Pontificia Universidad Javeriana.

Facultad de Ciencias.

Departamento de Matemáticas.

Introducción a la Geometría Tropical.

Diana Lorena Sánchez Prieto

Directora: Eddy Pariguán

Bogotá - Colombia

Junio 2010

Agradecimientos

El logro de esta tesis se lo debo al apoyo de mis padres y a las incansables correcciones y aclaraciones de mi directora de tesis Eddy Pariguán de la Universidad Javeriana. A Nicolás Vega y al profesor Fernando Novoa director del departamento de matemáticas de la Universidad Javeriana, gracias por su ayuda incondicional en el manejo de algunos programas computacionales. Quiero agradecer especialmente a los profesores Magnus Leksell y Wojciech Komorowski de la Universidad de Gävle quienes estuvieron pendientes a responder mis dudas via mail sobre la instalación y el manejo de “Amoeba computing” [39], gracias al profesor Lars Allermann de la Universidad de Kaiserslautern, por su ayuda en el uso de su programa “Tropical surfaces” [5] y al profesor Thomas Markwing de la Universidad de Kaiserslautern, por su asesoría oportuna en el uso de Singular [6] y la definición de algunos conceptos de la geometría tropical. A todos aquellos que estuvieron pendientes durante el trascurso de mi trabajo de grado, porque fueron ellos los que me dieron fuerzas para continuar cuando me sentia sin ganas.

A todos muchas gracias.

Introducción

En este trabajo se estudió una rama reciente de las matemáticas llamada geometría tropical; los primeros artículos en los que aparece así tienen más o menos diez años; uno de los primeros artículos donde aparece con el titulo de "tropical" es del matematico e informatico brasileño Imre Simon, con su artículo "On semigroups of matrices over the tropical semiring" [24]. Pero existen otros documentos computacionales mas antiguos donde se habla del tema, pero aun no llevan su nombre de "tropical".

Respecto a lo que es, se podría decir que es la geometría creada a partir del álgebra min-plus [61]. Digamos que es una geometría en la que la característica más relevante es que sustituye los objetos geométricos clásicos (rectas, cónicas, superficies) por ciertos complejos poliedrales. Estos complejos poliedrales pueden verse como "una sombra" de los objetos clásicos. Lo curioso es que algunas propiedades geométricas se preservan al hacer esta sustitución, por lo que algunos problemas, que pueden ser complicados de resolver en geometría clásica, se vuelven más sencillos en geometría tropical, ó al menos permiten ser tratados con técnicas de combinatoria, ampliando las herramientas con las que cuenta el matemático a la hora de enfrentarse a los problemas.

En este trabajo queremos dar unas ideas básicas de la geometría tropical como punto de partida para futuras investigaciones. En el Capítulo 1, definiremos los conceptos básicos, con ejemplos y aplicaciones a la geometría lineal tropical. Luego en el segundo capítulo daremos las definiciones mas importantes y necesarias del álgebra lineal tropical, definiendo el $\mathbb{T}$-espacio vectorial junto con las operaciones de adición y producto y sus propiedades. Como nuestro objetivo principal será identificar la correspondencia que existe entre variedades algebraicas y variedades tropicales, en la tercera parte de este trabajo definiremos aquellos conceptos importantes para entender esta correspondencia, y luego describiremos el comportamiento de las curvas en el plano tropical. En el capítulo 4, se dará una idea visual del comportamiento de la geometría tropical y nos ayudaremos de ciertos programas computacionales como, Singular [12], con el que podemos ver las curvas tropicales y sus compactificación utilizando el polígono de Newton, con "Tropical Surface" [5], para dar una idea de como es la superficie de una curva tropical, y para graficar una ameba, utilizaremos programas como "Maple" [41].

Reseña histórica

Geometría tropical es una disciplina nueva en matemáticas, lo que podría ser descrito vagamente como una versión de la geometría algebraica. Sus principales ideas han aparecido en diferentes formas en las obras de Bergman [73] y de Bieri y Groves [74], pero sólo desde finales de los años noventa se ha realizado un esfuerzo para consolidar las definiciones básicas de la teoría. Este esfuerzo ha sido en gran parte motivadas por las fuertes aplicaciones para la geometría algebraica enumerativa descubiertas por Grigory Mikhalkin. Debido a que es una evolución reciente y de ámbito de la investigación, no hay una formulación estándar para la teoría.

El adjetivo "tropicales" se da en honor al matemático e informatico brasileño Imre Simon [63] profesor en la universidad de São Paulo, quien fue pionero en el campo. Simplemente refleja la opinión del Francés en Brasil (ya que fue acuñado por un francés). Más allá de eso, no tiene significado más profundo.

Respecto a lo que es, se podría decir que es la geometría creada a partir del álgebra min-plus [61]. Podemos decir que, es una geometría en la que la característica más relevante es que sustituye los objetos geométricos clásicos (rectas, cónicas, superficies) por ciertos complejos poliedrales. Estos complejos poliedrales pueden verse como "una sombra" de los objetos clásicos. Lo curioso es que algunas propiedades geométricas se preservan al hacer esta sustitución, por lo que algunos problemas, que pueden ser complicados de resolver en geometría clásica, se vuelven más sencillos en geometría tropical, ó al menos permiten ser tratados con técnicas combinatorias, ampliando las herramientas con las que cuenta el matemático a la hora de enfrentarse a los problemas.

Después de una serie de seminarios en geometría tropical que se están impartiendo en la Fundación IMDEA Matemáticas [23], con diversos especialistas, nacionales e internacionales, que han acudido para mostrar resultados y puntos de vista. Aquí presentamos un resumen de lo que se contó en las mismas.

En enero 2008, la serie de seminarios arrancan con las exposiciones de Ilia Itenberg [65] (U. Estrasburgo) y Luis Felipe Tabera [70] (IMDEA Matemáticas). El profesor Itenberg impartió dos seminarios titulados “Tropical Curves” y “Recursive formulas for Welschinger invariants”. En estos seminarios se explicaron los conceptos básicos relativos a las curvas tropicales planas: cómo se definen o cómo determinar su grado y género. También explicó la aplicación de la geometría tropical a problemas de geometría enumerativa real y compleja, mostrando un cálculo tropical de los invariantes de Welschinger y Gromov-Witten [64] en algunos contextos. Por su parte Tabera contó en su charla “Geometric Constructions in Tropical Geometry” cómo comparar construcciones geométricas en el plano complejo y tropical.

En febrero del mismo año, cuentan con las conferencistas Alicia Dickenstein (U. Buenos Aires) y María Jesús de la Puente (U. Complutense de Madrid). La profesora Dickenstein, en su conferencia “Tropical discriminants” contó como, dada una familia de polinomios, se le puede asociar un polinomio discriminante que captura los casos en los que las soluciones del sistema de polinomios es patológico. Mostró como la tropicalización de este discriminante puede ser calculada sin necesidad de calcular previamente el discriminante algebraico. Por otro lado, la profesora de la Puente dio una visión global de la geometría tropical. Al ser una disciplina tan reciente, aún están bajo estudio y discusión los conceptos más elementales y, por el momento, no hay una única definición de curva tropical o de grado de una curva. En esta charla se ven los distintos puntos de vista, cómo se relacionan o las alternativas que hay.

La siguiente conferencista fue Sonia Rueda (U. Politécnica de Madrid), ”Polhyedral representations of invariant differential operators”, y que habló en abril sobre una aplicación de la combinatoria a problemas fuera de ella. Mostrando los polígonos que se esconden tras los anillos de operadores diferenciales invariantes bajo ciertas acciones en el espacio afín.

Erwan Brugallé [68] (U. Paris 6), con su charla "Floor decomposition of tropical curves" mostró como extender las técnicas tropical planas de conteo de curvas de género y grado fijo que pasan por una familia de curvas al caso en el que las curvas son espaciales. Por su parte, el profesor Francisco Santos [69] (U. Cantabria) habló sobre las distintas posibilidades combinatorias de colocar rectas tropicales en el plano y la relación de estas posibilidades con las triangulaciones del producto de dos simplices en su seminario "Triangulations of products of simplices and tropical geometry".

Finalmente, en Junio del 2008, con la visita de Michael Kerber [67] (T.U. Kaiserslautern) y su seminario "A Riemann-Roch theorem in tropical geometry", en el que generaliza una versión combinatoria del teorema de Riemann-Roch sobre grafos a un teorema de Riemman-Roch válido para curvas tropicales, así como a una posible interpretación geométrica del mismo.

Por otro lado, en el 2009 se presentaron una serie de semninarios en el MSRI [47] "Mathematical Sciences Research Institute" desde el 17 de Agosto 2009 al 18 de Diciembre 2009, organizado por: Eva-Maria Feichtner [62] (University of Bremen), Ilia Itenberg [65] (Institut de Recherche Mathmatique Avance de Strasbourg), Grigory Mikhalkin [66] (Université de Genéve), and Bernd Sturmfels (UCB - University of California, Berkeley).

Capítulo 1

Objetos Básicos de la Geometría Tropical

En este capítulo estudiaremos los conceptos básicos de la geometría tropical, como la aritmética tropical y sus propiedades. Luego definiremos el semianillo tropical con las operaciones de adición y producto, para entender como se grafica una ecuación tropical. Al definir el álgebra tropical podremos entender el concepto de polinomio tropical y sus propiedades.

1.1. Aritmética tropical

Antes de empezar, veamos algunos ejemplos de la aritmética de las operaciones tropicales definidas como:

$$x \oplus y := \min\{x, y\} \quad \text{y} \quad x \odot y := x + y.$$

Ejemplo 1. *La suma tropical entre 3 y 7 es 3. El producto tropical entre 3 y 7 es 10. Lo escribimos de la siguiente manera:*

$$3 \oplus 7 = \min\{3, 7\} = 3 \quad y \quad 3 \odot 7 = 3 + 7 = 10.$$

Algunas de las propiedades de la aritmética son válidas para la matemática tropical, como la propiedad conmutativa:

$$x \oplus y = y \oplus x \quad \text{y} \quad x \odot y = y \odot x.$$

También la ley distributiva se satisface para la adición tropical y el producto tropical:

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot y.$$

Ejemplo 2. *Un ejemplo numérico para mostrar ésta ley:*

$$3 \odot (7 \oplus 11) = 3 \odot (\text{mín}\{7, 11\}) = 3 \odot 7 = 3 + 7 = 10.$$

$$3 \odot 7 \oplus 3 \odot 11 = (3 + 7) \oplus (3 + 11) = 10 \oplus 14 = \text{mín}\{10, 14\} = 10.$$

Ambas operaciones tienen elemento neutro. El infinito es el elemento neutro de la adición tropical y el cero es el elemento identidad del producto tropical:

$$x \oplus \infty := \text{mín}\{x, \infty\} = x \quad \text{y} \quad x \odot 0 := x + 0 = 0.$$

Ejemplo 3. *Como último ejemplo de la aritmetica tropical mostramos las tablas de la adición tropical y el producto tropical:*

$\oplus$	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
2	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*
3	*1*	*2*	*3*	*3*	*3*	*3*	*3*
4	*1*	*2*	*3*	*4*	*4*	*4*	*4*
5	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*5*	*5*
6	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*6*
7	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*

$\odot$	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
5	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
7	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*

Tabla 1.

Pero hay que tener cuidado con la adición tropical, porque la resta no esta definida. Es decir no existe x a lo que podamos llamar "10 menos 3"porque la ecuación $3 \oplus x = 10$, no tiene ninguna solución para x.

1.2. Algebra tropical

Empezamos definiendo el semianillo tropical y sus propiedades algebraicas principales.

1.2.1. Semianillo tropical

El conjunto $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con las dos operaciones

$$x \oplus y := \min\{x, y\}, \qquad x \odot y := x + y$$

es el ***semianillo tropical.*** La palabra semianillo se usa porque $\mathbb{T}$ satisface los siguientes axiomas:

1) $(\mathbb{T}, \oplus)$ es un monoide conmutativo con el elemento identidad $0_{\mathbb{T}} = +\infty$:

   (a) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.

   (b) $a \oplus b = b \oplus a$.

   (c) $0_{\mathbb{T}} \oplus a = a \oplus 0_{\mathbb{T}} = a$.

2) $(\mathbb{T}, \odot)$ es un monoide con el elemento identidad $1_{\mathbb{T}} = 0$:

   (a) $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$.

   (b) $a \odot 1_{\mathbb{T}} = 1_{\mathbb{T}} \cdot a = a$.

3) La multiplicación se distribuye sobre la adición:

   (a) Por izquierda: $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.

   (b) Por derecha: $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$.

4) $0_{\mathbb{T}}$ anula $\mathbb{T}$

(a) $0_{\mathbb{T}} \odot a = a \odot 0_{\mathbb{T}} = 0_{\mathbb{T}}$.

Proposición 4. *Las operaciones tropicales satisfacenlos siguientes axiomas:*

- $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.
- $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.
- $x \oplus y = y \oplus x$.
- $x \odot y = y \odot x$.
- $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$.

Demostración. Sean $x, y, z \in \mathbb{T}$.

1. Asociatividad de la adición:

   Veamos que $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= \text{mín}\{x, (y \oplus z)\} \\ &= \text{mín}\{x, \text{mín}\{y, z\}\} \\ &= \text{mín}\{x, y, z\}\} \\ &= \text{mín}\{\text{mín}\{x, y\}, z\} \\ &= \text{mín}\{(x \oplus y), z\} \\ &= (x \oplus y) \oplus z. \end{aligned}$$

2. Asociatividad del producto:

   Veamos que $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

$$\begin{aligned} x \odot (y \odot z) &= x + (y \odot z) \\ &= x + (y + z) = x + y + z \\ &= (x + y) + z \\ &= (x \odot y) + z = (x \odot y) \odot z. \end{aligned}$$

3. Conmutatividad de la adición:

   Veamos que $x \oplus y = y \oplus x$.

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \min\{x, y\} \\ &= \min\{y, x\} \\ &= y \oplus x. \end{aligned}$$

4. Conmutatividad del producto:

   Veamos que $x \odot y = y \odot x$.

$$\begin{aligned} x \odot y &= x + y \\ &= y + x \\ &= y \odot x. \end{aligned}$$

5. Distributividad:

   Veamos que $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$.

$$\begin{aligned} x \odot (y \oplus z) &= x \odot \min\{y, z\} \\ &= \min\{x \odot y, x \odot z\} \\ &= \min\{x + y, x + z\} = (x + y) \oplus (x + z) \\ &= (x \odot y) \oplus (x \odot z). \end{aligned}$$

□

Proposición 5. *La función exponencial satisface:*

1. $exp(x \oplus y) = exp(x) \oplus exp(y)$ ***2.*** $exp(x \odot y) = exp(x)exp(y)$

Demostración. 1. $e^{x \oplus y} = e^x \oplus e^y$.

Caso 1 $x > y$

$$\begin{aligned} e^x \oplus e^y &= \min\{e^x, e^y\} \\ &= e^y = e^{\min\{x,y\}} \\ &= e^{x \oplus y}. \end{aligned}$$

Caso 2 $x < y$

$$\begin{aligned} e^x \oplus e^y &= \text{mín}\{e^x, e^y\} \\ &= e^x = e^{\text{mín}\{x,y\}} \\ &= e^{x \oplus y}. \end{aligned}$$

Caso 3 $x = y$

$$\begin{aligned} e^x \oplus e^y &= e^x \oplus e^x = \text{mín}\{e^x, e^x\} \\ &= e^x = e^{\text{mín}\{x,x\}} \\ &= e^{x \oplus x} = e^{x \oplus y}. \end{aligned}$$

2. $e^{x \odot y} = e^x e^y$.

$$e^{x \odot y} = e^{x+y} = e^x e^y.$$

$\square$

Observamos que $\mathbb{T}$ es idempotente porque $x \oplus x = x$ para cada $x \in \mathbb{T}$. Por esta razón las operaciones algebraicas se simplifican. Por ejemplo consideramos la potencia de un binomio:

$$(x \oplus y)^n$$

donde la notación exponencial indica el producto tropical n-veces. Por la idempotencia de $\mathbb{T}$ tenemos que

$$(x \oplus y)^2 = x^2 \oplus y^2$$

Porque:

$$
\begin{aligned}
(x \oplus y)^2 &= (x \oplus y) \odot (x \oplus y) \\
&= (x \odot (x \oplus y) \oplus (y \odot (x \oplus y) \\
&= ((x \odot x) \oplus (x \odot y)) \oplus ((y \odot x) \oplus (y \odot y)) \\
&= (x \odot (x \oplus y) \oplus (y \odot (x \oplus y) \\
&= ((x \odot x) \oplus (x \odot y)) \oplus ((y \odot x) \oplus (y \odot y)) \\
&= (x + x) \oplus (x + y) \oplus (y + x) \oplus (y + y) \\
&= (2x) \oplus (x + y) \oplus (y + x) \oplus (2y) \\
&= \text{mín}\{2x, x + y, y + x, 2y\} \\
&= \text{mín}\{2x, 2y\} \\
&= x^2 \oplus y^2.
\end{aligned}
$$

Proposición 6. *Para cualquier entero positivo n se satisface la igualdad: $(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre n, siendo $n = 1$ el caso trivial. Suponga que la afirmación es cierta en el caso $n - 1$, veamos que,

$$
\begin{aligned}
(x \oplus y)^n &= (x \oplus y) \odot (x \oplus y)^{n-1} \\
&= (x \oplus y) \odot (x^{n-1} \oplus y^{n-1}) \\
&= x^n \oplus y \odot x^{n-1} \oplus x \odot y^{n-1} \oplus y^n \\
&= x^n \oplus y^n.
\end{aligned}
$$

donde la última igualdad se debe al hecho que el míimo es asumido en una de las dos potencias. □

1.2.2. Rectas tropicales en $\mathbb{T}^2$

Definición 7. *Una **recta tropical** es el lugar de los puntos $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ donde el mínimo*

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c,$$

es asumido por lo menos dos veces y por lo menos uno entre a, b es distinto de $0_{\mathbb{T}}$.

Es claro que siempre que tenemos un polinomio, es posible preguntarnos la solución algebraica de la ecuación. Veamos que pasa para el caso tropical, consideremos por ejemplo la ecuación:

$$a \odot x \oplus b = 0,$$

Observe que existen muchas diferencias con respecto al modo clásico. Una de ellas es que al lado derecho de la ecuación, es el elemento neutro de la adición. La otra, es que no existe inverso aditivo de b. La ecuación anterior es equivalente a,

$$\text{mín}\{a + x, b\} = 0,$$

luego la solución está dada por:

$$\begin{cases} x = -a & \text{si } b > 0 \\ x \geq -a & \text{si } b = 0 \\ \emptyset & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 8. *La recta tropical definida por el polinomio* $1 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 2$ *es:*

$$\begin{aligned} 1 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 2 \quad &= \text{mín}\{1 \odot x, 2 \odot y, 2\} \\ &= \text{mín}\{1 + x, 2 + y, 2\}. \end{aligned}$$

Usando ley de tricotomia:

$$1 + x = 2 + y \leq 2 \qquad 1 + x = 2 \leq 2 + y \qquad 2 + y = 2 \leq 1 + x$$

Definición 9. *La recta tropical de ecuación*

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$$

es la unión de tres semirectas que salen de

$$p = (c - a, c - b)$$

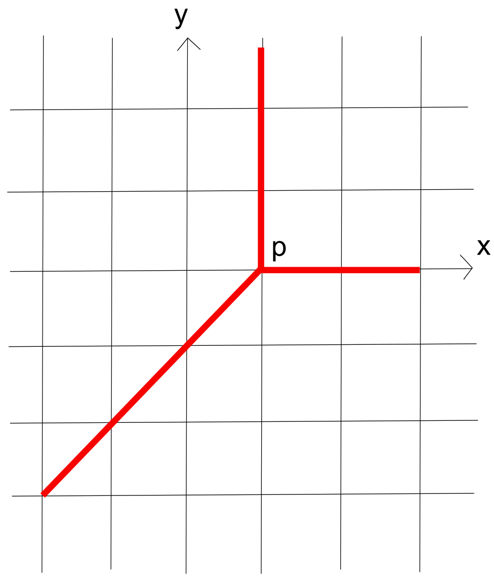

Figura 1.1: Recta tropical

Ejemplo 10. *La familia de rectas tropicales que pasan por el punto* $p = (1, 2)$ *están dadas de la siguiente manera.*

La recta tropical de ecuación

$$a \odot x \oplus b \odot y \oplus c,$$

es la unión de tres semirectas que salen de

$$p = (c - a, c - b) = (1, 2),$$

es decir,

$$\begin{cases} c - a = 1 \\ c - b = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} c = 1 + a \\ c = 2 + b \end{cases} \implies \begin{array}{rcl} 1 + a & = & 2 + b \\ a - b & = & 1, \quad \forall c \end{array}$$

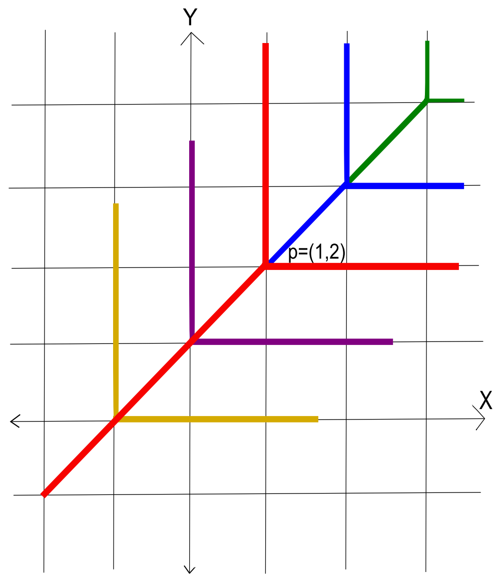

Figura 1.2: Familia de recta tropical que pasan por $p = (1,2)$ variando $c \in \mathbb{T}$.

1.2.3. Intersección entre rectas

Ejemplo 11. *Podemos observar que dos rectas tropicales se pueden encontrar en infinitos puntos sin ser iguales. Por ejemplo las rectas:*

$$R_1 : 1 \odot x \oplus 2 \odot y \oplus 2, \qquad R_2 : 2 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 4.$$

En la intersección de las dos rectas tropicales, podemos distinguir dos situaciones:

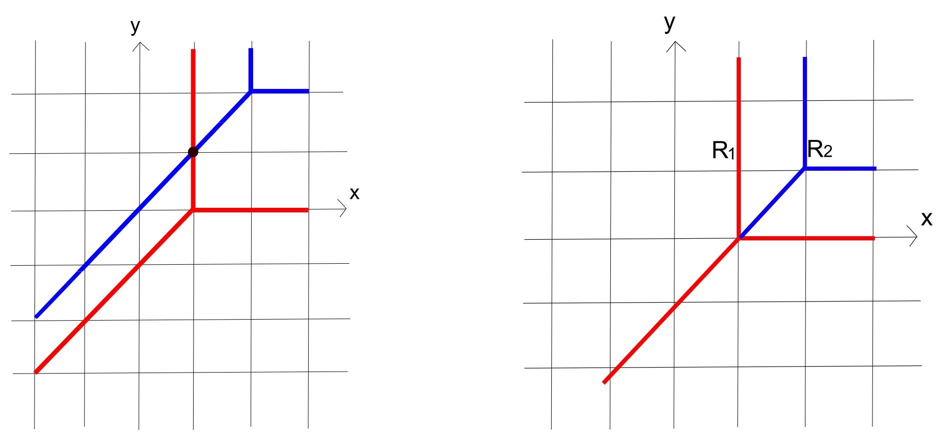

Figura 1.3: Intersección de rectas tropicales

La primera figura muestra algo ya esperado, dos rectas tropicales que se intersectan en un punto. En la segunda vemos que la intersección se da en infinitos puntos. Si consideramos la matriz de los coeficientes de los polinomios R_1 y R_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

observamos que la primera columna es múltipla tropical de la segunda. Es natural preguntarse una forma para saber cuando la intersección se da en un punto o en infinitos puntos usando determinantes. Para esto damos la siguiente definición.

Definición 12. *Decimos que una matriz tropical es singular si* $a_{11} + a_{22} = a_{12} + a_{21}$*, para una matriz* 2×2.

Este es un fenómeno general, que podemos resumir con lo siguiente:

Proposición 13. *Dos rectas tropicales en* $\mathbb{T}^2$ *tienen infinitos puntos de intersección si y sólo si la matriz de los coeficientes,*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

de las rectas, $R_1 : a_0 \odot x \oplus a_1 \odot y \oplus a_2, \quad R_2 : b_0 \odot x \oplus b_1 \odot y \oplus b_2$*, es cada una múltiplo de la otra.*

Demostración. Consideremos los puntos

$$p = (a_2 - a_0, a_2 - a_1), \quad q = (b_2 - b_0, b_1 - b_0).$$

Las dos rectas tropicales tienen infinitos puntos de intersección si y solo si, o bien p y q tienen una coordenada igual o bien la diferencia entre las dos coordenadas de q es igual a la diferencia entre las dos coordenadas de p. $\square$

1.2.4. Determinante tropical

Definición 14. *El* ***determinante tropical*** *de una matriz* 2×2 *está dado por la expresión:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := a \odot d \oplus b \odot c.$$

Una matriz es **singular** si el mínimo en el determinante es asumido dos veces, o equivalentemente si $a + d = b + c$.

Una matriz M es ***singular*** si el mínimo de los factores lineales en el determinante es asumido por lo menos dos veces.

Ejemplo 15. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, *una matriz* 2×2.

Por la definición anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \odot 4 \oplus 3 \odot 5 \\ &= \min\{2 \odot 4, 3 \odot 5\} \\ &= \min\{2 + 4, 3 + 5\} \\ &= \min\{6, 8\} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Ejemplo 16. *Ahora supongamos una matriz* 3×3, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Usando el método usual para hallar determinantes de matrices 3×3, *sin tener en cuenta los signos negativos, sólo usamos la adición y el producto tropical.*

$$
\begin{aligned}
\det(B) &= [1 \odot 5 \odot 9 \oplus 4 \odot 8 \odot 3 \oplus 7 \odot 2 \odot 6] \oplus [3 \odot 5 \odot 7 \oplus 6 \odot 8 \odot 1 \oplus 9 \odot 2 \odot 4] \\
&= [\text{mín}\{1 \odot 5 \odot 9, 4 \odot 8 \odot 3, 7 \odot 2 \odot 6\}] \oplus [\text{mín}\{3 \odot 5 \odot 7, 6 \odot 8 \odot 1, 9 \odot 2 \odot 4\}] \\
&= \text{mín}\{\text{mín}\{1 \odot 5 \odot 9, 4 \odot 8 \odot 3, 7 \odot 2 \odot 6\}, \text{mín}\{3 \odot 5 \odot 7, 6 \odot 8 \odot 1, 9 \odot 2 \odot 4\}\} \\
&= \text{mín}\{\text{mín}\{1+5+9, 4+8+3, 7+2+6\}, \text{mín}\{3+5+7, 6+8+1, 9+2+4\}\} \\
&= min\{\text{mín}\{15, 15, 15\}, \text{mín}\{15, 15, 15\}\} \\
&= \text{mín}\{15, 15\} \\
&= 15.
\end{aligned}
$$

Por otro lado podemos utilizamos el siguiente método para hallar determinantes, definiendo las permutaciones posibles para S_3 así:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \bigoplus_{\sigma \in S_3} a_{1\sigma(1)} \odot \ldots \odot a_{1\sigma(3)} \\
&= [a_{11} \odot a_{12} \odot a_{13}] \oplus [a_{12} \odot a_{23} \odot a_{31}] \oplus [a_{13} \odot a_{21} \odot a_{32}] \\
&\quad \oplus [a_{13} \odot a_{22} \odot a_{31}] \oplus [a_{11} \odot a_{23} \odot a_{32}] \oplus [a_{12} \odot a_{21} \odot a_{33}] \\
&= \text{mín}\{a_{11} \odot a_{12} \odot a_{13}, a_{12} \odot a_{23} \odot a_{31}, a_{13} \odot a_{21} \odot a_{32}, \\
&\quad a_{13} \odot a_{22} \odot a_{31}, a_{11} \odot a_{23} \odot a_{32}, a_{12} \odot a_{21} \odot a_{33}\} \\
&= \text{mín}\{a_{11} + a_{12} + a_{13}, a_{12} + a_{23} + a_{31}, a_{13} + a_{21} + a_{32}, \\
&\quad a_{13} + a_{22} + a_{31}, a_{11} + a_{23} + a_{32}, a_{12} + a_{21} + a_{33}\}.
\end{aligned}
$$

Aplicando esta ultima solución para hallar el determinante de B,

$$\begin{aligned}\det(B) &= \text{mín}\{1+5+9, 2+6+7, 3+4+8, 3+5+7, 1+6+8, 2+4+9\}\\ &= \text{mín}\{15,15,15,15,15,15\}\\ &= 15.\end{aligned}$$

1.3. Polinomios tropicales

Definición 17. *Definimos un polinomio tropical como:*

$$P := a_n \odot x^n \oplus \ldots \oplus a_1 \odot x \oplus a_0$$

donde los $a_i \in \mathbb{T}$ son los coeficientes de P y x es la variable independiente.

Para entender el álgebra de los polinomios tropicales debemos observar que hay polinomios distintos que induce la misma función $x \mapsto P(x)$. Por ejemplo,

$$x^2 \oplus 1 \odot x \oplus 2 \qquad x^2 \oplus 2$$

luego los valores de los dos polinomios coinciden para cada valor de $x \in \mathbb{T}$, ya que el mínimo en ambos casos se asumirá en mín$\{2x, 0\}$.

Definición 18. *El grado de un polinomio tropical P, denotado por* $\deg P$*, es el máximo grado entre sus monomios, donde $a_i \odot x^i$ tiene grado i y $a_i \neq 0$.*

Proposición 19. *Sean P, Q dos polinomios tropicales tales que $P(x) = Q(x)$, para cada $x \in \mathbb{T}$, entones* $\deg P = \deg Q$.

Demostración. Por definición el grado de P es

$$\deg P = \lim_{x \to -\infty} P(x)/x.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\deg P &= \lim_{x \to -\infty} P(x)/x\\ &= \lim_{x \to -\infty} Q(x)/x \qquad \textit{por hipótesis}\\ &= \deg Q.\end{aligned}$$

□

1.3.1. Ecuaciones algebraicas tropicales

Dado un polinomio tropical P queremos definir sus raíces. Consideramos el polinomio en una variable:

$$P := a \odot x \oplus b$$

y observamos que la ecuación $a \odot x \oplus b = 0_{\mathbb{T}}$ no tiene solución si $b \neq 0_{\mathbb{T}}$. Entonces tenemos que buscar otra definición de los ceros en P. De la igualdad

$$a \odot x \oplus b = a \odot (x \oplus (b - a))$$

definimos el número $b - a$ como el cero de P.

Definición 20. *Las raíces de un polinomio tropical P son los puntos singulares del gráfico de $P(x)$, con $0_{\mathbb{T}}$ si $a_0 = 0_{\mathbb{T}}$.*

Capítulo 2

Algebra Lineal Tropical

En éste capítulo estudiaremos el álgebra lineal tropical, definiendo el $\mathbb{T}$-espacio vectorial junto con las operaciones de adición y producto y sus propiedades y así entender el concepto de bases y aplicaciones tropicales. De esta manera encontraremos la correspondencia que existe entre $\mathbb{T}$-aplicaciones lineales y matrices. Para esto definiremos las operaciones básicas entre matrices.

2.1. Espacio vectorial tropical

Un espacio vectorial tropical es un conjunto V con dos operaciones:

$$\oplus : V \times V \longrightarrow V \qquad \odot : \mathbb{T} \times V \longrightarrow V,$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. V es un monoide con respecto a $\oplus$.

2. $a \odot v \in V$, para todo $a \in \mathbb{T}$ y $v \in V$.

3. $(a \odot b) \odot v = a \odot (b \odot v)$, para todo $v \in V$.

4. $(a \oplus b) \odot v = (a \odot v) \oplus (b \odot v)$, para todo $a, b \in \mathbb{T}$ y $v \in V$.

5. $a \odot (v_1 \oplus v_2) = (a \odot v_1) \oplus (a \odot v_2)$, para todo $a \in \mathbb{T}$ y $v_1, v_2 \in V$.

6. $0 \odot v = v$, para todo $v \in V$.

Proposición 21. *Sea V un $\mathbb{T}$-espacio vectorial, entonces $+\infty \odot v = u$, para todo $v \in V$, donde u es la unidad aditiva del $\mathbb{T}$-espacio vectorial V.*

Demostración. Como u es la unidad aditiva del $\mathbb{T}$-espacio vectorial V, entonces

$$u \oplus r = r, \quad \forall r \in V,$$

queremos ver que, $(+\infty \odot v), v \in V$ también es unidad aditiva, es decir

$$(+\infty \odot v) \oplus r = r, \quad \forall r \in V.$$

sea $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V = \mathbb{T}^n$.

$$\begin{aligned}
(+\infty \odot v) \oplus r &= (+\infty \odot (v_1, \ldots, v_n) \oplus r \\
&= (+\infty \odot v_1, \ldots, +\infty \odot v_n) \oplus r \\
&= (+\infty + v_1, \ldots, +\infty + v_n) \oplus (r_1, \ldots, r_n) \\
&= (+\infty \oplus r_1, \ldots, +\infty \oplus r_n) \\
&= (\text{mín}\{+\infty, r_1\}, \ldots, \text{mín}\{+\infty, r_n\}) \\
&= (r_1, \ldots, r_n) \\
&= r.
\end{aligned}$$

□

2.2. Bases tropicales

Una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V es un conjunto minimal de vectores tales que cada elemento de $v \in V$ se puede escribir como:

$$v = a_1 \odot v_1 \oplus \ldots \oplus a_n \odot v_n, \quad a_i \in \mathbb{T}.$$

Ejemplo 22. *Sea* $V = \mathbb{T}^2$ *un* $\mathbb{T}-$*espacio vectorial generado por los vectores* $v_1 = (1,0)$ *y* $v_2 = (0,1)$*. Entonces existe un vector* $v = (x,y)$ *tal que,*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus b \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resulta un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = a \odot 1 \oplus b \odot 0, \\ y = a \odot 0 \oplus b \odot 1 \end{cases}$$

entonces,

$$\begin{cases} x = \text{mín}\{a+1, b+0\} \\ y = \text{mín}\{a+0, b+1\} \end{cases}$$

Y tiene solución si y solo si $-1 \leq x - y \leq 1$*.*

Proposición 23. *Cualquier base de* $\mathbb{T}$ *es de la forma:* $e_1, \ldots, e_n$ *donde* e_i *es la i-ésima coordenada igual a* $+\infty$

Demostración. Sea b_i la i-ésima coordenada de e_i, entonces cualquier elemento $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{T}$ puede ser escrito como $(a_1 - b_1) \odot e_1 \oplus \ldots \oplus (a_n - b_n) \odot e_n$.
Por otro lado, si $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{T}$ es otra base del espacio vectorial tropical tal que se puede escribir como una combinación lineal asi,

$$e_1 = a_{11} \odot f_1 \oplus \ldots \oplus a_{1n} \odot f_n,$$

podemos deducir que el coeficiente f_i debe ser $+\infty$ si f_i no es un multiplo de e_i. Esto significa que lo anterior se reduce a la igualdad $e_1 = a_{1i} \odot f_i$. $\square$

Ejemplo 24. *Sea* V *un* $\mathbb{T}$*-espacio vectorial generado por los vectores* $v_1 = (1,0)$ *y* $v_2 = (0,1)$*. Para visualizar mejor este espacio, observe:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+h \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x \\ y+k \end{pmatrix}$$

Donde $h, k \geq 0$ y más aún, no hay otra forma de descomponer $v = (x, y)^{\mathbb{T}}$ como la suma tropical de dos vectores distintos de v. Esto implica que la ecuación $v = a \odot v_1 \oplus b \odot v_2$ tiene solución siempre que $a \odot v_1$ y $b \odot v_2$ pertenezcan a las lineas horizontales y verticales que salen de v, es decir, v tiene que ser un punto en la franja acotada por las lineas $v_1 + (a, a)^{\mathbb{T}}, v_2 + (b, b)^{\mathbb{T}}$.

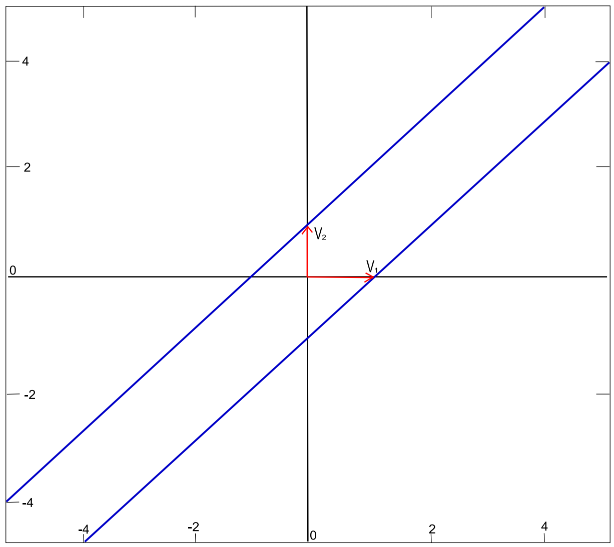

Figura 2.1: Vectores tropicales

2.3. Transformaciones lineales tropicales

Una aplicación lineal entre espacios vectoriales tropicales es una función $T : V \longrightarrow W$ que satisface

$$T(a \odot v \oplus b \odot w) = a \odot T(v) \oplus b \odot T(w),$$

para cada $a, b \in \mathbb{T}$ y $v, w \in V$,

Observe que una $\mathbb{T}$-aplicación lineal $T : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ debe satisfacer:

$$T(x) = T(x \odot 0) = x \odot T(0) = x + T(0)$$

y si $T(0) \neq 0_{\mathbb{T}}$, la aplicación es solo una traslación.

Dos $\mathbb{T}$-espacios vectoriales son isomorfos si existe una $\mathbb{T}$-aplicación lineal invertible entre ellos. Y para la imagen de una $\mathbb{T}$-aplicación lineal necesitamos la siguiente proposición.

Definición 25. *La imagen de una $\mathbb{T}$-aplicación lineal, está definida como,*

$$T(v) := A \odot v$$

donde, A es una matriz $n \times m$ y $v \in \mathbb{T}^n$.

Proposición 26. *La imagen de una $\mathbb{T}$-aplicación lineal es un $\mathbb{T}$-espacio vectorial.*

Observe que no hay una noción natural del kernel de una $\mathbb{T}$-aplicación ya que, para la ecuación $T(v) = +\infty$ tiene única solución $v = +\infty$.

Algunas propiedades de las aplicaciones lineales clásicas se preservan en el caso tropical. Por ejemplo si $T : V \longrightarrow W$ es una $\mathbb{T}$-aplicación lineal, entonces $T(V) \subseteq W$ es un $\mathbb{T}$-espacio vectorial. Este sigue directamente de la definición de $\mathbb{T}$-aplicación lineal. Más difícil es dar una definición del núcleo de T.

Definición 27. *Sea $T : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^m$ definida para $x \mapsto (T_1(x), \ldots, T_m(x))$, podemos definir*

$$\ker(T) := \bigcap_{i=1}^{m} \textit{hiperplano} \;\; T_i(x).$$

Podemos observar que el núcleo de una $\mathbb{T}$-aplicación lineal es un $\mathbb{T}$-espacio vectorial. Si A es una matriz tropical de tamaño $n \times m$, la aplicación $T : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^m$ definida por

$$T(v) := A \odot v$$

es $\mathbb{T}$-lineal.

Ejemplo 28. *La aplicación $T : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ definida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, no es inyectiva porque,*

$$
\begin{aligned}
T(v) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot v \\
T(2,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
T(1,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Es decir, $T(2,0) = T(1,0) = (0,1)$. *El núcleo de* T *es la intersección de los ceros de* $1 \odot x_1 \oplus x_2$ *y* $x_1 \oplus 1 \odot x_2$, *luego* $\ker(T) = (0_{\mathbb{T}}, 0_{\mathbb{T}})$.

Este ejemplo prueba que el núcleo de una aplicación lineal tropical no está relacionado con el hecho que la aplicación sea inyectiva.

Proposición 29. *Sea* $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^m$ *la aplicación definida por* $f(v) = A \odot v$, *entonces el* $\mathbb{T}\ker(f) \neq 0_{\mathbb{T}^n}$ *si y sólo si,* $\dim f(\mathbb{T}^n) < n$.

Ejemplo 30. *Determine la* $\mathbb{T}$*-imagen y el* $\mathbb{T}$*-kernel de la matriz,*

$$
M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Para encontrar la $\mathbb{T}$*-imagen de* M, *tomamos* $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{T}^3$ *y resolvemos,*

$$
\begin{aligned}
f(v) = A \odot v \;&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \odot x_1 \oplus 0 \odot x_2 \oplus 0 \odot x_3 \\ 0 \odot x_1 \oplus 1 \odot x_2 \oplus 0 \odot x_3 \\ 0 \odot x_1 \oplus 0 \odot x_2 \oplus 1 \odot x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{mín}\{1 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3\} \\ \text{mín}\{0 + x_1, 1 + x_2, 0 + x_3\} \\ \text{mín}\{0 + x_1, 0 + x_2, 1 + x_3\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{mín}\{1 + x_1, x_2, x_3\} \\ \text{mín}\{x_1, 1 + x_2, x_3\} \\ \text{mín}\{x_1, x_2, 1 + x_3\} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ahora, para encontrar el $\mathbb{T}$*-kernel de* f *en* M*, igualamos* $f(v) = 0_{\mathbb{T}^3}$ *así,*

$$
f(v) = \begin{pmatrix} \text{mín}\{1 + x_1, x_2, x_3\} \\ \text{mín}\{x_1, 1 + x_2, x_3\} \\ \text{mín}\{x_1, x_2, 1 + x_3\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{T}^3} \\ 0_{\mathbb{T}^3} \\ 0_{\mathbb{T}^3} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x_1 = 0_{\mathbb{T}^3} \\ x_2 = 0_{\mathbb{T}^3} \\ x_3 = 0_{\mathbb{T}^3} \end{matrix}
$$

Por lo tanto el $\mathbb{T}\ker(f) = (0_{\mathbb{T}^3}, 0_{\mathbb{T}^3}, 0_{\mathbb{T}^3})$

La correspondencia clásica entre aplicaciones lineales y matrices tienen una forma análoga en el caso tropical. Primero veamos las definiciones básicas y las operaciones entre matrices.

2.4. Producto entre matrices tropicales

El producto tropical entre dos matrices esta definido de la misma manera que en el algebra de matrices, es decir el producto tropical entre dos matrices 2×2 es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\odot e \oplus b \odot g & a \odot f \oplus b \odot h \\ c \odot e \oplus d \odot g & c \odot f \oplus d \odot h \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 31. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

El producto tropical de $A \odot B$ *es*

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\odot 2 \oplus 2 \odot 5 & 1 \odot 1 \oplus 2 \odot 0 \\ 3 \odot 2 \oplus 4 \odot 5 & 3 \odot 1 \oplus 4 \odot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{mín}\{1\odot 2, 2\odot 5\} & \text{mín}\{1\odot 1, 2\odot 0\} \\ \text{mín}\{3\odot 2, 4\odot 5\} & \text{mín}\{3\odot 1, 4\odot 0\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{mín}\{1+2, 2+5\} & \text{mín}\{1+1, 2+0\} \\ \text{mín}\{3+2, 4+5\} & \text{mín}\{3+1, 4+0\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \text{mín}\{3,7\} & \text{mín}\{2,2\} \\ \text{mín}\{5,9\} & \text{mín}\{4,4\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 32. *Ahora veamos como sería el producto tropical entre matrices* 3×3.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

El producto tropical de $A \odot B$ *es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \odot 4 \oplus 2 \odot 0 \oplus 3 \odot 1 & 1 \odot 5 \oplus 2 \odot 3 \oplus 3 \odot 0 & 1 \odot 1 \oplus 2 \odot 2 \oplus 3 \odot 3 \\ 2 \odot 4 \oplus 4 \odot 0 \oplus 1 \odot 1 & 2 \odot 5 \oplus 4 \odot 3 \oplus 1 \odot 0 & 2 \odot 1 \oplus 4 \odot 2 \oplus 1 \odot 3 \\ 3 \odot 4 \oplus 2 \odot 0 \oplus 4 \odot 1 & 3 \odot 5 \oplus 2 \odot 3 \oplus 4 \odot 0 & 3 \odot 1 \oplus 2 \odot 2 \oplus 4 \odot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{mín}\{1 \odot 4, 2 \odot 0, 3 \odot 1\} & \text{mín}\{1 \odot 5, 2 \odot 3, 3 \odot 0\} & \text{mín}\{1 \odot 1, 2 \odot 2, 3 \odot 3\} \\ \text{mín}\{2 \odot 4, 4 \odot 0, 1 \odot 1\} & \text{mín}\{2 \odot 5, 4 \odot 3, 1 \odot 0\} & \text{mín}\{2 \odot 1, 4 \odot 2, 1 \odot 3\} \\ \text{mín}\{3 \odot 4, 2 \odot 0, 4 \odot 1\} & \text{mín}\{3 \odot 5, 2 \odot 3, 4 \odot 0\} & \text{mín}\{3 \odot 1, 2 \odot 2, 4 \odot 3\} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{mín}\{1+4, 2+0, 3+1\} & \text{mín}\{1+5, 2+3, 3+0\} & \text{mín}\{1+1, 2+2, 3+3\} \\ \text{mín}\{2+4, 4+0, 1+1\} & \text{mín}\{2+5, 4+3, 1+0\} & \text{mín}\{2+1, 4+2, 1+3\} \\ \text{mín}\{3+4, 2+0, 4+1\} & \text{mín}\{3+5, 2+3, 4+0\} & \text{mín}\{3+1, 2+2, 4+3\} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{mín}\{5, 2, 4\} & \text{mín}\{6, 5, 3\} & \text{mín}\{2, 4, 6\} \\ \text{mín}\{6, 4, 2\} & \text{mín}\{7, 7, 1\} & \text{mín}\{3, 6, 4\} \\ \text{mín}\{7, 2, 5\} & \text{mín}\{7, 5, 4\} & \text{mín}\{4, 4, 7\} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Un resultado interesante en el producto tropical de matrices es el siguiente:

Ejemplo 33. *Sean $a, b \geq 1$. Considere el producto*

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ *induce la matriz identidad sobre el* $\mathbb{T}$*-espacio vectorial generado por las columnas del lado derecha.*

Por otro lado, también podemos encontrar un automorfismo no trivial, por ejemplo:

Ejemplo 34.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *intercambia los dos generadores del* $\mathbb{T}$*-espacio vectorial.*

Ejemplo 35. *Sea matriz* A *una matriz de tamño* 2×2*. Las matrices* M *tales que* $MA = A$ *están dadas por.*

Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} MA &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A. \\ &= \begin{pmatrix} \min\{m+a, n+c\} & \min\{m+b, n+d\} \\ \min\{p+a, q+c\} & \min\{p+b, q+d\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \min\{m+a, n+c\} = a \quad &\to \quad si\ m+a \leq n+c \Rightarrow m = 0 \\ &\quad\quad\ si\ m+a > n+c \Rightarrow n+c = a \\ \min\{m+b, n+d\} = b \quad &\to \quad si\ m+b \leq n+d \Rightarrow m = 0 \\ &\quad\quad\ si\ m+b > n+d \Rightarrow n+d = b \\ \min\{p+a, q+c\} = a \quad &\to \quad si\ q+c \leq p+a \Rightarrow q = 0 \\ &\quad\quad\ si\ q+c > p+a \Rightarrow p+a = c \\ \min\{p+b, q+d\} = b \quad &\to \quad si\ q+d \leq p+b \Rightarrow q = 0 \\ &\quad\quad\ si\ q+d > p+b \Rightarrow p+b = d \end{aligned}$$

entonces, $m, q = 0$.

Ahora, $MA = \begin{pmatrix} 0 & n \\ p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{mín}\{a, n+c\} & \text{mín}\{b, n+d\} \\ \text{mín}\{p+a, c\} & \text{mín}\{p+b, d\} \end{pmatrix}$

entonces,

$$\begin{array}{rcl} a & < & n+c \\ b & < & n+d \\ c & < & p+a \\ d & < & p+b \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} a-c & < & n \\ b-d & < & n \\ c-a & < & p \\ d-b & < & p \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \frac{a+b-c-d}{2} & < & n \\ \frac{c+d-a-b}{2} & < & p \end{array}$$

Una consecuencia inmediata del producto de matrices es la siguiente proposición:

Proposición 36. *Sea A una matriz $n \times m$, sea $V \subseteq \mathbb{T}$ un $\mathbb{T}$-espacio vectorial, luego la aplicación $v \longrightarrow Av$ para todo $v \in V$ es una $\mathbb{T}$-aplicación lineal.*

Para cualquier matriz A le podemos asociar una $\mathbb{T}$-aplicación lineal $T : V_1 \longrightarrow V_2$ y a ésta le asociaremos un $\mathbb{T}$-espacio lineal: $T(V_1)$. Una pregunta natural en este punto será la dimensión de $T(V_1)$. Para responder esta pregunta, consideraremos el caso cuando la matriz A es de tamaño $n \times n$ y definiremos el determinante tropical como:

$$\det(A) = \bigoplus_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \odot \ldots \odot a_{1\sigma(n)},$$

donde σ varía entre las permutaciones de S_n en un conjunto de n elementos. El determinante para matrices 2×2 se definio anteriormente en el capítulo 1.
Observe que el determinante tropical es el mínimo de un conjunto de factores lineales en las entradas de una matriz.

Definición 37. *Una matriz M se dice que es singular si el mínimo de los factores lineales en el determinante es asumido por lo menos dos veces.*

Ejemplo 38. *El determinante tropical de las siguientes matrices es:*

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 5 \qquad B = \begin{vmatrix} +\infty & 5 \\ +\infty & 6 \end{vmatrix} = +\infty \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Entonces las matrices B y C son singulares.

Nota 39. *Observe que si la matriz M tiene $\mathbb{T}$-determinante $+\infty$ entonces es singular.*

Proposición 40. *Sea A una matriz cuadrada y sea $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ la aplicación definida por $f(v) = A \odot v, v \in \mathbb{T}^n$. Entonces $\mathbb{T}\ker(f) \neq 0_{\mathbb{T}^n}$ si y sólo si, A es singular.*

Ejemplo 41. *Sean A una matriz singular 2×2 y $f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ dada por $f(v) = A \odot v$. Veamos que se puede afirmar de su $\mathbb{T}$-imagen y su $\mathbb{T}$-kernel.*

Supongamos,

$$A = \begin{vmatrix} +\infty & 5 \\ +\infty & 6 \end{vmatrix} = +\infty$$

matriz singular. Sea $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$ entonces,

$$\begin{aligned} f(v) = A \odot v &= \begin{pmatrix} +\infty & 5 \\ +\infty & 6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \min\{+\infty + x_1, 5 + x_2\} \\ \min\{+\infty + x_1, 6 + x_2\} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 + x_2 \\ 6 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{T}^2} \\ 0_{\mathbb{T}^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces, $x_2 = 0_{\mathbb{T}}$ y $f(v)$ no depende de x_1 por tanto el $\mathbb{T}\ker(f) = (x_1, 0_{\mathbb{T}^2})$. Por otro lado, usando la proposición 29, como $\mathbb{T}\ker(f) \neq 0_{\mathbb{T}^2}$ entonces $\dim f(\mathbb{T}^2) < 2$.

Capítulo 3

Geometría algebraica tropical

Nuestro objetivo en este capítulo es introducir la noción de variedad algebraica como un objeto de estudio de la geometría algebraica. Si tomamos los polinomios en dos variables, sean x y y, el conjunto de los valores de x y y que hacen los polinomios cero, se llama variedad algebraica. Las variedades algebraicas son el principal estudio de la geometría algebraica. El 1971, G.M. Bergman [73] consideró logaritmos de variedades, es decir, la ameba de una variedad algebraica, estas fueron introducidas para estudiar las propiedades topologicas de las curvas algebraicas reales. Así que, en esta sección empezaremos considerando las amebas de las variedades algebraicas definidas en los números complejos, donde ésta será la imagen bajo la aplicación logaritmo que definiremos a lo largo del capítulo. En el estudio de la geometría algebraica tropical, veremos el acercamiento asintótico de las variedades a través de un objeto llamado espina de la ameba y será aquí donde la geometría tropical tiene su mayor influencia en la geometría algebraica.

Puesto que, el ideal de este trabajo de tesis ha sido dar una serie de definiciones que sirvan como base para introducir las variedades algebraicas tropicales, en este capítulo nos centraremos en tomar estas definiciones algebraicas como instrumento de estudio para encontrar la correspondencia que existe entre la geometría clásica y la geometría tropical. Todas estas, son ideas intuitivas más no formales, ya que se usaron para tener una idea de como usar programas computacionales y mostrar en fin de éste trabajo.

En algunos ejemplos, las gráficas que nos sirven de ayudar para entender ciertos conceptos de la geometría tropical, han sido obtenidas de los artículos [2] y [37].

3.1. Amebas

Como primera medida es esencial la siguiente definición.

Definición 42. *Consideremos la aplicación,*

$$\log : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

definida como,

$$(x, y) \longmapsto (\log(|x|), \log(|y|))$$

que llamaremos la aplicación log. *Como el logaritmo es indefinido en cero, excluimos el origen restringiendo el dominio de nuestros polinomios al toro* $(\mathbb{C}^*)^2$*, donde* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definición 43. *Si* $X \subset (\mathbb{C}^*)^2$ *es una variedad algebraica, su ameba es el conjunto,*

$$A(X) := -\log(X).$$

La ameba de una variedad algebraica es la imagen bajo la aplicación $\log : (\mathbb{C}^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Proposición 44. *Una ameba tiene las siguientes propiedades:*

- *Cualquier ameba es un conjunto cerrado.*
- *Cualquier componente conexa del complemento* $\mathbb{R}^n \setminus A$ *es convexa.*
- *El área de una ameba de un polinomio no idénticamente cero en dos variables complejas, es finito.*
- *Una ameba en dos dimensiones tiene una serie de "tentáculos", que son infinitamente largo y de forma exponencial estrechamiento hacia el infinito.*

Llamamos *tentáculos* a esta parte de la ameba que se extiende a infinito desde el orígen.

Ejemplo 45. *Si* $L \subset (\mathbb{C}^*)^2$ *es la recta de ecuación* $x + y + 1 = 0$*, entonces* $A(X)$ *es:*

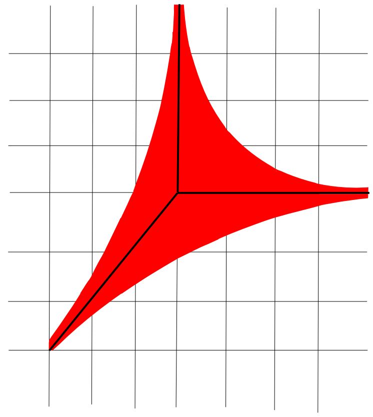

Figura 3.1: Ameba de la recta $x + y + 1 = 0$

Observe que, la ameba de L tienes tres direcciones asintóticas al infinito que se corresponden con los varoles $(x, y) \in L$ donde o bien una de las dos coordenadas va a 0 o bien las dos se van al infinito.

Ejemplo 46. *Tomando un ejemplo de [37]. Sea* $L \subset (\mathbb{C}^*)^2$ *la recta definida por la ecuación* $xy + x + y - 1 = 0$, *entonces* $A(X)$ *es,*

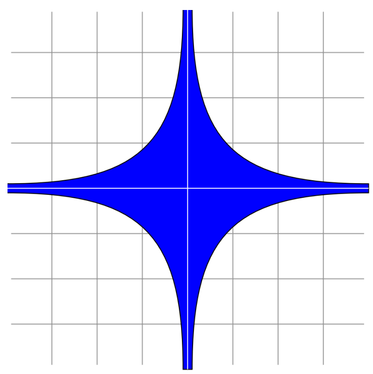

Figura 3.2: Ameba de la recta $xy + +x + y - 1 = 0$

La ameba $A(X)$ tiene cuatro ramos, que se van al infinito en correspondencia de los valores (x, y) que tiene una coordenada que va o bien a cero o bien a infinito.

3.2. Compactificación de una ameba

Compactificamos la ameba de $f^{-1}(0)$ trazando lineas perpendiculares a cada uno de los tentáculos de la ameba. Al trazar estas lineas perpendiculares, se corta el plano en dos, y tomaremos la parte del plano donde existe la ameba. La intersección de estos planos tomados definirá un polígono. Este es el polígono de Newton.

Ejemplo 47. *Compactifique la ameba de recta $x + y + 1 = 0$ hallando su polígono de Newton.*

si partimos el plano en dos por cada recta perpendicular a cada tentáculo y tomamos solo la parte del plano donde se encuentra la ameba, al intersectar estos planos resultantes podemos notar que el polígono de Newton de un polinomio lineal es un triangulo.

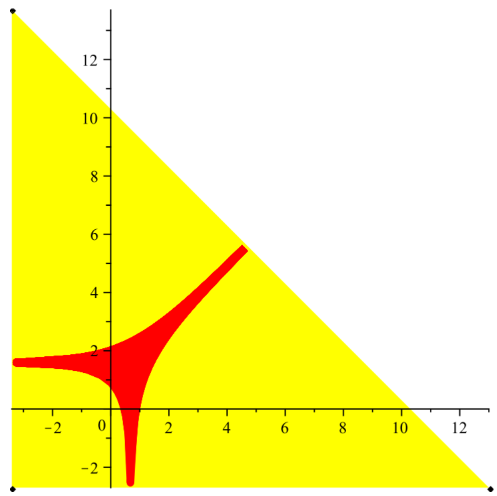

Figura 3.3: Compactificación de la ameba en la recta $x + y + 1 = 0$ [2]

Para este caso, el politopo de Newton será el triangulo de vertices $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$, que se muestra en la figura 3.3, donde cada lado del triangulo es perpendiculares a los tentáculos de la ameba.

En este caso, los tres puntos representan las tres componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus A(X)$

Ejemplo 48. *El polígono de Newton Δ_f de la hipérbola de ecuación $xy + x + y - 1 = 0$ es el cuadradado de vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ que vemos en la figura a la derecha,*

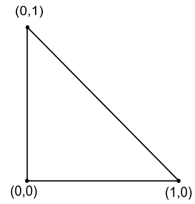

Figura 3.4: Polígono de Newton

a la izquierda vemos como queda su compactificacion partiendo el plano en dos con lineas perpendiculares a cada uno de sus tentáculos.

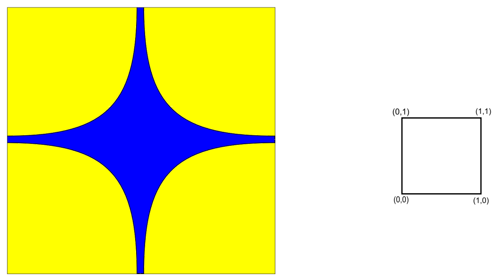

Figura 3.5: Compactificación de la ameba en la hipérbola $xy + x + y - 1 = 0$

3.3. La espina de una ameba

Mirando el dibujo $-A(L)$, donde L son la rectas de ecuación $x+y+1 = 0$ y $xy+x+y-1$, se puede ver que dentro de la ameba hay una recta tropical. Esta recta se llama la espina de la ameba.

Para los ejemplos anteriores podemos verificar esta noción de la espina de una ameba.

Ejemplo 49. *Identifique la espina de la ameba de recta* $x + y + 1 = 0$.

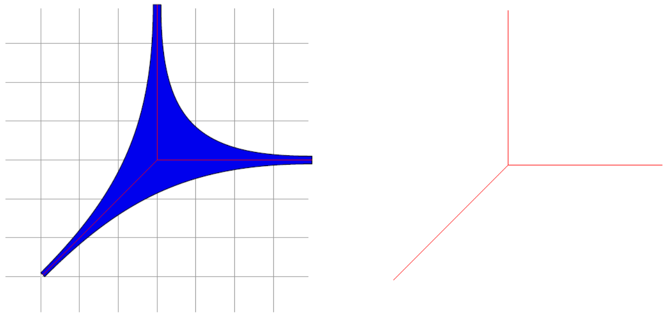

Figura 3.6: Espina de la ameba de recta $x + y + 1 = 0$

Ejemplo 50. *Identifique la espina de la ameba de la hipérbola* $xy + x + y - 1 = 0$.

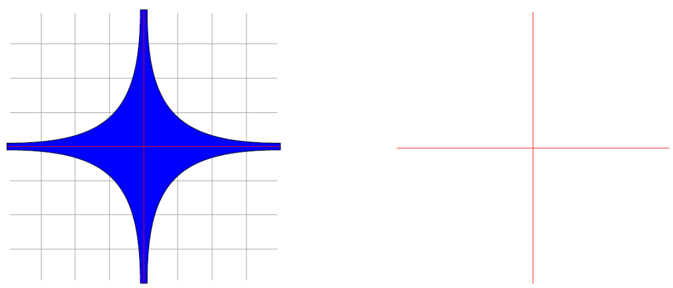

Figura 3.7: Espina de la ameba de la hipérbola $xy + x + y - 1 = 0$

Capítulo 4

Aspectos computacionales de la geometría tropical

En este capítulo mostraremos un programa computacional que nos ayudará a visulizar conceptos de la geometría tropical, como son, la tropicalización de un polinomio, la gráfica de un polinomio tropical, el punto mínimo de un polinomio tropical, la subdivisión de Newton, entre otros. Para esto, usaremos la herramienta SINGULAR [12], es un software libre que usa librerias de c/c++, como NTL, GMP, etc. Singular es un sistema computacional de álgebra para el cálculo de los polinomios, con énfasis en las necesidades especiales del álgebra conmutativa y no conmutatica, la geometría algebraica y la teoría de las singularidades. La libreria tropical, fue creada por Anders Jensen Needergard, Hannah Markwig y Thomas Markwig [6], con el propósito de efectuar cálculos computacionales de la geometría tropical, esta libreria puede ser descargada en Singular y para el uso adecuado de esta libreria será necesario utilizar un sistema operativo Linux. Los programas como Gfan [30], es un de software libre para el cálculo de los fans de Gröbner y variedades tropicales, Latex y kghostview son importante para el desarrollo de los cálculos en Singular y la visualización de las curvas tropicales y la subdivisión de Newton.

Otra herramienta computacional que usaremos es "Tropical Surface" por Lars Allermann [5], que ofrece una implementación a la geometría tropical mostrando la superficie de una curva tropical en un software libre que puede ser descargado de la página del autor.

Otros programas computacionales para el estudio de la geometría tropical, que se pueden usar son programas como “Maple” [41] o “Amoeba Computing” [39], estos programas computacionales generan una ameba. Una variedad algebraica son los objetos principales de la geometría algebraica, en 1971, G.M. Bergman [73], consideró logaritmos de variedades. En geometría algebraica tropical, nos fijamos en el comportamiento asintótico de las variedades, para esto, los programas [41] y [39] serán de gran ayuda para su estudio.

A lo largo de este capítulo veremos el manejo de estos programas con algunos ejemplos y estudiaremos los resultados importantes de ciertos polinomios que no podemos entender a simple vista.

4.1. Conceptos generales de Singular

Para el uso de Singular en la geometría tropical es importante entende los primeros pasos para su uso. Primero debe descargar la libreria `"tropical.lib"`, luego debe definir un anillo. La definición de un anillo se compone de tres partes: la primera determina el campo, la caracteristica y el parámetro, la segunda parte determina los nombres de las variables del anillo, y la tercera parte determina el orden monomial que se quiere utilizar. por ejemplo,

```
ring r=(0,t),(x,y),dp;
```

Por lo tanto, el ejemplo anterior declara un anillo de polinomios llamados r con un campo de característica 0 (es decir, lo números racionales) y las variables de anillo llamado x y y. El `dp` al final determina que el orden que será usado es el del grado inverso lexicográfico. Existen otros ordenes como, `lp` orden lexicográfico, `ds` orden de grados negativos inverso lexicográfico, etc. Además, puede definir un ideal, de la siguiente forma,

`ideal i=x2+y2+1;`, en este caso, el nombre del ideal será `i`.

Por otro lado, podemos definir listas, esto con el fin, de incluir todos los elementos de un anillo de manera especial; estas se definen así

`list nombre=expresión lista;`,

es decir, en "nombre", debe nombrar la lista como desee, en "expresión", debe dar la orden que desea y el "lista", escrir la clase de lista que quiere. Un ejemplo lo verá mas claro más adelante.

Al escribir en Singular, si quiere escribir: $t \cdot x$ en Singular lo escribe como `t*x`, y si quiere escribir x^2, escribalo como `x2`. Es importante que siempre termine con `;` "punto y coma" al final de cada orden en Singular.

4.2. Tropicalización de un polinomio

Para tropicalizar un polinomio usaremos la ayuda de Singular. Debemos asumir que f es un polinomio en $\mathbb{Q}(t)[x_1, \ldots, x_n]$. Luego, debemos definir un anillo r y después escribir el polinomio con la orden `tropicalise` para generar la tropicalización del polinomio deseado.

Singular trabaja con las siguientes convenciones para la tropicalización:

- Si un número es vacío, entonces la valoración de t será 1,
- si un número es la cadena "max", será -1,
- esta ultima supone que si se considera el máximo de sus formas lineales, entonces se considerará su mínimo.

Ejemplo 51. *Tropicalizar el siguiente polinomio,*

$$2t^3x^2 - \frac{1}{t} \cdot xy + 2t^3y^2 + (3t^3 - t) \cdot x + ty + (t^6 + 1)$$

Usando Singular:

```
LIB "tropical.lib";
ring r=(0,t),(x,y),dp;
tropicalise(2t3x2-1/t*xy+2t3y2+(3t3-t)*x+ty+(t6+1));
```

resultado en Singular,

```
[1]:
   2*x+3
[2]:
   x+y
[3]:
   2*y+3
[4]:
   x+1
[5]:
   -1
```

es decir, trop$(f) = \text{mín}\{2x+3, x+y, 2y+3, x+1, -1\}$

También se puede crear una lista de las formas lineales de la tropicalización de f así,

Ejemplo 52. *Definición de una lista para*

$$2t^3x^2 - \frac{1}{t} \cdot xy + 2t^3y^2 + (3t^3 - t) \cdot x + ty + (t^6 + 1)$$

```
LIB "tropical.lib";
ring r=(0,t),(x,y),dp;
poly f=2t3x2-1/t*xy+2t3y2+(3t3-t)*x+ty+(t6+1);
```

`list tropical_g=tropicalise(f);`, *el nombre de la lista es* `tropical_g` *y la orden es tropicalizar* f

`tropical_g;`, *al dar esta la orden, aparece la lista que definimos anteriormente*

Por otro lado, se puede calcular la tropicalización de varios polinomios, creando un ideal y dandole la orden `tropicaliseSet`.

Ejemplo 53. *Sea* $i \in \mathbb{Q}(t)[x_1, \ldots, x_n]$. *Tropicalizar el conjunto de polinomios en*

$$i = t \cdot xy - y^2 + 1, 2t^3 \cdot x^2 + \frac{1}{t} \cdot y - t^6$$

```
LIB "tropical.lib";
ring r=(0,t),(x,y),dp;
ideal i=txy-y2+1,2t3x2+1/t*y-t6;
tropicaliseSet (i);
```

resultado en Singular,

```
[1]:
   [1]:
      x+y+1
   [2]:
      2*y
   [3]:
      0
[2]:
   [1]:
      2*x+3
   [2]:
      y-1
   [3]:
      6
```

4.3. Curvas tropicales

La orden para graficar una curva tropical en Singular es `drawTropicalCurve`. Esta será una herramienta importante en el estudio de la geometría tropical, ya que nos ayudara a visualizar mas fácilmente la gráfica de un polinomio tropical complicado.

Debe tener en cuenta que los programas LaTex y kghostview deben estar instalados y además, Singular debe ser utilizado bajo un sistema operativo de Linux.

Usando la libreria "`tropical.lib`", debe definir un polinomio f, donde f es la lista de polinomios lineales de la forma $ax+by+c$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ en los números enteros y $c \in \mathbb{Q}$ un número racional que representa un polinomio tropical de Laurent y define una curva plana tropical. Otra alternativa para f puede ser un polinomio en $\mathbb{Q}(t)[x, y]$ que define una curva plana tropical a través de la aplicación de valoración. Es importante que el anillo r que defina tenga un orden para cada monomio, dos variables y hasta un parámetro.

Ejemplo 54. *Grafique el siguiente polinomio,*

$$f = t \cdot (x^3 + y^3 + 1) + \frac{1}{t} \cdot (x^2 + y^2 + x + y + x^2y + xy^2) + \frac{1}{t^2} \cdot xy$$

```
LIB "tropical.lib";
ring r=(0,t),(x,y),dp;
poly f=t*(x3+y3+1)+1/t*(x2+y2+x+y+x2y+xy2)+1/t2*xy;
drawTropicalCurve(f);
```

resultado,

$$f_1 = t \cdot x^3 + \frac{1}{t} \cdot x^2y + \frac{1}{t} \cdot xy^2 + t \cdot y^3 + \frac{1}{t} \cdot x^2 + \frac{1}{t^2} \cdot xy + \frac{1}{t} \cdot y^2 + \frac{1}{t} \cdot x + \frac{1}{t} \cdot y + t$$

Los vertices de la curva tropical son:

$$(-2, 0), (-1, -1), (-1, 0), (0, -2), (0, -1), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2)$$

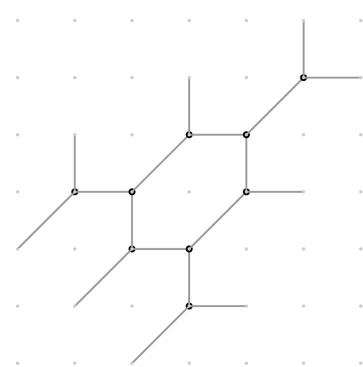

Figura 4.1: Curva tropical de f_1

El comando `drawTropicalCurve(f)` calcula la gráfica de la curva tropical dada por f y despliega una imagen post script, siempre que disponga de kghostview.

Ejemplo 55. *Si se quiere graficar una lista tropicalizada, como la del ejemplo 43, debe dar la orden de* `drawTropicalCurve` *el nombre de la lista,*

```
LIB "tropical.lib";
ring r=(0,t),(x,y),dp;
poly f=2t3*x2-1/t*xy+2t3*y2+(3t3-t)*x+t*y+(t6+1);
list tropical_g=tropicalise(f);
drawTropicalCurve(tropical_g);
```

resultado,

$$f_2 = \text{mín}\{2 \cdot x + 3, x + y - 1, 2 \cdot y + 3, x + 1, y + 1, 0\}$$

Los vertices de la curva tropical son:

$$(-2, 2), (2, -2), (-1, 2), (2, -1)$$

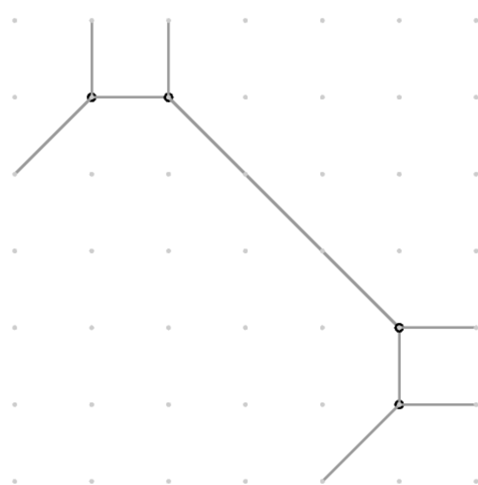

Figura 4.2: Curva tropical de f_2

Podemos además, aplicar este mismo procedimiento a polinomios y dar la orden "máximo"de esta forma la gráfica calculará los puntos máximos del polinomio tropicalizado.

Ejemplo 56. *Tomado el ejemplo anterior, damos la orden* `"max"` *al graficar:*

```
LIB "tropical.lib";
ring r=(0,t),(x,y),dp;
poly f=2t3*x2-1/t*xy+2t3*y2+(3t3-t)*x+t*y+(t6+1);
drawTropicalCurve(f, "max");
```

resultado,

$$f_2 = \max\{2 \cdot x - 3, x + y + 1, 2 \cdot y - 3, x - 1, y - 1, 0\}$$

Los vertices de la curva tropical son:

$$(2, -2), (-2, 2), (1, -2), (-2, 1)$$

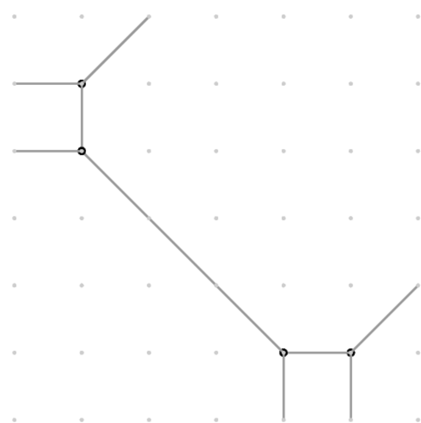

Figura 4.3: Curva tropical de f_3

Al usar `drawTropicalCurve` aparecerá un archivo post script image con la gráfica y al final verá la subdivisión de Newton.

Ejemplo 57. *Para los ejemplos anteriores tenemos los siguientes polígonos de Newton:*

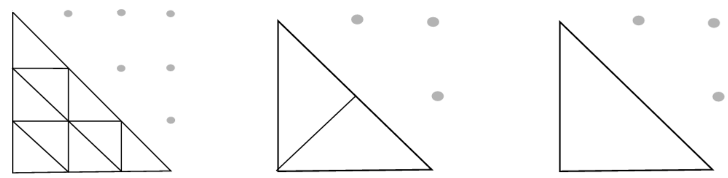

Figura 4.4: Polígono de Newton de f_1, f_2 y f_3, respectivamente

Ejemplo 58. *Sea* $f_4 = tx^2 + 2xy + 3ty^2 + 5x + 7y - (t^2 + t^5)$. *Tropicalizar* f_4 *y graficarlo con Singular. La tropicalización de* f_4 *es,*

$$f_4 = \text{mín}\{2 \cdot x + 1, x + y, 2 \cdot y + 1, x, y, 2\}$$

Los vertices de la curva tropical son:

$$(-1, 0), (0, -1), (0, 0), (2, 2)$$

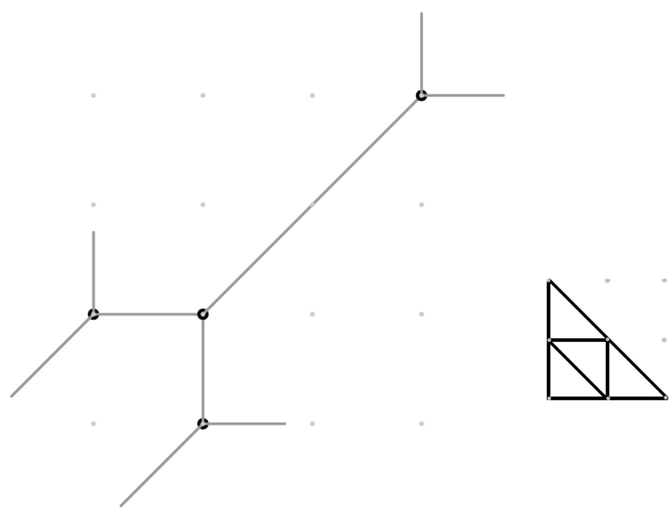

Figura 4.5: Curva tropical de f_4 y subdivisión de Newton

Ejemplo 59. *Sea* $f_5 = tx^2 + 3xy - 7(t^3 + t^5)y + ty - 7x + 5$*. Tropicalizar* f_5 *y graficarlo con Singular. La tropicalización de* f_5 *es,*

$$f_5 = \text{mín}\{2 \cdot x + 1, x + y, 2 \cdot y + 3, x, y + 1, 0\}$$

Los vertices de la curva tropical son:

$$(-1, 0), (1, -1), (0, 0), (1, -2)$$

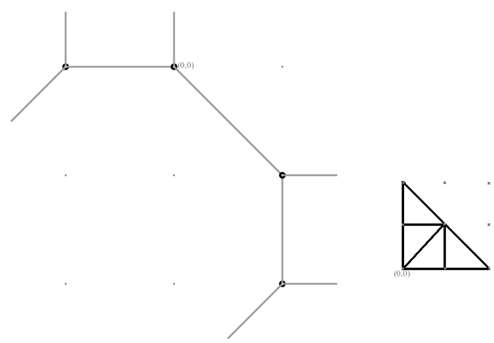

Figura 4.6: Curva tropical de f_5 y subdivisión de Newton

Ejemplo 60. *Sea* $f_6 = tx^2 - 7tx + 8xy - 7y^2 + 6$*. Tropicalizar* f_6 *y graficarlo con Singular. La tropicalización de* f_6 *es,*

$$f_6 = \text{mín}\{2 \cdot x + 3, x + y, 2 \cdot y, x + 1, 0\}$$

Los vertices de la curva tropical son:

$$(-2, 1), (-1, 1), (0, 0)$$

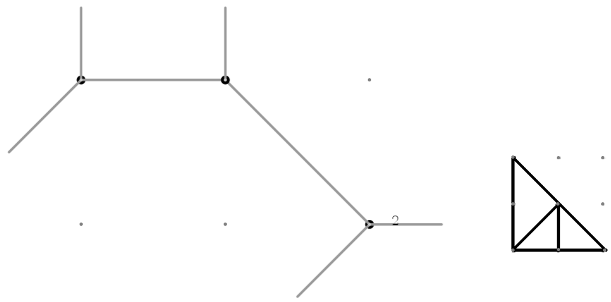

Figura 4.7: Curva tropical de f_6 y subdivisión de Newton

Ejemplo 61. *Sea $f_7 = t^4x^3 + t^2x^2y + t^2xy^2 + t^4y^3 + tx^2 + xy + ty^2 + x + y + t$. Tropicalizar f_7 y graficarlo con Singular. La tropicalización de f_7 es,*

$$f_6 = \text{mín}\{3 \cdot x + 4, 2 \cdot x + y + 2, x + 2 \cdot y + 2, 3 \cdot y + 4, 2 \cdot x + 1, x + y + 2 \cdot y + 1, x, y, 1\}$$

Los vertices de la curva tropical son:

$$(-3, -1), (-2, -2), (-2, -1), (-1, -3), (-1, -2), (-1, 0), (0, -1), (0, 0), (1, 1)$$

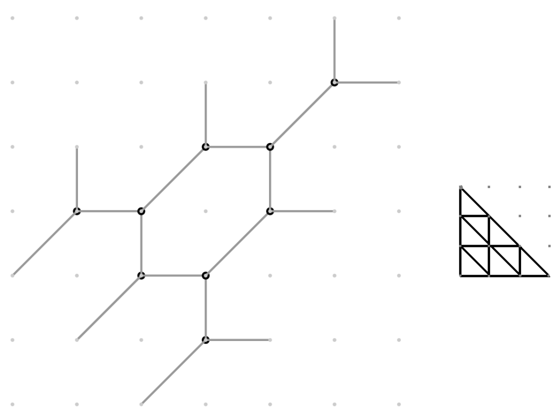

Figura 4.8: Curva tropical de f_7 y subdivisión de Newton

4.4. Superfcies tropicales

Para visualizar una superficie tropical, usaremos el programa "Tropical Surfaces" [5] creado por el Alemán Lars Allermann de la universidad de Kaiserslautern.

El programa "Tropical Surfaces" es un software libre muy sencillo de usar, simplemente se escribe un polinomio igualado a 0 y se da click en "Zeichne", que significa dibujar en alemán y se deplegará la superficie tropical de la curva tropical dada.

Ejemplo 62. *Gráfica del plano tropical*

$max\{0, x, y, z\}$

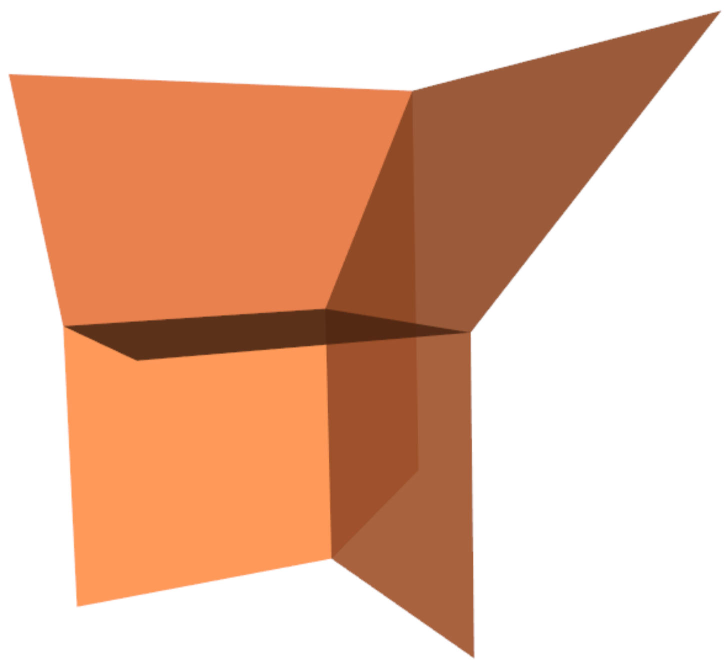

Figura 4.9: Plano tropical

Al dibujar la superficie tropical, podemos girar la superficie, cambiar los colores, la transparencia, acercar, alejar, guardar, etc.

4.5. Amebas

Para graficar un ameba existen varios programas, como lo es "Maple" [41] o "Amoeba Computing" [39]. La herramienta Maple, es depronto más conocida y por tanto mas sencilla de utilizar, ya que es un programa muy utilizdo para graficar todo tipo de funciones y generar cualquier tipo de cálculos matemáticos. Para el caso de gráficas de amebas nos guiaremos del articulo "Tropical Algebraic Geometry in Maple a preprocessing algorithm for finding common factors to multivariate polynomials with approximate coefficients" [2].

Ejemplo 63. *Veamos como se grafica una ameba usando la opcion "plot" de Maple, usando como guia [2]. Usaremos coordenadas polares para graficar una variedad algebraica lineal,*

$$f := \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y - 1 = 0 \qquad A := \left[\ln\left(\left|re^{I\theta}\right|\right), \ln\left(\left|\frac{5}{2}re^{I\theta} - 5\right|\right)\right]$$

y escribimos en Maple,

```
>f:=1/2*x+1/5*y-1:
>s:=solve(f,y):
>L:=map(log,map(abs,[x,s])):
>A:=subs(x=r*exp(I*theta),L);
>Ap:=seq(plot([op(subs(theta=k*Pi/200,A)), r=-100..100],thickness=6),k=0..99):
>plots[display](Ap,axes=none);
```

Resultado en Maple,

Figura 4.10: Ameba de $f = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y - 1$

Se desplegará una gráfica en la que podemos utilizar todas las herramientas de Maple para graficas como, usar o quitar ejes, acercar, mover, colores, hacer trazos, etc. Y además podemos guardar las graficas en archivos como Bitmap, JPEG, PostScript, etc.

Bibliografía

[1] Abouzaid, Mohammed Morse homology, tropical geometry, and homological mirror symmetry for toric varieties. Selecta Math. (N.S.) 15 (2009), no. 2, 189–270.

[2] Adrovic, Danko. Verschelde, Jan. Tropical Algebraic Geometry in Maple a preprocessig algorithm for finding common factors to multivariate polynomials with aproximate coefficients, 2008.

[3] Akian, Marianne; Gaubert, Stphane; Guterman, Alexander Linear independence over tropical semirings and beyond. Tropical and idempotent mathematics, 1–38, Contemp. Math., 495, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[4] Allermann, Lars; Rau, Johannes First steps in tropical intersection theory. Math. Z. 264 (2010), no. 3, 633–670.

[5] Allermann, Lars: Tropical surfaces, available at http://www.mathematik.uni-kl.de/ allermann,2008.

[6] Anders Nedergaard Jensen, Hannah Markwig, Thomas Markwig: tropical.lib. A SINGULAR 3.0 library for computations in tropical geometry, 2007, http://www.mathematik.uni-kl.de/ keilen/de/tropical.html.

[7] Ansola, M.; de la Puente, M. J. Tropical conics for the layman. Tropical and idempotent mathematics, 87–101, Contemp. Math., 495, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[8] Böhm, Janko. Mirror symetry and tropical geometry, Agosto, 2007.

[9] Brugall, Erwan; Mikhalkin, Grigory Floor decompositions of tropical curves: the planar case. Proceedings of Gkova Geometry-Topology Conference 2008, 64–90, Gkova Geometry/Topology Conference (GGT), Gkova, 2009.

[10] Castella, Dominique lments d'algbre linaire tropicale. (French) [Elements of tropical linear algebra] Linear Algebra Appl. 432 (2010), no. 6, 1460–1474.

[11] Danilov, Vladimir I.; Karzanov, Alexander V.; Koshevoy, Gleb A. Tropical Plcker functions and their bases. Tropical and idempotent mathematics, 127–158, Contemp. Math., 495, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[12] Decker, W.; Greuel, G.-M.; Pfister, G.; Schönemann, H.: SINGULAR 3-1-1 — A computer algebra system for polynomial computations. http://www.singular.uni-kl.de (2010).

[13] Dickenstein, Alicia; Feichtner, Eva Maria; Sturmfels, Bernd Tropical discriminants. J. Amer. Math. Soc. 20 (2007), no. 4, 1111–1133 (electronic). (Reviewer: G. K. Sankaran).

[14] Fujimori, Toshiaki; Nitta, Muneto; Ohta, Kazutoshi; Sakai, Norisuke; Yamazaki, Masahito Intersecting solitons, amoeba, and tropical geometry. Phys. Rev. D 78 (2008), no. 10, 105004, 23 pp. (Reviewer: Yang-Hui He).

[15] Gathmann, Andreas Tropical algebraic geometry. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 108 (2006), no. 1, 3–32. (Reviewer: Susan J. Colley).

[16] Gathmann, Andreas; Kerber, Michael A Riemann-Roch theorem in tropical geometry. Math. Z. 259 (2008), no. 1, 217–230. (Reviewer: Joaquim Ro).

[17] Gathmann, Andreas; Kerber, Michael; Markwig, Hannah Tropical fans and the moduli spaces of tropical curves. Compos. Math. 145 (2009), no. 1, 173–195. (Reviewer: Yunfeng Jiang).

[18] Gathmann, Andreas; Markwig, Hannah The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov-Witten invariants in tropical geometry. Math. Ann. 338 (2007), no. 4, 845–868. (Reviewer: Dragos Nicolae Oprea).

[19] Gathmann, Andreas; Markwig, Hannah Kontsevich's formula and the WDVV equations in tropical geometry. Adv. Math. 217 (2008), no. 2, 537–560.

[20] Gathmann, Andreas; Markwig, Hannah The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov-Witten invariants in tropical geometry. Math. Ann. 338 (2007), no. 4, 845–868. (Reviewer: Dragos Nicolae Oprea).

[21] Gaubert, Stphane; Sharify, Meisam Tropical scaling of polynomial matrices. Positive systems, 291–303, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 389, Springer, Berlin, 2009.

[22] Gross, Mark. Mirror symetry for $\mathbb{P}^2$ and tropical geometry, Marzo 2009.

[23] IMDEA, Instituto madrileño de estudios avanzados, http://www.imdea.org/

[24] Imre Simon, On semigroups of matrices over the tropical semiring. R.A.I.R.O. Informatique théorique, pages 277-294, 1994.

[25] Itenberg, Ilia Introduction la gomtrie tropicale. (French) [Introduction to tropical geometry] Gomtrie tropicale, 1–25, Ed. c. Polytech., Palaiseau, 2008. (Reviewer: Eugenii Shustin).

[26] Itenberg, Ilia; Mikhalkin, Grigory; Shustin, Eugenii Tropical algebraic geometry. Second edition. Oberwolfach Seminars, 35. Birkhuser Verlag, Basel, 2009. x+104 pp.

[27] Iriarte Giraldo, Benjamin Dissimilarity vectors of trees are contained in the tropical Grassmannian. Electron. J. Combin. 17 (2010), no. 1, Note 6, 7 pp.

[28] Iwao, Shinsuke Integration over tropical plane curves and ultradiscretization. Int. Math. Res. Not. IMRN 2010, no. 1, 112–148.

[29] Izhakian, Zur Basics of linear algebra over the extended tropical semiring. Tropical and idempotent mathematics, 173–191, Contemp. Math., 495, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[30] Jensen, Anders N., GFAN, is a software system for Gröbner fans and tropical varieties. Available at http://www.math.tu-berlin.de/ jensen/software/gfan/gfan.html.

[31] Joswig, Michael Tropical convex hull computations. Tropical and idempotent mathematics, 193–212, Contemp. Math., 495, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[32] Kato, Tsuyoshi Deformations of real rational dynamics in tropical geometry. Geom. Funct. Anal. 19 (2009), no. 3, 883–901.

[33] Katz, Eric; Markwig, Hannah; Markwig, Thomas The tropical j-invariant. LMS J. Comput. Math. 12 (2009), 275–294.

[34] Kerber, Michael; Markwig, Hannah Counting tropical elliptic plane curves with fixed j-invariant. Comment. Math. Helv. 84 (2009), no. 2, 387–427. (Reviewer: Yunfeng Jiang).

[35] Kirshtein, B. Kh. Complex roots of systems of tropical equations and stability of electrical power networks. Tropical and idempotent mathematics, 213–238, Contemp. Math., 495, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[36] Kozlov, Dmitry N. The topology of moduli spaces of tropical curves with marked points. Asian J. Math. 13 (2009), no. 3, 385–403.

[37] Laface, Antonio. Introducción a La Geometría Tropical, Universidad nacional de Cordoba, Cordoba, 2008.

[38] Litvinov, G. L. The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a very brief introduction. Idempotent mathematics and mathematical physics, 1–17, Contemp. Math., 377, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[39] M.LeksellandW.Komorowski.Amoeba program:Computing and visualizing amoebas for some complex-valued bivariate expressions.Bachelors degree in mathematics,Department of Mathematics, Natural- and Computer Science, University-College of Gävle, 2007.

[40] Maclagan, Diane. AARMS Tropical Geometry, 2008.

[41] Maple, the essential technical computing software for todays engineers, mathematicians, and scientists. http://www.maplesoft.com/products/maple/

[42] Maslov, V. P. Secondary dequantization in algebraic and tropical geometry. (Russian) Mat. Zametki 82 (2007), no. 6, 953–954; translation in Math. Notes 82 (2007), no. 5-6, 860–862

[43] Mikhalkin, Grigory Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry. Different faces of geometry, 257–300, Int. Math. Ser. (N. Y.), 3, Kluwer/Plenum, New York, 2004. (Reviewer: Jean-Yves Welschinger).

[44] Mikhalkin, Grigory Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$. J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 2, 313–377. (Reviewer: Charles D. Cadman).

[45] Mikhalkin, Grigory. Introduction to Tropical Geometry, notes form the Impa lectures, summer 2007.

[46] Mikhalkin, Grigory Tropical geometry and its applications. International Congress of Mathematicians. Vol. II, 827–852, Eur. Math. Soc., Zrich, 2006. (Reviewer: Jean-Yves Welschinger).

[47] MSRI, Mathematical sciences research institute, http://www.msri.org/

[48] Odagiri, Shinsuke Tropical algebraic geometry. Hokkaido Math. J. 38 (2009), no. 4, 771–795.

[49] Pachter, Lior; Sturmfels, Bernd Tropical geometry of statistical models. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 101 (2004), no. 46, 16132–16137 (electronic).

[50] Rashkovskii, Alexander Tropical analysis of plurisubharmonic singularities. Tropical and idempotent mathematics, 305–315, Contemp. Math., 495, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[51] Richter-Gebert, Jrgen; Sturmfels, Bernd; Theobald, Thorsten First steps in tropical geometry. Idempotent mathematics and mathematical physics, 289–317, Contemp. Math., 377, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005. (Reviewer: Eugenii Shustin) 14P99 (52B70 68W30)

[52] Shpiz, G. B.; Litvinov, G. L. A tropical version of the Schauder fixed point theorem. Tropical and idempotent mathematics, 343–350, Contemp. Math., 495, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[53] Speyer, David; Sturmfels, Bernd Tropical mathematics. Math. Mag. 82 (2009), no. 3, 163–173.

[54] Speyer, David. Sturmfels, Bernd. The Tropical Grassmannian, University of California, Berkeley, 2003.

[55] Szenes, A. Toric reduction and tropical geometry. Mathematisches Institut, Georg-August-Universitt Gttingen: Seminars Winter Term 2004/2005, 109–115, Universitts-drucke Gttingen, Gttingen, 2005. (Reviewer: Meirav Amram-Blei).

[56] Terry, Alan J. Impulsive adult culling of a tropical pest with a stage-structured life cycle. Nonlinear Anal. Real World Appl. 11 (2010), no. 2, 645–664.

[57] Theobald, Thorsten On the frontiers of polynomial computations in tropical geometry. J. Symbolic Comput. 41 (2006), no. 12, 1360–1375. (Reviewer: Luis Felipe Tabera).

[58] Viro, Oleg From the sixteenth Hilbert problem to tropical geometry. Jpn. J. Math. 3 (2008), no. 2, 185–214. (Reviewer: Eugenii Shustin).

[59] Wagneur, Edouard; Truffet, Laurent; Faye, Farba; Thiam, Mamadou Tropical cones defined by max-linear inequalities. Tropical and idempotent mathematics, 351–366, Contemp. Math., 495, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[60] IV Encuentro nacional de álgebra. Notas de curso

[61] http://www.comm.utoronto.ca/ valaee/minplus.pdf

[62] http://www.igt.uni-stuttgart.de/AbGeoTop/Feichtner/

[63] http://www.ime.usp.br/ is/

[64] http://www.iop.org/EJ/abstract/0036-0279/59/6/R06

[65] http://www-irma.u-strasbg.fr/ itenberg/

[66] http://www.math.toronto.edu/mikha/

[67] http://www.mathematik.uni-kl.de/ mkerber/

[68] http://people.math.jussieu.fr/ brugalle/

[69] http://personales.unican.es/santosf/

[70] http://personales.unican.es/taberalf/

[71] http://es.wikipedia.org/wiki/semianillo

[72] http://es.wikipedia.org/wiki/M %C3 %B3dulo_(matem %C3 %A1tica)

[73] http://en.wikipedia.org/wiki/Stefan_Bergman

[74] http://en.wikipedia.org/wiki/Tropical_geometry