TRANSITOS CONCEPTUALES EN LA LÓGICA DE BERTRAND RUSSELL DE 1900 A 1927

STEVE ALLAN RUSSELL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE FILOSOFÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN FILOSOFÍA
BOGOTÁ D.C.
2008

TRANSITOS CONCEPTUALES EN LA LÓGICA DE BERTRAND RUSSELL DE 1900 A 1927

STEVE ALLAN RUSSELL

Trabajo para optar por el titulo de magíster en Filosofía

DIRECTOR:

CARLOS EDUARDO VASCO URIBE

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE FILOSOFÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN FILOSOFÍA
BOGOTÁ D.C.
2008

AGRADECIMIENTO

Es mi más sincero deseo agradecer a mi director de tesis, el Padre Carlos Eduardo Vasco, quien con su enorme sabiduría ha sido muy paciente conmigo, desplegando toda su destreza como pedagogo a fin de familiarizarme con el tema; sus profundos y acertados análisis están consignados a lo largo de todo este trabajo de grado. No hay palabras para expresarle mi gratitud y mi más sincero reconocimiento por todos sus desinteresados y solidarios esfuerzos en la elaboración del presente texto.

CONTENIDO

Pag.

Introducción

En el centenario de la publicación de la obra de Bertrand Russell "Principles of Mathematics" (George Allen & Unwin, London, 1903), comencé a realizar una lectura sistemática de la mencionada obra, que se extendió también a "Principia Mathematica" (Cambridge University Press, 1910) obra escrita conjuntamente con Alfred North Whitehead y sus dos introducciones (1910 y 1927). Estas lecturas fueron motivadas por mi profundo interés hacia la filosofía de las matemáticas, cuyas nociones primitivas considero pueden ser examinadas y custodiadas por una disciplinada reflexión filosófica. Me propuse realizar un seguimiento de los desplazamientos conceptuales que se dan entre estas dos obras, donde se aprecia un nuevo giro de la lógica y el establecimiento del programa "logicista", que pretende derivar la matemática pura a partir de la lógica.

Debido a la enorme cantidad de temas de ambos textos, me concentré en primer lugar en analizar el contexto histórico que rodeó a ambas obras, tanto los autores que lo antecedieron como el escenario del cual surgió; estas reflexiones están contenidas en el capítulo de "Aproximación a la lógica matemática o logística". De los aspectos básicos principales, me concentré en escoger el de las nociones primitivas, donde se busca plantear las cinco ideas inderivables a partir de las cuales podemos construir la lógica simbólica, en un proyecto que pretende asemejarse a la obra los "Elementos" de Euclides, quien edificó la geometría a partir de cinco axiomas. En este segundo capítulo se analizan los cambios conceptuales que se dieron entre las dos obras a la luz de las distintas posiciones de hoy en día. En medio de tantos temas, el más inquietante me ha parecido la variable, que es la noción primitiva por excelencia donde se revela la naturaleza de las matemáticas; el estudio de la misma ha sido el tema de un tercer capítulo. Para cerrar el trabajo escojo el tema de la teoría de los tipos lógicos, donde la propuesta de Russell busca fundamentar sus posiciones y superar los distintos problemas conceptuales que se le plantean. De esta manera los anteriores temas se recogen en unas conclusiones finales donde se busca resaltar la posición del autor en los distintos aspectos que logró cobijar y en aquellos que, por condiciones propias de la época donde vivió, no tuvo la fortuna de poder precisar con mayor claridad.

Es importante tener en cuenta, que Russell buscaba la esencia de las cosas vista a través de los ojos de la lógica, una actitud profundamente influenciada por George Boole, quien en su libro "The laws of thought", trato de explicitar cómo funcionaba la mente, aspecto que el autor quiso continuar a nivel de un programa logicísta. Hoy comprendemos que tales pretensiones en la gran mayoría de los casos son infundadas, debido a que pueden construirse sinnúmero de modelos que sean representativos de las teorías que ellos albergan; esto nos conduce a una relativización del conocimiento y al abandono de sistemas totalitarios. No hay que olvidar que Isaac Newton también escribió unos "Principia", lo cual refleja las expectativas de Russell de querer escribir una obra que fuera todo un clásico. Analizaremos que tropiezos él encontró en el desarrollo de su proyecto, cómo también las tendencias del presente frente a muchas de sus posiciones

Capítulo 1

Aproximación a la lógica matemática o logística

La lógica matemática, también llamada lógica simbólica, fue un término dado en 1901 por Itelson, Lalande y Louis Couturat (1868-1914); éste último comenzó una correspondencia con Russell en 1897 a raíz de la publicación de sus dos obras: "An essay in the foundations of geometry" (1898) y de "A critical exposition of the philosophy of Leibniz" (1900). Las características analizadas por los anteriores autores pueden resumirse en los siguientes aspectos:

1. Es una forma de lógica que tiene incluida en sí misma un cálculo, a partir del cual se establece una metodología, que viene a definir las reglas que gobiernan a las distintas operaciones y a la forma adoptada por los signos.
2. A diferencia de las demás formas de lógica, que parten de un método abstractivo, donde las proposiciones lógicas se obtienen del lenguaje natural mediante la abstracción, los lógicos matemáticos proceden a la manera inversa. Primero elaboran un cuerpo teórico puramente formal y luego proceden a encontrarle el sentido dentro del lenguaje ordinario.
3. Las leyes que gobiernan esta lógica se proponen en un lenguaje abstracto, dotado de los mismos signos de los cuales se sirve la matemática. Se resalta cómo las constantes también se escriben recurriendo a esta simbología.
4. El uso de un lenguaje objeto para formular las distintas proposiciones y un metalenguaje para referirse a ellas.

La lógica matemática actual puede dividirse en su desarrollo y evolución en cuatro períodos:

1. Un período previo que surge con Lull, Hobbes y Leibniz y se extiende hasta 1847, época dentro de la cual surge la necesidad de conceptuar la lógica dentro de las matemáticas y de buscar simbolismos para aquélla.
2. La etapa conocida como booleana, que se extiende desde "Laws of Thought" a las "Vorlesungen" de Schröder (vol. 1, 1895), donde se busca tratar la lógica misma desde una conceptualización matemática, pasando por John Venn, Lewis Caroll y Hugh McColl.
3. La etapa que surge con Frege a través de su "Begriffsschrift" (1879) hasta los "Principles of Mathematics" de Russell (1900), período durante el cual tenemos a Peirce y Peano, quienes simultáneamente con Frege, plantean un nuevo objetivo frente a la lógica matemática. Se desarrollan importantes conceptos, como también nuevas metodologías.
4. La etapa posterior que se da a partir de "Principia Mathematica" (PM) de Russell y Whitehead, donde vamos a considerar las dos ediciones la de 1910 y la de 1927. Esta etapa a nivel de otros autores puede subdividirse en dos: la que va de 1920 a 1930, caracterizada por la aparición de la Metalógica, que va de Zermelo a la finitista en Hilbert, a la no finitista en Löwenheim y

Skolem, y la segunda etapa que se da a partir de 1930, que brinda una formalización sistematizada de la Metalógica en Tarski y la sintaxis de Carnap. Al igual que los planteamientos que buscan integrar la Lógica con la Metalógica, en Gödel y en la semántica de Tarski; en donde también se vinculan las lógicas naturales de Gentzen y Jaśkowski (1934). Al lado de este avance de la metalógica se pueden mencionar los nuevos sistemas lógicos planteados en un lenguaje objeto, como los de Lewis (1918), las lógicas polivalentes de Post y Łukasiewicz (1920-1921), la lógica intuicionista de Heyting (1930), y la lógica combinatoria de Schönfinkel (1924), Curry (1930), Kleene (1934), Rosser (1935) y Church (1936-1941).

Hemos de ver cómo Russell desarrolló gran parte de su obra a partir del formulario de Peano, estando muy cercano al formalismo de Hilbert pero a su vez muy alejado filosóficamente. A diferencia de Russell, que buscaba emprender con la lógica un trabajo parecido al que hizo Euclides con la geometría, captando la idea misma de la lógica en unos pocos axiomas que permitieran deducir toda la matemática a partir de los mismos, Hilbert se inclinaba más hacia una metamatemática. Una de las genialidades tanto de Peano como de Russell fue tomar unos signos que se pudieran colocar con facilidad en los marcos de los logotipos de impresión, aspecto que Frege no tuvo en cuenta y que dificultó la divulgación de su trabajo.

A continuación vamos a mirar más de cerca el desarrollo de las tres primeras etapas anteriormente mencionadas, pues el objetivo del presente trabajo está entre los períodos 3 y 4, cuya figura central es Bertrand Russell.

1.1 Primera etapa

La lógica matemática parece construirse sobre dos propuestas diferentes pero complementarias: la utilización del cálculo y la búsqueda de demostraciones exactas. Además, tiene como cometido investigar los fundamentos y demostraciones más rigurosas con métodos que buscan igualar el rigor de los matemáticos puros. Veamos a continuación los aportes más importantes de algunos autores:

1.1.1 Raimundo Lull (o Lulio)

La idea de un procedimiento que facilitara la deducción se encuentra entre los árabes y los escolásticos; sin embargo, se trataba de una metodología más destinada a establecer los procedimientos más correctos para manejar el silogismo, siendo el primero en albergar la posibilidad de un procedimiento general Raimundo Lulio (1235- 1315), quien creyó encontrar un método que permitía sacar toda una serie de conclusiones mediante un sistema de anillos concéntricos, propiamente inspirados en el "Ars Magna". El diagrama en cuestión tenía nueve divisiones como etapas que debe de recorrer todo iniciado y en especial las combinaciones que se pueden dar entre cada una de ellas, donde algunas son permitidas y otras no. En ellas también se evocaban las virtudes que hay que tener, las cuales estaban identificadas con cada escalón a ser recorrido. Estos modelos fascinaban a los antiguos renacentistas,

debido a que en un dibujo se buscaba plasmar todos los conocimientos de un tema, y en muchos casos se los ilustraba con los personajes famosos desde la antigua Grecia hasta la época aludida.

1.1.2 Thomas Hobbes

Tres siglos más tarde encontramos a Thomas Hobbes (1588-1679), quien recoge la idea de Lull y la expone de una manera más rigurosa. Su pensamiento filosófico se puede enmarcar dentro de un materialismo mecanicista, donde el hombre está regido por las leyes del universo. Él busca la construcción de una filosofía social fundamentada en las ciencias materialistas y en la geometría. En su método de corte racionalista, se parte de la hipótesis de que las partes de un todo han de descomponerse y ser capaces de explicar el conjunto en su totalidad.

1.1.3 Gottfried Leibniz

Habiendo leído a Lull y también a Hobbes, Leibniz (1646-1716) nos ofrece mucho más que los anteriores; busca la fundamentación universal de todas las ciencias, pensando también en un método combinatorio puro. Éste ha de adoptar la forma de un cálculo, hecho que lleva a que la lógica se presente como una matemática generalizada. Este método recurría a un "hilo de Ariadna", que no es más que un instrumento que nos guíe, al igual que las líneas de la geometría. También habla de una "mathesis universalis" que no sólo trata de la cantidad, sino de la igualdad y la desigualdad, de la razón y de la proporción matemáticas, donde el álgebra es su parte más general. La "mathesis universalis" está constituida de dos partes: el "ars combinatoria" que se refiere a la diversidad de las cosas y sus formas o cualidades en general, en cuanto son objeto de deducción exacta, y la "logística" o álgebra relativa a la cantidad en general, buscando una especie de alfabeto del pensamiento, que se sea capaz de asignar a cada idea un símbolo y obtener una solución de todos los problemas mediante la combinación de estos símbolos. Todo esto está enmarcado dentro de una teoría rigurosamente analítica de todas las sentencias necesarias y de la deducción como combinación de elementos. Esto condujo a la idea de un lenguaje artificial, que en contraste con los lenguajes ordinarios, estuviera libre de ambigüedades; esto hace que Leibniz sea el fundador de la lógica simbólica. También emplea el cálculo para las deducciones, adicionalmente a su empleo como herramienta propiamente matemática. La "mathesis universalis" se halla delimitada con precisión del resto del álgebra y se la denomina aquí "logística", recurriendo al empleo de símbolos para todas sus operaciones formales. Se busca llegar a unas proposiciones plenas de sentido a partir de las cuales seamos capaces de abstraer unas leyes formales, siendo el primer lugar donde se expone de una manera clara el principio del procedimiento formal.

1.2 Segunda etapa

1.2.1 George Boole

George Boole (1815-1864) ocupa un lugar preponderante en la historia de la lógica matemática, al posibilitar que su cálculo sea susceptible de una doble interpretación tanto a nivel de una lógica de clases como de una lógica sentencial. Boole fue el primero desde Aristóteles que se puso a pensar en poner letras para las afirmaciones, encontrando que el simbolismo del álgebra funcionaba también para las leyes del pensamiento; poniéndole la misma notación que para los números. A lo verdadero le pone el 1 y a lo falso el 0, lo cual funciona muy bien para deducir la ley de no contradicción. El desarrollo de este cálculo se apoya en los aportes realizados por Augusto De Morgan para ampliar la silogística aristotélica, a partir del uso de letras y símbolos, como son los paréntesis y los puntos para poder escribir las distintas sentencias. En Boole encontramos un sistema completo, que parte de los símbolos usados en la aritmética y el álgebra. Es de resaltar el uso de métodos lógicos, como son las reglas de la separación y de la substitución, que sin que el autor fuera consciente de ello, las usa de manera intuitiva. La naturaleza algebraica de su sistema se halla limitada a los números 0 y 1. El uso de toda una simbología que todavía es algo complicada y que le falta ser depurada, lleva a que se presenten una serie de dificultades cuando el autor concibe, por ejemplo, la disyunción como exclusiva y la nota recurriendo al signo de la suma, como lo es $x + y$; de igual manera, la inclusión está representada por el signo de la igualdad =, aunque esto parece deberse a problemas tipográficos para representar el símbolo "≤".

Veamos el desarrollo de algunos de estos conceptos presentados en su "Mathematical analysis of Logic" en lo que sigue a continuación:

En la obra de Boole, todas las operaciones del lenguaje, como instrumento del raciocinio (reasoning), pueden realizarse con la ayuda de un sistema de letras y otros símbolos como x, y, que representan objetos (subjects) de nuestros conceptos (conceptions). Los signos, como +, -, están dados para las operaciones mentales por las que se componen o analizan los conceptos de las cosas. Tenemos también el signo de identidad = . El empleo de estos signos de la lógica se halla sometido a determinadas leyes, que en parte coinciden y en parte difieren de los símbolos del álgebra. El símbolo 1, o la unidad, se empleará para representar el universo, abarcado por todas las clases de objetos pensables. Él consideraba a los miembros individuales x, y, z no como miembros independientes sino como parte de la selección de un universo, de una clase o como un predicado que selecciona la clase, donde para cada clase del universo hay un predicado que lo cumplen tan sólo todos los que están en esa clase; esto es lo que él llama extensional. Pero también puede ser

que cada predicado o concepto que satisface o no los elementos del universo, produce inmediatamente la clase de los que satisfacen ese concepto; en este sentido hablamos de intensional. Esta ambigüedad es la que explota muy bien Boole, diciendo que es un acto mental de selección y lo representa con las variables x, y, z; el cual puede interpretarse como seleccionar un predicado o una clase. Por consiguiente frente a los predicados y las proposiciones, sean atómicas o simples, los predicados y las clases, no se sabe lo que él está haciendo; él está en la lógica y en las operaciones del pensamiento. Esto explica cómo él puede sacar sus leyes pensando, escogiendo y separando mentalmente, donde las distintas propiedades, sea por ejemplo la distributiva, son consideradas leyes del pensamiento.

El resultado de un acto de selección es independiente de la agrupación o clasificación del objeto, ley que podemos expresarla matemáticamente por medio de la siguiente ecuación: $x(u + v)=xu + xv$, en la que $u + v$ representa el objeto (subject) sin dividir, y u, v las partes de que consta. Es indiferente el orden de sucesión en que se realicen dos actos selectivos sucesivos, donde la expresión simbólica de esta ley es: $xy = yx$. El resultado de un acto selectivo dado cuando se realiza dos veces o el número sucesivo de veces que se quiera, es el mismo que el del acto realizado una sola vez: $xx = x$, $x^2 = x$, y suponiendo que la misma operación se realiza n veces, tenemos $x^n = x$. Para la negación, Boole escribía $1-x$.

El axioma de los metafísicos denominado principio de no contradicción, que afirma que es imposible para cualquier ente poseer una cualidad y al mismo tiempo no poseerla, es una ley fundamental del pensamiento, cuya expresión es $x(1-x) = 0$. Esta expresión se puede deducir de la ley anterior de que la selección repetida del mismo conjunto o la misma proposición es equivalente a la primera selección. Lo que pasa con esto es que en el cálculo de Boole, esta ley de no contradicción ya no es una idea primitiva, sino derivada de $x^2 = x$. Esta ecuación puede reescribirse:
$x^2 - x = 0$, $x - x^2 = 0$, $x(1 - x) = 0$, que es el principio de no contradicción. Es una deducción muy elegante de la ley de la no contradicción, que en la notación actual se escribiría "$x \wedge \neg x$ siempre es falso". La ley de las potencias $x^n = x$ molestaba a los matemáticos que decían que no se cumplía, pero para Boole sí se cumplía para el 0 y el 1.

Tenemos las siguientes condiciones: la conjunción de x con y, xy, es verdadera cuando x es verdadera y y también. La conjunción de x con no-y, $x(1-y)$, es también verdadera sólo cuando x es verdadera y y falsa. La conjunción de no-x con y, $(1-x)y$, es verdadera sólo cuando x es falsa y y es verdadera, y $(1-x)(1-y)$, es verdadera sólo cuando x es falsa y y también. Tendríamos además el paralelo para la suma:
$x + y$, $x + (1- y)$, $(1- x) + y$, $(1-x) + (1-y)$.

Estas leyes del pensamiento puedan ahora comprobarse fácilmente en el cálculo algebraico de Boole, pues basta sustituir los valores 0,1 en x,y para ver si el resultado es 1.

1.2.2 Hugh McColl

En Hugh McColl (1819-1885) podemos apreciar cómo la lógica sentencial logra finalmente gozar de una independencia frente al cálculo clásico al poder constituir su propio sistema con una simbología afín a ella. Sea el caso de las siguientes definiciones:

a. **Suponiendo que A, B, C, etc., designan sentencias, la ecuación A = 1, afirma que la sentencia A es verdadera. La ecuación A = 0, afirma que la sentencia A es falsa; y la ecuación A = B, afirma que A y B son sentencias equivalentes.**
b. **El símbolo A x B x C, o ABC designa una sentencia compuesta; las sentencias A, B, C pueden llamarse sus factores. La ecuación ABC = 1 afirma que las tres sentencias son verdaderas, la ecuación ABC = 0 afirma que las tres sentencias no son verdaderas, es decir, que al menos una de las tres es falsa.**
c. **El símbolo A + B + C designa una sentencia indeterminada; las sentencias A, B, C pueden llamarse sus términos. La ecuación A + B + C = 0 afirma que las tres sentencias son falsas, la ecuación A + B + C = 1 afirma que las tres sentencias no son falsas, es decir, que al menos una es verdadera.**
d. **El símbolo A’ es la negación de la sentencia A. Las dos sentencias A y A’ se hallan en relación tal que cumplen con las dos ecuaciones: A + A’ = 1, AA’ = 0, es decir, que una de las dos ha de ser verdadera y la otra falsa. En estas dos ecuaciones podemos apreciar que no se necesita la “y”, porque la “y” es como la multiplicación lógica. Notamos cómo ni Boole ni McColl necesitaron el símbolo de la multiplicación.**
e. **El símbolo de la razón A : B , que se puede llamar implicación, afirma que la sentencia A implica a B; o que siempre que A es verdadera, lo es también B. Se entiende que la implicación A : B es equivalente a la ecuación A = AB, pues siempre se cumple cuando A es falsa (A=0), pero si A es verdadera (A=1), sólo se cumple si B es también verdadera (B=1). Se cumple también cuando ambas son verdaderas, la única que no se cumple es cuando A=1 y B=0.**

Tenemos cómo McColl está hablando de un cálculo sentencial, aunque use el simbolismo de Boole, excepto que para la negación usa el complemento. Si uno dice por ejemplo: A + B = 1, B es la negación de A, entonces pasamos B al otro lado y tenemos A = 1 – B, no siendo muy diferente del simbolismo usado por Boole. Hemos de recordar que todavía existe el problema en muchos libros de lógica matemática, que confunden las operaciones con las relaciones; sea el caso si A:B fuera una operación como A+B o A·B, el resultado sería una proposición compuesta de cuya verdad no se puede decir nada. Pero si es una relación, entonces sí se puede decir que A está relacionado con B en esta forma implicativa si y sólo si se cumple la

ecuación A = AB. Pues siempre se cumple cuando A es falso, A = A·B para todo B; pero si A es verdadero es igual a 1 y la ecuación sólo se cumple si B es también verdadero, luego coincide con la tabla de verdad de la implicación filoniana. Se puede apreciar cómo para McColl no es muy clara la distinción entre operación y relación, confusión que también compartió con Russell; sea el caso en A:B que es una ecuación, pero en A+B, es más una operación y no una ecuación.

1.3 Tercera etapa

1.3.1 Gottlob Frege

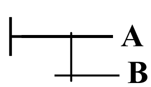
En el "Begriffsschrift" de 1879 introduce Gottlob Frege (1848-1925) una serie de nociones completamente desconocidas para sus predecesores, como también una formulación mas clara de las mismas. Veamos más de cerca una exposición de la semántica de su propuesta gráfica:

Un juicio que se enuncia como verdadero se expresará siempre con ayuda del signo ├ , que se coloca a la izquierda del signo o conjunto de signos que declaran el contenido del juicio. Por ejemplo, si A es el contenido del juicio, su afirmación es ├ A. Si se suprime el pequeño tramo vertical en el extremo izquierdo de la horizontal, el juicio se convierte en una mera combinación representativa, de cuya verdad el autor no declara si está seguro de ella o no. La negación del mismo juicio ├ A se representa con una raya vertical debajo del segmento horizontal, ├┬─ A

También el autor se detiene a tratar la implicación filoniana (sin que sepamos si haya estado al tanto de la existencia de la misma). Veamos:
Si A y B representan contenidos juzgables, se dan las cuatro posibilidades siguientes:

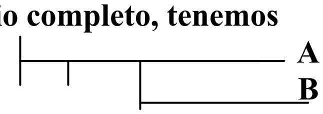
a. **Se afirma A y se afirma B;**
b. **Se afirma A y se niega B;**
c. **Se niega A y se afirma B;**
d. **Se niega A y se niega B.**

Frege propone el símbolo



Éste representa el juicio en el que no se realiza la tercera de estas posibilidades, sino una de las otras tres.

Si se niega este juicio completo, tenemos



Se afirma en consecuencia que se realiza la tercera posibilidad, es decir, que se niega A y se afirma B.

Se ha de resaltar que Frege llama a A "consecuente", lo que está arriba, y a B "antecedente", lo que está colocado debajo; pues en griego, el par "hypothesis-thesis" insinúa por su etimología que la hipótesis está debajo de la tesis. La combinación simbólica anterior representa gráficamente que B se ha puesto debajo de A, o sea que B es "hipó-tesis" para A. Puede leerse "A supuesto B". En el simbolismo actual, esto es $A \leftarrow B$, $A \subset B$, $B \rightarrow A$, $B \supset A$. El esquema excluye únicamente el caso en que el antecedente B es verdadero y el consecuente A es falso. En los demás casos, el juicio representado por el esquema es verdadero, que es la considerada previamente por Filón.

1.3.2 Charles Peirce

En un trabajo realizado en 1883 e introducido como un apéndice a los "John Hopkins Studies of Logic", Charles Sanders Peirce (1839-1914) introdujo el uso de los subíndices acompañando a sus signos relacionales con el fin de indicar los términos de la relación y el orden de los mismos. Sea el caso a_{ij}, donde una persona i puede estar relacionada en la forma a con una persona j; en caso que deseemos hablar acerca de una relación de la persona consigo misma, lo notaremos como a_{ii}, hecho que corresponde al uso autorreflexivo, como el autor solía llamarlo. Asimismo, introdujo el uso de letras mayúsculas del alfabeto griego tales como Σ, Π, las cuales correspondían a los cuantificadores "alguno" y "todo", que buscan sugerir la adición y la multiplicación lógicas de todos los objetos bajo el dominio de un universo, siempre y cuando éste sea enumerable. Él mismo consideró que todos estos temas podrían quedar incluidos en una llamada "álgebra general de la lógica". Este uso de los subíndices es muy útil para la elaboración de una teoría general de las relaciones. Además, hay que resaltar cómo recomendó el uso de los cuantificadores al comienzo de una proposición, lo que favorece el proceso deductivo. Notó que no es indiferente que los cuantificadores existenciales precedan a los universales o viceversa. La idea de Peirce de que el producto infinito y las series infinitas, que se conocían bien en el siglo XIX, eran una buena manera de reflejar los cuantificadores es muy fina, como lo veremos enseguida.

Se dio cuenta de que en el análisis del siglo XIX se presentaba con mucha frecuencia lo siguiente: se dice que para cualquier ε existe un δ, donde uno no puede cambiar el orden y decir, que existe un δ para cualquier ε. Si se tiene una distancia pequeña llamada ε, se puede encontrar otra distancia pequeña δ, tal que siempre que el argumento de la función esté en ese intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, que es el de los posibles argumentos x situados alrededor del punto dado, a, se puede garantizar que el valor $f(x)$ está en el intervalo $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$, que es el de los posibles valores $f(x)$ situados alrededor del valor inicial dado, $f(a)$, no pudiéndose cambiar el orden, hecho que sólo fue claro hacia finales del siglo XIX, a raíz de los cambios en el orden de los

cuantificadores descubierto por los ingleses; no obstante, tal hecho fue ya notado por los escolásticos, quienes intentaban utilizar sólo un cuantificador en referencia a la frase que éste afectaba, evitando confundir que los mismos cuantificadores afectaran a otras frases; esto reduce la potencia del lenguaje pero evita la ambigüedad del mismo. También se considera a Peirce como un predecesor de la actual teoría de conjuntos, aunque es posterior a Cantor, cuya obra desconocía.

Hemos de recordar que Peirce estuvo muy aislado y que no estaba al tanto de lo que sucedía en otros países, hecho que lo llevó a volver a inventar el álgebra de la lógica. Hay que destacar cómo, para él, el cuantificador universal es un producto infinito de proposiciones con una "y" ($\wedge$). En esa época en los Estados Unidos se conocía el producto Π a través de los productos infinitos en variable compleja; de igual manera se conocía la sumatoria de las series. Hemos de recordar que los objetos son para él proposiciones con valores 0 y 1. La genialidad de Peirce fue introducir la sumatoria (Σ) para afirmar que la suma de dos o más unos va seguir siendo 1 aunque le sigamos agregando otros unos o cualquier número de ceros. Basta con que con una suma de ceros y unos haya al menos un uno para que la suma lógica sea uno. Este es el cálculo apropiado para el cuantificador existencial. Pero frente al producto acontecía otra cosa, dado que bastaba con que uno de los términos fuera 0 para que por consiguiente todo el producto quedara en 0; en consecuencia, cuando el producto (Π) da 1, es porque todos los factores son 1. Este es el cálculo apropiado para el cuantificador universal.

También hemos de recordar que él habla de una "álgebra general de la lógica" para distinguir que existen diversas álgebras, como lo serían: el álgebra lineal de los vectores, el álgebra de los reales, el álgebra de las proposiciones cuyos elementos son el cero y el uno, y el álgebra de conjuntos.

1.3.3 Giuseppe Peano

El simbolismo de Giuseppe Peano (1839-1914), recurre a las letras a, b, c, ... x , y,...., para designar cualquier ente indeterminado. Los entes determinados los designaremos con las letras p, k, n, ...Donde las primeras letras representan los parámetros, las finales a las variables y las intermedias las constantes.
Hay que recordar la ventaja que representó para los tipógrafos de la época poder armar los distintos tipos en las regletas de impresión, aspecto que facilitó la divulgación del material; él volteaba las letras o les cambiaba de dirección a fin de que se pudieran utilizar los distintos tipos disponibles que constituyen los moldes de los textos de una imprenta. En la mayoría de los casos los signos los escribiremos en una línea. Para que se vea el orden en que se deben unir, emplearemos el paréntesis como en álgebra, o puntos . : ∴ :: , etc.

Si una fórmula se halla dividida por puntos, quiere decir que en primer lugar hay que reunir los signos que no están separados por ningún punto, luego los que lo están (sólo) por un punto, después los que por dos, etc.

Sean a, b, c, d, ..., unos signos cualquiera. Tendremos que ab.cd significa (ab) (cd); y ab.cd : ef.gh ∴ k, significa (((ab)(cd)) ((ef)(gh))) k. Cuando hay fórmulas con puntuación distinta, pero con el mismo sentido, se pueden omitir los puntos; lo mismo que cuando es sólo una fórmula la que tiene un sentido, es esa precisamente la que nosotros queremos escribir.

Sentencias

Con el signo P se designa las proposiciones o sentencias

El signo $\cap$ se lee y (et). Sean a y b dos sentencias; a $\cap$ b será la afirmación simultánea de las sentencias a y b. De ordinario, para mayor brevedad, en lugar de a $\cap$ b solemos escribir ab.

El signo – se lee no. Sea a un P: –a es la negación de la sentencia a.

El signo $\cup$ se lee o (vel). Sean a y b dos sentencias. Tendremos que a $\cup$ b es lo mismo que – : – a. –b.

El signo V significa verdadero, e.d., identidad.

El signo Λ significa falso, e.d. absurdo.

El signo C significa es una consecuencia; así bCa se lee: b es una consecuencia de la sentencia a. Pero este signo no lo usamos.

El signo Ↄ significa se deduce (deducitur): así, a Ↄ b significa lo mismo que bCa.

Tenemos el signo C que significa “es una consecuencia de”, así bCa se lee “b es una consecuencia de la sentencia a”; asimismo el signo a $\bar{C}$ b significa “ab... deducitur ...” o “de... se deduce...”, significa lo mismo que bCa; sea el caso “ab a deducitur b”, que es lo mismo que decir “de a se deduce b”. En Russell el símbolo usado es la herradura $\supset$, que es una simplificación de esta C invertida.

Hemos de recordar que existen dos “o”, una es la “o exclusiva o dura”, que en la expresión aut p autq, se escribiría p $\underline{v}$ q. De igual manera tenemos una “o inclusiva o suave”; p vel q, se escribiría p v q. Hay que destacar cómo en la época de Russell tenemos la “logística”, palabra que aunque hoy en día se le asocia a nociones como planear, organizar, empezar o buscar, fue usada durante casi todo un siglo para expresar lo que hoy en día se llama la lógica matemática simbólica. Podemos decir que una teoría es verdadera en el modelo si éste permite interpretar las constantes, operadores y predicados de manera que los axiomas se verifiquen en el modelo y, en este sentido, el modelo cumple con los axiomas y los axiomas se satisfacen en el modelo. Lo fundamental de todo sistema deductivo es que a través de las distintas manipulaciones formales que hagamos, no se pierda la verdad, a lo cual se reduce la validez. Aquí la noción de validez hace referencia a la solidez del sistema, en donde todos sus axiomas son tautologías y todas las reglas conservan la verdad. La completez exige que la deducción capture todas las verdades del sistema y que sea susceptible de ser manejada y expresada a través de un cálculo proposicional o de predicados puramente formal (sintáctico). Que haya una deducción formal para toda verdad. La dificultad está entre la semántica y la sintaxis; donde para la primera lo importante es que en todos los pasos que se den, la validez del antecedente no conlleve la pérdida de la verdad. Mientras en el segundo caso, una

buena sintaxis facilita y permite hacer unas buenas deducciones formales; algo que es más mecánico.

Hemos de recordar que los axiomas de Peano todavía no permiten probar todas las verdades de la aritmética. La genialidad de Gödel estuvo precisamente en reconocer estos límites y darse cuenta de las posibilidades de montar una formula aritmética a partir de las reglas disponibles y cómo su verdad se haya circunscrita a la axiomatización que ellas brindan. Todo esto lleva a que se rompa el programa hilbertiano de la existencia de una axiomatización finita para la aritmética y en general para todas las matemáticas.

Hay que recordar que tanto la lógica simbólica como el álgebra abstracta tuvieron amplio rechazo de muchos matemáticos de la época; la primera se le consideraba como una matematización de la lógica de los filósofos, que a veces funcionaba como un álgebra sintáctica y que su utilidad muchas veces era encontrar paradojas que conducían a callejones sin salida. Y en cuanto al rechazo del álgebra abstracta estaba más en relación con la desconfianza en los lenguajes demasiado generales y abstractos, que eran considerados inútiles para hacer avanzar las matemáticas. En todo esto se esconde en el fondo cierto desprecio hacia la reflexión filosófica que practica muchas veces la filosofía de las matemáticas, sin aparentes resultados en la solución de problemas específicos de las matemáticas.

1.4 Apéndice

En relación al trabajo realizado por el profesor Carlo Federici en la Universidad Nacional, se tomó en cuenta el hecho de que hay 10 conectivas binarias que dependen de los dos operadores, dos de ellas están ligadas con la "y", esto se suele simbolizar "$a \wedge b$", y con la "o inclusiva o suave" (vel), "$a \vee b$". La implicación con una sola flecha podría ser negada como también lo serían la "y" como la "o". Retornando a considerar más de cerca las distintas conectivas que se usa en la lógica simbólica, recordemos la manera como Federici las exponía: la "y" era un punto, y su negación era un punto rayado; la "o" se va la otro extremo al notar la negación compuesta (ni...ni) con la "v", significando que p es falsa y q es falsa, por lo tanto la "o" es la negación de esa. Hay que agregar que Federici tenía dos notaciones, la una tomada de la clásica y la otra desarrollada en la universidad de Padova cuando era estudiante. En relación a la primera que vamos a exponer a continuación hay que notar, que simplemente se tachaban las conectivas fundamentales a fin de evitar la introducción de otras nuevas; y también para explicar la barra de Sheffer o la flecha de Peirce.

En relación a las diez conectivas binarias posibles, tenemos:

$\wedge$	$\not\wedge$	=	$\vert$	$\bullet$	
$\vee$	$\not\vee$	=	$\downarrow$		
$\rightarrow$	$\not\rightarrow$				
$\leftarrow$	$\not\leftarrow$				
$\leftrightarrow$	$\not\leftrightarrow$	=	$\underline{\vee}$	O	

a $\not\wedge$ b equivale a a$\vert$b, en donde “$\vert$” es la barra de Sheffer, asociada a la incompatibilidad.
a $\not\vee$ b equivale a a$\downarrow$b, en donde “$\downarrow$” es la flecha de Peirce, asociada a la negación conjunta “ni...ni”.
Federici leía acertadamente:
“a $\not\rightarrow$ b” como “sí...pero no” y “a $\not\leftarrow$ b” como “no...pero sí”. Para la “o exclusiva o dura” (aut), tendríamos “a $\underline{\vee}$ b”. El “si y solo si”, “a ≡b”

“a O b”. Se puede mostrar que a$\not\equiv$b equivale a a $\underline{\vee}$ b.

Las diez conectivas presentadas por Federici son:

p $\bullet$ q	p y q	p q	no (p y q)
p q	p o q (vel)	p q	ni p ni q (ni...ni)
p q	si p, q	p q	p y no q (sí... pero no)
p q	p si q	p q	no p y q (no…pero sí)
p O q	p sí y sólo si q	p q	o p o q (aut)

Tenemos 10 conectivas, pero si tenemos en cuenta que si afirmamos y negamos “a aunque b” y “ b aunque a” a nivel de los valores de verdad y falsedad, tendríamos 14 combinaciones. Para las posibles tablas de verdad nos daría 2^4 o sea 16 posibilidades de ligar dos proposiciones; de éstas tenemos que dos no dependen de los valores de verdad de ninguna de las dos o son funciones constantes, cuatro dependen de una sola variable y diez dependen de ambas variables. Usualmente tenemos cinco símbolos aceptados como lo son: la “y”, la “o”, el “si .... entonces”, el “si” intermedio, y el “si y solo si”. Se puede identificarlas fácilmente al compararlas con el trabajo de Frege.

Aquí, entonces, habría las “conectivas” que no dependen del valor de ninguna de las dos variables. Estas dos primeras serían como funciones constantes: la función constante verdadera y la función constante falsa. Las cuatro siguientes serían afirmar p independientemente de q, negar p independientemente de q, afirmar q independientemente de p, y afirmar q. Estas funciones serían de un conjunto de

cuatro elementos: $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ con imágenes en el conjunto conformado por el cero y el uno $\{0, 1\}$, aspecto que obedece al planteamiento expuesto por Russell. Hoy en día se puede ver que son todas funciones binarias
f: $\{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$con diez y seis posibilidades de ser combinarse.

Capítulo 2

Las nociones primitivas en Principles of Mathematics

Bertrand Russell en PoM (cap. 1) presenta una definición de la matemática pura fundamentada en la noción de clase; ésta se aplica a todas las proposiciones de la forma "p implica q", donde tanto p como q pueden contener una o mas variables; de igual manera, tanto p como q pueden albergar constantes lógicas. Éstas son nociones definidas alrededor de los siguientes términos: la implicación, la relación de un término frente a la clase de la cual él es un miembro, la noción "tal que" ("such that"), la noción de relación, y otras nociones que pueden estar involucradas dentro de la noción general afín a las proposiciones anteriores. Adicionalmente, menciona el autor que la matemática usa una noción que no se puede situar a nivel de las proposiciones consideradas: ésta es la noción de verdad. No tanto a lo que es la verdad como hecho ontológico. A este respecto, hay que diferenciar el símbolo de la idea, donde más bien la idea primitiva de la negación hace referencia al símbolo de negación. Hay que recordar cómo toma el autor la disyunción como una adición lógica, donde la "o" se establece en la siguiente expresión: "p o q" , que es equivalente a decir, "p implica q, implica q". Podemos apreciar cómo la "o", con la negación, son las ideas fundamentales que transforman el valor de verdad de las proposiciones que afectan.

Tenemos que la lógica se extiende a aquellas expresiones donde se toma una fórmula y se le aplica un operador que la transforma en una clase de elementos que cumplen con unas propiedades específicas, sea el caso: La formula ϕx produce la clase $\phi\hat{X} = \{x \mid \phi x\}$. Esta clase puede ser plural, unitaria o vacía. Cuando tenemos una clase de un solo elemento, ésta está restringida al conjunto universal que la contiene, sea el caso: $\phi\hat{X}\,|_{u} = \{x \in U \mid \phi x\}$, cuando en U hay sólo un elemento que satisface ϕx. La restricción es más bien a la función proposicional y al conjunto de satisfactores. El hecho de que tenga un solo elemento se refiere a que la fórmula en ese universo sólo tiene un satisfactor. En el ejemplo, $\phi(x)$ es la función proposicional donde x es par y primo en el universo de los números de contar. Esa es una proposición que sólo tiene un satisfactor que es el 2. Por lo tanto se define la clase a la cuál sólo pertenece el 2, pero si uno amplia el universo a los enteros, el –2 es también par y primo; entonces ya no sería una clase unitaria. Por esto, que la fórmula determine un único satisfactor se parece a la idea de funcionalidad, que significa que sólo hay un satisfactor y para cualquier argumento x que uno sustituya.

Necesitamos que sea una clase unitaria para que podamos extraer un solo elemento. Aquí nos encontramos con el problema del artículo definido e indefinido. En toda lengua que tenga artículos está bien usar el artículo definido: "el número par y primo"; se supone que sólo hay uno; pero si uno utiliza el artículo indefinido y dice "un par y primo", es porque ya supone que había en ese universo al menos dos pares y primos (2, –2). Aquí el artículo definido funciona bien para sacar un

elemento de una clase, si la clase es unitaria. Entonces la pregunta es: ¿y si la clase tiene más elementos? ¿qué extrae usted? Y si no tiene ningún elemento, ¿qué extrae? Tendría que haber una función (tema que le preocupó mucho a Hilbert) en caso de que uno quiera definir un operador que pase de conjuntos a elementos, pero parecería que sólo funciona en el caso de que la clase sea unitaria. En el otro caso, le extrae un elemento indeterminado; por eso se llama artículo indefinido. Sea el caso; un colombiano, que es un elemento de la clase de los colombianos, pero no dice cuál. Algo que es más complejo de obtener es poder partir de una clase y llegar a un objeto único. Ahora lo que nos ocupa son objetos singulares, denominados individuales k, que constituyen conjuntos de un único elemento:

$k \rightarrow \{k\} \rightarrow k$

Pero si no hay ningún elemento en la clase, Russell tiene el problema permanente de cualquier operador, que es la iota invertida, que le funciona muy bien con las clases unitarias. Cuando se constituye un conjunto de un único elemento, "los corchetes" sirven en cierto sentido de operador, que pasa del elemento k al conjunto {k}. Podemos decir que la clase ϕx solo tiene un único satisfactor, el x que tal que ϕx. Podemos aseverar la fórmula ϕk en donde k es este único elemento:

$\vdash \phi k$, que cumple con la condición $\vdash \phi k' \rightarrow (k' = k)$. Aquí estamos en presencia del artículo definido, que Russell lo nota como una iota al revés $\iota\phi x = k$. Cuando la clase no tiene satisfactor, estamos hablando de la clase vacía, es decir:

$\phi x \rightarrow \phi\ \hat{X} = \{x \mid \phi x\} = \varnothing$, y donde el artículo indefinido $\iota\phi x$ no tiene sentido en este caso. Cuando la clase ϕx tiene más de un satisfactor, el símbolo "$\iota\phi x$" lo vamos a tener que interpretar como "un ϕx", de los muchos que se pueden dar, lo que puede ser expresado como: $(\exists x, \phi x) \wedge (\exists x', \phi x \wedge (x' \neq x))$; esto nos produce un artículo indefinido sintáctica y semánticamente.

En cuanto a la definición de la matemática pura partiendo de la noción de clase, se presenta una ambigüedad dado que existe una discusión
- que todavía está abierta - y es la que hace referencia a si la noción de clase se sale de la lógica y pasa a las matemáticas. Esto recoge la idea de Bourbaki, quien manifiesta que las únicas constantes lógicas que tenemos son las conectivas y los cuantificadores y que las demás son variables y relaciones o funciones. Aquí estamos en los terrenos de la lógica, pero cuando ponemos un operador adicional, ya nos pasamos a la matemática. Este operador adicional es el "tales que", donde dada una proposición ϕ que tiene una variable libre, entonces aparece una clase que podemos llamar ϕx, $\phi\hat{X}$, $\phi(\hat{X})$, $\{x \mid \phi(x)\}$, donde este operador, como lo definirá más tarde Russell, será "los tales que" cumplen ϕx.

Cuando él dice "los tales que", se está refiriendo a que ϕx deja de ser una proposición y se ha convertido en un objeto mental que es una clase. Con este operador pasamos de la lógica a las matemáticas, pues toma una función proposicional y la pasa a una clase. Esto es lo que sucede cuando usamos los corchetes y decimos; todos los x tales que $\phi(x)$, es decir : $\{x \mid \phi\ (x)\}$. Nos queda la clase de "los tales que" ϕx, que no se simboliza sólo con la barrita sino con todo el

sistema de trazos {x | }, con un espacio vacío para la formula de una sola variable; "los tales que cumplen $\phi(x)$", y esto es ya una clase. Entonces, aunque las clases no pertenecierán a la lógica (esto es algo que se discute), de todas maneras el operador "tales que" con su poder de convertir una función proposicional de una variable en un conjunto, sería ya un operador matemático, el cual se saldría de la lógica y pasaría a las matemáticas. Todo esto suscita las siguientes preguntas: ¿Cómo pasar de una formula sin cuantificar a una formula cuantificada válidamente? Si uno supone que existe por lo menos uno y resulta que la fórmula no tiene satisfactores, se equivoca. Si uno tiene una fórmula que tiene satisfactores y le pone el cuantificador universal, y resulta que no todo elemento del universo la cumple, también se equivoca. Esto conduce a un problema permanente en todos los cálculos de predicados, que es cómo introducir reglas a fin de eliminar e insertar cuantificadores.

De igual manera, la relación "pertenece a", notada con la letra $\in$ (épsilon), ya no es una relación entre la variable y la proposición sino entre la variable y la clase, o entre la constante y la clase. Bourbaki también selecciona este operador y dice que el operador $\in$ es aquel que convierte dos objetos en una proposición y esa proposición vuelve a pasar a la lógica para sucesivas transformaciones. Notemos que $\in$ es un relator de dos puestos; un puesto para variables o constantes individuales, y otro para clases. No obstante, el uso de la $\in$ plantea un problema de tipo, dado que el tipo de lo que está a la derecha del símbolo tiene que ser mayor que el tipo de lo que está a la izquierda. También viene el problema de qué significa "$x \in x$", si la x tiene que ser del mismo tipo; se puede decir que es esa fórmula falsa o que no satisface la restricción del tipo. Pero si se dice que es falsa, entonces se podría negar: es falso que x pertenece a x; eso es verdadero para todo x. Si no cumple la restricción de tipo sería una falla lógica escribirla, porque habría que prescindir de que la $\in$ representa cierta función, que va de parejas elemento-conjunto a proposiciones y no de parejas elemento-elemento a proposiciones. Por tal motivo Russell se muestra cauteloso; algunos conjuntos sí tienen conjuntos como elementos, pero esto lo llevará a subir el tipo del conjunto de la derecha, debido a que quiere evitar el problema de los conjuntos que se incluyen y no se incluyen a sí mismos; esto nos hace surgir todas las paradojas.

Supongamos que ϕ tiene dos variables libres; entonces, la clase de los que cumplen ϕ ya es una clase de parejas. Podríamos decir que para cada función proposicional que tenga 2, 3, 4,...,n variables libres, hay un operador que las transforma en una clase de parejas, de ternas, de cuaternas, y en general de n-plas ordenadas. En el primer nivel tenemos la lógica proposicional con sus proposiciones cerradas sin variables libres, donde no hay nada que hacer a nivel matemático. Si tomamos como p por ejemplo la proposición "2 es impar", es falsa, y si dice "2 es par" es verdadera; no hay nada que hacer matemáticamente. En cambio, si usted dice "x es par" eso es una función proposicional; usted está construyendo la clase de los pares y entonces comienza a ensayar cuáles objetos cumplen la relación "pertenece a". Esto nos lleva a que la matemática trabaja con ciertos objetos construidos a partir de proposiciones; con ellos opera para construir otros objetos, como por ejemplo: con

la unión se construye otro objeto, con el complemento se construye otro objeto, y con las relaciones como la $\in$, se van a construir proposiciones; éstas siempre van a ser de la forma, si p entonces q ($p \supset q$) para ser de las matemáticas. Por ejemplo p puede ser la conjunción de todos los axiomas de conjuntos y q puede ser un teorema de conjuntos. Pero las matemáticas no afirman el teorema de conjuntos, sino afirman una proposición muy complicada; que si p combina todos los axiomas de Zermelo-Frankel, entonces q; en ese sentido, como lo decía Russell, no va a ser una proposición de las matemáticas la que afirme el teorema, sino una proposición de la forma p entonces q ($p \supset q$).

¿Qué va a hacer Russell para definir objetos matemáticos, como por ejemplo π, o el 2? Él va a armar una frase que los defina en forma única, y a esta frase que los define en forma única le va a aplicar un operador que diga: el único par primo, que es ya un objeto. Ser par y primo es una función proposicional. Se llama operador n-ario al que transforma n objetos en un objeto. Si distinguimos objetos de proposiciones (que hablan sobre objetos), un relator no sería un operador; sea el caso: 3+4 = 7. El operador es + y el objeto es el 7. En la relación 3<4, el relator es < , pero "3<4" no representa un objeto sino una proposición. Si consideramos que las proposiciones son un tipo particular de objetos, entonces todo relator es también un operador, cuyo codominio es un conjunto de esos nuevos objetos, las proposiciones. En lógica, cada tipo de proposiciones es una clase de objetos. Una conectiva como $\vee$ es un operador binario que transforma dos objetos, p, q, en uno del mismo tipo.

Es muy interesante cómo Russell analiza qué es lo que realmente pertenece a las matemáticas. Él va a encontrarse con que la herramienta principal son las proposiciones, esto es la lógica, y por tal motivo su escuela se denominará "logicista", en el sentido de que las matemáticas son aquella parte de todas las proposiciones que tienen la forma abstracta si p entonces q. "Si yo soy Napoleón, 2 y 2 son 5", es parte de la matemática pura, porque es de la forma p implica q. Debido a que ser Napoleón, o no serlo, no tiene que ver con las matemáticas, vemos que en sus generalizaciones algo desmedidas, Russell pone dentro de las matemáticas puras a todas las proposiciones que tienen la forma de la implicación.

Pero, ¿qué diferencia hay entre la lógica y las matemáticas? Una idea que se le atribuye a él es que todo es lógica y una parte que tiene ciertos operadores cómo "tales que", "pertenece a", el operador que transforma una proposición que tiene un solo verificante en el objeto que la verifica y los operadores de conjuntos, todo esto sería parte de las matemáticas; pero para él ese es un subconjunto de la lógica. Por eso, al comienzo de la definición de las matemáticas puras como el conjunto de todas las proposiciones de la forma p implica q, Russell considera cuáles de todas las proposiciones serían propiamente matemáticas; parece ser las que, además de tener todo el aparato lógico, tienen la noción de "tales que" que produce clases. La noción que le faltaría a él en PoM (en PM sí existe esta noción, que se simboliza con una iota invertida), es la noción "el tal que" que produce objetos, dado que "los tales que" produce clases. Él no precisa que son distintos: el x tal que es par y es primo; el x tal que es el siguiente del uno, donde el uno es la clase de todas las clases unitarias.

Empieza uno a ver cómo él está tratando de mantener las matemáticas dentro de la lógica, pero esos operadores como el tal que, los tales que, pertenece a, todos los operadores de conjuntos, son los que caracterizan a las matemáticas. No hay nada claro. En PM, el mismo autor en la introducción a la segunda edición manifiesta: " que la tesis fundamental de las siguientes páginas, es que las matemáticas y la lógica son idénticas, siendo una de las que nunca he encontrado una razón para modificar". El autor reconoce que dicha tesis ha sido muy impopular, debido a que la lógica se asocia generalmente con Aristóteles y muchos matemáticos consideran que no es de su competencia. Por un lado, para hacer matemáticas hay que suponer la lógica, pero por otro, la lógica matemática es sólo una parte de las matemáticas.

El problema está en que no es claro cuál es la distinción entre la lógica y las matemáticas. Bourbaki dice que la lógica no tiene las nociones de clase, de elemento, de pertenencia, de unión o intersección o complemento, dado que esto ya es parte de las matemáticas. La propuesta que hace Bourbaki es: "Deme un operador que construya clases, elementos y parejas; y yo con la lógica defino los demás operadores, que conducen a que se construya la matemática" (que para él debía estar en singular). En Bourbaki es claro que la matemática hace parte de la lógica. En Russell no es claro que él quiera hacer esa distinción, más bien parece que no estaba distinguiendo la lógica matemática como un modelo con sus reglas de manejo simbólico y una teoría que involucrara los axiomas, sino estaba tratando de capturar la realidad del pensamiento al estilo de Boole, una lógica que estaba implícita en el lenguaje ordinario. Existe una ambigüedad en el lenguaje porque para los matemáticos existe una lógica filosófica que viene desde Aristóteles, que aunque no les interesa, no les queda más remedio que usarla; pero no es parte de las matemáticas ni las matemáticas es parte de esa lógica filosófica. En cambio, la lógica matemática es como un sistema con sus reglas, que si tienen un modelo en las proposiciones o no lo tienen, no importa. Se ha dicho que las lógicas matemáticas también se pueden interpretar en modelos espaciales, como por ejemplo: que las variables se refieren a puntos, las constantes se refieren a puntos predeterminados, y las proposiciones se refieren a líneas. Por lo tanto, uno diría que los puntos de la línea son los elementos que satisfacen la proposición. Se define la relación de incidencia y se dice: una línea pasa por un punto o un punto está en una línea si es satisfactor de la proposición, y no importa que esa línea se parezca a una línea geométrica. Por consiguiente, el derecho de jugar con el modelo es algo muy legítimo en las matemáticas puras.

Otro asunto hace referencia a la noción de verdad; en cuanto si la negación es cuando se piensa que una proposición es falsa, o cuando dice "no", o cuando se le pone una raya ondulada a una proposición; aquí nos preguntamos si se trata de una idea o si es una simple escritura. Cuando se dice dos es par y tres es no par, él dice que las ideas son las mismas; nos preguntamos si la negación cambia la idea, oscilando entre si es suficiente definir la negación como un operador, o como un símbolo formal que transforma las proposiciones o si es más bien una idea primitiva diferente. Por eso hay que estudiar muy de cerca si la idea primitiva hace referencia al símbolo o si la idea primitiva es el referente del símbolo. No es que la negación sea

una idea primitiva o un símbolo, sino que lo que él quiere distinguir es la idea primitiva y el símbolo de negación que es una rayita ondulada. Pero pareciera que en el texto estuviera al revés, que el símbolo de negación es el que hace referencia a la idea, y que la idea de la negación es el referente. En Russell lo importante del símbolo de la negación es la idea primitiva de negar; por eso es delicado "describir la verdad como hecho ontológico". El sentido en que $\phi(x)$ es verdad cuando la x se sustituye por una constante k, es un hecho ontológico independiente del sujeto. Si el individuo k cumple o no en el mundo objetivo la condición involucrada en $\phi\hat{x}$ le parece a Russell un hecho objetivo. Pero ahí viene el problema clásico: ¿Qué significa que $\phi(x)$ sea una función proposicional? ¿Que se tenga cierta constante k que se refiere a cierto objeto real cuando $\phi(k)$ es verdad? En la lógica clásica, la verdad de $\phi(k)$ es un hecho ontológico independiente del sujeto que lo afirme o niegue.

Sin embargo, existe en inglés un problema semántico en relación al referente o "referent" como aquello a lo que hace referencia el símbolo, cuando todo el espíritu de la lengua inglesa indicaría que la terminación en "–ent" indica más bien un símbolo, porque activamente hace referencia a la idea. Sin embargo, ya se introdujo en el lenguaje el uso de "referent" como aquello a lo cual está referido el símbolo. La terminación "–ent" significa un gerundio activo, pero en este caso ya no lo es. Entonces, aunque la palabra "referent" en su construcción gramatical parece referirse al símbolo que hace referencia a lo referido, ya se fijó en el lenguaje que "referent" es lo referido y no lo que refiere a.

Russell dice que la proposición puede ser verdadera o falsa, es decir: la proposición no es la que hace referencia al hecho ontológico, pero la proposición afirmada (asserted) o la proposición ya aseverada, hace referencia a la verdad como evento ontológico: como una intensión en la que yo me comprometo. Sea el caso en el ejemplo de 2 por 2 son 4; en este caso, si todos los axiomas de Peano son verdaderos, me estoy comprometiendo con la verdad de esa proposición. Pero no es que la misma proposición haga referencia directa a la verdad; sino hace referencia a un sentido, a un significado (no hay que olvidar que en inglés la palabra "meaning" expresa el significado y sentido como lo mismo, pero en Frege sí existe tal diferencia posibilitada por el idioma alemán). Nos preguntamos cuál es el "meaning" de esa proposición verdadera; ¿es la verdad? No. Hace alusión a que cuando la proposición está aseverada, yo tengo en la mente que eso es una verdad como hecho ontológico; pero el sentido o el significado (meaning) de la proposición no es la verdad propiamente, sino que aquello que yo estoy postulando, ya sea como idea primitiva, ya sea como idea derivada, es verdadero.

Lo que hace referencia a la verdad de lo que le sigue es esa T acostada ($\vdash$) que es como el símbolo de ese compromiso, mientras que la proposición en su sentido etimológico es la propuesta que todavía no está afirmada. En cambio, la aseveración de una sentencia ("sentence") es cuando sí está "sentenciada": ya yo emití la sentencia e hice mi juicio de que es verdad; y que yo me comprometo con ello. Ese es el sentido de esa T acostada que indica la aseveración y que se puede llamar "un

predicado del metalenguaje". Cuando digo, "pongo a consideración p", estoy en el lenguaje; pero cuando yo profiero la sentencia de que me comprometo con p, estoy utilizando un predicado del metalenguaje que es "asevero la verdad de p", simbolizado por "$\vdash$ p".

Después viene el intento de ver cuál de las dos es la más primitiva, si la herradura de la implicación de Peano ($\supset$) o el angulito como una V de la disyunción como adición lógica. Porque Russell cae en la cuenta de que si uno pone el conjunto formado por la negación y la disyunción, saca todos los demás operadores, pero también si uno pone el conjunto formado por la implicación y la negación también los saca todos, como también sucede con el formado por la negación y la conjunción; son todos conjuntos completos para una lógica bivalente.

Las conectivas que escoge Russell son dos, una unaria que es la negación y una binaria que es la o. Pero en PoM era la implicación; hoy se sabe que es indiferente escoger la o y la negación, o la implicación y la negación. El paso de la primera a la segunda edición de PM fue muy duro para él, debido a la introducción de la barra de Sheffer, al darse cuenta de que sus ideas primitivas no eran tan primitivas. Es conveniente tener mucho cuidado con lo que significa "un conjunto completo de conectivas"; puede ser una selección de una, dos o tres. Es completo un conjunto si todas las demás conectivas se pueden definir a partir de ese subconjunto. Pero Russell pensaba que era necesario tener una conectiva unaria y otra binaria. Nicod mostró que con la barra de Sheffer es posible definir la negación y por lo tanto basta una sola conectiva binaria para definir un subconjunto completo. Desde el punto de vista actual, uno puede definir todas las 16 conectivas binarias existentes, a partir de una sola conectiva binaria capaz de definir las otras quince. Si uno escoge la negación y la disyunción exclusiva, no puede definir las otras quince; si uno escoge la negación y la equivalencia tampoco puede definir las demás. Pero si escoge la negación y la disyunción inclusiva, si puede definir las otras 15 binarias.

Las 16 conectivas se obtienen a partir de una función proposicional, llamémosla p $*$ q, donde hay dos variables que se van a ligar por medio de la función estrella, para la cual tenemos una tabla de verdad; ¿qué pasa poniendo verdadero y falso a todas las dos variables? Da cuatro casos, que luego se convierten en 16 tablas de verdad, todas diferentes. El gran reto que aparece después, es ver lo que significan estas 16 conectivas lógicas en el lenguaje ordinario. Lo que no se sabía era que había dos conectivas binarias: la barra de Sheffer y la flecha de Pierce (es decir, la incompatibilidad y el "ni ni"), que forman conjuntos unitarios completos; no sólo permiten definir las otras 15 conectivas sino también la negación.

Vemos cómo Russell empieza a jugar en PoM con que las ideas primitivas son la negación y la implicación, buscando definir la disyunción con la implicación; luego, en PM, las ideas primitivas son la negación y la disyunción, buscando definir la implicación a través de la disyunción. Por eso es importante mostrar esa diferencia, al decir que la disyunción se define como p implica q implica q, cuya traducción a símbolos da la frase p $\supset$ q $\supset$ q que podemos agrupar en (p $\supset$ q) $\supset$ q , y en

p ⊃ (q ⊃ p). Nos lleva a una ambigüedad, donde debemos ver qué fue lo que Russell interpretó. Pareciera que fuera la primera opción, porque si p es verdadero y q es verdadero, esto vale. Es conveniente realizar la tabla de verdad de la “ o ” y verificar que es verdadera en todos los casos, excepto en el que ambas son falsas. Esta verificación se realiza con cuidado, debido a que al hablar no se usan los paréntesis ni en inglés ni en español; si tomamos el ejemplo 2 + 2 × 3, es algo ambiguo, dado que la calculadora lo interpreta comenzando por la izquierda, mientras los estudiantes lo hacen por la derecha. En el primer caso da 12 y en el segundo da 8. ¿Cuál tiene la razón? Hay dos interpretaciones y se ha escogido la más útil para el álgebra, que es desarrollar primero la potenciación, luego la multiplicación, y por último las sumas y las restas dentro de un orden de jerarquía de las operaciones.

En la lógica pasa lo mismo: hay una jerarquía de las conectivas lógicas, y resulta que si uno las considera como operadores binarios, la implicación material no es asociativa; si uno la considera como relación, no tiene sentido preguntar si es asociativa o no, pues las relaciones no son asociativas. Lo anterior es una pregunta capciosa que se usa para ver si los estudiantes entienden. En el ejemplo x < y < z; el que diga que el “menor que” es asociativo, está equivocado, y viceversa: el que diga que no, también está equivocado, debido que de una relación no se predica la asociatividad ni la no-asociatividad; no han entendido bien que la propiedad asociativa es para operadores binarios. En las relaciones no se permite la asociatividad ni la no asociatividad, sino que la expresión x < y < z es una abreviatura donde uno lee que x es menor que y, y que y es menor que z; o que la y está entre la x y la z. El “estar entre” puede considerarse como una relación ternaria, y tiene una lectura peculiar, dado a que uno primero lee lo que está en la mitad: “y está entre x y z”.

Sin detenerse demasiado, Russell menciona la teoría silogística de Aristóteles como el gran eje fundamental a partir del cual se originó la lógica moderna. Luego pasa a Kant, quien manifestó que el razonamiento matemático no es estrictamente formal, sino que siempre acude a la intuición por medio de las nociones a priori del conocimiento, a través de las cuales se construye el espacio y el tiempo. Gracias a estos aportes de la filosofía kantiana, Giuseppe Peano planteó que toda la matemática es susceptible de definirse a partir de unos principios deductivos y de otras premisas de la lógica general. Hay que recordar, como lo menciona el autor, que la idea de deducir la matemática a partir de la lógica se la debemos inicialmente a Leibniz, para quien era tan sólo necesario definir unas pocas nociones fundamentales y también probar unos axiomas, que constituyen nuestro compendio formal. Aquí nos encontramos con algunas inconsistencias, como es el hecho de que los axiomas no necesitan de ninguna prueba. Se entiende el interés de Russell en un modelo que se inspirara en los postulados de Euclides; aquí nos encontramos con una discusión que tiene como motivación las cinco proposiciones fundamentales de la geometría euclidiana capaces de construir todo un sistema formal. Hemos de recordar que lo que tienen en común tanto las geometrías euclidianas como las no euclidianas es que recurren al uso de proposiciones e implicaciones, hecho que las

hace caer en el campo de la lógica. Vemos que Russell propone que los axiomas sean tautologías que no se pueden probar sintácticamente, sino más bien comprobar semánticamente por tablas de verdad. Esa dualidad entre la verdad de una proposición y la demostrabilidad de la misma no estaba muy clara a comienzos del siglo XX.

Cuando Russell hace la comparación con los cinco axiomas de Euclides, muestra que él tiene una idea de las matemáticas como si los axiomas fueran verdaderos, a diferencia de Hilbert que proviene de la geometría no euclidiana, donde si el quinto axioma de Euclides es negado, también se puede hacer una nueva geometría consistente; ya sabe que las matemáticas no parten de axiomas verdaderos, sino de axiomas que uno postula arbitrariamente. En cambio, Russell parece creer, como lo creía Euclides, que esos cinco axiomas son verdades ontológicas. Con Hilbert y las demás geometrías no euclidianas se llegó a ver que no podemos hacer ni matemáticas ni lógica con referencia a la verdad, sino que lo importante es que tengamos modelos consistentes con lo afirmado y que todo lo dicho se pueda deducir de unos axiomas. Lo que importa es que uno esté cumpliendo con las reglas de juego del "juego matemático" . Ya entrado el siglo XX, a partir de Gödel se dice: una cosa son las verdades de la aritmética que son comprobables en un modelo y otra cosa son los teoremas de la aritmética que son deducibles de los axiomas. Hemos de recordar que ya no tenemos la esperanza de captar todas las verdades con los teoremas.

Una de las transiciones más importantes de la lógica se comenzó a operar a finales del siglo XIX y entrado el siglo XX. Russell no logró asumir tal paso, como sí lo hizo Hilbert: se puede seguir en las matemáticas mientras se pueda sostener una coherencia lógica con los procesos deductivos, ser capaz de leer las inscripciones simbólicas y verificar que todas las inferencias estén bien hechas. Russell, en PoM, afirma que todas las proposiciones son de la forma p implica q, donde lo verdadero no es ni p ni q, sino la implicación. Vemos que para obtener una implicación verdadera se puede mezclar la sintaxis con la semántica, por ejemplo: $p \wedge \sim p \supset q$ es una implicación verdadera, porque al reemplazar en las tablas de verdad, sale verdadera y no necesita axiomas. Si todos los axiomas son teoremas, y si todas las reglas de inferencia conservan la verdad, y si los axiomas son verdaderos como tautologías, es claro que los teoremas son verdaderos. Pero si hay una fórmula que no sea una tautología, no se puede decir nada de su verdad. Uno no prueba sino postula los axiomas, a partir de los cuales arranca la construcción de todo el sistema deductivo, en concordancia con los fundamentos propuestos. Hoy en día no llamaríamos "probar" sino "comprobar semánticamente por tablas de verdad"; probar axiomas podría ser idéntico con comprobar semánticamente con tablas de verdad. Entonces sí tendría sentido exigir que todo axioma o candidato a axioma se pueda comprobar semánticamente para que sea una tautología, pero aún hoy se dice más bien "deducir sintácticamente", y la frase "probar axiomas" no tendría sentido.

Las proposiciones matemáticas, de nuevo, están caracterizadas por contener variables, noción que el autor reconoce como una de las más difíciles de tratar por la

lógica. De igual manera, las proposiciones están conectadas con algunas palabras como cualquiera (any) o algunos (some), que son señales que indican la presencia de una variable y de una implicación formal. Inicialmente se va a buscar establecer la diferencia entre constante y variable. La primera hace referencia a unas nociones muy bien definidas carentes de cualquier ambigüedad, mientras la segunda está antecedida por alguna palabra denotativa como uno, cualquiera, alguno, u otro, donde el carácter definido se pierde. Adicionalmente, es costumbre en las matemáticas restringir el uso de las variables a las clases. Esto nos condujo a poder reemplazarlas por letras, hecho que nos muestra que las variables poseen un campo no restringido, donde cualquier entidad puede ser sustituida por una variable sin perjudicar la verdad de la proposición aseverada. Todo esto lleva a Russell a que se dé cuenta de que la matemática pura tan sólo puede contener constantes lógicas, como también nociones indefinibles o premisas o proposiciones indemostrables; hecho fundamental para distinguirla de la matemática aplicada, siendo nuestra tarea descubrir las constantes lógicas que permitan definir la lógica simbólica como la clase de proposiciones que tan solo contienen éstas y las variables.

Hay que recordar que inicialmente Russell no veía la necesidad de cuantificar con el cuantificador universal que se simboliza entre paréntesis, sea el caso: (x) (ϕx), él creía que era lo mismo que aseverar ϕx sin paréntesis. La x entre paréntesis (x) es el cuantificador universal para él; la pregunta es: ¿aseverar ϕ(x) es lo mismo que decir que cualquier x la cumple? Entonces, en cierto sentido ¿para qué agrega el cuantificador? En las expresiones existe al menos un x tal que "ϕx" , "(x) (ϕx)", él veía que la x no era una variable y la llamaba una constante. Esto nos muestra una confusión entre una variable ligada y una constante. Este hecho tan sólo lo tuvo claro hasta la segunda edición de PM; por tal razón dice que para algún valor o para todo valor va a volver a las variables unas constantes, aspecto que no fue sostenido en los apéndices escritos durante la segunda edición de PM.

Tenemos también otra propuesta muy russelliana de distinguir la lógica de las matemáticas, que consiste en suponer que cualquier proposición pertenece a la lógica, y que aquellas que pertenecen a las matemáticas son las que tienen variables. Según esto, una proposición sin variables sería de la lógica pero no de las matemáticas.

Por ejemplo si digo "yo soy Steve Russell", no hay variables y por consiguiente no es de las matemáticas; pero si digo "Dos es par" aparentemente no tiene variables, pero ocultas en la definición de dos y en la definición de par sí hay variables. Esta podría ser más bien la diferencia entre las matemáticas y la lógica, donde esta última incluye todas las proposiciones con todas las relaciones de conjunción, disyunción, inferencia, etc; y aquellas en las cuales no haya ningún término definido sin usar variables, por lo menos implícitamente, a través de esos operadores que ligan variables. Podría ser esa la distinción entre las matemáticas y la lógica: "las proposiciones matemáticas están caracterizadas por contener variables libres o ligadas". Las proposiciones en PoM están conectadas con algunas palabras como cualquiera, todos, alguno, ninguno, que son señales que indican que hay una

variable. Es costumbre en las matemáticas restringir el uso de las variables a los elementos y a las clases, y en la aritmética reducir las variables a los números. Según eso, a menos que los números fueran clases, la aritmética no pertenecería a las matemáticas: pero para Russell, los números son clases.

El autor establece que es el sujeto el que convierte una variable en una constante, lo que hoy en día diríamos "sustituye una constante en el lugar de la variable"; esto motiva la pregunta: ¿Cuál es el estatus de una proposición cuantificada? La variable ya no figura en ella, pero tipográficamente todavía está ahí; ¿figura o no figura? La situación es clara cuando uno toma una proposición y le introduce una constante donde había una variable. Pero existe otra manera de convertir una función proposicional en una proposición, y es cuantificar la variable. Pero todavía se le ve ahí; sea el caso: $\forall x \ \phi(x)$. Se dice que no figura; pero ¿en qué sentido es que no figura? Por tal motivo hoy en día distinguimos entre una variable libre y una variable ligada: ocurre libre u ocurre ligada. No es claro en Russell la idea de la variable ligada (bound variable). Es decir, no ocurre en el sentido de que no es libre para sustituciones, pero ocurre en el sentido de que hay que escribirla, pero está ligada. Por consiguiente, no importa cuál es la variable que se sustituye: para toda x, $\phi(x)$, para toda y, $\phi(y)$, etc. La letra es indiferente. En la formula ocurre dos veces como símbolo, pero no es sustituible por constantes. ¿Figura la variable ahí o no ? Hay que mirar más de cerca que es lo que se entiende por figurar: si es en referencia a lo que está dibujado en el símbolo o no. Pero si está ligada, no se la puede sustituir, y es como si no figurara. En una proposición cuantificada la variable cuantificada no figura u "ocurre"; en la inscripción ocurre, pero no ocurre como variable libre debido a que no se la puede sustituir. Por lo tanto, la proposición $\phi(x)$ para todo x ya está cerrada, ya es verdadera o es falsa en la lógica tradicional de dos valores. Uno puede aseverar para todo $\phi(x)$ o puede negarla y una de las dos va a ser una aseveración verdadera y la otra no. La que se convierte en una constante parece ser más bien toda la proposición y no la variable.

En la expresión "existe al menos un x tal que $\phi(x)$", Russell veía que la x no era una variable; figura en la inscripción pero no es variable en cuanto no la puedo reemplazar por nada. Entonces dice que es una constante; ¿será aquí la variable o la verdad? Parece que en PoM todavía él no había desarrollado la idea de "bound variable", pero ya él veía que con el cuantificador de alguna manera perdía la variabilidad. Cuando uno dice que un estudiante vino a clase, ahí está la variabilidad: uno va sustituyendo uno por uno los de la lista, y con alguno va ser verdadero y con otros va a ser falso. Cuando se dice que al menos un estudiante vino a clase, ya no se puede sustituir a nadie; por ello él decía que la variable se volvió una constante. Hoy en día se dice que la variable sigue allí pero está ligada. Se ve cómo existía en él cierta confusión en PoM entre la variable ligada y la constante, y no lo va a resolver hasta la primera introducción de PM, donde ya aparece la noción de "bound variable".

Nos da la impresión de que él no estaba hablando de los símbolos, sino que él quería distinguir la idea del símbolo, para que se viera la importancia que se le daba a la

lógica simbólica o logística a finales del siglo XIX. Para él la escritura no era importante, sino que los símbolos eran buenas abreviaturas; pero lo importante eran las ideas que eran simbolizadas. Hemos de recordar cómo Boole no dice "leyes de la lógica" ni "leyes de las proposiciones" sino "leyes del pensamiento", donde se indica que no había un interés en el juego simbólico por sí mismo. Esto nos muestra que Russell estaba interesado en las ideas lógicas, y que el hecho de que él use un simbolismo, es para él una abreviatura útil. Lo que nos recuerda que él no quería que todo se redujera a símbolos. Esto nos muestra la diferencia entre Hilbert y Russell. Para el primero, lo más sólido son los símbolos, dado que son diferentes, se pueden contar, están en fila; es cómo si un contador pudiera verificar que están bien escritos. Entonces, las matemáticas sí se apoyan en los símbolos, mientras que para Russell era más "el pensamiento apoyado en las ideas".

Russell concibe la lógica simbólica o formal como el estudio de los distintos tipos de deducción y la inferencia contenida en la misma (cap. 2. PoM); él mismo alude a que el calificativo "simbólico" es accidental, y que ha de ser considerado como teóricamente irrelevante. El autor hace especial énfasis a la obra de George Boole "Laws of Thought", publicada en 1854. En ésta se busca explicar las leyes de las operaciones mentales que hacen posible el razonamiento; se buscan aquellos procedimientos que hacen factible traducir el pensamiento ordinario en símbolos matemáticos. Boole plantea un sistema binario que usa el 0 y el 1 para efectuar todas las operaciones lógicas necesarias. Sin embargo, Russell se muestra un poco escéptico de los resultados alcanzados por éste, otorgándole el reconocimiento a la lógica simbólica de Peano, que marcó el hecho fundamental para estimular el desarrollo para la comprensión de la matemática.

El tema de la lógica simbólica en PoM se divide en tres partes: el cálculo de proposiciones, el cálculo de clases y el cálculo de relaciones. Tenemos tres cálculos, donde el de relaciones es el más nuevo. Del cálculo de proposiciones se sigue el de clases, que ya habían desarrollado los lógicos ingleses después de Boole: Lewis Carroll con el cálculo de clases simbólico con cuadritos, John Venn con sus diagramas que en parte son tomados de Euler, aunque para él son para el silogismo y Venn que los usa para las clases, y De Morgan. Tenemos estos grandes nombres a través de los cuales se configuran los primeros libros del álgebra, la lógica y los conjuntos. En dicho contexto no era muy clara la diferencia entre concepto, clase, predicado, proposición; donde "S es P", es un esquema que viene desde Aristóteles. Apenas a fines del siglo XIX empieza a aclararse que una cosa es "S es P" y otra cosa es "S está contenido en la clase P", otra cosa es si el elemento S pertenece a la clase P, y otra cosa es la clase P, otra cosa es el predicado P. A partir de Peano, Frege y Russell se va a abandonar el esquema clásico de la lógica aristotélica; no importa la palabra "es", lo que importa es que de un sujeto s se predica un predicado P. Aunque se lea "s es P", ellos van a escribir P aplicado a s, donde s es una constante que va a ser el sujeto de la frase. En general se va a decir: ϕ se dice de x, sea x una constante o variable, y se va a evitar el esquema "S es P".

Hoy en día se distingue la flecha → o la herradura ⊃ como operación, y la T acostada como relación entre dos proposiciones, pero como binaria de dos puestos. La T acostada con dos líneas horizontales ⊨ sería una relación de implicación semántica que dice que de la verdad del antecedente se sigue la verdad del consecuente. La T acostada ⊢ es una implicación sintáctica de la combinación de proposiciones antecedentes y consecuentes. En cambio la flecha → ya no se considera como una relación sino como una operación que combina proposiciones sin decir nada acerca de su verdad o falsedad. En cambio, Russell usaba la herradura de Peano ⊃ todavía sin distinguir si era una operación, o una relación, una relación mental semántica, que decía que de la verdad de p se puede garantizar la de q.

Veamos a continuación una breve aproximación a estos tópicos, dado que dentro de ellos, Russell desarrolla sus nociones primitivas y sus indefinibles.

2.1 El cálculo proposicional

Éste está caracterizado en PoM porque todas sus proposiciones tienen como antecedente y consecuente la aseveración de una implicación material. El antecedente es de la forma "p implica p", lo cual es equivalente a aseverar que todas las letras que ocurren en la misma son proposiciones, y a su vez, los consecuentes consisten en funciones proposicionales. Las letras usadas son símbolos para las variables, y "los consecuentes son verdaderos cuando los valores dados a las variables son proposiciones"; este comentario (PoM, pág 18) no siempre es verdad en general. Una implicación puede ser falsa, si el antecedente es p ⊃ p, y el consecuente q es falso. Si la implicación se cumple y el antecedente es verdadero, es porque el consecuente es verdadero. La proposición tiene que tener antecedente y consecuente; además, el antecedente tiene que ser una especie de tautología, que garantiza que q es verdadero siempre que la implicación sea verdadera.

Este cálculo estudia la relación de implicación entre las proposiciones, requiriéndose dos formas de implicación, la formal y la material, que se toman como indefinibles. Asimismo tenemos diez proposiciones indemostrables. Estas se toman como principios axiomáticos deductivos; no obstante, el autor comenta que estas proposiciones pueden ser susceptibles de una ulterior reducción.

Hilbert logró ver que los axiomas deben ser consistentes y mostró en qué sentido han de ser independientes. Al ser estos axiomas consistentes, no se puede deducir ninguna contradicción de ellos y la independencia nos lleva a que no se pueda deducir alguno a partir de los demás. Los axiomas que vamos a tratar a continuación nos plantean el problema de la colocación de los paréntesis y de los puntos; este importante hecho se dio cuando Russell comenzó a trabajar conjuntamente con Whitehead. También tenemos el problema de cómo se agrupan las implicaciones, y también tenemos la posibilidad de que en los axiomas podamos realizar todas las sustituciones de falso y verdadero, lo que nos permite apreciar cuáles son tautologías.

En la presentación de los tres cálculos, el proposicional, el de clases y el de relaciones tenemos las nociones de clase, de relación, de pertenencia y de estar contenido, que son tomadas de Peano. La noción de función proposicional debería pertenecer más al cálculo de predicados. En PoM Russell no distingue el predicado de la clase; la clase hombre y el predicado ser hombre; donde para él "hombre" es el predicado. En "Sócrates es hombre", hoy se diría que el predicado es "es hombre"; lo que nos lleva a que "hombre" devengue en una clase. Por eso hay una ambigüedad que no aparece hoy en el cálculo de predicados; se nota para un lector moderno la ausencia de una notación "Hombre (__)" con un intervalo para la variable o la constante, que es simplemente el predicado.

Si uno ya tiene la función proposicional como un indefinible y la noción de "tales que", entonces uno puede decir que los entes que pertenecen a la llamada clase, es porque satisfacen la función proposicional. Por eso hoy en día se diferencia P aplicado a x, P(x), de x pertenece a P; escribiéndose la clase entre corchetes: {x | P(x) } en donde P(x) es una función proposicional. Todo esto nos lleva a la necesidad de distinguir las nociones de clase, relación, función proposicional, proposición, predicado y composición, lo que apenas estaba ocurriendo en ese momento. La relación "formar parte de", "hacer parte de", "ser parte de"; puede referirse a un subconjunto o a un elemento; en todos estos casos tenemos la relación de inclusión o de pertenencia, donde el todo incluye a la parte. Aquí nos encontramos con algunas limitaciones en las matemáticas, donde no hay manera de formalizar "un pedazo de un todo continuo", debido a que no es propiamente un subconjunto ni un elemento. Esto nos conduce al lenguaje ordinario y a la adecuada selección de las palabras que se desea abreviar a través de la selección de un símbolo, evitando en lo posible ambigüedades a nivel de lo que significa. Tenemos además el problema de definir función proposicional. En esos momentos estaba esta idea desarrollándose en Alemania a través de Wierstrass y Dirichlet, para quienes en una función se sustituye un valor de la variable y se produce otro valor. Que fuera un único valor no estaba tan claro, porque ellos pensaban que no había un consenso alrededor de la unicidad; por ejemplo: la raíz cuadrada era una función; una función podría ser bivaluada y una función de varios valores podía ocurrir en la variable compleja. Hoy en día, si se sustituye la x por un objeto y se produce una proposición, esa es una función proposicional. En cambio, en "Sócrates es un hombre", ¿qué se puede sustituir?; uno no puede sustituir ni "Sócrates" ni "hombre"; esta es una proposición y no una función proposicional.

Los diez axiomas del cálculo proposicional son los siguientes:

i. **Si p implica q, luego p implica q; independientemente del p, q que tengamos, "p implica q" es una proposición.**
ii. **Si p implica q, luego p implica p; cualquier cosa que implique es una proposición.**
iii. **Si p implica q, luego q implica q; cualquier cosa implicada por cualquiera es una proposición.**

iv. Una hipótesis verdadera en una implicación puede descartarse y el consecuente se puede aseverar.
v. Si p implica p y q implica q, luego pq implica p. Principio de simplificación.
vi. Si p implica q y q implica r, luego p implica r. Silogismo.
vii. Si q implica q y r implica r, y si p implica que q implica r, luego pq implica r. Principio de Importación.
viii. Si p implica r y q implica p, luego, si pq implica r, luego p implica que q implica r. Principio de exportación,
ix. Si p implica q y p implica r, luego p implica qr. Principio de composición.
x. Si p implica p y q implica q, luego " "p implica q" implica p" implica p. Principio de reducción.

Los axiomas del viii al x los escribe Russell en PoM sin puntos, lo cual acarrea una dificultad al leerlos. En el axioma x utiliza una tautología para indicar que p tenía que ser una proposición. Porque algo que implica otra cosa o a sí mismo tiene que ser una proposición. Es una especie de truco que él usaba para garantizar que eran proposiciones. Esto nos lleva a que tiene que esperar a los axiomas ii y iii para saber, si p o q es una proposición o no lo es. Es un tema interesante para ser discutido. El axioma x es algo oscuro, debido a que la implicación como relación no es asociativa. Si uno considera la implicación como un operador, tampoco es asociativa. Si uno escribe p implica q implica r, ($p \supset q \supset r$), no se sabe si quiere decir que "p implica q" implica r o que p implica "q implica r". Esto nos exige que deba existir una convención para ver la manera en que se los va a leer. Si se utiliza la implicación como relación, como él lo dice, tenemos que de una relación no se predica la asociatividad. Eso le impide que se escriba una cadena. En cambio si es un operador, sí se puede preguntar si es asociativo o no, y en este caso, la implicación no lo es.

2.2 Cálculo de clases

Tenemos en este cálculo dos ideas primitivas nuevas, sean éstas la noción de clase y la noción de la relación de un miembro de una clase frente a su clase; se menciona que lo anterior sigue los planteamientos propuestos inicialmente por Peano. El autor propone adoptar la letra ε (épsilon) para señalar la relación fundamental de pertenencia de un individuo con respecto a su clase. Adicionalmente a esto, se tomarán como indefinibles la noción de función proposicional y la noción de "tales que" (such that). Se menciona que, dentro de las anteriores consideraciones, tenemos la distinción entre ε y la relación del todo con la parte, establecida entre las clases. Se comenta que la primera no es transitiva, pero en cambio la segunda sí lo es. En cuanto a la noción de función proposicional, se dice: ϕx es una función proposicional si, para cada valor de x, ϕx es una proposición determinada cuando el valor de x está dado. En este caso "x es un hombre" sí es una función proposicional, en cambio "Socrates es un hombre" no es una función proposicional. Sería interesante ver en qué momento van a aparecer variables para proposiciones y variables para individuales; esto hace que Russell se confunda cuando aborda el

tema de las funciones proposicionales. Por ejemplo la implicación es una función de dos variables, donde uno sustituye dos proposiciones y le queda otra proposición. Pero a su vez cada letra p es una variable, pero también es una proposición. En cambio en $\phi(x)$, ϕ es variable, x es variable y $\phi(x)$ es variable; se está confundiendo en qué sentido habla de función proposicional; la que tiene cómo argumentos otras proposiciones o la que tiene cómo argumentos elementos individuales. Mientras p, q sean variables proposicionales, no se sabe lo que tienen por dentro, si son proposiciones cuantificadas o no; de una, dos o tres variables, etc.

En cuanto a la noción "tales que", los valores de x que hacen la función proposicional ϕx verdadera son como las raíces de una ecuación, en la cual consideramos que todos los valores de x son "tales que" ϕx es verdadero. Estos valores forman una clase, que se define para todos los términos que satisfacen alguna función proposicional. "Los x tales que... es verdadera" sería una función clasal, pues para cada ϕx produciría una clase. Adicionalmente a estas tres nociones fundamentales, el cálculo de clases necesita de dos proposiciones primitivas nuevas. La primera asevera que si x pertenece a la clase de términos que satisfacen la función proposicional ϕx, ϕx es verdadera. La segunda asevera que si ϕx y ψx son proposiciones equivalentes para todos los valores de x, la clase de los x tales que ϕx es verdadero es idéntica con la clase de los x tales que ψx es verdadero. La identidad que ocurre aquí se define así: x es idéntico con y si y pertenece a cada clase a la cual pertenece x. En otras palabras, "x es un u" implica "y es un u" para todos los valores de u. Respecto a la segunda proposición primitiva, se observa que con ella se decide a favor del punto de vista extensional para las clases, entendiéndose que, aunque tengan la misma extensión, no por eso sus conceptos-clase son idénticos desde el punto de vista intensional.

Para cualquier clase u que se pueda pensar, al decir "si x pertenece a dicha clase", se está cuantificando sobre todas las clases posibles; esto nos lleva a la teoría de los tipos. Para Russell, cualquier clase de cualquier tipo, x pertenece a esa clase si y solo si y pertenece a esa clase. Es una definición muy elegante, pero tiene el problema de que no sólo está cuantificando sobre los elementos sino también sobre las clases; esto nos evoca la definición leibniziana de identidad, pero crea un problema sobre la limitación del tipo de las clases u.

Respecto a la identidad, se dice que dos términos son idénticos cuando el segundo pertenece a cada clase a la cual pertenece el primero. Se ve que esta definición es simétrica, transitiva y reflexiva. La identidad es la negación de la distinción, como lo es la igualdad de la desigualdad. Éste tema será utilizado en la lógica intuicionísta por Brouwer para decir: no es lo mismo decir que dos elementos están separados en la recta real, que decir que son distintos, siendo lógicamente diferente estar separado que ser distinto. Decía que la igualdad no es la identidad, hay una distinción conceptual que se cumple cuando todo elemento de un conjunto vive en el otro y viceversa. Esta igualdad de conjuntos no es lo mismo que la relación de identidad entre elementos.

Luego, siguiendo a Peano, Russell establece que una función proposicional es nula cuando es falsa para todos los valores de x; y la clase de los x para los cuales esta función se satisface, se denominara la clase nula, siendo una clase que no tiene términos, y ésta será denotada por Λ. Luego, el autor realiza una -para su época- novedosa diferencia a nivel del uso de la disyunción, donde distingue que existen dos usos que se oponen mutuamente. La primera la llamará una "disyunción variable", donde una alternativa es verdadera en algunos casos, mientras que en la "disyunción constante" solamente una de las alternativas (aunque no se haya establecido aún cuál de ellas) es siempre verdadera. El primer caso es el relacionado con la 'o' inclusiva que apreciamos en p v q, mientras el segundo caso hace referencia a la 'o' exclusiva que se escribe p $\underline{v}$ q, subrayando el símbolo anterior. Podemos decir que en el caso de la o inclusiva la reunión se escribiría cómo A ∪ B, y en relación a la o exclusiva tendríamos A Δ B. Se menciona que las leyes de la adición, la multiplicación, la tautología y la negación son las mismas para las clases y para las proposiciones.

En la definición de clase nula o vacía Λ también se tiene un problema de teoría de tipos; es una clase vacía de diferente tipo según la función proposicional que la define, la cual no la satisface ningún x. Esa función proposicional podría tener un tipo muy elevado y, sin embargo, la condición: un elemento pertenece a esa clase si y solo si pertenece a la otra, es verdadera. Se cae en una cadena infinita de clases vacías.

En referencia a las nociones de 'o' variable y 'o' constante, tenemos que recordar los usos de la 'o' inclusiva y la 'o' exclusiva. En la primera, las proposiciones p, q, r,..., basta con que alguna de ellas sea verdadera, mientras en la segunda es necesario que sólo una sea verdadera. La reunión A ∪ B se va a definir como si x pertenece a A 'o' x pertenece a B, con la'o' inclusiva o variable; si la 'o' es exclusiva, da otra operación, que es una especie de diferencia un poco extraña pero que se puede perfectamente definir como operación: la diferencia simétrica.

Si decimos que A ∪ B corresponde a la 'o inclusiva', la diferencia simétrica (que se simboliza con una delta Δ) corresponde a la 'o exclusiva'; pero en este sentido la diferencia simétrica es la reunión quitándole la intersección. Todavía no era clara la relación entre conectivas y operaciones, y la distinción entre las 'oes'. Esto permite extender con el complemento y la negación la relación de unión y la 'o inclusiva', y la intersección y la 'y', todas las leyes del cálculo proposicional y el de clases. Hay dos problemas diferentes: el uno es el de relacionar la 'o inclusiva' con la reunión y el otro es relacionar la 'o inclusiva' con el cuantificador existencial. Por eso a veces se encuentra el cuantificador existencial simbolizado con V, pues es equivalente a una serie de v que recorren toda la clase. Sería equivalente con la 'y', decir que todos pertenecen: a pertenece, b pertenece, c pertenece, etc, lo que quiere decir que todas pertenecen y por eso se enuncia el cuantificador universal y se simboliza a veces con una V invertida (Λ), que puede confundirse con la lambda de la clase vacía.

2.3 Cálculo de relaciones

En éste tenemos que si R es la relación que expresa la función proposicional "x tiene la relación R hacia y", simbolizada por xRy, necesitamos una proposición primitiva (indemostrable) que permita que xRy se una proposición para todos los valores de x, y. La clase de términos que tienen la relación R hacia algún término, se llamara la clase de los referentes con respecto a R. Y la clase de términos para la cual algún término tiene la relación R, la llamaremos la clase de los relata. Las dos proposiciones primitivas son las que permiten que la implicación material sea una relación y que la relación de un término frente a la clase a la que pertenece (ε) sea también una relación. Asimismo se manifiesta que la clase de todos los referentes es el dominio de la relación, y la de los relata, su codominio o rango.

En el cálculo de relaciones se tiene la dificultad de distinguir entre la proposición relacional y la relación misma, y entre las funciones de varias variables y los predicados poliádicos. También hay una dificultad en la definición de la clase de los referentes y la de los relata, que vienen de los plurales latinos de "referens" y "relatum". Aquí se establece un problema lingüístico complicado que es: "referentes" tiene un sentido activo "quién se refiere a quién", y "relata" tiene un sentido pasivo "quién está relacionado con quien". Pero como se escribe xRy, no queda muy claro quién es el referens y quién es el relatum. Además, a esto se le suma que en inglés quedó que referent es lo que llamaríamos el relatum y hay una confusión que viene desde comienzos del siglo XX, donde la palabra referent en vez de ser activa "el que se refiere a", se interpreta como el significado, "el que es referido por" el símbolo. Se crea una confusión mental cuando se tiene en cuenta que la terminación "–ent" es activa; pues los referentes tienen una relación activa "hacia otro término" y los relata tienen una relación pasiva "desde otro término".

Ya se vio antes que era necesario declarar que las clases se van a llamar "iguales extensionalmente" y no "iguales intensionalmente"; este mismo caso pasa con las relaciones. Si vamos a mirar que los referentes son los mismos y los relata son los mismos, las parejas son las mismas; pues vamos a tener las mismas relaciones iguales así mentalmente sean muy distintas. Eso hace que el cálculo de relaciones se reduzca al cálculo de clases de parejas, y después se pueda extender a las relaciones ternarias como cálculo de clases de ternas,..., etc., y esto lleva a que en los libros de cálculo confundan la relación con la clase de parejas, ternas, etc.; pero desde el punto de vista técnico, una clase tiene que tener una referencia a cierto universo. El mismo Bourbaki va a exigir que se tenga en cuenta el dominio y el codominio; si la clase de parejas es la misma, y si el dominio y el codominio son diferentes, deben funcionar como relaciones diferentes.

Se menciona que, desde el punto de vista intensional, dos relaciones pueden tener la misma extensión sin que sean idénticas. Dos relaciones R, R′ son iguales o equivalentes o tienen la misma extensión cuando xRy implica y está implicado por xR'y para todos los valores x, y. Para obtener una relación que está determinada cuando la extensión lo está, no es necesario agregar una nueva proposición

primitiva, como lo fue en el caso de las clases. Podemos reemplazar una relación R por la suma lógica o el producto lógico de las clases de relaciones equivalentes a R, es decir; por la aseveración de alguna o de todas aquellas relaciones. Y esto es idéntico con la suma o el producto lógico de la clase de relaciones equivalentes para R', si R' es equivalente a R. Aquí usamos la identidad de dos clases, la cual resulta de la proposición primitiva concerniente a la identidad de clases, para establecer la identidad de dos relaciones; un procedimiento que puede ser aplicado a las clases mismas sin acarrear un círculo vicioso.

Se menciona que existe una proposición primitiva en referencia a las relaciones, la cual tiene que ver con que cada relación tiene un converso; es decir que si R es cualquier relación, existe una relación R' tal que xRy es equivalente a yR'x para todos los valores de x, y. Siguiendo a Schröder, se denotará el converso de R como $\breve{R}$. Con algunas relaciones como la identidad, la diversidad, la igualdad, la no igualdad, el converso es el mismo de la relación original; a tales relaciones las llamaremos simétricas. Cuando el converso es incompatible con la relación original, como lo es en los casos de mas grande o menor que, se llamará la relación asimétrica (y que hoy en día se llama antisimétrica); y en los casos intermedios se llamará no-simétrica.

Finalmente, afirma Russell en PoM que ya no necesitamos ulteriores presupuestos ni nuevos indefinibles. Para concluir, el autor se concentra en unas proposiciones adicionales, que él mismo considera que es fundamental tenerlas en cuenta. Si u, v son dos clases cualesquiera, existe una relación aseverante R frente a la cual, para cualquiera de los términos x, y es equivalente a la aseveración de que x pertenece a u, y que y pertenece a v. Si u puede ser cualquier clase excepto la clase vacía, existe una relación que todos sus términos tienen hacia ella, y que no se da para ningún otro par de términos. Si R es cualquier relación, u cualquier clase contenida en la clase de referentes con respecto a R, existe una relación que u tiene para con la clase de sus referentes, la cual es equivalente para R en toda la clase u: Esta relación es la misma sostenida por R, pero tiene un dominio mas restringido. Se hace especial mención del dominio como un sinónimo de la clase de los referentes. A partir de que consideremos tipos especiales de relaciones, resultan ramas especiales de las matemáticas.

El asunto es en qué momento hay que comparar los PoM con los PM y a las relaciones con las funciones proposicionales de dos variables, porque el cálculo de predicados de una variable él lo va a identificar con el cálculo de clases, y en algún momento va a tener que identificar a las funciones de dos variables con el cálculo de relaciones. ¿Por qué no hay cálculo de predicados binarios, ternarios, etc.? Aquí viene el problema de la implicación material que la pone como indefinible; después él va a ver que la misma no es una relación de derivación, sino es una operación que combina proposiciones sin decir nada acerca de su verdad o falsedad. Esto nos lleva a ver que él no podía tampoco distinguir entre la implicación formal como relator y la material como operador. Después va a hacer ese ensayo de cambiar el subíndice x de la implicación formal por un cuantificador, hecho al que hay que seguirle la

pista. Cuando pone la x debajo de la herradura de la implicación $\supset_x$ y la llama "implicación formal", quiere decir que para todos los x, $\phi(x) \supset \psi(x)$, lo que se abrevia $(x) . \phi(x) \supset \psi(x)$ o $\forall x\ (\phi(x) \supset \psi(x))$. Con el cuantificador, sobra la distinción entre la implicación formal y la material. Pero si va a definir el cuantificador con la implicación formal, no sobra; tenemos en referencia a la implicación formal que el cuantificador es aquello que la hace explícita.

2.4 Algunos elementos en la transición de PoM a PM

Con ayuda de las intuiciones del sentido común y del lenguaje ordinario, depurando lo alcanzado en Principles of Mathematics (PoM) y buscando expresar de una manera más completa todo el sistema, Bertrand Russell construye su teoría deductiva en Principia Mathematica (PM) a partir de unas nociones indefinibles denominadas ideas primitivas. Éstas buscan romper con la tradicional propensión a edificar un sistema teórico a partir de una circularidad, donde los términos en referencia buscan definirse entre ellos mismos. La nueva propuesta busca construirse recurriendo a la juiciosa selección del número más pequeño de conceptos no derivables entre sí. Estas ideas vienen acompañadas de cinco proposiciones de carácter fundamental no demostrables, las cuales no buscan constituirse como definiciones, sino mas bien como epicentros de una labor deductiva relacionada con un simbolismo y no con aquello que se simboliza. Las definiciones se introducen por conveniencia práctica, ya que son teóricamente innecesarias.

Russell comienza la exposición en la parte 1 de PM, donde aborda la lógica matemática, que él vincula directamente con la lógica simbólica. Inicialmente se plantea que los temas a tratar pueden ser apreciados desde dos aspectos: el primero en relación a la cadena deductiva que depende de unas proposiciones primitivas, y el segundo como un cálculo formal. La sección A va a presentar ciertos axiomas a partir de los cuales es posible deducir una proposición o aseverar una función proposicional a partir de otra. A partir de estas proposiciones primitivas, podemos deducir varias proposiciones que están estrechamente vinculadas con las llamadas "cuatro vías", las cuales se dan para obtener nuevas proposiciones a partir de unas proposiciones iniciales. Sean éstas la negación, la disyunción, la aseveración conjunta o conjunción y la implicación, donde las dos últimas pueden ser definidas en términos de las dos primeras. En la sección B se va a ver cómo estas proposiciones se deben poder aplicar a cualquier valor, lo que nos lleva a unas proposiciones con variables, que se llamarán proposiciones elementales. Éstas no contienen ninguna referencia explícita o implícita frente a cualquier totalidad.

En el resumen que antecede a la primera parte de PM el autor sigue presentando su plan de trabajo a lo largo de esta obra; no obstante, se introducirán algunas modificaciones en el prólogo de la segunda edición, como también en los apéndices. En la parte B se van a tratar las relaciones de las proposiciones que no contienen variables aparentes, como también aquellas que las contienen; es decir aquellas que involucran las palabras todo (all) o alguno (some). Estas ya se venían mencionando

en PoM a lo largo de toda la teoría de la denotación, pero aquí en PM se ha reducido la problemática a tan sólo estas dos nociones. Se va a demostrar que, en las proposiciones que contienen variables aparentes, podemos definir la negación, la disyunción, la aseveración conjunta y la implicación. Todo esto de tal manera que sus propiedades serán exactamente las mismas que aquellas que se aplican a las proposiciones elementales. Se va a demostrar que la implicación formal
"(x). $\phi x \supset \psi x$", que se considera como una relación de $\phi \hat{x}$ hacia $\psi \hat{x}$, tiene tantas propiedades análogas como aquellas propias de la implicación material "$p \supset q$", que es una relación de p hacia q.

2.5 Presentación del desarrollo de Principia Mathematica

Prosigue el autor su exposición con las funciones predicativas y el axioma de reductibilidad, que son vitales para el empleo de las funciones con variables aparentes. Se finalizará con algunas consideraciones acerca de las descripciones, como frases de la forma "el que tal y tal" (the so-and-so) que sigue una estructura gramatical propia. Aquí tenemos la diferencia entre aseverar y proponer a consideración en el lenguaje ordinario; no obstante, el uso del artículo definido "el" (the) indica que tenemos una descripción. El que tal y tal cosa sucede (the so-and-so) puede ser un conjunto o un elemento pero no una proposición. En cambio si uno asevera, uno dice es "verdad que tal y tal" (it its true that), y eso es una frase y no una cosa. Finalmente, que tal y tal cosa (that so-and-so) involucra una proposición ya aseverada. En éstas se va a demostrar que tales proposiciones contienen tan sólo variables aparentes. Sin embargo hemos de recordar que Russell no distingue entre variable aparente y ligada.

En la sección C se va a tratar de las clases y de la manera como éstas son análogas a las relaciones. Las clases, las relaciones, las descripciones, son símbolos incompletos. Se demostrará que una proposición acerca de una clase es en realidad una función proposicional con una variable aparente, cuyos valores son funciones proposicionales predicativas; igual caso se daría si tuviéramos una relación en vez de una clase. De igual manera, a la exposición que se hizo en PoM acerca de los distintos cálculos, también en esta sección se examinará el cálculo de clases y el cálculo de relaciones. En cada uno de estos dos se examinarán las ideas de negación, adición, multiplicación e implicación o inclusión, que son análogas a aquellas dadas en el álgebra ordinaria en la relación a "menor que o igual que". Es conveniente que examinemos el paralelo que existe entre los predicados referidos a las relaciones y las clases. Decimos que tenemos un predicado de un solo puesto, monádico o unitario; sea P(_) o ϕ_, que significa en este caso "....es par", que es una función proposicional donde hay que ver si es elemental o no. En el caso P(2) o $\phi 2$, ya tenemos una constante insertada como argumento, y por lo tanto es una proposición cerrada. En cambio en $(\forall x)$ P(x) , (x) ϕx, el predicado ser par, que corresponde a una función proposicional, una vez que la variable se cuantifica, queda también una proposición cerrada. Hay que anotar que existen dos maneras de reducir el número de variables libres; una es por la sustitución de una constante y la otra es por la cuantificación.

En cambio las clases las notaremos como $C_p = \{ x \mid \phi x \} = \{x \mid P(x)\}$; aquí tenemos la clase que corresponde a P definida como el conjunto de los x tales que se cumple la función proposicional ϕx; esta es igual al conjunto de los x tales que tenemos un predicado P de un puesto, o predicado monádico, o unario, que se cumple de x.

Los predicados de dos puestos o diádicos (usando una raíz griega) o binarios (usando una raíz latina), se escribirían P(_,_) o ϕ (_,_). En _R_ tenemos una relación binaria con dos puestos libres. Es de resaltar que Russell parece poner las relaciones paralelas con las clases y no con los predicados. En las relaciones tenemos una definición que no es la más adecuada pero es usada largamente en los textos que consiste en: $R = \{(x, y) \mid xRy \}$, que representa el conjunto de parejas tales que x está relacionado con y. Aquí se usa el mismo símbolo para el predicado que para el conjunto de parejas, es como circular la definición. Podemos decir la clase de parejas que corresponde a R como $C^2_R = \{(x, y) \mid xRy \}$; se ve que existe un paralelo entre la clase correspondiente al predicado unario, entre la clase de parejas correspondiente al predicado binario, y se puede continuar con el n-ario. Pudiéndose escribir también como P(_,_,...,_). Para estos se tendría la clase n-aria (léase "enaria") que se escribiría como
${}_pC^{(n)} = \{ {}_{i=1}\Omega^{n}\ x_i \mid P({}_{i=1}\Omega^{n} x_i)\}$. Lo anterior también puede ser expresado como:

Predicado P(_)	**Conjunto de satisfactores C_p**
$P(x_1)$	**${}_pC^{(1)} = \{x_1 \mid P(x_1)\}$**
P(_,_)	
$P(x_1, x_2)$	**${}_pC^{(2)} = \{(x_1, x_2) \mid P(x_1, x_2)\}$**
P(n-ario)	**${}_pC^{(n)} = \{\Omega x_i \mid P (\Omega x_i)\}$ (Notación propuesta por C.E. Vasco, en**

donde la omega mayúscula Ω denota una operación "ordenatoria" paralela a la "sumatoria" Σ y a la "productoria" Π).

De esta manera se ve el paralelo perfecto. Pero en Russell queda flotando como si perteneciera al mundo de los predicados, o de las funciones proposicionales, o al mundo de las clases. Hay que anotar que la mayoría de los libros de texto también buscan salirse elegantemente del problema en lo referente a afirmar: que todas las funciones son relaciones, y que todas las relaciones son clases de parejas, dejando de lado el problema filosófico involucrado.

Este operador que se llamaría repetidor, se define como la pareja ordenada
${}_{i=1}\Omega^{2} x_i = (x_1,x_2)$, como la terna ordenada la expresión de la forma
${}_{i=1}\Omega^{3} x_i = (x_1,x_2,x_3)$, y en general la Ω significa la ordenatoria, u ordenador. Pudiéndose definir como ${}_{i=1}\Omega^{n} x_i$, que significa que para i = 1 tenemos dos opciones para este "singletón"; que sea una clase ordenada unitaria a la cual sólo pertenece el elemento x_1 o que es el elemento mismo x_i . Se podría mencionar una tercera opción consistente en que es una sucesión truncada que se quedó en el primer elemento. Todo este problema filosófico causó muchos problemas en los primeros años de la lógica formal, que va del 1850 a la primera edición de 1910 de Principia y a su segunda edición en 1927. Y aún hoy en día todavía no es claro la distinción entre una sucesión de n elementos donde n valga 1 y un elemento. El uso

de los paréntesis ha ayudado, dado que se usan para distinguir entre un elemento x y una clase {x}; no obstante, nos preguntamos cómo distinguir entre la clase de x y la sucesión ordenada que sólo tiene un elemento.

Otro problema interesante tiene que ver con la noción de la inclusión de una clase en otra y con la inclusión de una relación en otra. Nos preguntamos en qué está la analogía y en qué no lo está. A primera vista vemos que son dos cosas diferentes: la inclusión de clases quiere decir que si la trasladamos a los predicados unarios o monádicos respectivos, el uno implica al otro o el otro al uno: sea

$C_P = \{x \mid P(x)\} = \{x \mid \phi(x)\} = \hat{x}\, \phi x$
$C_Q = \{x \mid Q(x)\} = \{x \mid \psi(x)\} = \hat{x}\, \psi x$
$C_P \subset C_Q \equiv P(x) \supset Q(x)$: **para cualquier x,** $P(x) \supset_x Q(x)$.

Nótese la dirección de las herraduras de la inclusión de clases y de la implicación formal entre los predicados que definen las clases.

Para el caso de las relaciones binarias, la inclusión de una relación R en otra relación S se puede notar $R \subset S$. **Pero ahora, los predicados respectivos son binarios:** $xRy \equiv \phi_R(x, y)$, $xSy \equiv \phi_S(x, y)$. **Si se identifican las relaciones con el conjunto o clase de parejas que los cumplen (conjuntos más bien llamados "grafos" de las relaciones respectivas), tenemos:**

$R = \{(x, y) \mid xRy\} = \{(x, y) \mid \phi_R(x, y)\}$
$S = \{(x, y) \mid xSy\} = \{(x, y) \mid \phi_S(x, y)\}$

Entre los predicados ϕ_R **y** ϕ_S **hay más bien una relación de implicación formal:**
$R \subset S \equiv (x, y)\, \phi_R(x, y) \supset \phi_S(x, y)$: **para cualquier pareja (x,y),** $\phi_R(x, y) \supset \phi_S(x, y)$.

En la sección D se van a estudiar aquellas propiedades de las relaciones que no tienen analogía con las de las clases; se va a ver cómo éstas son de una enorme utilidad. En la sección E se van a tratar las nociones de adición y multiplicación tanto para las clases como para las relaciones; se hará un especial énfasis en los casos donde los sumandos o factores no se dan de manera individual, sino mas bien como miembros de alguna clase. Esto representa una enorme ventaja, dado que nos permite tratar con un número infinito de sumandos.

El autor vuelve a mirar todo su proyecto, redondeándolo alrededor de una posición que considera la lógica matemática como un cálculo formal caracterizado por aspectos como: la suma de dos proposiciones es su disyunción, la suma de dos clases es la clase de términos que pertenecen a la una o a la otra, la suma de dos relaciones es la relación donde esa suficiente que se establezca tan solo una de las dos. La suma de una clase de clases es la clase de todos los términos que pertenecen a alguna de las clases. El producto de dos proposiciones es su aseveración conjunta; el producto de dos clases es su parte común; el producto de dos relaciones es la relación donde

ambas relaciones se establecen. El producto de una clase de clases es la parte común a todas ellas, y el producto de una clase de relaciones es la relación donde todas las relaciones de la clase se establecen. La inclusión de una clase en otra consiste en que todos los miembros de la una también son miembros de la otra; mientras que la inclusión de una relación en otra consiste en que cada pareja de términos que cumple una de las relaciones, cumple la otra. Se va a mostrar que las propiedades de la negación, la adición, la multiplicación y la inclusión son exactamente análogas entre las clases y las relaciones; y, con ciertas excepciones, son análogas a las propiedades de la negación, la adición, la multiplicación y la implicación de las proposiciones. La excepción está dada por el hecho de que "p implica q" es en sí misma una proposición, y puede implicar y ser implicada; mientras que si α y β son clases, "α está contenida en β" no es una clase y no puede contener ni estar contenida en otra clase γ.

También se menciona cómo las clases pueden tener ciertas propiedades que no tienen las proposiciones; éstas se basan en el hecho de que las clases no tienen una división doble (two-fold), como sí la tienen las proposiciones respecto a las nociones de verdad y falsedad, sino más bien tienen una división triple caracterizada por: la clase universal que contiene la totalidad de un cierto tipo, la clase nula o vacía que no tiene miembros y todas las demás clases, que ni están vacías ni tienen como miembros a todas las cosas de un tipo apropiado. Esto nos lleva a ver que las clases también poseen propiedades que no son análogas a las proposiciones, tal como, de igual manera, las relaciones tienen propiedades que no son análogas a ninguna de las de las clases; no obstante, todas las propiedades de las clases tienen parecido con las de las relaciones. Las propiedades especiales de las relaciones son mucho mas numerosas e importantes que las propiedades que pertenecen a las clases; éstas se tratarán en la sección D.

Antes de abordar las ideas primitivas, nos preguntamos si es suficiente saber qué es una proposición elemental y qué es una función; qué es aseverar una proposición elemental y qué es aseverar una función. Se dice que hay cuatro ideas primitivas básicas, y además la negación y la disyunción. En la segunda introducción de PM con la introducción de la barra de incompatibilidad de Sheffer, la disyunción y la negación se reducen a una sola idea primitiva. Nos preguntamos, ¿cuantas ideas vamos a necesitar? Adicionalmente, hay otras consideraciones que también invitan a que se les trate como nociones primitivas, sea el caso: el estar implicada una proposición por otra, ¿es una idea primitiva adicional? ¿o es simplemente una combinación de la "o" y del "no"? Vemos que en la redacción inicial de PM en 1910 faltaba definir la implicación; a fin de salir del problema de una manera elegante, se buscó definirla a través de la negación y de la disyunción. Pero esto sólo lleva a que la implicación material sea la que quede definida y no la implicación formal. A su vez, la introducción de elementos de un metalenguaje como es la T acostada ($\vdash$), tampoco va a solucionar el problema; dado que el aseverar la verdad de una proposición es como si fuera una nueva proposición. Aquí tenemos el problema de un ascenso del tipo.

2.6 Las ideas primitivas

Russell busca consolidar una teoría deductiva que le permita la deducción de la matemática pura a partir de la lógica. Se ocupa inicialmente de la normatividad que hace posible el ejercicio mismo de la deducción, la cual a partir de unos principios fundamentales es capaz de inferir unas conclusiones específicas, establecidas en concordancia con unas premisas. Se menciona cómo la lógica simbólica consiste de dos partes estrechamente ligadas: la teoría de las proposiciones y la teoría de las clases. En la primera podemos deducir una proposición a partir de otra recurriendo a los principios que pertenecen a la segunda, sin que ésta requiera de la otra para definirse a sí misma; en consecuencia, la teoría de las proposiciones antecede a la teoría de las clases. Luego, se hace referencia al proceso de inferencia que hace posible la existencia misma de las proposiciones, donde la deducción depende de la relación de implicación, y cada sistema deductivo debe contener las suficientes premisas que se necesiten para legitimar el proceso deductivo.

En el tratamiento que el autor le da al tema, ciertas proposiciones tienen la tarea de actuar como postulados, demostrándose que son suficientes para establecer todas las formas comunes de inferencia. Es indispensable que todas las nociones primitivas sean necesarias y que el número de ideas indefinibles sea el mínimo posible, donde lo afirmado por las postulados debe cumplir tres condiciones: que sean verdaderos, que sean suficientes a nivel de la teoría deductiva y que no sepamos cómo disminuir aún más su número. Además, se resalta que deben ser lo más simples y sencillos posibles. El autor suspicazmente reconoce que siempre existe un elemento de duda, debido a que es muy difícil estar completamente seguros de que uno nunca esté usando algún principio de manera inconsciente. Sin embargo, él mismo afirma que la rigidez propia del ejercicio de la lógica simbólica es una salvaguardia para protegernos de estos supuestos que se dan inconscientemente; no obstante, nunca será la más adecuada totalmente.

Russell se apoya en Peano para llamar a estas ideas indefinibles "ideas primitivas", y a las proposiciones indemostrables "proposiciones primitivas". Se menciona que las ideas primitivas se explican por medio de unas descripciones que intentan aportarle al lector lo que ellas quieren significar; sin embargo, estas explicaciones no constituyen ninguna definición, debido a que ellas ya están involucrando las ideas que buscan explicar. Inicialmente se mencionan las siguientes seis ideas primitivas en el capítulo 1 de la sección A de PM:

i. ***La proposición elemental.*** **Por elemental se entiende que no está involucrada ninguna variable, ni ninguna palabra que se use para denotar las nociones de todo (all), alguno (some), el (the) o sus equivalentes. Además, se agrega que cualquier combinación de una proposición elemental por medio de la negación, la disyunción o la conjunción seguirá siendo elemental. Las letras p, q, r, s serán usadas como proposiciones elementales.**
ii. ***Funciones proposicionales elementales*****. Es una expresión que contiene un constituyente indeterminado como lo es una variable, o muchos de tales**

constituyentes. La palabra "tales que" (such that) se usa cuando uno o varios constituyentes indeterminados pasan a ser determinados, es decir; cuando los valores de una o varias variables ya están asignados. El valor que resulta de la expresión es una proposición elemental. De este modo, si p es una proposición elemental indefinida, no-p es una función proposicional elemental.

iii. ***La aseveración*. Cualquier proposición puede ser aseverada o simplemente considerada. Se menciona que en el lenguaje ordinario, cuando una proposición se va a considerar, usamos las palabras: "si tal y cual" (If so-and-so) y cuando se va a aseverar, usamos "es verdadero que" (That so-and-so). Una proposición no está aseverada, escribimos su sola letra que la simboliza, sea por ejemplo p; en cambio, cuando una proposición está aseverada, la designamos por " ├ . p ". El símbolo " ├" se va a llamar el signo de aseveración, el cual puede leerse como "es verdad que" (it is true that). Es de resaltar que la T acostada ya indica la presencia de un metalenguaje. Los puntos que se colocan después de la ├ van a indicar su rango o alcance; es decir, todo lo que sigue es aseverado hasta que alcancemos un número igual de puntos que precedan a un signo de implicación o el final de una oración. En el ejemplo que sigue: "├ : p . ⊃ . q " significa que "es verdadero que p implica q", mientras que en "├ . p . ⊃ ├ . q", significa "p es verdadero; en consecuencia q es verdadero". En el primer ejemplo no está involucrada necesariamente la verdad de p o de q, mientras que en el segundo sí está involucrada la verdad para ambas. Hemos de resaltar que en el segundo caso, el uso de la herradura ⊃ indica también la presencia de un metalenguaje.**

iv. ***La aseveración de una función proposicional*. El autor menciona que tan sólo usará esta noción para aseverar cualquier función proposicional en el capítulo 9. No obstante, usaremos esta noción para aseverar varias funciones proposicionales elementales especiales. Si tenemos una función proposicional ϕx cuyo argumento es x, podemos aseverar ϕx sin asignar un valor a x. En este caso estamos dejando la variable x indeterminada. Esto es posible dado que luego se puede determinar la ambigüedad, lo que nos llevará a un resultado verdadero. No hay que olvidar que en la lógica nunca ocurren proposiciones elementales constantes, o sea funciones proposicionales definidas que sean siempre verdaderas para cualquier valor que pueda tomar la variable. En este trabajo se consideran proposiciones generales, que cambian de valor de verdad según sea el valor que la variable ha de representar. Aquí, Russell comienza en PM a introducir la noción de "individual" o "individuo" o "particular", como un recurso que se origina frente a la problemática que acabamos de mencionar. Esta noción, que luego será elevada a la categoría de idea primitiva en la segunda introducción de PM, busca llenar ese vacío que se origina cuando no sabemos si lo aseverado no es ni una proposición ni una función. Para ilustrar esta situación se toman en cuenta dos ejemplos: "cada individual es idéntico consigo mismo", y, "hay individuales", son proposiciones que pertenecen a la lógica; pero no son proposiciones elementales.**

v. ***La negación*. Si p es una proposición, la proposición "no-p" o "p es falsa", es representada por "~p", donde p es una proposición elemental.**

vi. ***La disyunción*. Si p, q son proposiciones arbitrarias, la proposición "p o q" , o sea, "sea p verdadero o q verdadero". Aquí las alternativas no deben ser mutuamente excluyentes, y se representan por " p ∨ q". La llamaremos la disyunción o la suma lógica de p con q. Se toman en cuenta varios ejemplos de las múltiples opciones que se dan, sea el caso: "~p ∨ q" significará " p es falso o q es verdadero"; "~ (p ∨ q)" significará: "es falso que p o q es verdadero". Lo que es equivalente a decir "p y q son ambos falsos", que lo simbolizamos como "~(~p ∨ ~q)", que a su vez puede significar; "es falso que tanto p sea falso o q sea falso", o también puede ser equivalente a "p y q son ambas verdaderas", y así sucesivamente. Por el momento se consideran que tanto p como q son proposiciones elementales.**

Sin embargo en todos estos planteamientos nos surge la inquietud acerca del significado de "proposición elemental", en especial cuando buscamos establecer cuál es la idea primitiva; la de proposición o la de elemental. Todo esto nos acerca a la ontología que hay detrás de estas ideas, en especial lo que es propiamente la realidad inaprehensible apreciada como mundo, y el mundo visto y aprehendido por medio del lenguaje, siendo la realidad suprema que nos ocupa el lenguaje, y la problemática de la desagregación del lenguaje en unidades capaces de albergar una significación y un sentido precisos. Nos topamos con dos maneras viables para desagregar, sea a nivel de la proposición o a nivel del concepto. A través del concepto somos capaces de realizar una afirmación elemental, o atómica, o básica; el problema que surge es el de la afirmación. Si nos ponemos a analizar el concepto de ser mayor que, su afirmación nos lleva a una idea muy primitiva, que es la proposición como unidad fundamental de sentido; llámese atómica o molecular. Y es la referencia a estas proposiciones elementales, que no tienen variables ni cuantificadores, la que vamos a tomar como el punto inicial para el desarrollo de todo nuestro trabajo.

Entonces, ¿qué es proposición elemental? ¿cuál es más primitiva: la idea de proposición o la idea de elemental? Hablemos de la ontología: ¿qué seres pueblan su universo? Se puede decir que hay procesos, eventos, objetos, sustancias, accidentes, ¿Y las proposiciones qué? ¿ Y los signos qué? Es muy difícil hablar sobre el pensamiento y decir qué es un razonamiento. No hablemos de los razonamientos: hablemos de demostraciones que son una lista de formulas, y hay una cierta manera de verificar si la siguiente está bien escrita a partir de las anteriores o no lo está.

Siendo un ejercicio indispensable organizar los conceptos para llegar a las definiciones y de ahí llegar a las nociones primitivas, es igualmente difícil y valioso, organizar las proposiciones y ver cuáles son las primitivas, y decir cuáles son los axiomas que no podemos demostrar por medio de otros.

Es distinta la idea como concepto, la idea como conjetura y como proposición en el sentido de estar propuesta al juicio. Todas estas ideas nos llevan a una cadena

interminable de nuevas nociones, siendo realmente difícil llegar a unas absolutamente inderivables.

Nos preguntamos cuál de todas las instancias es la más básica e irreductible de todas. Se comprende que hay que mantener como elemental las proposiciones afirmativas o las negativas; luego vemos que tanto la afirmación como la negación son también ideas primitivas. Parte de todo este círculo vicioso nos presenta lo arduo que es identificar en un sistema teórico la primera instancia irreductible y anterior a todas las demás. Este hecho lo apreciamos cuando vemos que el autor evita de manera intencionada, y obedeciendo a una estrategia muy pensada, tocar algunos asuntos, dado que todo su sistema propuesto podría llegar a lugares de donde no es nada fácil salir. Sea el silencio de no querer definir qué significa proposición, donde él da por sentado que uno sabe qué es una proposición. Más cuando entendemos por proposición elemental aquella que no tiene variables libres ni ligadas por cuantificadores. Asunto que Russell no ve claro ni quiere abordar, dado que puede generar fisuras en su teoría lógico-deductiva.

Otro asunto que nos presenta dificultades es la noción de función proposicional, más cuando nos preguntamos: ¿es aquella que "produce" o que "genera" proposiciones elementales? No hemos de olvidar que una cosa es el valor que resulta de la expresión y otra cosa es la función que produce ese valor. Pero de nuevo nos preguntamos: ¿Qué genera esa función?, problema que nos hace referencia a las variables, y en referencia a ellas la conectiva también puede ser una variable. Debido a que si nos preguntamos, si la conectiva es una función distinta, ¿entonces qué pasa con la negación? Esto nos lleva a que para el autor las funciones proposicionales elementales son sólo las conectivas y no los cuantificadores, no son la predicación del predicado del término. Si tomamos por ejemplo que el predicado B lo definió como "ser blanco", es también una función proposicional, que al ser aplicada a un objeto da en algunos casos verdadero y otros falso; asimismo, en algunos casos es aplicable y en otros no, en unos es definible y en otros casos no.

Los predicados se pueden definir como funciones predicativas, que al aplicarles una constante producen una proposición elemental. Esto nos lleva a que debamos distinguir entre la función proposicional elemental que produce proposiciones elementales de otras funciones proposicionales; por ejemplo el cuantificador también se puede pensar como una función proposicional, que incorpora una proposición con una variable, que es una función proposicional, y produce una proposición que puede ser cerrada o abierta; por lo tanto, de todas las posibles funciones que se pueden seleccionar, no se entiende realmente cuál es la idea primitiva que propone Russell.

Si miramos que Russell se inspiró en Euclides, en cuanto a su aspiración de definir la lógica formal a partir de cinco ideas primitivas, y realizamos una disección para ver lo que no dice o no define; tenemos que el autor no definió ni función, ni proposición, ni elemental. ¿Donde está la definición del concepto de proposición? Esto nos lleva a que sea muy difícil definir la variable; sea Q un cuantificador, sea P

un predicado. Si x es una variable libre en la expresión: Q aplicado a P aplicado a x, ¿cuáles son las variables? Tenemos tres variables: la x es una variable, que en este caso quedaría ligada por el cuantificador Q que la puede ligar. El predicado P es también una variable y el cuantificador Q es también una variable; al haber mencionado que Q es un cuantificador, esto se hizo a fin de no establecer todavía de cuál cuantificador de todos se trata: $\forall x$, $\exists x$, u otro.

En cambio las funciones proposicionales elementales como $\sim(\ )$, $(\ ) \vee (\ )$, $(\ ) \supset (\ )$, los argumentos van a ser proposiciones y el valor que resulta también es una proposición. Hay que notar que para definir la primera idea primitiva necesitamos haber definido precisamente lo que es proposición; usualmente decimos que es un segmento básico del lenguaje que afirma o niega algo de algo. En este caso, ya estoy afirmando o negando, pero la aseveración viene antes de la afirmación o de la negación. Afirmar algo como verdadero es distinto de proponerlo como verdadero o como falso. Uno puede afirmar algo que es falso y comete una falsedad. Se ve que el autor quiere distinguir entre la afirmación y la negación de una proposición y la aseveración. Podemos tener la siguiente hipótesis: la palabra "proposición" realmente significa lingüísticamente y etimológicamente "propuesta a consideración". Es decir, "pro-posición", donde todavía no se sabe si uno se va a comprometer o no; aquí la proposición no está aseverada, uno todavía no la ha aceptado, uno puede revertirla o retirarla. Notamos una vez mas las diferencias que se expresan en el idioma inglés, en el cual fue escrita la obra: existe una diferencia clara entre "proposition" y "sentence"; donde esta última es una proposición aseverada, con la que yo ya me he comprometido y que hoy en día se llama un acto de habla; que es pasar de lo propuesto a aquello a lo que uno se compromete a declarar como verdadero.

Ese acto de habla declarativo es lo que significa la diferencia entre proposición simplemente considerada, y aseveración como proposición con la cual uno se ha comprometido. Es aquella aseveración que se escribe como una T horizontal, que puede ser leída como "es verdad que". En los tiempos de Russell no se distinguía la aseveración sintáctica del compromiso por la verdad. Hoy en día se sabe que esa "aseveración por la verdad" se la ha de notar de manera diferente: como una T de doble raya ($\models$), que es una aseveración semántica, mientras que la T con una sola raya ($\vdash$) expresa sólo una aseveración sintáctica, que se usa en una demostración cuando se está aseverando algún axioma, premisa, o hipótesis.

Podemos pensar que cuando Russell estaba escribiendo PM, pensaba que estaba llegando a las ideas y a los conceptos mismos de la "lógica real"; y en consecuencia a las proposiciones y relaciones "reales", exactamente como Euclides pensaba que estaba captando "el espacio real". Hoy en día decimos más bien que el espacio cumple unas condiciones formales de acuerdo a las condiciones teóricas del modelo que se está desarrollando; puede que exista así o no, pero eso no nos debe importar. Todo esto nos remite a las consideraciones de Poincaré, quien manifestaba que "en los axiomas se trataba de definiciones ocultas".

Al no reconocer la diferencia entre las dos aseveraciones las identifica como la misma; la semántica ($\models$)y la sintáctica ($\vdash$). Russell estaba pensando que se estaba capturando la esencia de la lógica real, sin haberse percatado de la existencia de otras lógicas; donde lo importante de las mismas es que su juego sintáctico sea fino, y en lo posible, libre de inconsistencias. Más aún, es posible establecer axiomas y reglas de inferencia para ciertas lógicas, llamadas "paraconsistentes", en las que se pueden demostrar ciertas fórmulas y sus negaciones, sin que por ello se trivialice la lógica respectiva.

Adicionalmente a estas ideas primitivas, el autor recurre a introducir la definición de implicación, que establece lo siguiente: cuando una proposición q "se sigue" ("follows from") de una proposición p, de manera que si p es verdadera, q debe de ser también verdadera, decimos que p implica q. Siendo la propiedad esencial de la implicación: "lo implicado por una proposición verdadera es verdad". Esto posibilita que una prueba válida tenga un asidero sólido. No obstante, ésta definición está restringida al uso de la disyunción al lado de la implicación: " p implica q " es equivalente a decir "p es falso o q es verdadero" (Una de las dos la implicación o la disyunción, se escoge como idea primitiva. También hemos de distinguir lo válido o inválido de las pruebas de lo verdadero o falso), lo que se escribiría de la siguiente manera:

$$* 1.01. \quad p \supset q \,.=.\, \sim p \vee q \quad \text{Df.}$$

En la definición de implicación se ha de recordar que la expresión a la izquierda es el definiendum que es lo definido, y la de la derecha es el definiens, que es lo que define. También podríamos interpretar la defínción anterior como: sin importar que p sea falso o que q sea verdadero, "p implica q" ha de ser verdadero, donde las letras 'Df 'se usan para señalar la presencia de una definición. Se menciona que tanto el uso de "Df" como el signo de igualdad deben ser considerados como si formaran un solo símbolo compuesto, que significa "lo definido... quiere decir". La definición no está considerada como una idea primitiva, debido a que ella tan sólo tiene relación con el simbolismo empleado; pero no tiene ninguna ingerencia en los contenidos de lo que es simbolizado. El uso de las definiciones está determinado por una conveniencia práctica y son teóricamente innecesarias. Hay que agregar que para la gran mayoría de lo matemáticos las definiciones siguen el mismo delineamiento establecido por Russell; no obstante, notamos la gran complejidad que éstas encierran, siendo por ejemplo muy distinto definir la recta por medio de una ecuación cartesiana, que definirla en en otro contexto. Sea el caso en un computador, donde el trazado de una recta no ser efectúa en el sentido euclidiano, escogiendo otras opciones como por ejemplo, qué pixeles de la pantalla se iluminan y cuáles no.

En cuanto a la implicación definida como cuando a partir de una proposición p se sigue una proposición q, el "se sigue" es una idea primitiva, no tomada en el sentido del siguiente, sino como lo que se sigue deductivamente a fin de poder implicar algo, en el sentido de "ser implicado por", dado que el antecedente es el que implica. Si

miramos mas de cerca, el "se sigue" no es reflexivo ni se puede simetrizar la implicación. El primer axioma va a ser 'p implica p', lo que significa que la implicación es reflexiva. Si es reflexiva, simétrica y transitiva es una equivalencia; y si es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es más un orden, por eso la implicación ordena todas las proposiciones de un conjunto de proposiciones de la lógica.

Russell trata de evitar definir la idea primitiva de "seguirse", un seguirse mental, y así la implicación señala una idea no definida. Él va a buscar eliminar este problema por medio del símbolo de la definición, donde una función proposicional elemental tiene dos variables y produce otra. Sin embargo, nos queda debiendo cuál es el verdadero sentido de la implicación conceptual, de una relación entre proposiciones ligadas de alguna manera, donde la una implica a la otra; este tópico merecería al menos una explicación.

El autor trata de evadir el problema diciendo que sólo va a tratar de reducir el contenido de la idea de implicar a la función proposicional de dos variables: $\sim p \vee q$. Si a usted le parece que implicar es otra cosa, ese es su problema, siendo ésta una salida muy elegante, aunque la lógica aristótelica y la estoica habían logrado unos desarrollos más profundos. En este contexto, ellos preguntaban: ¿Cuál es la relación conceptual, mental, que lo obliga a uno a la fuerza a pasar a otra proposición? Russell se da cuenta de lo complicado que todo es esto, y busca introducir la implicación de manera que si p es falso, implica a cualquier q para todo q, y si q es verdadero, debe ser implicado por p para todo p. Es una función bastante alejada de la intuición de la implicación que uno tiene, razón por la cual Poincaré decía que la lógica sólo sirve para encontrar y formular paradojas, pero no para entenderlas.

2.7 Proposiciones primitivas

Tenemos las siguientes proposiciones primitivas:

***1·1. Cualquier cosa implicada por una proposición elemental verdadera es verdadera. Pp.**

Este principio es especialmente útil cuando necesitamos deducir una proposición a partir de otra proposición. No hemos de olvidar que la pregunta es si la implicación con herradura se puede traducir con una negación y una 'o', en la forma ~p v q. La herradura es una función de dos variables proposicionales que produce otra proposición, mientras que la implicación es una relación del metalenguaje, y por lo tanto la anterior enunciación dice: cualquier cosa implicada por una proposición elemental verdadera es verdadera. Esto sería más cercano al modus ponendo ponens; uno puede aseverar la implicación p implica q, y puede aseverar la proposición elemental verdadera y aseverar q. Pero está mezclando dos sentidos de implicación: el sentido de que de p se sigue q, que es una relación, mientras que p implica q no es una relación sino una operación lógica.

Debido a que la idea primitiva referente a la aseveración de una proposición es distinta a la aseveración de una o varias funciones proposicionales, se requiere la siguiente proposición primitiva:

***1·11. Si podemos aseverar a ϕx, donde x es una variable real, y si podemos aseverar $\phi x \supset \psi y$, donde x es una variable real; luego podemos aseverar ψx, donde x es una variable real. Pp.**

La anterior proposición también es especialmente útil en la teoría de los tipos; sea el caso si hay un argumento "a" para el cual tanto "ϕa" como "ψa" son significativos, luego el rango de los argumentos para el cual "ϕx" es significativo es el mismo rango de los argumentos para el cual "ψx" es significativo; es decir el tipo posible de argumentos para $\phi \hat{x}$ son los mismos posibles argumentos para $\psi \hat{x}$. Con lo cual la proposición primitiva *1·11 se llama también "el axioma de identificación del tipo". Sin que olvidemos que ϕx es un valor ambiguo de la función proposicional $\phi \hat{x}$, y cuando una constante bien definida "a" es substituida por "x" , ϕa es un valor no ambiguo de $\phi \hat{x}$.

Ahora se ve otra cosa de la que no habíamos caído en cuenta, y es que estábamos llamando a ϕx una función proposicional porque si reemplazamos la x nos da una proposición, pero él la está llamando "valor ambiguo". Hoy en día distinguimos la función proposicional que toma un x de cierto conjunto de posibles valores de un argumento y produce ϕx que es una proposición. En cambio él va a introducir algo que es ϕx con sombrero $\phi \hat{x}$; a ésta la va a llamar la función proposicional $\phi \hat{x}$, y a la otra ϕx la va a llamar un valor ambiguo. Eso mismo sucede en cálculo cuando uno dice "coseno de x", uno cree que eso es una función que se deriva; pero realmente es un valor ambiguo. La función debería ser sólo coseno o cos( ), y Russell debería escribir $\cos \hat{x}$.

La proposición *1·11 nos permite que pasemos a aseverar los siguientes axiomas:

***1·2. $\vdash : p \vee p . \supset . p$ Pp.**

Esta proposición establece: " Si p es verdadero o p es verdadero, luego p es verdadero", es el principio de tautología, que se abrevia por "Taut".

***1·3. $\vdash : q . \supset . p \vee q$ Pp.**
Esta proposición establece: "Si q es verdadero, luego p o q es verdadero"; se llama el principio de adición, que se abrevia por "Add". Es un axioma muy extraño porque permite introducir cualquier proposición p que antes no existía en la cadena de símbolos.

***1·4. $\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$ Pp.**

Este principio establece que p o q implica q o p . Lo denominaremos el principio de permutación, al cual nos vamos a referir como "Perm" o permutativa de la 'o'.

***1·5. $\vdash$: p v (q v r) . $\supset$. q v (p v r) Pp.**

Este principio establece: Si p es verdadero, o (q o r) es verdadero, luego q es verdadero, o (p o r) es verdadero. Se llama el principio asociativo, donde Russell incluye la conmutatividad; al cual nos referiremos como "Assoc".

Aquí surgen varias preguntas: 1. ¿Con los axiomas 1·1, 1·2, 1·3 y 1·5 no es posible deducir el 1·4? 2. ¿Qué es lo que permite el axioma en el sentido de la axiomática "natural" de Gentzen? El 1·2 permite borrar una p; el 1·3 permite insertar una p; el 1·4 no permite introducir ni borrar nada, sino permutar dos letras. El "modus ponendo ponens" permite borrar un antecedente de una implicación en ciertas condiciones. ¿Qué permite hacer el axioma 1·5? 3. ¿ Por qué teniendo ya 1·1 a 1·4 no se podía poner aquí una asociatividad sin permutar las variables? Sería 1·5 alterno: $\vdash$: p $\vee$ (q $\vee$ r) . $\supset$. (p $\vee$ q) $\vee$ r.

***1·6. $\vdash$:. q $\supset$ r . $\supset$: p v q . $\supset$. p v r Pp.**

Este principio establece: "Si q implica a r , luego (p o q) implica a (p o r)". Aquí contemplamos que en una implicación podemos agregar una alternativa a ambas premisas, sin que la inclusión afecte la verdad de la implicación. Este principio se denomina el principio de la suma y nos referiremos a él como "Sum" . Este axioma nos permite introducir un elemento nuevo en el antecedente y el mismo elemento nuevo en el consecuente, parecido al 1.3.

***1·7. Si p es una proposición elemental, ~ p es una proposición elemental. Pp.**

Este axioma define la negación como una función de una sola variable proposicional, que transforma las proposiciones elementales en elementales. La pregunta es: ¿Cuándo la va a definir para las funciones proposicionales? Si lo hizo para la implicación, ¿por qué no lo hace para la relación?

***1·71. Si p y q son proposiciones elementales, p v q es una proposición elemental. Pp.**

El 1.71 también debería de tener una versión para las funciones proposicionales con o sin el triangulito circunflejo. El 1.7 y el 1.71 son para demostrar que hay funciones proposicionales. Si no lo hace es porque está asumiendo lo mismo que hace el profesor de cálculo; define + f , y –f, no cae en cuenta que ese otro signo vive en otro mundo. Porque f no es un número, es para funciones que se aplican a números. Definamos la suma entre las funciones, y pintémosle una crucecita especial para sumar funciones, y decimos que de ahora en adelante la calculamos sumando números. Pero obviamente desde este punto de vista, el signo "más" (+), es una función entre números que no se le podría aplicar a las funciones. Lo mismo pasaría

aquí. Del hecho de que la negación y la "o" sean funciones que trasforman una proposición elemental en otra, no se sigue que se pueda aplicar a las funciones. Habría que explicitarlo con una notación que se va a dar entre esos valores, o como una definición, o como un axioma.

***1·72. Si ϕp y ψp son funciones proposicionales elementales que toman proposiciones elementales como argumentos, $\phi p \ \mathrm{v} \ \psi p$ es una función proposicional elemental. Pp.**

Cuando este axioma puede aplicarse para funciones de dos o más variables, se llama el axioma de identificación para variables reales. Se observa que si ϕ y ψ son funciones que toman argumentos de distinto tipo, no hay funciones como " $\phi x \vee \psi x$ " , debido a que tanto ϕ como ψ no pueden tener el mismo argumento. Esto completa la lista de las proposiciones primitivas que se requieren para la teoría de la deducción tal como se la aplica a las proposiciones elementales. A fin de poder plantear apropiadamente la teoría de los tipos, nos hemos de extender a otras consideraciones contenidas en la teoría de las variables aparentes; éstas se pueden tratar como una ampliación de la teoría deductiva para tipos mas altos de proposiciones.

La explicación del axioma 1.72 es difícil: hay que mirar en qué sentido se llama axioma de identificación de variables reales, porque aquí una función proposicional ya no es la misma que en la introducción anterior. Debido a que en ella aparecía ϕx, donde x es un individual y aquí tenemos ϕp, donde p es una proposición; entonces, lo que parece ser es que en 1.72 la función proposicional elemental significa otra cosa. Significa lo que después llamamos conectiva o conectiva generalizada en el sentido de cualquier combinación de negaciones o de "oes" que es lo que él va a hacer; va a definir la "y" como una combinación de negaciones y de "oes". Acaba de definir la implicación con una negación y una "o", y va a demostrar que se pueden definir otras funciones proposicionales elementales, donde parece ser que el sentido de la función proposicional que usa en el 1.11 es distinta a la que usa en el 1.72.

Hemos de agregar que el autor, en el capítulo 8 de PM, va a tratar de capturar las propiedades de la única conectiva binaria que ha introducido; aquí de nuevo el problema radica en que tiene que aseverarla ($\vdash \phi x$); aspecto especialmente útil cuando debemos aseverar algunas proposiciones especiales. Aquí de nuevo él va a tener el problema, que si va aseverar una función proposicional con una sola variable, eso es equivalente a cuantificar universalmente la variable. En álgebra tenemos hoy en día unas igualdades, como por ejemplo:

La ecuación $(x + y)(x - y) = (x^2 + y^2)$ y la identidad $(x + y) (x - y) = (x^2 - y^2)$. En estas podemos tener: un producto notable o una ecuación que puede tener solución o no tenerla. En caso en que la tenga, es una ecuación de segundo grado. En los diversos casos nos topamos con las diferencias que se pueden dar de acuerdo a la manera en que aseveremos la x, aspecto en que el autor no cae en cuenta al aseverar la variable para todo x, al menos en la primera edición de PM.

Esa diferencia (que él no aclara), es la aseveración de una función proposicional con una x indeterminada, que es la que nos va a conducir al cuantificador universal. Él va a decir, ¿cuál es la diferencia entre aseverar ϕx y aseverar para todo x, ϕx? Hoy en día no se asevera ninguna función con variable, sino se asevera la función con las variables cuantificadas, o con las variables sustituidas por constantes. Lo que hay que destacar en el autor es el haberse dado cuenta de que no es lo mismo aseverar una proposición elemental que aseverar una función proposicional elemental. Notamos cómo él trató de demorar el uso de los cuantificadores en la aseveración de una proposición elemental, dado que él mismo consideraba que una proposición elemental cuantificada dejaba de ser elemental.

Russell no veía diferencias entre $\phi x \supset \psi x$; donde si uno asevera la implicación con la x como variable libre, no es equivalente a cuantificar que para todo x, ϕx implica a ψx. Al no saber cómo hacerlo, colocaba una x pequeña debajo de la herradura de la implicación ($\supset_x$). Se puede considerar que él estaba pensando en la combinación de conectivas que todavía tenían argumentos abiertos, no siendo adecuado cuantificarlos, dado que lo que estaba haciendo era cuantificar sobre proposiciones, y esto es entendible dado que allí nos surge la lógica de segundo orden. En especial si uno cuantifica sobre predicados, conjuntos, proposiciones, se origina un problema de no fácil solución, siendo conveniente cuantificar sobre un universo bien delimitado, donde para cualquier elemento de ese universo, ψx se cumple.

No se entiende cómo no introdujo el cuantificador de una vez por todas en la idea primitiva cuatro; se entiende que no quería cuantificar sobre proposiciones y todavía no había introducido los predicados y las variables elementales. Por tal motivo, la palabra elemental no significa referido a los elementos de un universo, sino mas bien podría habérsela llamado atómica. En el prólogo de la segunda edición de PM en referencia a la analogía de los átomos y las moléculas, tenemos que dependiendo de la manera en que se combinen entre sí, las conectivas seguirían siendo elementales. Pero si tenemos variables libres internas y ya están cuantificadas, ya no son elementales. Y aquí nos encontramos con la teoría de los tipos, ya que si tenemos una variable de orden superior y queda libre otra de orden inferior, entonces se debe cuantificar sobre la menor. No se entiende por qué no usó la x desde un comienzo, como un subíndice del signo de aseveración ($\supset_x$) y de esta manera hubiera evitado las dificultades con la teoría de los tipos. Donde el tipo cero serían los elementos, y si uno cuantifica sobre las proposiciones elementales que él señala con el signo de la admiración ($\psi!x$) estas proposiciones ya serían de tipo uno. Ya que en las proposiciones elementales la afirmación tiene sujeto y predicado en el sentido tradicional: un predicado aplicado a un sujeto, donde el sujeto es un elemento de tipo cero y el predicado es de tipo uno, el más apropiado a estos elementos, entonces la proposición es elemental y sintácticamente correcta.

La admiración aparece con el cuantificador único; "$\exists!$" indica "por lo menos uno y a lo más uno". También aparece entre la ϕ y la x en $\phi!x$, cuando se trata de seleccionar la función del mínimo tipo posible que tenga sentido. En la introducción

a PM aparece el uso del cuantificador único para clases, $\exists!$; se dice que una clase existe cuando tiene al menos un miembro: se nota "α existe" por "$\exists!\ \alpha$", expresado cómo $\exists!\ \alpha\ . = .\ (\exists x)\ .\ x \in \alpha$ Df. Para las relaciones se usa una notación similar $\exists!\ R. = .(\exists x, y)\ .\ xRy$, que significa que existe al menos una pareja (x, y) donde se mantiene la relación R. Igualmente en el capítulo IV del prólogo de la segunda edición de PM que aparece "!" para distinguir las proposiciones elementales de sus valores, por medio de un símbolo de exclamación ! situado entre la letra que denota la función y la letra que denota el argumento. De manera que "$\phi!x$" es una función de dos variables, x y $\phi!\hat{z}$. Es una matriz, dado que no contiene variables aparentes y tiene por valores que la satisfacen proposiciones elementales. De manera que se ha de escribir "$\phi!x$" donde antes se había escrito ϕx. Eso sólo aparece cuando ese ϕ que puede ser muy complejo a su vez puede tener variables ligadas, entonces él tiene que introducir para la teoría de los tipos esa admiración. Se puede apreciar que tiene más que ver con el axioma de reducibilidad, donde siempre habrá una proposición del mínimo tipo que tenga sentido, y esa es la que la va a llamar $\phi!$; pero hay que tener en cuenta que no tiene que ver con la admiración del cuantificador. Siendo una buena pregunta para estudiar la relación entre la admiración después de la ϕ y antes de la x, y el principio o axioma de reducibilidad. Porque da la impresión de que a lo que se está refiriendo es a que si esa ϕ tiene por dentro algunos cuantificadores que ligan variables de otro orden, hay que tener cuidado en escoger una función que si tenga sentido y que no viole la restricción del tipo. Supongamos que pegamos dos funciones proposicionales; una cosa es decir $\phi x \ v\ \phi y$, otra cosa es decir $\phi x\ v\ \psi x$, y otra cosa es $\phi x\ v\ \psi y$; donde en la primera tenemos dos variables individuales pero una sola función proposicional ϕ, en el segundo caso tenemos dos funciones proposicionales ϕ, ψ y una sola variable individual que va a ser la misma para ambas. Y en el tercer caso tenemos dos funciones proposicionales ϕ, ψ , y dos variables individuales x, y.

Hay que ver en qué sentido el 1.72 puede llamarse axioma de identificación de variables reales. Esto nos lleva a comprender la advertencia que él hace acá. Hasta ahora hemos hablado de funciones proposicionales elementales que son de tipo uno; si vamos a llamar de tipo cero a los individuales, todavía no hay funciones de tipo superior. La variable real es opuesta a la variable ligada (donde no es ni compleja, ni imaginaria). Él llama a la variable "variable real" cuando se la va a reemplazar por un individual real. Por ejemplo: la "x" en la función "x es un hombre" la va reemplazar por "Sócrates", aquí la x es una variable real. En cambio cuando uno dice "todo hombre es mortal", aquí no puede reemplazar la x por Sócrates, porque ya la tiene ligada con el cuantificador "todo hombre". Tengo que hacer otra frase que diga "Sócrates es hombre y en consecuencia es mortal", pero ya no la puedo sustituir "para todo x, si x es hombre, x es mortal"; ya no puedo sustituir la x, entonces la x no es una variable real, es una variable ligada (bound variable). Él va a tener el problema más tarde, que al aseverar una función proposicional con una sola variable, podríamos decir: afirmo ϕx con un valor genérico (o como él lo llama, "ambiguo"), donde la única razón que él puede tener para esto es retardar la introducción de cuantificador universal.

¿Cuándo puedo aseverar una función proposicional elemental? Cuando cualquiera de los valores ambiguos produce una proposición elemental verdadera; y lo mismo cuando él dice que va a aseverar que ϕx implica a ψx, quiere decir que si uno sustituye las x como variables reales por cualquier valor ya determinado no ambiguo, va a producir una proposición elemental verdadera. Pero si pone un cuantificador, la variable ya no le queda real, le queda ligada, y él quiere mantener la posibilidad de aseverar una función proposicional elemental con una variable real pero ambigua. Hoy en día se diría que aseverar ϕx como variable real es lo mismo que aseverar cada una de las proposiciones ϕa, ϕb, ϕc, para todos los individuales que va a sustituir a la x, pues eso es lo que indica el cuantificador universal. Por eso, en el ejemplo aludido anteriormente de las igualdades: $(x + y) (x - y) = (x^2 + y^2)$, esta fórmula es verdadera en algunos casos; en cambio $(x + y) (x - y) = (x^2 - y^2)$, es verdadera en todos los casos. Russell diría que la primera no se puede aseverar con variables libres o reales y la segunda sí.

Pero el profesor de álgebra no pone el cuantificador universal; entonces, la diferencia está en que a la que siempre es verdadera se la debe llamar "identidad", y a la que sólo es a veces verdadera se la ha de llamar "ecuación". Se diría que hay por lo menos dos tipos de igualdad con variables libres: la que siempre es verdadera para cualquier sustitución de las variables por un número real, que se debe llamar identidad, y la igualdad que solamente tiene algunas soluciones (o ninguna) que se ha de llamar ecuación. Por eso debería haber un cuantificador interrogativo que dijera: $(?x)\ (?y)\ [(x + y) (x - y) = (x^2 + y^2)]$ ¿ Existe algún x y algún y que cumplan la condición? Aquí tenemos un problema, que se encuentra en la pragmática del lenguaje y en la semántica del álgebra.

El autor tuvo la finura de distinguir entre afirmar la proposición y afirmar la función proposicional; por eso es extraño que no haya introducido la negación y la 'o' para las funciones proposicionales. Es posible que el problema que él tenía era que todavía no era claro que el axioma quinto de Peano perteneciera a una lógica diferente al cálculo de predicados que llamamos de primer orden. Porque si uno lo escribe: "Si el cero cumple p y para cualquier x que cumpla p, entonces x + 1 cumple p, se sigue que todo x cumple p", parece que fuera una formula de primer orden. Pero lo que pasa es que está afirmando ese axioma para cualquier p, y el cuantificador lo va a introducir sobre los predicados numéricos y los va a ligar. Pero no se puede cuantificar sobre las funciones proposicionales; es como si se saliera a otra lógica más fuerte; que es donde van a venir los problemas del tipo mayor y que se tengan cuantificadores sobre las funciones proposicionales. ¿Qué pasaría si cuantificamos para cualquier conectiva $*$, $p * q = q * p$? Esa proposición es falsa porque se encuentra una conectiva que no es conmutativa. Aquí el asterisco $*$ sería una variable para conectivas binarias.

2.8 Modificaciones realizadas en la segunda introducción de PM

Debido a que Principia Mathematica suscitó un enorme interés -como también una fuerte polémica- en la comunidad científica de la época, algunos planteamientos presentados por Russell sufrieron una serie de importantes objeciones. Consciente de que volver a incorporarlos equivaldría a tener que volver a reescribir la obra, el autor, en acuerdo con Alfred Whitehead, decide simplemente incorporar una nueva introducción. En ésta se van a tratar no solamente los comentarios sugeridos por sus colegas, sino los suyos propios, que nacen de reflexiones surgidas en los años siguientes a la edición de PM. Mas su interés es concentrarse en aquellas formulaciones y aportes nuevos, que deben tenerse en cuenta cuando uno está abordando los distintos temas tratados. Inicialmente se menciona que uno de los cambios más importantes es la introducción del indefinible que indica la "incompatibilidad", y que es simbolizado por una barra vertical, idea desarrollada inicialmente por H. M. Sheffer. Donde la expresión "p y q son incompatibles" reemplaza los dos indefinibles de la negación "no-p" y de la disyunción "p o q". No obstante, como se verá mas tarde, una sola expresión es capaz de reemplazar las cinco proposiciones primitivas que acabamos de mencionar; este hecho se debe a Jean Nicod. Esto llevó al autor a reemplazar el capítulo 9 por un capítulo 8, que se presenta como el apéndice A en PM, el cual está motivado por los deseos de simplificación que son posibles si introducimos las proposiciones moleculares y las matrices. Adicionalmente, otro de los temas más sensibles y al que se le dio tanto énfasis a lo largo del texto, es que no hay necesidad de diferenciar una variable aparente de una real. Asimismo, dos ideas primitivas que se mencionaron como distintas en el cap. 1 ya no lo serán mas; se trata de las nociones de aseveración y la noción de aseveración de una función proposicional. Esto conlleva que donde se vea proposiciones aseveradas de la forma "$\vdash$. fx ", ésta se considera como si tuviera la forma:

"$\vdash$.(x). fx ". Por ello no se requiere más la proposición primitiva* 1 ·11.

Con referencia a la barra de Sheffer, la noción de incompatibilidad tiene la misma ambigüedad que habíamos anotado respecto a la noción de implicación. No es claro si se trata de una conectiva binaria, una mera operación lógica que es un tipo de función proposicional de dos variables que toma dos proposiciones del lenguaje, por ejemplo p, q, y produce una nueva proposición del mismo lenguaje, p| q, o si se trata de una relación binaria que afirma la incompatibilidad de dos proposiciones del lenguaje y por lo tanto produce una nueva proposición que pertenece al metalenguaje.

Supongamos que tenemos dos constantes, a, b, para designar unívocamente a dos personas bien determinadas. Supongamos que la proposición p afirma que b es hijo de a, la proposición q afirma que a es padre de b y la proposición r afirma que a es hijo de b. Un análisis de las dos proposiciones p, q permite afirmar que se implican mutuamente; un análisis de las dos proposiciones p, r permite afirmar que son incompatibles, y lo mismo sucede con q, r. Si se trata de relaciones del metalenguaje,

no habría otras posibilidades. Pero si se trata de meras conectivas, no hay ningún problema en escribir todas las combinaciones.

p| q, q | p, p | r, r | p, q | r, r | q, p ⊃ q, q ⊃ p, p ⊃ r, r ⊃ p, q ⊃ r, r ⊃ q.

Sintácticamente, todas son proposiciones del lenguaje (fórmulas bien formadas); poderlas aseverar sintácticamente o no (o sea poderlas escribir o no como una línea en una demostración) depende de los axiomas y reglas de inferencia sintácticas. Otra cosa es que semánticamente, según las asignaciones de verdad a cada proposición p, q, r, las proposiciones moleculares cambien sus valores de verdad de manera peculiar; poderlas aseverar semánticamente depende pues del modelo en que se interpreten las relaciones y se asignen valores de verdad. No podía exigirse a Russell haber previsto estas distinciones posteriores.

2.9 Las proposiciones atómicas y moleculares

Russell decide introducir otro cambio en la segunda introducción a PM en relación a las proposiciones elementales, que de ahora en adelante las denominará proposiciones "atómicas o moleculares". Él mismo manifiesta que estas últimas distinciones pertenecen más al campo filosófico que a la lógica misma, no siendo tratables matemáticamente. Se busca aproximarse a las mismas tratándolas tan sólo a través del recurso de la definición. Comenzando desde una aproximación negativa, las proposiciones atómicas no contienen en ninguna parte las nociones de "todos" o "alguno", que el autor venía trabajando a nivel de la teoría de la denotación en PoM, y que luego aparecen como nociones fundamentales en el planteamiento del alcance (scope) en la teoría de las variables aparentes en PM. Se busca desde una perspectiva que él llama positiva, más afín a la definición, abordar las proposiciones atómicas dentro de la siguiente la forma general:

R_1 (x), significando que "x cumple un predicado monádico (unario) R_1";
R_2 (x , y), o [x R_2 y] , significando que "x cumple la relación R_2 (diádica o binaria) hacia y";
R_3 (x, y, z), significando que "x, y, z cumplen la relación triádica o ternaria R_3 (intensiva)";
R_4(x, y, z, w), significando que "x, y, z, w cumplen la relación tetrádica (o cuaternaria) R_4 (intensiva)";

Y así sucesivamente "ad infinitum", o bajo cualquier extensión, sin importar lo larga que esta sea.

El problema surge cuando usamos la analogía de los átomos en referencia a las proposiciones elementales: nos preguntamos qué estructura interna poseen; y en referencia a la misma, estableceríamos que la envoltura electrónica sería el predicado y el núcleo sería el sujeto o argumento. No obstante al subdividirla no da átomos sino partículas elementales; esto hace que la palabra elemental se vaya corriendo hacia abajo. Esto nos lleva a conjeturar que la lógica proposicional

trabaja con los átomos sin mirar su estructura interna. El cálculo de predicados trabaja con los átomos ya tomando en cuenta que tienen una estructura interna, y en ese sentido un predicado diádico sería una relación binaria, sea el caso del deuterio. Éste tiene dos protones y la envoltura es el predicado que se aplica a los dos. En la medida en que se va complicando el núcleo, van apareciendo predicados binarios, ternarios, cuaternarios; estos serían la envoltura de los átomos mas complejos. Nos surge la pregunta de cómo pegar los átomos para formar la molécula; la mejor manera sería con conectivas binarias. Luego nos surge la inquietud acerca de la negación y los cuantificadores: ¿Cuando se aplican a las proposiciones, éstas dejan de ser elementales? ¿Siguen siendo elementales pero ya no atómicas sino moleculares? ¿O la negación de una atómica sí sigue siendo elemental pero su cuantificación ya no? Parece que esta es la intención de la Introducción a la segunda edición de PM, aunque siga hablando de proposiciones elementales.

Luego el autor prosigue a definir una nueva idea primitiva, mencionada ya anteriormente como la barra de Sheffer. A partir del uso de esta barra, se introduce la noción de proposición molecular, cuya presentación básica mínima corresponde exactamente a la nueva noción que sigue a continuación. Si p, q, r son proposiciones atómicas, tenemos la siguiente idea primitiva:

$$p \mid q \,,$$

que se lee como: "p es incompatible con q", o también "p es falso o q es falso", o "p barra q"; y que es verdadero siempre y cuando alguna o ambas proposiciones son falsas. Luego, usando esta nueva idea primitiva, vamos a las siguientes definiciones de la negación, la implicación, la disyunción y la conjunción:

$$\sim p \;.=.\; p \mid p \qquad \text{Df,}$$
$$p \supset q \;.=.\; p \mid \sim q \qquad \text{Df,}$$
$$p \vee q \;.=.\; \sim p \mid \sim q \qquad \text{Df,}$$
$$p \,.\, q \;.=.\; \sim (p \mid q) \qquad \text{Df.}$$

Hoy en día se distingue entre el término y el predicado; el término puede ser una variable o una constante, y hay unas reglas de formación de términos. En cambio el predicado sólo se puede aplicar a términos y no hay una regla de formación de predicados, sino reglas de aplicación de predicados a términos para producir proposiciones atómicas. Después se definen las conectivas, como las que actúan sobre las proposiciones atómicas y producen proposiciones moleculares. Las relaciones estarían en otro nivel superior, y ahí tomamos el ejemplo de que el átomo tiene su núcleo y su envoltura. El núcleo es como un término y la envoltura es como un predicado, una vez se le aplica el predicado al término, tengo una proposición atómica; pero uno puede pegar átomos con enlaces químicos y que serían las conectivas. Si p, q son proposiciones atómicas, tenemos la siguiente identidad: $p \mid q$ es verdadero siempre que alguna o ambas proposiciones sean falsas. Tenemos unas definiciones para mostrar que basta una sola conectiva binaria para definir todas las demás incluso la única conectiva unaria, que es la negación: $\sim p = p \mid p$. Ahora,

$p \mid q$ y $\sim p$ serían moleculares.

De este manera se constituyen todas las funciones de verdad a través del uso de la barra. Aquí nos topamos con las funciones de verdad, que antes las llamaba funciones proposicionales elementales, cuando él dice que podemos construir "incontables nuevas proposiciones" a partir del uso de la barra; hoy diríamos "infinitas contables" en el sentido de que se requiere un dispositivo generador de proposiciones, que permita ensamblar todas las proposiciones del lenguaje formal. Pero aquí viene una diferencia que él no tenía muy clara: de nuevo él dice que no sabemos si una proposición molecular va ser verdadera o falsa. Se necesita un evaluador que evalúe las funciones proposicionales para poder saber cuál valor tienen. Si uno tiene un evaluador, sería una función que a cada proposición atómica elemental le asigne un valor de verdad. Ese evaluador se puede extender a todas las conectivas, según sea su manera para combinar los valores de verdad, hasta producir el valor de verdad de la proposición molecular a partir de los valores de las atómicas.

Este evaluador sería un operador que basta definirlo sobre las atómicas, llamémoslo "e" Aplicado a las atómicas, nos produce un valor en un clasificador omega que puede ser verdadero o falso. La idea de la conectiva es extender el evaluador "e" a un evaluador $\bar{e}$ "e barra", que esté definido sobre las moleculares, y esa definición se hace siguiéndole los pasos a la barra.

A partir de lo anterior podemos llegar a la siguiente definición:

$p \supset q \,.=.\, p \mid (q \mid q)$ Df. De modo que encontramos,

$p. \supset . q . r . \equiv . p \mid (q \mid r)$, de modo que $p \supset q$ resulta ser un caso venido a menos de una función de tres proposiciones. Podemos construir incontables nuevas proposiciones a partir del uso de la barra. Se tiene en cuenta, que la barra responde a la ley conmutativa;

$(p \mid q) \equiv (q \mid p)$,

De igual manera posee la ley asociativa:

$(p \mid q) \mid r \equiv p \mid (q \mid r)$.

El autor enfatiza que se pueden seguir construyendo otras proposiciones usando la barra; sin embargo, no podemos conocer su verdad o falsedad, a menos que se cumplan las siguientes dos condiciones: (a) que conozcamos la verdad o la falsedad de alguna de las proposiciones, (b) que alguna de las proposiciones se dé muchas veces de una manera adecuada. A partir del uso de esta barra se puede llegar a la siguiente regla de inferencia:

Dado p, $p \mid (q \mid r)$, podemos inferir r

Este caso o uno similar se toma como una nueva proposición primitiva.

Se puede construir toda suerte de nuevas proposiciones recurriendo al uso de la barra, donde a ambos lados de la misma se tienen proposiciones construidas de esta manera sin que se tenga la necesidad que a cada lado se tenga que tener proposiciones atómicas. Veamos los siguientes ejemplos que nos ilustran el uso de la barra frente al manejo tradicional que se hace en PM de las proposiciones ahí tratadas. Supongamos que tenemos tres proposiciones atómicas p, q, r; se pueden construir las siguientes proposiciones moleculares : p | q, q | r, y p | r; podemos formar las proposiciones moleculares

$(p \mid q) \mid r, p \mid (q \mid r)$.

Si tenemos las cuatro siguientes proposiciones atómicas, p, q, r, s, se forman de nuevo las siguientes proposiciones moleculares:

$\{(p \mid q) \mid r\} \mid s, \quad (p \mid q) \mid (r \mid s), \quad p \mid \{q \mid (r \mid s)\}$

De igual manera se forman otras proposiciones si permutamos las anteriores. Sin embargo las anteriores proposiciones son sustancialmente diferentes; se pueden tener de hecho las siguientes equivalencias:

$\{(p \mid q) \mid r\} \mid s \ . \equiv :. \sim p \vee \sim q \,.\, r : \vee : \sim s$
$(p \mid q) \mid (r \mid s) \,.\equiv .: p \,.\, q \,.\vee .\, r \,.\, s$
$p \mid \{q \mid (r \mid s)\} \,.\equiv :. \sim p : \vee : q \,.\sim r \vee \sim s$.

Todas las proposiciones construidas de esta manera se originan a partir de una sola regla: en " p | q " sustituimos para p, q, (o ambas) otras proposiciones construidas por medio de la barra. Esta regla genera una colección de nuevas proposiciones surgidas a partir de la colección inicial de proposiciones atómicas. Todas estas proposiciones construidas de esta manera las denominaremos "proposiciones moleculares". De modo que todas las proposiciones moleculares son de la forma p | q; pero tanto p como q pueden a su vez ser proposiciones moleculares. Si p es $p_1 \mid p_2$, p_1 como p_2 son proposiciones moleculares; siguiendo el mismo procedimiento construimos $p_1 = p_{11} \mid p_{12}$, donde p_{11} puede ser de la forma $p_{111} \mid p_{112}$, y así sucesivamente. Después de un número finito de pasos afines a lo anterior, se llega de nuevo a los constituyentes atómicos.

La misma barra refleja todo este proceso e implementa unas variantes afines a todo el planteamiento tratado; sea el caso en p | q, en donde denominamos a la barra, "barra principal". De igual manera en $p = p_1 \mid p_2$, la barra entre p_1 y p_2 como también la que se daría si $q = q_1 \mid q_2$, sería una barra secundaria. Si $p_1 = p_{11} \mid p_{12}$, la barra entre p_{11} y p_{12} sería una barra terciaría, y así sucesivamente podemos seguir generando toda una variedad de proposiciones elementales. No obstante hay que estar muy atentos, dado

que el autor mismo señala que el uso de las letras p, q, r, es para denotar a las proposiciones elementales no necesariamente a las proposiciones atómicas. Volviendo a examinar la ley de inferencia que acabamos de mencionar, tenemos:

Si p, q, r son proposiciones elementales; dado p, p | (q | r), inferimos r. Pp

Esta proposición primitiva permite por medio de la propiedad (b) (que establece que al menos uno de los constituyentes ocurre muchas veces de una manera específica), que permite conocer la verdad de una proposición, sin tener que detenernos en cada constituyente. Donde el caso más simple es: p | (p | p) , que es siempre verdadero. Lo que significa, que " p es incompatible con la incompatibilidad de p consigo misma, o sea con su negación, pues ~p = p | p" . Luego el autor recrea en todo el juego que se da en algunas proposiciones cuando intercambiamos la implicación ⊃ por la barra | . Sea en los dos siguientes ejemplos, que nos muestran la enorme versatilidad con la que se ha enriquecido el tratamiento de las proposiciones elementales.

Tomemos por ejemplo la proposición " p . q . ⊃ . p " la cual se expresa a través de la barra como { (p | q) | (p | q) } | (p | p) . De manera parecida podemos tomar " ~ p . ⊃ . ~ p ∨ ~ q " , que podría escribirse usando la barra como (p | p) | { (p | q) | (p | q) } . Podemos continuar de esta manera en " p . ⊃ . p ∨ q " , que también se expresa como p | [{(p | p) | (q | q)} | {(p | p) | (q | q)}] . Todas estas son verdaderas sin importar cual proposición p, q escojamos. Se resalta la enorme importancia de las proposiciones moleculares en la lógica, que está dada en poder construir "verdades invariables" o tautologías, tal como se ha ilustrado en los ejemplos anteriores.

La lógica está indefensa en relación a las proposiciones atómicas, debido a que no es posible verificar empíricamente ni su verdad ni su falsedad. Hecho que cambia completamente en las proposiciones moleculares, que pueden tener valores de verdad reconocidos universalmente sin necesidad de una verificación empírica.

El autor prosigue en la segunda introducción de PM a abordar una presentación introductoria en referencia a los planteamientos que Nicod realizo frente a su teoría. Para esto prepara el terreno introduciendo ciertas consideraciones en relación a las leyes de la lógica; donde manifiesta que todas las aseveraciones que realizamos en referencia a las proposiciones elementales p, q, r, se expresan en la siguiente función:

F (p, q, r, . . .) ,

cuyos valores son proposiciones moleculares construidas por medio de la barra y que siempre son verdaderas. Por eso la proposición F(p) es verdadera, sin importar qué proposición elemental sea p; se denota como (p) . F (p) ; similarmente la proposición F (p, q, r,...) es verdadera, sin importar qué proposición elemental sea p, q, r,... ; se denota por: (p, q, r, ...) . F (p, q, r, ...). Cuando tales proposiciones se aseveran, se puede omitir (p, q, r, ...) al comienzo, quedando simplemente

“ $\vdash$. F (p, q, r, ...) ”.

Una función proposicional elemental combina proposicionales elementales o proposiciones moleculares, que pueden ser verdaderas o falsas o ser tautologías. En este sentido sí se podría cuantificar para todo p; por ejemplo: la tautología $p \supset p$, es una F mayúscula. Se puede decir: para cualquier p, p implica p. En cambio, con la barra no se puede decir, para cualquier p, $p|p$; pero sí puede haber una combinación de barras que produzca una tautología. Por tal motivo, cuando estamos mirando toda la exposición en reversa, él dice que las tautologías son puras combinaciones en donde no importa el valor de verdad de las proposiciones atómicas. Póngale el valor que le ponga, el resultado al final va a ser verdadero. O sea, en cierto sentido lo que está proponiendo es que llamemos “teorema de la lógica a las tautologías”. Después, cuando se va a separar la sintaxis de la semántica, se va a decir que una cosa son los teoremas de la lógica y otra las tautologías; que son aquellas proposiciones que para cualquier evaluador que uno escoja, la extensión del evaluador va a producir el valor de verdad “Verdadero”. Eso es ya semántica. Hoy día, ser teorema es asunto de sintaxis.

El autor manifiesta luego, que en la lógica nunca se va a requerir una regla de inferencia como la vista anteriormente, pudiendo utilizarse tan sólo cuando se trata de una lógica aplicada. En la lógica de las proposiciones, que nos ocupa actualmente, la regla usada es la siguiente:

Dada cualquier proposición elemental p, q, r, tenemos

Que de “ $\vdash$. F (p, q, r, ...) ” y
“ $\vdash$. F (p, q, r, ...) $|$ { G (p, q, r, …) $|$ H (p, q, r, …) } ”, podemos inferir
“ $\vdash$. H (p, q, r, …) ”

Nicod logró reducir a una sola proposición las cinco proposiciones que inicialmente planteó Russell en la lógica de proposiciones de PM. Con la ayuda de la regla de inferencia, y partiendo de las siguientes dos proposiciones primitivas:

$\vdash . \ p \,|\, (p \,|\, p)$

$\vdash : p \supset q \,.\supset .\ s \,|\, q \supset p \,|\, s$, **llegó a un solo axioma.**

La primera se interpreta como “ p es incompatible con no-p ”, o “ p o no-p ”, o “ no (p y no-p) ”, o “ p implica p ”. Mientras la segunda se interpreta como

$$“ p \supset q \,.\supset : q \supset \sim s \,.\supset .\ p \supset \sim s ”,$$

la cual es una forma del principio de silogismo, que escrito usando la barra es:

$$\{p\,|\,(q\,|\,q)\}\,|\, [\{ (s\,|\,q)\,|\, ((q\,|\,s)\,|\, (p\,|\,s)) \}\,|\, \{ s\,|\,q)\,|\, ((p\,|\,s)\,|\, (p\,|\,s))\}]$$

El mismo Nicod demostró mas tarde, que estos dos principios se integran en uno solo, que escrito por medio de la barra es

$\{ p | (q | r) \} | [\{ t | (t | t) \} | \{ (s | q) | ((p | s) | (p | s)) \}]$,

y que escrito en términos del lenguaje de la implicación se convierte en

" $p . \supset . q . r : \supset . t \supset t . s | q \supset p | s$ " Pp.

Esta forma parece más compleja que $p \supset q . \supset . s | q \supset p | s$, que corresponde a la segunda proposición anotada anteriormente; no obstante, en sí misma es menos compleja. Con la anterior proposición primitiva y la ley de inferencia, se tiene todo lo necesario para probar cualquier proposición primitiva. Si se tiene una proposición
$(p, q, r, ...) . F (p, q, r, ...)$, se puede sustituir p, q, r, en funciones de la forma

$f_1 (p, q , r, ...)$, $f_2 (p, q, r, ...)$, $f_3 (p, q, r, ...)$ y aseverar

$(p, q, r, ...) . F \{ f_1 (p, q, r, \dots), f_2 (p, q, r, \dots), f_3 (p, q, r, \dots), \dots \}$,

donde f_1, f_2, f_3, ... son funciones construidas por medio de la barra.

Capitulo 3

La variable como idea primitiva

Bertrand Russell en PoM menciona que la variable es la noción por excelencia que identifica y caracteriza a las matemáticas. Ésta surge cuando podemos reemplazar un término en una proposición dejando inalterados a los demás términos. La clase de proposiciones obtenida de esta manera puede denominarse "conservación de la forma" (constancy of form) y esta forma ha de ser tomada como una idea primitiva. Y la noción de esta clase de proposiciones es una noción mas fundamental que la noción general de clase, la antecede y la define. De modo que la variable x es lo que se denota por cualquier término (Thus, x, the variable, is what is denoted by any term.§86) de la función proposicional ϕx, donde x ocurre a través de la proposición de la forma ϕ; donde ϕx denota la clase de las proposiciones que resultan a partir de los diversos valores que puede tomar x. De suerte que las nociones de función proposicional, la de denotación y la de *cualquiera* (*any*) están presupuestas en la noción de la variable. El autor comenta que el mismo desarrollo de esta teoría está lleno de dificultades que él tratará de ir aclarando a medida que el tema se desenvuelve. Para comenzar, tenemos que las nociones de *cualquiera* (*any*), *alguno* (*some*), etc,..., no necesariamente ocurren en las matemáticas, debido a que la implicación formal expresa todo lo que se necesita.

La variable es "el" método para establecer teoremas generales (§ 87), el cual siempre significa algo distinto de las proposiciones intensionales, al que algunos lógicos quieren reducirlas. En donde el significado de una aseveración acerca de todos los hombres o cualquier hombre es diferente del significado de la aseveración del concepto hombre (That the meaning of an assertion about men or any man is different from the meaning or an equivalent assertion about the concept man §87), Originalmente la variable siempre ha sido considerada dinámicamente, como algo que cambia en un lapso de tiempo y que es capaz de asumir sucesivamente todos los valores de una clase. Si probamos un teorema para n valores, tenemos que la n denota "cualquier" (any) valor, que es muy distinto de "cada" (each) valor y de "todos" (all) los valores. Podemos apreciar la combinación de ambas nociones en la siguiente proposición: "todos los niños no caben en el bus", sin embargo eso no quiere decir "que cada niño no quepa". La variable requiere la noción indefinida de *cualquiera* (any*)*, tal como fue explicado en la teoría de la denotación. Se puede además distinguir entre la variable verdadera o formal y la variable restringida (restricted variable), donde *cualquier término (*any term) es un concepto que denota una verdadera variable. En cambio, si u es una clase que no contiene todos los términos, cualquier u denota una variable restringida. Los términos incluidos en el objeto denotado (the object denoted) por la variable son los valores de la variable, donde cada valor de una variable es una constante. Se reconoce que existen dificultades en algunas proposiciones, como lo sería aquella que dice: "cualquier número es un número", donde cualquier número no puede ser de ninguna manera un número. La noción de variable restringida está más en relación con las funciones

proposicionales, donde la variable x en la función proposicional ϕx está restringida a las clase que llamamos ϕ.

Se presenta un problema cuando se dice "el objeto denotado por la variable"; ¿qué significa?, ¿es el conjunto de valores?, ¿donde está la denotación? Si se pone $\forall x$, $x^2 > x$, va a fallar en el 0 y en el 1, pero en el -1 va a quedar bien. Cuando digo para todo x distinto de 0 y 1, restrinjo su cuadrado que va ser mayor que él mismo, lo que nos lleva a que sea verdadero. Sin embargo nos surge la pregunta si tal proposición va a ser verdadera también para todos los números naturales, para los números enteros y para los números reales; todos excepto el 0 y el 1. Russell creía que la variable denotaba el conjunto sobre el cual va a variar la variable, pero eso no resultó. Hay que restringir la proposición fuera de la variable, sea el caso: para los números naturales vamos a usar la variable n, para los números reales vamos a usar la variable x, para los números complejos vamos a usar la variable z con sus subíndices. Pero hemos de darnos cuenta, de que la postulación está por fuera de la sintaxis; sintácticamente no es verdad que se pueda semantizar el conjunto sobre el que va a variar la variable como denotado por la variable. En esa fórmula no importa si reemplazo las tres instancias de x por n o por z. ¿Por qué cambiaría la denotación?

Hay un problema: ¿qué es lo que realmente denota la variable? ¿Uno de los términos o todos los términos del conjunto? Si la palabra "término" se va referir a veces al símbolo o a veces a lo interpretado, todo esto nos conduce a insolubles dificultades. Porque la variable x sería un término pero también el 0 sería un término y el 1 también y así sucesivamente, y esto es incorrecto. Años después se va a decir que un término es algo meramente sintáctico, y también que lo que interpreta un término no es un término; pero Russell no tenía todavía eso claro.

En relación a la definibilidad aparente se hace necesario el uso de un "artificio sintáctico", que siguiendo a Descartes, propone que las primeras letras del alfabeto (a, b, c, d) se usen como constantes o parámetros, las letras intermedias (k, l, m, n) se usen en los números naturales, y las letras finales (x, y, z) se usen como variables. Este artificio sintáctico es muy útil en expresiones como $z = x + iy$, donde restringimos la x, y a los números reales y la z a los números complejos. Es muy probable que Russell haya pensado este tipo de restricción porque para él la variable x, y , z podían ser reemplazadas por cualquier término de cualquier conjunto. El autor manifiesta una profunda inquietud acerca de la definibilidad aparente (apparent definability, § 89) de *cualquiera* (any), *alguno* (some) *y uno* (a) en términos de la implicación formal, planteando que es necesario transferir la variabilidad de la proposición a la variable misma, debido a que no es posible tener implicación variable. Además, los términos *alguno* y *uno* pueden ser reemplazados por sus términos equivalentes en una implicación formal. Sin embargo, *alguno* puede ser reemplazado por su equivalente en términos de *cualquiera*, sin que esto nos aporte el significado de *alguno*. Esto nos muestra cierta dualidad entre *alguno* y *cualquiera*. Donde si aseveramos todos los términos que pertenecen a una función

proposicional, podemos tener *cualquier* término y del mismo modo si hemos aseverado al menos un término obtenemos *alguno*.

En la función proposicional ϕx "x es un hombre implica x es mortal", podemos decir que ϕx es verdadero para todos los valores de x (o para cualquier valor), pero de igual manera es equivalente decir que ϕx es verdadero para algún valor de x. De esta manera podemos construir un cálculo con dos géneros de variable; la conjuntiva y la disyuntiva (§90), donde en esta última podemos establecer en cualquier caso el teorema de existencia. No obstante, esto parece no brindarnos ninguna ventaja práctica. Cuando Russell toca el tema de la "definibilidad", él quería ver que a través de la idea primitiva de implicación formal podríamos definir el cuantificador universal y el cuantificador particular como la negación del universal, lo cual es impreciso. Si uno acepta la negación como noción primitiva y acepta el cuantificador universal como noción primitiva, entonces podemos definir el existencial. Hoy en día podemos cambiar una variable libre por otra sin cambiar el sentido de la frase, de igual manera se puede cambiar una variable ligada por otra con tal que esté ajustada al uso del cuantificador respectivo. Esta idea de "no repetición" es muy importante, si se cambia una variable por otra que esté ya cuantificada se la liga. Esto conduce al problema de la "ocurrencia de la variable"; cuando una variable no ocurre porque está ligada, hace referencia a que no sabemos cuál es la que se puede reemplazar.

Russell va llegando a la conclusión de que lo fundamental no son las proposiciones particulares sino la función proposicional y el concepto-clase (class-concept). Se menciona que cualquier término no denota un conjunto de términos, sino un solo término particular y definido. De igual manera, el autor menciona la importancia de "tales que" (such that), como la noción que permite que a partir de las funciones proposicionales podamos derivar las distintas clases. Dada una función proposicional ϕx, los términos "tales que" ϕx (x puede ser identificado como alguno de ellos), son los que pertenecen a la clase definida por ϕx. El uso de la noción concepto-clase está íntimamente unido al uso singular que hagamos de los "x tales que ϕx" (§ 84). No hay que olvidar que los conceptos son predicados que también se pueden llamar concepto-clase; éstos están íntimamente unidos a la génesis de las clases y a la labor denotativa que surge de las proposiciones sujeto-predicativas (§ 54).

Cuando él habla del concepto-clase, es precisamente porque quiere identificar la clase con el concepto; pero después va a ver que es mejor identificar la función proposicional con el concepto. Entonces va a ver siempre esa ambigüedad entre el concepto, la función y la clase. "Ser número natural" parece ser el concepto, pero también es un predicado monádico, y también es una función proposicional de un solo puesto. Uno podría identificar el concepto de número natural con el concepto del conjunto de los números naturales, con el predicado o con la función proposicional monádica "es un número natural" o "ser un número natural", o separar los tres: una cosa es el concepto, otra cosa es el conjunto de los que cumplen el concepto, y otra cosa es la función proposicional que produce la proposición que

enuncia que tal elemento es una instancia del concepto. Se debe de aclarar inicialmente si uno va a considerar las tres instancias mencionadas como diferentes o las va a identificar como similares.

Es conveniente distinguir ϕx como proposición, de $\phi\hat{x}$ como función proposicional y de $\hat{x}\phi x$ como concepto-clase; que actualmente es $\{x \mid \phi x\}$. No hay que confundir la barra "$\mid$" en $\{x \mid \phi x\}$ que es una abreviatura de "tales que" con la barra de Sheffer. Esta barra taquigráfica que corresponde con "tales que" tiene que ver con el problema que Russell propone sobre "los tales que". En PM el autor introduce la notación $\phi\hat{x}$, esto es porque está distinguiendo la función proposicional del conjunto; pero él lo pone como pura notación, al decir que $x \in \hat{x}\phi(x)$, lo que es una notación más enredada que decir ϕx. Parece que él identifica el conjunto con la función proposicional y que en el concepto-clase identifica el concepto con la clase, que hoy en día se llama conjunto. Nos preguntamos: ¿dónde queda la función proposicional? Adicionalmente, el sombrerito que se escribe sobre la variable $\hat{x}$ se puede interpretar como la línea del "tales que", que señala la presencia de un conjunto. También se ve que cuando utiliza "tales que" y dice los $x \mid \phi(x)$, cambia de concepto de función proposicional a una clase; luego no está identificando la función proposicional con la clase, pero sí está identificando la clase con el concepto, que por eso lo llama concepto-clase (class-concept). Sin embargo él también ve que el concepto clase se parece mucho al predicado; por ejemplo, el concepto-clase de número racional, ¿En qué se diferencia del predicado ser racional?

De esta manera, *cualquier término* no denota un conglomerado de términos, tan solo denota un término particular y específico; de igual manera denota diferentes términos en diferentes lugares. Podemos decir que *cualquier término* tiene alguna relación hacia cualquier término, que es una proposición muy distinta a: cualquier término tiene alguna relación hacia sí mismo (§ 93). De modo que las variables tienen una "individualidad" que surge de las funciones proposicionales, donde una variable no es simplemente cualquier término, sino cualquier término que entra en una función proposicional. Donde si ϕx es una función proposicional, x es 'el' término en cualquier proposición de la clase de proposiciones cuyo tipo es ϕx. Es decir, la noción de clase, con las nociones de función proposicional, la de cualquiera y la de denotación, están íntimamente unidas a la noción de variable. La palabra "individualidad" hace referencia a si la formula está bien formada o mal formada, sea el caso en el ejemplo: cualquier número complejo es mayor que cero, pero vemos que no existe tal situación porque si escribimos el término "z" en lugar de la "x" en la proposición del tipo $\phi x \equiv x > 0$, "$z > 0$" no tiene sentido para z un número complejo. La variable tiene su individualidad y no se la puede reemplazar por cualquier cosa: tiene que ser por un término que pertenezca a un concepto-clase o a un concepto-conjunto en donde tenga sentido. Lo que él llama "individualidad" es lo que surge de la función proposicional, que en este caso determina si tiene sentido comparar ese término con "mayor que".

Hemos de recordar que en PoM Russell introduce la definición de las matemáticas como "todas aquellas proposiciones de la forma p implica q", en donde no se sabe si p o q son verdaderos. Por eso se ha dicho que las matemáticas son aquello de lo cual nadie sabe de lo que está hablando ni si lo que está hablando es verdad. No obstante, parece que la idea que subyace a la noción de variable es muy mecánica, es un término que se puede reemplazar por otro, dejando a los demás elementos de la fórmula intactos. Pero esto le presenta un problema, ya que según lo anterior, un predicado también puede reemplazar a otro predicado y el cuantificador se puede cambiar por otro cuantificador. De igual manera podríamos cambiar la A al revés ($\forall$) por la E al revés ($\exists$); asimismo, la flecha ($\rightarrow$) se puede cambiar por un angulito de la y ($\wedge$) o la o ($\vee$), o un punto (.) para la y; refleja esa posibilidad de la variable de cambiar mecánicamente una porción de la formula dejando a las demás partes inalteradas. De igual manera cualquier letra latina, griega, o al revés sería una variable.

Russell cae en cuenta de que no es factible cambiar una sola variable ligada; entonces, si tenemos la expresión ($\exists$x) ϕ(x); uno no puede cambiar una sola de las x, tendría que cambiarlas ambas ya sea por dos y, o dos w. Entonces no se puede cambiar una sola variable ligada dejando a las demás inalteradas, debido a que cambia la interpretación de la frase. Él consideraba que si dejaba quieta la proposición "p implica q", podemos cambiar la p o la q por otra variable o constante; manteniendo la forma de la proposición inalterada, pero tenemos que la forma de una proposición es una idea primitiva. Nos viene el problema: ¿qué es un término? Es algo puramente sintáctico, es un símbolo, es la interpretación del símbolo? Todo esto nos lleva a una discusión que ocupó toda la primera mitad del siglo XX, y que sólo fue resuelta a comienzos de los años cincuenta con la semántica de Tarski y la teoría de los modelos; donde se explicita muy bien en qué sentido una teoría es posible antes de ser interpretada y cómo puede serlo a partir de un modelo. En este sentido habría un tipo de variables para los elementos y otros para las operaciones, para las relaciones, o para las conectivas. Luego el hecho de que una variable interprete un elemento no es esencial para la variable: puede interpretar un predicado, una relación binaria o un cuantificador.

Se dice que sólo hay variables para términos; sin embargo, él no ha abordado la definición de término. La única manera en que se ha podido formalizar la idea de término es diciendo que un símbolo constante es un término, o un símbolo variable es un término, o un operador n-ario saturado con n términos es un término y no hay más términos. Pero esto nos deja de nuevo por fuera los predicados, las relaciones, los cuantificadores que también pueden ser términos. No siendo conveniente una definición sintáctica de término, requerimos una definición semántica, siendo su condición que ese término tenga que interpretarse como un elemento del modelo; no como un predicado, ni una operación, ni una conectiva, para citar algunas. Por eso Russell, al decir que la variable es un término, está en una especie de círculo vicioso. Vemos que esa definición dada en PoM de término va a requerir un tratamiento más cuidadoso de su propuesta, en la cual va a considerar: si un término es simple o compuesto, donde tanto el uno como el otro puede ser variable o constante.

3.1 Las variables aparentes

Bertrand Russell, en su obra PM (Principia Mathematica) en el capítulo 8 del apéndice A, introduce la teoría para la deducción de proposiciones que contienen variables aparentes. En este capítulo vuelve a retomar las dos palabras que tanto lo inquietaron en la presentación de la noción de variable en PoM; se trata de *cualquiera* (any) que será asumida por *todo* (all) y *alguno* (some), que sigue siendo exactamente la misma en PoM que en PM. Sin embargo, existen dos importantes nociones adicionales; la una está en íntima relación con la nueva presentación que hace el autor de las proposiciones elementales como proposiciones atómicas o moleculares; frente a éstas tenemos la noción de incompatibilidad representada por la barra de Scheffer, que va a servir para volver a reescribir de manera mucho mas sucinta el cálculo de proposiciones. Pero además se mostró luego que es posible construir tan sólo a partir de una sola proposición todo el sistema deductivo, tal como lo logró Nicod. Y la segunda noción es la de individual, que está inicialmente expuesta en el prologo de la segunda edición de PM.

Aquí nos encontramos con el problema que él comienza a plantearse en PoM, ¿qué significa "any"? Ahora él lo identifica con todos y antes no, y no le gusta decir "todos"; ya que parece referirse como a un conjunto; en cambio, "cualquiera" sí se refiere a un elemento. En PM acepta que *todos* (all) y *cualquiera* (any) significan lo mismo; pero introduce la incompatibilidad, que puede considerarse como un predicado binario que dice que dos proposiciones son incompatibles. Lo cual es distinto a un operador binario, que simplemente arma una nueva proposición a partir de otras dos. Y esa diferencia entre conjunción como un predicado y conjunción como un operador es algo que todavía está muy ambiguo en Russell. Se tiene un problema parecido en la implicación como un operador, que no es más que la implicación material que pega con una flecha proposiciones, o como el predicado p implica q. En la incompatibilidad nos encontramos con el mismo problema; se trata de una barra que denota un operador, o se trata de un predicado de incompatibilidad, asunto que él no resuelve. La segunda idea nueva es la de "individual"* (ver nota pié de página), que viene fruto del tratamiento no resuelto en PoM frente a la noción de término: ¿qué significa que un término señale a otro término o señale a todos los términos? Él cae en cuenta de que le falta algo, que es: ¿cuáles letras se pueden reemplazar por elementos y cuáles no?

Russell se hace la pregunta si una variable ligada figura o no figura en la fórmula. Cuando uno dice $\forall x\ \phi(x)$, ¿esa x figura o no figura? Entonces él retrocede para hablar de variables libres y variables ligadas. Si decimos que la variable ligada ya no figura debido a que fue ligada, no es claro porqué sí podría ser cambiada por otra. Sea en la proposición $\forall x\ \phi(x)$. $\forall y\ \phi(y)$ sería exactamente la misma.

Al no figurar la variable ligada, viene un problema con el tipo; ya que esa variable puede ser de un tipo superior y si la ligo, ya no figura y pareciera que fuera del tipo cero. Nos podemos engañar al pensar que el tipo lo da la variable libre. Entonces él

introduce la admiración unida a la variable para la función proposicional ϕ ($\phi!$) para designar la matriz de tipo mínimo en referencia a una posible cuantificación de variables de orden superior. Pero aparece otra dificultad; la variable aparece escrita pero no figura en el sentido técnico de la palabra. Por eso decir que ocurre, aparece o figura puede inducir a error porque al ligarla (bound variable) desaparece aunque esté escrita. Uno podría reemplazarla por un vínculo, que es un artificio gráfico que liga el cuantificador con el espacio vacío donde estaría la variable: $\forall\phi(\ )$, ligando el cuantificador universal con el espacio vacío entre paréntesis. Tenemos que el problema está en la tipografía que es difícil poner un vínculo superior o inferior; la idea es que si se tiene un vínculo inferior que es como si se tuviera un subrayado, que indica que va del cuantificador universal al lugar libre no siendo necesario escribir la variable:

$\forall\phi(\ )$. Si se tiene un vínculo superior que va por encima de la formula y liga el cuantificador universal con el hueco libre para la variable, no hace falta escribirla: $\forall\phi(\ )$. Eso también significaría que también se puede dar $\forall x\ \phi(x)$, $\forall y\ \phi(y)$, $\forall z\ \phi(z)$; donde la letra repetida sólo indica cuál es el puesto de la función que está ligado, y que no se puede cambiar por una constante, pero eso va a crear un problema cuando se defina el tipo de una fórmula. El vínculo se usa para evitar colocar letras repetidas, significa que se ligó la variable. Hay que notar cómo Russell estuvo influenciado por Newton, cuyo modelo incluía la variable que fluye con el tiempo o fluxión que es el mismo concepto de derivada. Todo esto lleva al problema del cuantificador restringido. Hoy en día es fácil decir: $\forall x \in N, \exists y \in N, y = x + 1$, aquí la restricción del cuantificador dice que todo x que sea número natural se cumple la citada formula, pero técnicamente habría que expandirla para decir:

$\forall x, (x \in N \rightarrow (\exists y, y \in N \wedge (y = x + 1)))$; este artificio de restringir el cuantificador no lo tenía Russell. Pero siempre estaba él preocupado por el hecho, que hay que encontrar alguna restricción para que no se pueda reemplazar la x por cualquier cosa del universo. Eso es lo que se llama cuantificación restringida, y si se formaliza con la variable x, esa variable ya no se puede reemplazar por Sócrates. Porque si se restringe la variable a los números, Sócrates ya no es un número. Pero Russell no pudo encontrar una manera de restringir el cuantificador, sino optó por expandir las formulas a fin de involucrar las condiciones que no se debían de transgredir. Actualmente se usa el cuantificador restringido o una proposición previa que limite el campo de variación de la variable.

*** Nota: En referencia a la traducción del inglés, "individual" significa individuo como sustantivo, pero también significa individual como adjetivo; lo cuál no es posible que se dé en español, donde tan sólo es un adjetivo. Una cosa es "individual" como adjetivo para una proposición, y otra cosa es como nombre para una categoría. Esto favorece al autor y le permite ciertas maniobras, como poder decir: es una proposición individual o es una proposición sobre individuos. Donde "individual variable" puede significar una variable individual o es una variable que tiene cómo campo de variación individuos. En inglés es perfectamente intercambiable la una por la otra.**

Russell pensó en PoM y en la primera edición de PM que en la implicación formal $\phi x \supset \psi x$ no hacía falta el cuantificador; en su lugar creó un subíndice que colocaba junto a la implicación $\phi x \supset_x \psi x$. Vemos que en la implicación formal está involucrada la noción del cuantificador universal, pero él se contradecía afirmando que no hacía falta. Esto lo llevó a que en la segunda edición de PM eliminó la distinción entre implicación formal e implicación material, y además introdujo el cuantificador para evitar dejar frases con variables libres sin cuantificar. En la frase donde él dice que "se asevera el concepto de hombre", nos encontramos con una imprecisión, debido a que los conceptos no se aseveran sino las proposiciones. Parece que lo que él llama concepto es precisamente la función proposicional. Si asevero a x como hombre, parece que estoy aseverando el concepto hombre; pero si digo: x es hombre, luego x es mortal, podemos tener unos axiomas que ligan humanidad con mortalidad, que nos permiten probar el teorema. En esto se aprecia la tendencia de él de oponerse a las variables que vienen del cálculo y del análisis que son más cartesianas y newtonianas, y están relacionadas con el valor de una magnitud que cambia con el tiempo. Russell trata de precisar un concepto lógico de variable independiente de la variabilidad temporal.

Se ha de ver que restringir la variable no es lo mismo que ligarla; sea el caso en el siguiente ejemplo: el cuadrado de cualquier número natural tiene menos de tres cifras, es falso. Pero si se dice, el cuadrado de cualquier número natural que se escribe con un solo digito decimal tiene menos de tres cifras, es verdad. Vemos que uno tomó la clase más grande y la restringió, haciendo que la proposición se volviera verdadera; en cierto sentido hemos ligado la variable en cuanto no puede variar en todo el concepto original sino sólo en un subconjunto y además la hemos ligado con el cuantificador "cualquiera". Esto nos lleva a la cuantificación restringida: para cualquier número positivo, el cuadrado es también positivo. La proposición se restringe a los números positivos excluyendo el cero donde es falsa. Una cosa es restringir el conjunto donde puede variar la variable y otra cosa es ligarla de tal manera que no se pueda ya reemplazar por elementos uno a uno. Sea el caso de "cualquier hombre es mortal": si se formaliza con la variable "x", esa variable ya no se puede reemplazar por "Sócrates".

Para la definición de individual, el autor recuerda que las proposiciones elementales adoptan la forma de la siguiente serie:

$R_1(x), R_2(x, y), R_3(x, y, z), R_4(x, y, z, w),\ldots.$

Donde $R_1, R_2, R_3, R_4,\ldots$, son proposiciones atómicas. Éstas en general, pueden adoptar la forma R_n , donde tan solo R_n se da en una proposición atómica de la forma
$R_m(x_1, x_2, x_3,\ldots x_m)$, siempre y cuando n = m. Los términos x que se dan en cualquier forma de proposición atómica se van a llamar "individuales" o "particulares", mientras que los términos que se dan como R se denominarán "universales". En sí un "individual" es cualquier cosa (anything) que pueda ser el sujeto de una proposición atómica.

Si se dice: "R(x, y)", ¿es la "x" un individual o es un elemento? Para Russell es un individual, pero va a decir que la relación R no es un individual sino un universal. Entonces, ¿la herradura de la implicación ($\supset$) es un universal o es un particular? Obviamente es un universal al no poder ser reemplazada por un elemento, pero la palabra "universal" crea una polémica grande. Según esto, el cuantificador particular sería un universal y el cuantificador universal también sería un universal. Entonces hay que precisar y distinguir entre cuáles símbolos se interpretan por elementos, cuáles se interpretan por relaciones y cuáles se interpretan por operadores dentro de un universo. Después nos vamos al nivel lógico para decir que va a ver operadores lógicos y relatores lógicos; y dentro de los operadores lógicos está la negación, los cuantificadores y las conectivas binarias, etc. Pero en ese tiempo no era claro todo esto; lo que él sí tenía claro era que algo distinguía unos símbolos que siempre se interpretaban como elementos, pero él usaba la palabra "término" y las llamaba "individuales". Hoy en día no se diría que el término x se puede interpretar como cualquier término de los números naturales, sino que el término x se puede reemplazar por cualquier constante, que se interprete exactamente como uno de los números naturales. Pero a los números naturales no los vamos a llamar términos; él está viendo el problema y propone llamar término individual a aquello que solamente se puede reemplazar por individuales o particulares. No se los va a reemplazar por un elemento, debido a que él no usaba tal palabra.

En la segunda edición de PM, Russell introduce la incompatibilidad ($|$) como una nueva idea primitiva: $p|q$, que puede leerse "p es incompatible con q", que es verdadera cuando alguna o ambas son falsas. Dada una proposición atómica de la forma R_n (x_1, x_2, x_3, . . . x_n), llamaremos a cada x un "constituyente" de la proposición, y a R_n un "componente" de la proposición. Lo mismo se daría si fuera una proposición molecular. De nuevo Russell desea manejar la noción de proposición elemental estructurada como una incompatibilidad y su negación como una incompatibilidad de ella consigo misma. A tal punto prosigue introduciendo $p | q$, como una proposición elemental; donde p, q pueden ser proposiciones atómicas o moleculares. Llamaremos a p, q "partes" de $p|q$; y así sucesivamente hasta que alcancemos las partes atómicas de $p|q$; de igual manera si una proposición r se da en $p|q$, r será una parte de $p|q$. Así,
$\sim p \equiv p|p$.

Como la variable requiere para su definición variadas nociones, entre ellas la definición de función proposicional elemental, hemos de poder desarrollarla en referencia a las nociones que estamos tratando de individual y de incompatibilidad. Aquí viene el problema de si las variables "ocurren" o "figuran", donde es fácil decir que está ligada o libre. Pero cuando Russell liga la variable, no se sabe si ocurre o no ocurre; si está libre no hay problema ocurre o figura, pero si está ligada sucede que no ocurre en cuanto no se la puede reemplazar, pero sí ocurre sintácticamente en la formula. Donde se inserta un número en el puesto libre de la formula, se entiende que en la función reemplaza el argumento por el valor. Si se inserta el símbolo del argumento en una formula en donde figura el símbolo de la

función, se entiende que la expresión f(x) es un símbolo del valor de la función en el argumento x. Pero si estamos hablando de la interpretación del modelo, estamos frente a lo que a lo que podríamos llamar "un molino para moler números"; donde se da un proceso que incorpora números y produce valores. La función desde el punto de vista dinámico puede ser apreciada como un operador que transforma el argumento en un valor; y desde un punto de vista estático equivale a una función que escoge un valor que corresponda con el argumento: tenemos que se trata más bien de una correspondencia.

Si tenemos una función proposicional original ϕa, donde existen unos constituyentes como a, que es un individual que puede ser reemplazado por otros individuales, lo que nos lleva a una colección de proposiciones elementales. Si reemplazamos a por la variable x , ϕa se convertirá en la función proposicional ϕx; cuyo argumento es x y sus valores son funciones proposicionales elementales. Donde ϕx colecciona un conjunto específico de proposiciones, aquellas cuyos argumentos poseen un valor distinto. Si p es una parte de alguna proposición molecular, se puede considerar el conjunto de proposiciones que resultan, substituyéndolas por p. La proposición molecular inicial es fp, es susceptible de albergar distintas sustituciones de p por otras proposiciones. Cuando tenemos una matriz con una proposición que se da dos veces, podemos obtener tres funciones si la hacemos variar. Sea el caso en p | p es el valor de una de las siguientes proposiciones; p | q, q | p, q | q, donde q es el argumento. Si aseveramos una proposición "$\vdash . (p) . Fp$ ", la p ya no figura en ella, pero sí es Fp, sin que podamos determinar si en Fp figuran otras variables como q, r,.. De igual manera podemos aseverar una proposición de la forma "$(x) . \phi x$", que significa que todas las proposiciones de la colección contenida en ϕx son verdaderas. Allí no figura la x, pero sí en ϕx, sin poder determinar si en ϕx figuran otras variables como y, z, ...

Dada una función cualquiera, puede suceder que todos sus valores sean verdaderos, o que al menos un valor sea verdadero. La función proposicional $\phi (x, y, z, ...)$ cuyos valores son todos verdaderos puede expresarse como: "$(x, y, z, ...) . \phi (x, y, z, ...)$", donde su aseveración es "$\vdash . \phi (x, y, z,...)$". Es el caso en que queramos considerar todas las variables como individuales y, además, que tengamos una función proposicional elemental que pueda ser expresada usando la función de barra. Todo esto nos lleva al desarrollo, en el capítulo III del prólogo a la segunda edición de PM, a una teoría general aplicada a las proposiciones, que el autor llama "de alcance limitado" (limited scope). Para esto se introducen dos nuevas ideas primitivas que vienen a expresar lo que denominaremos una variable aparente, tal como se dice a continuación:

" ϕx es siempre verdadero " y " ϕx es algunas veces verdadero ",

Las primeras pueden verse abreviadas a "siempre ϕx", que será notado como $(x) . \phi x$. Cuya proposición para varias variables sería de la forma: $(x, y, z,...) . \phi (x, y, z, ...)$.

Y la proposición "algunas veces ϕx", que será notada por $(\exists x).\phi x$, donde ésta última puede leerse "existe un x tal que ϕx". Su proposición para varias variables estaría dada por: $(\exists x, y, z, \ldots) . \phi(x, y, z, \ldots)$.

Además de estas dos proposiciones, se pueden formar otras muy parecidas. Consideremos una función de dos variables; podemos formar las siguientes proposiciones:

$(\exists x) : (y) . \phi(x, y)$, $(x) : (\exists y) . \phi(x, y)$, $(\exists y) : (x) . \phi(x, y)$, $(y) : (\exists x) . \phi(x, y)$.

Todas estas proposiciones son sustancialmente muy distintas entre sí. Podemos mirar la función $\phi(x, y)$ como si estuviera conformada en dos etapas. Dados $\phi(a, b)$, donde a y b son constantes, podemos formar primero una función $\phi(a, y)$, que contiene una variable y; a partir de la cual podemos formar $(y) . \phi(a, y)$, $(\exists y) . \phi(a, y)$.

A su vez podemos variar a, obteniendo de nuevo una función de una variable, que nos lleva a las siguientes cuatro proposiciones:

$(x) : (y) . \phi(x, y)$, $(\exists x) : (y) . \phi(x, y)$, $(x) : (\exists y) . \phi(x, y)$, $(\exists x) : (\exists y) . \phi(x, y)$.

Por el otro lado, podemos irnos de $\phi(a, b)$ a $\phi(x, b)$, y desde allí a $(x) . \phi(x, b)$ y $(\exists x) . \phi(x, b)$, lo que nos lleva a

$(y) : (x) . \phi(x, y)$, $(\exists y) : (x) . \phi(x, y)$, $(y) : (\exists x) . \phi(x, y)$, $(\exists y) : (\exists x) . \phi(x, y)$.

Todas estas proposiciones se llaman "proposiciones generales", de manera que podemos derivar ocho proposiciones generales a partir de la función $\phi(x, y)$. A partir de aquí, podemos establecer las siguientes equivalencias:

$(x) : (y) . \phi(x, y) : \equiv : (y) : (x) . \phi(x, y)$,
$(\exists x) : (\exists y) . \phi(x, y) . \equiv . (\exists y) : (\exists x) . \phi(x, y)$.

De esta manera Russell considera cada función como constituida de muchas variables obtenidas a través de "pasos sucesivos"; así, cada una involucra solamente una función de una variable (cap II, § 3). La ventaja de esta consideración estriba únicamente en que las funciones de una variable pueden tomarse como una idea primitiva. No obstante, el caso anterior parece requerir que debemos primero variar x manteniendo y constante; o variar y manteniendo x constante. Lo cual se da cuando (y) o $(\exists y)$ aparece a la izquierda de

(x) o de ($\exists$x). También podemos tener el otro caso de manera parecida si tenemos x en vez de y. Sin embargo, existe algo que no nos favorece en el "método de los pasos sucesivos", debido a que interfiere con el método de las matrices, que es fundamental para la generación de proposiciones y funciones que se exige para la teoría de los tipos.

Al considerar una función elemental como ϕ (x_1, x_2, x_3, ...x_n), donde las variables para cada (x_r), ya sea (x_r) o ($\exists x_r$) pueden tomar el orden que queramos. Llamamos a ϕ (x_1, x_2, x_3, ... x_n) "la matriz" y lo que está primero lo hemos de llamar el "prefijo". De manera que en "($\exists$x) : (y) . ϕ (x, y)", "ϕ (x, y)" es la matriz y "($\exists$x) : (y)" es el prefijo. Una matriz que contiene n variables nos da lugar a $n!2^n$ proposiciones cuando estas variables toman todos los ordenes posibles, y distinguiendo en cada caso entre (x_r) y ($\exists x_r$). El proceso para la obtención de tales proposiciones a partir de una matriz se llamará "generalización", sin importar si tomamos "todos los valores" o "algún valor", y las proposiciones que resultan las denominaremos "proposiciones generales". En caso de que la matriz contenga variables que no son individuales, agregaríamos que una "matriz" es una función para cualquier número de variables (que pueden ser o no ser individuales), las cuales tienen proposiciones elementales como sus valores. Además diremos, que una "proposición de primer orden" (first–order proposition,) es aquella derivada por medio de la generalización de una matriz en la cual todas las variables son individuales.

Aquí Russell va a tratar de indicar en qué sentido, a medida que se van agregando cuantificadores, lo que está indicado de adentro para fuera, son pasos sucesivos en el sentido del tiempo. Se tiene una cadena de cuantificadores universales y existenciales, donde hay que empezar a ver que el primero de atrás es el último que cuantifica. Hay que tener mucho cuidado con los "pasos sucesivos". No es para señalar el sentido de una sucesión, porque el orden en que se escriben los cuantificadores es al revés de los pasos sucesivos. Además, hay un problema en la proposición de primer orden, que bien podría ser una proposición elemental o una proposición de primer tipo. Él las llama de primer orden porque las variables no se refieren a conjuntos ni a funciones, sino a individuos o individuales.

3.2 Ampliaciones a la teoría de las variables aparentes

En la sección B de PM que se corresponde con el capítulo 9, Russell presenta "la teoría de las variables aparentes". No obstante que en el prologo de la segunda edición de PM él mismo dice que el apéndice A, que corresponde al capítulo 8, reemplaza al numeral 9, hemos creído conveniente mirar de cerca esta sección para poder analizar en qué se diferencia de la propuesta final contenida en el citado prólogo. El autor comienza presentando las dos ideas primitivas ya conocidas por nosotros, como son "siempre ϕx verdadero" y "algunas veces ϕx verdadero". Estas proposiciones pueden aseverarse para todos los valores de la función $\phi\hat{x}$, donde $\phi\hat{x}$ es la misma función (opuesta a un valor ambiguo de ésta, como lo sería si

decimos "x se lastimó", es un valor ambiguo de la función proposicional "$\hat{x}$ se lastimó"). Cuando especificamos la "individualidad" definida de x, esta ambigüedad se elimina. Aquí está el problema del "scope" o campo de variación de x, distinto del "scope" o alcance de (x) o de (∃x). Prosigue el autor al señalar que no estamos aseverando ϕx para todos los valores de x, dado que según la teoría de los tipos, existen valores de x para los cuales ϕx carece de significado.

La palabra "scope", o alcance de la variable, se distingue del "scope" o alcance del cuantificador, que dice hasta qué parte de la formula se extiende el cuantificador, y que hace que sea tan difícil poner los puntos. Pero otra cosa parece ser el "scope" de la variable, que hoy en día llamamos el conjunto de valores sobre los que se va a usar la variable. Por ejemplo, cuando se dice: "la variable n la voy a usar sobre los números naturales, y la variable x la voy a usar sobre los números reales". Se dice que para cualquier n existe un número real x entre n y n + 1. O sea si los naturales son infinitos, los reales también lo son en el sentido del orden aditivo. Entonces en estos casos el alcance de la variable (sea n o x) es distinto al alcance del cuantificador, sea (n) o (∃n). Hay que tener en cuenta que existen dos formas de alcance "scope", una es "el alcance del cuantificador" y otra es "el alcance de la variable".

Denotaremos la proposición "siempre ϕx" por (x) . ϕx. La forma en que se dan tales proposiciones es con relación a la "implicación formal", como lo sería en (x) : ϕx . ⊃ . ψx, es decir "ϕx siempre implica a ψx". Bajo esta forma se expresa la afirmación universal: "todos los objetos que tienen la propiedad ϕ tienen la propiedad ψ". En el caso de "algunas veces ϕx", esto puede expresarse como (∃x) . ϕx, que significaría "existe un x tal que ϕx". En cualquiera de estas dos formas, la x se llama una variable aparente. Cuando una proposición no contiene variables aparentes se denomina una "proposición elemental", y una función cuyos valores son proposiciones elementales se llama una función elemental. Estas proposiciones aparentes pueden también llamarse "proposiciones de primer orden", que evocan diferentes proposiciones primitivas susceptibles de albergar variados significados para las nociones de negación y disyunción. Este hecho evoca la naturaleza múltiple de la variable aparente, que permite tratar proposiciones de cualquier orden. Siguiendo la misma metodología que se usa frente a las proposiciones elementales, se pueden encontrar las mismas ideas y proposiciones primitivas que se aplican para las variables aparentes. Debido a que las proposiciones que tienen variables aparentes se diferencian de las proposiciones elementales, se hace necesario redefinir las nociones tanto de la negación como de la disyunción. Aquí tenemos que se refiere a que se puede empezar con la negación y la implicación, para pasar luego a definir la disyunción; también se puede empezar con la negación y la disyunción y se pasa a definir la implicación. De igual manera se puede empezar con la barra de Sheffer y se pasa a definir todas las demás, tanto la negación, como la disyunción y la implicación.

Es conveniente recordar cómo la disyunción y la negación no poseen el mismo significado en las proposiciones elementales que en las proposiciones de primer tipo;

esto nos lleva a que las proposiciones primitivas mencionadas en el capítulo 1 de PM tan sólo podrían aplicarse en referencia a un tipo específico, o como la aseveración de diferentes proposiciones primitivas a las que les corresponden distintos significados de la disyunción y de la negación. En la teoría de los tipos requerimos unas nuevas ideas primitivas tanto de la disyunción como de la negación, sin que sea necesario hacer una distinción de estas nociones frente al tipo que han de representar. Mientras las proposiciones no aparezcan con variables aparentes, podemos ignorar la distinción entre los distintos tipos de proposiciones y entre los distintos significados para la negación y la disyunción. Existe en Russell una diferencia entre orden y tipo, en cuanto puede tenerse un orden superior y un tipo superior. Se entiende en relación a las proposiciones elementales que son de primer orden, cuando la variable no ha sido cuantificada previamente; si ya lo ha sido, se dice que es de un orden superior y pertenece a un conjunto de tipo superior.

Russell manifiesta que su interés en tratar el tema de las variables aparentes es meramente filosófico; su utilidad radica en poder mostrar cómo, por medio de ciertas proposiciones primitivas, podemos deducir a partir de la teoría para las proposiciones elementales la teoría para las proposiciones que contienen variables aparentes, pudiéndose ignorar desde el punto de vista técnico la distinción entre una proposición elemental y otras proposiciones de tipo superior; mientras estas proposiciones no contengan variables aparentes. Se puede considerar las proposiciones primitivas del capítulo 1 como aplicables a las proposiciones de cualquier tipo.

El tema de las proposiciones de primer orden, de primer tipo, las proposiciones elementales no es fácil discernir sus diferencias en Russell. Pareciera que en muchas ocasiones las usa cómo intercambiables, sea el caso cuando él llama "de primer orden" en referencia a que todas las variables son individuales; sin olvidar que no se cuantifica sobre proposiciones ni sobre conjuntos. Parece ser lo mismo para las elementales: cuando él tiene variables que va cuantificando, entonces no quiere llamar a esa proposición elemental en cuanto pudo haber cuantificado algo de tipo superior, y aparentemente esa matriz estaría dada para una sola variable libre que ya no sería constituyente de una proposición elemental. Se podría decir que hay dos variables, una sobre conjuntos y la otra sobre individuales. Supongamos que uno dice: para todo conjunto y, ϕy; pero la ϕy es de la forma $(\exists x)\ \phi(x, y)$, en donde la $\phi(x, y)$ está parcialmente cerrada, pues allí figuraba la x como variable libre y al cuantificarla se volvió aparente. Pareciera que esa formula fuera elemental, porque tiene solamente una variable libre sobre elementales; pero ya no lo es. Es conveniente que la formula no contenga variables aparentes y si las tiene es porque están cuantificadas. Se entiende que él quiere evitarse repetir todas las proposiciones primitivas para cada tipo, pues prácticamente estaría poniendo un axioma para cada tipo. Pero después, cuando vaya a definir los números naturales, tiene el problema que cada número natural tiene un tipo finito, mientras que el conjunto de los números naturales no. Esto lleva a que ni en la aritmética elemental es posible formalizar el quinto axioma de Peano debido a la teoría de los tipos.

Russell se da cuenta de esto, pero no sabe cómo solucionar estos problemas. Tenemos el ejemplo del axioma de inducción completo de Peano:
$\forall\phi$, ($\phi(0)$ $\wedge$ $\forall$n, ($\phi(n) \supset \phi(n+1)$) $\supset$ $\forall$n, ($\phi(n+1)$)), se tiene que se está cuantificando sobre cualquiera de las ϕ (se puede decir que ϕ es una función de primer orden o ϕx es una proposición elemental de primer orden).

Adicionalmente se recomienda no usar la inducción matemática, método que todavía no se puede aplicar hasta que la teoría para las variables aparentes quede completamente establecida. Para llegar a los tipos mas altos de proposiciones, es fundamental este "paso a paso". De lo contrario se necesita una variable aparente que pueda deambular de tipo en tipo, lo que contradice el principio a partir del cual se construye la teoría de los tipos. Es de entenderse que con la inducción matemática cualquier formula tiene una variable numérica libre; esto lleva a que no se cuantifique sobre individuales sino sobre las mismas funciones $\phi\hat{x}$, lo que en la terminología actual se llamaría "lógica de segundo orden".

Veamos a continuación el tratamiento de las nociones primitivas de la negación y de la disyunción para proposiciones con variables aparentes, como también de las demás definiciones para las respectivas proposiciones primitivas.

La definición de la negación:

***9·01.** $\sim\{ (x) . \phi x \} . = . (\exists x) . \sim \phi x$ **Df**

" No es el caso que ϕx sea siempre verdadero " , lo que puede también entenderse como: "Es el caso que no-ϕx sea algunas veces verdadero"

***9·02.** $\sim \{ (\exists x) . \phi x \} . = . (x) . \sim \phi x$ **Df**

"No es el caso que ϕx sea algunas veces verdadero", que también puede entenderse como: " Es el caso que no-ϕx sea siempre verdadero".

A fin de evitar los paréntesis, escribiremos:
$\sim (x) . \phi x$ **en vez de** $\sim \{ (x) . \phi x \}$ **; y,** $\sim (\exists x) . \phi x$ **en vez de** $\sim \{ (\exists x) . \phi x \}$.

Definición de la disyunción
Cuando una o ambas proposiciones sean de primer orden, podemos distinguir seis casos como siguen:

***9·03.** $(x) . \phi x . \vee . p : = . (x) . \phi x \vee p$ **Df**

***9·04.** $p . \vee . (x) . \phi x : = . (x) . p \vee \phi x$ **Df**

***9·05.** $(\exists x) . \phi x . \vee . p : = . (\exists x) . \phi x \vee p$ **Df**

***9·06.** $p \,.\, v \,.\, (\exists x) \,.\, \phi x \;:\; = \,.\, (\exists x) \,.\, p \;v\; \phi x$ **Df**

***9·07.** $(x) \,.\, \phi x \,.\, v \,.\, (\exists y) \,.\, \psi y : = : (x) : (\exists y) \,.\, \phi x \;v\; \psi y$ **Df**

***9·08.** $(\exists y) \,.\, \psi y \,.\, v \,.\, (x) \,.\, \phi x : = : (x) : (\exists y) \,.\, \psi y \;v\; \phi x$ **Df**

Las últimas dos definiciones *9·07·08 tan sólo se aplican cuando alguna de las dos proposiciones ϕ y ψ no es una función elemental. Adicionalmente en virtud de estas definiciones, el alcance verdadero de una variable aparente es siempre toda la proposición aseverada. Las definiciones de implicación, producto lógico, y equivalencia permanecen inmodificables tanto para $(x) \,.\, \phi x$ como para $(\exists x) \,.\, \phi x$. De igual manera las anteriores definiciones pueden repetirse para proposiciones de varios tipos.

3.3 Proposiciones primitivas

Las proposiciones primitivas que se requieren son seis, pudiendo dividirse en tres conjuntos de dos cada uno. Primero tenemos las dos proposiciones que permiten establecer el paso de una proposición elemental a una proposición de primer orden:

***9·1.** $\vdash : \phi x \,.\, \supset \,.\, (\exists z) \,.\, \phi z$ **Pp**

***9·11.** $\vdash : \phi x \;v\; \phi y \,.\, \supset \,.\, (\exists z) \,.\, \phi z$ **Pp**

Donde la primera establece que si ϕx es verdadero, existe un valor de $\phi \hat{z}$ que es verdadero; es decir, podemos encontrar una instancia donde la función es verdadera, luego la función es “algunas veces verdadera”. La primera proposición nos aporta el único método para probar los axiomas de existencia (the above primitive proposition gives the only method of proving “existence-theorems”), es decir aquellos donde tenemos un $(\exists z) \,.\, \phi z$ para algún ϕ particular. Esto hace que se dé un grave problema, que habría que compararlo con la *10.23. La primera proposición permite la generalización particular; si se puede aseverar ϕx, por lo menos se puede asegurar que uno de los verificantes la cumple. La introducción del cuantificador existencial pareciera fácil, pero al decir que es el único método se contradice con la proposición que vamos a encontrar más adelante; donde también se está introduciendo un axioma de existencia. ¿Puede plantearse la utilización de dos métodos?

Hoy en día se dice que si uno tiene una proposición cuantificada universalmente no puede pasar a la existencial a menos que sepa que tiene verificantes; pero si sabe que los tiene, es porque al menos uno la verifica. Pero cuando Russell dice que es el único método que tenemos para probar los axiomas de existencia pero cuando sabemos que todos la cumplen, pareciera que es un caso inútil. Siendo una dificultad para todos los lógicos ver cuándo se puede probar al menos un solo teorema de existencia, sin tener que recurrir a que el único camino es que todos lo cumplan. Él

al aseverar una proposición con una variable libre, considera que todas sus instancias son verdaderas. Entonces ya puede introducir el cuantificador existencial si está seguro de que ϕx tiene verificantes: cualquiera de ellos va a permitir introducir el existencial. Pero él no ha efectuado el ejercicio de probar si una proposición tiene verificantes, y es lo que hace tan interesante la proposición *9.1. El problema de fondo es que la proposición $(x) . \phi(x)$ sería verdadera si le función $\phi\hat{x}$ no tiene ningún verificante, con lo cual la proposición existencial $(\exists x) . \phi x$ sería falsa. Habría que tener información adicional acerca de que la clase $\hat{x}\phi x$ no está vacía. Notamos que Russell consideraba que toda función proposicional razonable tenía que tener algún verificante, pero la proposición $(x). \phi x$ es verdadera cuando $\hat{x}\phi x$ no tiene ningún elemento; y si no hay verificantes, se entiende que el cuantificador universal es válido. Él pensaba que no se podía escribir ϕx, sino todos los x que satisfacen la función ϕ; por lo tanto de ϕx se puede deducir que existe un z que cumple ϕz. Hoy en día ya no es así, dado que habría que tener información adicional acerca de que la clase de los verificantes de ϕx no está vacía.

La segunda proposición primitiva se usa específicamente para probar la simplificación $(\exists z) . \phi z . \vee . (\exists z) . \phi z :\supset . (\exists z) . \phi z$, la cual es análoga a *1·2 donde tenemos $p \vee p . \supset . p$, cuando p se reemplaza por $(\exists z) . \phi z$. El efecto de esta proposición primitiva está en enfatizar la ambigüedad de z requerida para asegurar $(\exists z) . \phi z$. De la primera proposición anterior tenemos:

$\phi x \;.\supset .\, (\exists z) . \phi z$ y $\phi y \;.\supset .\, (\exists z) . \phi z$

Pero si tratamos de inferir a partir de éstas que $\phi x \vee \phi y \;.\supset. (\exists z) . \phi z$, tenemos que usar la proposición $q \supset p . r \supset p .\supset . q \vee r \supset p$, donde p es $(\exists z) . \phi z$.

Las siguientes dos proposiciones están relacionadas con la inferencia a partir de proposiciones que contienen variables aparentes. Ante todo tenemos un nuevo significado de la implicación tal como se deriva de las anteriores definiciones de la negación y de la disyunción, análoga a *1·1, a saber:

*9·12. Lo que está implicado por una proposición verdadera es verdadero. Pp.

Es decir, dadas las proposiciones "$\vdash . p$" y "$\vdash . p \supset q$", podemos proceder a "$\vdash . q$", aun cuando las proposiciones p, q, no sean elementales. También, tal como en *1·11, procedemos de "$\vdash . \phi x$, y "$\vdash . \phi x \supset \psi x$" a "$\vdash . \psi x$ ", donde x es una variable real, y tanto ϕ como ψ no son necesariamente funciones elementales.

La siguiente proposición nos permite el paso desde una variable real a una aparente. Cuando ϕy , donde y puede ser cualquier argumento posible, entonces podemos aseverar $(x) . \phi x$. En otras palabras, si ϕy es verdadero sin importar el y escogido entre sus posibles argumentos, luego $(x) . \phi x$ es verdadero. Es decir, si aseveramos de manera completa un valor ambiguo de ϕy, debe serlo porque todos sus valores son verdaderos. Podemos expresar esta proposición primitiva en las siguientes

palabras: "lo que es verdadero en cualquier caso, sin importar el caso seleccionado, es verdadero en todos los casos". Podemos simbolizar esta proposición si colocamos"$\vdash . \phi y . \supset . (x) . \phi x$", pero esto podría significar " sin importar qué y escojamos, ϕy implica a $(x) . \phi x$, lo que en general es falso. Lo que quisimos decir es: "si ϕy es verdadero sin importar el y escogido, luego es verdadero $(x) . \phi x$".

***9·13. En cualquier aseveración que contenga una variable real, esta variable real puede cambiarse a una variable aparente, que la asevere para todos los valores posibles que satisfacen la función. Pp**

Las siguientes dos proposiciones primitivas están relacionadas con la teoría de los tipos. Para esto necesitamos una nueva idea primitiva llamada "individual". Decimos que un x es un individual si x no es ni una proposición ni una función. Notemos que esta definición es muy distinta a la contenida en la segunda introducción a PM, donde se define la noción de individual como el sujeto de cualquier proposición atómica. Pareciera que el no querer identificar al individual ni con una proposición ni con una función fuera algo que luego sería llenado de alguna manera con los manejos que parten de la noción de incompatibilidad con la barra de Scheffer. Sin embargo, este salto está más en querer satisfacer algunas exigencias conceptuales en la teoría de los tipos, posición que él varió en la segunda introducción de PM, donde el individual aparece en una proposición atómica sobre individuales, que va a ser cómo la matriz prototipo que es la que se deja manejar a partir de una sucesión de pasos de cuantificación.

Uno se pregunta cuál es el importante rodeo que se esconde en el número 9. El profesor Federici hacía caer en la cuenta de que cuando uno no sabe cómo definir una propiedad, como por ejemplo ser de tipo uno, puede usar un rodeo, que es definir "ser del mismo tipo", lo cuál hace que uno no se comprometa con definir tipo. Porque al definir una relación de equivalencia "es del mismo tipo que", basta probar que es una equivalencia sin decir directamente qué es "tipo". El truco es precisar qué significa "a es lo mismo de x que b", sin decir nunca que es x. Russell no va a decir qué es el tipo, pero si va a decir "qué es tener el mismo tipo", y eso sí es operalizable. Todo lo anterior muestra cómo prácticamente nadie ha podido definir otras nociones como: masa, energía, fuerza, magnitud, longitud; simplemente se limitan a dar ejemplos indirectos concretos, donde se puede apreciar el uso de la noción sin entrar a definirla. Lo mismo hace Russell en la segunda introducción de PM, donde define que es tener el mismo tipo sin entrar a definir tipo.

***9·131. Definición de "ser del mismo tipo". Siguiendo una definición paso a paso (step-by-step), muy usada en el manejo mismo de la definición de la variable, donde la definición para los tipos superiores está soportada en aquella de los tipos inferiores, decimos que 'u' y 'v' son del mismo tipo si:**

i. **Ambas son individuales,**
ii. **ambas son funciones elementales que toman argumentos del mismo tipo,**
iii. **'u' es una función y 'v' es su negación,**

iv. u es $\phi\hat{x}$ o $\psi\hat{x}$, v es $\phi\hat{x}$ v $\psi\hat{x}$, donde $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$ son funciones elementales,

v. u es (y) . $\phi(\hat{x}, y)$, v es (z) . $\psi(\hat{x}, z)$, donde $\phi(\hat{x}, \hat{y})$, $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ son del mismo tipo,

vi. ambas son proposiciones elementales,

vii. u es una proposición y v es $\sim$ u ,

viii. u es (x) . ϕx y v es (y) . ψy , donde $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$ son del mismo tipo.

Nuestras proposiciones primitivas son:

***9·14. " ϕx " es significativo, si x es del mismo tipo de a y "ϕa" es significativo, y viceversa. Pp.**

***9·15. Si, para alguna a, hay una proposición ϕa, entonces hay una función $\phi\hat{x}$, y viceversa. Pp.**

Nótese que aquí reaparece el problema de una posible función proposicional $\phi\hat{x}$ para la cual $\hat{x}\phi x$ es el conjunto vacío, con lo cual no habría ninguna proposición ϕa verdadera, pero sí sería significativa. Esto nos lleva a ver que una cosa es decir que una proposición es verdadera o falsa, y otra cosa es si la proposición tiene significado o no lo tiene. Porque si la proposición tiene significado, sí se puede estudiar si es verdadera o falsa. Y esto es lo que hace Russell en referencia a las paradojas; que no son verdaderas ni falsas, sino que no tienen significado. Aspecto que también se presenta cuando una proposición tiene significado pero no tiene verificantes; este es un problema aún no resuelto en la segunda edición de PM.

(x) . ϕx . $\supset$. p significa que
$\sim$ (x) . ϕx . $\vee$. p, lo que equivale a ($\exists$x) . $\sim$ ϕx . $\vee$. p, también a
($\exists$x) . $\sim$ ϕx $\vee$ p, y también a ($\exists$x) . ϕx $\supset$ p
($\exists$x) . ϕx . $\supset$. p significa que
$\sim$ ($\exists$x) . ϕx . $\vee$. p, es decir (x) . $\sim$ ϕx . $\vee$. p , también a
(x) . $\sim$ ϕx $\vee$ p , y también a (x) . ϕx $\supset$ p

Para probar que tanto (x) . ϕx como ($\exists$x) . ϕx obedecen las mismas reglas de deducción que ϕx, se tiene que probar que las proposiciones de las formas (x) . ϕx , ($\exists$x) . ϕx pueden reemplazar una o mas de las proposiciones p, q, r en *1·2 -*1·6. Cuando esto se pruebe, las pruebas previas de las subsecuentes proposiciones *2 - *5 pueden aplicarse.

***9·2 $\vdash$: (x) . ϕx . $\supset$. ϕy**

Luego Russell comienza prácticamente desde el comienzo, debido al problema de las implicaciones. Recuerda que el problema principal era colocar la x pequeña debajo del signo de implicación ($\supset_x$), que es equivalente a un cuantificador universal. Todo

esto lleva a la necesidad de presentar en las próximas proposiciones la implicación formal cuando tiene el cuantificador universal. También tenemos el problema de que la implicación formal a veces se utiliza para proposiciones elementales, cómo es el caso que viene a continuación, donde se aplica una especie de silogismo: si p implica q, y si q implica r, entonces p implica r. Después tenemos la implicación formal que a veces se va a poner aseverada con variable y en otras se va a colocar con un subíndice para introducir el cuantificador universal. Se ve en él toda una lucha para poder escribir correctamente el cuantificador universal, que va desde la proposición $\phi x \supset_x \psi x$, a la expresión $(x). \phi x \supset \psi x$, y a una algo redundante en $(x) . \phi x \supset_x \psi x$; todo esto señala el camino de la eliminación del subíndice porque el cuantificador universal lo va a reemplazar.

A continuación vamos a mirar más de cerca las consideraciones comprendidas en el capítulo 10, que versa acerca de las proposiciones con una sola variable aparente. Inicialmente el autor manifiesta que su propósito inicial es extender a implicaciones formales (proposiciones de la forma $(x) . \phi x \supset \psi x$, que luego se va a volver en *10.02: $\phi x \supset_x \psi x . = . (x) . \phi x \supset \psi x$, para poder satisfacer la necesidad del cuantificador universal) la mayor cantidad posible de proposiciones probadas previamente para las implicaciones materiales, o sea; para proposiciones de la forma $p \supset q$. Siguiendo el ejemplo:

Tenemos	$p \supset q . q \supset r . \supset . p \supset r$
donde	**p = Sócrates es griego**
	q = Sócrates es hombre
	r = Sócrates es mortal

Pero esto no prueba necesariamente que todos los griegos son hombres, que todos los hombres son mortales, y que todos los griegos son mortales.

Colocando	$\phi x . = .$ **x es griego**
	$\psi x . = .$ **x es hombre**
	$\chi x . = .$ **x es mortal**

hemos de probar

$$(x) . \phi x \supset \psi x : (x) . \psi x \supset \chi x :\supset: (x) . \phi x \supset \chi x$$

Se verá que la implicación formal $((x) . \phi x \supset \psi x)$ es una relación entre dos funciones $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$. Muchas de las propiedades formales de esta relación son análogas a las propiedades de la relación "$p \supset q$", que expresan la implicación material; son tales casos análogos los que hemos de probar a continuación.

Hemos de asumir en este numeral lo explicado anteriormente en referencia a la teoría de las variables aparentes, donde las proposiciones de los numerales del *1 al *5 pueden aplicarse a proposiciones como $(x) . \phi x$ y $(\exists x) . \phi x$, tomando la negación y

la disyunción como nuevas ideas primitivas, tal como se aplican a las proposiciones que contienen variables aparentes. Si este método se adopta, no necesitamos tomar $(\exists x) . \phi x$ como una idea primitiva, pudiendo colocar

***10.01** $(\exists x) . \phi x . = . \sim (x) . \sim \phi x$ **Df**

Esta definición sólo se usa cuando descartamos el método del numeral 9 en favor del método alternativo ya explicado. En todo caso tenemos también

$$\vdash : (\exists x) . \phi x \, . \equiv . \, \sim (x) . \sim \phi x$$

Con motivo de hacer claro cómo utilizar este método alternativo, tomaremos unas proposiciones primitivas y constataremos su aplicabilidad a las proposiciones que contienen variables aparentes análogas a las proposiciones del numeral *1. Las dos siguientes definiciones simplemente sirven para introducir una notación que es más conveniente que la notación $(x) . \phi x \supset \psi x$, $(x) . \phi x \equiv \psi x$.

***10.02** $\phi x \supset_x \psi x \, . = . \, (x) . \, \phi x \supset \psi x$ **Df**

***10.03** $\phi x \equiv_x \psi x . = . (x) . \phi x \equiv \psi x$ **Df**

Siendo las proposiciones mas usadas las siguientes:

***10.1** $\vdash : (x) . \phi x \, . \supset . \, \phi y$

Lo que es verdadero en todos los casos es verdadero en un caso cualquiera.

***10·11** $\vdash : \phi y \, . \supset : (x) . \, \phi x$

Tenemos en *10·11, que si ϕy es verdadero bajo cualquier posible argumento y, $(x) . \phi x$ es verdadero. Siempre y cuando podamos aseverar la función proposicional ϕy, lo habremos de hacer para $(x) . \phi x$: “Lo que es verdadero para cualquiera, de cualquier modo escogido, es verdadero para todos”.

***10.121** **Si ϕx es significativo y si a es del mismo tipo que x, ϕa es significativo y viceversa**

Se sigue de esta proposición que dos argumentos de la misma función deben ser del mismo tipo; debido a que si x, a son argumentos para $\phi \hat{x}$, ϕx y ϕa son significativos, y por consiguiente x, a son del mismo tipo. Así la proposición primitiva anterior engloba el resultado de nuestra discusión de las paradojas del círculo vicioso.

***10.122** **Si para algún a hay una proposición ϕa, hay una función $\phi \hat{x}$, y viceversa. Notamos que esta proposición es análoga a la *9.15, donde no habría una**

proposición ϕa verdadera pero si significativa. Todo esto señala el mismo problema de cuándo introducir el cuantificador existencial.

***10.13 Si $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$ toman argumentos del mismo tipo, y tenemos $\vdash . \phi x$ y $\vdash . \psi x$, tendremos $\vdash . \phi x . \psi x$**

***10.14 $\vdash :. (x) . \phi x : (x) . \psi x : \supset . \phi y . \psi y$**

Esta proposición es verdadera siempre y cuando sea significativa, pero no siempre es significativa cuando su hipótesis es significativa, debido a que la tesis requiere que ϕ y ψ deban tomar argumentos del mismo tipo, mientras la hipótesis no requiere esto. En consecuencia, si se ha de aplicar cuando ϕ y ψ sean dados, o cuando ψ es una función dada de ϕ o viceversa, no debemos argüir de la hipótesis a la tesis a menos que, en el supuesto caso, ϕ y ψ tomen argumentos del mismo tipo.

***10.2** $\vdash :. (x) . p \vee \phi x . \equiv : p . \vee . (x) . \phi x$

***10.21 $\vdash :. (x) . p \supset \phi x . \equiv : p . \supset . (x) . \phi x$**

Esta proposición es de un uso más frecuente que la anterior.

***10.22 $\vdash :. (x) . \phi x . \psi x . \equiv : (x) . \phi x : (x) . \psi x$**

Las condiciones para que sea significativa esta proposición requieren que ϕ y ψ deban tomar argumentos del mismo tipo. Esta proposición es verdadera siempre y cuando ambas sean significativas, pero tal como se anotó anteriormente en relación a *10.14, la primera $(x) . \phi x . \psi x$, no es siempre significativa cuando la segunda $(x) . \phi x : (x) . \psi x$ sea significativa.

***10.221 Si ϕx contiene un constituyente $\chi(x, y, z, \ldots)$ y ψx contiene un constituyente $\chi(x, u, v, \ldots)$ donde χ es una función elemental y y, z, ... u, v,... son ya sea constantes o variables aparentes, $\phi\hat{x}$ y $\psi\hat{x}$ toman argumentos del mismo tipo. Esto puede probarse en cada caso particular, aunque no en general, a condición de que, al obtener ϕ y ψ de χ, χ esté solamente sometida a las negaciones, disyunciones y generalizaciones. El proceso puede ser ilustrado por un ejemplo.**

**Supongamos que ϕx es $(y) . \chi(x, y) . \supset . \theta x$, y ψx es $fx . \supset . (y) . \chi(x,y)$
Por las definiciones ya vistas, ϕx es $(\exists y) . \sim \chi(x, y) \vee \theta x$;
ψx es $(y) . \sim fx \vee \chi(x, y)$. Desde que las ideas primitivas $(x) . Fx$, $(\exists x) . Fx$ solamente se aplican a las funciones, hay funciones
$\sim\chi(\hat{x}, \hat{y}) \vee \theta\hat{x}$, $\sim f\hat{x} \vee \chi(\hat{x}, \hat{y})$. Por tal motivo hay una proposición
$\sim\chi(a, b) \vee \theta a$. Puesto que " $p \vee q$" , " $\sim p$" son significativas solamente cuando p, q son proposiciones, hay una proposición $\chi(a, b)$. Similarmente para algún u y v, hay**

proposiciones $\sim fu \vee \chi(u, v)$, $\chi(u, v)$ como consecuencia de *9.14, u y a, v y b son respectivamente del mismo tipo, y de nuevo por *9.14 hay una proposición $\sim fa \vee \chi(a,b)$. Por *9.15, hay funciones $\sim\chi(a, \hat{y}) \vee \theta a$, $\sim fa \vee \chi(a, \hat{y})$. Por consiguiente, hay proposiciones $(\exists y) . \sim \chi(a, y) \vee \theta a$, $(y) . \sim fa \vee \chi(a, y)$.

Es decir, hay proposiciones ϕa, ψa, las cuales se han de probar. Este proceso se puede aplicar similarmente en otras instancias parecidas.

***10.23 $\vdash :. (x) . \phi x \supset p . \equiv : (\exists x) . \phi x . \supset . p$**

Si ϕx implica siempre p, luego si ϕx es en algún caso verdadero, p es verdadero.

***10.24 $\vdash : \phi y . \supset . (\exists x) . \phi x$**

Si ϕy es verdadero, luego hay un x para el cual ϕx es verdadero. Este es el único método exclusivo para probar los teoremas de existencia (Vemos que también el autor manifestó antes en la proposición *9.1 que era también el único método para probar los teoremas de existencia, en lo que parece contradecirse o no notó el comentario inmediatamente anterior a esta nueva proposición. Esto nos lleva a recordar una situación paradójica en las matemáticas, en donde no se puede probar prácticamente ningún teorema interesante de existencia, debido a que no se puede pasar de lo universal a lo particular).

***10.25 $\vdash : (x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \phi x$**
Aquí aparece de nuevo el problema de que $(x) . \phi x$ es verdadero si $\hat{x}\phi x$ es un conjunto vacío; es decir, no tiene verificantes. Russell pensaba que no se podía escribir una función proposicional que no tuviera por lo menos un verificante.

***10.26 $\vdash :. (z) . \phi z \supset \psi z : \phi x : \supset . \psi x$**

Esta es una de las formas del silogismo en Barbara. Cuando colocamos $\phi z . = .$ z es un hombre, $\psi z . = .$ z es mortal, x = Sócrates, la proposición se convierte en: "Si todos los hombres son mortales, y Sócrates es un hombre, luego Sócrates es mortal".

Otra forma del silogismo en Barbara se da en *10.3. Las dos formas, que se identificaban en el pasado de manera equívoca, se distinguieron por primera vez por Peano y Frege.

***10.27 $\vdash :. (z) . \phi z \supset \psi z . \supset : (z) . \phi z . \supset . (z) . \psi z$**

Si ϕz implica siempre ψz, luego "ϕz siempre" implica a "ψz siempre".

Las tres proposiciones siguientes son útiles de igual manera, y son análogas a la *10.27.

***10.3** $\vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x : (x) . \psi x \supset \chi x : \supset . (x) . \phi x \supset \chi x$

Esta proposición es la segunda forma del silogismo en Barbara.

***10.301** $\vdash :. (x) . \phi x \equiv \psi x : (x) . \psi x \equiv \chi x : \supset . (x) . \phi x \equiv \chi x$

Las dos proposiciones anteriores muestran que la implicación formal y la equivalencia formal son relaciones transitivas entre funciones.

***10.32** $\vdash : \phi x \equiv_x \psi x . \equiv . \psi x \equiv_x \phi x$

Esta proposición muestra que la equivalencia formal es simétrica.

En el siguiente capítulo Russell va a dar por terminado el tratamiento de la implicación formal y de la equivalencia formal. Ahora viene el problema de la extensión a matrices con varias variables en las cuales va a ver algunas cuantificadas y otras no. El problema que nos compete es explicar si pueden quedar fórmulas que dependen de dos o tres variables libres individuales gracias a que se cuantificaron las de tipo superior. Puede presentarse un problema que hace que esa fórmula ya no sea de primer orden, y ésta es una de las razones que motivan el paso del capítulo 10 al 11.

El autor prosigue a analizar la teoría de las variables aparentes, pero esta vez con dos variables en vez de una sola, como lo había hecho en el capítulo 10. "$\phi(x, y)$" es una proposición que contiene x, y; cuando x, y no están asignados, $\phi(x, y)$ es una función proposicional de x, y. La definición *11.01 muestra que "la verdad para todos los valores de $\phi(x, y)$" no necesita ser tomada como una idea primitiva, pero es definible en términos de la "verdad para todos los valores de x". La razón es que cuando x está asignada, $\phi(x, y)$ se vuelve una función de una variable, llamada y. Por lo tanto lo que sigue es que, para todo posible valor de x,
"$(y) . \phi(x, y)$" abarca tan sólo la idea primitiva introducida en el numeral 9 que trata acerca de la teoría de las variables aparentes. Pero "$(y) . \phi(x, y)$" es de nuevo solamente una función de una variable, llamada x, puesto que y se ha convertido aquí en una variable aparente. En consecuencia de la definición *11.01 lo que sigue es legítimo. Colocamos:

***11.01** $(x, y) . \phi(x, y) . = : (x) : (y) . \phi(x, y)$ **Df**

***11.02** $(x, y, z) . \phi(x, y, z) . = : (x) : (y, z) . \phi(x, y, z)$ **Df**

***11.03** $(\exists x, y) . \phi(x, y) . = : (\exists x) : (\exists y) . \phi(x, y)$ **Df**

***11.04** $(\exists x, y, z) . \phi(x, y, z) . = : (\exists x) : (\exists y, z) . \phi(x, y, z)$ **Df**

***11.05** $\phi(x, y) . \supset_{x,y} . \psi(x, y) . = : (x, y) : \phi(x, y) . \supset . \psi(x, y)$ **Df**

***11.06** $\phi(x, y) . \equiv_{x,y} . \psi(x, y) := : (x, y) : \phi(x, y) . \equiv . \psi(x, y)$ **Df**

Las definiciones anteriores se pueden extender a cualquier número de variables que puedan ocurrir.

***11.07 Cualquiera que sea el posible argumento x, $\phi(x, y)$ es verdadera para cualquier posible argumento y que se de, implica la declaración correspondiente con x, y intercambiados excepto en $\phi(x, y)$. Pp.**

Las proposiciones en esta sección pueden extenderse a cualquier número finito de variables; como la analogía es exacta, no es necesario llevar el proceso más allá de dos variables en nuestras pruebas.

Adicionalmente a la definición *11.01, necesitamos la proposición primitiva que "cualquiera que sea el posible argumento x, $\phi(x, y)$ es verdadero para cualquiera que sea el argumento y" implica la declaración correspondiente con x, y intercambiados excepto en $\phi(x, y)$. Se puede tomar el significado de $\phi(x, y)$ como verdadero para cualquier posible argumento x, y.

Las proposiciones del presente numeral se usan menos que aquellas del numeral 10, pero algunas son de uso frecuente, como las siguientes:

***11.1** $\vdash : (x, y) . \phi(x, y) . \supset . \phi(z, w)$

***11.11 Si $\phi(z, w)$ es verdadero para cualquiera que sea el argumento z, w, luego $(x, y) . \phi(x, y)$ es verdadero.**

Estas dos proposiciones son análogas a *10.1.11.

***11.12** $\vdash :. (x, y) . p \vee \phi(x, y) . \supset : p . \vee . (x, y) . \phi(x, y)$

***11.13 Si $\phi(\hat{x}, \hat{y}) . \psi(\hat{x}, \hat{y})$ toman sus primeros y segundos argumentos respectivamente del mismo tipo, y tenemos $\vdash . \phi(x, y)$ y $\vdash . \psi(x, y)$, tendremos $\vdash . \phi(x, y) . \psi(x, y)$**

***11.2** $\vdash : (x, y) . \phi(x, y) . \equiv . (y, x) . \phi(x, y)$

Es decir que "para todos los valores posibles de x, $\phi(x, y)$ es verdadero para todos los valores posibles de y", es equivalente a decir "para todos los valores posibles de y, $\phi(x, y)$ es verdadero para todos los valores posibles de x".

***11.3** $\vdash : p . \supset . (x, y) . \phi(x, y) : \equiv : (x, y) : p . \supset . \phi(x, y)$

***11.31** $\vdash :. (x, y) . \phi(x, y) : (x, y) . \psi(x, y) : \equiv : (x, y) : \phi(x, y) . \psi(x, y)$

Aquí las condiciones de significación al lado derecho requieren que ϕ y ψ deban tomar argumentos de los mismos tipos.

$*11.32 \vdash :. (x, y) : \phi(x, y) . \supset . \psi(x, y) : \supset : (x, y) . \phi(x, y) . \supset . (x, y) . \psi(x, y)$

Si $\phi(x, y)$ siempre implica $\psi(x, y)$, luego siempre $\phi(x, y)$ implica siempre $\psi(x, y)$.

$*11.35 \vdash :. (x, y) : \phi(x, y) . \supset . p : \equiv : (\exists x, y) . \phi(x, y) . \supset . p$

Si $\phi(x, y)$ siempre implica a p, luego si $\phi(x, y)$ es alguna vez verdadero, p es verdadero y viceversa. Esta es análoga a la *10.23.

$*11.45 \vdash :. (\exists x, y) : p . \phi(x, y) : \equiv : p : (\exists x, y) . \phi(x, y)$

$*11.54 \vdash :. (\exists x, y) . \phi x . \psi y . \equiv : (\exists x) . \phi x : (\exists y) . \psi y$

Esta proposición es muy útil porque analiza una proposición que contiene dos variables aparentes en dos proposiciones donde cada una contiene solamente una. "$\phi x.\psi y$" es una función de dos variables, pero está conformada por dos funciones de una variable cada una. Tal función es como una cónica formada por dos líneas rectas: puede ser llamada una función analizable.

$*11.55 \vdash :. (\exists x, y) . \phi x . \psi(x, y) . \equiv : (\exists x) : \phi x : (\exists y) . \psi(x, y)$

Es decir, "hay valores de x,y para los cuales $\phi x . \psi(x, y)$ es verdadera" es equivalente a decir "hay un valor de x para el cual ϕx es verdadera y para el cual hay un valor de y tal que $\psi(x, y)$ es verdadera".

$*11.6 \vdash :: (\exists x) :. (\exists y) . \phi(x, y) . \psi y : \chi x :. \equiv :. (\exists y) :. (\exists x) . \phi(x, y) . \chi x : \psi y$

Esta proposición da una transformación que es útil en muchas pruebas.

$*11.62 \vdash :: \phi x . \psi(x, y) . \supset_{x,y} . \chi(x, y) : \equiv :. \phi x . \supset_x : \psi(x, y) . \supset_y . \chi(x, y)$

Esta transformación es muy útil.

$*11.7 \vdash :. (\exists x, y) : \phi(x, y) . \vee . \phi(y, x) : \equiv . (\exists x, y) . \phi(x, y)$

Volvamos al prologo de la segunda edición de PM a fin de ir viendo el manejo de las variables aparentes. Teniendo en cuenta que son desarrollos posteriores a la redacción de los anteriores capítulos, conviene tomarlos en cuenta para ver la evolución del autor en relación al tema que nos ocupa. Se introduce un aparte III denominado “proposiciones generales de alcance limitado”. En el autor comienza su exposición resaltando el hecho de la posibilidad de inferir las siguientes proposiciones:

De $(x) . \phi x$ y de $(x) . \phi x \supset \psi x$, podemos inferir $(x) . \psi x$;

y de $(\exists x) . \phi x$ y de $(x, y) . \phi x \supset \psi y$, inferimos $(y) . \psi y$.

Comenta que la implicación es una noción opuesta a la inferencia, y lo que nos ha de corresponder es poder establecer de una manera más precisa lo que es la implicación. Se manifiesta que hasta el momento solo se ha definido casos en los que las proposiciones generales se han dado como proposiciones completamente aseveradas. Se comenta que teóricamente este es su único uso y que no necesitamos definir ningún otro. Pero es altamente aconsejable a nivel práctico tratar las proposiciones aseveradas como un caso donde se aplican las funciones de barra. Se menciona que gran parte del problema es meramente un asunto que tiene que ver con la introducción de definiciones apropiadas; se ha visto que las proposiciones de primer orden satisfacen las proposiciones *1 - *5, motivo por el cual, desde que las usemos, no será más necesario asumir que p, q, r, ... son proposiciones elementales.

Cuando una proposición general ocurre como parte de otra, se dice que tiene un alcance limitado. Si la proposición contiene una variable aparente x, el alcance de x está limitado a la misma proposición general. De modo que si $p \mid \{(x) . \phi x\}$, el alcance de x está limitado a $(x) . \phi x$, mientras en $(x) . p \mid \phi x$ el alcance de x se extiende a toda la proposición. El alcance está indicado por los puntos. Al tratar el tema del alcance, hay que cuidar bien si el alcance es del cuantificador o es del campo de variación de la variable.

A continuación, el autor se propone exponer las motivaciones que lo llevaron a escribir el capítulo 8 que reemplaza al 9, y que lo presenta como un apéndice al final del primer tomo de PM. Va a llamarlo: “la teoría de la deducción para proposiciones que contienen variables aparentes”. No obstante, gran parte del material contenido en el apéndice lo va a ir abordando y presentando en el prólogo de la segunda edición de PM. Se ve que es una tentativa de parte de él de tratar de solucionar una parte de los problemas que se presentan a lo largo del desarrollo de PM, evitando tener que volver a escribir otros capítulos dentro de la obra en cuestión. Por ello recurre a presentar sus nuevas inquietudes y planteamientos dentro de este apéndice, que a continuación vamos a tratar.

El tema de la variable aparente es muy delicado, debido también a que no es totalmente claro. Se pregunta uno: “la variable es aparente porque aparece”. Pero él va a decir que esa variable no aparece, no ocurre, porque está congelada por el cuantificador; ¿pero aparece o no aparece? Tipográficamente si aparece, pero aparece dos veces, una en el cuantificador y otra en la formula. Entonces: ¿qué significa aparecer?: ¿estar tipográficamente ahí o estar libre? Eso es lo que él va a precisar con la noción de variable ligada (bound variable).

Todas las proposiciones, sin importar su orden, se derivan de una matriz compuesta de proposiciones elementales combinadas por medio de una línea vertical, la barra de Sheffer. Hay que agregar la dificultad que da la lectura de la barra de Sheffer al no aportar una intuición que haga fácil su lectura. En las conectivas binarias se demostró que tanto la barra de Sheffer como la flecha de Peirce son completas al ser capaces de

definir las diez y seis conectivas por ellas solas. Siendo trivial proponer una conectiva unaria distinta de las binarias. Aunque representa una codificación con menos símbolos, se sabe a raíz de los trabajos de Gödel, que no representa ningún problema aumentar el número de los símbolos. Dada tal matriz, cualquier constituyente puede dejarse como constante, o verse transformado en una variable aparente; esta última transformación puede hacerse de dos maneras; al anteponer "todos los valores" o "algunos valores". Así, si p, q son proposiciones elementales, esto da lugar a $p \mid q$, y podemos reemplazar p por ϕx o q por ψy o ambos, donde ϕx , ψy son funciones proposicionales cuyos valores son proposiciones elementales. Así llegamos a comenzar con cuatro nuevas proposiciones:

$$(x) . (\phi x \mid q), \quad (\exists x) . (\phi x \mid q), \quad (y) . (p \mid \psi y), \quad (\exists y) . (p \mid \psi y)$$

La ocurrencia de una proposición general como parte de una función de barra está dado por las siguientes definiciones, en las cuales podemos separar la constante de la variable y obtener:

*8·01. $\{ (x) . \phi x \} \mid q \ . = . (\exists x) . \phi x \mid q$ Df
*8·011. $\{ (\exists x) . \phi x \} \mid q \ . = . (x) . \phi x \mid q$ Df
*8·012. $p \mid \{ (y) . \psi y \} . = . (\exists y) . p \mid y$ Df
*8·013. $p \mid \{ (\exists y) . \psi y \} . = . (y) . p \mid y$ Df

Estas solamente definen lo significado por la barra cuando ésta ocurre entre dos proposiciones, donde una es elemental mientras la otra es de primer orden. Cuando la barra ocurre entre dos proposiciones, las cuales ambas son de primer orden, adoptaremos la convención de eliminar primero la de la izquierda, tratando la de la derecha como si fuera elemental; luego la de la derecha se elimina, estando en concordancia con las definiciones anteriores. De esta manera tenemos:

$\{(x) . \phi x \} \mid \{(y) . y\} . = : (\exists x) : \phi x \mid \{(y) . \psi y\} : = : (\exists x) : (\exists y) . \phi x \mid \psi x$,
$\{(x) . \phi x\} \mid \{(\exists y) . \psi y\} . = : (\exists x) : \phi x \mid \{(\exists y) . y\} : = : (\exists x) : (y) . \phi x \mid y$,
$\{(\exists x) . \phi x \} \mid \{(y) . y\} . = : (x) : (\exists y) . \phi x \mid \psi y$,

La regla que gobierna el orden de la eliminación solamente se requiere para salvaguardar la definibilidad, dado que los dos órdenes aportan resultados equivalentes. Por ejemplo, en la última de las instancias anteriores, si tuviéramos que eliminar primero la y, obtendríamos:

$(\exists y) : (x) . \phi x \mid \psi y$, la cual requiere para ser verdadera que,
$(x) . \sim \phi x$, o , $(\exists y) . \sim \psi y$. Tal como $(x) : (\exists y) . \phi x \mid \psi y$ es verdadero en las mismas circunstancias. Esta posibilidad de cambiar el orden de las variables en el prefijo solamente se debe a la manera en que ellas ocurren; es decir, al hecho de que la x solamente ocurre en uno de los lados de la barra, como la y en el otro lado. El orden de las variables en el prefijo es indiferente sin importar la ocurrencia de una variable en un solo lado de cierta barra, mientras que las otras están al otro lado de ella. No se da lo siguiente:

$(\exists x) : (y) . \chi (x, y) : \equiv : (y) : (\exists x) . \chi (x, y)$,

donde el lado derecho es más frecuentemente verdadero que el lado izquierdo. Aquí tenemos que con más frecuencia es usual este orden de los cuantificadores: para cualquier número natural existe uno tal que; esto ocurre con más frecuencia que cuando uno dice hay uno que para cualquier otro cumple tal propiedad. Si tomamos la propiedad ser mayor que, es claro que para cualquier número natural existe uno mayor; pero no es verdad que existe uno mayor que todos. Se ha de agregar que la introducción del uso de la barra plantea una complicación adicional que dificulta la intuición. El punto se puede traducir como la "y", y es fácil identificar la "o" y la negación. Pero con el uso de la barra de Sheffer, la lectura reclama más atención.

Tenemos :

$(\exists x) : (y) . \phi x \mid \psi y : \equiv : (y) : (\exists x) . \phi x \mid \psi y$

La posibilidad de alterar el orden de las variables en el prefijo cuando ellas están separadas por una barra es una proposición primitiva. En general, después de que la eliminación haya terminado, es aconsejable colocar a la izquierda las variables en que "todos" están involucrados, y a la derecha aquellas de las cuales solo "algunos" están involucrados siempre asumiendo que las variables ocurren de una manera tal que nuestra proposición primitiva se pueda aplicar.

No es necesario para la proposición primitiva que acabamos de mencionar que la barra que separa la x de la y deba ser la barra principal:

$$\begin{aligned} p \mid [\{ (\exists x) . \phi x \} \mid \{ (y) . \psi y \}] . = . \; & p \mid [(x) : (\exists y) . \phi x \mid \psi x] \\ & = : (\exists x) : (y) . p \mid (\phi x \mid \psi y) : \\ & \equiv : (y) : (\exists x) . p \mid (\phi x \mid \psi y) \end{aligned}$$

Lo único que es necesario es que debería de existir "alguna" barra que separe a la x de la y. Cuando esto no se da, en general el orden no puede cambiarse. Tomemos por ejemplo la siguiente matriz:

$\phi x \vee \psi y \;.\; \sim \phi x \vee \sim \psi y$
también puede ser escrita como $(\phi x \supset \psi y) \mid (\psi y \supset \phi x)$
o también como $\{ \phi x \mid (\psi y \mid \psi y) \} \mid \{\psi y \mid (\phi x \mid \phi x \}$

Aquí no existe barra que separe todas las ocurrencias de x de todas aquellas de y; de hecho las dos proposiciones
$(y) : (\exists x) . \phi x \vee \psi y . \sim \phi x \vee \sim \psi y$
$(\exists x) : (y) . \phi x \vee \psi y . \sim \phi x \vee \sim \psi y$
no son equivalentes excepto para valores especiales de ϕ y ψ.

Por medio de las definiciones anteriores, estamos en capacidad de derivar todas las proposiciones, de cualquier orden que sean, a partir de una matriz de proposiciones elementales combinada por medio de la barra. Dada cualquiera de tales matrices que contengan una parte p, podemos reemplazar p por ϕx o $\phi(x, y)$ o etc., y proceder a agregar el prefijo (x) o $(\exists x)$ o (x, y) o $(x):(\exists y)$ o $(\exists x)$ o etc. Si ocurren ambos p, q, podemos reemplazar p por ϕx, q por ψy, o podemos reemplazar ambos por ϕx, o una por ϕx y la otra por alguna función de barra de ϕx.

En el caso de una proposición tal como $p \mid \{(x):(\exists y).\psi(x, y)\}$, debemos tratar este caso como un caso de $p \mid \{(x).\phi x\}$, y eliminar primero la x. De modo que

$$p \mid \{(x):(\exists y).\psi(x, y)\}.=:(\exists x):(y).p \mid \psi(x, y)$$

Es decir, las definiciones de $\{(x).\phi x)\} \mid q$, etc, deben ser aplicables sin cambio alguno cuando ϕx no es una función elemental.

Las definiciones de $\sim p$, $p \vee q$, $p.q$, $p \supset q$ deben ser tomadas como incambiables, de modo que tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\sim\{(x).\phi x\}. =:\{(x).\phi x\} \mid \{(x).\phi x\}: \\
&\qquad =:(\exists x):\phi x \mid \{(x).\phi x\}: \\
&\qquad =:(\exists x):(\exists y).(\phi x \mid \phi y), \\
&\sim\{(\exists x).\phi x\}.=:(x):(y).(\phi x \mid \phi y), \\
&p.\supset.(x).\phi x:=:p \mid [\{(x).\phi x\} \mid \{(x).\phi x\}]: \\
&\qquad =:p \mid \{(\exists x):(\exists y).(\phi x \mid \phi y)\}: \\
&\qquad =:(x):(y).p \mid (\phi x \mid \psi y), \\
&(x).\phi x.\supset.p:=:\{(x).\phi x\} \mid (p \mid p): \\
&\qquad =:(\exists x).\phi x \mid (p \mid p):=:(\exists x).\phi x \supset p, \\
&(x).\phi x.\vee.p:=:[\sim\{(x).\phi x\}] \mid \sim p: \\
&\qquad =:\{(\exists x):(\exists y).(\phi x \mid \phi y)\} \mid (p \mid p): \\
&\qquad =:(x).\{(\exists y).(\phi x \mid \phi y)\} \mid (p \mid p): \\
&\qquad =:(x):(y).(\phi x \mid \phi y) \mid (p \mid p), \\
&p.\vee.(x).\phi x:=:(x):(y).(p \mid p) \mid (\phi x \mid \phi y).
\end{aligned}$$

Se puede ver que las dos variables aludidas aparecen donde solamente se espera una. Encontraremos que las dos variables anteriores pueden ser reducidas a una, con lo cual tendríamos:

$$\begin{aligned}
&(\exists x):(\exists y).\phi x \mid \phi y :\equiv.(\exists x).\phi x \mid \phi x, \\
&(x):(y).\phi x \mid \phi y :\equiv.(x).\phi x \mid \phi x
\end{aligned}$$

Esto nos lleva a

$$\sim\{(x).\phi x\}.\equiv.(\exists x).\sim\phi x,$$

$\sim \{ (\exists x) . \phi x \} . \equiv . (x) . \sim \phi x$

Por el momento, por consiguiente, supongamos que tenemos una función de barra en la cual p ocurre varias veces, digamos $p \mid (p \mid p)$, y deseamos reemplazar p por $(x) . \phi x$; tenemos que escribir en una segunda ocurrencia de p " $(y) . \phi y$ ", y en una tercera " $(z) . \phi z$ ". De esta manera, la proposición que resulta contendrá tantas variables separadas como ocurrencias de p.

Se requieren unas proposiciones primitivas que ya han sido mencionadas, y que son cuatro en total. Éstas son las siguientes:

(1) *8·1. $\vdash . (\exists x, y) . \phi a \mid (\phi x \mid \phi y)$**, es decir** $\vdash : \phi a . \supset . (\exists x) . \phi x$
(2) *8·11. $\vdash . (\exists x) . \phi x \mid (\phi a \mid \phi b)$**, es decir** $\vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi a . \phi b$
(3) *8·12. A partir de la regla de inferencia extendida o sea del MPP extendido a las fórmulas del cálculo de predicados, de $(x) . \phi x$, y, $(x) . \phi x \supset \psi x$, se puede inferir $(x) . \psi x$, aun cuando ψ como ϕ no sean elementales.
(4) *8·13. Si todas las ocurrencias de x están separadas de todas las ocurrencias de y por medio de cierta barra, el orden de x como el de y pueden cambiarse en el prefijo, es decir; Podemos sustituir $(y) : (\exists x) . \phi x \mid \psi y$ por $(\exists x) : (y) . \phi x \mid \psi y$, y viceversa, aun cuando ésta sea solamente una parte de una proposición aseverada general.
(5) Aunque sería de esperarse una quinta proposición, ésta no aparece en este numeral, aunque ya está mencionada antes y bien podría ser: cuando rescribimos $p \mid (q \mid r)$, que es MPP extendido con una q; con lo cual tendríamos p, $p \supset r \vdash r$.

Las anteriores proposiciones primitivas pueden asumirse no sólo para una variable sino para muchas. Se puede probar por medio de las anteriores que las proposiciones primitivas * 1-*5 se aplican igualmente cuando una o mas de las proposiciones involucradas p, q, r, ... no son elementales.

Las dos proposiciones primitivas anteriores se han de asumir, no solamente para una o dos variables, sino para cualquier número. Así, por la primera proposición, podemos aseverar

$$\vdash : \phi (a_1, a_2, \ldots a_n) . \supset . (\exists x_1, x_2, \ldots x_n) . \phi (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

***8.2** $\vdash : (x) . \phi x . \supset . \phi a$ **[*8.11a/b]**

En lo que sigue, el método de prueba es invariablemente el mismo. Primero aplicamos las definiciones hasta que se trae (is brought into) toda la proposición aseverada a la forma de una matriz con un prefijo. Cuando la proposición que se va a probar se ha convertido a esta forma, la deducimos por medio de la *8.1.11, usando *8.12 en la deducción si es necesario. Se observará que la *8.1 es $\vdash : \phi a . \supset . (\exists x) . \phi x$ Puesto que por *8.12, siempre que conocemos ϕa, podemos aseverar $(\exists x) . \phi x$; 8.1 (que corresponde a nuestra primera proposición primitiva) se usa frecuentemente de esta manera.

$*8.21 \quad \vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x . \supset : (\exists x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \psi x$

$*8.22 \quad \vdash : \phi a \vee \phi b . \supset . (\exists x) . \phi x$

$*8.23 \quad \vdash : (\exists x) . \phi x \vee \phi c . \supset . (\exists x) . \phi x$

$*8.24 \quad \vdash :: p \supset q . \supset :. q . \supset . (\exists x) . \phi x : \supset : p . \supset . (\exists x) . \phi x$

$*8.241 \quad \vdash :: (x) . \phi x . \supset . p : \supset :. p \supset q . \supset : (x) . \phi x . \supset . q$

$*8.25 \quad \vdash :: p . \supset . (\exists x) . \phi x : \supset :. (\exists x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \psi x : \supset : p . \supset . (\exists x) . \psi x$

Pruebas análogas se aplican a otras formas de silogismo.

$*8.26 \quad \vdash : \phi a \vee \phi b \vee \phi c . \supset . (\exists x) . \phi x \vee \phi c$

$*8.261 \vdash : \phi a \vee \phi b \vee \phi c . \supset . (\exists x) . \phi x$

$*8.27 \quad \vdash :: p . \supset . (\exists x) . \phi x : \supset :. p \supset q . \supset : p . \supset . (\exists x) . \phi x$

$*8.271 \vdash :: q . \supset . (\exists x, y) . \phi(x, y) : \supset :. p \supset q . \supset : p . \supset . (\exists x, y) . \phi(x, y)$

$*8.272 \vdash ::. p . \supset : q . \supset . (\exists x) . \phi x :. \supset :: r \supset p . \supset :. r . \supset : q . \supset . (\exists x) . \phi x$

$*8.28 \quad \vdash :: p . \supset . (\exists x) . \phi x : \supset :. q . \supset . (\exists x) . \phi x : \supset : p \vee q . \supset . (\exists x) . \phi$

$*8.29 \quad \vdash :. (x) . \phi x \supset \psi x . \supset : (x) . \phi x . \supset . (x) . \psi x$

Estamos ahora en posición de probar que las proposiciones de los numerales *1 al *5 permanecen verdaderas cuando una o más de las proposiciones p, q, r,... son proposiciones de primer orden en vez de ser proposiciones elementales. Para este propósito, no tomamos la proposición primitiva que Nicod probó como suficiente, sino las dos que hemos mostrado que son equivalentes a ella; quien probó que la proposición primitiva * 1 puede ser deducida de

$\vdash . p \supset p ,$
$\vdash . p \supset q . \supset . s | q \supset p | s$
Conjuntamente con la regla de inferencia que dice:
“ Dados p, $p | (q | r)$, podemos inferir r ”

De esta manera, todo lo que tenemos que hacer es mostrar que las anteriores proposiciones permanecen verdaderas cuando p, q, s, o alguna de ellas no son

elementales. Hasta aquí el autor trata el tema de las proposiciones con variables aparentes en la introducción a la segunda edición de PM. A fin de complementar lo no tocado por el autor en dicha introducción, se van a abordar otras proposiciones numeradas como parte del apéndice A de PM. Se ha de recordar que en la introducción el autor no enumeró muchas de las proposiciones en el prólogo de la segunda edición, y que ahora sí lo hace al irlas desarrollando como parte del capítulo 8. El problema no es nada fácil; pareciera que él fuera a sustituir las proposiciones tratadas por formulas con barra. De nuevo se devuelve otra vez a las proposiciones primitivas, que son cómo los cinco axiomas de Euclides, y que es como volver a tratar el mismo tema desde una nueva perspectiva.

Mostramos que éstas son verdaderas cuando una, o dos, o tres, de las proposiciones p, q, s, son proposiciones de primer orden. A partir de esto, el resto se sigue. La primera de estas proposiciones primitivas, $p \supset p$, da lugar a dos casos, a medida que sustituimos $(x) . \phi x$ o $(\exists x) . \phi x$ por p; la segunda proposición primitiva da lugar a 26 casos. Estos se han de considerar uno por uno. Luego viene un grupo de proposiciones que se pueden agrupar en grupos sea de dos o de cuatro muy simétricos entre sí.

A continuación se aprecian los diversos grupos de proposiciones, donde se combina el uso del cuantificador universal con el existencial:

***8.3** $\vdash : (x) . \phi x . \supset . (x) . \phi x$

***8.31** $\vdash : (\exists x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \phi x$

Se aprecia como Russell siguiendo los trabajos de Nicod, que permitió resumir las cinco proposiciones primitivas a una sola, se le incorporan a ambos lados de la implicación central el cuantificador universal y el existencial, ya sea en el lugar de p y luego en el de q:

***8.32** $\vdash :. (x) . \phi x . \supset . q : \supset : s \mid q . \supset . \{(x) . \phi x\} \mid s$

***8.321** $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset . q : \supset : s \mid q . \supset . \{(\exists x) . \phi x\} \mid s$

***8.322** $\vdash :. p . \supset . (x) . \psi x : \supset : s \mid \{(x) . \psi x\} . \supset . p \mid s$

***8.323** $\vdash :. p . \supset . (\exists x) . \psi x : \supset : s \mid \{(\exists x) . \psi x\} . \supset . p \mid s$

Luego en el lugar de s en $\vdash . p \supset q . \supset . s \mid q \supset p \mid s$ desarrollada por Nicod, se la reemplaza por $\{(x) . \chi x\}$; que involucra el uso del cuantificador universal y el existencial abordados como el conjunto de satisfactores de la proposición:

***8.324** $\vdash :. p \supset q . \supset : \{(x) . \chi x\} \mid q . \supset . p \mid \{(x) . \chi x\}$

***8.325** $\vdash :. p \supset q . \supset : \{(\exists x) . \chi x\} \mid q . \supset . p \mid \{(\exists x) . \chi x\}$

En las siguientes cuatro proposiciones, Russell reemplaza tanto la p como la q a nivel del uso de los cuantificadores universal y existencial:

*8.33 $\vdash :. (x) . \phi x . \supset . (x) . \psi x : \supset : s \mid \{ (x) . \psi x \} . \supset . \{ (x) . \phi x \} \mid s$

*8.331 $\vdash :. (x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \psi x : \supset : s \mid \{ (\exists x) . \psi x \} . \supset . \{ (x) . \phi x \} \mid s$

*8.332 $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset . (x) . \psi x : \supset : s \mid \{ (x) . \psi x \} . \supset . \{ (\exists x) . \phi x \} \mid s$

*8.333 $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset . (\exists x) . \psi x : \supset : s \mid \{ (\exists x) . \psi x \} . \supset . \{ (\exists x) . \phi x \} \mid s$

Esto termina los diez casos en los cuales p y q pero no s contienen variables aparentes. Tomemos luego los cuatro casos en los cuales p y s, pero no q contienen variables aparentes.

En el siguiente grupo de cuatro proposiciones tenemos el uso del cuantificador universal y el existencial, que Russell los trata dentro de las nociones de variable aparente: "siempre ϕx" y "algunas veces ϕx", la q permanece inamovible. Hay que anotar como se da un MPP extendido:

*8.34 $\vdash :. (x) . \phi x . \supset . q : \supset : \{ (x) . \chi x \} \mid q . \supset . \{ (x) . \phi x \} \mid \{ (x) . \chi x \}$

*8.341 $\vdash :. (x) . \phi x . \supset . q : \supset : \{ (\exists x) . \chi x \} \mid q . \supset . \{ (x) . \phi x \} \mid \{ (\exists x) . \chi x \}$

*8.342 $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset . q : \supset : \{ (x) . \chi x \} \mid q . \supset . \{ (\exists x) . \phi x \} \mid \{ (x) . \chi x \}$

*8.343 $\vdash :. (\exists x) . \phi x . \supset . q : \supset : \{ (\exists x) . \chi x \} \mid q . \supset . \{ (\exists x) . \phi x \} \mid \{ (\exists x) . \chi x \}$

En el siguiente grupo dejamos p quieto, y en las demás proposiciones se muestra el uso del cuantificador universal y el existencial:

*8.35 $\vdash :. p . \supset . (x) . \psi x : \supset : \{ (x) . \chi x \} \mid \{ (x) . \psi x \} . \supset . p \mid \{ (x) . \chi x \}$

*8.351 $\vdash :. p . \supset . (x) . \psi x : \supset : \{ (\exists x) . \chi x \} \mid \{ (x) . \psi x \} . \supset . p \mid \{ (\exists x) . \chi x \}$

*8.352 $\vdash :. p . \supset . (\exists x) . \psi x : \supset : \{ (x) . \chi x \} \mid \{ (\exists x) . \psi x \} . \supset . p \mid \{ (x) . \chi x \}$

*8.353 $\vdash :. p . \supset . (\exists x) . \psi x : \supset : \{ (\exists x) . \chi x \} \mid \{ (\exists x) . \psi x \} . \supset . p \mid \{ (\exists x) . \chi x \}$

El siguiente grupo se establecen las generalizaciones del uso de los cuantificadores universal y existencial, donde p se asume como una proposición con cuantificador universal:

*8.36 $\vdash :. (x) . \phi x . \supset . (x) . \psi x : \supset : \{ (x) . \chi x \} \mid \{ (x) . \psi x \} . \supset . \{ (x) . \phi x \} \mid \{ (x) . \chi x \}$

$*8.361 \vdash :.(x).\phi x \,.\supset.\, (x).\psi x \;:\supset:\; \{(\exists x).\chi x\} \mid \{(x).\psi x\} \,.\supset.\, \{(x).\phi x\} \mid \{(\exists x).\chi x\}$

$*8.362 \vdash :.(x).\phi x \,.\supset.\, (\exists x).\psi x \;:\supset:\; \{(x).\chi x\} \mid \{(\exists x).\psi x\} \,.\supset.\, \{(x).\phi x\} \mid \{(x).\chi x\}$

$*8.363 \vdash :.(x).\phi x \,.\supset.\, (\exists x).\psi x \;:\supset:\; \{(\exists x).\chi x\} \mid \{(\exists x).\psi x\} \,.\supset.\, \{(x).\phi x\} \mid \{(\exists x).\chi x\}$

En el siguiente grupo en el lugar de p tenemos al cuantificador existencial:

$*8.364 \;\vdash :.\, (\exists x).\phi x \,.\supset.\, (x).\psi x \;:\supset:\; \{(x).\chi x\} \mid \{(x).\psi x\} \,.\supset.\, \{(\exists x).\phi x\} \mid \{(x).\chi x\}$

$*8.365 \;\vdash :.(\exists x).\phi x \,.\supset.\, (x).\psi x \;:\supset:\; \{(\exists x).\chi x\} \mid \{(x).\psi x\} \,.\supset.\, \{(\exists x).\phi x\} \mid \{(\exists x).\chi x\}$

$*8.366 \;\vdash :.(\exists x).\phi x \,.\supset.\, (\exists x).\psi x \;:\supset:\; \{(x).\chi x\} \mid \{(\exists x).\psi x\} \,.\supset.\, \{(\exists x).\phi x\} \mid \{(x).\chi x\}$

$*8.367 \vdash :.(\exists x).\phi x \,.\supset.\, (\exists x).\psi x \;:\supset:\; \{(\exists x).\chi x\} \mid \{(\exists x).\psi x\} \,.\supset.\, \{(\exists x).\phi x\} \mid \{(\exists x).\chi x\}$

En el siguiente grupo Russell vuelve a tomar unas proposiciones desarrolladas en el capítulo *9 como *9· 01. y *9·02; la diferencia está en que aquí las está aseverando:

$*8.4 \qquad \vdash : \sim\{(x).\phi x\} \,.\equiv.\, (\exists x).\sim\phi x$

$*8.41 \qquad \vdash : \sim\{(\exists x).\phi x\} \,.\equiv.\, (x).\sim\phi x$

En el siguiente grupo a partir de la aseveración de p se logra establecer el uso tanto del cuantificador existencial como del universal:

$*8.42 \quad \vdash :.\, p \,.\supset.\, (\exists x).\phi x \;:\equiv:\; (\exists x).\, p \supset \phi x$

$*8.43 \quad \vdash :.\, p \,.\supset.\, (x).\phi x \;:\equiv:\; (x).\, p \supset \phi x$

$*8.44 \quad \vdash :.\, (x).\phi x \,.\supset:\, (x).\, \psi x \,.\supset.\, (x).\phi x \,.\, \psi x$

Ya en la siguiente proposición con la que finaliza el apéndice A, que corresponde al capítulo *8, Russell pasa a considerar la barra de Sheffer y extiende su uso a todas las proposiciones elementales inicialmente de primer orden:

***8.5 Si F(p, q, r, ...) es una función de barra para proposiciones elementales y si reemplazamos p, q, r, ... por las proposiciones de primer orden p_1, q_1, r_1, ..., tenemos**

$p \equiv p_1 \,.\, q \equiv q_1 \,.\, r \equiv r_1, \ldots \supset : F(p, q, r, \ldots) \,.\equiv.\, F(p_1, q_1, r_1 \ldots)$

Capítulo 4

La teoría de los tipos lógicos

Russell recurre a la conocida teoría de los tipos lógicos a fin de ayudar a solucionar ciertas contradicciones, como es la de Burali–Forti relacionada con el ordinal más grande. La existencia de los círculos viciosos se origina a partir de paradojas; en éstas encontramos elementos que sólo pueden ser definidos en relación a una colección abordada como un todo. De ahí lo cuidadoso que se debe de ser cuando se escoge una palabra que invita constantemente a establecer aseveraciones acerca de todas las proposiciones, o de todas las relaciones u otros objetos, donde se pueden encontrar faltas que conlleven sin sentidos. En especial, cuando dentro de un conjunto haya miembros que poseen una totalidad, lo que nos lleva a apreciar la complejidad con que se ha de tratar los conjuntos, debido a la convergencia en algunos casos de varias totalidades que coexisten en un mismo entorno conceptual.

Existe un principio que nos permite evitar las así llamadas "totalidades ilegítimas", el cual puede ser formulado así: "Cualquier cosa que involucre el total de una colección, no debe de ser uno de la colección", o "Si una colección tiene un total, y tenemos miembros definidos en términos de ese total, esto nos lleva a que esa colección no tiene un total". Esto nos ilustra lo que se llama el principio del círculo vicioso. Asimismo, denominaremos "falacias del círculo vicioso" a aquellos argumentos que caen dentro del mismo. Estos argumentos nos conducen a toda suerte de contradicciones; sea el caso de la ley del medio excluido bajo la forma de la siguiente aseveración: "todas las proposiciones son verdaderas o falsas". Esto nos sugiere que debamos delimitar la noción "todas las proposiciones" antes de que nos conduzca a una totalidad ilegítima, como también a aseverar una totalidad situada fuera de la totalidad de referencia. Algo que nos ilustra este curioso principio está dado en un caso del sentido común, donde un escéptico imaginario asevera que no sabe nada, y es refutado cuando se le pregunta si él sabe que no sabe nada. Esto nos obliga a establecer una limitación colocada en frente a aquello que se va a aseverar.

La lógica simbólica es sensible a distintas paradojas, que tienen que ver con sus variados objetos, sean éstos las proposiciones, las clases y los números, sean cardinales u ordinales. Todos estos objetos representan totalidades ilegítimas y por consiguiente capaces de caer en las falacias del principio del círculo vicioso, siendo de interés fundamental aquellas paradojas que conciernen a las funciones proposicionales; (proposiciones donde existe una variable cuyo valor todavía no está asignado). Podemos caer en las falacias del círculo vicioso si admitimos argumentos que nos lleven a afirmar tales totalidades ilegítimas. No obstante, la evasión de este problema nos lleva a la jerarquía de los tipos. El autor manifiesta cómo el preguntarnos acerca de la naturaleza de una función no es para nada sencillo, más cuando parece que la característica esencial de una función es su intrínseca ambigüedad. Hecho presente no más en la ley de la identidad, donde tenemos una función proposicional que asevera que un A es un A; no obstante, su objeto

indeterminado está en relación a los valores que tal función puede tomar. Todo esto se presenta cuando señalamos un valor no determinado de una proposición. Esto nos conduce a que una función no está bien definida a menos que todos sus valores estén bien definidos.

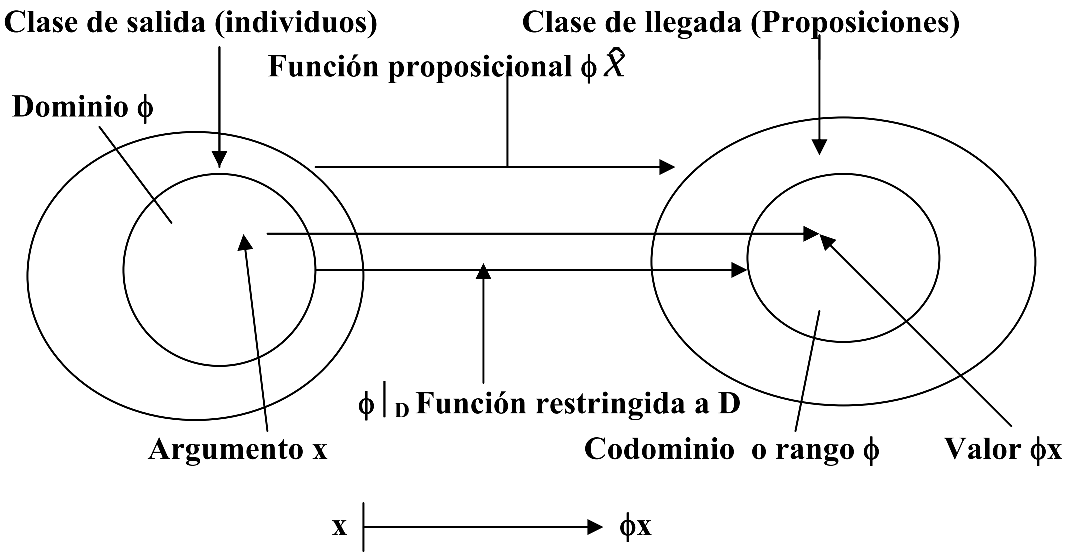


Figura 1. Aspectos de la función proposicional

Hay una confusión -que no es sólo es de Russell sino de otros autores- entre el valor de la función proposicional que es una proposición y el valor de verdad de la función proposicional, que puede dar verdadero o falso. Si tenemos un función proposicional $\phi(\hat{x})$, él no tenía muy claro qué es dominio o rango, y en consecuencia no tenía claro que hay una serie de elementos que se pueden sustituir como argumentos y otros no. Se ve en lo anterior, que la noción de función no estaba muy clara a comienzos del siglo XX. No obstante, estaba claro que, por ejemplo, el valor de la función $\phi(y)$ ya no está en el universo de los individuos sino en el de las proposiciones. También es necesario que se dé una interpretación que hace que la función proposicional adquiera un valor de verdad de verdadero o falso, sea el caso: si "$\phi\hat{x}$" significa "$\hat{x}$... es una letra del alfabeto", $\phi(y)$ es verdadera debido a que la y es una letra del alfabeto, pero aquí la y ya no es una variable sino una constante; además, el resultado es una proposición cerrada. No obstante hay una ambigüedad en lo que Russell llama variable o constante, dado que tanto la ϕ como la y pueden ser variables, donde la ϕ es una variable para funciones proposicionales, y la y es una variable para individuales o individuos; en este caso tenemos una proposición indefinida o abierta, viéndose la función saturada por el argumento, donde la variable está en el lugar del mismo. Si sustituimos la variable por una constante, obtenemos una proposición definida o cerrada. En la época en que se escribió PoM y PM no estaba muy claro a qué se va a llamar argumento, ni a qué se va a llamar valor, como tampoco era claro lo que se llamaba dominio y codominio. A su vez hay una manera de cerrar una función proposicional sin sustituir el argumento variable por uno constante y es con la cuantificación.

Conceptualmente habría que pensar en que los términos son símbolos, y que el símbolo es lo mas primitivo que se puede tener como noción primitiva. Esto lleva a que una variable es un término, una constante es un término, un operador n-ario aplicado a n términos es un término y no hay más términos. Un problema muy difícil en Russell es si se considera la conjunción "y" como una función binaria que toma dos proposiciones y produce una. Él tiene ahí el problema de que ya sus argumentos son proposiciones y sus valores también; mientras que ordinariamente este tipo de operadores mentales que transforman objetos en proposiciones no son operaciones sino relaciones. Entonces parece perderse la distinción entre relación y transformación, porque aquello que transforma a una lista de individuos en una proposición es una relación. Pero si esos individuos eran ya proposiciones, entonces no es claro cómo vamos a llamarlos. Razón que lleva a Russell a subsumir bajo la expresión "función proposicional" a las conectivas, debido a que hay dos puestos libres, dos argumentos, dos variables libres; pero esas variables no son para individuos sino para proposiciones. Y por tal motivo está viendo si la proposición $\phi(p, q)$ es constante o variable; como proposición es un símbolo que si se refiere a una proposición explícita en el juego del lenguaje, se debería llamar constante. Pero si está todavía abierta a la interpretación, se puede llamar variable; pero puede estar abierta a interpretación, tanto por el símbolo de función cómo por el símbolo del argumento; lo que sucede es que no hay un símbolo especial para el valor, sino el símbolo de la función con el símbolo del argumento. En este caso: $\phi(p, q) = p \vee q$, que podría escribirse $\vee(p, q)$, "$\vee$" sería una constante, pero si "p" y "q" son variables, el valor también sería variable.

En los siguientes casos que se ilustran en la figura 2, en el primer caso tenemos la función proposicional ϕ; cuyo dominio está contenido en A, clase de individuos o individuales, y cuya imagen va a parar a una clase de proposiciones que pertenecen al mundo del lenguaje. En el segundo caso, tenemos la función proposicional Φ, que va a tomar una proposición p y la va a pasar a $\Phi(p)$ que corresponde a $\sim p$; ambas son proposiciones, aquí tenemos un operador que cambia una proposición en otra. En el tercer caso, tenemos dos variables de una clase de parejas de proposiciones, donde la función proposicional Ψ va a mandar una pareja (p, q) a otra proposición $\Psi(p, q)$, donde los argumentos son también proposiciones; en este ejemplo la función Ψ da $p \vee q$, donde la disyunción $\vee$ es una constante. Pero si p, q son variables, Ψ sería también variable. Hay que recordar que en Russell no es muy claro si él llamaba constante a las funciones proposicionales, a la o, a la implicación, a la negación; o si llamaba constante solamente a los nombres de los individuos.

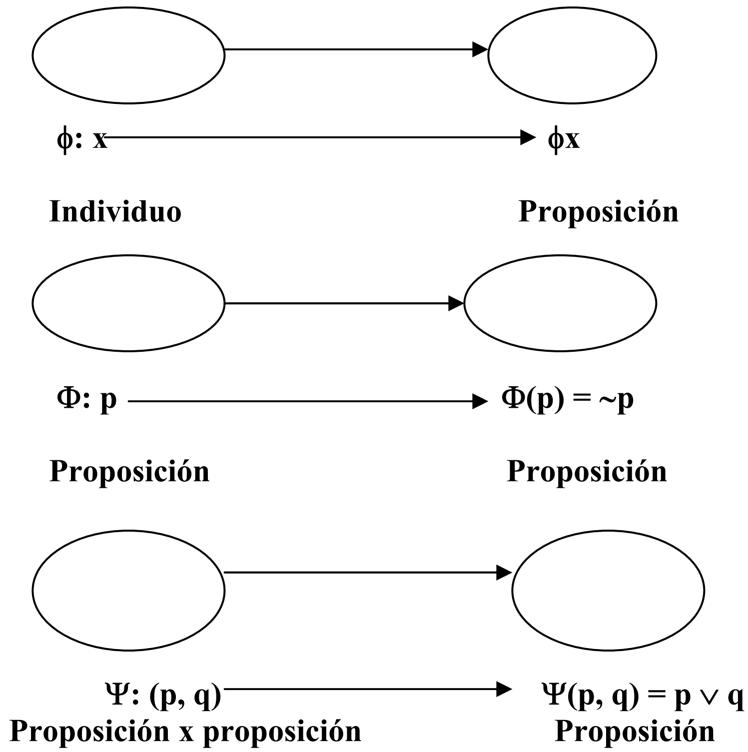


Figura 2. Diversos casos para las funciones proposicionales

Este es el motivo por el cual en ϕx, ϕ puede ser variable o constante, x puede ser variable o constante; entonces se tienen cuatro combinaciones: ϕx con ambas variables, ϕx con ambas constantes, ϕ variable y x constante, ϕ constante y x variable. Pero como símbolos aparecen una ϕ y una x. Entonces ϕ es el símbolo de la función, x es el símbolo del argumento, y ϕ concatenada con x o sea ϕx es el símbolo del valor. Y por eso cuando se dice y = f(x), lo que se está diciendo es que la f es un símbolo todavía variable para cualquier función, x es un símbolo todavía variable para cualquier número real, y es un símbolo variable para el valor que tome f en el argumento x. Por lo tanto, y es un símbolo para el valor, luego f(x) es otro símbolo para el mismo valor, y por eso se le coloca la igualdad. Excepto en la definición de igualdad, Russell no usa la letra "fi" (ϕ) separada, sino $\phi\hat{x}$ para distinguir la función proposicional $\phi\hat{x}$ del valor de $\phi\hat{x}$ en el individual x: ϕx.

Carlo Federici usaba la idea de los símbolos incompletos, donde un operador es un símbolo incompleto. Cuando uno le satura todos los puestos libres que tiene, se vuelve un símbolo completo, denotando el valor de ese operador en los argumentos representados por los símbolos de los argumentos. Pero en cierto sentido, el término todavía está incompleto con respecto a las proposiciones. Entonces tiene que haber predicados de uno, dos, tres, cuatro, n puestos, y de nuevo el predicado es un

símbolo incompleto al siguiente nivel. Pero si uno satura el predicado n-ario con n términos, ese es ya un símbolo completo para una proposición.

Pero esa proposición todavía puede estar abierta a posibles interpretaciones, porque tiene variables libres; inclusive el símbolo del predicado puede ser una variable libre, o puede ser una proposición cerrada si ya tanto el símbolo del predicado como todos los símbolos de los términos son constantes: ya tienen una denotación determinada para el juego de lenguaje que se está jugando. La prueba de que el símbolo del predicado puede ser variable es que uno puede cuantificar sobre el predicado. Este es el problema del quinto axioma de Peano: cualquier predicado aritmético P que cumpla P de 0 y que cumpla que P de n implica P de n+1 es un predicado que se aplica a todos los números naturales. Entonces se está cuantificando sobre el predicado, por eso ese axioma ya no es de primer orden. Se está refiriendo a un conjunto de predicados que están todavía abiertos a incorporar argumentos para producir proposiciones. Se introduce una función aparentemente de una sola variable individual que tiene una cuantificación sobre el predicado, en la cual ya está ligada la variable para los predicados. Pero está libre la variable para los objetos individuales; entonces, parece una función de primer orden porque está aplicada a individuos, pero resulta que le obstruyeron el orden, ya que era por los menos de segundo antes de la cuantificación. Entonces, Russell opta por evitar las cuantificaciones sobre predicados de orden superior. Supongamos que siempre existe un predicado que esté en el orden inmediatamente superior a la variable libre al que él le pone el símbolo de la admiración $\phi!$; se puede suponer tranquilamente que es el predicado más bajo posible que se puede aplicar a x, sin que haya ninguna cuantificación de variables de un orden superior.

La teoría de los tipos demanda mucho cuidado, en especial cuando hace referencia a las variables individuales, como también a los números, sean estos el 0 o el 1. La inquietud nuestra está dirigida a los conjuntos de tipo mínimo; sea el caso que al $\varnothing$ y al 0 le corresponde un tipo 1, al 1 un tipo 2, etc; sin embargo, el problema es que para Russell la totalidad de los números naturales no tiene tipo. Los demás conjuntos numéricos, sean los enteros, los reales o los complejos tampoco tienen tipo, debido a que solamente los conjuntos finitos de números pueden tenerlo.

Cuando hay miembros que poseen una totalidad, eso nos lleva a que ese conjunto aparentemente bien definido (el de todos esos miembros) posiblemente no tenga una totalidad; sin embargo, lo realmente importante es que no tenga una auto-referencia a esa totalidad; si posee una totalidad de tipo limitado, puede existir un conjunto que lo tenga como elemento y que tenga un total. Por ejemplo: un conjunto con una totalidad de tipo limitado, sea el de los primeros 10 números, tiene un total a pesar de poseer totalidades. El problema radica en el control que se tiene que dar en el tipo de la totalidad. Por eso no es aconsejable decir: "todos" los números, "todas" las relaciones, no tanto porque no se puedan construir proposiciones válidas con ellos, sino porque no hay control del tipo máximo. Aunque podamos escribir proposiciones aparentemente claras, no obstante pueden involucrar sinsentidos.

Cuando se habla del axioma de existencia de clases, para que no lleven a paradojas, deben tener un tipo finito; sin embargo, el modelo que propone Russell para los números naturales no tiene tipo finito. El cero es de tipo 1, el 1 contiene al 0 y es de tipo 2, el 2 contiene al 0 y al 1 y es de tipo 3, luego en el modelo russelliano el número cardinal n es de tipo n+1; luego el conjunto de todos los números naturales no tiene tipo finito. Una de las maneras para obviar el problema de la existencia de clases enormes es que las anotemos a la derecha del símbolo de pertenencia y nunca a la izquierda. De igual manera, en vez del axioma de reducibilidad, se dice que la sintaxis de la relación de pertenencia exige que no haya clases a la izquierda sino conjuntos; esto es viable debido a que por más alto que sea el tipo de la clase, se le puede poner una clase de tipo ilimitado o un conjunto de tipo superior al anterior. De esta manera se evita el círculo vicioso en que la parte del conjunto parece ser elemento también del mismo. Mientras se pueda controlar el tipo del conjunto, se puede escribir a la derecha o a la izquierda. Pero si se tiene una clase a la que no se le puede controlar el tipo, si no se la pone a la izquierda no le va a suceder nada, debido a que no va a derivar en una paradoja. No obstante, frente a la teoría de categorías de todos los conjuntos y de todas las clases el problema persiste, debido a que no es posible hacer una teoría del universo de todos los objetos.

En cambio, las proposiciones tienen un problema adicional que tiene que ver con la "auto-referencia": una proposición puede hablar de sí misma, mientras que el conjunto, la relación, el número no hablan, ni afirman ni niegan nada. Para las proposiciones hay un caso especial de posibilidad de paradojas. Un problema es que engañosamente en la misma definición esté incluida la noción de función que hemos de aclarar. Notamos a este respecto que a Russell evitaba cuantificar, debido a que esta cuantificación podía ocultar valores de un tipo superior a la variable que queda libre. De lo anterior concluimos que los valores de una función están presupuestados por la misma función y no viceversa, al ser capaces de aprehender la función sin que ello nos obligue a haber aprehendido sus valores. No obstante, tenemos la complejidad del número infinito de valores tanto verdaderos como falsos que se pueden dar en una función, sin que nos sea posible enterarnos de todos los argumentos que nos permitan aprehender por completo la misma función. Aquí de nuevo hay el mismo problema: ¿qué significa número finito o infinito de valores? Si los valores son la verdad y la falsedad, sólo se tienen dos valores. Pero sí los valores son las proposiciones cerradas, ahí si puede haber un número infinito de valores. Sea el caso, en la proposición P(x), donde x es un número natural par; esto nos lleva a un número infinito de valores.

Se hace entonces necesario distinguir entre la misma función y un valor indeterminado de la misma. Podemos considerar que la misma función se denota ambiguamente, mientras un valor indeterminado de la misma no se denota ambiguamente; si un valor indeterminado se escribe ϕy de la función $\phi \hat{y}$, siendo la primera una proposición y la segunda una función proposicional, la función es la única que denota ambiguamente sus muchos valores, dado que no es posible especificar todos los valores que la variable puede asumir. Se sigue que no debe haber proposiciones de la forma ϕy donde y tenga un valor que involucre a $\phi \hat{y}$.

Esto nos conduce a que no deben existir proposiciones $\phi \hat{y}$ con el argumento $\phi \hat{y}$, o con cualquier argumento que involucre a $\phi \hat{y}$. Esto nos lleva a que el símbolo $\phi(\phi \hat{y})$ no debe expresar una proposición y en sí mismo no expresa nada y en consecuencia no es significativo.

Hay que recordar que una cosa es el valor indeterminado de la proposición ϕy y otra la función misma $\phi \hat{y}$. No olvidemos que hay argumentos para los cuales la función no tiene valor, pero hay otros para los cuales sí tiene valor. Se ha de precisar que vamos a llamar "argumento" a aquello que la función incorpora dentro de sí y "valor" a aquello que produce. De modo que dada una función cualquiera $\phi \hat{y}$, hay argumentos para los cuales la función tiene valor y otros para los que no tiene valor. A los valores de la función para los cuales ella tiene valor los llamaremos valores posibles de y. Se dice que son significativos con el argumento y. De igual manera, denotaremos con el símbolo "(y).ϕy" la proposición "siempre ϕy", es decir la proposición que asevera todos los valores para $\phi \hat{y}$. Esta proposición involucra la función anotada y no tan solo un valor ambiguo de la misma, siendo lo aseverado por (y).ϕy todas las proposiciones que tienen valor para $\phi \hat{y}$, es decir aquellos valores significativos y por consiguiente posibles. Hemos de agregar que las proposiciones pueden tener un argumento todavía abierto o no definido, o que la misma matriz a la que llaman función proposicional puede tener términos aún no definidos.

En la cuantificación se puede estar ligando una variable de tipo superior; supongamos que tenemos ϕ(x, y), donde x es de tipo mayor que el tipo de y, al cuantificar la x ya no figura realmente en la función debido a que está ligada. La única que figura es la y, por lo que es una función de y, que parece ser de tipo n+1, pero resulta que no, por tener un cuantificador que está ligando la variable x. Russell mismo reconoce que no puede controlar eso, teniendo que postular una función de tipo inmediatamente superior al argumento, que es equivalente veritativamente a la otra (que en unos casos es verdadera y en otros casos es falsa). Puede que tenga una intensión diferente, aunque desde el punto de vista extensional sean equivalentes, siendo la ya mencionada ϕ! algo para postular por un principio de la lógica, porque no hay manera de examinar cada caso.

Una de las enseñanzas acerca del principio del círculo vicioso es que no debería haber proposiciones acerca de todas las proposiciones. De igual manera, no es adecuado tener una función arbitraria, cuya proposición, independientemente de ser verdadera o falsa, permita aseverar todos sus valores. Russell veía que las proposiciones p . q, p v q, hoy llamadas funciones booleanas, eran en realidad incompletas, debido a que todavía no se había dicho que era p, q. La matriz misma con la $\wedge$ o la $\vee$ ya no era variable; pero la p, q, si lo era. $\phi (p, q) = p \wedge q$, $\psi (p, q) = p \vee q$, ya ϕ no es variable y ψ tampoco. Pero si digo $\phi(p, q)$ es una combinación de p y q con una conectiva binaria, ϕ si es una variable: varía según la

conectiva $*$, ϕ (p, q) = p $*$ q. En las funciones booleanas, si uno considera las conectivas como funciones, entonces p y q es una función ϕ (p, q), cuyos argumentos son proposiciones, y cuyo valor es también una proposición. En un primer caso tendríamos: los argumentos son objetos individuales y el resultado es un objeto individual. Segundo caso, los argumentos son objetos individuales y el resultado es una proposición. Tercer caso, los argumentos son proposiciones y el resultado es un objeto individual. Cuarto caso, los argumentos son proposiciones y el resultado es también una proposición. Y en esos casos se ve que él estaba considerando sólo funciones proposicionales en el sentido de que el argumento, sea objeto individual o proposición, va a producir un valor proposicional. Sin embargo, en este contexto Russell va a encontrar qué significa "el tal que". Esa expresión involucra una proposición pero no es una proposición. También puede incorporar proposiciones; sea el tal que su cuadrado sea -1, eso involucra una primera proposición. Incorpora proposiciones sobre conjuntos, como cuando él dice "los elementos que satisfacen a $\phi(x)$", los $\phi(x)$ es ya una proposición, y "los elementos que satisfacen a $\phi(x)$" no son una proposición, son una clase, un objeto; entonces, él dice que es un objeto individual pero de orden superior.

El autor en el capítulo II de la primera edición de PM perteneciente a la teoría de los tipos, se dedica a examinar las dos formas de juicios que intervienen cuando se construyen las proposiciones; estos juicios se clasifican en elementales y complejos. La tarea de los juicios elementales es especificar la característica de la relación que existe entre unos términos precisos de referencia; son elementales cuando solamente se asevera cosas como "a tiene una relación R hacia b", y complejos cuando cualquier cosa que ocurre en el universo no es simple. Por consiguiente los juicios complejos están orientados a cualquier hecho que pueda darse en un universo; esto lleva a establecer que un juicio elemental es verdadero cuando hay una correspondencia compleja, y es falso cuando no la hay. Esto se parece a la implicación formal $\phi(x) \supset_x \psi(x)$, que se va a abandonar en la segunda edición de PM para escribir (x). $\phi(x) \supset \psi(x)$. Se abandona "siempre" (always) porque le parece temporal y porque puede acarrear algunas complicaciones con la implicación formal, y la va cambiar por "cualquiera" (any) o "cada una" (every), que es como distributiva uno por uno. Esta opción es mejor que usar "todos" (all); sea el caso "todos no caben en el carro" o "cada uno no cabe en el carro. Hay un todos (all) que no es reductible a cada uno (every). Sea el caso en la aseveración "todos los hombres son mortales", tenemos que si y es humano, y es siempre mortal. El hecho de ser capaces de juzgar la proposición en términos de su verdad o falsedad depende de las propiedades que tengan los objetos que son analizados. Dadas las funciones proposicionales $\phi\hat{X}$, $\psi\hat{X}$, hay un juicio que asevera ψx para cada x para la cual tenemos que ϕx. Tales juicios los llamaremos juicios generales.

De igual manera la definición de verdad es diferente en el caso de los juicios generales frente a los juicios particulares. Podemos decir que hay una verdad elemental de primer orden, como también hay una verdad de segundo orden, y así sucesivamente. Hasta que llegamos a una proposición que no restringe su variable y que es igualmente significativa sea ésta verdadera o falsa, como lo tenemos en: "x es

un hombre implica x es mortal". Esta proposición contiene una implicación formal, cuya enorme ventaja está dada en la posibilidad de que la variable pueda tomar cualquier valor para el cual la función posee un argumento que tiene sentido y por consiguiente es significativo.

Se menciona cómo las palabras "verdadero" (true) y "falso" (false) pueden tener distintos significados según la clase (kind) a la cual está aplicada la proposición. Si tomamos cualquier función $\phi\hat{x}$, sea ϕa uno de sus valores. Llamemos el género (sort) de verdad que se aplica a ϕa "primera verdad", siendo la primera verdad en este contexto y no en otro. Si consideramos la proposición (x) . ϕx, si ella tiene una verdad del género (sort) apropiada a ella, significa que cada valor de ϕx tiene una "primera verdad". Si llamamos este género de verdad apropiado a (x).ϕx "segunda verdad", podemos definir que {(x).ϕx} tiene una segunda verdad, que significa que cada (every) valor para $\phi\hat{x}$ tiene una primera verdad; es decir, "(x).(ϕx tiene una primera verdad). De igual manera, si denotamos por "(∃x). ϕx" la proposición "algunas veces ϕx", "ϕx con algún valor para x", encontramos que (∃x).ϕx tiene una segunda verdad si hay un x con el cual ϕx tiene una primera verdad. Podemos definir que {(∃x).ϕx} tiene una segunda verdad, cómo significando que "algún valor para $\phi\hat{x}$ tiene una primera verdad"; es decir, (∃x).(ϕx tiene una primera verdad). Consideraciones parecidas se aplican también para la falsedad. Consideraciones similares permiten tratar con "no-p" y con "p o q". Podría pensarse que estas son funciones en las cuales cualquier proposición puede aparecer como argumento. Esto se debe a la ambigüedad sistemática en los significados de "no"(not) y de "o"(or), por medio de las cuáles ellas se adaptan por si mismas a proposiciones de cualquier orden. Para explicar completamente cómo ocurre esto , se ha de comenzar con la definición del género de la más simple verdad y falsedad (the simplest kind of truth and falsehood).

Existe una negación de la proposición de la forma " (x) . ϕx " , que está dada con la ayuda del cuantificador que se menciona en "por lo menos alguna vez ϕx", que puede ser notado como (∃y) . ϕx. Este puede ser leído como "existe un y tal que ϕy", lo que nos llevaría a la negación de (x) . ϕx como (∃x) . ~ ϕy. De esta manera en el lenguaje tradicional de la lógica formal, la negación de una afirmación universal se define como la negación del particular, y la negación del particular afirmativo se define como el universal negativo. Este uso de la negación merece definición aparte, debido a que el significado de la negación para tales proposiciones es diferente del significado de la negación para proposiciones primitivas. Russell tenía la duda de sí la negación que él definía para proposiciones elementales se podría extender a las proposiciones cuantificadas. El significado de la negación para las proposiciones cuantificadas es distinto al significado de la negación para las proposiciones elementales; la razón estriba en que el cuantificador puede estar ligado a una variable de orden superior muy alejada de ser una variable elemental.

La dificultad no es que las conectivas sean conmutativas, sino que la implicación material no es conmutativa. El problema es que "ser conmutativa" es una función

de orden superior, porque se aplica a la "y" ($\wedge$) a la "o" ($\vee$), a la implicación formal, a la "o exclusiva" $\underline{\vee}$; resulta que a veces se cumple y otras veces no. Luego esa función proposicional K($\hat{\phi}$) es una función de orden superior a cada $\phi(\hat{p}, \hat{q})$. K(ϕ) tiene como argumentos las conectivas, donde unas van a ser conmutativas y otras no. Pero entonces tiene que tener un tipo superior a la conectiva, porque la conectiva a su vez incorpora proposiciones. Entonces el problema que él ve es que va a haber una "y" para cada tipo; para proposiciones de primer orden es de segundo orden, para proposiciones de segundo orden es de tercer orden, o cada vez que aparezca supone que hay una mínima que tiene el tipo apropiado. Todo esto conlleva a que es un problema definir los números naturales, definir las conectivas, definir los cuantificadores, etc; independientemente del tipo de las proposiciones que intervengan.

Una función no puede significativamente tener como argumento cualquier cosa definida en términos de la función misma. La función es esencialmente una ambigüedad, y si ocurre en una proposición definida, debe ocurrir de tal manera que la ambigüedad desaparezca. Cuando una función puede ocurrir significativamente como argumento, algo que no es una función no puede ocurrir significativamente como argumento; como también, cuando algo (something) que no es una función ocurre significativamente como argumento, una función no puede ocurrir significativamente. Tomemos "x es un hombre" y consideremos "$\phi\hat{x}$ es un hombre". No hay aquí nada que permita eliminar la ambigüedad de $\phi\hat{x}$, no hay nada que defina lo que es ser hombre. Una función no es un objeto definido, es tan sólo una ambigüedad que espera ser determinada, y sólo puede ocurrir significativamente si recibe la determinación necesaria; esta determinación no es cualquier cosa determinada en la proposición.

Una proposición no es una entidad aislada, sino una relación entre muchas; la declaración en la que aparece la proposición como sujeto solamente es significativa si puede ser reducida a una declaración acerca de los términos que aparecen en la proposición. Debemos poder ir a los constituyentes y encontrar el sujeto o sujetos verdaderos. En declaraciones como "p es un hombre", esta no es posible, desde que $\{(x). \phi x\}$ carece de sentido. Motivo por el cual hemos de ser muy cuidadosos de la manera en que la definamos. A fin de evitar equívocos, ella debe recibir la determinación necesaria, la cual no es percibida si ella es substituida por algo determinado dentro de una proposición, siendo necesario crear una regla que elimine la ambigüedad funcional exigida para que tenga una significación inequívoca. Se propone que es tarea y responsabilidad de los signos precisar este tópico, dado que las proposiciones no son entidades aisladas sino que reclaman una especificidad del sujeto a fin de que puedan ser significativas y la posibilidad de poder ser reducidas a una configuración formal.

Todo esto nos invita a que consideremos que una proposición no es una entidad aislada o solitaria, sino que está en relación íntima con toda una pluralidad de otras proposiciones, siendo solamente significativa si es posible reducirla a una

proposición donde todos sus términos puedan ser aseverados de manera inequívoca. Esto nos lleva a que toda función puede tener argumentos de distinto tipo, y por consiguiente debe darse una jerarquía entre las mismas proposiciones. No obstante, tal hecho no es del todo fácil, en especial debido a que las funciones pueden tomar distintos argumentos, y ellos mismos tienden a formar totalidades ilegítimas. En las funciones, un objeto "a" es un argumento incapaz de ser argumento de otras funciones, a su vez no hay un término común que pueda ser argumento de otras funciones. Esto nos va a llevar a construir una jerarquía, en la cual las funciones que toman un argumento "a" forman una totalidad ilegítima, y ellas mismas requieren una división en una jerarquía de funciones. Sea $F(\phi\hat{Z}, x)$ una función de dos variables $\phi\hat{Z}$, x; si mantenemos por el momento a x fijo, podemos aseverar todos los valores posibles de ϕ, y obtenemos una proposición: $(\phi). F(\phi\hat{Z}, x)$. Aquí si x es una variable, tenemos una función de x; pero como esta función involucra una totalidad de valores $\phi\hat{Z}$, ella no puede ser uno de los valores incluidos en la totalidad por el principio del círculo vicioso. Se sigue que la totalidad de los valores de $\phi\hat{Z}$ en $(\phi). F(\phi\hat{Z}, x)$ no es la totalidad de todas las funciones donde x pueda ocurrir como argumento, y que no hay tal totalidad como aquella de todas las funciones donde x ocurra como argumento.

Lo anterior nos exige el axioma de reductibilidad a fin de evitar la falacia del círculo vicioso, puesto que este axioma nos permite restringir la función de tal manera que no sea posible que ella misma se convierta en uno de sus propios valores. Esto es posible si permitimos que nuestras funciones se puedan dividir en tipos; de igual manera, esto nos conduce al alcance en que la aseveración puede formularse; ya sea para todos los valores o para algunos. Russell plantea un tema (del que luego se retractará); siguiendo a Peano, establece las denominadas variables aparentes o indeterminadas. Éstas se caracterizan por el uso de las palabras "todo" o "alguno", como también donde se da la presencia de una variable temporal, como lo es cuando aseveramos que alguien que todavía no ha muerto va a morir. Sea $\phi(x, t)$: la persona x está viva en el instante t. $(x) \{ [(\exists t)\ \phi(x, t)] \supset [(\exists t')\ ((t' > t) \wedge \sim\phi(x, t'))] \}$, toda persona que esté viva en algún momento, no va a estar viva en algún momento posterior; o sea "todo hombre es mortal". Pero aquí se está cuantificando sobre el tiempo y no solamente sobre los hombres, y la lógica temporal no fue desarrollada hasta después de la segunda guerra mundial.

Se resalta que el carácter indubitable de la proposición es una de las exigencias dadas para descartar la presencia de una variable aparente, sea el caso donde está dado un juicio inmediato de percepción, como lo es "esto es rojo". Todo esto lleva al autor a tratar de formular una teoría del conocimiento que pueda responder de manera satisfactoria a la pregunta de cómo se conoce y todas las categorías involucradas en tal acción: tarea que no del todo pudo completar de manera satisfactoria, ya sea por la extensión de la misma, como también por su incalculable complejidad. Sin embargo hay que agregar que: "Este objeto es rojo", no hace parte de las matemáticas debido a que tanto "este" como "objeto rojo" no tienen variable.

En el capítulo II de la primera edición de PM Russell aborda la teoría de los tipos, donde presenta el principio del círculo vicioso a partir del cual se originan las distintas paradojas que afectan la lógica simbólica a nivel de sus constituyentes: sean estos las proposiciones, las clases, los números cardinales y ordinales, capaces de albergar totalidades ilegítimas. Las paradojas que se refieren a las proposiciones afectan más a las funciones proposicionales como $\phi\hat{x}$. Russell manifiesta que la naturaleza de la función es su "ambigüedad", muy vinculada a la manera en que se ejerce el juicio que interviene en la enunciación de una proposición y el alcance del juicio mismo (The scope of our judgement); como él mismo lo dice: "Nosotros estamos de hecho juzgando una instancia ambigua de la función proposicional"(We are in fact judging an ambiguous instance of the propositional function). Esa ambigüedad plantea dificultades a la teoría de la denotación (ambigüedad en la denotación de los valores de una función cuando denota una cierta totalidad) presentada en PoM y al manejo de los cuantificadores en PM (cuando se asevera "$(x) . \phi x$" en todas las proposiciones que son valores para $\phi\hat{x}$); cuando no se puede construir una proposición acerca de todas las proposiciones, Russell plantea una ambigüedad sistemática de la verdad y la falsedad. Estas se expresan tanto en referencia al cuantificador universal $(x) . \phi x$ como en referencia al cuantificador existencial "$(\exists x) .\phi x$", la existencia de múltiples verdades o falsedades; denominadas primera verdad, segunda verdad, etc.

En el capítulo VIII de la primera introducción de PM, Russell busca establecer las diferencia entre el orden de una matriz y el tipo de una proposición. Cuando alguien manifiesta "estoy mintiendo", tenemos que hay una proposición en la que estoy afirmando que es falsa; se está aseverando la verdad de algún valor de la función "asevero p, y p es falsa". Sin embargo la palabra "falsa" es ambigua, y esto lleva a la necesidad de especificar "el orden de la falsedad" o el orden de la proposición en la cual está inscrita la falsedad. Esto nos lleva a que una proposición p que estoy afirmando y que tiene una falsedad de orden n es verdadera o falsa si existe una verdad o falsedad de un orden superior n +1; esto lleva a que "estoy mintiendo" sería una proposición falsa de primer orden, pero afirmar "estoy aseverando una proposición falsa de primer orden" es falsa, involucra que es una declaración de segundo orden que es verdadera. Vemos que "estoy haciendo una declaración falsa de orden 2n + 1" es falsa, mientras "estoy haciendo una declaración falsa de orden 2n" es verdadera; esto nos lleva a que la paradoja o las contradicciones posibles desaparecen. Mientras el tipo de una proposición hace referencia a la definición involucrada y que tan elemental ella es; cuando existe una proposición que es elemental y no hay nada anterior a ella, se diría que es de tipo 1. Las distintas proposiciones que se construyan a partir de ella van teniendo un tipo superior.

Sin embargo el uso de ciertas palabras conlleva cierta "ambigüedad sistemática de tipo" (systematic ambiguity of type) como lo son: verdad, falsedad, función, propiedad, clase, relación, cardinal, ordinal, nombre, definición. Cuando las nociones mencionadas buscan definirse en términos de ellas mismas, surge una totalidad que da lugar a las falacias del círculo vicioso. En muchos casos, aunque

concluyamos que los argumentos que involucran estas falacias no se contradigan a sí mismos, sí dan lugar a una totalidad ilegítima. La diferencia entre tipo y orden radica en que en el tipo estamos tomando en cuenta los predicados y el alcance de los cuantificadores; para lo cual se busca controlar el tipo de una proposición a través de una cuantificación precisa, mientras que el orden se centra en la búsqueda de la matriz de tipo mínimo, que está relacionada con el axioma de reducibilidad; en la cual se busca que el predicado evite la circularidad del círculo vicioso. Sin embargo, el problema en Russell está en que él no distingue entre el objeto y el nombre del objeto. Afirmándose que dos objetos son iguales si cumplen todos los predicados de todos los órdenes, problema muy arduo dado que hay que controlar que tanto los órdenes como los tipos de las proposiciones no se le vuelvan incontrolables.

El ser capaces de poder construir una proposición original, cuya función permita que sus valores no contengan variables aparentes, es una de las pretensiones mas buscadas. Denominamos "matriz" a tal proposición original de todo un universo donde existen otras proposiciones y funciones. Sin embargo, tal paso plantea sus propias complicaciones y no parece satisfacer del todo nuestros requerimientos, no siendo suficiente afirmar que todas nuestras proposiciones como funciones se obtienen de matrices al cambiar los argumentos en variables aparentes. La necesidad del uso de los tipos a nivel tanto de las proposiciones como de las funciones nos conduce al planteamiento de la noción primitiva del "individual". (Hemos de recordar que "individual" es en inglés tanto sustantivo como adjetivo, en cambio en español "individual" es un adjetivo; la traducción apropiada sería individual u objeto individual). Parece que los individuos serían de orden cero, los conjuntos serían de orden uno, pero el problema de las funciones es si van a tener su función predicativa paralela. Se puede decir que la jerarquía de conjuntos va a ser la misma que la jerarquía de las funciones proposicionales en el sentido de que (como se hace ordinariamente en lógica moderna) se toma el conjunto de satisfactores del predicado como equivalente al predicado. Por ejemplo: ¿qué significa par? Pues si lo toma uno extensionalmente, el conjunto de todos los pares es el que corresponde al predicado par. Y en ese sentido uno podría equiparar la jerarquía de las funciones proposicionales (por lo menos las predicativas) con la de los conjuntos.

La aspiración sobre los mismos es que sean constituyentes genuinos, que resistan las exigencias del análisis. No hemos de olvidar que todavía no hemos hablado de ningún análisis de clases; esto tiene que ver con que si hacemos un análisis de clases, necesitamos la existencia de una clase de cada tipo; esto nos ahorraría el axioma de reductibilidad y la prohibición del círculo vicioso. Frente a las matrices pareciera que son funciones elementales porque no tienen variables aparentes, sino más bien son funciones elementales cuyos únicos argumentos son individuales. Se ha de recordar que existen funciones predicativas de cualquier orden; aquellas que se caracterizan por la presencia del símbolo !, que se entienden como las del mínimo orden compatible con el orden de los argumentos. Todas las proposiciones y funciones posibles se obtienen a partir de matrices al cambiar los argumentos de las

matrices en variables aparentes. Para dividir en tipos las proposiciones y funciones, se comienza a dividir las matrices de tal manera que se puedan evitar las falacias del círculo vicioso en las definiciones de las funciones que nos conciernen. Para este propósito, usamos letras cómo a, b, c, x, y, z para denotar objetos que no son ni proposiciones ni funciones. Tales objetos se llamarán "objetos individuales"; serán los constituyentes de las proposiciones o de las funciones, serán constituyentes legítimos en el sentido que no desaparecen en el análisis, como sí lo hacen las clases o las frases de la forma "el tal y tal" (the so-and-so).

Las primeras matrices son aquellas cuyos valores son de la forma:

ϕx, $\psi(x,y)$, $\chi(x,y,z,...)$, donde los argumentos son todos individuales. Las funciones ϕ, ψ, χ, por definición no contienen variables aparentes, y en vez de argumentos, lo que contienen son individuales que no presuponen ninguna totalidad de las mismas funciones. A partir de estas funciones podemos construir otras funciones de x tales como: $(y) . \psi (x, y)$, $(\exists y) . \psi(x, y)$, $(y) : (\exists z)\ \chi (x, y, z)$, y así sucesivamente. Todas estas no presuponen ninguna totalidad excepto aquella de los individuales. De esta manera llegamos a una colección de funciones de x, caracterizada porque ellas no involucran variables que no sean individuales. Tales funciones serán llamadas "funciones predicativas de primer orden". Estas serán notadas como $\phi!\hat{y}$, y cualquier valor de la misma será $\phi!y$, donde no hay variables involucradas que no sean sólo individuales. No obstante, $\phi!y$ involucra dos variables, llamadas $\phi!\hat{a}$, y, donde la primera no es un individual. Asimismo "$(y) . \phi!y$" es una función de la variable $\phi!\hat{a}$, y de esta manera involucra otra variable que no es un individual. La introducción de las variables de primer orden nos lleva a un conjunto de nuevas matrices. Donde $\phi!a$ es una función de la variable $\phi!\hat{S}$. Si a y b son dos individuales definidos, "$\phi!a$ implica $\psi!b$", es una función de dos variables $\phi!\hat{S}$, $\psi!\hat{S}$, y así sucesivamente. Esto nos conduce a un conjunto completo de nuevas matrices:

$f(\phi!\hat{S})$, $g(\phi!\hat{S}, \psi!\hat{S})$, $F(\phi!\hat{S},y)$,.., y así sucesivamente. Estas matrices contienen individuales y funciones de primer orden como argumentos, sin que tengamos, por tratarse de matrices, variables aparentes. Cualquiera de tales matrices, si contiene más de una variable, da lugar a nuevas funciones al cambiar todos sus argumentos excepto uno en variables aparentes. De modo que obtendríamos las siguientes funciones:

$(\phi) . g (\phi!\hat{S}, \psi!s)$, la cual es una función de $\psi!\hat{S}$.
$(y). F(\phi!\hat{S}, y)$, la cual es una función de $\phi!\hat{S}$.
$(\phi). F(\phi!\hat{S}, y)$, la cual es una función de y.

Se dará el nombre de matrices de segundo orden a tales matrices que tengan funciones de primer orden entre sus argumentos, y que no tengan argumentos excepto funciones de primer orden e individuales; no siendo necesario que deban tener individuales entre sus argumentos. De igual manera, se denominarán

funciones de segundo orden a las que sean matrices de segundo orden o que sean derivadas de las mismas al cambiar alguno de sus argumentos en variables aparentes.

Estas nuevas clases de funciones, donde podemos tener una función de segundo orden con un argumento de primer orden, serán denotadas como: f!($\hat{\phi}$!$\hat{S}$), siendo sus valores f!(ϕ!$\hat{S}$); a tales funciones las denominaremos "funciones predicativas de funciones de primer orden". De igual manera tenemos funciones de segundo orden, que se derivan a partir de funciones de la forma f!(ϕ!$\hat{S}$, x) cuando cambiamos ϕ en una variable aparente. Podemos proceder de igual manera para las matrices de tercer orden, las cuales tendrán funciones de segundo orden como argumentos, sin que contengan variables aparentes excepto individuales entre sus argumentos y funciones tanto de primer como de segundo grado; y así podemos proceder indefinidamente. No obstante nunca llegaremos a funciones de un orden infinito, debido a que el número de los argumentos y de las variables aparentes debe ser finito.

Se define una función de una variable como predicativa cuando ella es de un orden inmediatamente superior a aquél de su argumento, es decir del orden más bajo compatible con el que tiene ese argumento. Los argumentos de una función pueden ser funciones, proposiciones o individuales. Cuando consideramos una función cuyo argumento es un individual, esta función presupone una totalidad de individuos; pero a menos que ella contenga funciones como variables aparentes, no va a presuponer ninguna totalidad de funciones. Se debe definir la totalidad de aquellas funciones que tienen individuales como argumentos y no contienen funciones como variables aparentes. Éstas son las funciones predicativas de los individuales. Una función predicativa de un argumento variable es aquella que no involucra ninguna totalidad, excepto aquella de los posibles valores del argumento, y los que se presuponen a su vez por cualquiera de los posibles argumentos. De igual manera, una función predicativa de un argumento variable es cualquier función que se puede especificar sin introducir nuevos géneros de variables.

En Russell puede existir un desliz terminológico, pues cuando está hablando de funciones predicativas, exige que en la función ϕ!$\hat{y}$ esté ya determinada la ϕ como función de una variable real individual; y esto es lo que llamaba proposición indefinida. De ahí se dice que no es proposición sino función; cuando antes había dicho que ϕ$\hat{y}$ es una función, y ϕy es una proposición indefinida, lo que es ya una contradicción. Puede que él mismo tenga esa contradicción de una introducción a la otra. El problema es que la notación "ϕy" tiene dos variables: "ϕ" y "y". Si "ϕ" es una constante, ϕy es una proposición indefinida (hoy la llamamos "abierta") por tener una variable libre ("y"). Si "y" es una constante, por ejemplo si "y" se refiere a la antepenúltima letra del alfabeto inglés, pero "ϕ" es una variable para funciones, ϕy todavía es una proposición indefinida o abierta. Si "ϕ" también es una constante,

por ejemplo si se refiere al predicado "...es una letra del alfabeto inglés" ϕy es una proposición definida o cerrada, en este caso verdadera.

Un tratamiento análogo puede implementarse para las proposiciones, donde aquellas proposiciones que no contienen ni funciones ni variables aparentes pueden ser llamadas "proposiciones elementales". A su vez las proposiciones que no son elementales, que no contienen funciones, y que no contienen variables aparentes excepto individuales, pueden ser llamadas proposiciones de primer orden. Se entiende que sólo puede haber en una proposición variables aparentes; también se entiende que cuando ocurre una variable real, la proposición se convierte en una función. No obstante, la jerarquía proposicional nunca se ve requerida en la práctica, y solamente se la usa para la solución de paradojas.

También hemos de considerar que aquellas afirmaciones que establecen algo de manera significativa para "todas las funciones de a", donde a es un objeto dado; al igual que aquellas nociones como "todas las propiedades de a", o "todas las funciones que son verdaderas con el argumento a" no son viables, a menos que especifiquemos el orden de la función requerida. Sea el caso: podemos hablar de las propiedades de segundo orden para a, o "las propiedades de a para el orden enésimo". Todo esto se hace para evitar, entre otras cosas, las ambigüedades sistemáticas que se pueden originar cuando se desconoce el orden de una declaración dentro de la jerarquía. Todo esto lleva al autor a establecer el axioma de reductibilidad, cuyas exigencias nos llevan a establecer lo que significa la equivalencia formal. Se dice que dos funciones $\phi\hat{x}$, y $\psi\hat{x}$ son equivalentes formalmente cuando, con cada argumento posible de x, ϕx es equivalente a ψx, es decir; ϕx , ψx son ambas verdaderas o ambas falsas. Lo que lleva a que ambas están satisfechas por el mismo conjunto de argumentos. Esto nos lleva a plantear que, dada una función $\phi\hat{x}$, hay una función predicativa que establece que es verdadera cuando ϕx es verdadera y falsa cuando ϕx es falsa. En el capítulo III de la primera edición de PM, Russell retoma algunas consideraciones presentadas en el capítulo II, y busca extenderlas. Simbólicamente podemos escribir el axioma como sigue:

$$\vdash : (\exists\psi) : \phi x \,.\equiv_x .\, \psi! x$$

para dos variables requerimos un axioma similar, sea este: dada la función $\phi(\hat{x}, \hat{y})$, hay una función predicativa formalmente equivalente, es decir:

$$\vdash : (\exists\psi) : \phi(x, y) \,.\equiv_{x, y}.\, \psi!(x, y)$$

De igual manera podemos definir que x, y son idénticos cuando todos los predicados de x se aplican a y, es decir cuando $(\phi) : \phi!x \,.\supset.\, \phi!y$; a partir de aquí podemos establecer: $x = y \,.=: (\phi) : \phi!x \,.\supset.\, \phi!y$ Df.

Hay que tener claro en qué sentido se va aumentando la posibilidad de encontrar una función predicativa del orden mínimo compatible con los órdenes de los

argumentos pues no se dice que a, y sean individuos. La proposición que define la igualdad está cuantificando sobre todos los argumentos predicativos. Él cree resolver el problema del tipo en la igualdad; pero si existen dos objetos x,y, sólo son iguales si cumplen todos los predicados de todos los órdenes. Pero se concluye que eso no se puede cumplir si son dos objetos, dado que sólo sería el mismo. Hay una trampa en decir que dos objetos son iguales, siendo lo más razonable decir que la igualdad no es para objetos sino para los símbolos de los objetos. El objeto x es igual al objeto y cuando el símbolo del objeto x es equivalente al símbolo del objeto y; o sea se refieren al mismo objeto. Russell no distingue entre el objeto y el nombre del objeto; quiere imponer la equivalencia de símbolos como igualdad de objetos, con lo cual pueden ser dos objetos diferentes. Parece que al final nos surge la pregunta: ¿Es una igualdad por identidad o es una igualdad por el nombre? Russell quería remitirse a la metafísica, dado que en la lógica hubiera bastado resolver el problema para los símbolos.

La escritura x = y se cumple cuando x es otro nombre para el mismo objeto nombrado por y. La igualdad se reduce a las distintas maneras de simbolizar el objeto. En ese tiempo la discusión sobre la distinguibilidad o indistinguibilidad de objetos era todavía un problema. En especial si mencionamos el caso en la mecánica cuántica, cuando decimos que dos electrones están dando la vuelta alrededor del núcleo, nos surge la pregunta: ¿son distinguibles o son iguales? No son iguales debido a que son dos. Vemos la intención de utilizar la igualdad en el sentido en que dos objetos son indistinguibles o idénticos. Se define una equivalencia referencial para símbolos “x” $\approx_R$“y” $\equiv$ “x” y “y” se refieren al mismo objeto (no necesariamente individual). Entonces, “x = y” es una abreviatura de “ “x” $\approx_R$ “y” ”. Parece que la “igualdad” de objetos diferentes es sólo una relación de equivalencia: la indistinguibilidad.

Al considerar al axioma de reductibilidad en el numeral VI del segundo capítulo de la primera edición de PM, se llega a plantear la identidad como un indefinible, y para admitir lo que él mismo considera como algo imposible: que dos objetos puedan concordar en todos sus predicados sin ser idénticos. La utilidad de este axioma también se ve en la teoría de las clases; en este caso, dada una función $\phi\hat{Z}$ de cualquier orden, hay una clase α consistente en aquellos objetos que satisfacen a $\phi\hat{Z}$. En consecuencia, “ϕx” es equivalente a “x pertenece a α”, siendo una declaración que no contiene variable aparente y por tal motivo es una función predicativa de x. No obstante, si asumimos la existencia de las clases, el axioma de reductibilidad es innecesario. Sin embargo de acuerdo a los intereses involucrados, es siempre conveniente asumir la suposición requerida más pequeña para probar los teoremas; esto nos lleva a que se prefiera asumir el axioma de reductibilidad en vez de la existencia de las clases.

El axioma de reductibilidad es equivalente a la suposición que establece que cualquier combinación o disyunción de predicados dada intensionalmente es equivalente a un predicado particular. Si aseveramos que x tiene todos los

predicados que satisfacen la función $f(\phi\hat{Z})$, hay algún predicado que x siempre tendrá en todos los casos donde nuestra aseveración sea verdadera, y no lo tendrá en cualquiera de los casos en que sea falsa; algo parecido sucede si aseveramos que x tiene alguno de los predicados que satisfacen una función $f(\phi!\hat{Z})$. Por medio de esta suposición, el orden de una función no predicativa puede ser disminuido en uno; en consecuencia, después de un determinado número finito de pasos, hemos de poder ser capaces de salir de cualquier función no predicativa hacia una función predicativa formalmente equivalente.

El axioma de reductibilidad no es evidente en sí mismo, más bien se trata de un razonamiento que involucra aceptar una proposición de carácter inductivo, cuya facilidad radica en poder deducir de él muchas proposiciones prácticamente indubitables, donde tan sólo puedan darse proposiciones verdaderas deducidas del mismo. Se reconoce que la infalibilidad es algo que difícilmente se alcanza, dado que siempre la duda debe acompañar a cada axioma y a todas las consecuencias derivadas de él. Se hace hincapié en cómo la teoría de los tipos afecta la solución de la mayoría de las contradicciones que han acosado a las matemáticas, y éstas involucran las falacias del círculo vicioso, y cómo estas paradojas se evitan a través de la teoría de los tipos. No sólo estas paradojas se relacionan con las ideas de número y cantidad, sino son el resultado del uso no adecuado de estas mismas ideas; en especial cuando éstas mencionan conceptos que involucran totalidades ilegítimas.

Se menciona que existe un número indefinido de diferentes contradicciones y en todas ellas la solución es del mismo género. La apariencia de la contradicción se produce por la presencia de alguna palabra que tenga una ambigüedad sistemática, como lo son: la verdad, la falsedad, la función, la propiedad, la clase, la relación, el cardinal, el ordinal, el nombre, la definición. Cualquiera de estas palabras posee una ambigüedad; va a generar una totalidad y, por ende, un círculo vicioso. Nuestro recurso consiste en identificar aquellas palabras ambiguas y definirlas como pertenecientes a un tipo específico.

Conclusiones

Uno de los aspectos centrales del actual trabajo es enfrentarnos con la "ambigüedad propia del lenguaje", que afecta a todas las áreas del conocimiento humano y que en el caso que nos ocupa, se ve amplificada cuando buscamos definir el "modus operandi" de las nociones de la lógica simbólica. Tenemos cómo en el lenguaje ordinario las expresiones directas de un símbolo y un objeto generalmente son nombres propios. Dificultades que encontramos cuando tratamos de precisar la coherencia entre el discurso ordinario vivo y el manejo simbólico que se hace de él a través de las fórmulas propuestas por las disciplinas formales. Éstas usan toda una variedad de símbolos que responden a unas reglas de formación, algunas de ellas implícitas, que por más que se precisen, no obstante generan toda suerte de paradojas. Russell decía que no existen axiomas muy precisos para el uso de los símbolos como lo creen los matemáticos; solamente en una teoría como la de Hilbert se refieren a las escrituras mismas. El autor que nos ocupa, Bertrand Russell, refleja todo ese drama entre una lógica simbólica que se está consolidando hacia finales del siglo XIX y comienzos del XX, como una disciplina que reclama su propia independencia dentro de las ciencias, en especial frente a las matemáticas; a la cual él quiere concederle el privilegiado lugar de ser la instancia capaz de generar todas las matemáticas a través de sus propios presupuestos. Este proyecto llamado "logicísta" no fue adecuadamente terminado por Russell, y aún hoy en día no se ha dicho la última palabra frente al mismo. Tiene tanto sus partidarios como sus detractores, más inclinados por un manejo netamente abstracto de los diversos modelos matemáticos, los cuales, mientras muestren su coherencia teórica, son aceptados dentro del pragmatismo del mundo moderno o postmoderno, como se le quiera denominar.

La definición

Uno de los elementos por el cual deseo comenzar estas reflexiones, es el manejo mismo de la definición, que en Russell no es una idea primitiva sino más bien un recurso explicativo cuando se lee de izquierda a derecha porque expande la expresión de la izquierda; pero también tiene un sentido taquigráfico cuando se lee de derecha a izquierda que comprime una escritura larga en una corta, lo que facilita el cálculo. Este aspecto se puede apreciar que en la lista de definiciones de Russell no existe ninguna definición donde el lado derecho sea más corto que el izquierdo. El artificio simbólico para señalar que una escritura es una definición consta de dos elementos: uno el signo de la igualdad (=) y otro las letras Df colocadas al extremo derecho de la frase o proposición considerada. Donde es lo mismo escribir la expresión formal a la izquierda que a la derecha del símbolo de la igualdad; no obstante no son lo mismo en el sentido que lo que a uno de interesa es facilitar la escritura.

La igualdad posee las tres propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva, y además tiene la propiedad de sustitución, que permite sustituir la expresión de la derecha por la de la izquierda o viceversa. Antes de estas consideraciones, la definición en lógica era aquella operación mental de precisar las notas constitutivas de un concepto por el género y las diferencias. Recordando que, para Russell, en lógica el papel de la definición es mucho más modesto que en la filosofía, consistente básicamente en facilitar la escritura. Existen tanto consideraciones lingüísticas como lógicas, donde lo colocado a la izquierda es el componente pasivo identificado con el participio neutro latino "definitum", "lo definido", mientras lo colocado a la derecha es más de naturaleza activa y se le denomina el "definiens", "lo que define". Se esperaría que tal "orden" surgido de la íntima relación entre la lingüística y la lógica se mantuviera a fin de poder leer y entender las fórmulas adecuadamente. No obstante, tal situación no se da en la articulación entre la lógica, la matemática y el discurso ordinario; no porque se haya abandonado el rigor de la definición, sino por lo que sucede, por ejemplo, cuando se busca comprimir el discurso ordinario en matemático.

Vemos cierto desdén en los propios matemáticos puros en aceptar estos delineamientos presentados por medio de estos análisis lógico-filosóficos, los cuales se estructuran a partir de presupuestos tomados de la gramática y disciplinas afines; como la semántica y la sintaxis, para citar algunas, además de la semiótica y la filosofía del lenguaje. Basta apreciar el sencillo ejemplo frente a la relación R definida como xRy, donde no se sabe quién es el referente y quien es el referido, sin que logremos resolver la ambigüedad que se presenta. Esto se aprecia en la expresión "$2=\sqrt{4}$", leída como "dos es raíz de cuatro" y recodificada "xRy". Si se le hace la prueba a esa R, resulta funcional.

Muchas veces esto se pasa por alto debido a que la gran mayoría de la gente está acostumbrada a corregir mentalmente la incoherencia de la escritura. Todo esto lleva a ulteriores complicaciones si introducimos la noción del converso de la relación R, denotado por Russell como $\check{R}$, donde R' donde si $xRy \supset y\check{R}x$. Esto se hace para no confundir una expresión en la cual entra una relación en el sentido de Russell con el converso de la relación. Una cosa es la relación entendida por él como aquella que conecta o enlaza el referente con el referido, y otra la entendida por Bourbaki como la proposión que denota una relación. Sea el caso en Russell $x > y$, la relación es: "ser estrictamente mayor que"; en cambio en Bourbaki la relación es: x es estrictamente mayor que. A los tres símbolos los llama él relación, esto nos muestra que no hay axiomas sobre los símbolos.

Todo esto se aprecia en el campo de la docencia, cuando "$x < y$" el profesor escribe "$x > y$" "$x >$", allí hay una relación; pero cuando pone el símbolo "mayor que" para abajo "$x \wedge y$", pasa a ser una operación. Estos ligeros cambios involucran importantes distinciones. Todo esto nos conduciría a algo que bien podría ser llamado "indistinguibilidad de los referentes relacionales". A esto se le agregan algunas complicaciones, fruto de la actividad viva del mismo lenguaje ordinario, como en el caso del inglés, en donde la terminación "-ent" pasó de ser el referente a

ser el referido; aspecto que complica muchos de los análisis, deducciones y conclusiones trabajadas en los textos escritos en ese idioma, en particular los del mencionado autor. Hay que agregar que el autor no tenía clara la distinción entre la proposición relacional de dos variables (xRy) y la relación misma (R), y tampoco entre las funciones de varias variables $F(x_1,...,x_n)$ y los predicados poliádicos P(_,_,...,_). Cuando se colocan varias variables en el símbolo, se entiende que éste denota el resultado de la función, mientras que en un predicado poliádico el resultado no es un número sino es una proposición. Russell algunas veces escribe lo mismo, f(x) cuando f es una función, que $\psi(x)$ cuando ψ es un predicado monádico; en el segundo caso él está trabajando la función proposicional ψ, que cuando se le agrega el argumento produce una proposición, $\psi(x)$.

El orden a nivel del lenguaje ordinario sigue siendo muy importante; sea el caso mencionar la noción de "hipótesis"; aquí tenemos que desde el punto de vista de la etimología, la hipo-tesis es lo que está por debajo o subyaciendo a la tesis, mientras que la imagen mental que tenemos de "hipótesis", es lo que está antes o arriba en la deducción escrita. Al lenguaje ordinario le subyace todo un universo de significación procedente de las denominadas "lenguas madre", tales como el griego y el latín, donde nos encontramos con un orden estricto cuando analizamos una palabra a la luz de sus propias raíces. Uno esperaría que se conservara tal orden en el uso cotidiano que hacemos de la lengua hablada o escrita, pero tal situación no se da en general. Las etimologías indican un camino a seguir, que hace más coherentes y viables los análisis formales, que se desprenden cuando queremos construir las nociones fundamentales de una lógica o de una filosofía. Sea el mismo caso frente a la palabra "proposición", que lingüísticamente significa "propuesta a consideración"; pero ordinariamente se tiene como "aseveración". Y en este caso Russell distinguía entre la fórmula propuesta a consideración y la formula aseverada, por medio del símbolo $\vdash$. En el idioma inglés tenemos "proposition" y "sentence", distinción que no se tiene en el castellano; en todo esto se dan distinciones lógicas y epistemológicas profundas, que se van desde una conjetura a una sentencia fundamentada en axiomas. La proposición todavía no se ha verificado, mientras que en la aseveración sí tenemos una afirmación comprobada o "proposición sentenciada". Russell distinguía entre la formula

Esto nos da una luz frente a otro problema que tanto confundió a la escuela logicísta a la cual perteneció Russell. Hablamos de que no existía la claridad suficiente para distinguir entre la aseveración sintáctica ($\vdash$) y la semántica ($\models$). En la primera es donde el sujeto establece un compromiso con lo que está aseverando. Esta T acostada puede ser considerada como un predicado del metalenguaje. Pudiendo también ser considerada como una relación entre dos proposiciones o una relación binaria de dos puestos. En cambio, la aseveración semántica ($\models$) concierne más a la verdad de los predicados aseverados en concordancia con la estructura específica del lenguaje interpretado en un modelo. Esto no lo sabía Russell, dado que la teoría de modelos empieza más tarde con algunos teoremas de Lowehein, y Gödel quien todavía no era muy consciente de la diferencia entre modelo y teoría, y hubo que esperar hasta que algunos como Tarski empezarán a hacer tal distinción a

comienzos de los años treinta; pero solamente en los años cincuenta se tuvo una teoría de modelos.

En este sentido, Russell no estaba distinguiendo entre la escritura puramente formal al estilo Hilbert antes de la interpretación y después la interpretación en un modelo. También tenemos en él la dificultad en distinguir la descripción del objeto, el nombre del objeto y el objeto mismo, lo que conlleva a querer construir una "lógica real" donde se refleje la esencia misma de las cosas e indistinguible frente al objeto del cual versa sus consideraciones. Toda la primera mitad del siglo veinte se gastó prácticamente en refinar la noción de escritura formal, su interpretación en un modelo y en separar las teorías de los modelos; distinciones que todavía hoy en día no se realizan y se consideran irrelevantes. Esta lógica universal iría en contra de las actuales tendencias, donde más hablamos de la existencia de múltiples lógicas; tantas lógicas, cuantos modelos y teorías podamos construir y sustentar adecuadamente por medio del juego teórico que se desarrolla a partir de sus formulaciones y de los universos conceptuales que ellas mismas crean. En matemáticas casi nadie diferencia si la ecuación representa una escritura o la interpretación de la escritura en un modelo, ni distingue el modelo de la teoría en la cual las escrituras forman un conjunto coherente.

Los cálculos lógicos

Russell estructura su propuesta a partir de una lógica constituida por tres tipos de cálculo: el cálculo proposicional, el cálculo de clases y el cálculo de relaciones. Alrededor de los mismos surge la necesidad de plantear las cinco nociones primitivas que buscan completar el proyecto logicísta, y que se asemejan a la propuesta euclidiana de haber construido la geometría a partir de cinco axiomas fundamentales.

I. El cálculo proposicional que se plantea en PoM propone dos tiposde implicación: la implicación material que es de la forma "p implica q" simbolizada $p \supset q$, y la implicación formal que es tratada recurriendo a la noción de función proposicional "$\phi x \supset \psi x$" que se cumple para todos los valores de x, simbolizada ($\phi x \supset_x \psi x$). No obstante, tales nociones de implicación sufren en PM una serie de cambios, unos debidos a la introducción de dos ideas primitivas: la noción de aseveración ($\vdash$) y la noción de aseveración de una función proposicional ($\vdash . \phi x$). Sin embargo, el autor fue muy renuente en aceptar la necesidad del uso del cuantificador universal, en este tipo de aseveración y en la implicación formal; tan sólo en la segunda introducción de PM decide finalmente incorporarlo en las proposiciones que soportan su propuesta teórica. En la lógica clásica, cuando uno dice: "los hombres son mortales" está implícito que todos lo son; se usa el plural "todos", aunque lingüísticamente, parece distinto decir "todo hombre es mortal", usando el singular.

Inicialmente, como lo señalamos arriba, la presentación fue con un subíndice pegado al signo de la implicación ($\supset_x$), para luego evolucionar hacia la forma parentética de PM, donde la variable que se busca cuantificar universalmente se

coloca entre paréntesis antes de la proposición aseverada: (x): $\phi x \supset \psi x$. Todo esto conllevó un cambio radical en el manejo de las variables, que antes se subdividían en reales y aparentes; finalmente se aceptó que no había necesidad de albergar tal distinción entre las mismas, sino en cuanto están libres o ligadas.

II. El cálculo de clases en PoM parte unas nociones que son tomadas como primitivas, sean las nociones de clase y de la relación de ser miembro de una clase; se considera fundamental la noción "tales que", también tomada como idea primitiva. Se reconocen los aportes sobre el tema de Peano y Frege.

Igualmente presenta la noción de concepto-clase (class-concept) que permite establecer la membresía de los miembros a una clase particular. Mientras en PM se establece una nomenclatura específica que recurre al uso de las letras griegas para identificar una clase, se hace un amplio uso de las operaciones entre conjuntos como lo son la reunión ($\cup$), la intersección ($\cap$) y el complemento ($-$). Además se usa para la noción de pertenencia la notación ($x \in \alpha$).

La palabra "clase" va a ser abreviada por las letras "Cls". Para formar una clase a partir del concepto-clase que comprende la función proposicional $\phi\hat{z}$, va a unir la expresión $\hat{z}(\phi z)$, que puede leerse "los z tales que ϕz", como se aprecia en la expresión:

$\vdash : x \in \hat{z}(\phi z) . \equiv . \phi x$, "x es un miembro de la clase determinada por $\phi\hat{z}$, es equivalente a decir x satisface $\phi\hat{z}$, o ϕx es verdadero".

III. Finalmente en PoM el cálculo de relaciones parte de la noción de relación R expresada en xRy como una función proposicional primitiva, que puede cumplir distintas propiedades como la reflexiva, la simétrica y la transitiva; también se afirma que la suma y el producto de relaciones siguen siendo una relación y son conmutativos, cuando se interpreta como definido por la o y por la y, pero no lo son cuando el producto se interpreta como composición. Adicionalmente se introduce la noción del dominio como sinónimo de la clase de referentes. En PM se utiliza lo anterior, ampliándose como se puede apreciar en la siguiente expresión: cualquier función $\phi(x, y)$ determina una relación R entre x, y, que puede considerarse como una clase de parejas (x, y) para la cual $\phi(x, y)$ es verdadera; en este caso la relación determinada por la función $\phi(x, y)$ se notará $\hat{x}\hat{y}\,\phi\,(x, y)$. Siendo un planteamiento más complejo y elaborado dado que introduce otras nociones como la de función proposicional y la de clase recurriendo a todo un manejo simbólico muy preciso.

Las conectivas

Pareciera que el problema para construir una lógica bivalente para Russell fuera procurarse todos los operadores lógicos necesarios. Se recurrió a la implicación de Peano y la disyunción inclusiva; no obstante también es posible obtener las demás conectivas binarias recurriendo a la negación y a la conjunción. No funciona si

escogemos la disyunción exclusiva o la equivalencia. Al final se vio que un solo operador lógico es capaz de construir todo el sistema conceptual, como lo sería utilizando la barra de Sheffer (|) que hace referencia a la "incompatibilidad", algo que logró demostrar Nicod. De esta manera las denominadas ideas primitivas del nuestro autor no eran tan primitivas.

Como señalamos arriba, Russell quería construir un modelo que se asemejara al de Euclides, que partiendo de cinco axiomas buscaba construir toda la geometría; motivo que lo lleva en PM a escoger cinco ideas primitivas para construir la lógica; sin embargo, tal proyecto, que ya había sido sugerido inicialmente por Leibniz, no logró ser desarrollado finalmente tampoco por Russell. Había que aceptar la aparición de las lógicas más inspiradas en las geometrías no euclidianas, como en Hilbert, donde lo importante es poder definir unas reglas claras de juego tanto para las reglas de escrituras aceptables (postulados) como para las transformaciones válidas (reglas de inferencia) frente a un modelo específico de los muchos que pueden construirse. Gran parte de los problemas mencionados se derivaron de la dificultad de distinguir entre semántica y sintaxis, algo que era común en los tiempos de Russell; y que tan sólo con la aparición de las nuevas semánticas en los años cincuenta se solucionó el problema. Hemos de recordar que comprobamos un axioma semánticamente y no sintácticamente, donde su comprobación semántica se realiza por medio de tablas de verdad, pero sintácticamente no se puede demostrar un axioma a partir de los demás, pues sobraría ese axioma.

La clase y el elemento

En la definición de la matemática pura en PoM, Russell quiere tomar alguna distancia de las teorías de los demás matemáticos importantes de la época como lo fueron Cantor y Peano. Esto lo lleva a evitar mencionar la palabra "conjunto", reemplazándola preferencialmente por la de "clase". Sin embargo, tanto la palabra "clase" como "conjunto" se refieren a la misma noción primitiva de matemática, en especial cuando se usa el operador "los tales que", que permite la transformación de un objeto en otro cualitativamente distinto; sea el caso convertir una proposición abierta en una clase o conjunto. La noción de clase o conjunto está muy vinculada a la problemática de la cuantificación de una función proposicional, que sólo es posible cuando identificamos cuáles satisfactores la cumplen; esto involucra la delimitación de un entorno preciso, que no es más que particularizar la clase donde habitan tales términos, que se corresponde con la notación $\hat{z}(\phi z)$.

Asimismo, frente a la noción de elemento da una serie de giros, sea llamándolo término, muy vinculada al uso del artículo definido o indefinido, como también la noción de individual según los requerimientos conceptuales que tenga que atender; como por ejemplo en la teoría de los tipos. Sin embargo, en la gran mayoría de los casos Russell evita definir lo que entiende por término, recurriendo a una descripción indirecta que tampoco resuelve los problemas planteados. Siendo muy difícil distinguir entre el término como la simple letra de la escritura y el término como el referente de la letra. Recordamos que en esa época no estaba clara la

diferencia entre la escritura formal, la interpretación en un modelo, y el producto de la interpretación que es designar algo en el modelo. Donde surge la pregunta: ¿eso que designa es el término o es el objeto o es el concepto?

Pareciera que tenemos un diálogo continuo entre la lógica y la matemática, donde las nociones de la una pasan a la otra para ser trabajadas y viceversa; siendo muy difícil querer construir una formulación que busque fundamentarse a partir de una independencia tan grande que la lleve a caer en toda suerte de contradicciones. Tal lógica que esté fuera de todos los posibles universos de significación de los distintos lenguajes parece irreal e imposible; siempre al definir una instancia, sea de la naturaleza que sea, se dan cita todos los contextos comunicativos, siendo prácticamente imposible establecer cuál es el más primigenio y privilegiado de todos.

Russell de alguna manera tenía la pretensión de captar no las leyes que gobiernen un modelo lógico particular, sino quería encontrar las leyes del pensamiento en concordancia con Boole, autor que lo influenció a escribir una obra que demarcará un antes y un después en la historia de la lógica; tal proyecto totalizador cae en sus propias contradicciones, paradojas y círculos viciosos, como él mismo lo reconociera en la teoría de lo tipos lógicos, donde habla de las "totalidades ilegítimas". Todo esto también nos conduce al problema de la verdad. Es muy distinto identificar la Verdad como noción epistemológica y la verdad como uno de los dos posibles valores que puede asumir una proposición; el tránsito entre la una y la otra no es muy claro. Esto se debe fundamentalmente a no haber identificado que su propuesta era tan sólo "una propuesta de las múltiples posibles que se pueden construir", y no un planteamiento universal e indubitable que todos debían seguir.

Los distintos niveles del lenguaje se mezclan cuando no se distingue si Russell, al mencionar la negación, parece más referirse al símbolo como huella o al referente del mismo; o si es una idea primitiva o un operador que transforma proposiciones; todo esto hace que parezca que se están mezclando distintos niveles de conceptualización, lo que trae toda suerte de dificultades insolubles. Tan sólo sí aceptamos nuestras propias limitaciones como seres humanos, hijos siempre de una época histórica específica, reconoceremos que es imposible salirnos del universo en que vivimos y situarnos en un contexto atemporal, como para aspirar a captar verdades perennes e inmutables; que de existir, tal vez sean inaprensibles para el ser humano.

La variable

Adentrándonos un poco en la noción de variable, ésta es abordada inicialmente en PoM en relación a una teoría de la denotación muy unida a consideraciones gramaticales, donde se busca tener claridad acerca de la diferencia entre un artículo definido y uno indefinido; como también frente a palabras como: todo (all) , alguno (some), cualquiera (any), cada uno (each). A través de estas palabras busca Russell definir el terreno sobre el cual va a actuar la variable, que inicialmente es abordada

en referencia a algunas frases donde se muestra un juego de lenguaje, que toma a Sócrates como su protagonista y donde busca aplicar diferentes reglas muy inclinadas a seguir las inferencias propias del silogismo. De esta manera, la teoría de la denotación va muy unida a la génesis de una teoría de la variable y de la cuantificación. Sin embargo, nos volvemos a encontrar con la ambigüedad con que son tratados los distintos conceptos formales, donde la falta de una adecuada representación del modelo propuesto lleva a que se vuelva indistinguible el uso de algunas nociones entre sí. Russell busca definir lo que hoy denominaríamos el rango de una proposición a partir de las exigencias de las palabras sobre las que recae la teoría de la denotación. En PM tales palabras son reducidas a dos, siendo presentadas como ideas primitivas dentro de una teoría sobre las variables aparentes: siempre (always) y algunas veces (sometimes), muy unidas a las nociones de todo (all) y alguno (some). Todo esto le trajo a nuestro autor toda suerte de complicaciones; muy influenciado por la física de Newton, quien introdujo unas nociones que involucran el manejo del concepto del tiempo a nivel de las proposiciones. Además, hemos de recordar que Russell no parece tener clara la diferencia entre una variable libre y una constante arbitraria o parámetro.

Russell llamó variable aparente a la que se escribe en aquella función proposicional $\phi\hat{x}$, que adopta dos formas: "siempre ϕx" y "algunas veces ϕx". Este desarrollo es apreciado en la manera en que el autor maneja la noción del alcance (scope), fundamentalmente de una variable dentro de la proposición donde actúa; que inicialmente es abordado a través del uso diferenciado de los puntos dentro de una proposición. No obstante todo el ejército de puntos no logrará detener la necesidad de introducir la cuantificación universal al comienzo de una proposición, lo cual hace más fácil y entendible su manejo. Tan sólo en la segunda edición de PM, finalmente se encuentra con la inevitable necesidad de aceptar la existencia de un cuantificador universal en las fórmulas; las cuales se presagia van sufrir una importante reestructuración en la manera en que se escriben, y que explica muy bien porqué hoy en día no se usan los puntos que el autor propuso ni los subíndices en la implicación ($\supset_x$) y la equivalencia ($\equiv_x$). Esta posición lo lleva a que no es necesario a diferenciar las variables como reales y aparentes, dado que la misma cuantificación resuelve su ambigüedad, pues sólo pueden ocurrir libres o ligadas.

La función elemental y los cuantificadores

Es de resaltar la íntima relación que se da entre la función elemental $\phi(x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n)$ y el uso del cuantificador, sea el universal (x_r) o el existencial $(\exists x_r)$; articulados en la fórmula "$(x) : (y) . \phi(x, y)$" o "$(\exists x) : (y) . \phi (x, y)$" donde la primera expresión a la izquierda se denomina el prefijo y la expresión a la derecha se denomina la matriz. Viéndose la posibilidad de poder obtener variadas proposiciones generales de una matriz dentro de un método generalizado, que funciona bien para proposiciones elementales o proposiciones de primer orden; en caso en que la variable sea un individual, la matriz no se ve afectada. La cuantificación se ve asociada a una cadena, donde el orden en la cuantificación está dado por quien está primero y quien está de último; algo supremamente importante en caso que las proposiciones pertenezcan a distintos ordenes. Esta posición es especialmente útil para identificar las proposiciones propiamente elementales, en cuanto, el cuantificador que se aplica sobre las mismas no se ve antecedido por ningún otro, ni explícito ni implícito, en alguna sustitución intermedia. Todo esto recoge de una manera sucinta el alcance de una variable, lo resume y lo comprime de una manera funcional; representando una ganancia conceptual muy útil para poder escribir cualquier tipo de proposición bajo cualquier tipo de variable. Es de resaltar que ya en la segunda introducción de PM, el autor aborda las proposiciones elementales como atómicas o moleculares; en éstas también se aplica la misma noción de matriz anteriormente mencionada. Podemos agregar que el uso de los puntos en las fórmulas se ve abreviado y resuelto al tener claro el uso de los cuantificadores y los paréntesis; lo cual simplifica la escritura y la hace más explícita. Sin embargo, no queda claro que muchas veces al estar ligada la variable, ésta parece no figurar en la expresión; sin embargo está allí, pero ligada.

Esto nos lleva a introducir un nuevo recurso que haga más explícita la identificación de la cuantificación universal de una variable: siendo éste el espacio vacío $\forall\phi(\ )$, que puede tener un vínculo superior $\forall\phi(\ )$ hace innecesario escribir la variable, o un vínculo inferior $\forall\phi(\ )$, que liga la variable con el espacio libre entre los paréntesis. La problemática de la figuración la tenemos también en el operador "tales que", como en la expresión "existe al menos un x tal que $\phi(x)$", donde Russell consideraba que la x no era una variable que figurara en la expresión porque no la podía reemplazar por nada.

La pertenencia y los tipos

La relación de pertenencia $\in$ puede ser considerado como un relator de dos puestos $(\ ) \in (\ )$; éstos pueden estar ocupados por variables, constantes, o individuales, todos pertenecientes a una clase cualquiera. Aquí nos volvemos a encontrar con la noción de un orden: si el argumento de la izquierda es del mismo tipo que el de la derecha, se presentan paradojas que se aprecian en la teoría lógica de los tipos; en cuanto si tal orden involucra por ejemplo que el argumento de la derecha posea un tipo mayor que el de la izquierda. En todo esto hemos de tener muy claro la teoría de conjuntos, donde el operador $\in$ puede considerarse como una función que va de parejas elemento-conjunto a proposiciones. El símbolo "$\in$" puede entenderse como un relator entre elementos y conjuntos (o entre conjuntos de tipos sucesivos), o como un operador que transforma parejas (elemento, conjunto) o (conjunto, conjunto) en proposiciones.

Adicionalmente se ha de agregar que en tiempo de Russell no se distinguía en las relaciones ni en las funciones la diferencia entre dominio y codominio, o conjunto de salida y conjunto de llegada, lo que refleja una no adecuada comprensión de las distintas variedades de relaciones y funciones (totalmente definidas, en, sobre, etc) con la correspondiente dificultad en precisar las restricciones a la composición de relaciones y funciones y a la cuantificación de las proposiciones correspondientes. Hoy en día hablamos de un conjunto de salida y uno de llegada que puede estar

constituido por individuos, proposiciones o parejas sea de individuos o de proposiciones. Las relaciones y las funciones pueden estar definidas o no definidas para todo el conjunto de salida, sea que tengan o no tengan restricciones en sus argumentos. De este conjunto de salida sale una función que se proyecta hacia el conjunto de llegada, donde encontramos los valores que la función puede tomar; esta clase o conjunto de llegada puede ser igual o no al codominio o rango. Es en el codominio donde se ven expresadas las distintas transformaciones que son el resultado de la operatividad de la función considerada sobre su dominio y es el que va a determinar si se puede o no hacer la composición de relaciones y funciones.

En la época de Russell no era muy clara la distinción entre concepto, clase, predicado y proposición; todavía la influencia de la lógica clásica de Aristóteles estaba muy viva: donde "S es un P", es distinto a "S es un elemento que pertenece a la clase P" y distinto a que P sea un predicado "ser p". El abandonar este esquema clásico de la lógica aristotélica donde la conjugación de verbo ser plantea toda suerte de dificultades; sea que lo tomemos como ser y le antecedamos el artículo definido "el" para convertirse en "El Ser" o la tercera persona del singular del presente "es", que hace que se busque en la lógica una serie de inferencias que apunten hacia una metafísica o hacia una gnoseología, que desentrañe la naturaleza real de los seres y de las cosas. Tal pretensión de procurarnos una lógica que nos permita aprehender las leyes que gobiernan la realidad y por consiguiente "La Verdad" en cuanto aquello que nos trasciende y gobierna, es abandonada cuando se constituye la lógica simbólica; más interesada en ayudar a sistematizar y fundamentar las matemáticas, que en volverse un instrumento de ese conocimiento perenne o atemporal, donde el "nous" nos revelaría su "logos".

BIBLIOGRAFÍA

A. Fuentes primarias

[PoM] Principles of mathematics, Bertrand Russell, George Allen & Unwin Ltd, London 1903

[PM] Principia Mathematica, Alfred North Whitehead y Bertrand Russell, Cambridge University Press, Cambridge 1910, 1927, 1973

Conceptografía, Los fundamentos de la aritmética, Gottlob Frege, Universidad Autónoma de México, México D. F. 1972

Laws of thought, George Boole, Queen's College, Cork, Proyect Gutemberg E-Book, 2005

B. Bibliografía

El desarrollo de la lógica, William y Martha Kneale, Editorial Tecnos, Madrid, 1980

Historia de la lógica Formal, I. M. Bocheński, Editorial Gredos, Madrid, 1976

Elementos de la historia de las matemáticas, Nicolás Bourbaki, Alianza Editorial, Madrid, 1972

Symbolic Logic, Irving M. Copi, The MacMillan Company, New York, 1967

The Mathematical Philosophy of Bertrand Russell: Origins and Development, Francisco A. Rodríguez Consuegra, Birkhäuser Verlag, Basel 1991