaron investigaciones tanto nacionales como internacionales, relacionadas con: el proceso histórico de la covariación ligada a la concepción de función, el proceso cognitivo de construcción del pensamiento variacional, las propuestas didácticas que se han elaborado sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje, y finalmente, trabajos relacionados con el método, a fin de indagar sobre estrategias propuestas para describir los procesos cognitivos, especialmente la significación de la covariación.

Los trabajos se presentan agrupados en las siguientes categorías

Investigaciones que describen la historia de la construcción del concepto de función: Sierpinska (1992) On understanding the notion of function y Azcárate (1996) Funciones y gráficas. Estas categorías serán abordadas a profundidad en el capítulo de marco teórico.

Investigaciones basadas en el diseño y validación de estrategias didácticas: Quintero (2011) Estrategias didácticas para el aprendizaje del concepto de función en el curso de álgebra y funciones de la universidad ICESI, Quintero (2013) Objetos didácticos para el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de grado noveno, Martínez (2013) Apropiación del concepto de función utilizando el software Geogebra, García (2013) El concepto de función como una integración de los registros de representación, y Posada y Villa (2006) Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.

Investigaciones que dan cuenta de los procesos cognitivos de los estudiantes:

Piaget (1968) Epistemologie et psychologie de la fonction; Vasco (2003) El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías, Gómez (2015) Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes del grado noveno, Grueso, R. & González (2016) El concepto de función como covariación en la escuela, Ruiz (1994) Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función, análisis epistemológico y didáctico, y Carlson (2003) Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio.

Esta categorización no implica que una investigación o trabajo solamente se base o de resultados frente a una sola categoría, es decir, hay investigaciones cuyos marcos de referencia se apoyan en varias de estas y sus resultados dan aportes a más de uno de estos campos, sin embargo, hemos tratado de clasificarlas según su característica más distintiva.

A continuación, procederemos a realizar una revisión de las mismas y a resaltar los resultados más significativos frente al interés de este trabajo.

1.1. Investigaciones que describen la historia de la construcción del concepto de función

En esta categoría agrupamos los trabajos de Anna Sierpinska y Carmen Azcárate, ya que estas autoras coinciden en relatar la génesis y evolución de la noción de función ligada al campo de la covariación y además establecen algunas conclusiones y recomendaciones para el proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de función. Vale la pena señalar que cada autora recrea la historia de la función con objetivos distintos, mientras que Sierpinska busca con la revisión del proceso histórico evidenciar actos de comprensión, obstáculos epistemológicos y concepciones que la humanidad ha tenido de la noción de función a través del tiempo, Carmen Azcárate se enfoca en

proponer la historia como un instrumento básico para el docente a la hora de planear, ejecutar y evaluar algún proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de función.

Para soportar esta apreciación detallaremos un poco más los aportes de las dos autoras.

Primero, en el artículo titulado “On understanding the notion of function” Anna Sierpinska realiza la siguiente conceptualización de un acto de comprensión:

But if, instead of musing on the errors of the past, we cast an eye on what is in front of us then we tend to describe the jump in terms of the new ways of knowing the former image will be called an act of overcoming a difficulty or obstacle. The latter an act of understanding (Sierpinska, 1992, p. 27)

A partir de este constructo se da a la tarea de exponer los cambios en el pensamiento humano durante la elaboración de la noción de función, planteando 18 actos históricos de comprensión, para nuestro trabajo los más destacados son:

1. Identificación de los cambios observados en el mundo circundante como un problema práctico a resolver.
2. Identificación de regularidades en las relaciones entre los cambios como una forma de hacer frente a los cambios.
3. Identificación de los sujetos de los cambios en el estudio de los cambios.
4. Discriminación entre variables dependientes e independientes.
5. Discriminación entre definiciones matemáticas y descripciones de objetos.
6. Discriminación entre las diferentes formas de representar las funciones y las funciones mismas.
7. Generalización de la noción de variable.

Aunado a estos actos de comprensión, Sierpinska amplía su teorización conceptualizando lo que ella denomina obstáculo epistemológico, como aquello que

dificulta pasar a una nueva forma de saber. Bajo este precepto, la autora acude nuevamente a la historia para ilustrar y justificar algunos obstáculos epistemológicos de la concepción de función.

Segundo, para ilustrar el contraste de objetivos de las autoras mencionadas, nos permitimos mencionar que en el libro *Funciones y Gráficas*, Carmen Azcárate realiza aportes relacionados con la historia del concepto de función y asuntos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las funciones y las gráficas. Por ejemplo, ella plantea que la historia es primordial para la enseñanza de cualquier concepto:

Creemos que si el enseñante sabe cómo dicho concepto se ha ido formando hasta llegar a nuestros días, podrá evaluar mejor la dificultad intelectual que ha supuesto su adquisición para la humanidad y ello le permitirá formarse una primera idea de los obstáculos que encontrará en sus alumnos (Azcárate & Deulofeu, 1996, p. 15).

De aquí que la historia sea imprescindible para cualquier elaboración didáctica pues dará a conocer las situaciones que potenciaron su desarrollo y problemas que surgieron en ese proceso y que seguramente vivenciamos en el aula.

Azcárate, a diferencia de Sierpinska, reconstruye la historia, identificando épocas de desarrollo más no actos de comprensión, es así que la autora hace referencia a tres periodos a saber, el mundo antiguo, La edad media y el periodo moderno, y en cada uno de ellos menciona tanto las situaciones problema como los logros y limitaciones de grandes matemáticos que los enfrentaron.

Aunque con objetivos diferenciados en cuanto al trabajo histórico de la función, estas autoras coinciden en algunas de sus conclusiones:

Primero, antes del concepto de función en forma analítica, en el proceso de enseñanza debe aparecer la función como herramienta de modelado de determinadas situaciones, ya sea de la vida real o en la ciencia.

Segundo, los estudiantes deben estar interesados en percibir y explicar los cambios, encontrar regularidades entre ellos y establecer relaciones como un problema digno de una explicación científica.

Tercero, la construcción de tablas numéricas y el estudio de fenómenos o situaciones proporcionan contextos dentro de los cuales los niveles más profundos de la noción de función se vuelven relevantes.

Cuarto, es importante proporcionar a los estudiantes un amplio espectro de formas de ver funciones, hablar de funciones y representar funciones, a fin de evitar la posible identificación de una función a partir de un solo registro. Los estudiantes deben tener la oportunidad de adquirir una cierta flexibilidad en el uso de estos modos de expresión y representación.

Quinto, la introducción del concepto de función teóricamente como un tipo particular de relación, es poco justificada y didáctica, desde el punto de vista epistemológico, una definición informal es suficiente en la escuela para acercarse al significado de función.

1.2. Investigaciones basadas en el diseño y validación de estrategias didácticas

En esta categoría de trabajos, decidimos agrupar los aportes realizados por Carlos Quintero (2011), Posada F. y Villa J. (2006), Julián García (2013), John Quintero y José Quintero (2013), docentes vinculados a programas de maestría en universidades colombianas; el aspecto que permite dicha agrupación radica en el propósito de sus trabajos, ya que estos trabajos se orientan a aportar estrategias didácticas para la enseñanza de la noción de función. Los tres últimos trabajos citados proponen estrategias didácticas en grado noveno de diferentes instituciones educativas de ciudades distintas, y el primero, el realizado por Carlos Quintero tuvo como población un grupo de estudiantes de primer semestre de una institución universitaria.

Adicional a tener en común el mismo propósito, encontramos que estos trabajos se caracterizaban por establecer un panorama inicial de las poblaciones con las cuales trabajaron, para posteriormente compararlo con una prueba final, tratando de evidenciar la potencia de su estrategia didáctica.

Respecto a las dificultades que se encontraron en los panoramas de inicio, vale la pena señalar que coinciden en las siguientes descripciones.

1. Los estudiantes presentan dificultades para determinar cuándo una regla de asignación, diagrama o gráfica son realmente funciones.
2. Los estudiantes tienen dificultad para percibir la relación de covariación entre las magnitudes relacionadas.
3. A los estudiantes se les dificulta cuantificar cómo varían ciertas magnitudes que dependen de otras y establecer modelos a partir de una tabla de valores de una función.
4. Los estudiantes tienen dificultades para representar o interpretar la relación de covariación entre dos magnitudes usando gráficos y expresiones analíticas.
5. Los estudiantes no logran establecer relaciones entre las distintas representaciones de una función.

En cuanto a las conclusiones destacamos que estos trabajos convergen en los siguientes aspectos:

1. El concepto de función depende en gran parte de la capacidad para leer e interpretar cada uno de los lenguajes de representación de dicho concepto, y en segunda instancia, por la capacidad para hacer una conversión de un lenguaje a otro.
2. Actividades que partan de situaciones interactivas o que simulen un experimento, permiten al estudiante observar las implicaciones o efectos de la alteración

de alguno de sus elementos y pueden potenciar al estudiante a dar significado a los símbolos propios de la notación funcional.

3. En las diferentes actividades presentadas por los estudiantes se observa una dificultad en la asimilación del registro algebraico o simbólico, dado que gran parte de los educandos no pudieron llegar a la construcción de diferentes ecuaciones que pedían las actividades.

4. Un elemento que puede promover la integración de los diferentes registros de representación para entender la función como un modelo matemático, es la modelación matemática, debido a que se pueden realizar situaciones problemas que incorporen los diferentes conceptos.

Por último, queremos destacar una contribución directamente relacionada con nuestro interés de investigación expuesta por Posada y Villa, ya que menciona los aspectos necesarios para abordar la covariación lineal:

Para que la escuela pueda alcanzar un buen desarrollo conceptual de la función lineal con sus estudiantes, desde una perspectiva variacional, requiere tener en cuenta los siguientes aspectos: La identificación de las relaciones de dependencia entre dos magnitudes, la cuantificación de la relación mediante tablas de valores, la identificación de la razón de cambio constante, el reconocimiento de la razón de cambio constante como elemento que identifica las funciones lineales, la comprensión de la función lineal como un modelo que atrapa la covariación entre dos magnitudes. La identificación de la proporcionalidad simple directa como un caso particular de función lineal importante en la modelación de variados fenómenos, la identificación de las características que identifican una función lineal desde los diferentes registros de representaciones. (Posada & Villa, 2006, p. 173).

Los anteriores aspectos serán considerados en esta investigación como indicadores para identificar la construcción del significado de covariación lineal.

1.3. Investigaciones que dan cuenta de los procesos cognitivos de los estudiantes

En esta categoría reunimos los aportes realizados por Carlos Vasco(2003), Marilyn Carlson (2003), Luisa Ruiz (1994) y Oscar Gómez(2015); el aspecto que permitió esta agrupación radica en la estructura de sus trabajos, ya que los tres primeros autores

construyen un marco conceptual y a partir de este establecen estadios, fases o niveles de evolución o desarrollo del pensamiento covariacional o funcional, y el último, el realizado por Oscar Gómez(2015) se vale de los aportes de los anteriores para establecer antecedes de la población y observar qué elementos se desarrollan respecto al pensamiento variacional fundamentado en los aportes de Carlson (2003).

Respecto al marco conceptual de estos autores quisimos establecer el siguiente cuadro comparativo para ilustrar al lector algunas relaciones, aspectos comunes y diferencias entre ellos.

Tabla 1 Aspectos conceptuales relacionados con procesos cognitivos, según Piaget (1968), Vasco (2003) y Carlson (2003).

ASPECTOS CONCEPTUALES Y TEÓRICOS		
Piaget (1968) (Higueras, 1994, pág. 86)	Carlos Vasco (Vasco, 2003)	Carlson (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003, pág. 124)
Constitución de prefunciones como conductas preoperatorias de carácter eminentemente cualitativo, reservando el término función a las funciones cuantificadas que se constituyen como resultado de estructuras operatorias, la función aparece cada vez más como origen común de las operaciones y de la causalidad, es solamente en el contexto de los cambios entre estructuras operatorias y causales que la noción de función encontrará un estatus epistemológico estable.	El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.	Definimos el razonamiento covariacional como las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra. Coincidimos con el punto de vista de Saldanha y Thompson (1998) según el cual las imágenes de covariación son evolutivas, y usamos el término evolutivo en el sentido piagetiano (Piaget 1970) para significar que las imágenes de covariación se pueden definir por niveles y que los niveles emergen en una sucesión ordenada.

Los aportes de cada autor son tomados de forma textual de sus respectivos trabajos

Con la comparación establecida podemos observar que los autores tienen diferentes ejes conceptuales, para Piaget el eje de su teoría son las funciones, para Vasco el pensamiento variacional y para Carlson el razonamiento covariacional, pero también se

observa que en sus constructos teóricos coinciden al señalar que estos desarrollos son de tipo cognitivo y sus trabajos se apoyan en situaciones de cambio que permitan establecer relaciones entre variables.

Como ya hemos mencionado, estos autores establecen sus bases teóricas para enunciar los siguientes estadios, momentos o niveles:

Tabla 2 Resumen de características de los estadios y niveles según Piaget (1968) y Carlson (2003) respectivamente.

Piaget (1968) (Higueras, 1994, pág. 86)	Carlson (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003, pág. 124)
<p>Estadio 1: (7 - 8 años) El niño no llega a comprender el sentido de la variación ya que esto supone la conservación de una ordenación y la comprensión de una relación causal entre el factor responsable y el, efecto producido.</p> <p>Estadio 2A (8 – 9 años) En este estadio, el niño que ha comprendido la relación directa entre las magnitudes variables puede tener problemas para comprender la inversa.</p> <p>Estadio 2B (10 – 11 años) El progreso del niño en este estadio reside en la investigación de las diferencias relativas entre variables, de este modo llegará a obtener las relaciones de proporcionalidad.</p> <p>Estadio 3 (a partir de los 11 o 12 años) la investigación de una ley de variación es la que marca el paso del estadio anterior a este. Para determinar esta progresión se deben dar dos condiciones: determinar los puntos límites de la variación y las razones entre las magnitudes sucesivas de la serie”</p>	<p>Nivel 1: Coordinación: sustenta el cambio de una variable con cambios en la otra variable.</p> <p>Nivel 2: Dirección: sustenta la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra.</p> <p>Nivel 3 Coordinación cuantitativa: sustenta la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra.</p> <p>Nivel 4 Razón promedio: sustenta la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada.</p> <p>Nivel 5 Razón instantánea: sustenta la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye la una consecuencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario</p>

Los aportes de cada autor son tomados de forma textual de sus respectivos trabajos

De este compendio podemos mencionar que estos modelos de desarrollo coinciden en los siguientes aspectos:

Primero, Observamos que tanto el estadio 1 cómo el nivel 1, se basan en la identificación de las magnitudes constantes variables, y la relación entre ellas. Segundo, en el estadio 2A y en el nivel 2 propuesto por Carlson, se acude a la capacidad del

estudiante para representar y describir los fenómenos de cambios relacionando las variables. Tercero, identificamos que el estadio 2B y el nivel 3 implican el estudio de la variación estableciendo razones entre las variables involucradas. Cuarto, el estadio 3 y los niveles 4 y 5 involucran un estudio minucioso de los intervalos y tipos de variación.

Por último, vale la pena resaltar algunos resultados directamente relacionados con nuestro interés investigativo que Gómez (2015) nos expone en su investigación,

En primera instancia:

Como producto de la investigación se pudo evidenciar en los estudiantes “la coordinación del cambio de una variable respecto a la otra (AM1), el reconocimiento de la coordinación de la dirección del cambio de una variable respecto a la otra (AM2) y por último las estimaciones respecto a la coordinación de la cantidad del cambio de una variable respecto a la otra (AM3)” (Gómez, 2015, p. 84)

Y en segundo lugar afirma:

A lo largo del trabajo se evidenció que los estudiantes presentaron dificultades para construir imágenes de una razón que cambia uniformemente y sustentan las características asociadas al N4, y por supuesto en la construcción de imágenes que sustentan el cambio instantáneo que refiere a la AM5 que a su vez sustenta todos los niveles anteriores (Gómez, 2015, p. 86)

2. Formulación del Problema

Realizado el análisis de las investigaciones y trabajos teóricos relacionado en el capítulo anterior respecto al pensamiento variacional, la noción de función y la covariación lineal, las características más importantes que podemos decir de ellas son:

Las investigaciones realizadas sobre la historia de la construcción del concepto de función resaltan la importancia de conocer la evolución conceptual como herramienta para el diseño didáctico de situaciones que problematicen aspectos fundamentales de la covariación y la noción de función. De igual manera, estos estudios se consideran importantes ya que devela obstáculos en el desarrollo conceptual, sus orígenes y sus consecuencias. Así mismo, nos brinda grados o niveles de comprensión de la noción de función, los cuales serán de gran utilidad cuando analicemos las producciones de los estudiantes.

Las investigaciones orientadas al diseño y validación de situaciones didácticas nos aportan el panorama al cual nos enfrentamos, ya que estas investigaciones han establecido el diagnóstico de diversas poblaciones, encontrando similares concepciones previas e idénticas dificultades en los estudiantes, además nos sugieren actividades que podemos usar o adaptar para este trabajo.

En cuanto a los trabajos e investigaciones enfocados en los aspectos cognitivos, encontramos que algunos autores construyen un campo teórico sobre acciones mentales o fases del desarrollo del pensamiento variacional. Con esta fundamentación crean diferentes niveles que descomponen o modelan el aprendizaje de los estudiantes y como resultado de sus estudios, categorizan los estudiantes evidenciando que hasta los alumnos destacados en su nivel académico tienen niveles bajos de comprensión de la noción de función causados por un frágil pensamiento variacional.

Teniendo en cuenta la anterior caracterización consideramos que:

Las investigaciones anteriores brindan grandes aportes para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de función ligada al pensamiento variacional, la covariación lineal. Sin embargo, creemos que ellas no estudian a profundidad los significados que se crean en los estudiantes cuando abordan situaciones de covariación lineal y que son usados para interpretar, resolver y comunicar una situación problema.

Consideramos que no podemos comprender el aprendizaje de un estudiante si no es en relación con las maneras en que él aborda problemas, interpreta situaciones, o como dice Sierpinska.

Sólo cuando hemos visto instancias y no instancias del objeto, cuando podemos decir lo que es y lo que no es, cuando nos damos cuenta de sus relaciones con otros conceptos, cuando hemos notado que estas relaciones son análogas a las relaciones que conocemos, cuando hemos captado la posición que el objeto definido tiene dentro de una teoría y cuáles son sus posibles aplicaciones, que podemos decir algo entendido (Sierpinska, 1992, p. 26)

Por tanto, si queremos entender mejor a los estudiantes, tenemos que ser conscientes de sus actitudes, esquemas de pensamiento y los significados que le dan a los objetos matemáticos para actuar en favor de ellos.

Surge entonces el interrogante que da orientación a esta investigación

¿Cómo son los significados que construyen los estudiantes acerca de covariación lineal, a partir de una secuencia didáctica llevada a cabo en grado octavo de la Institución Educativa Distrital Carlos Pizarro León Gómez?

2.1. Justificación

En el campo de las investigaciones y trabajos científicos se resaltan algunas fuentes relevantes que respaldan la importancia del estudio de la covariación como parte fundamental del razonamiento variacional, entre ellas encontramos:

Posada y Villa (2006) refieren un panorama sobre investigaciones relacionadas con la noción de función, donde admitimos la necesidad de su enseñanza en la escuela secundaria, con la finalidad de reconocer las ideas intuitivas que traen los estudiantes en

torno a cambios, rapidez, velocidad de cambio, razón de cambio; los cuales son útiles para trabajar más adelante en grados superiores los conceptos de derivada, máximos, mínimos entre otros.

Otra fuente, relacionada con la anterior, que fortalece la importancia de la covariación como base para consolidar conceptos y procedimientos matemáticos de gran potencia, la encontramos en Carlson (2003), quien citando a Thompson (1994) señala:

El razonamiento covariacional es fundamental para la comprensión del teorema fundamental del cálculo -darse cuenta de que la acumulación de una cantidad y la razón de cambio de su acumulación están relacionadas estrechamente- es una de las huellas intelectuales en el desarrollo del cálculo (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003, p.127)

Esta misma investigación señalando que estudiantes sin conocimientos del cálculo pueden tener habilidades desarrolladas en torno al pensamiento variacional, afirma que: “creemos que estos hallazgos sugieren la necesidad de monitorear el desarrollo de la comprensión de parte de los estudiantes sobre la función y de sus habilidades de razonamiento covariacional antes y durante su estudio del cálculo” (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003, p.149). Por tal motivo, es de suma importancia realizar esta investigación para exponer a la comunidad académica el estado de los significados que crean los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones que recomienda tanto la historia como las propuestas didácticas y metodológicas.

Aunado a estos aportes de la comunidad académica donde mencionan claramente la importancia de realizar este tipo de investigaciones, y teniendo en cuenta que la población de estudio está inmersa en la modalidad de educación formal en Colombia,

Resaltamos que tanto el tema como el tipo de estudio llevado a cabo en este trabajo son de suma importancia para mejorar la calidad de la educación, pues son sugeridos y respaldados por organismos nacionales e internacionales, tales como el Ministerio de

Educación Nacional (MEN) y el Consejo Nacional de Profesores Matemáticas; tanto así que el MEN ha dedicado varias de sus publicaciones a conceptualizar y resaltar la importancia de desarrollar este tipo de pensamiento en niños y jóvenes. Cabe entonces, señalar un aparte de los Lineamientos Curriculares donde se define el pensamiento variacional y el tipo de trabajo que se debe desarrollar en el aula:

El pensamiento variacional es el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas (MEN, Lineamientos curriculares. Colombia., 1998, p.49)

Dicho lo anterior, se evidencia que el MEN propende este tipo de trabajo en las aulas de clase de las instituciones de educación formal, y mediante documentos como: estándares básicos de competencias (EBC), los lineamientos curriculares en matemáticas y los derechos básicos de aprendizaje V2 (DBA), dan guía a los procesos educativos sobre la pertinencia de ciertas temáticas y procesos de los cuales se apoya la presente investigación.

A continuación, se relacionan los aspectos que directamente justifican el desarrollo de esta investigación a partir de las proposiciones expuestas en la matriz de referencia (documento de la caja de materiales Siempre Día E), los estándares presentes en el documento EBC y los enunciados presentes en los DBA de los grados octavo y noveno.

Tabla 3 Recopilación de referentes de calidad para grado octavo y noveno de educación básica secundaria.

Matriz de Referencia	EBC	DBA
Identificar características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representa. observar y describir la variación de gráficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables. Expresar y traducir entre lenguajes verbal, gráfico y simbólico.	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.	Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación construir gráficas a partir de tablas, expresiones algebraicas o enunciados verbales		Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, (...) y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).
Interpretar tendencias que se presentan en una situación de variación. Analizar situaciones de variación representadas de manera algebraica o tabular, restringidas a funciones lineales, afines o cuadráticas, mediante el uso de propiedades (...) analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones lineales, afines y cuadráticas.		Utiliza expresiones numéricas, algebraicas o gráficas para hacer descripciones de situaciones concretas y tomar decisiones con base en su interpretación.
Identificar y describir las relaciones (aditivas, multiplicativas, de recurrencia, ...) que se pueden establecer en una secuencia numérica. Generalizar relaciones o propiedades en una secuencia numérica.	Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.	
Usar la descripción de una relación determinada, para reconocer los términos de una secuencia numérica		
Usar representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. Justificar a través de representaciones y procedimientos la existencia de una relación de proporcionalidad directa o inversa entre dos variables	Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.	

Matriz de referencia (2016) recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/articles-352712_matriz_m.pdf

Estándares Básicos de competencias (2006) recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Derechos básicos de aprendizaje (2017) recuperado de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

Hecha esta recuperación de información, vemos congruencia en los tres documentos, en cuanto a: primero, descripción de la covariación por medio de diversos registros de representación, segundo, necesidad de plantear la modelación y el estudio de

fenómenos, tercero, analizar y coordinar las representaciones gráficas, tabulares y verbales de un proceso de covariación, y por último, resolución de problemas de covariación en diferentes contextos.

Ahora bien, teniendo en cuenta que este proceso investigativo se desarrolla con una población de estudiantes de una institución educativa estatal, la cual cuenta con una propuesta curricular para orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje, con el fin de responder a las necesidades específicas de la población y las orientaciones del ministerio, que anteriormente se expusieron, queremos ilustrar los planteamientos que se hacen en el colegio y que se relacionan directamente con el estudio, con el objeto de validar la necesidad de llevar a cabo este trabajo.

Tabla 4 Malla Curricular Grado Octavo Colegio Carlos Pizarro León Gómez.

Malla Curricular Área Matemáticas					
Periodo	Planteamiento y resolución de problemas	Razonamiento matemático	Comunicación matemática	Temas y Subtemas	Desempeños
1		Encuentra patrones y los expresa matemáticamente	Representa expresiones del lenguaje cotidiano mediante ecuaciones	Expresiones algebraicas Ecuaciones Generalizaciones	Resuelve problemas utilizando ecuaciones y encuentra patrones de formación de series dadas Reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos
2					
3	Utiliza los productos notables en la solución de situaciones problema	Deduce algunos de los productos notables	Identifica la equivalencia entre diferentes expresiones algebraicas		Reconoce las características de los diferentes productos notables

Periodo 4	Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de las expresiones algebraicas y de las relaciones y operaciones entre ellas.	Determinar condiciones para que dos expresiones algebraicas sean equivalentes	Identificar equivalencias entre expresiones algebraicas y expresiones numéricas	Técnicas de conteo	de	Identifica las clases de variables estadísticas involucradas en un problema. Diferencia y usa las técnicas de conteo para establecer el espacio muestral de un evento simple y la probabilidad de que ocurra el mismo
--------------	--	---	---	--------------------	----	---

Tabla adaptada de la malla curricular de matemáticas del colegio Carlos Pizarro León Gómez (ver anexo Malla Curricular I.E.D. CPLG)

Teniendo en cuenta tanto la importancia que el Ministerio presta al desarrollo del pensamiento variacional, como los múltiples resultados de las investigaciones académicas, donde se enfatiza en potenciar el trabajo con la covariación y el estudio de los fenómenos de cambio, apreciamos que la propuesta curricular de la institución educativa observada, en cuanto a los contenidos y desempeños, carece de relación con los referentes de calidad expuestos, al no encontrar específicamente desarrollo de contenidos asociados a la covariación lineal.

Ampliando lo anterior, ilustraremos los resultados de las pruebas estandarizadas, en las cuales la institución educativa participó en los dos últimos años.

2.1.1. Informe trayectoria de los resultados por Competencias en la Prueba Saber 9°.

Colegio: Carlos Pizarro León Gómez (IED)

Tabla 5 Aprendizajes con dificultad, respecto al objeto de investigación entre los años 2015 y 2016, grado noveno.

Dificultades año 2015	Dificultades año 2016
El 57% de los estudiantes no interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación.	El 50% de los estudiantes no interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación.
El 49% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.	El 74% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.
El 48% de los estudiantes no identifica características de las gráficas cartesianas en relación con las situaciones que representan.	El 69% de los estudiantes no identifica características de las gráficas cartesianas con en relación con las situaciones que representan.
El 46% de los estudiantes no usa y relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación.	El 72% de los estudiantes no usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar diferentes sistemas de variación.
El 45 % de los estudiantes no reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos.	El 79% de los estudiantes no reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos.
El 25 % de los estudiantes no establece relaciones entre propiedades de las gráficas y <u>propiedades de las ecuaciones algebraicas.</u>	El 69% de los estudiantes no establece relaciones entre propiedades de las gráficas y <u>propiedades de las ecuaciones algebraicas.</u>

Datos recuperados de los informes por colegio entregados por el ICFES a la institución para el desarrollo de jornada denominada “Día E”, recuperado de https://diae.mineducacion.gov.co/siempre_diae/documentos/111001104329.pdf y https://diae.mineducacion.gov.co/siempre_diae/documentos/2016/111001104329.pdf

Es conveniente resaltar que, en el histórico de resultados sobre el objeto de investigación, en esta institución, se evidencia una dificultad recurrente asociada a la comprensión de los procesos de covariación. Convirtiéndose esto en un llamado urgente a la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de los procesos donde se potencie el desarrollo del pensamiento variacional.

3. Objetivos

3.1. Objetivo General

Describir los significados de covariación lineal construidos por estudiantes de grado octavo a partir de una secuencia didáctica en torno a fenómenos de covariación.

3.2. Objetivos Específicos

1. Diseñar y ejecutar una secuencia didáctica donde los estudiantes se enfrenten a situaciones de covariación lineal y los aspectos relevantes para su construcción.
2. Identificar invariantes y prácticas prototípicas de los estudiantes cuando enfrentan situaciones de diferente cercanía al contexto, ligadas a fenómenos de covariación lineal.
3. Analizar y contrastar los significados construidos por los sujetos de estudio cuando se enfrentan a fenómenos de covariación lineal.

4. Marco Teórico

En este capítulo abordaremos los fundamentos teóricos en los que nos apoyaremos para realizar la descripción de los significados que construyen los estudiantes sobre covariación lineal, por consecuencia, en primer lugar, se analiza la noción de significado de los objetos matemáticos, su estrecha relación tanto con las representaciones semióticas como con la comprensión, en segunda instancia, se presenta la covariación lineal desde el aspecto disciplinar, seguidamente el recorrido histórico de la covariación, para finalizar con algunos aspectos didácticos que orientan los procesos de enseñanza y aprendizaje y sirven de fundamento para la metodología de esta investigación.

4.1. El significado y sus alcances

El uso del término significado actualmente tiene gran acogida en el contexto y proceso enseñanza aprendizaje. En la comunidad de docentes esta palabra es habitualmente mencionada para denotar que alguien aprendió o sabe algo, que una actividad o un problema usado para la enseñanza tiene gran potencia o para enunciar las propiedades de algo, etc., sin embargo, a decir de Godino (1994), el vocablo significado suele usarse desde lo empírico y sin referencia teórica alguna, es decir, exclamaciones como: *“el estudiante no recuerda cómo sumar fracciones porque los procesos de enseñanza no fueron significativos”*(p.1), no tienen criterios teóricos que permitan validar dichas proposiciones. Por tanto, nuestra intención es vincular el término significado con una fundamentación teórica que permita tener claridad de los invariantes, tipos de representación, procesos y relaciones que están implícitas en el significado de un objeto matemático en situaciones problema, para proceder a realizar descripciones de los procesos que hacen los estudiantes fundamentados en un constructo sólido y reconocido.

En didáctica de las matemáticas la idea de significado es tan importante que convoca preguntas de investigación y lleva a indagar por la naturaleza de los objetos matemáticos, su fundamentación se ha realizado desde dos posturas teóricas, realismo y pragmatismo según Godino (1994), posturas que si bien es cierto son opuestas, no por ello carecen de puntos en común, es así que para el presente estudio buscaremos tomar posición al respecto.

La postura realista expuesta por Godino (1994), citando a Kutschera (1979): *“Según esta concepción el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, siendo posible una división tajante entre semántica y pragmática”* (p.4), pero ahora bien para complementar la cita anterior, la teoría pragmática aporta: *“El significado de una palabra es su uso en el lenguaje.”* (Wittgenstein, 1953, p. 16): y acorde con ello Godino (1994) *“el significado de las expresiones lingüísticas depende del contexto en que se usan, además niegan la posibilidad de observación científica, empírica e intersubjetiva de las entidades abstractas, como conceptos o proposiciones, que es admitida implícitamente en las teorías realistas.”* (p.5)

Dada esta oposición teórica sobre el término significado nos adherirnos a la corriente pragmática, adviértase en efecto que si consideramos una perspectiva realista, como lo menciona Godino (2003), implica una visión absoluta del conocimiento matemático en el sentido de que este es considerado como un sistema de verdades seguras e inmutables, por tanto, preguntarnos por el significado que crean los estudiantes de covariación lineal sería corroborar si recuerdan una definición matemática sin considerar el sistema de prácticas; pero también cabe resaltar, que al hacernos esa misma pregunta desde el enfoque pragmático, podemos observar si la función lineal

emerge de un sistema de prácticas ligadas a la actividad de resolución de problemas que ellos realizan en clase y que evoluciona con el tiempo y las experiencias.

Puede colegirse de lo dicho, que nuestro interés investigativo se relaciona directamente con los siguientes cuestionamientos centrales de la Didáctica de la matemática: ¿Qué significado matemático del sistema de prácticas en el cual están inmersos los alumnos, podemos inferir a partir de una observación de su conducta? ¿Qué clase de significado pueden construir los alumnos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas? ¿Cómo podemos caracterizar el significado de los conceptos matemáticos, en específico el de covariación lineal?

Con el ánimo de abordar estos interrogantes acudimos a Castaño (2014) quien citando a Vergnaud (1982), menciona:

(...) se considera todo concepto como una triplete constituida por tres conjuntos, el primero, conjunto de situaciones que le da sentido al concepto, segundo, el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas y tercero, conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (p.85)

Dicha triada orientará el proceso de análisis de la presente investigación tomando como eje de estudio, los invariantes presentes en cada situación didáctica a abordar con los estudiantes de grado octavo de educación básica. Con lo expuesto hasta aquí, parece conveniente aceptar con Godino y Batanero (1994) el triple aspecto de la matemática, como actividad de resolución de problemas, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado.

Desde una perspectiva más cognitiva Castaño (2014) en el modelo signo numérico que propone en su estudio de las conversiones de representaciones del sistema decimal de numeración de diferentes registros establece una diferencia entre significado y sistema de prácticas.

En este modelo se diferenciará entre significado y sistema de prácticas. Se admitirá como significado aquello que orienta las prácticas; se dirá, entonces, que el significado personal orienta el sistema de prácticas personales (lingüísticas o no) y que el significado institucional el sistema de prácticas institucionales (lingüísticas o no). Por lo tanto, los significados personal e institucional se infieren del estudio del sistema de prácticas respectivas, del estudio sistemático de prácticas personales e institucionales para identificar lo que permanece como invariante. En ese sentido el significado podría entenderse como esas hipótesis que hace el estudioso sobre lo que supone orienta al individuo o a un grupo de individuos en sus prácticas y que permite explicar la sistematicidad de sus acciones. Así, asumir el significado como producto de la actividad semiótica y conceptual no es contraria a una posición pragmática del significado, en tanto, que en uno y otro caso se admite que se accede a este mediante el estudio de las prácticas, pero sí permite tener presente que el sujeto es quien asigna significado. (p.86)

Pero como él mismo lo advierte esta posición no se opone a la posición pragmática del significado, aunque, según él, sí permite tener presente que es el sujeto quien asigna significado. Independientemente de esta discusión teórica, para efectos de este trabajo, asumimos que nos basta revisar las prácticas para acercarnos al significado que los estudiantes construyen sobre covariación lineal.

A continuación, describiremos el constructo teórico propuesto. Inicialmente respecto a la resolución de problemas los autores nos aclaran que son contextos donde intervienen objetos matemáticos y representaciones simbólicas, donde es necesario asumir una actividad matemática que permita formular, validar y extender las soluciones a otras situaciones. La actividad matemática, sugiere el desarrollo de prácticas o sistemas de prácticas, que según Godino (1994): “*Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizar a otros contextos y problemas.*” (p.9). Vale la pena resaltar que en las prácticas intervienen objetos materiales o abstractos y pueden llegar a ser observables o no, además dichas prácticas no llevan un proceso lineal y deductivo, en muchos casos se realizan ensayos cometiendo errores y procedimientos infructuosos. Por tal razón los autores definen una práctica significativa como sigue:

DEFINICIÓN 2: Diremos que una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (Godino & Batanero, 1994, p.9).

De lo anterior, podemos decir que una práctica significativa no tiene que ver siempre con la consecución de un logro. Estas prácticas por lo general se comparten en el seno de una comunidad, cuando los miembros de la institución son las personas que están comprometidas con nuevos problemas matemáticos y cuando las prácticas son compartidas se denominan prácticas institucionales.

Pero estas elaboraciones dependen de las producciones personales e inciden luego en cada persona de la institución, por lo cual se establecen las siguientes enunciaciones:

El Sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas: Está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas..... Objeto personal: Es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas (Godino & Batanero, 1994, p.12).

Como ya se ha descrito, respecto a quien realice las prácticas, emergen objetos de distinta dimensión, por tanto, tenemos objetos personales y objetos institucionales, teniendo claro que si la institución es la comunidad matemática emerge un objeto matemático. Estas conllevan a que las personas o las instituciones establezcan relaciones y usos de los objetos emergentes lo cual difiere de establecer su mera definición, *“Se trata de un constructo relativo a la institución y dependiente estocásticamente del tiempo”* (Godino & Batanero, 1994, p.7)

Al hablar de significado de un objeto institucional hay que considerar la subjetividad de cada persona involucrada en esa institución y por tanto existe la necesidad de conceptualizar el significado personal: *“Es el sistema de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado”* (Godino & Batanero, 1994, p.9)

Ahora bien, cuando denotamos como institución la clase de matemáticas, algo de gran interés es la evaluación del aprendizaje, desde esta teorización Godino (1994) la concibe como la confrontación del significado que se trata de transmitir con las prácticas personales del docente con el efectivamente adquirido o referenciado con las prácticas de los estudiantes.

Cuando dicha confrontación se realiza y se observa alguna intersección entre el significado institucional y el significado personal se denominan como evidencias o manifestaciones de que la persona comprende algo del objeto; Según estos autores, “*La comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado difícilmente será total o nula, sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles*” (Godino & Batanero, 1994, p.14). Fruto de esta teorización Godino y Batanero proponen que el aprendizaje es una construcción de redes conceptuales mediante un ajuste progresivo cuando se hace una correspondencia entre los significados personales y los institucionales, dicha correspondencia no pretende ser objeto de estudio en esta investigación.

Según afirma Castaño en relación a la noción de significado personal, aduce que este es:

(...) variable, depende del sujeto y, como toda actividad semiótica, guarda dependencia con la situación y el contexto, aunque más estable que en el caso del sentido. El significado institucional tiene mayor estabilidad. Esta mayor estabilidad es dada en la medida en que es construcción en la interacción de una comunidad de prácticas específica que no va a cambiar hasta tanto que los cambios individuales sean capaces de producir cambios en el conjunto, y, en tanto, que se infiere de las invariantes en los sistemas de prácticas institucionales. (Castaño, 2014, p.88)

4.2. La Comprensión y su delimitación en este proceso investigativo

Conviene hacer una digresión para tomar distancia frente a la definición de comprensión, y evitar que sea asociada, en esta investigación, a la noción de significado, Según Meel (2003), “*el desarrollo de la comprensión resulta de un proceso*

de conectar las representaciones a una red estructurada y cohesiva” (p.6), en contraposición, afirma Sierpinska (1992) que un acto de comprensión se debe entender como:

But if, instead of musing on the errors of the past, we cast an eye on what is in front of us then we tend to describe the jump in terms of the new ways of knowing the former image will be called an act of overcoming a difficulty or obstacle. The latter an act of understanding (p.27).

En nuestra traducción, un acto de comprensión radica en pensar de una nueva forma, crear una estrategia de conocimiento diferente a la que teníamos.

Por lo mencionado, podría decirse que la comprensión, según estos autores, se relaciona con lo que asigna el sujeto para interpretar y actuar, lo cual se aleja de la pretensión de este estudio, al menos desde la perspectiva pragmática del significado que se asume. El estudio consistirá en describir las prácticas prototípicas de los algunos estudiantes como forma de dar cuenta de los significados que ellos dan a la covariación lineal.

4.3. Significados y representaciones

Cuando hablamos del significado, según lo dicho, tenemos que hacer referencia al sistema de prácticas que hace una persona o institución para resolver un problema usando medios concretos o abstractos. Dentro de estos medios encontramos los sistemas de signos que no sólo tienen una función comunicativa sino un papel instrumental que modifica al propio sujeto que los utiliza como mediadores, tal como lo menciona Godino y Batanero (1994).

Indudablemente existe una relación de dependencia entre el uso lingüístico, semántico y sintáctico que se le da a los sistemas de signos en el sistema de prácticas realizadas por las personas y el significado de los objetos emergentes de esas prácticas, Por tal motivo, es de vital importancia abordar la problemática del significado ligada a la habilidad de las personas cuando hacen uso de los registros de representación.

Duval (2006), plantea que toda actividad matemática (en nuestra teorización, todo sistema de prácticas), se realiza necesariamente en un contexto de representación, pues a diferencia de otras ciencias los objetos con los que se trabaja no son físicos o tangibles, sino que un objeto depende del sistema de representación usado, pero no se puede asociar únicamente a él.

Profundizando en este asunto Duval (2006) plantea que *“Los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran”* (p.145). Frente a los registros semióticos, hay dos premisas de suma importancia, primero, los procedimientos matemáticos (prácticas matemáticas), siempre implican alguna transformación, y segundo, aunque existan diversos sistemas de representación siempre se elige uno según el propósito de la actividad.

Frente a lo anterior Duval (2006) realiza la siguiente apreciación:

la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos “contextos de representación diferentes del mismo objeto (p.145).

Retomando lo anteriormente dicho, el significado está ligado a los emergentes del sistema de prácticas que realiza el sujeto en un campo de problemas, pero sus prácticas hacen uso de medios semióticos de representación, por tal motivo el significado de un emergente tiene una gran volatilidad tanto por el tipo de prácticas como por los sistemas de representación usados.

Por estos motivos nos adherimos a la postura de Duval (2006), quien afirma que sin mediaciones semióticas no hay actividad matemática, y que un objeto emergente no debe confundirse con el contenido de las representaciones semióticas utilizadas.

El contenido de cada representación semiótica no depende sólo de los conceptos o de los objetos representados, sino también de los sistemas semióticos de representación empleados. Por ello cambiar de un sistema a otro significa cambiar el contenido de representación sin cambiar las propiedades matemáticas representadas. (p.158)

Para Duval (2006), existen dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas, las conversiones y el tratamiento; estas ayudan a las personas a realizar la coordinación de los múltiples sistemas de representación para hablar de los emergentes y exigen actividades cognitivas diferentes, siendo la conversión la de más alto nivel al no tener reglas, ni asociaciones básicas.

Situándonos en nuestra intención investigativa sobre el significado que construyen los estudiantes sobre covariación lineal, es necesaria la coordinación entre diferentes sistemas de representación, que en palabras de Duval (2004):

La actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación. Es necesario que un sujeto haya llegado al estadio de la coordinación de las representaciones semióticas heterogéneas, para que pueda discriminar el representante y lo representado. O la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa o ilustra. (p.63)

Como se ha mencionado, hablar de significado de covariación lineal es bastante complejo, esto debido a que el objeto matemático, función lineal, en el cual recae gran peso del estudio, posee un alto grado de complejidad, tanto por los diversos registros de representación que él tiene, como por la estructura conceptual que está en él. En consecuencia, nos parece importante dedicar un espacio para el desarrollo matemático del concepto directamente implicado en este trabajo, y a partir de ello aclarar algunos alcances y limitaciones del presente estudio.

4.4. Covariación lineal desde la disciplina matemática

Como se ha mencionado en capítulos anteriores la importancia de la covariación y la función lineal se resalta por numerosos aspectos, sin embargo, abordar toda la estructura conceptual que ella implica, es una tarea que merece otro estudio a profundidad. Por tanto, a lo largo de las siguientes líneas pretendemos puntualizar aquellas propiedades y

características de la función lineal, que en palabras de Azcárate y Deulofeu (1990) son las que dan el auténtico significado a las temáticas inmersas en esta investigación.

Cuando, en primer caso, doblamos (hacemos la mitad, o multiplicamos por n) los valores de una de las variables, los valores de la otra también se doblan (se hacen la mitad o se multiplican por n). Por otro lado, si sumamos dos valores de la variable independiente, el valor de la variable dependiente que corresponde a dicha suma, es la suma de los valores que corresponden a los dos valores iniciales: $f(kx)=kf(x)$ y $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$... dicho de otra forma, conocido un valor de la variable independiente, el correspondiente valor de la variable dependiente se obtendrá multiplicando por un determinado número k , que llamaremos constante de proporcionalidad. (Azcárate y Deulofeu, 1990, p.93)

Ahora bien, para el caso de la función afín, la propiedad característica tal como lo dice Azcárate es “*existe una relación constante entre los incrementos de las variables*” (Azcárate, 1990, p.96), dicho esto, cabe aclarar que en este estudio a excepción de la propiedad $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, optamos por trabajar las asociadas a la constante de proporcionalidad, incrementos constantes, y razón de cambio.

En consonancia con las propiedades anteriores y teniendo en cuenta la importancia de la dependencia entre magnitudes, es propicio delimitar algunos aspectos claves que permitan identificar y/o estudiar esta dependencia. Llegado a este punto se hace necesario centrar, la función lineal, como la modelación de una situación de covariación, donde dos magnitudes se relacionan y dicha relación puede ser identificada mediante diversos tipos de registros, entre ellos la fórmula o ecuación característica, también denotada registro analítico $y=mx+b$, $f(x)=mx+b$, que puede ser considerada según afirma Barajas (2016):

Una sucesión de puntos colineales o una recta, donde m es la pendiente y b es el intercepto con el eje y . Los valores para los cuales está definida la función reciben el nombre de dominio de la función. Estos valores pueden ser discretos o continuos y pertenecen al conjunto de los números reales. (p.6)

De lo anterior, se establece la importancia del concepto de pendiente como razón de cambio, a la hora de hablar de función lineal, pues es uno de los aspectos que se considera fundamental en el proceso de complejización del significado. A continuación,

señalaremos su definición desde un texto científico enfocado en el desarrollo matemático.

La pendiente de una recta no vertical es una medida del número de unidades que la recta asciende o desciende verticalmente por cada unidad de variación horizontal de izquierda a derecha...la pendiente m de una recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $x_1 \neq x_2$. (Larson y Edwards, 2010, p.10)

Ilustración 1 Pendiente de una recta

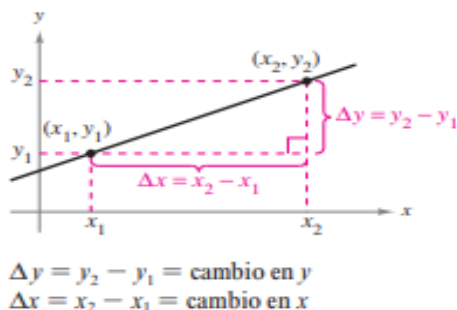


Imagen tomada de Larson (2010) Calculo 1, Mc Graw Hill, p.10

En este ejercicio de especificar lo que se trabaja, cabe anotar que para efectos de esta investigación consideramos la pendiente asociada a la razón de cambio con valores mayores a cero, de igual forma, delimitamos el estudio al primer cuadrante del registro gráfico cartesiano, es decir, solo consideramos valores mayores a cero en x y en y , el estudio de los valores menores a cero, cuadrantes II, III y IV, no son de interés en esta investigación, cabe aquí otro tipo de estudio asociado a situaciones donde valores negativos sean relevantes para el análisis de fenómenos.

4.5. Covariación lineal desde la perspectiva histórica

En este apartado consideramos incluir de forma sintética algunos aspectos históricos que potenciaron el desarrollo del pensamiento variacional, teniendo en cuenta, que el conocimiento de la evolución de un objeto matemático brinda herramientas para la planificación de su enseñanza y análisis del aprendizaje, lo anterior es soportado en, Carmen Azcárate y Jordi Deulofeu en su libro titulado “Funciones y Gráficas” (Azcárate & Deulofeu, 1996), quienes afirman que:

En efecto, creemos que si el enseñante sabe cómo dicho concepto se ha ido formando hasta llegar a nuestros días, podrá evaluar mejor la dificultad intelectual que ha supuesto su adquisición para la humanidad y ello le permitirá formarse una primera idea de los obstáculos que encontrará en sus alumnos. (p.15)

Consideramos ahora, referenciar los tres periodos que describen creencias, actitudes y convicciones que culturas y grandes científicos han manifestado y que sirven para demarcar los momentos en los cuales la noción de función o covariación se ha visto involucrada, tratando de relatar el inicio y evolución de lo que actualmente llamamos función y pensamiento variacional. Por tanto, comenzaremos desde su génesis, donde mediante el uso del lenguaje natural, sin incluir símbolos, surgen descripciones de covariación, seguidamente en la edad media, emerge la noción de cambio, la cual toma gran relevancia y se finaliza con la edad moderna, donde en palabras de Sánchez (2016), se desarrolla la formulación y se acuña el término variable en una función.

Tabla 6 Recorrido Histórico de la covariación.

Etapas	Aspectos asociados con la evolución de la covariación
Mundo Antiguo	<p>Se puede rastrear la noción de función en los babilonios donde se encuentra el germen del estudio de los fenómenos de cambio y de la determinación de leyes cuantitativas obtenidas por medio de tablas. Las tareas en las que se involucraron los babilonios fue observar y tratar de predecir determinados acontecimientos o fenómenos que se repetían periódicamente.</p> <p>En la antigua Grecia podemos encontrar que el arte de construir tablas no pertenecía a la ciencia, más bien era conocimiento práctico que se comunicaba de maestro a alumno. Además, se presentaron obstáculos de tipo conceptual, entre ellos, el uso de proporciones, la disociación entre número y magnitud, así como el carácter eminentemente geométrico de la matemática griega y a ellos cabría añadir los problemas debidos al simbolismo totalmente inexistente, a excepción de los interesantes intentos de Diofanto, que en forma retórica, intentó describir la dependencia funcional.</p>
Edad Media	<p>Una de las mayores preocupaciones de la edad media, fue el estudio de las cosas sujetas al cambio, y en particular del movimiento, preguntándose de qué manera suceden los cambios.</p> <p>Bajo esta postura, las llamadas escuelas de filosofía natural de Oxford y París son dos de los principales núcleos de desarrollo, entre sus principales aportes se destaca el inicio del estudio cuantitativo del movimiento local no uniforme. Su mayor representante fue Nicolás Oresme, quien continuando con el estudio de los fenómenos que cambian abre una nueva vía al proponer una aproximación geométrica a los estudios cinemáticos. Oresme, introduce el uso de segmentos rectilíneos para representar todo lo que varía, ya que todo lo medible puede representarse como una cantidad continua, logrando establecer una representación gráfica que permite entender más fácil y rápido la naturaleza de los cambios.</p>

Edad Moderna	<p>El simbolismo matemático, obstáculo más acuciante, se gesta básicamente durante el siglo XVI con las obras de los algebristas italianos y especialmente de Viete, cuya contribución al desarrollo del álgebra y en particular a la creación del álgebra simbólica, o cálculo literal, fue decisivo.</p> <p>En esta misma época se destaca el trabajo de Galileo, quien estudia el movimiento de una forma cuantitativa dando justificaciones experimentales de las leyes establecidas, es decir, describiendo con detalle experimentos en los que usa ingeniosos instrumentos para tomar medidas que le permitan establecer leyes entre magnitudes que son auténticas relaciones funcionales, aunque sus métodos no recojan los últimos avances del álgebra y sus gráficos sean parecidos a los de Oresme su deseo de establecer relaciones funcionales es decisiva para la construcción del concepto matemático de función.</p> <p>Posteriormente Descartes publica su célebre trabajo, <i>La Geometrie</i>, a partir de ese momento se permitirá, interpretar curvas y superficies por medio de ecuaciones, en este mismo trabajo aparece por primera vez el hecho de que una ecuación en x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que a partir de ella, es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra.</p> <p>Los aportes de Descartes y la extensión del concepto de número, con la configuración de los números reales, la introducción de signos para diversas operaciones y de letras para cantidades desconocidas, permiten posteriormente considerar la función como relación entre conjuntos de números, más que entre cantidades.</p> <p>Leibniz aportó al desarrollo del concepto de función estudios asociados a series infinitas, en sus observaciones identificó que la tangente de una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas.</p> <p>Finalmente Bernoulli y Euler son los que construyen la notación de función que actualmente conocemos.</p>
--------------	---

Tabla construida mediante la adaptación del texto de Azcárate y Deulofeu, 1990. Funciones y Gráficas, cultura y aprendizaje. Cap. 2 El concepto de función a través de la historia.

El recorrido anterior nos muestra el campo de situaciones problema del cual el pensamiento variacional surge, adicionalmente ilustra las estrategias, métodos y procedimientos que diferentes culturas usaron para hacerles frente, hasta llegar a consolidarse como el objeto matemático función. La intención, por tanto, es tomar en cuenta lo referenciado con el propósito de diseñar las estrategias didácticas con las cuales se hace la intervención de aula y su posterior análisis.

A continuación, profundizaremos en los aspectos didácticos que se pueden deducir del recorrido histórico y de las investigaciones que la comunidad académica sugiere tener en cuenta cuando se hacen este tipo de estudios.

4.6. Covariación lineal desde la perspectiva didáctica

En el recorrido histórico, y retomando las conclusiones a las que llega Sierpinska (1992), se vislumbra que un proceso de enseñanza aprendizaje, se debe apoyar en fenómenos de la ciencia y del movimiento, permitiendo a los sujetos concebir la descripción del mismo como un problema práctico y propicio para resolver, donde el reconocimiento de las magnitudes involucradas en los fenómenos de cambio y el proceso de solución, se realice mediante descripciones verbales y tabulares, de forma semejante a lo hecho en el mundo antiguo, a su vez, simular los procesos hechos en la Edad Media y Moderna como la realización de experimentos con instrumentos de precisión, tratando de describir cómo cambian las magnitudes implicadas en el fenómeno y relacionar estas descripciones con registros de representación cartesiano como medio para anticipar y representar fenómenos.

En síntesis, esta sección quiere dilucidar los aspectos que orientan didácticamente la construcción del significado en torno a covariación lineal, por ello es necesario acudir en el diseño didáctico a los interrogantes planteados por Gómez (2015):

(...). ¿Qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia?, fue de vital importancia para originar la evolución en el razonamiento, así pues, el estudiante en constante reflexión sobre sus procesos de pensamiento, también le permitió validar y justificar los procesos de cambio y variación que consideraba en la producción escrita y la experimentación de las tareas. (p.85)

Lo dicho anteriormente también lo expone Quintero cuando afirma que lo propicio para desarrollar pensamiento variacional es:

Actividades que partan de situaciones concretas y que permitan al estudiante dar significado a los símbolos propios de la notación funcional; actividades que paseen al estudiante por los distintos lenguajes de representación de funciones; y actividades interactivas que simulen un experimento y que permitan que el estudiante observe las implicaciones o efectos de la alteración de alguno de sus elementos. (Quintero, C. 2011, p.70)

Como se observa en la anterior cita, uno de los aspectos sensibles cuando se aborda un proceso de enseñanza y aprendizaje en torno a procesos de covariación, tiene que ver con los registros de representación de la función lineal, ya que su tratamiento y

coordinación es complejo y de vital importancia para el correspondiente análisis de la construcción de significados personales y su interrelación, tal como lo dice Grueso (2016):

(...). las dificultades que tienen los estudiantes para poder poner en juego el manejo simultáneo entre diferentes registros de representación como lo son, el tabular, el algebraico y el gráfico (cartesiano); todos en concordancia con un contexto específico que le dé sentido a los datos inmersos en cada tipo de representación. La prueba de ello, radica en cómo aunque los estudiantes llenan de forma correcta una tabla desde el registro numérico, no son capaces de interpretar estos datos en la gráfica que realizan. (p.165)

Por estas razones, en este estudio se consideran diversos registros de representación, verbal, gráfico-cartesiano, tabular, y “*ejecutables-Geogebra*” (Barajas, 2016), que al trabajarlos permiten al sujeto complejizar el significado y nos permiten hacernos a su sistema de prácticas, para interpretar sus construcciones; sin dejar de reconocer la existencia y pertinencia de otros registros, pero que para nuestro estudio no son abordados.

Retomando lo hasta ahora expuesto, acuñamos las apreciaciones hechas por Carlson (2003) quien dice: “*los estudiantes deben tener oportunidades de pensar sobre la naturaleza covariacional de las funciones en eventos dinámicos de la vida real*” (p.149), es decir, que el sujeto en primera instancia identifique en su contexto inmediato situaciones asociadas al pensamiento variacional y luego extender y generalizar su construcción a fenómenos lejanos a su contexto.

Es oportuno ahora establecer lo que este mismo autor concibe como razonamiento covariacional, ya que él crea un marco conceptual donde describe acciones mentales que permiten analizar los comportamientos y enunciaciones de los sujetos cuando se enfrentan a situaciones de cambio: “*las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra*”. (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003, p.124)

Todo esto afirma la necesidad de abordar en la escuela secundaria, procesos ligados al pensamiento variacional, aconseja Carlson (2003) al respecto:

(..).. dar a los estudiantes líneas de indagación que los fueren a poner a prueba sus reflexiones sobre sus propias comprensiones de los patrones de cambio (que involucran razones de cambio cambiantes). De acuerdo con lo anterior, creemos que los currículos en los niveles secundario y universitario deben tener en cuenta la complejidad de adquirir el razonamiento N5 (razón instantánea) y deben proveer experiencias curriculares que sustenten y promuevan esta habilidad de razonamiento, especialmente cuando se considera su importancia para la comprensión de conceptos principales del cálculo (e.g., límite, derivada, punto de acumulación) y para representar y comprender modelos de funciones asociadas a eventos dinámicos. (Carlson, et al, 2003, p.149)

Hasta aquí nos hemos dedicado a enunciar los aspectos principales tanto de la historia como de las investigaciones, que fueron el pilar para el diseño de la secuencia didáctica y su correspondiente análisis.

5. Metodología

En este apartado se describe el tipo de investigación que se consideró para estudiar el problema en cuestión y el conjunto de técnicas e instrumentos que permitieron recolectar, organizar, sistematizar y analizar la información.

5.1. Enfoque de la investigación

Consideramos que la investigación llevada a cabo es de tipo mixto, pues, articula lo cuantitativo y cualitativo para describir los significados que construyen los estudiantes sobre covariación lineal a partir de una secuencia didáctica. Teniendo en cuenta la afirmación de Ruíz (1994), quien citando a Goetz y Lecompte (1988), enuncia: *“una investigación concreta nunca es totalmente cualitativa o cuantitativa, sino que se sitúa en un punto intermedio”* (p.134), como lo expuesto por Pereira (2011) quien sostiene que:

la investigación mixta se fortaleció, al poder incorporar datos como imágenes, narraciones o verbalizaciones de los actores, que de una u otra manera, ofrecían mayor sentido a los datos numéricos. (...) los diseños mixtos permiten la obtención de una mejor evidencia y comprensión de los fenómenos y, por ello, facilitan el fortalecimiento de los conocimientos teóricos y prácticos. (p.19)

El enfoque cuantitativo según Hernández Sampieri (2006) *“Usa la recolección de datos para probar hipótesis, con base en la medición numérica y el análisis estadístico, para establecer patrones de comportamiento y probar teorías”*, lo tenemos en cuenta para sistematizar y describir las tendencias que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones o fenómenos de cambio; lo anterior se complementa con el enfoque cualitativo, entendido según Pereira (2006), quien citando a Cea (2001), señala que *“(...) el paradigma cualitativo se asocia a la epistemología interpretativa (dimensión intersubjetiva), centrada en el sujeto individual y en el descubrimiento del significado, los motivos y las intenciones de su acción”* (p. 46). que para efectos de este estudio se usa para precisar la descripción de las tendencias por medio de entrevistas semi

estructuradas a tres estudiantes, en estas entrevistas se motivó a los estudiantes a dar las explicaciones necesarias para entender su discurso y acciones.

Ruiz (1994), acudiendo a Goetz y Lecompte (1988), incluyen dentro de los estudios cualitativos *“la descripción o reconstrucción analítica de creencias compartidas, prácticas y conocimiento popular de un grupo de personas”* (p.133). Para estos autores este tipo de investigación se caracteriza por:

Primero, recurrir a la observación participante; en nuestro caso diseñamos y ejecutamos una secuencia didáctica para involucrar a los estudiantes con problemáticas en torno a la covariación lineal.

Segundo, interesarse por datos fenomenológicos que representan la concepción del mundo de los participantes investigados; en esta investigación nos interesó el discurso y las acciones de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de covariación lineal.

Tercero, tener un carácter sistémico, es decir, estudiar fenómenos globales desde varias técnicas de recolección de datos; en nuestro caso, estudio de caso, sistematizaciones, videos, y entrevistas.

Puesto que el enfoque de la investigación es mixto, los conceptos de validez y fiabilidad desde el punto de vista de esta investigación radican en la descripción objetiva y minuciosa de todos los componentes que puedan afectar a la interpretación de los resultados.

Descrita la postura metodológica de este estudio, queremos proceder a puntualizar los factores que se involucraron en la investigación.

5.2. Población

La población objeto de estudio está constituida por 34 estudiantes pertenecientes al sistema educativo de Colombia, sus edades oscilan entre los 12 y 15 años y se sitúan en

el nivel de educación básica secundaria. Los estudiantes de esta población cursaban octavo grado, en el momento de la intervención, en la institución educativa distrital Carlos Pizarro León Gómez. Esta institución se encuentra ubicada en la localidad séptima de Bogotá y se caracteriza por ofrecer el servicio educativo gratuito a familias cuyo estrato socio económico oscila entre 0 y 2; es decir, son estudiantes que provienen de familias con ingresos económicos limitados y tienen poco acompañamiento en su formación y proceso educativo, ya que los padres tienen que hacer largos trayectos para llegar a su sitio de trabajo y por ende los estudiantes tienden a estar solos la mayor parte del día. Para efectos de confiabilidad del estudio, nos apoyamos en las producciones escritas de 24 estudiantes que asistieron a la totalidad de las sesiones.

De esta población de estudio se eligieron tres estudiantes que fueran representativos de distintos niveles o desempeño en matemática, con el ánimo de profundizar en la descripción del significado construido por los estudiantes. Esta selección se basó en el criterio del docente de matemáticas quien los ha acompañado por dos años, y a partir de una prueba diagnóstica, la cual permitió identificar estudiantes con nivel alto (Estudiante 1, E1), medio (Estudiante 2, E2), y bajo (Estudiante 3, E3); entendiendo nivel alto, aquel estudiante que pudo resolver a cabalidad la prueba y sus argumentaciones permiten identificar claramente la coherencia de sus respuestas, nivel bajo, aquel estudiante que en el desarrollo de la prueba, presenta mayor dificultad para solucionar los problemas propuestos y su argumentación carece de coherencia con la pregunta respectiva, el nivel medio se seleccionó al azar entre estudiantes que no revirtieron en los enunciados para dar solución a los mismos, y su argumentación fue leve pero consistente.

5.3. Descripción global del procedimiento de investigación

Aclarando el enfoque metodológico y los métodos que soportan el proceso investigativo, nuestra intención es proceder a relatar de forma sucinta dicho proceso.

Por consiguiente, vale la pena iniciar dicho relato indicando que se diseñó de forma conjunta, con los participantes de la maestría en educación con línea de profundización en matemáticas, una prueba inicial; esta prueba elaborada con el propósito de indagar las construcciones previas que los estudiantes poseen para enfrentar situaciones que implican la covariación de dos cantidades de magnitud, con el fin de tener un punto de referencia para la planeación de los demás componentes de la secuencia didáctica.

Una vez obtenida la información con la prueba inicial, se sistematiza la información, procediendo a realizar agrupaciones de respuestas semejantes para cada ítem de la prueba, ello con el fin de obtener un panorama general de la población y seleccionar los tres casos con los cuales se profundiza la descripción de los significados construidos por los estudiantes. A partir de estos resultados, se diseña y aplica una secuencia didáctica apoyada en simulaciones de eventos dinámicos que permiten vincular en su construcción los problemas históricos de la función, el significado de la covariación lineal desde lo disciplinar y didáctico, y el proceso de complejización del significado.

En el transcurso de la aplicación de la secuencia didáctica se logran consolidar categorías de análisis a partir de la experiencia y el fortalecimiento del marco teórico, esto se estructura en tres matrices que se basan en la complejización del razonamiento covariacional propuesto por Carlson (2003), los invariantes y estructura común que se perciben en la aplicación y transferencia a distintas situaciones y contextos Godino (2003) y por último en la coordinación de registros de representación propuesta por Duval (2004). Estas categorías fueron nominadas de la siguiente forma: a) de aplicaciones en situaciones conocidas y cercanas a su contexto a situaciones menos conocidas, b) de situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre

situaciones y finalmente o c) de escasa coordinación entre representaciones de registros diferentes a mayor coordinación entre ellas; para efectos de la organización y análisis de los datos.

Posteriormente, se diseña una prueba final basada en las categorías de análisis con el propósito de recolectar información que responda a cada aspecto de las categorías, por tanto, cada ítem de la prueba fue seleccionado minuciosamente para indagar los significados construidos, para posteriormente mediante la organización y sistematización de los datos recolectados describir este tipo de construcciones.

Vale la pena señalar que en el transcurso del proceso anteriormente dicho se realizaron entrevistas semiestructuradas a los tres sujetos seleccionados, en momentos claves de la intervención, con el ánimo de ampliar la información obtenida en las respuestas de cada prueba.

5.4. Procedimientos en el aula e instrumentos de recolección de información

Apoyados en Azcárate (1996a) quien enuncia que *“la idea de función nace a partir de los fenómenos de cambio y se expresa a través de diversos lenguajes, (verbal, tabulado, gráfico, algebraico, etc.) cada uno de ellos apropiado para poner de relieve ciertas características de las funciones”* (p.58) proponemos una secuencia didáctica basada en el análisis de fenómenos de covariación lineal y no lineal usando diferentes registros de representación.

De igual forma Azcárate, (1996b) propone que para generar un contexto de enseñar se debe tener en cuenta que:

A los problemas generados por la física y especialmente por el movimiento, verdadero motor inicial del desarrollo de las funciones, debemos añadir las numerosas situaciones que podemos encontrar a nuestro alrededor, tanto en nuestra vida cotidiana como en cada una de las ciencias, incluidas las propias matemáticas (, p.58)

Por tanto, las actividades propuestas para la intervención de aula contemplan situaciones que hacen uso del movimiento a través de simulaciones dinámicas, en

contextos catalogados como situaciones muy conocidas (SC), medianamente conocidas (SMC) y situaciones novedosas (SN) pero cercanas a su realidad. Vale la pena resaltar que todos los fenómenos trabajados tenían como variable independiente, el tiempo; ello, debido a que históricamente se evidenció que el proceso de fundamentación de la función se inicia con el análisis de fenómenos que cambian en el tiempo.

La secuencia didáctica que se ha nombrado se puede estructurar en los momentos descritos a continuación:

Tabla 7 Estructura general de la prueba inicial de la secuencia didáctica.

Secuencia Didáctica: Análisis de Fenómenos de Covariación Lineal		
Prueba Inicial	Objetivo De Enseñanza	Problematizar a los estudiantes con situaciones que implican la covariación de dos cantidades de magnitud, la proporcionalidad y el manejo de registros tabulares y cartesianos.
	Propósito De Investigación	Conocer las construcciones previas que los estudiantes poseen para enfrentar situaciones que implican la covariación de dos cantidades de magnitud, la proporcionalidad y el manejo de registros tabulares y cartesianos. Por otra parte, se tomó esta prueba para la selección de los 3 estudiantes en los cuales se profundizará el estudio.
	Descripción	Se desarrolló en dos clases de 80 minutos aproximadamente, donde se propuso un cuestionario con 10 ítems y alrededor de 24 preguntas donde los estudiantes expusieron sus conceptos previos de forma individual.
	Fecha De Aplicación	26 y 27 de octubre de 2017

Es conveniente mencionar que la secuencia fue diseñada de forma conjunta con el director de tesis Jorge Castaño

Tabla 8 Estructura general de la sesión 1 a la prueba final de la secuencia didáctica.

Secuencia Didáctica: Análisis de Fenómenos de Covariación Lineal		
Sesión 1 Llenado Recipientes	Objetivo de enseñanza	Potenciar a los estudiantes a elaborar registros de representación tabular a partir de simulaciones y descripciones verbales, cuestionar a los estudiantes sobre los coeficientes de variación presentes en los registros de representación tabular y permitir el contraste entre una covariación lineal con pendiente positiva y una con pendiente negativa.
	Propósito de investigación	Recolectar registros escritos y verbales sobre las modificaciones que los estudiantes elaboran del significado de covariación lineal en cuanto a su representación tabular, cartesiana y el coeficiente de variación presente en ellas.
	Descripción	Se desarrolló en dos clases de 80 minutos, en las cuales los estudiantes manipularon una simulación digital del proceso de llenado de algunos recipientes con el fin de contrastar las creencias que manifestaron en la actividad inicial y los resultados de su experimentación concreta.
	Fecha de aplicación	10 y 11 de noviembre de 2017
Sesión 2 Analizando el súper shot	Objetivo de enseñanza	Cuestionar a los estudiantes sobre las diferencias entre covariaciones lineales y no lineales a partir de la experimentación y análisis de los registros de representación tabular, cartesiano y verbal.
	Propósito de investigación	Presentar a los estudiantes una situación distinta pero familiar con el fin de potenciar una futura comparación y estructuración de situaciones. Por otra parte, reunir información del progreso en la construcción del significado de covariación lineal cuando se solicita caracterizar el tipo de variación y movimiento por la identificación y análisis del coeficiente de variación desde el registro verbal, tabular y cartesiano.
	Descripción	Esta sesión se desarrolló en dos clases de 80 minutos, se inició mostrando el video del funcionamiento de una atracción mecánica de un parque de Bogotá, posteriormente se problematiza a los estudiantes de forma individual tratando de que anticiparan la descripción del movimiento en el registro verbal, tabular y cartesiano. Posteriormente se realizó el trabajo concreto con una simulación de la atracción a través de la aplicación “Geogebra”, para comparar y analizar los movimientos de esta.
	Fecha de aplicación	17 y 18 de noviembre de 2017

Sesión 3 Programando El Súper Shot	Objetivo de enseñanza	Problematizar a los estudiantes con la representación analítica de la covariación lineal discutiendo sobre su escritura y aplicaciones.
	Propósito de investigación	Evidenciar el proceso de construcción del significado de covariación lineal cuando se involucra en el análisis el coeficiente de variación y el intercepto con Y desde el registro de representación analítico y cartesiano.
	Descripción	Esta sesión se desarrolló en dos clases de 80 minutos, se inicia mostrando a los estudiantes las programaciones de las simulaciones trabajadas en clase y se solicita que establezcan asociaciones entre los coeficientes de variación con la representación analítica que aparece en el simulador, posteriormente se realiza el trabajo en grupo donde se invita a relacionar el coeficiente de variación y el intercepto con Y en las representaciones analíticas y cartesianas.
	Fecha de aplicación	24 y 28 de noviembre de 2017
Sesión 4 Llenado De Recipientes De Laboratorio	Objetivo de enseñanza	Proponer una situación conocida en la cual se presente intervalos de covariación lineal y no lineal con el fin de que el estudiante la represente de diversas formas y analice sus características.
	Propósito de investigación	Desarrollar un pilotaje con algunas preguntas que permitan recoger información del significado de covariación lineal del estudiante cuando afronta una situación conocida pero que demanda mayor capacidad cognitiva.
	Descripción	Esta sesión se desarrolló en una clase de 100 minutos, donde los estudiantes desarrollaron un cuestionario de forma individual con 10 ítems y con algunas orientaciones del docente investigador.
Prueba Final	Fecha de aplicación	1 de diciembre de 2017
	Objetivo de enseñanza	Permitir al estudiante buscar una estructura común entre diversas situaciones en las cuales está presente la covariación lineal y dar cuenta de ella desde la coordinación de registros de representación.
	Propósito de investigación	Consolidar cuantitativamente y cualitativamente la complejización de los significados de covariación lineal a través del sistema de prácticas de los estudiantes y la categorización del objeto investigado.
	Descripción	Esta sesión se desarrolló en una clase de 120 minutos, donde los estudiantes resolvieron de forma individual y sin alguna orientación un cuestionario de 28 preguntas.
	Fecha de aplicación	Febrero 22 y 28 de 2018 cuando los estudiantes cursan noveno grado.

Para una descripción más detallada se remite al lector a consultar el anexo Secuencia Didáctica donde encontrará las guías de los estudiantes y las simulaciones trabajadas en las sesiones.

Realizada la descripción del procedimiento tanto de la investigación como de la intervención de aula, queremos señalar ahora de forma general las características de los instrumentos de recolección de datos que fueron usados.

En primera instancia hablaremos de la actividad inicial, que como anteriormente se nombró, se utilizó para conocer el panorama inicial de los estudiantes y así tener un punto de referencia para planear la secuencia didáctica, y como criterio de selección de los casos a estudiar en profundidad. Esta prueba indaga sobre tres categorías a saber: a) intuiciones sobre la covariación, b) elaboraciones sobre proporcionalidad directa e inversa y c) manejo básico de registros tabulares y cartesianos. La estructura general de la prueba se puede resumir mediante las siguientes tablas.

Tabla 9 Intuiciones sobre covariación. Prueba inicial.

Subcategoría	Pregunta
Identificación de magnitudes que varían	P.1
Identificación de magnitudes que covarían	P. 2
Descripción cualitativa de la forma de covariación (a manera de ejemplo: hacer afirmaciones como, mientras esta magnitud aumente esta disminuye)	P. 2
Elaboración e interpretación de registros tabulares de dos magnitudes que covarían	P.3 y P.4
Elaboración e interpretación de registros cartesianos de dos magnitudes que covarían	P.10 y P. 9

Prueba construida en conjunto con el grupo de seminario electivo énfasis en matemáticas y dirigido por Dr. Jorge Castaño García, Maestría en Educación PUJ, segundo semestre (2017)

Tabla 10 Elaboraciones sobre proporcionalidad directa. Prueba inicial.

Subcategoría	Pregunta
Identificación de variables que covarían de forma proporcional directa	P. 6
Identificación de variables que NO covarían de forma proporcional directa	P. 5
Cálculo de valores de variables que están en relación de proporcionalidad directa a partir de un registro tabular	P. 6
Identificación intuitiva de la rapidez de variación	P. 11

Prueba construida en conjunto con el grupo de seminario electivo énfasis en matemáticas y dirigido por Dr. Jorge Castaño García, Maestría en Educación PUJ, segundo semestre (2017)

Tabla 11 Manejo básico de los registros tabulares y cartesianos. Prueba inicial.

Subcategoría	Pregunta
Conversión de una representación en el registro tabular a una representación en el registro cartesiano	P. 10
Obtener información sobre valores particulares a partir de una representación en registro tabular	P. 7
Interpretación de representaciones. Registro cartesiano y su correspondencia con la forma como covarían las variables de un fenómeno	P. 8
Obtener información sobre valores particulares a partir de una representación en registro cartesiano	P. 9
Relación de la representación cartesiana de variación proporcional y la rapidez de cambio	P. 11 y P.12

Prueba construida en conjunto con el grupo de seminario electivo énfasis en matemáticas y dirigido por Dr. Jorge Castaño García, Maestría en Educación PUJ, segundo semestre (2017)

Vale la pena señalar que esta prueba se basa en el análisis de una situación de llenado de un recipiente cilíndrico con una velocidad constante. Se remite al lector al anexo Prueba Inicial para ampliar la información. (ver anexo secuencia didáctica)

Como segundo instrumento de recolección de información tenemos la prueba final (ver anexo Prueba Final), en esta prueba, como se dijo previamente, se caracteriza cuantitativa y cualitativamente la complejización de los significados de covariación lineal, ello a través del contraste entre las enunciaciones de los estudiantes, su sistema

de prácticas y la categorización del objeto investigado. Por tal motivo, la prueba se estructura de acuerdo a las categorías de análisis a saber: a) De aplicaciones particulares y conocidas a situaciones menos conocidas, b) De situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre ellas y c) De escasa coordinación entre representaciones de registros diferentes a mayor coordinación entre ellas. Las siguientes tablas muestran la estructura general de la prueba:

Tabla 12 Prueba final. Categoría C1 De aplicaciones particulares y conocidas a situaciones menos conocidas.

Subcategoría	Pregunta y Tipo de situación
¿Puede identificar variación en las cantidades de magnitud que intervienen en el fenómeno a estudiar?	Pregunta 1 Situación muy conocida (P1SC)- Pregunta 3 Situación Medianamente Conocida (P3SMC)- Pregunta 5 Situación Novedosas pero Cercanas a su Realidad (P5SN)
¿Establece alguna relación de dependencia entre pares de cantidades de magnitud?	P2SC - P4SMC - P6SN
¿Puede generalizar el sentido de cambio de la covariación en las tres situaciones de forma cualitativa (directa e Inversa)?	P20 - Intervienen todas las situaciones
¿Qué estrategias realiza para cuantificar la variación de la variable dependiente con relación a los cambios de la variable independiente a partir de una situación en registro verbal?	P8y9 SC - P11y12 SMC - P14y15 SN
A partir de valores obtenidos en un registro tabular ¿establece de forma explícita la razón de cambio entre la variable dependiente con relación a la variable independiente, para justificar que una covariación es constante?	P16SC - P17SMC - P18SN

Estructura orientadora del diseño de la prueba final

Tabla 13 Prueba final. Categoría C2. De situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre situaciones.

Subcategoría	Pregunta y Tipo de situación
¿Puede identificar analogías en las relaciones de dependencia entre pares de cantidades de magnitud en las tres situaciones?	P19 - Involucra la comparación de las tres situaciones
¿Puede generalizar el sentido de cambio de la covariación en las tres situaciones de forma cualitativa (directa e Inversa)?	P20 - Involucra la comparación de las tres situaciones
¿Puede generalizar la estructura de las preguntas desde la estrategia de solución utilizada para cuantificar la variación de la variable dependiente con relación a los cambios de la variable independiente a partir de un registro verbal en las tres situaciones?	Pregunta considerada únicamente en la entrevista por la complejidad de su enunciación
¿Puede relacionar un registro gráfico con la razón de cambio de tres situaciones distintas?	P21 - Involucra la comparación de las tres situaciones

Estructura orientadora del diseño de la prueba final

Tabla 14 Prueba final. Categoría C3. De escasa coordinación entre representación de registros diferentes a mayor coordinación entre ellas.

Subcategoría	Pregunta y Tipo de situación
¿Puede relacionar los registros cartesiano y tabular en diferentes situaciones?	P22SC - P27SMC - P31SN
¿Puede relacionar los registros cartesiano y verbal en diferentes situaciones?	P23y 24 SC - P28y29SMC - P32y33SN

Estructura orientadora del diseño de la prueba final

Vale la pena señalar que esta prueba responde a una matriz de seguimiento la cual permite vigilar que todos los aspectos que se consideran en las categorías de análisis sean propuestos en tres situaciones, la Situación Muy Conocida (SC) el llenado del recipiente, la Situación Medianamente Conocida (SMC) la atracción mecánica del salitre mágico “Super Shot” y la Situación Novedosa (SN) la carrera de los 100 metros planos. Para ampliar la información se remite al lector a consultar los anexos Prueba Final y Matriz de seguimiento Prueba final.

Como último instrumento de recolección de información esta investigación hace uso de Entrevistas semiestructuradas, entendiendo por ellas lo que plantea Munarriz Begoña (1992):

la entrevista semi-estructurada es una conversación cara a cara entre entrevistador/entrevistado, donde el investigador plantea una serie de preguntas, que parten de los interrogantes aparecidos en el transcurso de los análisis de los datos o de las hipótesis que se van intuyendo y que, a su vez las respuestas dadas por el entrevistado, pueden provocar nuevas preguntas por parte del investigador para clarificar los temas planteados. (p. 113)

Esta herramienta de tipo cualitativo, brinda la profundización y precisión a la hora de describir los significados construidos por los estudiantes, ya que se trabaja a profundidad con tres sujetos de diferentes niveles de desempeño en matemáticas, tratando de obtener información detallada de la forma como actúan y argumentan las respuestas que dan a las pruebas anteriormente nombradas. Ello siguiendo la consideración que hace Munarriz Begoña (1992)

La entrevista semi-estructurada, generalmente, se utiliza cuando, a partir de la observación, nos queden lagunas que requieran una mayor profundización para comprender cierto tipo de acciones, o en la última fase del estudio para clarificar ciertas contradicciones entre lo observado y la información recogida por otras fuentes (...) Así pues, se utiliza para recoger la información más delicada, pero que nos es necesaria en la investigación. (p113)

Por consiguiente, las entrevistas consistieron en animar a los estudiantes a detallar las justificaciones de las respuestas de algunas preguntas de la prueba inicial o final, tratando de esclarecer su sistema de prácticas, desde el desequilibrio con otras preguntas o contraejemplos que ponen en duda sus argumentos y acciones.

5.5. Análisis de la información

Dejando claro los medios con los cuales recolectamos la información requerida para esta investigación, a continuación, procederemos a relatar la forma como se organiza y analiza la información obtenida en las diferentes pruebas.

Para la organización y análisis de la prueba inicial, se inicia agrupando respuestas que cualitativamente representan un enunciado o procedimiento similar, posteriormente

se usa métodos de la estadística descriptiva tratando de enunciar tendencias, comportamientos y argumentaciones comunes o representativas de los estudiantes frente a las Categorías: a) intuiciones sobre la covariación, b) elaboraciones sobre proporcionalidad directa e inversa y c) manejo básico de registros tabulares y cartesianos. A partir de esta información se realiza una primera selección de estudiantes que posiblemente posibiliten un estudio a profundidad por medio de entrevistas semiestructuradas y se contrastan con el criterio del docente titular de matemáticas.

En cuanto a la organización y análisis de la prueba final se usaron los datos recogidos por los cuestionarios y las entrevistas semi estructuradas, precisando en los conceptos, procedimientos y relaciones que hay entre los tres tipos de situaciones, los niveles de complejidad y la coordinación de representaciones de diferentes registros. Este proceso está soportado en la transcripción de apartados de entrevistas y enunciaciones presentes en los instrumentos de recolección de datos, donde se resalta lo que hace y dice el estudiante frente a unas preguntas y categorías dispuestas para el análisis intrasujeto e intersujeto.

Finalmente se describirán las prácticas prototípicas e invariantes observados cuando los estudiantes afrontan problemas ligados a situaciones de covariación lineal

5.6. Categorías de análisis

Como se ha mencionado, tanto el diseño como la organización y análisis de la información depende de las categorías de análisis que anteriormente se han esbozado, por tanto, es necesario detallar de forma sintética la estructura de las tres categorías propuestas, Categoría C1, de aplicaciones en situaciones conocidas y cercanas a su contexto a situaciones menos conocidas, Categoría C2, de situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre situaciones y Categoría C3, de escasa coordinación entre representaciones de registros diferentes a mayor coordinación entre

ellas. Para esto vale la pena retomar los tres postulados de la teoría que permiten su elaboración.

El primer postulado teórico que nos lleva a considerar un campo de situaciones donde la covariación lineal está como sustrato de ellas es:

la noción de significado de un objeto personal Op como sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto Op en un momento dado. Depende, por tanto, del sujeto y del tiempo estocásticamente; se desarrolla progresivamente a medida que el sujeto se enfrenta a tipos de problemas cada vez más generales. (Godino 2003 p. 101)

Según esta referencia, consideramos que el significado de la covariación lineal que construye un sujeto lo podemos interpretar a partir de las acciones, enunciados y prácticas, desde un campo de situaciones, es decir, los problemas que debemos plantear deben estar ubicados en diferentes situaciones y con diferente nivel de cercanía a su contexto y vida cotidiana.

El siguiente postulado tiene que ver con la complejización disciplinar y cognitiva de la covariación, ya que gracias a los aportes realizados por Carlson (2003) tenemos que la covariación se desarrolla según unas acciones mentales que permiten modelar el razonamiento covariacional en diferentes niveles.

El marco conceptual de covariación (...) proporciona una herramienta analítica con la cual evaluar el pensamiento covariacional en un grado más fino de lo que ha sido posible en el pasado. Además proporciona una estructura y un lenguaje para clasificar el pensamiento covariacional en el contexto de la respuesta de un estudiante a un problema específico, y para describir las habilidades generales de razonamiento covariacional de un estudiante. (p 130)

Según lo anterior, enunciarnos 4 niveles que sirven para determinar el grado de complejización en la primera categoría $C1$, dichos niveles fueron inspirados en los que propone Carlson (2003) pero adaptados para enfocarnos en el tipo de covariación del que trata la presente investigación.

Nivel 1: Identificación de magnitudes para los cuales sus valores varían o permanecen constantes durante el fenómeno.

Nivel 2: Relaciona de forma cualitativa la dependencia entre pares de cantidades de magnitud, a través del sentido del cambio de una de las variables en relación con el sentido de cambio de la otra (p. ej. mientras una aumenta la otra aumenta)

Nivel 3: A partir de la situación cuantifica la coordinación de la variación de la variable dependiente con relación a cambios de la variable independiente. Lo hace utilizando estrategias aditivas o multiplicativas, sin hacer uso explícito de razón de cambio. (p. ej. a intervalos iguales de x (Δx) corresponden intervalos iguales de y (Δy)).

Nivel 4: A partir de valores obtenidos en un registro tabular establece de forma explícita la razón de cambio entre la variable dependiente con relación a la variable independiente, para justificar que una covariación es constante

En consonancia con los postulados anteriores se construyen las categorías C1 y C2. En la primera categoría se realiza una matriz de doble entrada que relaciona el campo de problemas y los niveles de razonamiento covariacional, para la segunda categoría se construye una matriz de doble entrada relacionando los indicadores de transferencia entre situaciones con las características comunes entre ellas.

El último postulado que redondea el surgimiento de la categoría de análisis C3, es el relacionado con la importancia de la coordinación de los registros de representación expuesta por Duval (2004)

La actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación. Es necesario que un sujeto haya llegado al estadio de la coordinación de representaciones semióticas heterogéneas, para que pueda discriminar el representante y lo representado, o la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa. (...) la actividad conceptual entonces no puede ser aislada de la actividad semiótica porque la comprensión conceptual está ligada al descubrimiento de una invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas. (p 63)

De acuerdo con este enunciado consideramos que el significado de la covariación lineal debe ser analizado por medio de la coordinación entre los siguientes registros de representación: cartesiana, tabular y verbal en diferentes tipos de situaciones para tratar

de encontrar la invarianza desde diferentes perspectivas, lo cual generó la construcción de nuestra última categoría de análisis.

Dada la extensión de la forma como están diseñadas las categorías de análisis hemos decidido presentarlas en las siguientes tablas, donde se puede encontrar la categoría, subcategoría, indicadores y numero de pregunta realizada en cada indicador y codificada según la situación abordada.

Tabla 15 Categoría C1. De aplicaciones en situaciones conocidas y cercanas a su contexto a situaciones menos conocidas.

Subcategoría	Indicadores	Pregunta y Tipo de situación
C1-1. Identificación de variables. Identificación de magnitudes para las cuáles sus valores varían o permanecen constantes durante el fenómeno.	I.A. Cuando se trata de la variable dependiente de la covariación estudiada.	Pregunta 1.1 Situación muy conocida (P1.1SC)- Pregunta 3.1 Situación Medianamente Conocida (P3.1SMC)- Pregunta 5.1 Situación Novedosas pero Cercanas a su Realidad (P5.1SN)
	I.B. Cuando se trata de otra magnitud variable pero que no es del par de la covariación estudiada.	P1.2SC, P3.2SMC, P5.2SN
	I.C. Cuando se trata de una magnitud constante.	P1.4SC, P3.4SMC, P5.4SN
C1-2. Relación cualitativa de la forma de dependencia. Relación cualitativa de la forma de covariación entre pares de cantidades de magnitud, a través del sentido del cambio de una de las variables en relación con el sentido de cambio de la otra (p. ej. mientras una aumenta la otra aumenta).	I.A. Cuando se trata de la relación del par de variables de la covariación estudiada.	P2.3SC, P4.3SMC, P6.3SN
	I.B. Cuando se trata del estudio de dos magnitudes que no tienen relación con el fenómeno estudiado.	P2.2SC, P4.2SMC, P6.2SN
	I.C. Cuando se trata de dos magnitudes que no covarían.	P2.1SC, P4.1SMC, P6.1SN

<p>C1-3. Relación cuantitativa de la covariación sin uso de la razón de cambio</p> <p>A partir de la situación cuantifica la coordinación de la variación de la variable dependiente con relación a cambios de la variable independiente. Lo hace utilizando estrategias aditivas o multiplicativas, sin hacer uso explícito de razón de cambio. (p. ej. a intervalos iguales de x (Δx) corresponden intervalos iguales de y (Δy)).</p>	<p>I.A. Cuando el valor desconocido es la variable independiente y se pregunta por el cambio entre dos estados de la variación diferente al inicial.</p>	<p>P8SC, P11SMC, P14SN</p>
	<p>I.B. Cuando el valor desconocido es la variable dependiente y se pregunta por el cambio del estado inicial al estado final.</p>	<p>P9SC, P12SMC, P15SN</p>
<p>C1-4. Relación cuantitativa de la covariación con uso de la razón de cambio</p> <p>A partir de la situación cuantifica la coordinación de la variación de la variable dependiente con relación a cambios de la variable independiente. Hace uso explícito de razón de cambio. ($\Delta x / \Delta y$).</p>	<p>I.A. Cuando se trata verificar que una covariación proporcional es constante a partir de la razón de cambio en un registro tabular.</p>	<p>P16SC, P17SMC, P18SN</p>

Situaciones muy conocidas (SC), medianamente conocidas (SMC) y situaciones novedosas (SN)

Tabla 16 Categoría C2. De situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre situaciones.

Subcategoría	Indicadores	Pregunta y tipo de situación
C2-1. Relación analógica entre situaciones. Identifica analogías en las relaciones de dependencia entre pares de cantidades de magnitud en las tres situaciones.	I.A. Cuando se trata de establecer analogías en las tres situaciones asociadas con la covariación directa del par de cantidades de magnitud, que se estudia en el fenómeno.	P19.1
	I.B. Cuando se trata de establecer analogías en las tres situaciones asociadas con la covariación inversa de un par de cantidades de magnitud, que NO se estudia en el fenómeno.	P19.2
C2-2. Identificación del tipo de dependencia entre magnitudes. Generaliza o relaciona el sentido de cambio de la covariación en las tres situaciones de forma cualitativa (directa e Inversa).	I.A. Cuando se trata de generalizar la covariación directa en las tres situaciones de estudio.	P20.1SC, P20.3SMC, P20.6SN
	I.B. Cuando se trata de generalizar la covariación inversa en las tres situaciones de estudio.	P20.4SC, P20.5SMC, P20.2SN
C2-3. Cuantificación de la variación a partir de un registro verbal. Generaliza o relaciona la estructura de las preguntas desde la estrategia de solución utilizada para cuantificar la variación de la variable dependiente con relación a los cambios de la variable independiente a partir de un registro verbal en las tres situaciones.		
C2-4. Identificación de la razón de cambio a partir de un registro gráfico. Generaliza o relaciona un registro gráfico, con la razón de cambio de las tres situaciones distintas.	I.A. cuando se trata de asociar un mismo gráfico de representación cartesiana con la razón de cambio en tres diferentes situaciones.	P21.ASC, P21.BSMC, P21.CSN

Situaciones muy conocidas (SC), medianamente conocidas (SMC) y situaciones novedosas (SN)

Tabla 17 Categoría C3. De escasa coordinación entre representaciones de registros diferentes a mayor coordinación entre ellas.

Subcategoría	Indicadores	Pregunta y tipo de situación
C3.-1. Identificación de registros cartesiano y tabular. Relaciona los registros cartesiano y tabular en diferentes situaciones.	I.A. cuando se trata de asociar un registro de representación cartesiana a un registro de representación tabular.	P22.1SC, P27.1SMC, P31.1SN
C3.-2. Identificación de registros cartesiano y verbal. Relaciona los registros cartesiano y verbal en diferentes situaciones.	I.A. Cuando se trata de identificar y diferenciar en un registro de representación cartesiana el intercepto y asociarlo a un registro verbal. I.B. Cuando se trata de identificar y diferenciar en un registro de representación cartesiana la razón de cambio y asociarla a un registro verbal.	P23SC, P28SMC, P32SN P24SC, P29SMC, P33SN

Situaciones muy conocidas (SC), medianamente conocidas (SMC) y situaciones novedosas (SN)

5.7. Organización de la información.

Dada la amplitud de la información arrojada por la prueba final se realiza la compilación de las respuestas de los 24 estudiantes que hacen parte de la población estudiada. La tabla de organización de dicha información considera las categorías de análisis, las subcategorías y los indicadores a investigar, la jerarquización de respuestas y la estructura común de las mismas.

La forma como se organiza los datos para su correspondiente análisis, se precisa en lo siguiente: primero, se considera la subcategoría a investigar, luego se ubica de forma horizontal las preguntas de esta subcategoría en los diferentes tipos de situaciones (muy cercanas, medianamente conocidas y novedosas); segundo, se agrupan los enunciados de las respuestas según la semántica de las mismas, seguidamente se cuantifican y se determina su valor relativo frente a la población; tercero, se enuncian jerarquías según la complejidad y argumentos de los enunciados; cuarto, se revisa y plantea una posible

estructura común a lo largo de las tres situaciones. Este proceso se hace con todas las categorías y subcategorías de análisis.

Para el análisis de los datos obtenidos se han dispuesto cuatro matrices, en la primera matriz organizamos el porcentaje de aciertos de las respuestas en cada indicador específico a investigar, comparando estos resultados a lo largo de las tres situaciones nombradas. Lo anterior con el fin de detectar si hay un cambio considerable en el éxito de los estudiantes según el tipo de situación.

La segunda y tercera matriz organiza los enunciados de los estudiantes catalogados como correctos y los enunciados catalogados como erróneos de cada indicador específico investigado, a lo largo de las tres situaciones. Ello con el fin de establecer las prácticas prototípicas, los invariantes en ellas y las posibles fuentes de los errores, para esbozar una estructura común.

La última matriz organiza el seguimiento a las enunciaciones de los sujetos investigados a profundidad, según las categorías y aspectos específicos a investigar tratando de establecer el significado de covariación construido por cada uno de ellos.

Estas matrices pueden ser consultadas de forma amplia en los anexos de esta investigación con el nombre de Matrices de Organización y Análisis de Datos.

6. Resultados

En este apartado se presenta el análisis de la información recolectada a lo largo del estudio. Este análisis se realiza a partir de matrices que organizan los datos y permiten observar tendencias tanto de forma cuantitativa como cualitativa por medio de enunciaciones y porcentajes de éxito.

Por tal razón, a continuación, se ilustran matrices por cada categoría y subcategoría, ellas corresponden a dos estructuras descritas en el capítulo metodología. La primera matriz, presenta los porcentajes de aciertos de las respuestas en cada indicador específico a investigar según una subcategoría, y enseña de forma paralela los resultados a lo largo de las tres situaciones abordadas en la prueba final. Lo anterior con el fin de detectar si hay un cambio considerable en el éxito de los estudiantes según el tipo de situación. En la última matriz, se muestran los enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la subcategoría, en las tres situaciones, según cada caso. Ello con el fin de establecer las prácticas prototípicas, los invariantes en ellas y las posibles fuentes de los errores, a fin de esbozar una estructura común.

Hemos adoptado la siguiente codificación para efectos de síntesis y organización de los resultados, entenderemos por Sit.1 la situación 1 correspondiente al proceso de llenado, Sit.2 la situación 2 correspondiente a la subida de la plataforma del súper shot, Sit.3 la situación 3 correspondiente a la carrera de los 100 metros planos, y adicionalmente los rótulos como E1PF-p1.1 indican el estudiante del cual se hace un estudio detallado de caso y el número de la pregunta de la prueba final; en este caso específico la codificación E1PF-p1.1 quiere decir que es una enunciación del “estudiante 1 quien responde la pregunta 1.1 de la prueba final”, adicionalmente, aclaramos que las enunciaciones que no tienen este tipo de rótulo se asocian a respuestas de alguno de los otros 24 estudiantes del curso.

Así pues, a continuación, se presentan los resultados y sus respectivos análisis categoría por categoría.

6.1. De aplicaciones en situaciones conocidas y cercanas a su contexto a situaciones menos conocidas

Son cuatro las subcategorías correspondientes a esta categoría: Identificación de variables, relación cualitativa de la forma de dependencia, relación cuantitativa de la covariación sin uso de la razón de cambio y relación cuantitativa de la covariación con uso de la razón de cambio, como ya se dijo se estudiará la información para cada una de estas subcategorías.

6.1.1. Identificación de variables.

En esta subcategoría se analiza si el estudiante Identifica en la situación las dos variables de las que se va a estudiar la covariación.

La tabla 18 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C1-1 de esta categoría.

Tabla 18 Porcentajes de respuestas correctas categoría 1, Subcategoría 1, según cada situación.

Subcategoría C1-1	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
Identificación de magnitudes para las cuáles sus valores varían o permanecen constantes durante el fenómeno.	I.A. Cuando se trata de la variable dependiente de la covariación estudiada.	92 (*)	87	79
	I.B. Cuando se trata de otra magnitud variable pero que no es del par de la covariación estudiada.	92	96	75
	I.C. Cuando se trata de una magnitud constante.	92	83	96

(*) Cantidad de estudiantes del curso 24.

Origen: fuente propia

En general los estudiantes dan muestra de poder identificar cuándo una magnitud cambia su valor o permanece constante durante el desarrollo del fenómeno. No se observa una diferencia consistente en los porcentajes de éxito entre las tres situaciones, que permita afirmar que alguna de las tres situaciones resulta a los estudiantes más

difícil que las otras. Sin embargo, la situación novedosa se le dificulta aproximadamente a una cuarta parte de los estudiantes.

Como síntesis del estudio de las enunciaciones correctas e incorrectas (ver anexo análisis de resultados tablas 2 a la 7) de cada indicador (I.A., I.B., e I.C.) de la subcategoría C1-1 se obtiene que:

Los estudiantes en su gran mayoría están en condiciones de identificar si una magnitud varía su cantidad o no a lo largo del desarrollo del fenómeno estudiado, aunque, se aprecia una pequeña diferencia en la situación 3, quizá por ser una situación no estudiada durante toda la secuencia didáctica. Cuando incurren en error al contestar, terminan cambiando la magnitud por la que se les interroga (p. ej. “no cambió, la distancia recorrida porque hay que recorrer 100 m”).

6.1.2. Relación cualitativa de la forma de dependencia

En esta subcategoría se analiza si el estudiante relaciona de forma cualitativa el sentido del cambio de una de las variables en relación con el sentido de cambio de la otra (p. ej. mientras una aumenta la otra aumenta)

La tabla 19 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C1-2 de esta categoría.

Tabla 19 Porcentajes de respuestas correctas categoría C1, Subcategoría C1-2, según cada situación.

Subcategoría C1-2:	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit.3 %
Relación cualitativa de la forma de covariación entre pares de cantidades de magnitud, a través del sentido del cambio de una de las variables en relación con el sentido de cambio de la otra (p. ej. mientras una aumenta la otra aumenta).	I.A. Cuando se trata de la relación del par de variables de la covariación estudiada.	91.6	95.8	100
	I.B. Cuando se trata del estudio de dos magnitudes que no tienen relación con el fenómeno estudiado.	87.5	29.1	37.5
	I.C. Cuando se trata de dos magnitudes que no covarían.	12.5	12.5	41.6

Origen: fuente propia

En general, los estudiantes logran identificar la relación de dependencia entre las magnitudes de la covariación estudiada, pero cuando se trata de magnitudes que no tienen tal relación se da una diferencia fuerte entre la sit. 1 y las otras dos. También se observa una baja de respuestas exitosas cuando se trata de magnitudes que no covarían (I.C.), aunque en la situación 3 sube un poco el porcentaje. Algunos estudiantes mencionan en Sit.2: *“si conviene, porque si hay sobrecarga la atracción se daña”* (ver anexo análisis de resultados tabla 12), Es posible que esta diferencia en el porcentaje se deba a que en el contexto del fenómeno de la situación 2 y 3 la variación de la cantidad de magnitud por la que se pregunta podría ser crucial en el desarrollo del fenómeno.

La tabla siguiente muestra los enunciados que producen los tres sujetos en cada situación con relación a las tareas correspondientes a esta subcategoría.

Tabla 20 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 2.3, 4.3 y 6.3 de la prueba final.

Sit.	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	<i>“Sí conviene estudiar la relación. Porque con estas dos sabemos cuánto se demora y que altura alcanza”</i> (ver anexo E1PF-p2.3)	<i>“Si conviene porque cuando el nivel llegue a tope al pasar el tiempo se podrá desbordar”</i> (ver anexo E2PF-p2.3)	<i>“si me conviene porque el tiempo puede variar”</i> (ver anexo E3PF-p4.3)
2	<i>“Sí conviene estudiar la relación. Porque así sabría qué alto está la plataforma y que tiempo se demora”</i> (ver anexo E1PF-p4.3)	<i>“si conviene porque cuando llegue al tope puede pasar lo mismo se romperá o soltará”</i> (ver anexo E2PF-p4.3)	<i>“si conviene porque puede que choque al subir o bajar si no calculamos bien”</i> (ver anexo E3PF-p4.3)
3	<i>“Sí conviene estudiar la relación. Se podría saber en qué momento de la carrera el posible fraude”</i> (ver anexo E1PF-p6.3)	<i>“conviene porque si recorre menos distancia que los demás es que hace trampa”</i> (ver anexo E2PF-p6.3)	<i>“conviene porque toca tener calculado la distancia”</i> (ver anexo E3PF-p6.3)

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados, p.)

Aunque los tres casos coinciden que conviene estudiar la variación entre las dos magnitudes (nivel del agua y tiempo, altura de la plataforma de sillas y el tiempo, la distancia recorrida y el tiempo), las razones que dan muestran diferencias. El sujeto de nivel alto en sus enunciados muestra que asocia claramente la relación de covariación entre las dos magnitudes y la información que se necesita. El sujeto de nivel medio con

menos claridad y el de nivel bajo, ofrece razones que no enuncian la covariación sino un instante (el momento extremo). Estas formas de enunciar sugieren una diferencia al referirse a la covariación, una que hace referencia a algunos momentos y otra que hace referencia no a momentos, sino a la relación de covariación.

6.1.3. Relación cuantitativa de la covariación sin uso de la razón de cambio (C1-3)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante a partir de la situación cuantifica la coordinación de la variación de la variable dependiente con relación a cambios de la variable independiente, por medio de estrategias aditivas o multiplicativas, sin hacer uso explícito de razón de cambio. (p. ej. a intervalos iguales de x (Δx) corresponden intervalos iguales de y (Δy)).

La tabla 21 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C1-3 de esta categoría.

Tabla 21 Porcentajes de respuestas correctas categoría C1, Subcategoría C1-3, según cada situación.

Subcategoría C1-3:	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
A partir de la situación cuantifica la coordinación de la variación de la variable dependiente con relación a cambios de la variable independiente. Lo hace utilizando estrategias aditivas o multiplicativas, sin hacer uso explícito de razón de cambio. (p. ej. a intervalos iguales de x (Δx) corresponden intervalos iguales de y (Δy)).	I.A. Cuando el valor desconocido es la variable independiente y se pregunta por el cambio entre dos estados de la variación diferente al inicial.	75	84	66
	I.B. Cuando el valor desconocido es la variable dependiente y se pregunta por el cambio del estado inicial al estado final.	67	83	50

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados)

En el indicador I.A., la cantidad de estudiantes que dan muestra de cuantificar la variación de la variable dependiente con relación a los cambios de la variable independiente, se reducen a cerca de tres cuartos de los estudiantes. Estos estudiantes

despliegan dos tipos de estrategias a saber: a) aquellos sujetos que hacen uso de la razón de cambio para resolver el problema como se ejemplifica en la enunciación “32 minutos. Ya que cada minuto sube 3 metros pero tenía 11 metros reste 11 metros a 107 metros y el resultado lo dividí en 3” (ver anexo E1PF-p8), donde se identifica que el estudiante concibe un cambio en la magnitud independiente y a partir de la razón de cambio, calcula la variación en la magnitud dependiente y b) aquellos estudiantes que usan estrategias aditivas o multiplicativas para hacer aproximaciones que los lleven a establecer la cuantificación del cambio, ejemplo de ello la enunciación “porque si es 3 cada minuto, es 1 cada 20 segundos; por lo cual $3 \times 4 = 12$ entonces $3:40=17$; y $3 \times 36=108$ y $35:40=107$ ” (ver anexo E2PF-p8), aquí se aprecia que realizan una serie de aproximaciones para posteriormente calcular el cambio de la variable dependiente, de manera aditiva.

De manera similar en el indicador I.B., se puede observar que cerca de dos tercios de los estudiantes emplean o hacen referencia a la razón de cambio en su enunciado, pero en la situación 3 se presenta dificultad para identificar la razón de cambio y hacer uso efectivo de ella.

En cuanto a los estudiantes cuyas respuestas fueron incorrectas (ver anexo análisis de resultados tablas 18 y 20), se puede ver que sus enunciaciones están asociadas con la imposibilidad de percibir o identificar un cambio en la variable independiente, por ejemplo, en la enunciación “35 minutos. Porque el agua sube cada 3 metros y divide $107 \div 3$ ” (ver anexo análisis de resultados tabla 18), se observa que el estudiante no tiene en cuenta que la pregunta se refiere al tiempo que se toma para ir de una observación inicial (diferente de cero) a una observación final, por tanto, aplica la razón de cambio al estado final, más no al cambio entre las dos observaciones. Por otro lado, cuando se trata de calcular el aumento de una cantidad de magnitud de la variable independiente

dada la razón de cambio de la covariación, al parecer los estudiantes confunden el sentido de la razón de cambio que hay entre el par de magnitudes que covarían, ejemplo de ello la enunciación “17 minutos. Porque el agua sube 5 metros cada minuto y dividí $85 \div 5$ ” (ver anexo análisis de resultados tabla 20), en ella el estudiante realiza un división para hallar el cambio, confundiendo la dirección del cambio y la operación a realizar.

Llegado el final de esta subcategoría, ilustramos la diferencia en el nivel de complejidad de las enunciaciones que van creando los diferentes sujetos que se investigan a profundidad.

Tabla 22 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 8, 11 y 14 de la prueba final.

Sit	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	“32 minutos. Ya que cada minuto sube 3 metros, pero tenía 11 metros, reste 11 metros a 107 metros y el resultado lo dividí en 3” (ver anexo E1PF-p8)	“porque si es 3 cada minuto, es 1 cada 20 segundos; por lo cual $3 \times 4 = 12$ entonces $3:40=17$; y $3 \times 36=108$ y $35:40=107$ ” (ver anexo E2PF-p8)	No responde
2	“45 segundos: ya que es la mitad de segundos de metros entonces si multiplicamos 45×2 da 90 esos son los metros que subieran.” (ver anexo E1PF-p11)	“ $2 \times 9 = 18$ entonces $9:30=19$ y $2 \times 55=110$ entonces $54:30=109$ ” (ver anexo E2PF-p11)	No responde
3	“35 seg: ya que resto 15 a 85 = 70 y divido en 1=70 y le resto la mitad. Ya que es cada 2 metros cada segundo o sea la mitad” (ver anexo E1PF-p14)	“ $2 \times 7 = 14$ entonces $7:30=15$ y $2 \times 43=86$ entonces $42:30=85$ ” (ver anexo E2PF-p14)	No responde

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados)

En las enunciaciones y procedimientos que realizan estos tres sujetos se nota que hay prácticas prototípicas en cada sujeto ya que mantiene su enunciación y procedimiento a lo largo del campo de situaciones, por ejemplo, en Sit.1 cuando el sujeto 1 dice: “32

minutos. Ya que cada minuto sube 3 metros pero tenía 11 metros reste 11 metros a 107 metros y el resultado lo dividí en 3” (ver anexo E1PF-p8), refleja la práctica prototípica frente a estos problemas, como se ve en los enunciados que emite en Sit.2 y Sit.3. Pero esto no sólo sucede con el sujeto 1, ya que los demás sujetos actúan siempre con una la misma pauta en las distintas situaciones.

Otra característica que se puede inferir en la tabla de arriba es que las prácticas prototípicas de los sujetos son muy dispares, si miramos la práctica del sujeto 1, podemos decir que esta persona siempre tiene en cuenta que hay un cambio en una de las magnitudes del fenómeno estudiado, cuantifica este aumento y a partir de él aplica la razón de cambio que relaciona el par de magnitudes que covarían. Mientras que el sujeto de nivel medio hace diferentes aproximaciones por métodos aditivos y multiplicativos para establecer la relación entre pares de cantidades de magnitud que covarían más sin embargo no da cuenta del cambio de magnitud cuando la otra varía y sólo se da cuenta de ello en la entrevista cuando se le sugiere que a partir de las aproximaciones que el realiza es posible conocer dicho cambio. El sujeto de nivel 3 no da cuenta de sus enunciados.

6.1.4. Relación cuantitativa de la covariación con uso de la razón de cambio (C1-4)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante a partir de la situación cuantifica la coordinación de la variación de la variable dependiente con relación a cambios de la variable independiente. Hace uso explícito de razón de cambio. ($\Delta x / \Delta y$).

La tabla 23 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C1-4 de esta categoría.

Tabla 23 Porcentajes de respuestas correctas categoría C1, Subcategoría C1-4, según cada situación.

Subcategoría C1-4	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
A partir de la situación cuantifica la coordinación de la variación de la variable dependiente con relación a cambios de la variable independiente. Hace uso explícito de razón de cambio. $(\Delta x / \Delta y)$.	I.A. Cuando se trata verificar que una covariación es constante a partir de la razón de cambio en un registro tabular.	83	54	54

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados)

En este indicador I.A., el porcentaje refleja la cantidad de estudiantes que identifican la razón de cambio de la situación a partir de un registro tabular y la usan para describir y predecir consecuencias sin importar el tipo de situación. Como se puede ver en la tabla 23, la cantidad de sujetos que aciertan se reduce a cerca de la mitad de los estudiantes, en las situaciones S2 y S3. Algunos estudiantes hallan la razón de cambio entre la variable dependiente con relación a la variable independiente y la usan para justificar que una covariación es constante, y otros mediante ensayo y error tratan de coordinar los resultados de las variaciones, acudiendo a las diferencias entre los datos de la tabla para establecer aumentos constantes de forma aditiva sin acudir a la razón de cambio.

Teniendo en cuenta las respuestas que dieron los estudiantes para los ítems planteados en esta categoría advertimos que menos de la mitad de los estudiantes logra establecer de forma explícita la razón de cambio entre la variable dependiente con relación a la variable independiente a partir de un registro tabular, aquellos sujetos que logran identificar la razón de cambio hacen una descomposición de la tabla para hacer una reducción a la unidad y a partir de allí establecer relaciones multiplicativas o acudir a las diferencias entre los datos de la tabla para establecer aumentos constantes de forma aditiva. Aunado a esto, los enunciados de los estudiantes con dificultad en esta categoría permiten presumir que estos sujetos intentan reconocer una covariación constante a

través de tanteo o regularidades en una cantidad de magnitud independiente, pero como en las tablas propuestas no es visible ello, tienden a establecer especulaciones.

Concluida esta subcategoría, exponemos la diferencia encontrada en las enunciaciones que van creando los diferentes sujetos que se investigan a profundidad.

Tabla 24 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 19 de la prueba final.

Sit	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	<i>“La C. Ya que avanza a una velocidad constante cada minuto avanza 3 metros”(ver anexo E1PF-p16)</i>	<i>“la C porque si fuera 1 se ve cómo se puede multiplicar por 3”(ver anexo E2PF-p16)</i>	<i>“La C porque el tiempo sube cada 3 minutos”(ver anexo E3PF-p16)</i>
2	<i>“la A. Porque avanza continuamente en el tiempo que en metros”(ver anexo E1PF-p17)</i>	<i>“La A porque $1 \times 4 = 4$, $4 \times 3 = 12$, $7 \times 4 = 28$ o sea que sube de 4 en 4 cada minuto”(ver anexo E2PF-p17)</i>	<i>“La A porque 4 se multiplica por el tiempo”(ver anexo E3PF-p17)</i>
3	<i>“La B. ya que avanza en una velocidad cada sg avanza 5 metros”(ver anexo E1PF-p18)</i>	<i>“La B porque $1 \times 5 = 5$, $5 \times 3 = 15$ o sea sube de 5 en 5 cada minuto”(ver anexo E2PF-p18)</i>	<i>“La B porque el segundo sube cada 5 metros”(ver anexo E3PF-p18)</i>

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados)

Según los datos arriba expuestos, aunque todos pueden determinar la covariación lineal en un registro tabular a partir de la razón de cambio vemos que las prácticas prototípicas de cada sujeto si tienen diferencias, por ejemplo, el sujeto 1 en Sit.1 dice: *“La C. Ya que avanza a una velocidad constante cada minuto avanza 3 metros”(ver anexo E1PF-p16)*, lo que indica que esta persona relaciona de forma global cada par de cantidades de magnitud de la covariación estudiada por medio de la razón de cambio, mientras que el sujeto 2 cuando enuncia: *“la C porque si fuera 1 se ve cómo se puede multiplicar por 3”(ver anexo E2PF-p16)*, tiene que hacer una descomposición de la tabla para encontrar el valor unitario de la covariación y por medio de cálculos aditivos comprobar que todo par de cantidades de magnitud cumplen con la razón de cambio. En

el caso de la estudiante de nivel bajo se nota que carece de argumentos que puedan explicar su forma de proceder.

Continuaremos con las enunciaciones correspondientes a la segunda categoría denotada como: De situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre ellas.

6.2. De situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre situaciones

Son cuatro las subcategorías correspondientes a esta categoría: relación analógica entre situaciones, identificación del tipo de dependencia entre magnitudes, cuantificación de la variación a partir de un registro verbal e identificación de la razón de cambio a partir de un registro gráfico, como ya se dijo se estudiará la información para cada una de estas subcategorías.

6.2.1. Relación analógica entre situaciones (C2-1)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante identifica analogías en las relaciones de dependencia entre pares de cantidades de magnitud en las tres situaciones.

La tabla 25 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C2-1 de esta categoría.

Tabla 25 Porcentajes de respuestas correctas categoría C2, Subcategoría C2-1, según cada situación.

Subcategoría C2-1	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
Identifica analogías en las relaciones de dependencia entre pares de cantidades de magnitud en las tres situaciones.	I.A. Cuando se trata de establecer analogías en las tres situaciones asociadas con la covariación directa del par de cantidades de magnitud, que se estudia en el fenómeno.	83	N/A	70
	I.B. Cuando se trata de establecer analogías en las tres situaciones asociadas con la covariación inversa de un par de cantidades de magnitud, que NO se estudia en el fenómeno.	80	79	N/A

N/A no aplica, ya que el estudiante no debía responder en esta situación.

En esta subcategoría se pretende observar las relaciones que establecen los estudiantes en tres situaciones de diferente cercanía a su contexto, al revisar los porcentajes de éxito de los estudiantes, se observa que aproximadamente cuatro quintos de ellos dan muestra de poder identificar analogías en las relaciones de dependencia entre pares de cantidades de magnitud en las tres situaciones. No se observa una diferencia consistente en los porcentajes de éxito entre las tres situaciones, que permita afirmar que alguna de ellas resulta a los estudiantes más difícil que las otras. Sin embargo parece ser que la situación novedosa se le dificulta aproximadamente a una cuarta parte de los estudiantes.

Teniendo en cuenta las respuestas que dieron los estudiantes para los ítems planteados en esta subcategoría, se observa que algunos estudiantes establecen una estructura común en las tres situaciones estudiadas ya que perciben que existe una analogía entre la relación altura-tiempo con la relación distancia-tiempo. Por otra parte, al detenernos en las enunciaciones de las respuestas incorrectas entrevemos que los estudiantes asocian no una relación entre par de magnitudes que covarían de forma inversa, sino sólo la cantidad de magnitud independiente, esto nos trae de nuevo al error de confundir las magnitudes de análisis.

Finalizada esta subcategoría C2-1 (se invita al lector a revisar el anexo análisis de resultados tablas 26 a la 31), resaltamos los aspectos de desencuentro hallados en las enunciaciones que van creando los diferentes sujetos que se investigan a profundidad.

Tabla 26 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 19 de la prueba final.

Sit.	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	<i>“La altura del agua en el tanque al transcurrir el tiempo”</i> (ver anexo E1PF-p19.1.1)	<i>“el nivel del agua al transcurrir el tiempo”</i> (ver anexo E2PF-p19.1.1)	<i>“la altura del tanque”</i> (ver anexo E3PF-p19.1.1)
2	N/A	N/A	N/A
3	<i>“La cantidad de metros que ha avanzado al transcurrir el tiempo”</i> (ver anexo E1PF-p19.1.3)	<i>“la distancia que recorre el atleta”</i> (ver anexo E2PF-p19.1.3)	<i>“la distancia de la pista de la carrera la longitud de la pista atlética”</i> (ver anexo E3PF-p19.1.3)

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados)

Teniendo en cuenta los datos anteriormente presentados y las justificaciones que dan los sujetos para establecer las relaciones entre las covariaciones de las diferentes situaciones podemos mencionar que:

Primero, tanto el estudiante de nivel alto como el de nivel medio explican que en todas las situaciones se estudia una covariación cuya variable independiente siempre varía en relación al tiempo, tal como se puede apreciar en su justificación de E1 *“las tres se relacionan en que han avanzado cierta cantidad de metros al transcurrir el tiempo(ver anexo E1PF-p19.1.3)”* y E2 *“estas 3 se parecen ya que sufren cambios al pasar el tiempo”*, es decir, estos sujetos al parecer realizan la transferencia de la covariación lineal a lo largo de las situaciones e identifican una estructura común en ellas, evidenciando que ese tipo de covariación engloba el campo de situaciones trabajados.

Segundo, el estudiante de nivel bajo es consistente en relacionar la covariación de estudio con una sola cantidad de magnitud que no varía, evidenciando en ello el error prototípico descrito con anterioridad. Dado que este sujeto no presenta justificación alguna, se puede pensar que el hecho de confundir la magnitud por la cual se pregunta

se relaciona más con la dificultad de concebir una relación de covariación, en otras palabras, al sujeto de nivel bajo se le dificulta identificar cantidades de magnitud que varían y su respectiva relación de dependencia.

6.2.2. Identificación del tipo de dependencia entre magnitudes. (C2-2)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante generaliza o relaciona el sentido de cambio de la covariación en las tres situaciones de forma cualitativa (directa e Inversa).

La tabla 27 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C2-2 de esta categoría.

Tabla 27 Porcentajes de respuestas correctas categoría C2, Subcategoría C2-2, según cada situación.

Subcategoría C2-2	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
Generaliza o relaciona el sentido de cambio de la covariación en las tres situaciones de forma cualitativa (directa e Inversa)	I.A. Cuando se trata de generalizar la covariación directa en las tres situaciones de estudio	100	58	91
	I.B. Cuando se trata de generalizar la covariación inversa en las tres situaciones de estudio	75	71	96

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados)

En este aspecto se observa las relaciones que establecen los estudiantes en las tres situaciones con el fin de generalizar las formas de relación de los cambios entre magnitudes. Al revisar los porcentajes de éxito de los estudiantes, se observa que en promedio cerca de cuatro quintos de ellos dan muestra de poder generalizar cualitativamente el sentido del cambio de una de las variables en relación con el sentido de cambio de la otra, a partir de un registro verbal en las tres situaciones. Se observa una diferencia consistente en los porcentajes de éxito entre las tres situaciones, lo que permite afirmar que la situación asociada a la atracción mecánica presenta dificultad en aproximadamente a una tercera parte de los estudiantes.

Los sujetos cuyos enunciados son correctos logran generalizar la covariación directa y la covariación inversa como estructuras comunes en las tres situaciones estudiadas.

Por otra parte, se observa que hay estudiantes que no logran englobar el tipo de covariación presente en las tres situaciones como uno sólo, debido al error prototípico consistente en confundir la magnitud tiempo de funcionamiento con el tiempo que le falta para finalizar la situación de estudio.

Concluida esta subcategoría C2-2 (se invita al lector a revisar el anexo análisis de resultados tablas 32 a la 37), señalamos las diferencias encontradas en las enunciaciones que van creando los diferentes sujetos que se investigan a profundidad.

Tabla 28 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 20 de la prueba final.

Sit.	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	<i>“Directa. A lo que aumenta el tiempo también aumenta el nivel del agua del tanque”</i> (ver anexo E1PF-p20.1)	<i>“Directa porque los 2 aumentan al tiempo”</i> (ver anexo E2PF-p20.1)	<i>“Directa porque el tanque se va llenando mientras el tiempo pasa”</i> (ver anexo E3PF-p20.1)
2	<i>“Inversa. Ya que cuando la plataforma sube el tiempo de funcionamiento disminuye”</i> (ver anexo E1PF-p20.3)	<i>“directa porque aumentan al mismo tiempo”</i> (ver anexo E2PF-p20.3)	<i>“directa suben al mismo tiempo”</i> (ver anexo E3PF-p20.3)
3	<i>“Directa. Ya que a lo que corre aumenta metros y el tiempo también aumenta”</i> (ver anexo E1PF-p20.6)	<i>“directa porque los dos aumenta al mismo tiempo”</i> (ver anexo E2PF-p20.6)	<i>“directa porque es el que dura el atleta”</i> (ver anexo E3PF-p20.6)

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados)

En consecuencia, de la información de la tabla se puede decir que aunque los sujetos reconozcan cualitativamente el sentido del cambio de las variables a partir de un registro verbal, hay grandes diferencias en las enunciaciones que ilustran estos sujetos, por ejemplo, al examinar lo que dice E.1, se nota claramente que este sujeto explica el sentido del cambio de cada una de las variables en consecuencia del sentido del cambio de la otra variable y aunque se equivoque en la sit.2 por considerar que el tiempo corre en cuenta regresiva (según lo mencionado en la entrevista) se puede llegar a pensar que generaliza el sentido de cambio de la covariación en las tres situaciones de forma

cualitativa. Mientras que el sujeto de nivel medio da cuenta del sentido del cambio de las variables pero no explica que el cambio en el sentido de una depende del sentido del cambio de la otra. Por otra parte el sujeto de nivel bajo cuando dice en Sit.3 “*directa porque es el que dura el atleta*” deja dudas en cuanto al reconocimiento del sentido del cambio de la covariación estudiada ya que al parecer nuevamente está confundiendo las cantidades de magnitud por las que se le pregunta.

6.2.3. Cuantificación de la variación a partir de un registro verbal. (C2-3)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante generaliza o relaciona la estructura de las preguntas desde la estrategia de solución utilizada para cuantificar la variación de la variable dependiente con relación a los cambios de la variable independiente a partir de un registro verbal en las tres situaciones. Dadas las dificultades en cuanto a extensión de las pruebas aplicadas y complejidad en las preguntas asociadas con esta subcategoría, tomamos la decisión de no considerarla para el análisis de la información obtenida.

6.2.4. Cuantificación de la variación a partir de un registro verbal. (C2-4)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante generaliza o relaciona la estructura de las preguntas desde la estrategia de solución utilizada para cuantificar la variación de la variable dependiente con relación a los cambios de la variable independiente a partir de un registro verbal en las tres situaciones.

La tabla 29 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C2-4 de esta categoría.

Tabla 29 Porcentajes de respuestas correctas categoría C2, Subcategoría C2-4, según cada situación.

Subcategoría C2-4	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
Generaliza o relaciona un registro gráfico, con la razón de cambio de las tres situaciones distintas	I.A. Cuando se trata de asociar un mismo gráfico de representación cartesiana con la razón de cambio en tres diferentes situaciones	92	67	79

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados)

Por lo expuesto en la tabla de porcentajes se deduce que cerca de cuatro quintos de los estudiantes logran asociar un registro de representación cartesiana con uno de representación verbal, mediante la razón de cambio en diferentes situaciones, aparentemente ellos logran identificar que el registro de representación cartesiana de una covariación lineal, se puede asociar a diversas situaciones. Las conversiones de un registro a otro no presentan dificultad salvo que se observa una diferencia consistente en los porcentajes de éxito cuando se enfrentan a la situación relacionada con la atracción mecánica, probablemente la enunciación de la pregunta genera confusión.

Como cierre de esta subcategoría C2-4 (se invita al lector a revisar el anexo análisis de resultados, tablas 38 a la 42), mencionamos las discrepancias encontradas en las enunciaciones que van creando los diferentes sujetos que se investigan a profundidad.

Tabla 30 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 21 de la prueba final.

Sit.	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	<i>“Verdadero. Ya que aumenta 3 cada 2 min”</i> (ver anexo E1PF-P21.A)	<i>“verdadero porque cada 2 min aumenta 3 metros”</i> (ver anexo E2PF-P21.A)	<i>“Verdadero”</i> (ver anexo E3PF-P21.A)
2	<i>“Verdadero ya que aumenta metro y medio cada segundo”</i> (ver anexo E1PF-P21.B)	<i>“cierto porque empieza en 1 y sube a 2,5m en 1 segundo”</i> (ver anexo E2PF-P21.B)	<i>“Verdadero”</i> (ver anexo E3PF-P21.B)
3	<i>“Verdadero. ya que la velocidad es de 1.5 metros por segundo”</i> (ver anexo E1PF-P21.C)	<i>“cierto, lo que dije en la b”</i> (ver anexo E2PF-P21.C)	<i>“Verdadero”</i> (ver anexo E3PF-P21.C)

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados)

Según los datos suministrados por la tabla se puede decir que los tres sujetos pueden relacionar la inclinación de la recta en el registro gráfico con la razón de cambio, pero sólo los estudiantes de nivel alto y medio pueden justificar sus enunciaciones por medio de argumentos explícitos sobre la covariación entre las magnitudes estudiadas dando

cuenta de una lectura e interpretación del gráfico del cual parte la pregunta; mientras que el sujeto de nivel bajo no enuncia justificación alguna de su respuesta.

Enseguida las enunciaciones correspondientes a la tercera categoría denotada como:
De escasa coordinación entre representaciones de registros diferentes a mayor coordinación entre ellas

6.3. De escasa coordinación entre representaciones de registros diferentes a mayor coordinación entre ellas

Son dos las subcategorías correspondientes a esta categoría: identificación de registros cartesiano y tabular e identificación de registros cartesiano y verbal, como ya se dijo se estudiará la información para cada una de estas subcategorías.

6.3.1. Identificación de registros cartesiano y tabular (C3-1)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante relaciona los registros cartesiano y tabular en diferentes situaciones (se invita al lector a revisar el anexo análisis de resultados, tablas 43 a la 46).

La tabla 31 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C3-1 de esta categoría.

Tabla 31 Porcentajes de respuestas correctas categoría C3, Subcategoría C3-1, según cada situación.

Subcategoría C3-1	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
relaciona los registros cartesiano y tabular en diferentes situaciones	I.A. Cuando se trata de asociar un registro de representación cartesiana a un registro de representación tabular	75	67	62,5

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados)

Según lo que manifiestan los estudiantes en los ítems planteados en esta subcategoría, resaltamos que cerca de los dos tercios de los estudiantes dan muestra de poder relacionar un registro de representación cartesiana con un registro de representación tabular en diferentes situaciones, estos estudiantes al parecer observan el punto de corte con Y en la representación cartesiana y contrastan esta información con

los registros tabulares. Por otra parte, se puede señalar que la dificultad que presentan los estudiantes puede consistir en una lectura equivocada de la escala de la gráfica o en realizar una comparación coordinada por coordinada en el registro cartesiano, y al agotarse el gráfico asume que no corresponde con la tabla. Sin embargo el porcentaje de éxito tiende a disminuir conforme la situación se torna más lejana.

Llegado el final de esta subcategoría C3-1, ilustramos la comparación de enunciaciones que van creando los diferentes sujetos que se investigan a profundidad.

Tabla 32 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 22, 27 y 31 de la prueba final.

Sit.	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	<i>“A. ya que representa bien la gráfica.” (ver anexo E1PF-P22.1)</i>	<i>“El tanque A, porque si el tiempo va de 2 en 2, en 2 es 6 si también la altura es de 2 en 2” (ver anexo E2PF-P22.1)</i>	<i>“El tanque A” (ver anexo E3PF-P22.1)</i>
2	<i>“Disney” (ver anexo E1PF-P27.1)</i>	<i>“Disney, porque en la gráfica empieza en 0 metros” (ver anexo E2PF-P27.1)</i>	<i>“Disney” (ver anexo E3PF-P27.1)</i>
3	<i>“Nairo.” (ver anexo E1PF-P31.1)</i>	<i>“Nairo porque empieza en 3” (ver anexo E2PF-P31.1)</i>	<i>“Nairo ” (ver anexo E3PF-P31.1)</i>

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados)

De este tipo de enunciaciones es complejo obtener alguna inferencia debido a que sólo escriben la respuesta correcta sin alguna justificación y en el momento de la entrevista se limitan a repetir la misma opción y señalar en la gráfica la respuesta correcta y argumentan que ello es obvio.

6.3.2. Identificación de registros cartesiano y tabular (C3-2)

En esta subcategoría se analiza si el estudiante relaciona los registros cartesiano y verbal en diferentes situaciones.

La tabla 33 presenta los porcentajes de aciertos del curso en la tarea relacionada con la subcategoría C3-2 de esta categoría.

Tabla 33 Porcentajes de respuestas correctas categoría C3, Subcategoría C3-2, según cada situación.

Subcategoría C3-2	Indicadores	Sit. 1 %	Sit. 2 %	Sit. 3 %
Relaciona los registros cartesiano y verbal en diferentes situaciones.	I.A. Cuando se trata de identificar y diferenciar en un registro de representación cartesiana el intercepto y asociarlo a un registro verbal.	71	67	92
	I.B. Cuando se trata de identificar y diferenciar en un registro de representación cartesiana la razón de cambio y asociarla a un registro verbal.	75	67	62,5

Origen: fuente propia (ver anexo análisis de resultados)

Gracias a las enunciaciones expuestas por los estudiantes en los ítems planteados en esta subcategoría, resaltamos que cerca de los dos tercios de los estudiantes pueden relacionar los registros cartesiano y verbal en diferentes situaciones, tanto por el punto de corte con el eje Y como por la razón de cambio, en sus escritos se nota que ellos identifican la razón de cambio de dos procesos de covariación, las comparan y seleccionan la correspondiente a lo que se les solicita. Por otra parte, de los enunciados concernientes a las respuestas incorrectas se deduce que los sujetos confunden la razón de cambio con el intercepto de Y.

Como cierre de esta subcategoría C3-2 (se invita al lector a revisar el anexo análisis de resultados, tablas 47 a la 52), se presenta el comparativo de las enunciaciones de los sujetos estudiados a profundidad.

Tabla 34 Matriz de enunciados por sujeto de análisis en cada situación, asociados a la pregunta 24, 29 y 33 de la prueba final.

Sit.	Sujeto 1 (Nivel alto)	Sujeto 2 (Nivel medio)	Sujeto 3 (Nivel bajo)
1	"B. el tanque B" (ver anexo E1PF-P24)	"El B porque debe ser más angosto" (ver anexo E2PF-P24)	"El B" (ver anexo E3PF-P24)

2	<i>“Disney”</i> (ver anexo E1PF-P29)	<i>“Disney porque va más rápido o tiene menos altura”</i> (ver anexo E2PF-P29)	<i>“Disney”</i> (ver anexo E3PF-P29)
3	<i>“Usaint”</i> (ver anexo E1PF-P33)	<i>“Usaint”</i> (ver anexo E2PF-P33)	<i>“Usaint”</i> (ver anexo E3PF-P33)

Origen: fuente propia (ver anexo resultados)

De este tipo de enunciaciones es complejo sacar algún tipo de inferencia debido a que sólo escriben la respuesta correcta sin alguna justificación y en el momento de la entrevista se limitan a repetir la misma opción y señalar en la gráfica la respuesta correcta y argumentan que ello es obvio.

7. Conclusiones

Como respuesta a la pregunta problema ¿Cómo son los significados que construyen los estudiantes acerca de covariación lineal, a partir de una secuencia didáctica llevada a cabo en grado octavo de la Institución Educativa Distrital Carlos Pizarro León Gómez? presentamos a continuación las conclusiones basadas en la información obtenida de la prueba final y su análisis a la luz de las categorías propuestas.

Para la categoría C1. De aplicaciones en situaciones conocidas y cercanas a su contexto a situaciones menos conocidas, podemos describir:

Primero: en general los estudiantes dan muestra de poder identificar cantidades de magnitud que cambian su valor o permanecen constantes durante el desarrollo de un fenómeno, además reconocen cuándo una magnitud es o no relevante para el estudio de una covariación específica, aunque algunos realizan asociaciones con otras condiciones del fenómeno para justificar su relevancia. Sin embargo, a lo largo de este estudio, se puede apreciar que algunos estudiantes cometen errores al decidir sobre la constancia o no de la una magnitud y la relevancia de una magnitud con relación a un fenómeno, y en algunos casos estos errores son consistentes a lo largo de las tres situaciones.

Segundo: cuando se pide cuantificar el cambio de una magnitud con relación a otra, se observa que los estudiantes hacen uso de tres estrategias, una aditiva, multiplicativa y otra asociada a la razón de cambio, y sin importar cuál estrategia utilicen la transfieren a cada una de las tres situaciones, pero el índice de acierto en promedio se reduce a los dos tercios de los estudiantes.

Tercero: se aprecia una disminución notable en el porcentaje de éxito en las situaciones Sit 2 y Sit 3 cuando se les plantean situaciones en las que se involucra la razón de cambio a partir de un registro tabular, en estas situaciones tan sólo la mitad de los sujetos pueden identificar la razón de cambio. Vale la pena mencionar que estos

estudiantes en sus enunciaciones muestran no comprender estos problemas de forma proporcional, siempre acuden a realizar una descomposición de los datos de la tabla hasta encontrar el valor unitario para calcular los valores respectivos.

Cuarto: se puede apreciar que en el proceso de complejización del estudio de la covariación lineal, es decir, al avanzar en las subcategorías de esta categoría (Identificación de variables, Relación cualitativa de la forma de dependencia, Relación cuantitativa de la covariación sin uso de la razón de cambio, Relación cuantitativa de la covariación con uso de la razón de cambio.), los índices de acierto se empiezan a reducir, como se ha nombrado anteriormente, esto también sucede en las tres situaciones sin importar la cercanía o lejanía que el estudiante tenga con el contenido de la situación, tal como lo ha manifestado Carlson (2003) en su investigación.

En la categoría C2. De situaciones más o menos aisladas entre sí a establecer relaciones entre situaciones, se puede concluir que:

Primero: al observar las relaciones que establecen los estudiantes en las tres situaciones, es posible identificar que cuatro quintos de los sujetos realizan analogías en las relaciones de dependencia entre pares de cantidades de magnitud, generalizan la covariación directa e inversa como estructura común, y adicionalmente logran identificar que la forma de la recta de la representación cartesiana corresponde a una forma de covariación y que ésta forma es aplicable a diferentes fenómenos. Por tanto, se puede enunciar que estos sujetos construyen una estructura común en cada uno de los aspectos que complejizan la covariación lineal, en las diferentes situaciones y que puede llegar convertirse en la fuente que posibilite generalizar la covariación lineal, como modelo para diferentes fenómenos.

Segundo: una razón por la cual los estudiantes les cuesta identificar la covariación lineal como estructura común de las diferentes situaciones, se debe a que en lugar de

relacionar la covariación de un par de magnitudes de algún fenómeno con la covariación de otro par de magnitudes respectivas a otro fenómeno o situación, hacen una asociación entre la relación de un par de magnitudes que covarían en un fenómeno con una cantidad de magnitud constante de otro fenómeno; pues al parecer estos estudiantes no consideran que se pregunta por la analogía de la relación de dependencia entre dos magnitudes sino que se pregunta por una sola magnitud, confirmando la repetición del error prototípico presente en la categoría anterior, al confundir las magnitudes de análisis.

En la categoría C3. De escasa coordinación entre representaciones de registros diferentes a mayor coordinación entre ellas, se concluye que:

Primero: cerca de dos tercios de los estudiantes, dan muestra de poder relacionar un registro de representación cartesiana con un registro de representación tabular y verbal. Al analizar los porcentajes de éxito no se observa una diferencia consistente, lo que hace pensar que sin importar la situación los sujetos asocian estos registros en las tres situaciones

Segundo: a la hora de coordinar la relación entre registros de representación puede convenirse que los estudiantes acuden a dos estrategias para asociar el registro cartesiano al tabular y al verbal; la primer estrategia se basa en observar, diferenciar y asociar el punto de corte con Y en la representación cartesiana con el registro tabular y verbal, el segundo, consiste en hacer una lectura de la inclinación de la recta asociándola a la razón de cambio, en interpretándola en representación del registro tabular y verbal.

Tercero: Alrededor de la tercera parte de los estudiantes presentan dificultades al intentar coordinar la relación entre representaciones de diferentes registros de representación. Estas consisten en: a) los estudiantes hacen una lectura equivocada de la

escala de la gráfica, b) confunden la etiqueta de los ejes en el registro cartesiano, c) el intercepto con el eje Y en diferentes situaciones, lo confunden el valor máximo del recorrido de la función y, por último, d) confunden la razón de cambio con el punto de corte en Y para identificar la rapidez en el crecimiento de una covariación;

En cuanto al análisis y contraste de los significados construidos por los tres sujetos de estudio cuando se enfrentan a algunos fenómenos de covariación lineal, se concluyen los siguientes puntos de encuentro y diferencia:

Primero: los sujetos de nivel alto y medio son consistentes a la hora de identificar magnitudes que varían o no varían, mientras que el sujeto de nivel bajo tiende a confundir la magnitud por la cual se le pregunta evidenciando problemas para reconocer la variación o no de ciertas magnitudes.

Segundo: para referirse a la necesidad del estudio de la covariación, se nota que el estudiante de nivel alto describe la totalidad del proceso, mientras que los demás hacen referencia a algunos momentos.

Tercero: cada sujeto posee una práctica prototípica cuando se trata de calcular el cambio de una magnitud por medio del cambio de la otra, el sujeto de nivel alto siempre calcula el cambio de una magnitud y luego usando la razón de cambio halla el cambio en la otra magnitud, mientras que el sujeto de nivel medio usa aproximaciones por medio de estrategias aditivas y multiplicativas y finalmente el sujeto de nivel bajo sólo tiene éxito al calcular cambios pequeños por medio de estrategias aditivas.

Cuarto: todos pueden determinar la covariación lineal en un registro tabular pero el sujeto de nivel alto relaciona de forma global cada par de cantidades de magnitud de la covariación estudiada por medio de la razón de cambio, mientras que el sujeto de nivel medio tiene que hacer una descomposición de la tabla para encontrar el valor unitario de

la covariación y por medio de cálculos aditivos comprobar que todo par de cantidades de magnitud cumplen con la razón de cambio. En el caso de la estudiante de nivel bajo se nota que carece argumentos que puedan explicar su forma de proceder.

Quinto: tanto el estudiante de nivel alto como el de nivel medio hacen la transferencia de la covariación lineal a lo largo de las situaciones e identifican una estructura común en ellas, evidenciando que ese tipo de covariación engloba el campo de situaciones trabajados.

Sexto: el estudiante de nivel bajo es consistente al relacionar la covariación de estudio con una sola cantidad de magnitud que no varía, evidenciando en ello el error prototípico descrito con anterioridad.

Séptimo: aunque los sujetos reconocen cualitativamente el sentido del cambio de las variables a partir de un registro verbal, el sujeto de nivel alto generaliza el sentido de cambio y engloba las covariaciones como directas e inversas, mientras que el sujeto de nivel medio no explica que el cambio en el sentido de una magnitud depende del sentido del cambio de la otra y finalmente el sujeto de nivel bajo deja dudas en cuanto al reconocimiento del sentido del cambio de la covariación estudiada ya que nuevamente confunde las cantidades de magnitud por las que se le pregunta.

Octavo: los sujetos pueden relacionar la inclinación de la recta en el registro gráfico con la razón de cambio, pero sólo los estudiantes de nivel alto y medio pueden justificar sus enunciaciones por medio de argumentos explícitos sobre la covariación entre las magnitudes estudiadas dando cuenta de una lectura e interpretación del gráfico del cual parte la pregunta; mientras que el sujeto de nivel bajo no enuncia justificación alguna de su respuesta.

7.1. Discusión

En este apartado se relacionan los hallazgos que son fruto de este trabajo con algunas investigaciones que preceden a este estudio.

En primera instancia, según lo descrito en el anterior apartado podemos señalar que en general los estudiantes dan muestra de poder identificar cantidades de magnitud que cambian su valor o permanecen constantes durante el desarrollo de un fenómeno, además reconocen cuándo una magnitud covaría con otra magnitud específica y realizan asociaciones con las condiciones del fenómeno, para identificar su dependencia. Este hallazgo indica una cercanía con los logros obtenidos por Gómez (2015) quien argumenta que después del trabajo que él implementó en el aula se logró ver que:

Los estudiantes poseen una comprensión global de la situación y alcanzan a descubrir algunas relaciones de dependencias entre las magnitudes que intervienen; sin embargo, en este sentido, la tabla se convirtió en una herramienta para el reconocimiento de los procedimientos a efectuar para calcular los valores de las magnitudes. (p. 86) Sin embargo, creemos que esta fortaleza en los estudiantes no sólo se debe al trabajo con registros tabulares sino a la complementariedad que ofrece las representaciones de los registros verbal, gráfico y tabular, junto con las simulaciones trabajadas en clase.

Por otra parte, a lo largo del presente estudio se puede apreciar que algunos estudiantes confunden la cantidad de magnitud por la cual se pregunta, haciendo notar que es un tipo de error consistente tanto en las tres situaciones como en los diferentes tipos de cantidad de magnitud por la que se pregunta, por lo cual es necesario insistir en la siguiente propuesta de Sierpinska (1992) *“Sobre el desarrollo de un nivel más complejo de entender funciones: en el estudio de la función es importante para llevar a los estudiantes a percibir y verbalizar los temas de cambio”* (p. 26)

Como segundo hallazgo cercano o relacionado con otras investigaciones, es el hecho de que cuando se pide cuantificar el cambio de una magnitud en relación a otra, se observa que los estudiantes hacen uso de dos estrategias, una aditiva o multiplicativa y otra asociada a la razón de cambio, por tanto, en el proceso de complejización del estudio de la covariación lineal, es decir, al avanzar en lo concerniente a esta categoría, los índices de acierto se empiezan a reducir notablemente, tal como lo ha manifestado Carlson (2003) en su investigación. Lo anteriormente expuesto se nota claramente al ser contrastado con el hallazgo hecho en la investigación de Gómez (2015), quien tiene como referente teórico los niveles de razonamiento propuestos por Carlson (2003)

A lo largo del trabajo se evidenció que los estudiantes presentaron dificultades para construir imágenes de una razón que cambia uniformemente y sustentan las características asociadas al N4 [nivel 4], y por supuesto en la construcción de imágenes que sustentan el cambio instantáneo que refiere a la AM5 [acción mental 5] que a su vez sustenta todos los niveles anteriores (p. 86)

Gran parte de estos logros obtenidos por los estudiantes y que fueron descritos en las conclusiones se deben a que como lo plantea Quintero (2011), la intervención de aula fue potente en el sentido que propuso:

Actividades que partan de situaciones concretas y que permitan al estudiante dar significado a los símbolos propios de la notación funcional; actividades que paseen al estudiante por los distintos lenguajes de representación de funciones; y actividades interactivas que simulen un experimento y que permitan que el estudiante observe las implicaciones o efectos de la alteración de alguno de sus elementos (p.70).

Como tercer punto de discusión nos referiremos a lo enunciado por Castaño (2014), pues de sus palabras interpretamos que: “el significado de algo es variable, depende del sujeto y, como toda actividad semiótica, guarda dependencia con la situación y el contexto”, lo cual se refleja a lo largo de los resultados, en detalle se podría ver como en la tabla 20, 22 y 24 cuando se hace el comparativo entre los tres sujetos estudiados a profundidad se nota que cada sujeto a pesar de haber estudiado los mismos fenómenos y estar en la misma clase, genera enunciaciones diferentes que implican dominios

distintos de cada subcategoría, y que ellos se relacionan directamente con la situaciones de las que se hablaba, ejemplo de ello es la observación que hacemos a las enunciaciones de la subcategoría C1-2 pues allí se ve claramente que los estudiantes acuden a cantidades de magnitud diferentes a las que se pregunta dado que ellas son cruciales para el funcionamiento del super shot (situación que se estaba abordando).

Por último, debemos señalar que en este trabajo no se abordó el registro analítico, por lo cual es imposible debatir o corroborar dificultades con las expresiones algebraicas que modelan las situaciones de covariación lineal, tal como lo plantea Garcia (2013).

En las diferentes actividades presentadas por los estudiantes se observa una dificultad en la asimilación del registro algebraico o simbólico, dado que gran parte de los educandos no pudieron llegar a las diferentes ecuaciones que pedían las actividades, a pesar de identificar las principales características de una función, es decir, podían reconocer los diferentes tipos y algunas de sus características, pero no tenían la capacidad de encontrar una expresión algebraica que tradujera el enunciado. (p. 96)

7.2. Alcances y limitaciones

A continuación, se comentarán algunos alcances de este trabajo a nivel investigativo y como de experiencia didáctica:

Primero: el objeto a investigar fue rastreado en un campo de situaciones para que las producciones de los estudiantes no fueran viciadas por la naturaleza de una sola situación y así permitir la identificación de invariantes en las prácticas de los sujetos.

Segundo: el diseño del campo de situaciones problema tuvo en cuenta las recomendaciones didácticas de las investigaciones que antecedieron la investigación, es decir, se trabajaron problemas en los que se analizaban movimientos, incluyo el trabajo con varios registros de representación y se crearon simulaciones dinámicas de las situaciones que potenciaban la visualización de la variación de las magnitudes por medio del Software Geogebra.

Tercero: se crearon categorías de análisis que permitieron estructurar diversos referentes teóricos para el diseño y análisis de las actividades en cual fuera posible complejizar el significado de la covariación lineal.

Cuarto: se describieron los significados que construyen los estudiantes de covariación lineal en un momento específico de la secuencia didáctica y se profundiza en esa descripción analizando las prácticas que hacen los sujetos estudiados a profundidad

Quinto: Se orientaron las actividades de la secuencia didáctica por medio de diferentes momentos que problematizaran a los estudiantes de forma individual y grupal e invitaban a realizar argumentaciones y debates sobre sus construcciones.

Finalmente comentaremos algunas limitaciones del trabajo a nivel investigativo y de experiencia didáctica a modo de proyección o invitación para futuras investigaciones:

Primero: En los resultados se comunicó al lector la imposibilidad que se tuvo para el diseño de preguntas que permitieran registrar información que de cuenta de la subcategoría C2- 3.

Segundo: dada la limitación de tiempo y el nivel de esta investigación, en la secuencia didáctica y en el análisis de los significados no se incluyó el trabajo con el registro analítico, las situaciones de covariación que no dependan del tiempo ni las covariaciones cuya razón de cambio fuera negativa. Por tal motivo se invita a los futuros investigadores a tener en cuenta estos aspectos para que sus resultados sean a un más potente.

Tercero: Para futuras investigaciones se invita a la comunidad académica no sólo a describir el significado que construyen sino a describir el proceso de construcción del

significado, es decir, analizar varios instantes del proceso y explicar los cambios que se dan en el transcurso de este.

Cuarto: como se aclaró en el marco teórico lo que entendimos como significado se basa en la propuesta teórica de Godino (1994), pero según Castaño (2014) el significado es aquello que orienta al sujeto en sus prácticas; por tanto, en próximas investigaciones se invita a la comunidad científica a ir más allá de la descripción de invariantes y prácticas prototípicas y tratar de describir y explicar eso que se puede suponer hace que el sujeto muestre una forma prototípica de actuación.

Referencias

- Azcárate, C., y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas*. Madrid: Síntesis.
- Barajas, C., Fulano, B., Ríos, W., Salazar, L., & Pinzón, A. (2016). *Función constante, lineal y afín*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento Covariacional Aplicado a la Modelación de Eventos Dinámicos: un Marco Conceptual y un Estudio. *Revista EMA*, 121-156.
- Castaño, J. (2014). *Conversión de representaciones semióticas de un registro numérico a otro y construcción de significados*. Barcelona: Universidad Autónoma De Barcelona.
- Duval, R. (2006). Un Tema Crucial en la Educación Matemática: La Habilidad para Cambiar el Registro de Representación. *La Gaceta*, 143-168.
- García, J. (2013). *El Concepto de Función Como una Integración de los Registro de Representación*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 325-355.
- Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas: *Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Universidad de Granada.
- Gómez, O. (2015). *Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Hernández Sampieri, R., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5° ed.). México: McGraw Hill.
- ICFES. (2017). *Matriz de referencia*. Recuperado el agosto de 2017, de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/articles-352712_matriz_m.pdf
- Kutschera, F. (1979). *Filosofía del lenguaje*. Madrid: Gredos.
- Larson, R., y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1. De una variable*. México: Mc Graw Hill.
- Martínez, J. (2013). *Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra*. Manizales: Universidad Nacional de Colombia.
- Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Relime*, 221-271.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares. Colombia*. Magisterio.
- MEN. (2006). Recuperado el 6 septiembre de 2016, de Estándares Básicos de competencias: https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

- MEN. (2017). Recuperado el 8 junio de 2017, de Informe colegio:
https://diae.mineducacion.gov.co/siempre_diae/documentos/2016/111001104329.pdf
- MEN. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Recuperado el diciembre de 2017, de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf
- MEN. (2017). *Informe por colegio Carlos Pizarro LeonGomez*. Recuperado el junio de 2017, de https://diae.mineducacion.gov.co/siempre_diae/documentos/111001104329.pdf
- Muñarriz, B. (1992). Metodología educativa I. *Xornadas de metodoloxía de investigación Educativa*. Universidade da Coruña, Servizo de publicacións. ISBN: 84-600-8006-4. <http://ruc.udc.es/dspace/bitstream/handle/2183/8533/CC-02art8ocr.pdf?sequence=1&isAllowed=y>, 101-116.
- Posada, F., y Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Antioquía.: Universidad de Antioquía.
- Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función, análisis epistemológico y didáctico*. . Granada: Universidad de Granada.
- Quintero, C. (2011). *Estrategias didácticas para el aprendizaje del concepto de función en el curso de álgebra y funciones de la Universidad Icesi*. Cali: Universidad Nacional.
- Quintero, J. (2013). *Objetos didácticos para el aprehendizaje del concepto de función en estudiantes de grado noveno*. Palmira: Universidad Nacional de Colombia.
- Sánchez, D. (2016). *Conceptualización de la función lineal y afín: Una experiencia de aula*. Bogotá: Universidad Distrital.
- Sierpiska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. *Mathematical Association of America*, 25-58.
- Thompson, P. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 229–274.
- Vasco, C. (2003). El pensamiento Variacional. la Modelación y las Nuevas tecnologías. *Revista EMA*, 101-116.
- Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics* 3,2, 31-41.
- Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.