



FACULTAD DE INGENIERIA
Maestría en Ingeniería Civil
Énfasis en Hidrología e Hidráulica

Trabajo de Grado

Herramientas Conceptuales para el Estudio del Proceso
de Evaporación Acoplado con el Comportamiento
Mecánico de los Suelos

Presentado por:
Oscar Alberto Mora González

Director
Nelson Obregón Neira IC., MSc., PhD

Bogotá D.C.
Enero de 2011

APROBACIÓN

El Trabajo de grado con título “Herramientas Conceptuales para el Estudio del Proceso de Evaporación Acoplado con el Comportamiento Mecánico de los Suelos.”, desarrollado por el estudiante Oscar Alberto Mora González, en cumplimiento de uno de los requisitos depuestos por la Pontificia Universidad Javeriana, Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería civil, para optar el Título de Magister en ingeniería Civil, fue aprobado por:

Director

Nelson Obregón Neira

Jurado 1

Jorge Alberto Rodríguez Ordoñez

Jurado 2

Bernardo Caicedo Hormaza

Herramientas Conceptuales para el Estudio del Proceso de Evaporación Acoplado con el Comportamiento Mecánico de los Suelos

Oscar Alberto Mora González

La Pontificia Universidad Javeriana, no es responsable por los conceptos emitidos por los autores-investigadores del presente trabajo, por lo cual son responsabilidad absoluta de sus autores y no comprometen la idoneidad de la institución ni de sus valores.

RESUMEN

La evapotranspiración y los efectos climáticos crean variaciones en la distribución de humedad de la zona no saturada. Estos, a su vez pueden generar variaciones en la succión y en el comportamiento mecánico de los suelos no saturados, y en ocasiones pueden causar condiciones no deseadas en las estructuras circundantes e incluso su falla. El estudio de los suelos parcialmente saturados ha permitido avances en la comprensión de los efectos de los cambios de succión en la relación esfuerzo deformación del material térreo, así como su relación con los cambios de humedad del suelo Schrefler (2002); A. Gens (2010). Del mismo modo se han realizado avances en la modelación de procesos acoplados, entre otros en modelación física en centrífuga de la interacción suelo atmósfera Tristancho & Caicedo (2008), modelos analíticos y numéricos de estrés hídrico de las plantas Rodríguez-Iturbe, et al. (2001). Sin embargo en dichos avances los procesos se han estudiado y desarrollado a diferentes escalas (según el tipo de proceso modelado) generando alta incertidumbre frente a las leyes de escalamiento a utilizar en la modelación de procesos acoplados. De igual forma cuentan con conceptos, parámetros y símbolos no homogéneos dificultando la modelación acoplada. En este trabajo se presenta una discusión sobre el estado del conocimiento que constituye un mapa conceptual para el estudio y desarrollo de protocolos de modelación acoplada de procesos de interacción suelo atmósfera. Finalmente se incluyen lineamientos para el desarrollo de modelos conceptuales aplicados al efecto de la evaporación en el comportamiento mecánico de suelos.

Palabras clave: Evaporación, modelación acoplada, mecánica de suelos.

ABSTRACT

Evapotranspiration and climatic effects create variations in the distribution of moisture in the vadoze zone, which in turn can generate variations in suction and unsaturated soil behaviour, and sometimes can cause undesirable conditions on surrounding structures and even their failure. The Study of partially saturated soils has allowed advances in understanding the effects of suction changes on soil stress strain relation as well as their relationship with soil moisture changes Schrefler (2002); A. Gens (2010). Similarly advances have been made on modelling coupled processes, among others in physical modelling of soil atmosphere interaction in centrifuge Tristancho & Caicedo (2008), analytical and numerical modelling of hydric stress of the plants Rodríguez-Iturbe, et al. (2001). However, such developments have been studied and developed at different scales (depending on the process modeled) generating high uncertainty regarding the scaling laws used in the modeling of coupled processes. Also these have been done, with inhomogeneous concepts, parameters and symbols, making difficult the modeling of soil atmosphere interaction phenomena. This paper presents a discussion on the state of knowledge that constitute a conceptual map for the study and development of modeling protocols for coupled soil atmosphere interaction processes. Finally guidelines for the development of conceptual models applied to the effect of evaporation on the soil mechanical behavior are included.

Keywords: Evaporation, coupled modeling, soil mechanics.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	8
1 ANTECEDENTES	9
2 METODOLOGÍA	13
3 DISCUSIÓN SOBRE EL ESTADO DEL CONOCIMIENTO	14
3.1 Conceptos básicos de mecánica de suelos clásica	14
3.1.1 Tipo de materiales	15
3.1.2 Condición de carga y Resistencia al corte	17
3.1.3 Estructura y Fábrica	18
3.1.4 Tasa e Historia de carga	19
3.1.5 Saturación	21
3.2 Succión y su relación con el potencial	25
3.3 Principios físicos del flujo en medios porosos no saturados	28
3.3.1 Principios físicos del potencial mátrico	28
3.3.2 Algunos aspectos básicos de termodinámica de medios porosos	32
3.3.3 Soluciones diluidas en medios porosos	34
3.3.4 Transporte de vapor en medios porosos	36
3.3.5 Flujos acoplados en medios porosos no saturados	39
3.4 Cambio de humedad en el suelo	40
3.4.1 Modelo Eagleson - 1978	41
3.4.2 Modelo Rodriguez-Iturbe et al - 2001	45
3.4.3 Discusión sobre los procesos contemplados	48
3.5 Evaporación	49
3.5.1 Atmosfera baja y Capa límite atmosférica	51
3.5.2 Flujos de energía en la superficie del suelo	56
4 MODELO CONCEPTUAL	65
4.1 Caracterización del sistema	65
4.2 Modelo THM de A. Gens y Olivella (2001)	69
4.2.1 conservación de masa	70
4.2.2 conservación de momentum	75
4.2.3 conservación de energía	77
4.2.4 Optimización de la solución	80
4.3 Avances del Modelo THM de A. Gens y Olivella	81
4.3.1 Inclusión del proceso de congelamiento de agua	81

4.3.2	Considerando los efectos químicos	82
4.4	Discusión sobre los modelos THM en el marco de la evaporación acoplada con el comportamiento mecánico de suelos	83
5	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	87
	BIBLIOGRAFÍA	90
	ANEXOS	94

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.	Metodología utilizada para la elaboración de la etapa 1.	13
Figura 2.	Variables que intervienen en el comportamiento mecánico de los suelos.	15
Figura 3.	Esquema de trayectorias de esfuerzos.	¡Error! Marcador no definido.
Figura 4.	Influencia de la estructura en la resistencia.	18
Figura 5.	Influencia de la mineralogía sobre los parámetros de resistencia.	19
Figura 6.	Valores del índice de viscosidad.	20
Figura 7.	Elementos básicos del comportamiento de los suelos.	21
Figura 8.	Influencia del parámetro de succión en las curvas de estado límite.	22
Figura 9.	Resultados del análisis de infiltración transitoria (80 mm/hora por 6 horas).	23
Figura 10.	Resultados del análisis de infiltración transitoria (20 mm/hora por 24 horas).	24
Figura 11.	Resultados del análisis de infiltración transitoria (5 mm/hora por 96 horas).	24
Figura 12.	Elemento curvo del área superficial en la interface de dos medios.	30
Figura 13.	Ciclo de histéresis capilar.	38
Figura 14.	Esquema del sistema clima suelo vegetación.	41
Figura 15.	Esquema de los procesos que afectan la humedad del suelo.	42
Figura 16.	Condiciones límite para los periodos idealizados de tormentas e intertormentas.	43
Figura 17.	Representación esquemática de los mecanismos que intervienen en el balance de agua en el suelo.	45
Figura 18.	Representación esquemática de las subcapas de la capa límite atmosférica.	53
Figura 19.	Estructura de la capa límite atmosférica para regiones de alta presión.	54
Figura 20.	Escala temporal y espacial de algunos procesos atmosféricos.	54
Figura 21.	Superficie presión-volumen-temperatura para el agua.	59
Figura 22.	Variación espacial y temporal de la temperatura en la atmosfera baja y los primeros metros del suelo.	62
Figura 23.	Conductividad térmica (K_T) en función del contenido volumétrico de agua.	63

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Algunos Tipos de modelos constitutivos que involucran succión.	25
Tabla 2 Volumen de control, fases y especies consideradas en algunos modelos.	66
Tabla 3 Propiedades de algunos sistemas.	67
Tabla 4 Algunas funciones de transferencia.	67
Tabla 5 Algunas funciones de entrada y salida	68
Tabla 6 Principios de conservación para algunos modelos TMH	69
Tabla 7 Incógnitas de las ecuaciones de balance de masa - modelo THM A. Gens	73
Tabla 8 Matriz de adyacencia ecuaciones de conservación de masa - modelo THM A. Gens	74
Tabla 9 Variables requeridas para la solución de las ecuaciones de conservación de masa - modelo THM A. Gens	75
Tabla 10 Matriz de adyacencia ecuaciones de conservación de masa y momentum - modelo THM A. Gens	76
Tabla 11 Variables requeridas para la solución de las ecuaciones de conservación de masa y momentum - modelo THM A. Gens	77
Tabla 12 Variables requeridas para la solución de las ecuaciones de conservación de masa y momentum - modelo THM A. Gens	79
Tabla 13 Matriz de adyacencia ecuaciones de conservación de masa, momentum y energía - modelo THM A. Gens	80
Tabla 14 Matriz de adyacencia ecuaciones de conservación expresadas en términos de derivadas materiales - modelo THM A. Gens	81
Tabla 15 Ecuaciones y variables requeridas por el modelo TMHC de A. Gens. ¡Error! Marcador no definido.	

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1. Tablas de Registro de Información	94
Anexo 2 Deducción de las Ecuaciones del Modelo Termo-Hidro-Mecánico de A. Gens y S. Olivella para un Medio Porosos en Estado Saturado y Parcialmente Saturado.	97

INTRODUCCIÓN

La evapotranspiración y los procesos climáticos crean variaciones en la distribución de humedad de los materiales térreos parcialmente saturados, que a su vez pueden generar variaciones en la condición de esfuerzos e incluso la falla de dichos materiales Zepeda (2004). Los fenómenos involucrados en el proceso mencionado son de interés para una amplia gama de disciplinas, entre las cuales se incluyen la física de medios porosos, la hidrología, ecohidrología, la ingeniería civil, ingeniería agrícola e ingeniería de petróleos, hacia las cuales este documento se ha enfocado en busca de motivar en investigadores y estudiantes de estas áreas el interés por desarrollar avances en modelación acoplada de procesos de interacción suelo-atmósfera. Los avances y estudio de los procesos de interacción suelo-atmósfera requieren entre otros: facilitar y promover la integración e interacción de disciplinas, y el desarrollo e implementación de protocolos de modelación acoplada para procesos de interacción suelo-atmósfera, ejemplos de ello en el campo de la geotecnia se pueden ver en A. Gens (2010), Schrefler (2002) y Tristáncho & Caicedo (2008); en hidrología y ecohidráulica se evidencia en Eagleson (1978b), Eagleson (2002) y Rodríguez-Iturbe & Porporato (2004), y por parte de la hidrogeología como presenta en Ghezzehei, et al. (2004). Sin embargo en dichos avances los procesos se han estudiado y desarrollado a diferentes escalas (según el tipo de proceso modelado) generando alta incertidumbre frente a las leyes de escalamiento a utilizar en la modelación de procesos acoplados, de igual forma cuentan con conceptos, parámetros y símbolos no homogéneos dificultando la modelación acoplada.

Este trabajo pretende desarrollar herramientas conceptuales para el estudio de la evaporación de manera acoplada con el comportamiento mecánico de los suelos, que implican elaborar un estado del conocimiento y desarrollar un modelo conceptual para el estudio de la evaporación acoplada con el comportamiento mecánico de los suelos. A lo largo de este escrito se presentan algunos conceptos básicos de mecánica de suelos, succión, flujo en medios porosos y evaporación, de igual manera se muestran algunos modelos acoplados que ilustran la relación entre estos fenómenos, para así introducir a lectores de disciplinas afines los conceptos y avances en la modelación de procesos de interacción suelo-atmósfera, en aras de motivar el desarrollo de protocolos de modelación que permitan una mejor comprensión de este proceso. Finalmente se exponen lineamientos para el desarrollo de un modelo conceptual que constituye una aproximación al protocolo mencionado y sobre el cual quedan abiertas posibilidades como la inclusión de modelos de cambio climático.

1 ANTECEDENTES

La evaporación es proporcional a la diferencia entre la tensión de vapor a la temperatura del agua de la superficie evaporante y la tensión de vapor real de la atmósfera en ese instante, e inversamente proporcional a la presión atmosférica total, y de igual forma la succión es la diferencia entre la presión del aire y la presión agua, es decir que cambios en la evaporación pueden generar cambios en la succión que su vez afectan el comportamiento mecánico del material térreo; cuyo efecto es particularmente importante en suelos donde la cabeza de succión contribuye notablemente a las fuerzas que controlan el sistema.

Zepeda (2004) considera que los problemas de los suelos expansivos se presentan a causa de los cambios de humedad en los primeros metros de la capa superficial. Particularmente en excavaciones la pérdida de humedad puede causar la aparición de grietas o expansión de las existentes, que asociadas con el intemperismo, la penetración de agua en las grietas y reblandecimiento del material pueden causar fallas progresivas o problemas sobre las estructuras aledañas. De igual forma en las cimentaciones con pilotes sobre suelos expansivos los cambios de humedad imponen ciclos de expansión y contracción en el suelo que de no ser tomados en cuenta pueden generar movilización indeseada de la capacidad de carga de los pilotes así como falla de la placa. En términos generales la construcción de obras que interfieran sobre los fenómenos de evapotranspiración e infiltración de agua en el suelo pueden causar efectos sobre las estructuras, particularmente si se trata de suelos áridos o semiáridos (constituyen un tercio de la superficie terrestre) y especialmente si son suelos expansivos Zepeda (2004). Algunas cifras citadas por Turner, et al. (1996), muestran que en Estados Unidos se invierte cerca de 7,000 millones de dólares al año en reparación y reconstrucción de obras localizadas sobre suelos expansivos.

El efecto de la evaporación en los materiales térreos no se restringe a la zona vadosa o en general a los primeros metros de los suelos superficiales, también se ha evidenciado su consecuencia en túneles principalmente asociado a la ventilación que durante la excavación y operación de túneles está controlada principalmente por tres variables básicas: la humedad relativa del aire, la temperatura y la velocidad del viento. Durante la excavación la baja humedad relativa y alta temperatura del aire causada por la operación de la maquinaria usada para la excavación, transporte y remoción de polvo genera una zona no saturada alrededor del túnel. La desecación es particularmente efectiva en el material de la solera ya que

generalmente la clave es revestida con concreto lanzado justo después de la excavación. A largo plazo (incluido el tiempo para la construcción del revestimiento y el periodo de operación del túnel), los cambios de estaciones generan variaciones en los parámetros de ventilación y los ciclos de humedecimiento-secado que muy posiblemente afectan la roca excavada IR Berdugo (2007).

Las condiciones mencionadas anteriormente han sido evidenciadas en túneles excavados en macizos rocosos sin presencia de agua subterránea altamente sulfatada, Olivier (1979) presenta valores de humedad relativa medidas a lo largo de los 70 días durante la excavación del pozo 2 en el túnel Orange-Fish en Sur África que presentan variaciones desde el 50% hasta 80% lo cual según IR Berdugo (2007) implica que el túnel estuvo expuesto a ciclos de succión muy significativos.

Por otra parte observaciones realizadas por Rejeb & Cabrera (2007) en una galería de prueba excavada en el túnel de Tournemire en Francia, en 1996 ilustran el efecto de la ventilación del túnel en la deformación de la roca arcillosa masiva con agua subterránea altamente carbonatada, en las cuales las grietas se abren en condición seca (humedad relativa del orden de 40%, principalmente durante otoño) y se cierran en una atmosfera casi saturada de agua (humedad relativa superior al 70%, principalmente durante primavera-verano) evidenciando una dependencia directa del hinchamiento/contracción y los ciclos de humedecimiento/secado impuestos por la ventilación natural en la galería de prueba del túnel, de tal forma que la apertura y cierre de grietas están asociadas a la desecación y humedecimiento de la roca arcillosa causado por la variación de la humedad relativa en la galería de prueba a lo largo de las estaciones climáticas I Berdugo, et al. (2009).

La preocupación en esta temática ha llevado al crecimiento y desarrollo de diversos grupos y líneas de investigación, que han permitido avances en la modelación del comportamiento esfuerzo – deformación y su relación succión – humedad, especialmente en el estudio de los suelos en estado parcialmente saturado, prestando especial interés a los efectos del cambio de succión en el estado de esfuerzos de materiales térreos así como su relación con los cambios de humedad. Entre otros se señalan los realizados por Delage, et al. (1998) para estudiar la relación entre la succión y las propiedades del proceso de *swelling* en arcillas no saturadas altamente compactadas, Tang & Cui (2005) para determinar las propiedades de retención de agua de la arcilla *MX8*, Mata, et al. (2002) para estudiar los efectos hidroquímicos de la

retención de agua en mezclas de arena-bentonita, I Berdugo, et al. (2009) para el estudio de los mecanismos de expansión a largo plazo de rocas sulfatadas, y Caicedo, et al. (2008) para el estudio de la consolidación de suelos parcialmente saturados.

Con el mismo interés se han desarrollado modelos que acoplan los fenómenos de transporte (principalmente flujo de calor, vapor y agua) involucrados en el comportamiento mecánico de materiales térreos como lo ilustran Dakshanamurthy & Fredlund (1981), Schrefler, et al. (1995) y Yang, et al. (1998), y específicamente modelos termohidromecánicos para medios porosos saturados y no saturados de los cuales se resaltan los presentados por A Gens & Olivella (2001), Obeid, et al. (2001), Schrefler (2002) y Sanavia, et al. (2006) que han sido aplicados entre otros para el estudio y modelación de túneles I Berdugo, et al. (2009), áreas para disposición de desechos nucleares Antonio Gens & Olivella (2006) y la respuesta del nivel freático a la fluctuación de la marea e inundaciones Cola, et al. (2008).

De igual forma se ha avanzado en modelación de otros procesos acoplados, entre los cuales se resalta la modelación acoplada de la evaporación y la infiltración en cavidades ventiladas de la montaña Yuca (USA) realizada por Ghezzehei, et al. (2004), en la cual se obtuvieron resultados similares a los medidos en campo; también se señala la Modelación física en centrífuga de la interacción suelo – atmósfera Tristancho & Caicedo (2008), en la cual se buscó simular el proceso de interacción suelo – atmosfera escalando los parámetros mecánicos (relación de esfuerzos) con la máquina centrífuga y estableciendo relaciones de escala con las variables atmosféricas (lluvia, temperatura, humedad relativa y velocidad del viento) permitiendo así avances en cuanto a las mejores prácticas de modelación física de estos fenómenos.

Por otra parte se han presentado avances en el estudio de los procesos de precipitación, evaporación e infiltración, que permiten estimar el comportamiento de estos fenómenos y de igual manera ilustran la relación existente entre los mismos, incluso de manera acoplada como se evidencia en los avances realizados por parte de la Ecohidrología en cuanto a la variación del grado de saturación del suelo en función de las variables medio ambientales, las propiedades del suelo y el estrés hídrico de las plantas Eagleson (1978a, (1978b, (2002). Así mismo Rodríguez-Iturbe & Porporato (2004) discute y desarrolla un modelo para la respuesta del estrés hídrico de la planta acoplada con los procesos de precipitación, infiltración y evapotranspiración.

Sin embargo la modelación de los procesos de evaporación, precipitación, infiltración y en general de los fenómenos atmosféricos acoplados con el comportamiento mecánico de los materiales térreos, requiere mayores avances en cuanto al desarrollo de protocolos de modelación que permitan una mejor comprensión del proceso de interacción suelo – atmosfera, ya que actualmente se han realizado avances desde diferentes disciplinas y ópticas que no cuentan con parámetros, conceptos y simbología homogénea, lo cual dificulta su estudio de manera acoplada; adicionalmente la modelación física de estos procesos se ha desarrollado a diferentes escalas (según el tipo de proceso modelado) generando alta incertidumbre frente a las leyes de escalamiento a utilizar en la modelación de procesos acoplados.

2 METODOLOGÍA

Las etapas generales del desarrollo de este proyecto de grado consisten primero en la elaboración de un sistema de datos, información y conocimiento, y en segundo lugar el desarrollo de un modelo conceptual. Para el desarrollo de estas etapas se siguieron los lineamientos de Obregón (2004) en cuanto a protocolos de modelación en ingeniería, y las recomendaciones de Muñoz-Seca & Riverloa (1997) y Bueno & Azúa (1998) para la estructuración de sistemas de datos, información y conocimiento. De acuerdo con lo anterior se estableció la metodología que se presenta en la figura 1. En el anexo 1 se presentan las tablas de registro de información, mientras el estado de conocimiento se discute en el capítulo 3.

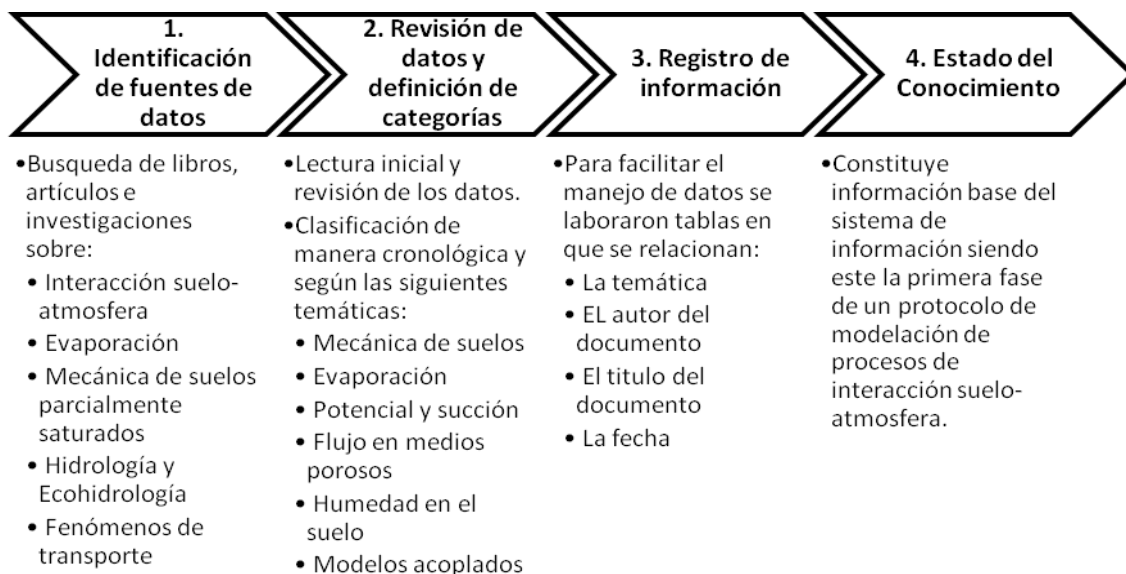


Figura 1. Metodología utilizada para la elaboración de la etapa 1.

La etapa dos correspondiente al modelo conceptual se desarrolló en concordancia con Obregón (2006) según quien en los modelos conceptuales se identifican los fenómenos que tienen lugar en el sistema y en los subsistemas, así como los que regulan los procesos, buscando asociar variables y establecer su observabilidad y controlabilidad, así como las escalas dominantes a diferentes niveles de agregación temporal y espacial, de tal forma que estos modelos se desarrollan para el estudio y aproximación al problema planteado. En este caso el modelo conceptual abarca el estudio de dos modelos termo-hidro-mecánicos acoplados, para así presentar los procesos y las variables asociadas al efecto de la evaporación en el comportamiento mecánico de suelos. Para ello se revisó el modelo desarrollado por Gens y Olivella para el cual se siguió lo expuesto en A Gens & Olivella (2001).

3 DISCUSIÓN SOBRE EL ESTADO DEL CONOCIMIENTO

El estado del conocimiento sobre el estudio de la evaporación acoplada con el comportamiento mecánico de suelos abarca una temática muy amplia, por lo cual fue necesario definir los temas a tratar en función de su importancia relativa para el estudio de los diferentes procesos involucrados. Para ello se recurrió a información principalmente extraída de libros especializados en temáticas como: evaporación, mecánica de suelos parcialmente saturados, ecohidrología y fenómenos de transporte; también fueron consultados artículos presentados en los siguientes eventos y revistas: *XVIII Computational Methods in Water Resources*, Barcelona España 2010; XII Congreso Colombiano de Geotecnia, Bogotá Colombia 2008; *47th Rankine Lecture*, Inglaterra Londres 2007; *Water Resources Research*; *Elsevier*, *Journal of Hydrology and Journal of Advances in Water Resources*; *Geotechnique*; *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering (ASCE)* y *Journal of the soil mechanics and foundations division (ASCE)*. Adicionalmente el director del proyecto suministró una base de datos conformada por artículos, trabajos de su autoría y comunicaciones personales, de igual forma se consultaron otros libros y personas expertas en temas particulares.

El estado del conocimiento presentado en este documento busca proporcionarle al lector una aproximación a los conceptos básicos involucrados en el proceso de interacción suelo-atmósfera y más específicamente de los efectos de la evaporación en el comportamiento mecánico de suelos. Los aspectos tratados en la revisión del estado del conocimiento son: 1. Conceptos básicos de mecánica de suelos clásica, 2. Succión y su relación con el potencial, 3. Principios físicos del flujo en medios porosos no saturados, 4. Cambio de humedad en el suelo y 5. Evaporación, cada subcapítulo contiene una breve descripción del tema y referencias puntuales como se muestra a continuación.

3.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA DE SUELOS CLÁSICA

En términos generales el campo geotécnico establece en cuanto al comportamiento mecánico dos grandes grupos de materiales, rocas y suelos, en este documento nos centraremos únicamente en los suelos. Los suelos consisten en un agregado natural de granos minerales que pueden ser separados por leves procesos mecánicos Terzaghi, et al. (1996), dichos granos o partículas presentan espacios entre sí que pueden estar ocupados por aire, agua o los dos, de tal forma que el suelo puede ser visto como un material compuesto por tres fases (sólido, líquido y gas). Adicionalmente el agua (y las especies químicas disueltas en ella) dentro del

poro (espacio entre partículas) puede llegar a reaccionar con los minerales que conforman la fase sólida creando diferentes tipos de alteraciones en el suelo.

De acuerdo con lo anterior el suelo se trata de un material discreto compuesto por diferentes unidades, donde las características del comportamiento mecánico dependen de los mecanismos que se desarrollan a causa de la interacción entre las partículas, y entre algún elemento externo (como el agua) y las mismas partículas, de manera similar se han identificado diferentes procesos que gobiernan la resistencia al corte en función del tipo de material y las condiciones de carga en que se vea sometido, algunos aspectos influyentes en el comportamiento mecánico de suelos se muestran esquemáticamente en la figura 2, Moya & Mora (2006).

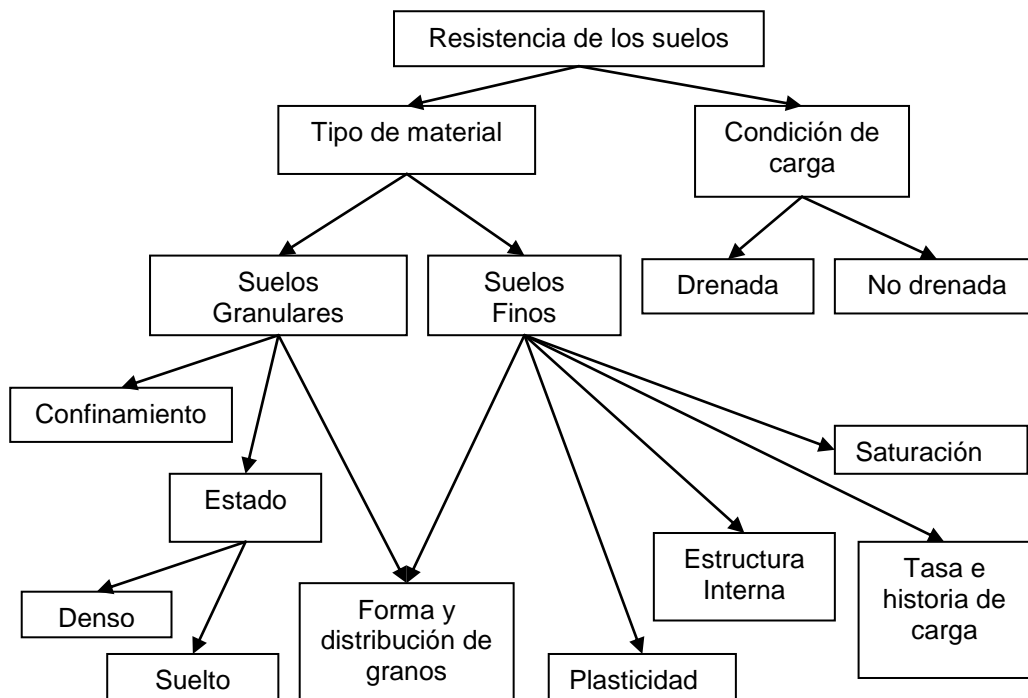


Figura2. Variables que intervienen en el comportamiento mecánico de los suelos. Se presenta de manera jerárquica algunos aspectos relevantes para el comportamiento mecánico de suelos. Tomado de Moya & Mora (2006).

3.1.1 TIPO DE MATERIALES

La literatura reporta varios y diferentes sistemas de clasificación de suelos, sin embargo se identifican dos grupos en función de los mecanismos que gobiernan los procesos físicos, que corresponden a suelos granulares y suelos finos. Los primeros se caracterizan por presentar granos que pueden observarse a simple vista y por tanto espacios vacíos (entre las partículas)

más grandes que los existentes en suelos finos, lo anterior lleva a que el comportamiento mecánico de los suelos granulares sea principalmente gobernado por la acción de las fuerzas gravitatorias de las partículas que constituyen el material de manera que aspectos como la forma y la distribución de las partículas juegan un papel importante en los mecanismos de movimiento y en los parámetros de estado.

Debido a que la superficie específica¹ de estos materiales es baja, con respecto a la de los materiales finos, los efectos capilares y electroquímicos no tienen gran relevancia ya que el agua presenta una mayor libertad de movimiento a través de los intersticios razón por la cual presentan valores altos de conductividad hidráulica, es por este motivo que el presente documento se enfocará en los suelos finos dado que aunque el efecto de la succión (asociado al cambio de humedad y por tanto a la evaporación) en el comportamiento mecánico de suelos granulares puede ser importante, la velocidad con que la presión de poros se disipa en estos materiales es alta en comparación con los suelos arcillosos Terzaghi, et al. (1996), por lo que se estima que el efecto de los procesos atmosféricos (específicamente de la evaporación) en el comportamiento esfuerzo – deformación del material terreo sea más relevante en materiales finos.

Los suelos finos se caracterizan por presentar partículas microscópicas o sub.-microscópicas en donde los efectos electroquímicos priman sobre los efectos gravitatorios, generando complejas interacciones entre las partículas y agentes externos como el agua, lo cual reitera la importancia que pueden tener los efectos atmosféricos (especialmente la evaporación y condensación) en el comportamiento mecánico de los suelos, ya que los anteriores son capaces de extraer o introducir agua en el material afectando su grado de saturación, plasticidad y succión entre otros. Las partículas que conforman los materiales finos presentan formas planas y alargadas que generan diferentes estructuras y por consiguiente diferentes mecanismos de transferencia de carga causando una gran anisotropía en el material. Adicionalmente estos suelos presentan gran actividad superficial que generan altas fuerzas capilares y electroquímicas impidiendo el libre movimiento del agua a través de los poros lo que se ve representado en conductividades hidráulicas bajas. De acuerdo con lo anterior el comportamiento esfuerzo deformación resistencia de estos materiales depende principalmente de la composición mineralógica del suelo, la cual en la práctica de la geotecnia suele ser cuantificada por medio del índice de plasticidad.

¹ *Propiedad de los sólidos que expresa la relación entre el área superficial total y la masa del sólido Zepeda (2004).*

3.1.2 CONDICIÓN DE CARGA Y RESISTENCIA AL CORTE

En cuanto a las condiciones de carga resulta importante considerar el principio de tensiones efectivas propuesto por Terzaghi, et al. (1996) que entre otras permite establecer condiciones de carga drenadas y no drenadas, donde las segundas son características de los suelos finos dada la baja permeabilidad de los mismos. Este mismo principio introduce el concepto de presión de poros esencialmente causado por las condiciones del agua al interior de los intersticios del material terreo, dicho fenómeno genera diferentes trayectorias de esfuerzos efectivos que eventualmente pueden aumentar o reducir la resistencia al corte de los suelos. Las condiciones de carga tienen implicaciones directas sobre el comportamiento esfuerzo deformación resistencia de los suelos (debido al cambio de esfuerzos efectivos), sin embargo el problema físico obedece a un fenómeno de flujo al interior de un medio poroso, de manera que deben analizarse de manera acoplada, ya que ambos procesos ocurren de manera simultánea y son dependientes del tiempo, como se puede apreciar en la teoría de consolidación.

En concordancia con lo anterior el estado límite de resistencia en cualquier tipo de suelos está determinado por los parámetros de resistencia efectivos del material, de tal manera que cualquier trayectoria efectiva de esfuerzos que conduzca a este estado produce la falla. En la figura 3 se muestra la envolvente de resistencia para un material cualquiera en la cual se tienen dos ensayos con diferentes trayectorias de esfuerzos (totales en línea punteada y efectivos en línea continua), en ella se aprecia que para una misma trayectoria efectiva el valor de resistencia al corte no drenada (C_u) es único, sin embargo se pueden obtener valores mayores o menores de C_u en función de la presión de poros y en general de la trayectoria de esfuerzos generada.

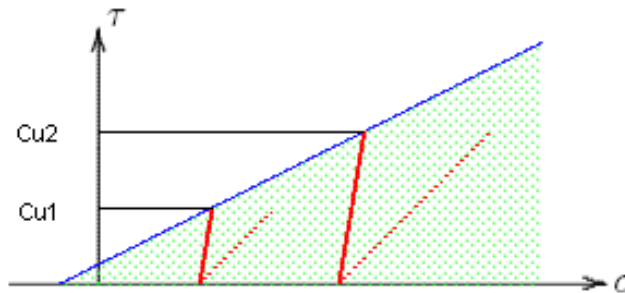


Figura 3. Esquema de trayectorias de esfuerzos.

En línea punteada se ilustran trayectorias de esfuerzos totales mientras las líneas continuas muestran trayectorias de esfuerzos efectivos, se muestran valores únicos de resistencia al corte no drenado (C_u) para las trayectorias y el rango de variación de C_u según la trayectoria seguida. Tomado de Verruijt (2001).

3.1.3 ESTRUCTURA Y FÁBRICA

La estructura y fabrica de los materiales resulta fundamental en el comportamiento esfuerzo deformación resistencia de los suelos, la primera constituye tanto el arreglo geométrico de las partículas o granos minerales como las fuerzas entre partículas, mientras la fábrica sólo se refiere al arreglo geométrico de las partículas minerales. En suelos finos las fuerzas entre partículas son tan grandes que la fábrica y los enlaces deben considerarse como parte de la estructura del material.

De manera particular las arcillas ultra sensitivas² pueden ser muy afectadas por el rompimiento de la estructura, de tal forma que si no son perturbadas pueden ser relativamente fuertes, pero en el caso de ser cizalladas o sometidas a condiciones que lleguen a romper los enlaces de la estructura inicial, pueden literalmente fluir como un líquido. Las principales consecuencias a causa de la pérdida de estructura son: reducción en la rigidez del material, envolventes de resistencia pico más bajas y disminución del índice de compresión primaria (Leroueil, et al. (1979); Amorosi & Rampello (1998)), la figura 4 muestra diferentes envolventes de resistencia pico para la arcilla de Tody ensayada bajo diferentes condiciones estructurales.

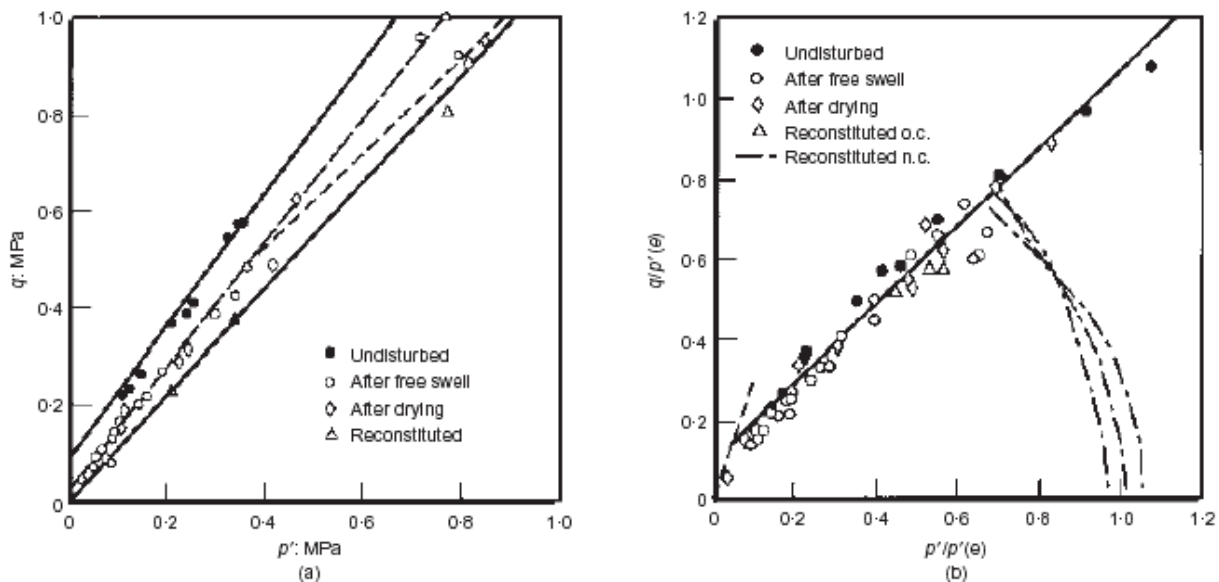


Figura 4. Influencia de la estructura en la resistencia.

Se presenta la variación en la condición de esfuerzos al someter el mismo tipo de material a diferentes procesos que modifican su estructura interna. En la izquierda (a) sobre el plano $p' = (\sigma'_1 + \sigma'_3)/2$, $q' = (\sigma'_1 - \sigma'_3)/2$ y a la derecha (b) en esfuerzos normalizados. Tomado de Rampello (1991)

² Sensitividad: corresponde a la medida de la pérdida de resistencia de una arcilla causada por modificación de su estructura (remoldéo), también es llamada sensibilidad o susceptibilidad Terzaghi, et al. (1996).

Otra propiedad de alta importancia en el comportamiento mecánico de suelos finos es la plasticidad que está directamente relacionada con la mineralogía del suelo y la actividad electroquímica de las partículas, al respecto Skempton (1953) establece un parámetro llamado *actividad del material* que se obtiene como la relación entre el índice de plasticidad³ y el contenido de arcilla, posteriormente Lupini, et al. (1981) y Skempton (1985) presentan la dependencia de los parámetros de resistencia residual⁴ y en estado normalmente consolidado para una arena con diferentes contenidos de bentonita, ilustrando que a medida que aumenta el contenido de arcilla (por consiguiente el índice de plasticidad) cambian tanto los parámetros de resistencia como el mecanismo de movimiento de los granos (ver figura 5).

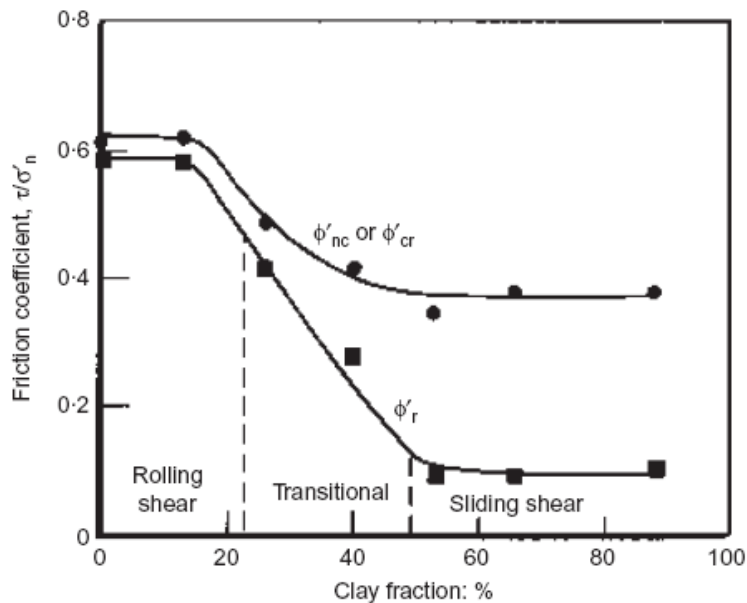


Figura 5. Influencia de la mineralogía sobre los parámetros de resistencia. En las abscisas se presenta el contenido de arcilla y en las ordenadas el coeficiente de fricción expresado como la relación entre los esfuerzos de corte y los de compresión. En la parte superior se ilustra el comportamiento del coeficiente de fricción normalmente consolidado mientras la línea de la zona inferior presenta la variación del coeficiente de fricción residual. Tomado de Lupini, et al. (1981)

3.1.4 TASA E HISTORIA DE CARGA

En suelos arcillosos la tasa de carga en la resistencia al corte del material también es un factor importante ya que estos presentan un comportamiento viscoso a causa de la dependencia de la

³ Corresponde a la diferencia entre dos límites de humedad, el límite líquido y el límite plástico, el primero ilustra la humedad en la cual el suelo pasa de un estado semilíquido a un estado plástico y puede moldearse, mientras el límite plástico representa la humedad en que el suelo pasa de un estado plástico a un estado semisólido y se rompe Terzaghi, et al. (1996).

⁴ La resistencia residual obedece a aquella que tiene el material después de verse sometido al rompimiento de su estructura Verruijt (2001).

resistencia con la tasa de deformaciones. Berre & Bjerrum (1973) muestran que la resistencia al corte crece de manera lineal con el logaritmo de la tasa de deformación mediante ensayos triaxiales realizados a velocidad controlada, de manera similar otros estudios definen un parámetro que caracteriza el comportamiento viscoso del material denominado *índice de viscosidad* (Mitchell, et al. (1968); Murayama & Shibata (1958)) definido como una relación potencial entre la resistencia al corte y la tasa de deformación, dicho parámetro (calculado como la relación entre el coeficiente de compresibilidad secundaria y el coeficiente de compresibilidad primario) fue presentado en función del límite líquido por Krieg (2000), cuyos valores se muestran en la figura 6.

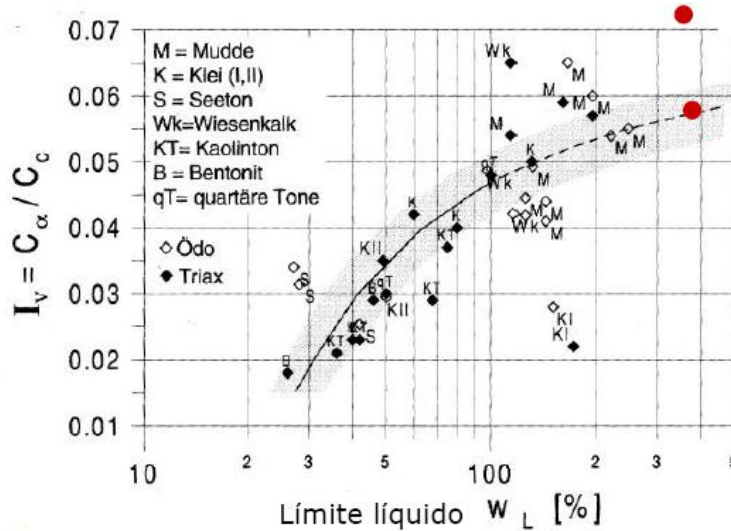


Figura 6. Valores del índice de viscosidad.

Se presenta para diferentes materiales sometidos a ensayos triaxiales y odometricos, la relación entre el índice de viscosidad y el límite líquido, la cual presenta comportamiento logarítmico aun cuando en las abscisas la escala es logarítmica. Tomado de Krieg (2000)

Los suelos llevan consigo una memoria de la historia de carga a la que han sido expuestos anteriormente, para considerar este factor usualmente se definen conceptos como la presión de preconsolidación que delimita la transición entre un comportamiento elástico y recuperable a un comportamiento plástico donde se generan deformaciones irreversibles. En el contexto de la plasticidad, las superficies de fluencia son función de los esfuerzos que permiten establecer la evolución de la plasticidad del material, a medida que los materiales plastifican desplazan estas superficies de fluencia de manera que extienden la zona en la cual el material presenta un comportamiento elástico, lo anterior implica que si un determinado material es descargado se necesitaría cargarlo nuevamente (por lo menos hasta el valor de presión inicial) para que la trayectoria de carga sobrepase la superficie de fluencia y cause deformaciones plásticas Moya & Mora (2006).

La figura 7 ilustra el comportamiento de un material cuando se encuentra en el rango sobreconsolidado, en dicha figura la zona 1 representa el rango en que el material se comporta lineal y elástico, la zona 2 cuando sobrepasa este límite y en ella el material presenta un comportamiento no lineal pero elástico, y finalmente en la zona 3 el material experimenta un comportamiento visco-plástico.

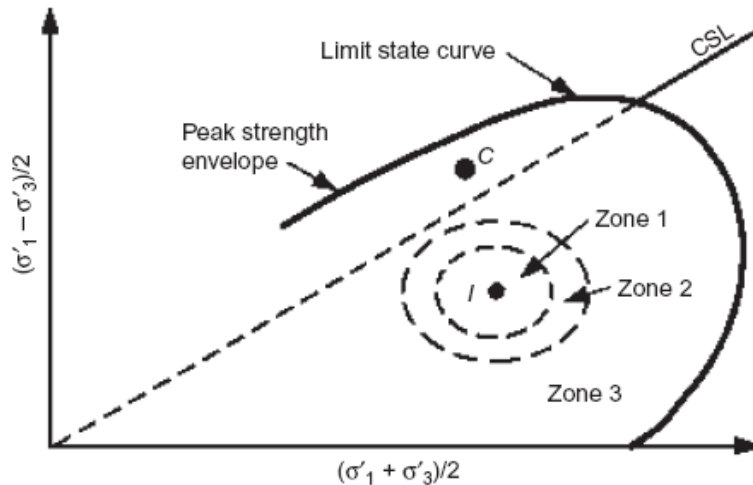


Figura 7. Elementos básicos del comportamiento de los suelos. Sobre el plano $p' = (\sigma'_1 + \sigma'_3)/2$, $q' = (\sigma'_1 - \sigma'_3)/2$ se ilustra esquemáticamente la envolvente de falla de los suelos, y de igual forma se presentan las zonas o rangos de comportamiento esfuerzo-deformación en que se puede encontrar. Zona 1 lineal y elástico, la zona 2 no lineal pero elástico, zona 3 visco-plástico. Tomado de Leroueil (2001)

3.1.5 SATURACIÓN

En condiciones de saturación parcial el comportamiento de los suelos finos está controlado por el parámetro de succión, definido por ahora como la diferencia entre la presión del aire y la presión agua (ya que en los siguientes numerales se ahondará en su definición), en esta sección sólo se relacionarán algunos conceptos básicos que ilustran la relación entre la succión y el comportamiento mecánico de materiales térreos.

En el desarrollo de la succión tanto la estructura como la composición de los suelos juega un papel importante, Futai & Almelda (2005) presentan curvas de retención para un suelo residual a diferentes profundidades, identificando diferentes comportamientos del desarrollo de succión como consecuencia del cambio en la estructura del material igualmente ilustran como la matriz de succión desplaza la superficie de fluencia preestablecida por la presión de preconsolidación, de tal forma que en la medida que la succión aumenta, se incrementa la presión de preconsolidación y en simultáneo se acrecientan la pendiente de la línea de compresión virgen

y las envolventes de resistencia del material. Otros autores (Tavenas, et al. (1978); Maatouk, et al. (1995); Cui & Delage (1996)) también han reportado estos efectos para diferentes condiciones de carga y situaciones de análisis, de manera general Leroueil (2001) muestra esquemáticamente la influencia de la succión en las envolventes de estado límite en el material (ver figura 8).

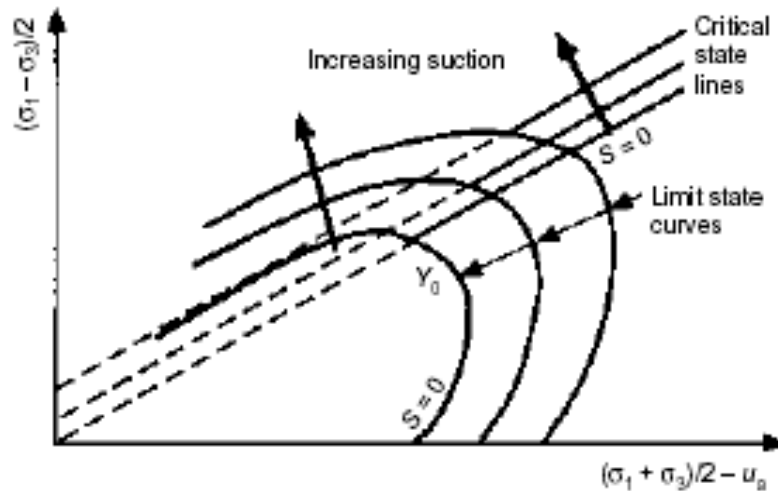


Figura 8. Influencia del parámetro de succión en las curvas de estado límite. Sobre el plano $p - u_0 = p' = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 - u_0$, $q = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ se ilustra esquemáticamente el cambio de la envolvente de falla según se incrementa la succión (S). Tomado de Leroueil (2001)

Como se mencionó anteriormente el comportamiento mecánico se encuentra altamente ligado a fenómeno de flujo al interior del medio poroso, por lo cual resulta importante evaluar el régimen de lluvia, las tasas de infiltración y los parámetros del acuífero entre otros para la generación de modelos hidrogeológicos, de igual forma se debe considerar que las características hidrogeológicas, presentan variación con el grado de saturación, cuyo efecto es particularmente importante en suelos donde la cabeza de succión contribuye notablemente a las fuerzas que estabilizan el sistema.

Lo anterior ha motivado diferentes estudios del proceso de infiltración en suelos parcialmente saturados Leroueil, et al. (1979); Alonso, et al. (1995); Collins & Znidarcic (1998); Sun, et al. (1998); Amorosi & Rampello (1998). Análisis numéricos y analíticos realizados por Sun, et al. (1998) sobre la infiltración unidimensional en suelos inicialmente no saturados muestran una expresión para relacionar la profundidad de avance de la zona húmeda con el tiempo (t) como se muestra a continuación:

$$h = \frac{q_1 \times t}{n} \times (S_{r1} - S_{ro}) \quad (1) \text{ Tomado de Sun, et al. (1998)}$$

Donde n es la porosidad, S_{ro} es el grado de saturación inicial y S_{r1} es el grado de saturación en la franja húmeda, q_1 es equivalente a la conductividad hidráulica del suelo asociada a la saturación S_{r1} . Cuando el agua infiltrada es igual o superior a la conductividad hidráulica saturada del suelo (k_{sat}), la infiltración es controlada por este último parámetro y el exceso de agua se convierte en escorrentía superficial. La máxima profundidad de la banda húmeda sigue siendo controlada por la ecuación 1, pero con $q_1 = k_{sat}$ y $S_{r1} = 1.0$, en cuyas condiciones la ecuación es equivalente a la propuesta por Lumb (1975).

A continuación se presentan resultados obtenidos al simular la infiltración unidimensional para tres diferentes tasas constantes de infiltración de agua lluvia en dos materiales diferentes, donde se muestra que a medida que la tasa de infiltración disminuye la succión aumenta, y de igual forma para la mayor tasa la zona de infiltración permanece con algo de succión y parcialmente saturada, lo que se debe al hecho de que la tasa de infiltración es inferior al valor de la conductividad hidráulica saturada del material. Sin embargo el desarrollo de presiones de poros no consiste únicamente en los efectos de la infiltración vertical Johnson & Sitar (1990; Montgomery, et al. (1997), de hecho flujos en otras direcciones pueden causar diferencias de presión a lo largo del material, de igual forma discontinuidades o variaciones en la litología del material pueden modificar la presión de poros en las interfaces.

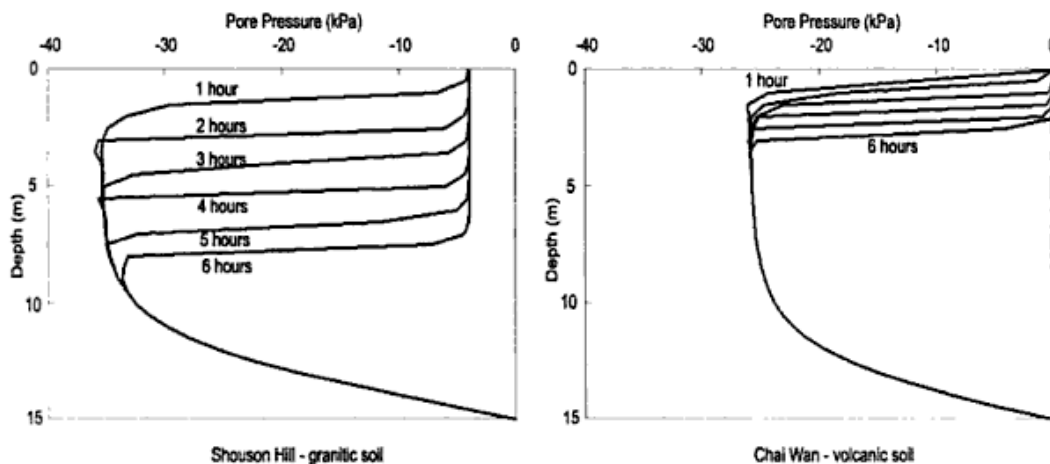


Figura 9. Resultados del análisis de infiltración transitoria (80 mm/hora por 6 horas). Se muestran los valores simulados de presión de poros en función de la profundidad, de acuerdo con el modelo de avance del frente húmedo. En la izquierda para un suelo granítico y a la derecha para un suelo volcánico. Tomado de Sun, et al. (1998)

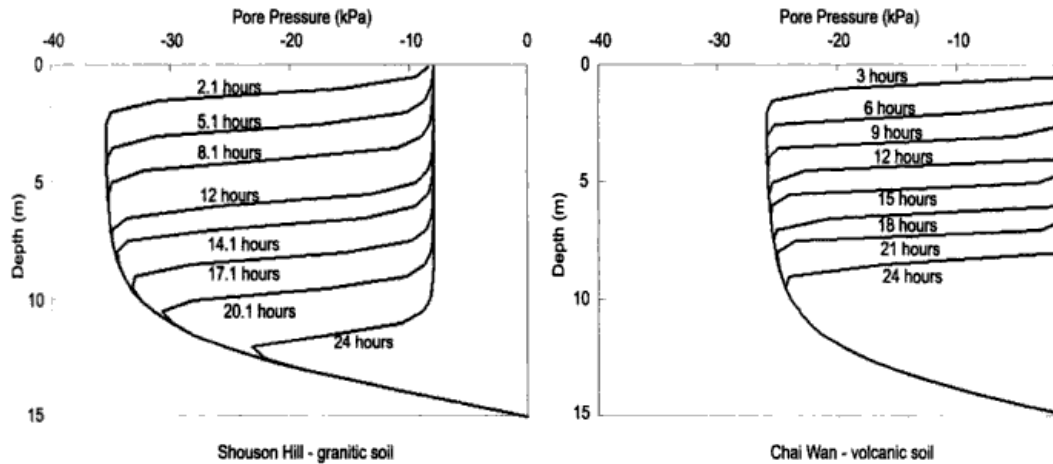


Figura 10. Resultados del análisis de infiltración transitoria (20 mm/hora por 24 horas). Se muestran los valores simulados de presión de poros en función de la profundidad, de acuerdo con el modelo de avance del frente húmedo. En la izquierda para un suelo granítico y a la derecha para un suelo volcánico. Tomado de Sun, et al. (1998)

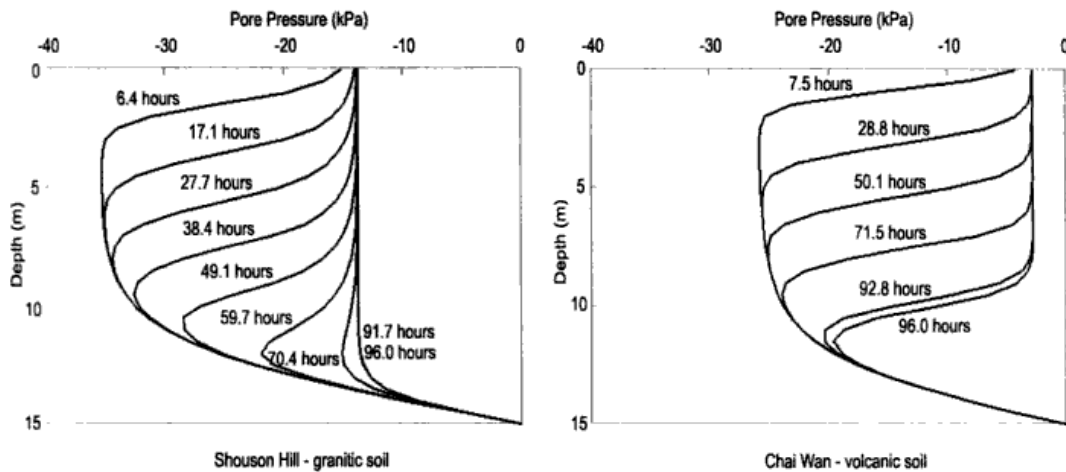


Figura 11. Resultados del análisis de infiltración transitoria (5 mm/hora por 96 horas). Se muestran los valores simulados de presión de poros en función de la profundidad, de acuerdo con el modelo de avance del frente húmedo. En la izquierda para un suelo granítico y a la derecha para un suelo volcánico. Tomado de Sun, et al. (1998)

En el desarrollo de la modelación numérica de los procesos mencionados resulta fundamental el conocimiento de los modelos constitutivos que expresan relaciones entre esfuerzos y deformaciones cuyo tipo depende principalmente del objeto de la modelación, Lade (2005) presenta un recorrido a través de los modelos constitutivos desarrollados hasta el 2005, comparando los atributos de los modelos disponibles hasta esa fecha. En la tabla 1 se relacionan algunos modelos constitutivos capaces de predecir e involucrar el efecto de la presión de poros.

Tabla 1 Algunos Tipos de modelos constitutivos que involucran succión.

Modelo	El Modelo Predice / Incluye				Requiere Experimentos Dificiles / no Comunes	Número de Parámetros
	Ablandamiento Drenado	Carga Cíclica	Presiones de Poros Reales	Comportamiento Real 3D		
Hipoplástico	Si	Si	Si	Si	Si, depende de las cond. Modeladas	8
Superficies anidadas	No	Si	Si	No	Si, depende de las cond. Modeladas	Algunos valores discretos
Plasticidad difusa	Si	Si	Si	Si	Si, depende de las cond. Modeladas	13 - 20
Lade	Si	No	Si	No	Si	14
PLAXIS Hardening	No	No	Si	Si	No	11
MONOT	No	Si	Si	Si	No	21

Tomado de Moya & Mora (2006) - Adaptado de Lade (2005)

3.2 SUCCIÓN Y SU RELACIÓN CON EL POTENCIAL

Resulta importante señalar que el concepto de succión es relevante no sólo en aplicaciones geotécnicas, entre otros este es trascendente para la hidrogeología, la hidrología, las aplicaciones agrícolas y la ecohidrología, como se evidencia en estudios realizados por Rodríguez-Iturbe & Porporato (2004) entre otros, donde la succión es considerada a través de la humedad en el suelo, de igual forma en el sector agrícola son comunes los términos “capacidad de retención de humedad” y “capacidad de campo” ambos asociados al concepto de potencial y por tanto, la succión, que en términos generales es definido como la interacción de las fuerzas de adhesión, cohesión y capilares producidas en medios porosos; en esta área tiene tal importancia que se realizan mediciones por medio de equipos como tensiómetros con el objeto de conocer su variación a nivel horario e incluso escalas inferiores con el objeto de establecer el momento más apropiado para el riego.

En el numeral anterior se relacionó la importancia del parámetro de succión en el comportamiento mecánico de suelos, implicando esto que el correcto entendimiento de los suelos parcialmente saturados requiere considerar adecuadamente los efectos de la succión. Para ello es importante recordar que la succión es expresada en términos de presión ($ML^{-1}T^{-2}$; kN/m^2) y resulta de considerar la energía y/o trabajo por unidad de volumen en vez de hacerlo por unidad de masa (como se hace en el caso del potencial), de esta forma se relacionan la succión y el potencial, termino sobre el cual tratará este subcapítulo.

En 1965 el panel de revisión del Simposio en Equilibrio de la Humedad y Cambios de Humedad en Suelos Bajo Áreas Cubiertas, propuso dividir el potencial total en cuatro componentes: potencial gravitacional, potencial de presión de gas, potencial mátrico y potencial osmótico

Zepeda (2004). El potencial gravitacional corresponde al ocasionado por la diferencia de elevación, mientras el potencial de presión de gas obedece a la presión de gas aplicada, el potencial osmótico está asociado a la diferencia en la concentración de solutos a lo largo de membranas permeables o semipermeables, y el potencial mátrico responde a la interacción entre el líquido y el sólido. Cada una de las diferentes partes del potencial puede ejercer efectos diferentes sobre el material, sin embargo debe recordarse que es la suma de todos la que controla el transporte de masa de agua A. Gens (2010).

En el campo geotécnico el efecto del potencial gravitacional resulta irrelevante para el comportamiento mecánico. Sin embargo en áreas como la hidrogeología y la ingeniería de petróleos lo efectos hidrodinámicos pueden hacer del potencial gravitacional un elemento de gran importancia. Algunas consideraciones teóricas y resultados experimentales han mostrado que el potencial de presión de gas podría tener efectos poco significativos e incluso nulos sobre el comportamiento esfuerzo deformación resistencia del suelo A. Gens (2010). De acuerdo con lo anterior sólo el potencial mátrico y el potencial osmótico son relevantes para el comportamiento mecánico de los suelos, sin embargo, el segundo resulta ser especialmente importante en suelos sensitivos en los cuales las reacciones químicas y el efecto de doble capa difusa entre otros se presenta con mayor intensidad, lo que resalta la importancia del potencial mátrico.

El agua en el suelo puede formar meniscos entre las partículas que pueden asociarse al proceso de capilaridad, dichos meniscos crean curvaturas en la interface agua aire generando una diferencia entre la presión del agua y la presión del aire, dicha diferencia corresponde al potencial mátrico. Adicionalmente este proceso tiene efectos sobre la estructura del suelo causados por las fuerzas interpartículas generadas por los meniscos.

La succión o potencial mátrico puede considerarse de manera aproximada como la suma de dos componentes: uno asociado al proceso de capilaridad y otro a la adsorción, como lo propone Tuller, et al. (1999), quienes parten de considerar la interface líquido vapor como una superficie de energía libre especifica de Gibbs constante o potencial químico, aplicado a un modelo propuesto por ellos para la geometría del poro y utilizando el argumento de Young-Laplace, de tal forma que llegan a ilustrar el aporte de la adsorción y la capilaridad al potencial mátrico mostrando que su importancia relativa depende del tipo de suelo y el contenido de agua

en el mismo, de tal forma que la componente de adsorción tiende a predominar en suelos de grano fino. La expresión obtenida por Tuller, et al. (1999) corresponde a:

$$\psi_m = \frac{-2\sigma_s k}{\rho_w} + \frac{-\lambda' RT}{h} \quad (2) \text{ Adaptado de Tuller, et al. (1999)}$$

Donde σ_s es la tensión superficial, k el radio de curvatura medio de la interface, ρ_w la densidad del agua, λ' es una constante positiva (10^{-10} m) y h el espesor de la capa de agua adsorbida. La componente de adsorción resulta de la interacción entre fuerzas electroestáticas, las fuerzas de van der Waals y las fuerzas de hidratación Rand (1993), que controlan la interacción molecular del agua en contacto con superficies solidas; el potencial mátrico también puede verse afectado por otras fuerzas moleculares como enlaces de hidrogeno, osmosis, superficies cargadas de dipolos A. Gens (2010).

Dadas las condiciones anteriores y la amplia variabilidad en la geometría de los poros los análisis geotécnicos han considerado ambos componentes de la succión o potencial mátrico sólo a nivel conceptual, usualmente este es evaluado como un único valor mediante modelos físicos Delage, et al. (1998); Romero (2001); Tristancho & Caicedo (2008); Blatz, et al. (2009). Se ha encontrado que la componente de capilaridad tiende a dominar en suelos granulares o con altos grados de humedad mientras el efecto de adsorción resulta más significativo en arcillas especialmente con bajo contenido de agua A. Gens (2010).

Por otra parte los procesos químicos tienen una relación directa con los procesos de oxidación reducción, así como en el potencial químico, el flujo osmótico, en el potencial osmótico y por tanto en la succión osmótica A. Gens (2010), que como se mencionó anteriormente tiene un efecto directo sobre el comportamiento mecánico y la condición de flujo de materiales térreos, Soto (2008) señala que la succión osmótica es igual a la succión total cuando el suelo se encuentra saturado.

La correcta comprensión de la succión osmótica requiere de formulaciones para el transporte reactivo entendido como aquel donde especies químicas disueltas en la fase líquida (solutos) reaccionan con otros solutos en la misma fase (reacciones homogéneas) y con especies en otras fases (reacciones heterogéneas) Guimarães (2002). Usualmente se considera que el sistema se encuentra en equilibrio químico, supuesto que permite la formulación y solución de las ecuaciones de transporte mediante algoritmos basados en las leyes de acción de masas o

en la directa minimización de la energía libre de Gibbs como lo relacionan Bethke (1996; Harvie, et al. (1987).

Para cualquiera de las formulaciones resulta fundamental considerar el potencial químico definido por Gibbs (1876) como: “Si suponemos que se añade una cantidad infinitesimal de cualquier sustancia a una masa homogénea cualquiera en un estado de tensión hidrostática, que la masa permanece homogénea y su entropía y volumen permanecen constantes, el incremento de la energía interna de la masa dividida por la cantidad de la sustancia añadida es el potencial para esa sustancia en la masa considerada”.

Guimarães (2002) presenta una formulación en que se acopla el modelo termohidromecánico (THM) de Olivella, et al. (1994) con las ecuaciones de transporte reactivo, en la cual se involucran las ecuaciones de conservación de masa y conservación de energía para cada especie (agua, aire, mineral) en cada fase (líquida, gaseosa y sólida) involucrando términos de fuente sumidero que representan el aporte de las reacciones químicas entre el soluto y el agua, así mismo plantea expresiones para los términos de fuente sumidero, las condiciones de equilibrio, la actividad química, el intercambio de cationes y el transporte reactivo. Implicaciones en el comportamiento mecánico y ejemplos de aplicación de este modelo son presentados por A. Gens (2010).

3.3 PRINCIPIOS FÍSICOS DEL FLUJO EN MEDIOS POROSOS NO SATURADOS

El estudio de los medios porosos abarca un sin número de aplicaciones desde los sistemas de riego hasta la disposición de desechos nucleares, pasando por aplicaciones en la ingeniería de petróleos y la hidrogeología, de igual forma comprende aplicaciones en el campo geotécnico entre las cuales resulta de gran importancia la relación entre el proceso de flujo y la generación de esfuerzos en materiales térreos. A continuación se presentan algunas consideraciones y conceptos asociados a los procesos de transporte en la zona vadosa, en los cuales se hará referencia al estado del material en términos de fases (sólido, líquido y gaseoso) y a los tipos o contenidos de las fases como especies (agua en fase líquida).

3.3.1 PRINCIPIOS FÍSICOS DEL POTENCIAL MÁTRICO

El potencial mátrico de la especie i de líquido en un medio poroso puede expresarse como:

$${}^{(i)}\psi = {}^{(i)}\bar{p}l - {}^{(i)}p_{ol} = {}^{(i)}\psi_0 \ln\left(\frac{{}^{(i)}\bar{p}_v(r)}{{}^{(i)}p_{0v}}\right) \quad (3) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

Donde ${}^{(i)}\bar{p}l$ es la presión media de la especie i de líquido en el sitio donde el potencial (${}^{(i)}\psi$) es medido, ${}^{(i)}\bar{p}_v(r)$ es la media de la presión de vapor de la especie i de líquido en el medio poroso, ${}^{(i)}p_{ol}$ es la presión justo bajo una superficie plana de líquido que cuenta con la misma temperatura y composición química que la del líquido en el medio poroso, de tal forma que:

$${}^{(i)}\psi_0 = \frac{{}^{(i)}\rho k T}{{}^{(i)}m} \quad (4) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

En la cual ${}^{(i)}\rho$ es la densidad másica de la especie i de líquido en el medio poroso, k es la constante de Boltzmann, T es la temperatura absoluta en K, y ${}^{(i)}m$ es la masa de una molécula de líquido de la especie i . El término ${}^{(i)}\bar{p}_v(r)$ considera la media de la presión de vapor en las interfaces líquido aire generada en los meniscos que varía según el radio efectivo (del menisco) donde r corresponde al mayor radio que contenga agua, mientras ${}^{(i)}p_{v0}$ es la presión de vapor de la especie i de líquido cuando este se encuentra a la misma temperatura y contiene las mismas impurezas químicas que el líquido en el medio poroso y donde su superficie es plana (radio de curvatura infinito). Por tanto la relación entre estas dos presiones se asemeja a la humedad relativa de la especie i de líquido en el medio poroso.

Si se establece un modelo geométrico para el medio poroso es posible obtener expresiones teóricas para el potencial, particularmente al considerarlo como un conjunto de tubos capilares paralelos de sección circular es posible alcanzar ecuaciones para ${}^{(i)}p_v$ y ${}^{(i)}\bar{p}_v(r)$ que dependerán de entre otros del grado de saturación del líquido de la especie i ; por tanto el conocimiento de las características de la humedad en el medio poroso parcialmente saturado es de gran interés Case (1994).

Una de las características más importantes del agua es que presenta histéresis en el proceso de secado y humedecimiento en todo material terreo, esto quiere decir que el medio poroso presenta valores de potencial más altos al incluirle más agua (humedecimiento) que al retirar una misma cantidad de agua (secado). Este comportamiento obedece al proceso de *redistribución espontanea*, causado porque las partículas que inicialmente humedecen un poro seco son desplazadas por los efectos de capilaridad y la evolución de la evaporación y

recondensación hacia poros más pequeños a los que inicialmente ingresó, de tal forma que el sistema medio poroso - líquido se encuentra en un estado de energía más bajo que el alcanzado justo después del humedecimiento inicial. De cualquier forma el estado de energía del líquido y el poro seco considerados por separado es superior al del humedecimiento inicial, ya que tanto este como la redistribución espontánea producen calor que es conducido fuera del sistema, dejando la energía neta del mismo en un valor inferior al que poseía antes de la ocurrencia del proceso; por tanto la entropía del sistema agua - suelo se incrementa Case (1994).

El potencial mátrico es función de la temperatura, la concentración de impurezas en el líquido, la tensión interfacial en los poros que contienen aire y los poros que contienen agua, y la geometría interna del poro. La tensión interfacial entre los dos medios es el trabajo por unidad de área o la fuerza por unidad de longitud requerida para incrementar el área de la superficie interfacial en una unidad, mientras la tensión superficial corresponde a la energía interfacial de una sustancia pura y el vapor de la misma. Una alternativa para considerar estas fuerzas interfaciales es asumir un elemento curvo de la interface tomando r_1 y r_2 como los radios principales, y γ como la tensión interfacial Case (1994), lo que se ilustra en la figura 12.

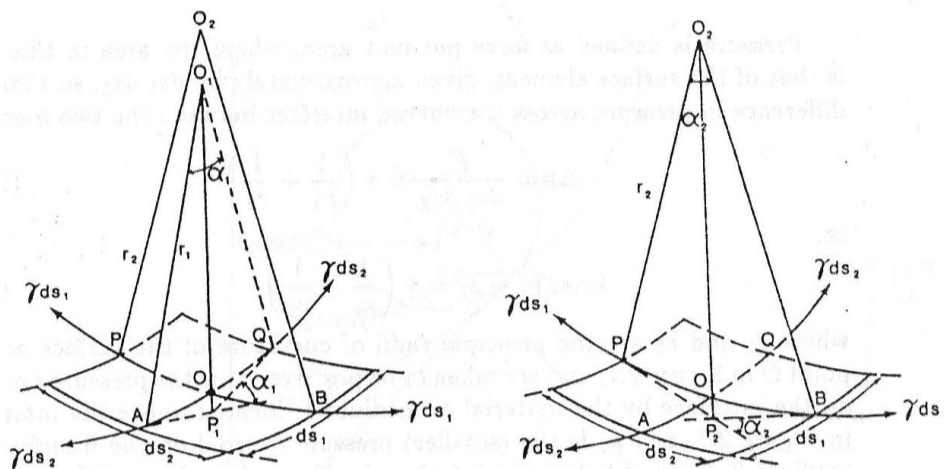


Figura 12. Elemento curvo del área superficial en la interface de dos medios. Se presenta el modelo geométrico de la superficie formada en el poro en la interface asumiendo un modelo geométrico formado por los radios r_1 y r_2 , así mismo se ilustran las fuerzas de tensión interfacial. Tomado de Case (1994)

Con la geometría y fuerzas definidas es posible obtener una expresión para la diferencia de presión a lo largo de la interface curva de dos medios, que dependerá esencialmente de las variables ya presentadas, de tal forma que la presión p_1 corresponde a la generada por el

material 1 localizada sobre la interface, mientras p_2 representa aquella ubicada bajo la interface. Las fuerzas de tensión superficial por unidad de área (lado derecho de la ecuación 5) mantienen balanceada la diferencia de presión en cada punto sobre la superficie, sin embargo los valores de r_1 y r_2 varían en cada interface de tal forma que la diferencia de presión también variará de dicha manera.

$$p_1 - p_2 = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (5) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

La geometría de la superficie de la interface agua - aire generada en cada menisco puede ser considerada como si fuese constituida por círculos cuyos radios corresponden a r_1 y r_2 , sin embargo estos radios no suelen ser iguales a lo largo de la superficie tanto en su sentido longitudinal como transversal, por lo cual se han generado funciones para la superficie de las cuales es posible obtener la curvatura media de la misma. De igual forma se han determinado expresiones para la forma de la interface, al resolver la ecuación diferencial parcial de la forma de la interface siendo esta una superficie en revolución, considerando un desplazamiento virtual del sistema y aplicando el principio de trabajo virtual Case (1994); Tuller, et al. (1999).

Como se ha mencionado la diferencia de presión en la interface agua aire genera el efecto de capilaridad, si se considera que dicho efecto ocurre en un tubo de sección circular, el proceso de flujo causado por la diferencia de presión puede ser analizado mediante la ley de Poiseuille la cual permite obtener el volumen de fluido por unidad de tiempo (caudal) que fluye a través de la tubería, si se expresa dicho caudal por unidad de área se obtendrá entonces la velocidad de Darcy que corresponde a la velocidad media del fluido. Al considerar el medio poroso como un conjunto de tuberías alineadas con respecto a la horizontal con un mismo ángulo, se logra obtener la expresión de Green-Ampt para el flujo en medios porosos Case (1994). También se ha considerado el modelo anterior pero con una distribución aleatoria del ángulo de inclinación de las tuberías y del radio de las mismas, al respecto Case (1994) presenta la siguiente expresión.

$$J_{(r)} = \frac{\frac{\varepsilon \rho \lg}{8\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!} \int_{r_m}^r \int_0^{\pi/2} \xi^4 f_c(\xi, \theta) e^{-ndo\xi^2} \cos(\theta) d\theta d\xi}{\int_{r_m}^R \xi^2 f_c(\xi) d\xi} \quad (6) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

Donde $J_{(r)}$ corresponde al caudal volumétrico, ε es la porosidad del material, θ en ángulo de inclinación de las tuberías con respecto a la horizontal, ξ el radio de la sección transversal de las capilaridades, η la viscosidad dinámica, rm es el radio mínimo de los poros, R el radio máximo de los poros, $f_c(\xi, \theta)$ es una función de distribución conjunta de los parámetros mencionados.

3.3.2 ALGUNOS ASPECTOS BÁSICOS DE TERMODINÁMICA DE MEDIOS POROSOS

En temimos generales existen dos convenciones para escribir la primera ley de la termodinámica que en si misma corresponde al principio de conservación de energía, una es considerar que el trabajo realizado sobre el sistema por un agente externo es negativo y el trabajo realizado por el sistema es positivo, la otra convención es asumir todo lo contrario, y será considerada en la siguiente expresión para la forma diferencial de la primera ley de la termodinámica.

$$\delta Q + \delta W = dU \quad (7) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

Donde δQ es la pequeña cantidad de calor que entra al sistema durante el proceso de pasar de un estado inicial a uno final, δW corresponde a la pequeña cantidad de trabajo desarrollado en el sistema durante el proceso, y dU es el cambio de energía interna del sistema durante el proceso. El símbolo δ se conoce como diferencial inexacta e indica que las cantidades no son la diferencial total de cualquier función matemática, y sus efectos una vez ocurrido el proceso no pueden ser separados el uno del otro del cambio de energía interna Case (1994). En este caso la diferencial inexacta es usada tanto para el calor como para el trabajo, principalmente porque existe una dependencia entre la trayectoria y el valor de la integral de dichas diferenciales, sin embargo el trabajo puede ser expresado en términos de diferencial total en el caso en que se haga dependiente de la fuerza generalizada para un desplazamiento generalizado, como es el caso de la presión ejercida sobre el sistema por un agente externo (P) y el cambio volumétrico ocurrido en el sistema (dV), de tal forma que el cambio de trabajo en un proceso de compresión podrá ser expresado de la siguiente manera.

$$\delta W = -PdV = \gamma dA \quad (8) \text{ Adaptado de Case (1994)}$$

Donde γ es la tensión interfacial y dA es el incremento de área generado al realizar trabajo sobre la superficie. Si se considera un medio poroso parcialmente saturado y se ignora el

fenómeno de histéresis presentado por el potencial y su relación con la humedad el sistema líquido medio poroso en estado no saturado puede expresarse así.

$$\delta Q = dU + {}^{(i)}\psi d^{(i)}\theta \quad (9) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

Donde ${}^{(i)}\psi$ es el potencial mátrico del líquido i en el medio poroso no saturado, y ${}^{(i)}\theta$ es el grado de saturación. Aplicando las transformaciones de Legendre es posible obtener otras funciones termodinámicas cuya utilidad dependerá del problema en estudio, de las cuales las más usuales son la energía libre de Helmholtz (H), la energía libre de Gibbs (G), la entalpia (H) y la energía interna (U), cuyas expresiones para medios porosos parcialmente saturados se presentan a continuación.

$$dU = TdS - {}^{(i)}\psi d^{(i)}\theta + \sum_{i=0}^N {}^{(i)}\mu d^{(i)}X, i \neq 1 \quad (10) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

$$dF = -SdT - {}^{(i)}\psi d^{(i)}\theta + \sum_{i=0}^N {}^{(i)}\mu d^{(i)}X, i \neq 1 \quad (11) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

$$dG = -SdT + {}^{(i)}\theta d^{(i)}\psi + \sum_{i=0}^N {}^{(i)}\mu d^{(i)}X, i \neq 1 \quad (12) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

$$dH = TdS + {}^{(i)}\theta d^{(i)}\psi + \sum_{i=0}^N {}^{(i)}\mu d^{(i)}X, i \neq 1 \quad (13) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

Donde S es la entropía, T la temperatura, μ el potencial químico, y las demás variables han sido definidas anteriormente; cabe aclarar que si se trata de un sistema con número constante de moles el término $d^{(i)}X$ será cero y por tanto el tercer término desaparecerá de las expresiones 10 a 13. Si se considera un sistema compuesto N constituyentes y M fases en el cual los constituyentes no reaccionan químicamente entre ellos y todos los N constituyentes se encuentran en todas las M fases la energía libre de Gibbs estará dada por.

$$G = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M {}^{(i)}X_j {}^{(i)}\mu_j \quad (14) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

Donde ${}^{(i)}X_j$ es el número de moles del constituyente i en la fase j y ${}^{(i)}\mu_j$ es el potencial químico o energía libre de Gibbs por mol del constituyente i en la fase j . Como se consideró que no ocurren reacciones químicas entre los constituyentes entonces la única forma en que se pueden producir cambios en ${}^{(i)}X_j$ es que se transfieran constituyentes de una fase a otra. De acuerdo con lo anterior en un sistema en equilibrio a temperatura y presión constante, el potencial químico de un constituyente dado tendrá el mismo valor en todas las fases, por tanto en un

medio poroso no saturado el potencial químico del vapor de agua será el mismo que el del agua atrapada en los poros por efectos de capilaridad.

3.3.3 SOLUCIONES DILUIDAS EN MEDIOS POROSOS

Cuando las impurezas diluidas en el agua de los poros de un medio poroso forman una solución diluida (no electrolítica) se pueden generar cuatro efectos sobre el flujo en medios porosos, el primero consiste en el cambio de la concentración de impurezas en la superficie del menisco, otro efecto es la reducción de la presión de vapor de una solución diluida por debajo de la presión de vapor del solvente puro (${}^{(i)}p_v$) lo cual tiene efectos sobre el potencial mátrico, el tercer efecto consiste en el cambio del equilibrio de concentración de impurezas en el agua del suelo al aplicar presión bajo el menisco de la interface aire suelo, y finalmente se pueden presentar cambios en la concentración de la solución con la altura en un campo gravitacional como consecuencia del requisito termodinámico que el equilibrio de la solución es equilibrio con respecto a todos los campos externos Case (1994).

Partiendo de las expresiones para el trabajo y para la energía interna presentadas anteriormente (ecuación 8 y 10) es factible considerar la diferencia de concentración de impurezas en la superficie del solvente y su contenido por unidad volumétrica, como lo expresa la siguiente ecuación.

$$dU = TdS + \gamma dA + \sum_{i=1}^2 {}^{(i)}\mu d{}^{(i)}X \quad (15) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

con

$${}^{(1)}X = A{}^{(1)}C \quad \text{y} \quad {}^{(2)}X = A{}^{(2)}C \quad (16) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

Donde ${}^{(1)}\mu$ es el potencial químico del solvente, ${}^{(2)}\mu$ es el potencial químico del soluto, ${}^{(1)}C$ la concentración del solvente (agua) en la superficie de la fase (en moles por unidad de área), y ${}^{(2)}C$ la concentración del soluto (impureza) en la superficie de la fase. A temperatura constante el cambio en la fuerza interfacial dependerá de las concentraciones y potenciales descritos, si se considera que la fase contiene una concentración uniforme de solvente y que la superficie de la fase puede ser separada de la misma, el cambio en el potencial químico del solvente (${}^{(1)}\mu$) tenderá a cero en cuyo caso es posible obtener una expresión para la concentración del soluto en la superficie de la fase en función de ${}^{(2)}n$ concentración de solutos en la fase, (Rg) constante de gases ideales, (T) la temperatura absoluta y (γ) la tensión interfacial Case (1994).

$${}^{(2)}C = \frac{-{}^{(2)}n}{R_g T} \frac{\partial \gamma}{\partial {}^{(2)}n} \quad (17) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

La disminución neta de presión de vapor de la solución diluida por debajo de la de sus solutos, en una solución no electrolítica que contenga varios solutos puede ser aproximada a la suma de disminución de vapor producida por cada soluto, que puede ser expresada mediante la definición termodinámica del potencial químico de cada constituyente Case (1994). Si se considera un sistema en equilibrio, el potencial químico del constituyente i de la fase vapor será igual al potencial químico del constituyente i en la fase líquida, al representar el agua (solvente) como $i=1$ y el mineral sólido como $i=2$ donde dicho mineral no presenta transporte reactivo y no es volátil, de tal forma que el vapor de agua sea el único vapor presente, entonces el potencial químico de las fases se expresa como.

$${}^{(1)}\mu_v = {}^{(1)}\mu_l = {}^{(1)}g_l + R_g T \ln \left(1 - \frac{{}^{(2)}X}{X} \right) \quad (18) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

Donde ${}^{(1)}\mu_v$ es el potencial químico del vapor de agua, ${}^{(1)}\mu_l$ el potencial químico del líquido, ${}^{(1)}g_l$ la energía libre de Gibbs por mol de agua pura, y ${}^{(2)}X/X$ es la fracción molar del soluto mineral. Utilizando la expresión anterior, asociando el diferencial de la energía libre de Gibbs al potencial químico, expresando dicho diferencial en términos de la diferencia volumétrica por el diferencial de presión, y utilizando expansiones de Lagrange, se ha obtenido una expresión que liga la relación de las presiones con la temperatura y la fracción molar del soluto mineral Case (1994). La importancia de este tipo de expresiones radica en que al ilustrar como cambia la presión de vapor a causa de la concentración de solutos, es posible conocer su efecto en el potencial ya que este depende de la presión de vapor de la especie i de líquido (${}^{(i)}p_{v0}$) como se ilustró en la ecuación 4.

En sistemas abiertos las moléculas del soluto mineral puede intercambiarse con los alrededores, de tal forma que el soluto puede ser absorbido sobre las paredes del poro y por tanto removido de la solución, o puede ser disuelto en la solución de las paredes y así añadido a la solución de modo que las paredes del poro actúan como un depósito de partículas para el soluto; lo anterior lleva a que el potencial químico en estos casos usualmente sea considerado por partícula y no por mol de la especie i . Al tratarse de partículas entra en juego la masa de las mismas y por tanto los efectos gravitatorios, que pueden ser considerados al incluir en la

ecuación de energía interna los aspectos mencionados, al respecto Case (1994) presenta la siguiente expresión.

$$dU = TdS - PdV - m_s h dg + \sum_{i=1}^{N_s} \mu_i dv_i \quad (19) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

Donde dU es el cambio de energía interna, T la temperatura, S la entropía, V el volumen, m_s la masa promedio de la solución, h la altura desde un datum arbitrario, dg el cambio de la aceleración de la gravedad con respecto a la altura mencionada, N_s el número de tipos diferentes de partículas, μ_i el potencial químico por partícula de especie i , y v_i es el número de partículas de tipo i . Case (1994) también presenta expresiones para el número de partículas y aborda los principios termodinámicos por medio de la mecánica estadística, con la cual se obtienen resultados satisfactorios para el análisis del problema considerando la presencia de partículas. Los conceptos anteriores resultan aplicables a una columna de suelo con la salvedad que si esta columna contiene un grado de saturación inferior a la capacidad de campo el cambio del potencial químico con respecto a la altura $(\partial^{(i)} \mu / \partial h) dh$ será función del cambio de potencial con respecto a la altura $((\partial^{(i)} \mu / \partial \psi) \partial \psi / \partial h dh)$. Se ha evidenciado que la concentración de la solución decrece en la medida que la altura de la columna aumenta Case (1994).

3.3.4 TRANSPORTE DE VAPOR EN MEDIOS POROSOS

En medios porosos no saturados el vapor disponible para el fenómeno de transporte constituye el que se desarrolla en el menisco que forma la superficie de agua contenida en los poros del medio. El transporte de vapor por difusión en la fase aire está controlado por los gradientes de concentración de vapor, que pueden ser expresados como gradientes de presión o densidad de vapor. A nivel capilar el movimiento del vapor de agua de un punto de una concentración determinada a otro de menor concentración depende de la media del radio efectivo de las capilaridades asociado al concepto del *camino libre medio* que corresponde a la distancia media que una molécula de vapor recorre antes colisionar con otra molécula de vapor.

Dependiendo de la magnitud del radio de la capilaridad se facilitará o dificultará el movimiento de las moléculas de vapor y de igual forma dependiendo del tamaño del radio será diferente la expresión que modele el proceso, Case (1994) discute estas temáticas en términos de transporte de vapor en radios capilares "grades" y "medianos", donde si el radio de la capilaridad es lo suficientemente grande para que la mayoría de las colisiones se den entre

moléculas en vez de hacerlo con las paredes de la capilaridad se considera que este radio es grande y en este caso tanto la ley de Poiseuille como la difusión molecular se pueden aplicar; por otra parte el radio mediano obedece a aquel que es superior al camino libre medio pero no lo suficiente para evitar colisiones con las paredes del poro de tal forma que para su estudio es normalmente necesario recurrir a aproximaciones semiempíricas.

En términos generales las expresiones planteadas por Case (1994) parten de la teoría cinética de gases y la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzman, sin embargo diferentes consideraciones son hechas según el caso analizado. Las aproximaciones que consideran el medio poroso como un conjunto de tubos capilares ilustradas para el flujo de agua en medios poroso también se han utilizado para el caso del transporte de vapor en medios parcialmente saturados, entre estas se señala la siguiente expresión presentada por Case (1994) que permite estimar $(^{(i)}j)$ para un conjunto de tuberías capilares paralelas cuyo radio (ξ) varía según una función de distribución $f(\xi)$ como se ilustra en.

$$^{(i)}j = \frac{\int_{rm}^R (^{(i)}Q_s \pi \xi^2 f(\xi) d\xi)}{\int_{rm}^R \xi^2 f(\xi) d\xi}, \text{ con } ^{(i)}Q_s = \frac{20 + \frac{8l}{\xi}}{20 + \frac{19l}{\xi} + 3\left(\frac{l}{\xi}\right)^2} \left(\frac{^{(i)}m}{2\pi kT}\right)^{1/2} (p_{v1} - p_{v2})$$

(20) Tomado de Case (1994)

Donde $(^{(i)}j)$ corresponde al flujo másico de vapor de agua, ξ el radio de la sección transversal de las capilaridades que varía según una función de distribución $f(\xi)$, l la longitud y $(p_{v1} - p_{v2})$ la diferencia de presión de la ley de Poiseuille, rm es el radio mínimo de los poros, R el radio máximo de los poros, k es la constante de Boltzmann, T es la temperatura absoluta y $(^{(i)}m)$ es la masa de una molécula de líquido de la especie i .

La correcta comprensión y modelación del fenómeno transporte de vapor requiere un paquete de ecuaciones para el transporte isotérmico de gas, que incluye la ecuación de momentum, continuidad, estado (relación entre presión, temperatura, y densidad), formulaciones para el flujo de cada especie, y la ecuación para el flujo de energía. Dichas expresiones son usualmente obtenidas considerando la ley de Fick para el transporte difusivo, la ley de Dalton para la ecuación de estado, aproximaciones lagrangianas y/o eulerianas para las ecuaciones de

conservación (masa, momentum y energía), ejemplos de estas para el vapor de agua se presentan en Case (1994); Schrefler (2002); A. Gens (2010).

$$Q_A - Q_D = \int_a^b \psi_A d^{(i)}\theta - \int_a^b \psi_D d^{(i)}\theta \quad (21) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

Como se mencionó anteriormente el proceso de redistribución espontanea crea el fenómeno de histéresis en el proceso de secado y humedecimiento del suelo, dicho efecto también puede evidenciarse en la diferencia entre el calor liberado durante el humedecimiento (Q_A) y la energía requerida para remover el agua adicionada en el humedecimiento (proceso de secado) denotado como Q_D , la siguiente expresión muestra como estimar dicha diferencia de energía. Donde ψ representa el potencial, θ el grado de saturación, a y b son los límites que se ilustran en la figura 13, en la que se muestra el ciclo de histéresis mencionado.

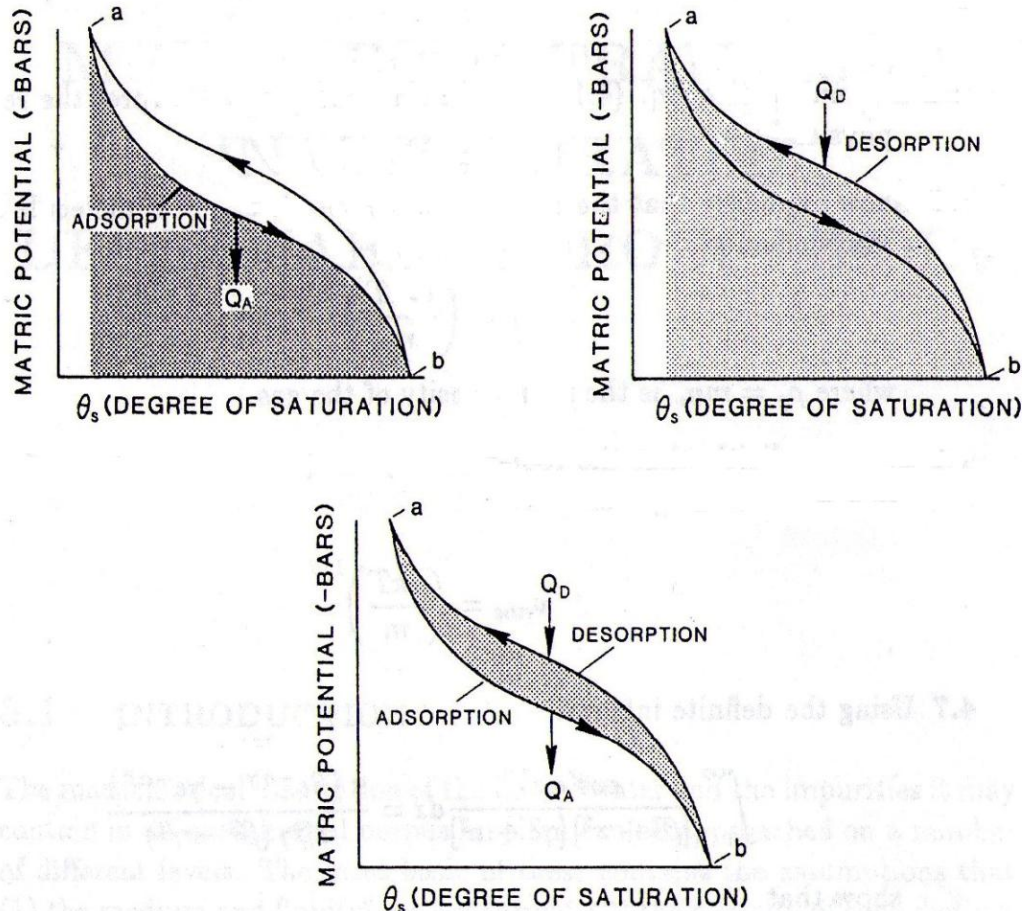


Figura 13. Ciclo de histéresis capilar.

Se presenta en el ciclo histeretico del potencial mátrico durante el proceso de humedecimiento y secado del suelo, el calor liberado durante el humedecimiento (Q_A) y la energía requerida para remover el agua adicionada (Q_D). Tomado de Case (1994).

3.3.5 FLUJOS ACOPLADOS EN MEDIOS POROSOS NO SATURADOS

En medios porosos no saturados se presentan diferentes tipos de flujo, en términos generales estos consisten en movimiento del agua (en estado líquido), flujo de calor, movimiento de cargas eléctricas, transporte de vapor, y flujo de especies químicas en el agua. Cada uno de ellos puede afectar a los demás por lo cual se requiere estudiarlos y modelarlos de manera acoplada, proceso que generalmente se logra con la aplicación de la teoría de termodinámica de no equilibrio específicamente mediante el uso de *coeficientes fenomenológicos de acoplamiento*.

Para aplicar estos coeficientes se considera que cada flujo (por unidad de área por unidad de tiempo) consiste en el producto entre las fuerzas generalizadas que actúan en el sistema y los coeficientes fenomenológicos que los conectan, considerando que no existe relación linear homogénea entre los flujos y las fuerzas se obtendrá una matriz de coeficientes fenomenológicos cuya diagonal contendrá los coeficientes de los efectos directos mientras aquellos fuera de la diagonal representa los coeficientes de efectos acoplados. Al respecto Case (1994) presenta una descripción del significado físico de cada coeficiente (de efectos directos tanto indirectos) que se forman al considerar el acoplamiento de los cinco tipos de flujos mencionados anteriormente.

Los flujos (J) y las fuerzas generalizadas (F) pueden ser relacionados mediante la función de disipación (Φ) que es la tasa de producción de entropía por unidad de volumen y representa la tasa de disipación de energía libre de procesos irreversibles o la disminución de la capacidad del sistema para realizar trabajo. Considerando el movimiento del agua (en estado líquido) ${}_1J$, el flujo de calor ${}_2J$, el movimiento de cargas eléctricas ${}_3J$, el transporte de vapor ${}_4J$, y el flujo de especies químicas en el agua ${}_5J$ la función de disipación se expresa como:

$$\begin{aligned} \Phi &= {}_1\vec{J} \cdot \vec{F} + {}_2\vec{J} \cdot \vec{F} + {}_3\vec{J} \cdot \vec{F} + {}_4\vec{J} \cdot \vec{F} + \sum_{l=5}^m \vec{J} \cdot \vec{F} \\ &= -{}_1\vec{J} \cdot (\vec{\nabla}\Psi + \rho g \vec{\nabla}z) - {}_2\vec{J} \cdot \vec{\nabla} \ln[T(\vec{r})] - {}_3\vec{J} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) + {}_4\vec{J} \cdot \vec{\nabla} \mu_v(\vec{r}) + \sum_{l=5}^m \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \mu_l^c(\vec{r}) \end{aligned}$$

(22) Tomado de Case (1994)

Donde ρ es la densidad del agua líquida, g la aceleración de la gravedad, Ψ es el potencial mático, z es la posición vertical, T es la temperatura, \vec{r} el vector de posición, φ el potencial

eléctrico, μ_v el potencial químico del vapor, y μ_l^c es el potencial químico de la especie l . De manera generalizada los flujos pueden ser expresados así:

$$\vec{J}_i = \vec{L}_{i1} \cdot \vec{F} + \vec{L}_{i2} \cdot \vec{F} + \vec{L}_{i3} \cdot \vec{F} + \vec{L}_{i4} \cdot \vec{F} + \sum_{l=5}^m \vec{L}_{il} \cdot \vec{F} \quad (23) \text{ Tomado de Case (1994)}$$

Donde los \vec{L}_{ij} corresponden a los coeficientes fenomenológicos.

En concordancia con lo expuesto en numerales anteriores la correcta descripción de los flujos acoplados en medios porosos requiere: la ecuación de movimiento basada en el principio de conservación de momentum, la ecuación de continuidad para cada especie, la ecuación de flujo de energía, la ecuación de estado (relación presión densidad temperatura) para cada especie, y la ley de flujo para cada especie que contenga un gradiente o fuerza generalizada para cada tipo de flujo considerado, expresado en términos de velocidad Case (1994).

3.4 CAMBIO DE HUMEDAD EN EL SUELO

Se ha mencionado la importancia de la humedad del suelo en su comportamiento mecánico, de igual forma se ha resaltado la dificultad de su modelación en especial en medios porosos no saturados, sin embargo y como se mencionó en apartes anteriores el grado saturación del suelo y su dinámica es de gran interés para múltiples disciplinas entre otras en la hidrología dado su efecto sobre el ciclo del agua, en la ingeniería agrícola por ser esta una de las variables que condiciona la frecuencia y volumen de riego, y la ecohidrología por su estrecha relación con el desarrollo de la vegetación en función de las variables ambientales, el tema se ha abordado sin considerar su relación con la atmosfera y los procesos que ocurren en la misma, este capítulo tratará la dinámica de la humedad en el suelo partiendo del proceso de precipitación involucrando así algunos avances dados por la hidrología y ecohidrología.

Se ha reconocido desde hace un buen tiempo que los sistemas atmosféricos, los del suelo y de la vegetación están dinámicamente relacionados con los procesos físicos que producen transporte de energía térmica y de masa de agua a través de la superficie de la tierra Eagleson (1978b).

De igual forma se ha reconocido que los ecosistemas controlados por el agua son complejos y desarrollan estructuras cuyas características y propiedades dinámicas dependen de muchas interrelaciones entre el suelo, el clima y la vegetación, dado que el suelo y clima condicionan la

vegetación, pero la vegetación en si misma controla la dinámica de la humedad del suelo, el balance de agua y es responsable del retorno a la atmosfera afectando así el clima (ver figura 14), por tanto su comprensión requiere el estudio de estos procesos de manera acoplada siendo la humedad del suelo la variable fundamental para sintetizar la acción de clima, suelo y vegetación en el balance de agua y en el impacto dinámico del balance hídrico en las plantas Rodriguez-Iturbe, et al. (2001).

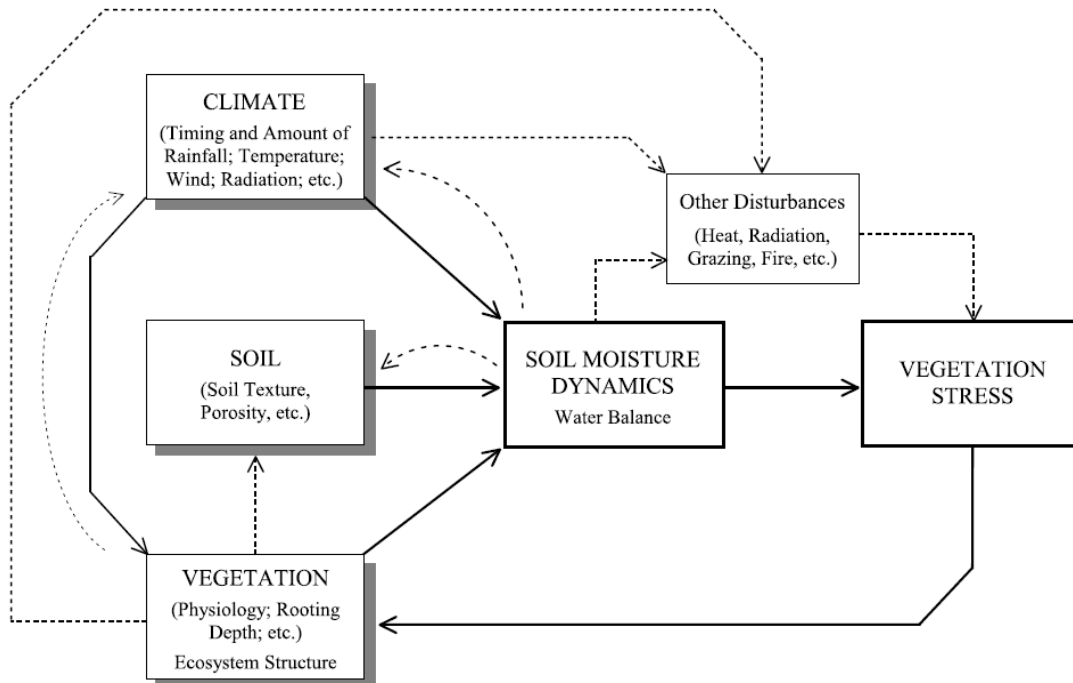


Figura 14. Esquema del sistema clima suelo vegetación.

Se presenta la relación entre los procesos climáticos, las propiedades del suelo y la vegetación, el estrés hídrico de las plantas y otros procesos atmosféricos, enmarcando la dinámica de la humedad del suelo como la variable fundamental de estos sistemas. Tomado de Rodriguez-Iturbe, et al. (2001).

A continuación se presentan dos modelos de ecohidrología el primero desarrollado en 1978 y el segundo en el 2001, con ellos se pretende esbozar algunos conceptos de la dinámica de la humedad del suelo.

3.4.1 MODELO EAGLESON - 1978

El modelo de Eagleson planteado en 1978 estableció una estrategia para acoplar los procesos climáticos con aquellos ocurridos en la superficie del suelo introduciendo conceptos físicos que permiten entender el cambio en el clima y el balance de agua. El modelo considera entre otros lo siguiente: el volumen de control abarca desde unos milímetros por encima de la superficie del suelo hasta la profundidad de penetración, las variables de entrada son consideradas

estocásticas y sus distribuciones de probabilidad son transformadas en distribuciones de probabilidad de la variable de salida al utilizar procesos físicos determinísticos, se consideran sólo los procesos que operan en dirección vertical, no incluye la nieve, el hielo ni el vapor, el balance se realiza para la media anual de las entradas y salidas, se asume que el suelo es homogéneo, todos los procesos son estacionarios a largo plazo, la media del periodo intertormentas es muy superior a la media de la duración de la tormenta, el periodo intertormentas y la duración de las tormentas son estadísticamente independientes, la infiltración, exfiltración, percolación y ascenso capilar de la tabla de agua son formulados de manera independiente y sus flujos son linealmente superpuestos, la humedad inicial del suelo en cada periodo es la misma, ya que en el periodo intertormentas (que es muy superior a la duración del evento) se asume que el suelo retorna a su humedad inicial, la tabla de agua permanece constante. La figura 15 ilustra los procesos contemplados por este modelo.

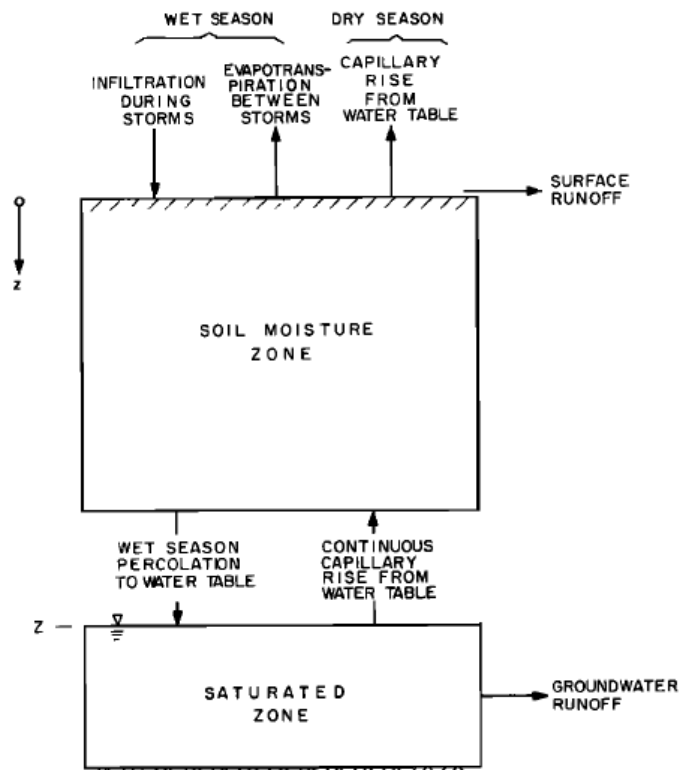


Figura 15. Esquema de los procesos que afectan la humedad del suelo. Se presentan los procesos y subprocesos involucrados en el modelo de Eagleson, en el cual se considera un periodo intertormentas y un periodo húmedo o de ocurrencia de la lluvia. Tomado de Eagleson (1978b).

De acuerdo con Eagleson (1978a) el movimiento vertical de la humedad del suelo en la fase líquida entre la superficie del suelo y el nivel freático puede categorizarse en tres tipos según el tipo de procesos dominantes, dichos tipos son: infiltración y exfiltración, percolación y ascenso

capilar. La infiltración y exfiltración se refieren al avance del frente húmedo visto como un proceso difusivo no estacionario de penetración del agua en el suelo, durante el humedecimiento (en presencia de lluvias) los procesos de capilaridad y gravedad son complementarios, mientras en la fase de secado (intertormentas) la capilaridad se opone a las fuerzas gravitacionales.

En la medida que la profundidad de penetración aumenta (infiltración) la difusión reduce los gradientes de humedad y por tanto los efectos de capilaridad a tal punto que el movimiento termina siendo dominado por la gravedad, la profundidad en la cual las fuerzas capilares se tornan insignificantes se denomina "profundidad de penetración" y determina el límite del volumen de control. La presencia de vegetación adhiere otro mecanismo de extracción de humedad a lo largo de una profundidad relacionada con la estructura de las raíces, entonces la exfiltración dependerá tanto de dicho proceso como del secado intertormentas Eagleson (1978a). Para considerar estos procesos (infiltración y exfiltración) se define S_1 como el grado de saturación en la superficie del medio, f_i la tasa de infiltración, f_i^* la capacidad de infiltración (cuando $S_1=1$), i la tasa de precipitación, f_e la tasa de exfiltración, f_e^* la capacidad de exfiltración (cuando $S_1=0$), e_T la tasa de evaporación, y e_p la tasa de evaporación potencial. La figura 16 presenta los límites de estos procesos y los rangos de variación de estas variables.

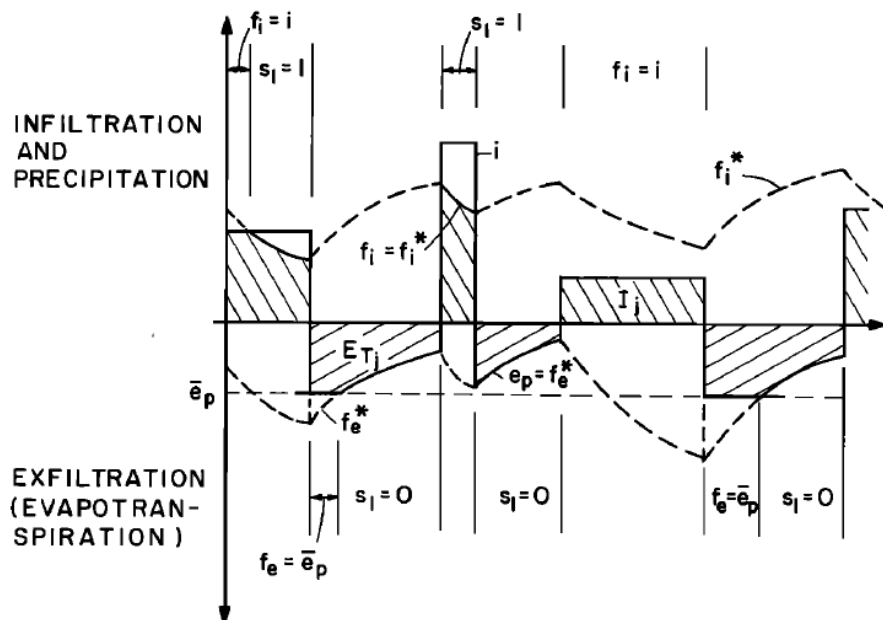


Figura 16. Condiciones límite para los periodos idealizados de tormentas e intertormentas. Se presentan esquemáticamente los procesos de precipitación, infiltración y exfiltración, señalando las tasas potenciales en línea punteada y las tasas reales en línea continua. Las áreas achuradas señalan los volúmenes de humedad intercambiados entre el suelo y la atmosfera. Tomado de Eagleson (1978a).

La percolación consiste en el flujo de humedad que se da en la base de la zona de humedad del suelo (*soil moisture zone*) y sale de ella bajo el dominio de las fuerzas de gravedad hasta encontrarse con el incremento del gradiente de humedad en cercanías del nivel freático, donde las fuerzas capilares toman importancia. Durante la época lluviosa la humedad del suelo puede considerarse constante en la parte baja de la zona de humedad del suelo y de hecho el valor medio de la misma tiende a serlo Eagleson (1978a). El modelo considera los procesos mencionados mediante las cuatro ecuaciones que se relacionan a continuación. Durante la época seca se considera que el ascenso capilar es el único proceso operativo, el cual se expresa así:

$$\frac{w}{K(1)} = \left[1 + \frac{3/2}{mc-1} \right] \left[\frac{\psi(1)}{Z} \right]^{mc}; w/e_p < 1 \quad (24) \text{ Tomado de Eagleson (1978a)}$$

Donde w es la velocidad de ascenso capilar, $K(1)$ la conductividad hidráulica para el medio saturado, m el índice de distribución del tamaño del poro, c el índice de desconexión de poros, $\psi(1)$ potencial mátrico en estado saturado, Z la profundidad del nivel freático, y e_p la tasa de evaporación potencial de una superficie libre. Para la temporada de lluvias se considera la infiltración durante tormentas como:

$$\frac{f_i^*(t, S_0)}{K(1)} = (1 - S_0) \left[\frac{5n\psi(1)\phi_i(d, S_0)}{3\pi mtK(1)} \right]^{1/2} + \frac{(1 - S_0^c)}{2} - \frac{w}{K(1)} \quad (25) \text{ Tomado de Eagleson (1978a)}$$

Donde f_i^* es la capacidad de infiltración, S_0 el grado de saturación inicial en la superficie, n la porosidad efectiva, t el tiempo, n la porosidad efectiva, ϕ_i coeficiente adimensional de infiltración difusiva, y d el índice de difusividad. La exfiltración entre tormentas se expresa así:

$$\frac{f_e^*(t, S_0)}{K(1)} = S_0^{1+d/2} \left[\frac{n\psi(1)\phi_e(d)}{\pi mtK(1)} \right]^{1/2} - \frac{Me_v}{K(1)} + \frac{w}{K(1)} \quad (26) \text{ Tomado de Eagleson (1978a)}$$

Donde f_e^* es la capacidad de exfiltración, M la fracción de la superficie que tiene vegetación, e_v la tasa de transpiración, y ϕ_e coeficiente adimensional de exfiltración difusiva. Para la percolación neta se considera la siguiente expresión:

$$\frac{v(t, S_0)}{K(1)} = S_0^c - \frac{w}{K(1)} \quad (27) \text{ Tomado de Eagleson (1978a)}$$

Donde v es la velocidad aparente del fluido por fuera de la zona de humedad del suelo.

3.4.2 MODELO RODRIGUEZ-ITURBE ET AL - 2001

El modelo de Rodriguez-Iturbe, et al. (2001) permite la estimación de la dinámica de la humedad del suelo, para ello parte de los siguientes supuestos: la representación del modelo corresponde a la estación de crecimiento para la cual los parámetros de clima y vegetación permanecen constantes en el tiempo, la escala espacial del análisis es de unos pocos metros, característica del área ocupada por una planta individual, donde las condiciones de vegetación y suelo se asume que son homogéneas, la dinámica de la humedad del suelo se modela en un punto, para condiciones verticalmente promediadas, toda la dimensión vertical está representada en la profundidad de las raíces, el volumen de control abarca desde unos milímetros por encima de la superficie del terreno hasta la zona radicular, no se incluyen flujos laterales de agua resultantes de la topografía, no contempla los aportes por capilaridad desde la tabla de agua subterránea, se asume que no hay interacción entre la zona saturada y la capa activa de suelo esto significa que el modelo no cubre regiones donde por el clima húmedo, cursos de aguas adyacentes, características topográficas, o cualquier combinación de estos factores, el nivel freático tiene un rol activo en determinar las condiciones de las plantas. La figura 17 ilustra los procesos contemplados por este modelo.

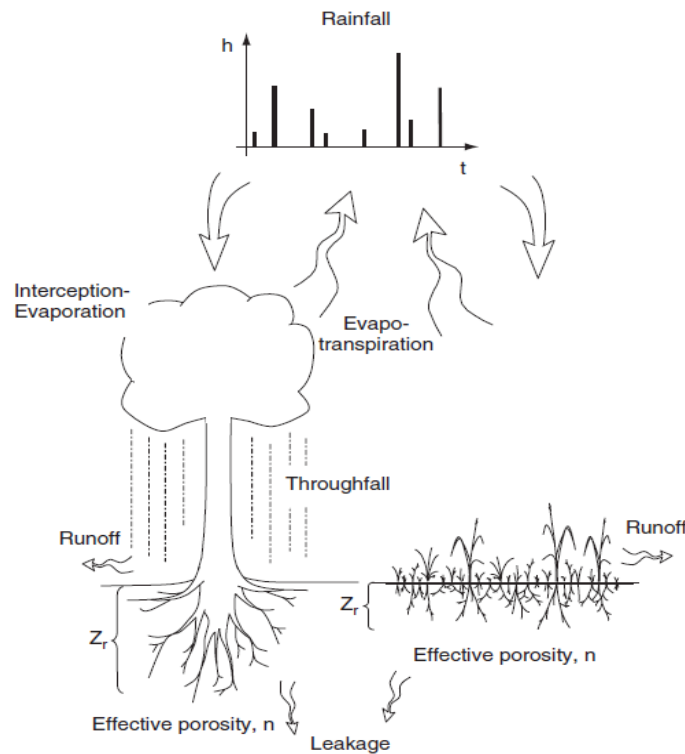


Figura 17. Representación esquemática de los mecanismos que intervienen en el balance de agua en el suelo.

Tomado de Rodriguez-Iturbe, et al. (2001).

A continuación se relaciona una breve descripción, de los procesos ilustrados, para ello iniciaremos por presentar la ecuación planteada para el balance de humedad del suelo en un punto dado.

$$nZ_r \frac{ds(t)}{dt} = \varphi[s(t);t] - X[s(t)] \quad (28) \text{ Tomado de Rodriguez-Iturbe, et al. (2001)}$$

Donde n es la porosidad del suelo, Z_r la profundidad de las raíces o de suelo activo, $s(t)$ el contenido relativo de humedad del suelo o grado saturación, $\varphi[s(t);t]$ la tasa de infiltración de la lluvia, y $X[s(t)]$ la tasa de pérdida de humedad del suelo desde el suelo activo.

Las pérdidas están representadas por la percolación y la evapotranspiración que se expresan de la siguiente manera:

$$X[s(t)] = E[s(t)] + L[s(t)] \quad (29) \text{ Tomado de Laio, et al. (2001)}$$

Donde, $E[s(t)]$ y $L[s(t)]$ son las tasas de evapotranspiración e infiltración respectivamente. El modelo considera la naturaleza estocástica de la tormenta tanto para la ocurrencia como para la cantidad de lluvia, modelándola como una serie de eventos puntuales en el tiempo continuo derivados de un proceso de Poisson de tasa λ cada uno llevando una cantidad aleatoria de lluvia extraída de una distribución dada, en este sentido cada evento representa la lluvia diaria y se asume que esta llega concentrada en un instante Laio, et al. (2001). La distribución de los tiempos τ entre eventos de precipitación es exponencial con media $1/\lambda$.

$$f_T(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} \text{ para } \tau \geq 0 \quad (30) \text{ Tomado de Rodriguez-Iturbe, et al. (2001)}$$

La profundidad de los eventos de lluvia se considera una variable aleatoria independiente descrita por una función de densidad de probabilidad exponencial, de la forma:

$$f_H(h) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha}h} \text{ para } h \geq 0 \quad (31) \text{ Tomado de Rodriguez-Iturbe, et al. (2001)}$$

Donde α es la profundidad media de los eventos de lluvia y se estima como la media diaria de la lluvia en los días cuando ocurre la precipitación. Parte de la lluvia es interceptada por la vegetación y la restante alcanza el suelo, por lo cual debe involucrarse el efecto de la intercepción que en este modelo es considerado como un umbral para la altura de lluvia (Δ) por debajo del cual el agua no alcanza la tierra, cuyo valor es función del tipo de vegetación. En consecuencia para un evento de lluvia h_i , mayor que Δ , la profundidad de lluvia que alcanza la tierra está dada por $h_i - \Delta$ de tal forma que en cada evento de lluvia una cantidad Δ es

interceptada y si la magnitud de la lluvia h_i es inferior al umbral entonces se considera que no ingresó agua al sistema.

La infiltración corresponde a la cantidad de agua que ingresa efectivamente al volumen de suelo durante los eventos de lluvia y depende de la lluvia neta (luego de considerar la interceptación) y la capacidad de almacenamiento disponible según el porcentaje de humedad o grado de saturación en el instante en que se inicia la lluvia, ya que si el suelo se encuentra saturado los excesos de agua pasan a formar la escorrentía superficial. El modelo no considera el efecto de la propagación temporal del frente húmedo en la superficie del suelo con lo cual la infiltración se expresa como.

$$\phi(s,t) = \min(nZ_r(1-S), R(t) - I(t)) \quad (32) \text{ Tomado de Laio, et al. (2001)}$$

Donde $R(t)$ es la tasa de lluvia, $I(t)$ la cantidad de lluvia perdida a través de la interceptación por la vegetación. El modelo considera los fenómenos de evaporación y transpiración de manera conjunta de tal manera que para niveles altos de humedad (relativos en función del tipo de vegetación) la planta estará en capacidad de efectuar con plena capacidad sus procesos fisiológicos, por lo que la evapotranspiración será igual a un valor máximo E_{max} correspondiente a la tasa media de evapotranspiración diaria sin restricción por la humedad del suelo, en el intervalo de humedad comprendido entre el grado de saturación por debajo del cual las plantas empiezan a cerrar sus estomas (S^*) y la saturación ($S=1$). Para niveles bajos de humedad, el proceso dependerá tanto del tipo de suelo como de la planta ya que cuando la humedad del suelo desciende por debajo de S^* y hasta el punto de marchitamiento (S_w), el valor de la evapotranspiración se considera con una variación lineal entre E_{max} y E_w (tasa media de evapotranspiración diaria cuando el grado de saturación es S_w). A partir de S_w y hasta el punto higroscópico S_h predominan los efectos de la evaporación y se contempla un comportamiento lineal entre E_w y 0 Laio, et al. (2001). Para representar este proceso se utiliza la siguiente expresión.

$$E(s) = \left\{ \begin{array}{l} E_w \frac{S - S_h}{S_h - S_w}; S_h < S < S_w \\ E_w + (E_{max} - E_w) \frac{S - S^*}{S^* - S_w}; S_w < S < S^* \\ E_{max}; S^* < S < 1 \end{array} \right\} \quad (33) \text{ Tomado de Laio, et al. (2001)}$$

Las pérdidas por percolación corresponden al flujo por gravedad en la superficie inferior del volumen de control hacia capas subyacentes del suelo, consideradas en el modelo con

comportamiento exponencial cuyo valor máximo es igual a la conductividad hidráulica K_s (cuando el suelo está saturado), decayendo hasta cero cuando la humedad es igual a la capacidad de campo (S_{fc}). La expresión utilizada para representar estas pérdidas es:

$$L(s) = \frac{K_s}{\left(e^{\beta(s-S_{fc})} - 1\right)} \left[\left(e^{\beta(s-S_{fc})} - 1\right) \right] \quad (34) \text{ Tomado de Laio, et al. (2001)}$$

Donde $L(s)$ es la tasa de percolación y β un parámetro adimensional que relaciona la humedad del suelo y la conductividad hidráulica cuando se utiliza una función exponencial.

3.4.3 DISCUSIÓN SOBRE LOS PROCESOS CONTEMPLADOS

Los modelos de humedad del suelo relacionados anteriormente constituyen una interpretación integral y una estrategia de modelación de la dinámica de humedad del suelo y su relación con la vegetación, sin embargo debe aclararse que dichos modelos realizan simplificaciones al modelar los procesos involucrados principalmente para facilitar su tratabilidad matemática.

La precipitación por ejemplo es incluida en los dos modelos mencionados como una serie de eventos puntuales en el tiempo continuo derivados de un proceso de Poisson, sin embargo esta no constituye la estrategia más aproximada al proceso real, para ello se pueden utilizar modelos de cantidad de lluvia caída, procesos de renovación alterna, de series de tiempo tipo ARMA, de remuestreo, de matriz de transacción de probabilidad, o de lluvia diaria condicional, sobre los cuales Srikanthan & McMahon (2001) presenta una amplia discusión.

Por otra parte la intercepción es vista en el modelo de Laio, et al. (2001) como un umbral, pero el proceso de retención de agua lluvia por la vegetación podría representarse de manera más cercana a como ocurre en la naturaleza al involucrar el proceso de saturación de las hojas, así como la evaporación que se dé en las mismas y respectivo almacenamiento de agua que puede darse tanto en los troncos como en las hojas los cuales han sido modelados analíticamente por Rutter, et al. (1972); Gash (1979); Gash, et al. (1995); Van Dijk & Bruijnzeel (2001), también se han desarrollado modelos que incluyen (además de los mencionados) procesos de flujo en los tallos y el tronco Pypker, et al. (2005), e incluso capaces de involucrar todo lo anterior en diferentes capas o franjas del árbol llegando a considerar los ángulos de los tallos y la resistencia de las hojas para soportar el almacenamiento de agua que se da en ellas Xiao, et al. (2000). Adicionalmente Muzylo, et al. (2009) presenta un recorrido por diferentes modelos de

intercepción que ilustran las múltiples mejoras que pueden darse a los modelos de dinámica de la humedad del suelo expuestos en el numeral anterior.

Como se ha mencionado el tipo de vegetación y su estructura afectan la cantidad de agua que efectivamente puede alcanzar el suelo y alterar la dinámica de humedad del mismo, no sólo reteniendo parte de la precipitación sino adicionando al balance de masa de agua a la llamada *lluvia horizontal o neblina* que transporta agua en el aire que puede incrementar el ingreso de agua cuando dicha masa de agua choca contra la vegetación, este efecto se puede ver altamente incrementado con la presencia de plantas vasculares y no vasculares adheridas al tronco y tallos de los arboles (plantas epifitas) al respecto Villegas, et al. (2007) presentan un modelo para involucrar el proceso de captura de niebla en el balance de masa de agua.

Los dos modelos relacionados en este numeral consideran la evaporación y la transpiración como un único proceso cuyo valor potencial o máximo puede ser determinado por medio de modelos teóricos como el de Penman-Monteith o mediante mediciones in situ, sin embargo la evaporación en si misma constituye un proceso complejo que involucra más factores y condiciones a las involucradas en el modelo de Penman-Monteith, aspectos sobre los cuales se discutirá en numerales posteriores. La transpiración también resulta ser un proceso de difícil modelación que puede ser más conveniente estudiar de manera separada a la evaporación, una alternativa para su modelación es involucrar aspectos de termodinámica de seres vivos permitiendo así incluir en las ecuaciones de balance conceptos como la energía libre de Gibbs y la entropía, Lehninger, et al. (2005) muestra como estas pueden ser determinadas para algunos procesos biológicos.

3.5 EVAPORACIÓN

La evaporación puede entenderse como un proceso de dos etapas que consiste primero en la transición de fase líquida a vapor en la interface líquido-vapor (vaporización), seguido de una segunda etapa en la que el vapor es transportado desde zonas de alta concentración hacia zonas de concentración baja IR Berdugo (2007). Fundamentalmente, la evaporación depende del déficit higrométrico, expresado por la ley de Dalton (1803) que dice: “la evaporación es proporcional a la diferencia entre la tensión de vapor a la temperatura del agua de la superficie evaporante y la tensión de vapor real de la atmósfera en ese instante, e inversamente proporcional a la presión atmosférica total, que es la suma de la presión atmosférica más la tensión de vapor”, lo que se puede expresar de la siguiente manera:

$$E = K(p_s - p_v); K = cte \quad (35) \text{ Dalton (1803)}$$

Donde E es la tasa de evaporación, (p_s) la presión de vapor saturado a la temperatura del agua y (p_v) la presión de vapor existente en el aire circundante, de tal forma que la presión de vapor depende tanto de la temperatura del agua como del aire, así mismo depende de la velocidad y turbulencia del viento, que al facilitar la renovación de masa de aire que recibe el vapor disminuyen su presión de vapor. De igual manera la pureza del agua afecta la presión de vapor (p_v) ya que esta decrece con el aumento de sólidos disueltos (a temperatura constante), es decir la evaporación es inversamente proporcional a la concentración de sólidos disueltos. De manera aproximada se ha estimado que un incremento del 1% en la concentración de sales disueltas genera un decremento aproximado del 1% en la evaporación Maderey & Jiménez (2005).

También se ha encontrado que la evaporación es inversamente proporcional a la presión atmosférica, y se dificulta o facilita en función del tipo de superficie evaporante, de tal forma que si se trata de una superficie libre se presentará el mínimo de dificultades, pero si la extensión y profundidad de la superficie son de baja magnitud el tipo de terreno y los cambios atmosféricos serán muy influyentes. Otra variable es la insolación ya que la evaporación necesita calor y este calor lo recibe el agua que se va a evaporar o el terreno saturado, tomándolo de otros cuerpos próximos (aire y otros objetos en contacto con el agua) que a su vez, lo reciben de la energía solar Aparicio Mijares (1994).

Según Díez (2008) la energía solar proviene de las partículas de alta energía y la radiación electromagnética irradiadas al espacio por el sol, e incide sobre la tierra y presenta un valor más o menos constante (1,731.014 kW), que se distribuye de tal forma que el 30% de la energía es reflejada por la atmósfera hacia el espacio exterior, el 47% se utiliza en calentar la atmósfera, el 23% se utiliza en la evaporación de los océanos y porcentajes muy pequeños en generar perturbaciones atmosféricas (como el viento), y permitir el proceso de fotosíntesis. De acuerdo con lo anterior el 47% de la energía solar alcanza la superficie terrestre ya que la demás energía es absorbida por la toposfera (15%), reflejada por las nubes (23%), reflejada por el suelo (7%), absorbida por la estratosfera (2%) y difundida por la atmósfera y dirigida hacia el cielo (6%).

Usualmente para determinar la evaporación se utilizan diferentes métodos basados en el balance hídrico, del balance energético, aerodinámico y de tanques de evaporación. De manera

análoga se han desarrollado métodos directos e indirectos para determinar la evapotranspiración, entre los métodos directos se cuenta con tanques (los más comunes son el tipo A, el tipo B y los de tipo doble), así mismo se tienen parcelas en el campo y estudios de humedad en el suelo. Otro instrumento de medición directa de evaporación son los lisímetros y evaporímetros en los cuales la medición está condicionada por las características meteorológicas de la atmósfera Israelsen & Hansen (1985). Entre los métodos indirectos se destacan las fórmulas de Blaney-Cridde (1950), J.E. Christiansen (1958), García y López (1968), H.L. Penman (1963), C.W. Thornthwaite (1944) y Jensen-Haise (1961), que en términos generales incluyen variables adicionales como: La humedad relativa, la radiación global, la velocidad del viento (a diferentes alturas), la duración de insolación, la elevación sobre el nivel del mar, la radiación solar y el brillo solar Israelsen & Hansen (1985); Quiñones (1997); Maderey & Jiménez (2005).

El estudio de la evaporación y su relación con el comportamiento mecánico del suelo requiere de la adecuada comprensión del proceso en cercanías de la superficie, para ello se presentan a continuación algunos conceptos de la capa límite atmosférica, balance energético y parametrización de la capa límite atmosférica.

3.5.1 ATMOSFERA BAJA Y CAPA LÍMITE ATMOSFÉRICA

En la atmósfera los cambios en el viento, temperatura, humedad y en general los procesos de transporte usualmente se presentan en el sentido vertical y en cercanías de la superficie, por lo cual el aire en vecindad con la superficie debe considerarse como una capa límite, de acuerdo a lo descrito por Prandtl (1904) en cuanto al transporte de momentum en cercanías de una superficie sólida. La *capa límite atmosférica* es definida por Brutsaert (1982) como "la parte más baja de la atmósfera donde la naturaleza y propiedades de la superficie afectan directamente la turbulencia", de manera similar Stull (1988) la define como "la parte de la tropósfera que está directamente influenciada por la presencia de la superficie del terreno y responde a los forzamientos de la superficie con una escala de tiempo de una hora o menos".

Los forzamientos de la superficie definidos por Stull (1988) incluyen entre otros el arrastre por fricción, la evaporación, evapotranspiración, transporte de calor, emisión de contaminantes, y cambios en los flujos inducidos al terreno. En la capa límite atmosférica cada uno de estos presenta variación temporal y espacial, por ejemplo la temperatura presenta valores y rangos de variación a lo largo del año muy diferentes según la cercanía a la superficie como lo muestra

Stull (1988), quien señala que los cambios a escala diaria se deben principalmente al enfriamiento o calentamiento de la superficie.

Por otra parte el flujo de aire puede dividirse en tres categorías: la media del flujo o del viento, las ondas y la turbulencia, cada uno de estos puede presentarse en la capa límite atmosférica de manera separada o en presencia de otros tipos. En dicha capa el transporte de cantidades como la humedad, el calor, el momentum, y los contaminantes se da en sentido horizontal y vertical. En sentido horizontal se da el transporte advectivo del cual la media del viento es responsable y cuya velocidad es del orden de 2 a 10 m/s, también se presenta la media del flujo en sentido vertical sin embargo la magnitud del mismo es del orden de milímetros a centímetros por segundo haciendo que esta sea menos significativa. El transporte en sentido vertical se debe principalmente a la turbulencia, mientras las ondas aportan poco en el transporte de las cantidades mencionadas pero resultan ser muy eficientes para el transporte de momentum y energía Stull (1988).

Una de las características que diferencia a la capa límite atmosférica del resto de la atmosfera es la alta frecuencia en que ocurre la turbulencia en cercanías de la superficie, que generalmente se visualiza como una serie de remolinos irregulares en movimiento que se conocen como "torbellinos" (*eddies*) los cuales presentan diferentes tamaños y normalmente se superponen conformando lo que se conoce como turbulencia. Dicho proceso es usualmente generado por los forzamientos del terreno, siendo varios órdenes de magnitud más efectivo en el transporte de cantidades (entre otros humedad, calor y momentum) que la difusión molecular. Normalmente este fenómeno es estudiado dividiendo la variable de interés (por ejemplo la temperatura o velocidad) en dos partes: la media y su perturbación, la aplicación de esta técnica a las ecuaciones de movimiento crea nuevos términos que consisten en productos de las variables de perturbación que describen la interacción no lineal entre las variables y están asociadas con la turbulencia Stull (1988).

La flotación es otra de las fuerzas que condiciona la turbulencia en la capa límite atmosférica, ya que el aire caliente se eleva porque es menos denso que el aire que lo rodea (creando flotación positiva), el vapor es menos denso que el aire seco y por tanto el aire no saturado presenta mayor flotación que el aire seco a la misma temperatura. Por otra parte la *temperatura*

virtual⁵ del aire no saturado es siempre superior a la temperatura absoluta del aire, pero es más denso que el aire seco generando que las nubes con aire húmedo sean menos flotantes que las nubes sin aire húmedo Stull (1988).

Se ha evidenciado que la capa límite atmosférica abarca desde algunos decimos de metros hasta dos kilómetros Stull (1988) y el aire incluido en la tropósfera por encima de dicha capa se le conoce como atmosfera libre, sin embargo dentro y bajo la capa límite atmosférica se pueden considerar otras capas, de las cuales la denominada *subcapa interfacial* resulta ser de especial interés para el estudio de los efectos de la evaporación en la mecánica de suelos. En la figura 18 se ilustran las subcapas de la capa límite atmosférica definidas por Brutsaert (1982).

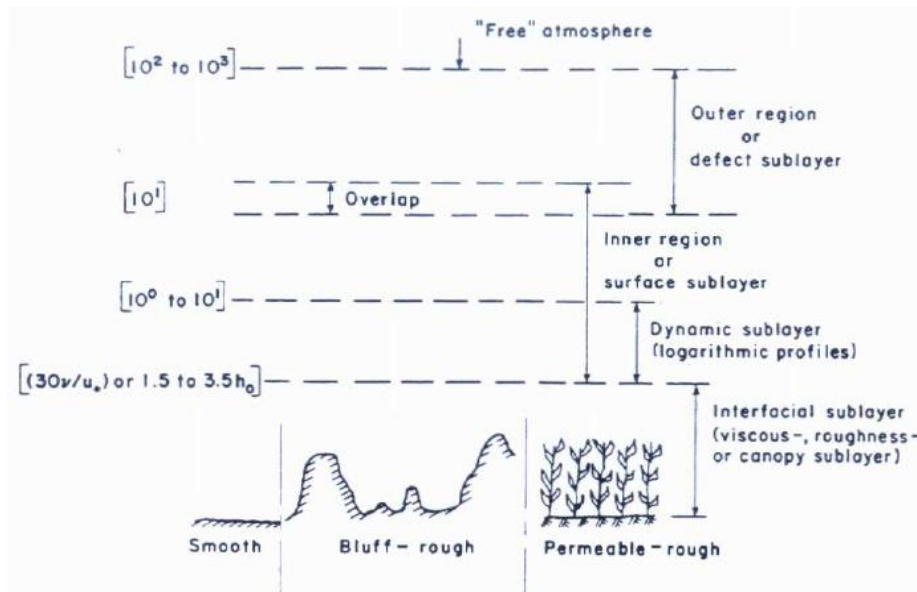


Figura 18. Representación esquemática de las subcapas de la capa límite atmosférica. En la figura se ilustra el orden de magnitud (en metros) de cada una de las capas, donde h_0 representa la altura típica de la rugosidad del obstáculo. Tomado de Brutsaert (1982).

La variación espacial de la capa límite atmosférica observada en la figura anterior también puede apreciarse en la escala temporal, al respecto Stull (1988) presenta para regiones de alta presión una clara estructura de la capa límite atmosférica ilustrando el ciclo diario de la variación de dicha estructura, para ello define tres componentes: la capa de mezcla (*mixed layer*), la capa residual (*residual layer*) y la capa límite estable (*stable boundary layer*), sobre las cuales presenta una amplia discusión. En la figura 19 se presenta el ciclo mencionado, mientras la figura 20 relaciona la escala temporal y espacial de algunos procesos atmosféricos.

⁵ La temperatura virtual usualmente denotada θ , corresponde a la temperatura que el aire seco debe tener para igualar la densidad del aire húmedo a la misma presión Stull (1988).

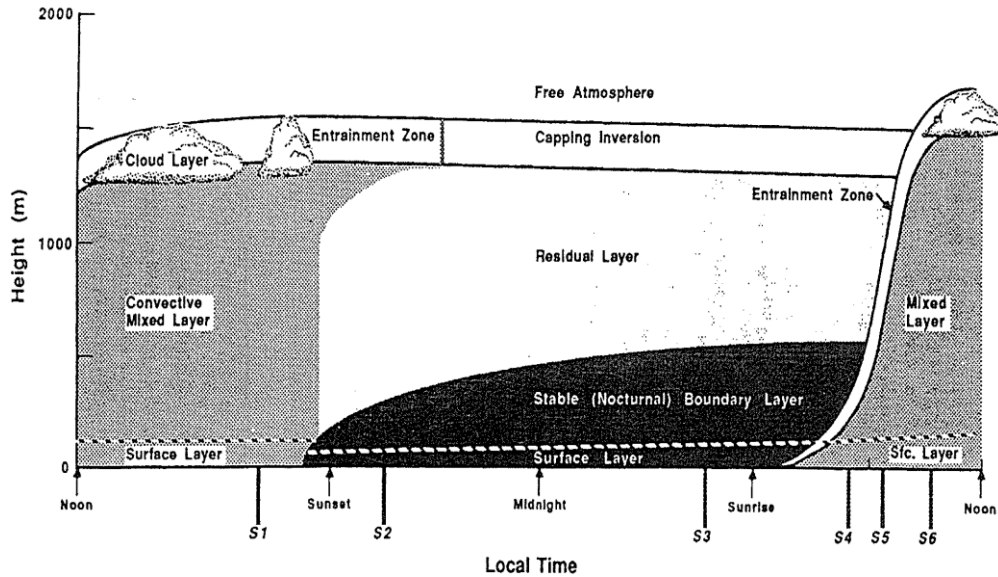


Figura 19. Estructura de la capa límite atmosférica para regiones de alta presión. En la figura se ilustra esquemáticamente los componentes de la capa límite atmosférica y su presencia según la hora del día de igual forma se presenta el orden de magnitud espacial y temporal de dichos componentes. Tomado de Stull (1988).

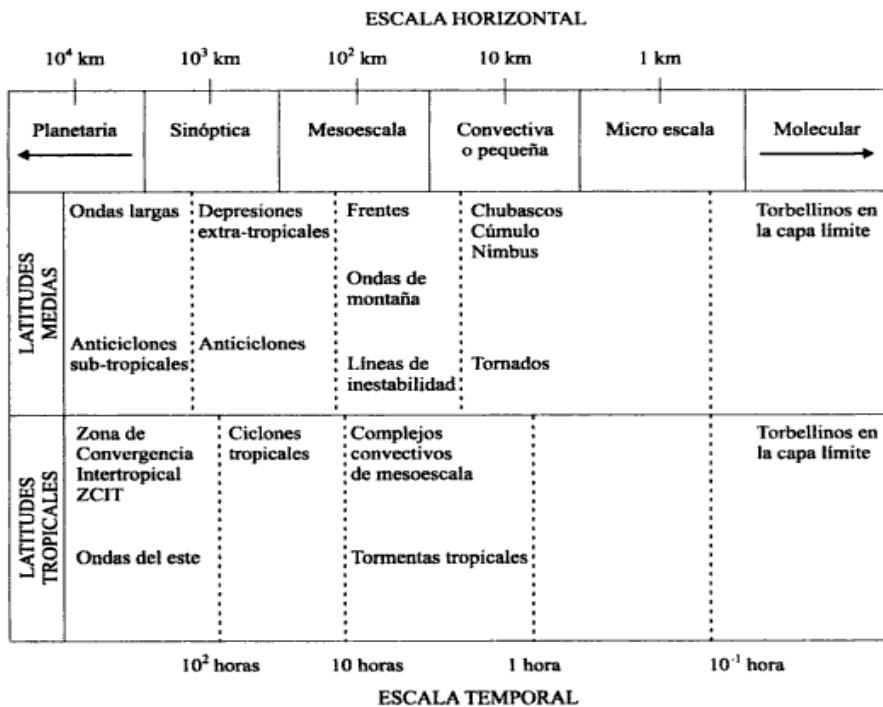


Figura 20. Escala temporal y espacial de algunos procesos atmosféricos. En la figura se relaciona para diferentes procesos atmosféricos su escala temporal y espacial, diferenciando los que ocurren en latitudes medias y tropicales. Tomado de Gaviria (2008).

Para calcular matemáticamente la evolución temporal del flujo atmosférico se utilizan los principios de conservación de masa, momentum y energía, los cuales usualmente son aplicados

a un volumen de control ubicado en la atmosfera que en coordenadas cartesianas corresponde a un diferencial cúbico, normalmente se realiza una aproximación Eulerina, se asume medio continuo, se consideran los flujos entrantes como el caudal por unidad de ancho y se aplican las series de Taylor para obtener el caudal de salida (haciendo una aproximación numérica de primer orden).

Como se mencionó anteriormente la turbulencia juega un papel importante en la baja atmosfera, por lo que debe ser incluida en las ecuaciones de conservación lo que se logra utilizando el método de promediado de Reynolds que consiste en dividir la variable de interés en la media y su perturbación Castro, et al. (1991). Aplicando lo mencionado se obtienen las expresiones que presentan a continuación:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (36) \text{ Tomado de Castro, et al. (1991)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = fV - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 U - \frac{\partial(\overline{u'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial z} \quad (37) \text{ Tomado de Castro, et al. (1991)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -fU - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 V - \frac{\partial(\overline{v'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{v'w'})}{\partial z} \quad (38) \text{ Tomado de Castro, et al. (1991)}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 W - \frac{\partial(\overline{w'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{w'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'w'})}{\partial z} \quad (39) \text{ Tomado de Castro, et al. (1991)}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} + W \frac{\partial \theta}{\partial z} = \alpha_h \nabla^2 \theta - \frac{\partial(\overline{\theta'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\theta'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{\theta'w'})}{\partial z} \quad (40) \text{ Tomado de Castro, et al. (1991)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + U \frac{\partial Q}{\partial x} + V \frac{\partial Q}{\partial y} + W \frac{\partial Q}{\partial z} = \alpha_v \nabla^2 Q - \frac{\partial(\overline{q'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{q'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{q'w'})}{\partial z} \quad (41) \text{ Tomado de Castro, et al. (1991)}$$

Donde u es la componente de velocidad del flujo en el sentido x , v la componente de velocidad del flujo en el sentido y , w la componente de velocidad del flujo en el sentido z , f el parámetro de Coriolis cuyo valor depende de la latitud geográfica, ρ la densidad, P la presión, ν la viscosidad cinemática, g la aceleración gravitatoria, θ la humedad específica, q el calor, α_h la difusividad térmica del agua del aire, α_v la difusividad térmica del vapor, y los términos con una barra encima (divergencia turbulenta de flujo) representan los promedios de los productos de dos componentes aleatorias de variables atmosféricas.

3.5.2 FLUJOS DE ENERGÍA EN LA SUPERFICIE DEL SUELO

El estudio de la evaporación y los flujos de calor hacia la atmosfera requieren de la adecuada comprensión y planteamiento del balance energético en la interacción suelo atmosfera, que depende de la naturaleza de la superficie ya que esta frontera o capa de contacto entre la atmosfera y el suelo puede consistir de una lámina de agua (lagos, estanques), o sustratos como el suelo, la vegetación, la nieve o el pavimento, sin embargo esta capa puede considerarse con un espesor infinitesimal. Brutsaert (1982) propone la siguiente expresión para el balance de energía en la capa de interacción atmosfera suelo.

$$R_n - L_e E - H + L_p F_p - G + A_h = \frac{\partial W}{\partial t} \quad (42) \text{ Tomado de Brutsaert (1982)}$$

Donde R_n es el flujo de radiación neta en la parte superior de la capa, L_e el calor latente de evaporación, E la evaporación, H el calor sensible, L_p el factor de conversión térmica por fijación de dióxido de carbono, F_p el flujo específico de CO_2 , G el flujo de energía específica que abandona el medio en la frontera inferior, A_h la advección de energía dentro de la capa expresada como un flujo específico, y $\partial W/\partial t$ es la tasa de energía almacenada por unidad de área de la capa. Cada uno de estos procesos puede presentar diferente naturaleza dependiendo de las condiciones de la superficie e incluso según el objeto y escala del estudio algunos pueden omitirse, aunque no se pretende presentar en detalle estos procesos a continuación si se realiza una descripción general de los mismos.

3.5.2.1 RADIACIÓN NETA

El sol aporta energía mediante la radiación sin embargo no toda esta alcanza el suelo, para establecer la energía que efectivamente entra al sistema se ha propuesto el termino *radiación neta* cuyo estudio se ha abordado dividiendo la radiación en varios componentes, en general se recomienda que la radiación neta siempre sea medida sin embargo se han establecido diferentes técnicas para su estimación, entre las cuales se resalta la expresión propuesta por Brutsaert (1982) para el cálculo de la misma.

$$R_n = R_s (1 - \alpha_s) + \varepsilon_s R_{ld} - R_{lu} \quad (43) \text{ Tomado de Brutsaert (1982)}$$

Donde R_n es la radiación neta, R_s la radiación de onda corta, α_s el albedo de la superficie, R_{ld} la radiación descendente de onda larga o radiación atmosférica, ε_s la emisividad de la superficie y R_{lu} la radiación ascendente de onda larga. Linacre (1967); Kondratyav (1969); Paltridge & Platt

(1977) presentan una amplia discusión sobre estos términos, así mismo Neitsch, et al. (2001) muestra una metodología para su cálculo, mientras este documento señala algunos aspectos básicos de estos componentes de la radiación neta.

La radiación de onda corta es el flujo de radiación que proviene directamente de la radiación solar y contiene la mayor parte de su energía en longitudes de onda entre 0.1 y 4 μm . Al pasar por la atmosfera la radiación solar es modificada por la dispersión, absorción y reflexión de diferentes tipos de moléculas y partículas coloidales, llevando a que la radiación de onda corta consista en radiación solar directa y radiación difusa del cielo. Por otra parte el albedo es la relación entre la radiación de onda corta reflejada y la radiación que incide, expresada en porcentaje, e incluye la porción difusiva de la radiación. La radiación reflejada (directa y difusiva) para gran parte de las superficies de la naturaleza depende de la dirección en que el rayo ingresa, por lo cual en días soleados el albedo dependerá de la altitud del sol sin embargo esta dependencia será menos relevante en la medida que la nubosidad aumenta, valores de albedo para varios tipos de superficie son presentados por Brutsaert (1982).

La radiación de onda larga es un flujo causado por la emisión de gases atmosféricos y de las superficies de la tierra bien sea agua o suelo, todos los materiales de la tierra tienen una temperatura inferior a la del sol por lo que la radiación que estos emiten tiene longitudes de onda muy superiores a la radiación del sol, en términos generales la radiación emitida por dichos materiales varía entre 4 y 100 μm Paltridge & Platt (1977); Brutsaert (1982). Como se ilustra en la ecuación 43 para cálculo de la radiación neta, resulta conveniente dividir la radiación de onda larga en dos componentes: la descendente desde la atmosfera (R_{ld}) y la ascendente desde el suelo (R_{lu}) la radiación ascendente de onda larga.

La radiación ascendente usualmente es estimada tras considerar la superficie del terreno (sea agua, vegetación o suelo) como un cuerpo gris de profundidad infinita cuya temperatura y emisividad es uniforme. Cuando la superficie se trata de agua generalmente se toma el valor de emisividad (ϵ_s) igual a 0.97, para otro tipo de superficies el valor de este parámetro no es bien conocido, sin embargo se ha encontrado que es cercano a la unidad por lo que usualmente se considera igual a 1, Brutsaert (1982) presenta valores de emisividad para algunos tipos de superficie.

La radiación de onda larga descendente proveniente de la atmosfera es usualmente estimada para condiciones de cielo despejado es decir sin nubes, y su cálculo requiere de datos del perfil vertical de humedad y temperatura. Dado que obtener esta información para el sitio de interés rara vez es viable, generalmente se recurre a expresiones que relacionan la radiación descendente con la temperatura y emisividad de la atmosfera de las cuales algunas son discutidas por Brutsaert (1982). Tanto la radiación de onda larga ascendente como la descendente deben ser corregidas por efecto de la nubosidad lo cual usualmente es realizado de dos maneras, la primera implica realizar ajustes en los valores de radiación o emisividad y la segunda consiste en corregir el valor de radiación neta, diferentes metodologías para ejecutar estas correcciones son discutidas por Brutsaert (1982); Stull (1988); Neitsch, et al. (2001).

3.5.2.2 CALOR LATENTE Y CALOR SENSIBLE

Para comprender el calor latente y calor sensible así como algunos términos y conceptos descritos en este capítulo es conveniente entender los potenciales termodinámicos asociados al agua, por lo que a continuación se presentan algunos conceptos de termodinámica. En apartes anteriores se ilustra la utilidad de magnitudes como la energía libre de Helmholtz y la energía libre de Gibbs, la primera hace referencia a la máxima energía que puede liberarse y utilizarse como trabajo en un sistema reversible a temperatura y volumen constante, mientras la segunda corresponde a la máxima energía que puede liberarse y utilizarse como trabajo en un sistema reversible a temperatura y presión constante, una discusión sobre estas magnitudes y expresiones para el caso de gases ideales es presentada por Sears & Salinger (1980).

A partir de dichos potenciales y bajo la consideración de un sistema cerrado es decir un sistema en el cual no hay intercambio de materia con el exterior se definen los llamados potenciales termodinámicos que constituyen derivadas parciales de la energía interna, entalpia, energía libre de Helmholtz y energía libre de Gibbs, dichos potenciales resultan importantes ya que estos permiten establecer las relaciones de Maxwell a través de las cuales se obtienen expresiones para la entropía en función de la presión, el volumen y la temperatura, Sears & Salinger (1980) presenta una amplia discusión sobre los potenciales termodinámicos. En la atmosfera estos potenciales permiten la estimación del calor específico a presión constante (C_P), calor específico a volumen constante (C_V) y la temperatura potencial (θ), cuyas expresiones se presentan a continuación.

$$C_V \equiv \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V \quad (44) \text{ Tomado de Weare (1988)}$$

$$C_p \equiv \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (45) \text{ Tomado de Weare (1988)}$$

$$\theta = T \left(\frac{1000}{P} \right)^{R/C_p} \quad (46) \text{ Tomado de Weare (1988)}$$

Donde u es la energía interna, q el calor, h la entalpia, v el volumen, p la presión (todas en unidades intensivas), T la temperatura y R la constante de masa específica para el constituyente del sistema. Las propiedades termodinámicas son de gran importancia para la comprensión del calor latente y calor sensible, ya que como se mostró estas permiten conocer asociar la entropía y otras magnitudes con la presión, temperatura y volumen, que se encuentran ligadas con los cambios de fase, Sears & Salinger (1980) discute estos procesos para diferentes materiales. Para el caso del agua pura se ha estudiado la relación presión-volumen-temperatura encontrando las relaciones que se ilustran en la figura 21.

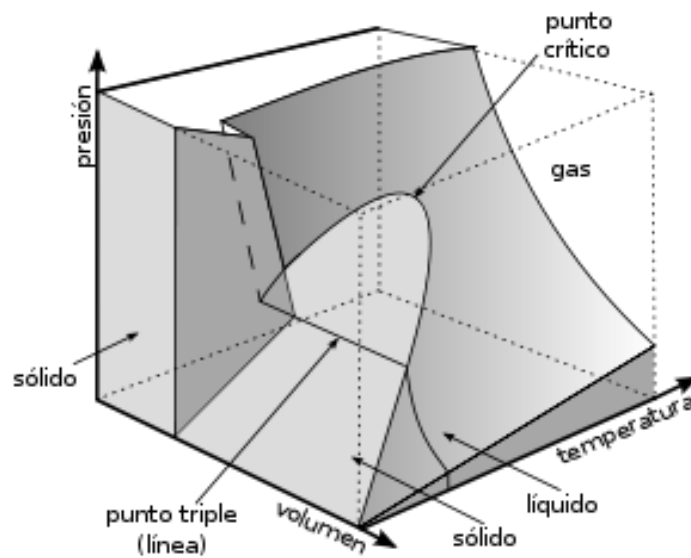


Figura 21. Superficie presión-volumen-temperatura para el agua. En la figura se aprecia de manera esquemática las múltiples combinaciones de las variables de estado (presión, volumen y temperatura) que permiten la presencia del agua en estado sólido, líquido o gaseoso. Adaptado de Case (1994)

En la figura se evidencia que el estado del fluido es dependiente de la magnitud de las variables mencionadas, así mismo se muestra que a presión atmosférica los cambios de temperatura son altamente incidentes sobre el estado del fluido permitiendo así visualizar su impacto en el proceso de evaporación. La transición de fase líquida a vapor se denomina transición de primer orden en la cual la función de Gibbs es continua a través de la transición pero su primera derivada no lo es, en algunas transiciones de fase la primera derivada puede ser una función continua pero ello implica que el calor latente de transformación es cero y el volumen específico

no cambia, de tal forma que el calor específico a presión constante (C_p) debe ser diferente para ambas fases, lo cual en el caso del agua sólo ocurre cuando el proceso se da en el punto crítico Sears & Salinger (1980).

Sears & Salinger (1980) define el calor latente como "la razón de calor absorbido a la masa que experimenta el cambio de fase", el calor latente de todo cambio de fase varía con la temperatura, para el caso del agua el cambio siempre será positivo, y el volumen específico de la fase sólida es superior al de la fase líquida, lo que causa que la superficie P-V-T del agua sea diferente a la de las sustancias que se contraen al solidificarse, mientras el volumen específico de la fase vapor es superior al de la fase líquida o sólida para toda sustancia. De manera aproximada el calor latente a cualquier temperatura puede ser determinado a partir de mediciones de las presiones de equilibrio a dos temperaturas cercanas si se conocen los volúmenes específicos correspondientes, usualmente para dichas estimaciones se considera el vapor como un gas ideal Sears & Salinger (1980). El calor latente hace parte de la expresión de Clausius-Clapeyron cuya importancia radica en que describe la forma como la presión cambia con la temperatura en un sistema conformado por dos fases en equilibrio, al respecto Sears & Salinger (1980) presenta una discusión en términos genéricos, mientras Brutsaert (1982); Stull (1988) lo hace para el proceso de evaporación.

Por otra parte el calor sensible responde a aquel requerido para incrementar o disminuir la temperatura de un cuerpo, su nombre debe a que dicha variación en la temperatura puede ser percibida y medida directamente. La magnitud del calor sensible depende en términos generales del cambio en la temperatura, la masa del cuerpo y su calor específico que varía según el proceso se realice a presión o volumen constante, Brutsaert (1982); Stull (1988); Castro, et al. (1991) presentan discusiones sobre esta magnitud y expresiones para su estimación.

3.5.2.3 ABSORCIÓN DE ENERGÍA POR FOTOSÍNTESIS

En la ecuación de balance de energía se incluye el flujo específico de CO_2 (F_p) y el factor de conversión térmica por fijación de dióxido de carbono (L_p) cuyo producto representa la energía adsorbida por el proceso de fotosíntesis, usualmente este término no es incluido en el balance de energía ya que en condiciones favorables puede alcanzar hasta un 5% de la radiación neta y en general su valor es inferior al 1% de la misma, sin embargo la vinculación de este término puede ser de interés para los estudiantes e investigadores de ecohidrología y en general

cualquiera interesado en el estudio de la energía absorbida en el procesos de fotosíntesis. Este documento no profundiza en el tema, para ello se recomienda la lectura de Lehninger, et al. (2005) en la que se muestra como estimar la energía libre de Gibbs y la entropía para algunos procesos biológicos cuya inclusión en las ecuaciones de balance de energía podría ser útil para la determinación de la energía absorbida por el proceso de fotosíntesis.

3.5.2.4 FLUJO DE ENERGÍA EN LA FRONTERA INFERIOR

En este numeral se presentan algunos aspectos básicos del flujo de energía específica que abandona el medio en la frontera inferior (G), que en esencia es altamente dependiente del tipo de superficie y por tanto su correcta estimación requiere incluir en el balance energético las consideraciones adecuadas según la superficie sea el mar, una corriente de agua, una laguna, el suelo, la vegetación, o una combinación de las mismas. Aunque no se discuten estas condiciones a continuación se presentan algunos aspectos básicos para la determinación de este flujo de energía.

Brutsaert (1982) señala que si la superficie se trata de suelo cubierto por vegetación la magnitud del flujo de calor en el suelo suele ser uno o más órdenes de magnitud inferior a la de otros términos de la ecuación de conservación de energía, como son la radiación neta (R_n), el producto del calor latente de evaporación y la evaporación ($E \cdot L_e$), y el calor sensible (H), sin embargo esto depende de la escala temporal en que se realice el balance ya que en periodos cortos el efecto del flujo de calor en el suelo puede ser de gran importancia para el balance energético. En la figura 22 se presenta la variación espacial (en sentido vertical) y temporal (a lo largo de un día) de la temperatura en la atmosfera baja y los primeros metros del suelo.

El transporte de calor en el suelo se da por conducción⁶, convección⁷ y radiación⁸, de los cuales el mecanismo principal es la conducción por lo que generalmente se elige este fenómeno para describir el proceso de transporte, para ello se utiliza la ley de Fourier que implica la obtención de la conductividad térmica (K_T), ya que el transporte de calor también contiene el movimiento de vapor la conductividad térmica debe ser relacionada con la capacidad volumétrica de calor

⁶ La conducción es la transferencia de la energía de las partículas más energéticas de un suelo hacia las adyacentes menos energéticas Fábrega & Galeano (2010).

⁷ La convección es la transferencia de energía entre una superficie sólida y el líquido o gas adyacentes que están en movimiento y comprende los efectos combinados de la conducción y el movimiento de fluidos Fábrega & Galeano (2010).

⁸ La radiación es la energía emitida por los cuerpos debido a su temperatura y constituye un fenómeno volumétrico, donde se absorbe o se transmite energía Fábrega & Galeano (2010).

del suelo (C_s), lo que usualmente se logra utilizando la difusividad térmica (D_T) que permite involucrar la variación por temperatura y profundidad Brutsaert (1982).

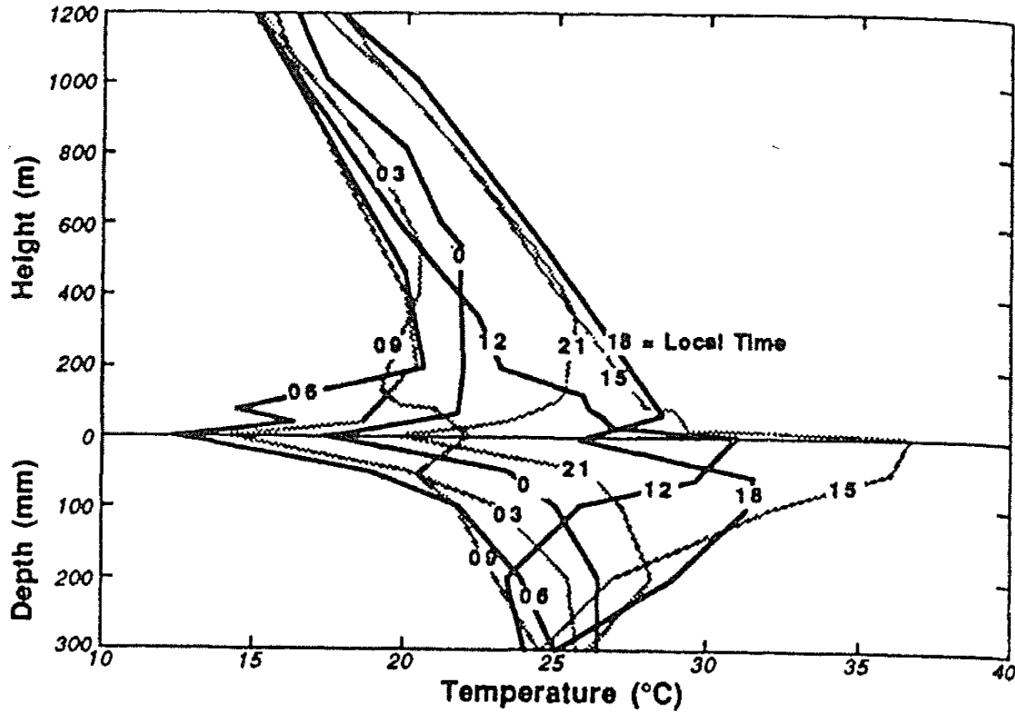


Figura 22. Variación espacial y temporal de la temperatura en la atmósfera baja y los primeros metros del suelo.

La figura ilustra para la atmósfera baja (0 a 1200m de altura) y para los primeros 3m del suelo (en profundidad) el valor medio de mediciones del perfil de temperatura realizadas a lo largo de tres días. Los números sobre las líneas indican la hora a la que corresponde la medición, para la zona por encima del suelo la altura está en metros (m) mientras en el suelo la profundidad está dada en milímetros (mm). Tomado de Stull (1988).

La capacidad volumétrica de calor del suelo (C_s) depende de la densidad y del calor específico; ya que el suelo constituye una mezcla de suelo mineral, materia orgánica, agua y aire, la determinación de su capacidad volumétrica de calor requiere conocer la fracción o contenido volumétrico, densidad y calor específico de cada uno de los componentes. Brutsaert (1982) presenta una expresión y valores típicos para el cálculo de la capacidad volumétrica de calor del suelo. Por otra parte la conductividad térmica (K_T) resulta ser de difícil obtención ya que el suelo en estado natural rara vez es homogéneo y usualmente es complicado reproducir su estructura en las muestras del tamaño requeridas para los ensayos de laboratorio, por lo cual generalmente esta propiedad es medida *in situ*. Lo anterior no implica que su estudio se haya limitado a mediciones de campo, de hecho se han reportado diferentes mediciones de laboratorio que muestran como la conductividad térmica puede verse altamente afectada por el grado de saturación y es totalmente dependiente del tipo de suelo, en la figura 23 se presentan algunos resultados mostrados por Brutsaert (1982).

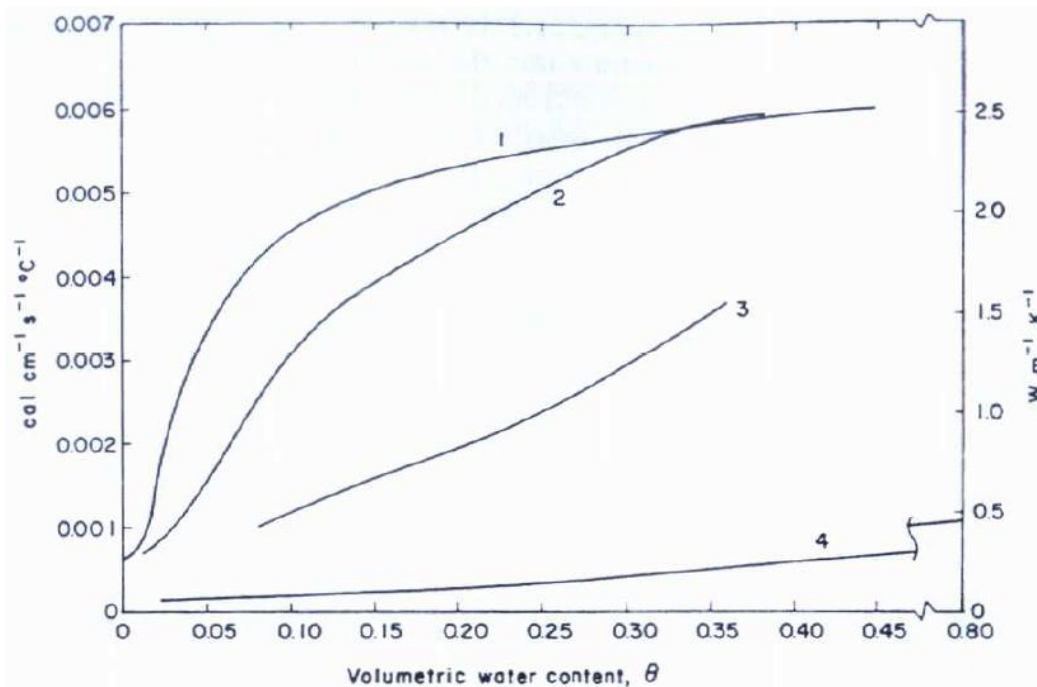


Figura 23. Conductividad térmica (K_T) en función del contenido volumétrico de agua. Se muestra para cuatro tipos de suelo el valor de conductividad térmica en función del contenido volumétrico de agua. La curva 1 presenta resultados de laboratorio sobre una arena cuarzosa con porosidad igual a 0.43 (De Vries, 1963), en la curva 2 datos de laboratorio sobre una arena limosa con 0.38 de porosidad (Moench and Evans, 1970), la curva 3 representa la media de datos de campo tomados en un limo de porosidad igual a 0.41 (Kimball et al, 1976), la 4 corresponde a datos de laboratorio de una turba con porosidad de 0.8 (Kersten, 1948). Tomado de Brutsaert (1982).

La difusividad térmica puede ser obtenida una vez que tanto la capacidad volumétrica de calor del suelo como la conductividad térmica son determinadas, sin embargo en los casos en que el balance de energía involucra la propagación anual de ondas térmicas es conveniente resolver la ecuación diferencial que relaciona el cambio de la temperatura en función del tiempo con el cambio de la temperatura en función de la profundidad, en cuyo caso la difusividad térmica se asume constante. Dado que tanto la capacidad volumétrica de calor como la conductividad térmica pueden presentar variaciones la alternativa anterior no siempre es la más conveniente por lo cual se han desarrollado otras formulaciones para el cálculo del coeficiente de difusividad térmica, algunas de las cuales son discutidas por Brutsaert (1982).

Una vez establecidos estos parámetros es posible determinar el flujo de calor a través del método del gradiente de temperatura, calorimetría del suelo, relaciones empíricas o soluciones analíticas las cuales sólo aplican para casos especiales o simplificados, algunas de las expresiones requeridas fueron discutidas en el numeral 3.3 (Principios físicos del flujo en medios porosos) y de igual forma pueden consultarse en Deardorff (1978); Brutsaert (1982);

Stull (1988); Fábrega & Galeano (2010). El flujo de calor en el suelo puede ser medido *in situ* mediante placas de flujo de calor, que deben ser calibradas para poder relacionar la conducción de calor sobre la placa con el flujo de calor en el suelo de los alrededores de la placa, usualmente estas placas son introducidas en el suelo entre 5 y 10cm para evitar errores de medición causado por la heterogeneidad del suelo.

3.5.2.5 ADVECCIÓN DE ENERGÍA

Este término de la ecuación de balance de energía abarca toda la energía que pueda entrar o salir del sistema por advección, generalmente por el flujo de agua, en este sentido la precipitación constituye una entrada de energía al sistema y es un proceso importante de transporte advectivo en sentido vertical, especialmente si la superficie está cubierta por nieve. De igual forma la nieve es un flujo de ingreso de energía en dirección vertical cuya importancia puede ser alta en lagos especialmente si el agua tiene temperaturas superiores a las del aire a su alrededor. Según Brutsaert (1982) el transporte advectivo en sentido horizontal probablemente sólo sea importante si se realiza el balance energético para todo un lago, el mismo autor considera que el flujo advectivo que se puede generar por la evaporación y la percolación profunda tienen magnitudes poco relevantes en el balance energético.

3.5.2.6 CAMBIO EN LA ENERGÍA ALMACENADA

El último término de la ecuación de balance de energía es la tasa de energía almacenada por unidad de área de la capa ($\partial W/\partial t$) el cual suele ser omitido del balance en los casos en que la capa sea considerada muy delgada, sin embargo cuando la superficie está cubierta por vegetación alta el cambio en el almacenamiento resulta ser importante durante el amanecer y cerca del atardecer momentos en que puede alcanzar valores cercanos a la radiación neta, aun así el término es usualmente omitido. Si la superficie está cubierta por nieve la magnitud del cambio de almacenamiento de energía será menos importante pero puede afectar el balance, sin embargo usualmente se omite ya que resulta muy difícil su estimación dadas las propiedades de la nieve. En lagos u océanos se ha encontrado que este término puede ser significativo, y su estimación se ha realizado por mediciones continuas del perfil de temperatura Brutsaert (1982).

4 MODELO CONCEPTUAL

En esta sección se describen los aspectos relevantes para la estructuración de modelos conceptuales, presentando lineamientos para el desarrollo de los mismos. En términos generales un modelo conceptual abarca la definición del volumen de control y sus señales, la caracterización del sistema, las variables y las señales, así como el análisis de escala de las mismas Obregón (2006). El contenido de este capítulo se centra exclusivamente en el fenómeno de interacción suelo-atmosfera y más específicamente en el proceso de evaporación acoplado con el comportamiento mecánico de los suelos, sin embargo los conceptos ilustrados pueden ser extendidos a otros procesos.

A continuación se describen los elementos generales de un modelo conceptual según lo descrito en la discusión sobre el estado del conocimiento y lo expuesto en los modelos termo-hidro-mecánicos (THM) desarrollados por A Gens & Olivella (2001) y Schrefler (2002).

4.1 CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA

Caracterizar un sistema implica establecer el volumen de control, las propiedades del sistema, sus funciones de transferencia y sus señales que en términos generales pueden ser clasificadas en señales de entrada, señales de salida y funciones de *feedback* (retroalimentación), cuyas características dependen del volumen de control Obregón (2006).

El volumen de control constituye una región del sistema a ser analizado, usualmente es formado por el espacio delimitado por una superficie de control cerrada (real o virtualmente), donde generalmente se considera la permanencia de la forma y el tamaño del volumen delimitado. Su definición debe ser realizada con precaución ya que dependiendo de los límites del volumen de control es posible que algunos procesos sean incluidos o excluidos del análisis.

En el marco del estudio de la interacción entre la evaporación y el suelo, el volumen de control puede abarcar sólo el suelo A Gens & Olivella (2001); Schrefler (2002), el suelo y unos milímetros por encima de la superficie Eagleson (1978a); Entekhabi, et al. (1996); Rodriguez-Iturbe, et al. (2001), la atmosfera y unos milímetros por debajo de la superficie Brutsaert (1982), o el suelo y la atmosfera Gusev & Nasonova (1998).

El volumen de control no sólo limita los procesos a analizar sino las fases y especies involucradas, aunque las últimas también se ven afectadas por los procesos considerados, por ejemplo en el suelo la fase sólida puede incluir el hielo si el modelo contiene la congelación del agua, o las especies químicas si se consideran las reacciones químicas que se puedan dar en el suelo. En la tabla 2 se relaciona para diferentes modelos el volumen de control, las fases y especies consideradas.

Tabla 2 Volumen de control, fases y especies consideradas en algunos modelos.

Modelo	Volumen de control	Fases – Especies						
		Sólida		Líquida			Gas	
		Mineral	Especies químicas	Hielo	Agua	Aire	Vapor de agua	Aire seco
Atmosféricos	Atmosfera	No	No	No	No	No	Si	Si
Humedad del suelo	Suelo y unos milímetros por encima de la superficie	Si	No	No	Si	Si	No	No
THM Schrefler, B. (2002)	Suelo	Si	No	No	Si	Si	Si	Si
THM Gens, A., & Olivella, S. (2001)	Suelo	Si	No	No	Si	Si	Si	Si
THMC Gens, A. (2010)	Suelo	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
Capa límite atmosférica	Atmosfera y unos milímetros por debajo de la superficie	No	No	No	No	No	Si	Si

Las propiedades de un sistema pueden ser caracterizadas para el sistema en sí mismo o para alguna fase o especie considerada en el modelo. Cabe recalcar que el tipo de propiedades requeridas y el número de las mismas puede verse ampliamente incrementado según el tipo y cantidad de señales que sean consideradas.

Lo anterior implica que resulta muy importante establecer la observabilidad y controlabilidad de las mismas para poder definir cuáles son parametrizables y así mismo cuáles pueden ser medidas y cuáles es conveniente que sean definidas por el modelo. En la tabla 3 se relacionan algunas propiedades de los sistemas suelo y atmosfera, en ella se indica la especie y fase en que la propiedad aplica.

Para aquellas que deban ser definidas por el modelo será necesario determinar sus relaciones constitutivas, que pueden ser parte de las denominadas funciones de transferencia. Dado que en el proceso de interacción suelo atmósfera se suelen utilizar modelos de *caja blanca* es decir basados en la física, usualmente estas relaciones constitutivas son determinadas a partir de leyes físicas o relaciones obtenidas de la experimentación, en la tabla 4 se presentan algunas de las funciones de transferencia usualmente utilizadas.

Tabla 3 Propiedades de algunos sistemas.

Propiedad	Sistema									
	Suelo						Atmosfera			
	Medio poroso	Mineral	Especies químicas	Hielo	Agua	Aire	Vapor de agua	Aire	Aire Húmedo	Aire seco
Densidad	x	X		x	x	x	x	x	x	x
Temperatura	x	X	x	x	x	x	x	x	x	x
Masa		X		x	x	x	x	x	x	x
Porosidad	x									
Permeabilidad	x									
Viscosidad					x	x		x		
Numero de moles		X	x	x	x	x	x		x	x
Potencial químico			x				x			
Concentración			x				x		x	
Conductividad térmica	x							x		
Difusividad térmica			x				x		x	x
Presión					x	x	x	x	x	x
Humedad	x							x		

Tabla 4 Algunas funciones de transferencia.

Funciones de transferencia	Sistema	
	Suelo	Atmosfera
Ley de Darcy	x	x
Ley de los gases	x	x
Ley de Fourier	x	x
Ley de Fick	x	x
Ley de Henry	x	x
Ley psicométrica	x	x
Relaciones permeabilidad humedad	x	
Relaciones succión contenido de humedad	x	
Modelos reológicos	x	x
Modelos constitutivos	x	
Relaciones densidad temperatura	x	x
Relaciones de fase	x	
Principio de Clausius-Clayperion		x
Principio de Prandtl		x

Las señales de entrada, salida y funciones de retroalimentación usualmente se ven representadas por variables, sin embargo es importante tener presente que estas son producto de diferentes procesos, por lo cual resulta fundamental establecer la naturaleza lineal y/o no lineal de las señales al igual que el carácter determinístico o estocástico de las mismas, ello implica un conocimiento adecuado de los procesos y las expresiones establecidas para su estudio.

En el fenómeno de interacción suelo atmosfera participan una gran cantidad de procesos (como se presentó en capítulo anterior) cada uno de ellos constituyendo un flujo de entrada o salida al sistema, sin embargo y como se mencionó anteriormente la definición del volumen de control trae consigo el determinar las fronteras del mismo causando que algunos flujos no se presenten o cambien de sentido, por ejemplo los modelos de humedad del suelo consideran como

volumen de control el suelo y unos milímetros por encima de la superficie para así involucrar los procesos de evaporación, precipitación, infiltración y escorrentía superficial entre otros. Dependiendo del sistema analizado una determinada función puede ser de entrada o salida, ello se ilustra en la tabla 5.

Tabla 5 Algunas funciones de entrada y salida

Funciones	Sistema	
	Suelo	Atmosfera
Evaporación	Entrada	Salida
Precipitación	N/A	Entrada
Escorrentía superficial	N/A	Salida
Intercepción	N/A	Salida
Infiltración	Entrada	Salida
Percolación	Salida	N/A
Radiación	N/A	Entrada
Flujo de energía hacia el suelo	Entrada	Salida
Flujo de energía desde el suelo	Salida	Entrada
Calor latente	Salida	Salida
Calor sensible	Salida	Salida
Transporte advectivo	Entrada/Salida	Entrada/Salida
Transporte difusivo	Entrada/Salida	Entrada/Salida
Transporte reactivo	Entrada/Salida	Entrada/Salida

Para el planteamiento de modelos matemáticos usualmente los fenómenos de interacción suelo atmosfera integran los conceptos mencionados mediante modelos de caja blanca, tras considerar los principios de conservación de masa, momentum y energía, siendo este último establecido a partir de la primera y segunda ley de la termodinámica que resultan ser de gran utilidad para acoplar el comportamiento mecánico de materiales térreos con los procesos atmosféricos.

En los modelos de mecánica de suelos, en términos generales se aplican las ecuaciones de conservación de masa para las diferentes especies contenidas en cada fase analizada, y el principio de conservación de momentum para la totalidad del medio poroso. Para cerrar el sistema usualmente se recurre a modelos constitutivos cuya cantidad depende directamente del número de fases y especies consideradas, usualmente estos modelos consisten en expresiones para el flujo de masa de cada especie (generalmente aplicando la ley de Darcy o la ley Fick) y relaciones esfuerzo deformación que constituyen una amplia gama de modelos constitutivos que pueden ser lineales, elásticos, plásticos, elastoplásticos, viscosos, viscoplásticos, y así mismo incluir procesos de endurecimiento, dilatancia, e incluso estar acoplados con el flujo de agua y los efectos del cambio de humedad y succión del material Lade (2005). Un ejemplo de lo anterior es la teoría de consolidación cuyo modelo conceptual y matemático es ilustrado en A. Gens (2010).

En los modelos atmosféricos también se recurre al principio de conservación de masa aplicado a las diferentes especies contenidas en cada fase analizada, y de igual forma se toma especial interés en los principios de conservación de momentum que usualmente son aplicados en las tres dimensiones. Adicionalmente y en especial los modelos de la capa límite atmosférica requieren la inclusión de procesos de transporte turbulento que adhieren a las ecuaciones de conservación de momentum mayor complejidad y número de modelos constitutivos a utilizar. A diferencia del caso de la teoría de consolidación, usualmente los modelos atmosféricos no logran ser cerrados con las ecuaciones de conservación (de masa y momentum) y modelos constitutivos, ya que aunque existe un amplio desarrollo de los últimos y una amplia variedad de técnicas de parametrización de las señales de entrada Brutsaert (1982), los efectos termodinámicos son de amplia importancia en este tipo de sistemas, especialmente para la inclusión de los procesos de evaporación, sublimación y en general de cambio de estado.

Tabla 6 Principios de conservación para algunos modelos TMH

Modelo	Principio de Conservación		
	Masa	Momentum	Energía
THM Gens, A., & Olivella, S. (2001)	Mineral	Del medio poroso, sin términos inerciales	Interna de la fase sólida
	Agua		Interna de la fase líquida
	Aire		Interna de la fase gaseosa
THMC Gens, A. (2010)	Mineral	Del medio poroso	Interna de la fase sólida
	Agua	Sin términos inerciales	Interna de la fase líquida
	Aire		Interna de la fase gaseosa
THM Schrefler, B. (2002)	Sustancia química	Macroscópico incluyendo las interfaces para cada fase	Energía libre de Gibbs
	Mineral macroscópico incluyendo las interfaces		Interna de la fase sólida
	Mineral microscópico		Interna de la fase líquida
	Agua macroscópico incluyendo las interfaces		Interna de la fase gaseosa
	Agua microscópico		Energía libre de Gibbs para cada fase
Aire macroscópico incluyendo las interfaces	Microscópico para cada fase	Entropía para cada fase	
Aire microscópico		Entropía del sistema	

La inclusión de los procesos de cambio de estado o fase, bien sea en el suelo o la atmósfera normalmente obliga a incluir las ecuaciones de conservación de energía, usualmente aplicando el primer y segundo principio de la termodinámica, así como las expresiones para los potenciales termodinámicos, forzando la caracterización de un mayor número de propiedades, funciones de transferencia y señales para cada sistema. Esta necesidad también puede generarse en el caso de querer involucrar procesos de transporte reactivo como son el transporte de solutos, el flujo de contaminantes y las reacciones químicas, todos ellos de posible ocurrencia tanto en el suelo como en la atmósfera. En la tabla 6 se relaciona para diferentes modelos los principios de conservación utilizados, indicando las fases y especies sobre las que se aplican.

4.2 MODELO THM DE A. GENS Y OLIVELLA (2001)

El modelo termo-hidro-mecánico (THM) de A Gens & Olivella (2001) se desarrolla en un sistema cuyo volumen de control abarca una fracción de suelo, en el cual se consideran tres fases, la fase sólida compuesta por especies minerales, la fase líquida por aire y agua, y la fase gaseosa por vapor de agua y aire. El sistema está sometido a transporte advectivo de agua y gas, transporte difusivo de vapor de agua y de aire disuelto en el agua, dependencia de las deformaciones a los cambios de esfuerzos, succión y temperatura, conducción y advección de calor para las tres fases y los cambios de fase. El sistema es analizado mediante los principios de conservación (masa, momentum y energía), ecuaciones constitutivas y restricciones de equilibrio. A continuación se describen las consideraciones y se analizan dichos principios en este modelo, así mismo en el anexo 2 se presenta la deducción de algunas expresiones.

4.2.1 CONSERVACIÓN DE MASA

Las ecuaciones de conservación de masa son aplicadas para cada especie en vez de cada fase, de tal forma que el total es obtenido al sumar las ecuaciones de las fases para cada especie, permitiendo así que los términos de cambio de fase sean anulados A Gens & Olivella (2001). La deducción de las ecuaciones de balance se realiza a nivel macroscópico, considerando medio continuo, bajo aproximación euleriana y utilizando series de Taylor de primer orden, obteniendo las siguientes expresiones:

Para masa de mineral:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta_s(1-\phi)) + \nabla j_s = 0 \quad (47) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

Para masa de agua:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) + \nabla(j_L^w + j_g^w) = f^w \quad (48) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

Para masa de aire:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) + \nabla(j_L^a + j_g^a) = f^a \quad (49) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

Donde ϕ es la porosidad, θ_s la masa de sólido por unidad de volumen en fase sólida, θ_L^w la masa de agua por unidad de volumen en fase líquida, θ_g^w masa de agua por unidad de volumen en fase gaseosa, θ_L^a masa de aire por unidad de volumen en fase líquida, θ_g^a la masa de aire por unidad de volumen en fase gaseosa, S_L el volumen de líquido por unidad de volumen de vacíos, S_g el volumen de gas por unidad de volumen de vacíos, j_s el flujo total de mineral en la fase sólida, j_L^w el flujo total de agua en la fase líquida, j_g^w el flujo total de agua en la fase gaseosa, j_L^a el flujo total de aire en la fase líquida, j_g^a el flujo total de aire en la fase gaseosa, f^w y f^a hacen referencia a la fuente o sumidero de agua y aire respectivamente.

El volumen de líquido por unidad de volumen de vacíos (S_L) y el volumen de gas por unidad de volumen de vacíos (S_g), están relacionados por las denominadas relaciones de fase que básicamente consideran que el volumen total es igual al volumen de la fase sólida más el volumen de vacíos, donde el volumen de vacíos es la suma del volumen de la fase líquida y el volumen de la fase gaseosa.

Por otra parte los términos j'_π correspondientes a los flujos totales con respecto a la fase sólida, consideran el transporte advectivo y no advectivo de la especie en la fase analizada, el primero es incluido mediante la ley de Darcy y para el segundo se utiliza la ley de Fick. Aplicar la ley de Darcy requiere definir la permeabilidad tanto para la fase líquida como para la sólida (K_L y K_g), sin embargo estas dependen de la permeabilidad intrínseca (k), la permeabilidad relativa (k_{rL} y k_{rG}) y la viscosidad dinámica (μ_L y μ_g). La ley de Darcy también involucra la presión del líquido (P_L), la presión del gas (P_g), la densidad del líquido (ρ_L), la densidad del gas (ρ_g) y la gravedad (g).

La ley de Fick expresa el transporte no advectivo como gradientes de fracciones de masa de la especie analizada, a través del tensor de dispersión hidrodinámica que incluye tanto la difusión molecular como la dispersión mecánica. Su aplicación requiere establecer el coeficiente de difusividad y el tensor de dispersión mecánica, aunque en medios donde la velocidad del flujo es baja (como lo es en el suelo) la dispersión mecánica suele ser omitida. A continuación se relacionan las ecuaciones constitutivas requeridas para resolver las ecuaciones de conservación de masa.

$$j'_g{}^a = i_g{}^a + \theta_g{}^a q_g \quad (50) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$j'_L{}^a = i_L{}^a + \theta_L{}^a q_L \quad (51) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$j'_g{}^w = i_g{}^w + \theta_g{}^w q_g \quad (52) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$j'_L{}^w = i_L{}^w + \theta_L{}^w q_L \quad (53) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$S_L + S_g = \frac{V_L + V_g}{V_v} = 1 \quad (54) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$q_L = -K_L (\nabla P_L - \rho_L g) \quad (55) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$q_g = -K_g (\nabla P_g - \rho_g g) \quad (56) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$K_L = k^{k_{rL}} / \mu_L \quad K_g = k^{k_{rG}} / \mu_g \quad (57) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$k_{rL} = S_e^{1/2} \left(1 - \left(1 - S_e^{1/2} \right)^\lambda \right)^2 \quad (58) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$S_e = \left(1 + \left(\frac{s}{P} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \quad (59) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$P(N/m) = \sigma_0(T) = 0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right) \quad (60) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$k_{rg} = 1 - k_{rL} \quad (61) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$\rho_L(kg/m^3) = 1002.6 \exp(4.5 \times 10^{-4}(P_L - 0.1) - 3.4 \times 10^{-4}T) \quad (62) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$\rho_g = \theta_g^a + \theta_g^w \quad (63) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$\theta_g^a = \frac{M_a P_a}{R(273.15+T)} \quad (64) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$\theta_g^w = \frac{M_w P_w}{R(273.15+T)} \quad (65) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$M_a = 0.02895(kg/mol) \quad (66) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$M_g = 0.018(kg/mol) \quad (67) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$\mu_L(MPa \cdot s) = 2.1 \times 10^{-12} \exp\left(\frac{1808.5}{273.15+T}\right) \quad (68) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$\mu_g(MPa \cdot s) = 1.48 \times 10^{-12} \frac{(273.15+T)^{1/2}}{1 + \frac{119}{273.15+T}} \quad (69) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$i_g^w = -D_g^w \nabla \omega_g^w \quad (70) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$D_g^w = \phi \rho_g S_g \tau D_m^w \bar{I} \quad (71) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$D_m^w (m^2/s) = 5.9 \times 10^{-12} \frac{(273.15+T)^{2.3}}{P_g} \quad (72) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

Donde P_a es la presión parcial de aire, P_v es la presión parcial de vapor, R la constante de los gases, T la temperatura, τ la tortuosidad y los demás términos han sido definidos anteriormente. De esta manera se completan tres (3) ecuaciones de balance y veinticuatro (24) ecuaciones constitutivas, que al ser reemplazadas en las expresiones de balance de masa llevan a lo siguiente:

Para masa de mineral:

- Una (1) ecuación de balance

$$(1-\phi) \frac{\partial}{\partial t} \theta_s + \theta_s \frac{\partial}{\partial t} (1-\phi) + \theta_s (1-\phi) \nabla \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} [(1-\phi) \nabla \theta_s + \theta_s \nabla (1-\phi)] = 0 \quad (73) \text{ Adaptado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

- Seis (6) incógnitas:

$$t, \phi, \theta_s, \dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z$$

Para masa de agua:

- Una (1) ecuación de balance

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\omega_L^w 1002.6 \exp(4.5 \times 10^{-4} (P_L - 0.1) - 3.4 \times 10^{-4} T) S_L + \frac{M_w P_L}{R(273.15 + T)} S_g \right) +$$

$$\left(\omega_L^w 1002.6 \exp(4.5 \times 10^{-4} (P_L - 0.1) - 3.4 \times 10^{-4} T) S_L + \frac{M_w P_L}{R(273.15 + T)} S_g \right) \frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla (j_L^w + j_g^w) = f^w$$

(74) Adaptado de A Gens & Olivella (2001)

- Diecisiete (17) incógnitas:

$$t, \phi, \dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z, S_L, k, P_a, P_L, T, \lambda, g, R, S_g, \tau, \omega_g^w, \omega_L^w$$

Para masa de aire:

- Una (1) ecuación de balance

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\omega_L^a 1002.6 \exp(4.5 \times 10^{-4} (P_L - 0.1) - 3.4 \times 10^{-4} T) S_L + \frac{M_w P_w}{R(273.15 + T)} S_g \right) + \dots$$

$$\dots + \left(\omega_L^a 1002.6 \exp(4.5 \times 10^{-4} (P_L - 0.1) - 3.4 \times 10^{-4} T) S_L + \frac{M_w P_w}{R(273.15 + T)} S_g \right) \frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla (j_L^a + j_g^a) = f^a$$

(75) Adaptado de A Gens & Olivella (2001)

- Diecisiete (17) incógnitas:

$$t, \phi, \dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z, S_L, k, P_a, P_L, T, \lambda, g, R, S_g, \tau, \omega_L^a, D_m^a$$

Observando las incógnitas resultantes, se puede apreciar que estas se repiten en las diferentes ecuaciones de balance de masa, por tanto resulta un sistema de tres ecuaciones y veintiún (21) incógnitas que pueden ser clasificadas como se muestra en la tabla 7. En ella se puede apreciar que cinco (5) incógnitas corresponden a parámetros del sistema de los cuales la constante de los gases tiene un valor definido ya que constituye una constante universal, de manera similar la aceleración de la gravedad puede ser aproximada a un valor constante, mientras la tortuosidad, el parámetro λ y el coeficiente de difusión molecular del aire deben ser obtenidos mediante ensayos de laboratorio o datos históricos, en cualquiera de los casos estos terminaran siendo representados por un valor constante, las 16 incógnitas restantes serán entonces objeto de solución del sistema.

Para visualizar la relación entre dichas dieciséis incógnitas resulta útil recurrir al método de las matrices de adyacencia, cuya aplicación permite establecer ocho variables independientes, de las cuales el tiempo es una variable independiente del sistema, mientras las otras siete constituyen variables de estado. Lo anterior se ilustra en la tabla 8, en la cual las celdas en color rojo indican las variables que presentan dependencia de otras, mientras las marcadas en color gris con una "X" reflejan que una variable corresponde a sí misma, de tal forma que aquellas variables cuya fila sólo presentan celdas en gris corresponde a las denominadas variables independientes o de estado.

Tabla 7 Incógnitas de las ecuaciones de balance de masa - modelo THM A. Gens

Símbolo	Descripción	Clasificación	Observación
t	Tiempo	Variable	Variable independiente
u_x/dt	Velocidad de la especie mineral en sentido x	Variable	Variable
u_y/dt	Velocidad de la especie mineral en sentido y	Variable	Variable
u_z/dt	Velocidad de la especie mineral en sentido z	Variable	Variable
T	Temperatura	Variable	Variable
P_L	Presión del líquido	Variable	Variable
P_g	Presión de gas	Variable	Variable
ϕ	Porosidad (volumen de vacíos por unidad de volumen total)	Variable	Variable
k	Tensor de permeabilidad intrínseca	Variable	En función de la porosidad
S_L	Volumen de agua por unidad de volumen de vacíos	Variable	En función de la porosidad y el volumen de gas por unidad de volumen de vacíos
S_g	Volumen de gas por unidad de volumen de vacíos	Variable	En función de la porosidad y el volumen de agua por unidad de volumen de vacíos
θ_s	Masa de mineral en la fase sólida	Variable	En función del transporte de masa mineral y la porosidad
θ_L^W	Masa de agua en la fase líquida	Variable	En función del transporte de masa agua
θ_L^a	Masa de aire en la fase gaseosa	Variable	En función del transporte de masa aire
ω_g^W	Fracción másica de agua en la fase gaseosa	Variable	En función del volumen de gas por unidad de volumen de vacíos
ω_L^a	Fracción másica de aire en la fase líquida	Variable	En función del volumen de aire por unidad de volumen de vacíos
τ	Tensor de tortuosidad	Propiedad	Del medio poroso
λ	Parámetro - de la curva característica de retención	Propiedad	Del medio poroso
g	Aceleración de la gravedad	Propiedad	Constante
R	Constante de los gases	Propiedad	Constante
D_m^a	Coefficiente de difusión molecular del aire	Propiedad	Del aire

Tabla 8 Matriz de adyacencia ecuaciones de conservación de masa - modelo THM A. Gens

	t	u_x/dt	u_y/dt	u_z/dt	T	P_L	P_g	ϕ	k	S_L	S_g	θ_s	ω_g^W	ω_L^a
t	X													
u_x/dt		X												
u_y/dt			X											
u_z/dt				X										
T					X									
P_L						X								
P_g							X							
ϕ								X						
k									X					
S_L										X				
S_g											X			
θ_s												X		
ω_g^W													X	
ω_L^a														X

De acuerdo con lo anterior de las veintinueve incógnitas sólo se requiere establecer las siguientes siete: velocidad de la especie mineral en los tres sentidos, temperatura, presión del líquido, presión del gas y porosidad, ya que las demás son dependientes de estas o constituyen valores constantes, como se ilustra en la tabla 9, donde los valores constantes se indican en verde, las variables dependientes en amarillo y las variables de estado en rojo.

Tabla 9 Variables requeridas para la solución de las ecuaciones de conservación de masa - modelo THM A. Gens

	t	u_x/dt	u_y/dt	u_z/dt	T	P_L	P_g	ϕ	k	S_L	S_g	θ_S	ω_g^W	ω_L^a	k	τ	λ	g	R	D_m^a
ϕ								X												
P_L						X														
P_g							X													

Estos resultados muestran que el sistema no cierra puesto que sólo se cuenta con tres ecuaciones (las de conservación de masa), y por tanto se debe incluir más ecuaciones que pueden obtenerse del principio de conservación de momentum como se ilustra a continuación.

4.2.2 CONSERVACIÓN DE MOMENTUM

Las ecuaciones de conservación de momentum son aplicadas a la totalidad del medio poroso, y no para cada especie o fase, de tal forma que su resultado representa el comportamiento del medio como tal. La deducción de dichas ecuaciones se realiza a nivel macroscópico, considerando medio continuo, bajo aproximación euleriana y utilizando series de Taylor de primer orden; adicionalmente se asume que el sistema no está sometido a fuerzas electromagnéticas o que el efecto de estas no es significativo, de igual forma y dado que las velocidades y aceleraciones presentes en problemas de geotecnia medioambiental son bajas, se asume que los términos de fluencia son despreciables en comparación con los términos de esfuerzos, y que las fuerzas inerciales son despreciables. De esta manera se obtienen las siguientes expresiones:

En sentido x :

$$\nabla \sigma_x = 0 \quad (76) \text{ Adaptado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

En sentido y :

$$\nabla \sigma_y = 0 \quad (77) \text{ Adaptado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

En sentido z :

$$\rho g + \nabla \sigma_z = 0 \quad (78) \text{ Adaptado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

Donde σ corresponde a los términos de esfuerzos, ρ a la densidad del medio poroso y g es la aceleración de la gravedad. Solucionar el sistema de ecuaciones requiere de modelos constitutivos que para el caso de suelos parcialmente saturados sometidos a variación térmica, requiere una ley de comportamiento termo-hidro-mecánico que exprese la relación entre los cambios en deformaciones, succión y temperatura, y los esfuerzos mecánicos, que en términos generales se puede expresar de la siguiente manera:

$$d\sigma^* = D(\varepsilon, s, T)d\varepsilon + h(\varepsilon, s, T)ds + \beta(\varepsilon, s, T)dT \quad (79) \text{ Tomado de A. Gens (2010)}$$

Dichos modelos tienen un amplio desarrollo como se presenta en Lade (2005); A. Gens (2010). La complejidad del modelo constitutivo seleccionado introduce un mayor número de incógnitas, sin embargo estas incógnitas corresponderán a parámetros del modelo constitutivo y en definitiva serán representadas por valores constantes o funciones dependientes de las variables de estado, por lo que en el alcance de este documento no serán consideradas como incógnitas del sistema de ecuaciones de conservación de momentum.

Siguiendo el procedimiento utilizado para las ecuaciones de balance de masa en cuanto a la identificación y clasificación de las incógnitas, es posible establecer que el sistema presenta las siguientes incógnitas: temperatura, succión, deformación en los tres sentidos, aceleración de la gravedad y densidad del medio poroso. Considerando la succión como la diferencia entre la presión del líquido y la presión del gas, la densidad del medio poroso como la suma de la masa de cada especie por unidad de volumen total, y las deformaciones como la diferencia de los desplazamientos de la especie mineral en la fase sólida, entonces el sistema presentará como variables de estado: la velocidad de la especie mineral en los tres sentidos, la temperatura, la presión del líquido y la presión del gas. En la tabla 10 se presenta la matriz de adyacencia considerando tanto las ecuaciones de balance de masa como las de momentum.

Tabla 10 Matriz de adyacencia ecuaciones de conservación de masa y momentum - modelo THM A. Gens

	t	u_x/dt	u_y/dt	u_z/dt	T	P_L	P_g	Φ	k	S_L	S_g	θ_s	ω_g^W	ω_L^a	s	ϵ_x	ϵ_y	ϵ_z
t	x																	
u_x/dt		x																
u_y/dt			x															
u_z/dt				x														
T					x													
P_L						x												
P_g							x											
Φ								x										
k									x									
S_L										x								
S_g											x							
θ_s												x						
ω_g^W													x					
ω_L^a														x				
s															x			
ϵ_x																x		
ϵ_y																	x	
ϵ_z																		x

En el numeral anterior el conteo de ecuaciones e incógnitas, resultó en tres (3) ecuaciones de balance de masa y siete (7) variables de estado; incluyendo las encontradas al aplicar el principio de conservación de momentum, el sistema entonces resulta en seis (6) ecuaciones de balance y siete (7) variables de estado. En la tabla 11 se presenta en color verde los valores constantes o a obtener previo a la solución del sistema, en amarillo se indican las variables dependientes y en color rojo las variables de estado.

Tabla 11 Variables requeridas para la solución de las ecuaciones de conservación de masa y momentum - modelo THM A. Gens

	t	u_x/dt	u_y/dt	u_z/dt	T	P_L	P_g	ϕ	k	S_L	S_g	θ_s	ω_g^W	ω_L^a	k	τ	λ	g	R	D_m^a	D	h	β
ϕ	Red	Red	Red	Red	White	White	White	X	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White
P_L	Red	Red	Red	Red	White	X	Red	Red	Yellow	Yellow	Yellow	White	Yellow	Yellow	Green	Green	Green	Green	Green	Green	Green	Green	Green
P_g	Red	Red	Red	Red	White	White	X	Red	Yellow	Yellow	Yellow	White	Yellow	Yellow	Green	Green	Green	Green	Green	Green	Green	Green	Green
σ_x	White	Red	White	White	Red	Red	Red	Red	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	Green	Green
σ_y	White	White	Red	White	Red	Red	Red	Red	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	Green	Green
σ_z	White	White	White	Red	Red	Red	Red	Red	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	White	Green	Green

Estos resultados muestran que el sistema no cierra puesto que cuenta con seis ecuaciones (3 de conservación de masa y 3 de conservación de momentum) y siete (7) variables de estado, por tanto se debe incluir una ecuación más.

4.2.3 CONSERVACIÓN DE ENERGÍA

Para cerrar el sistema A Gens & Olivella (2001) plantea introducir una expresión de balance de energía interna, en la que asume equilibrio térmico entre las fases, de tal forma que la temperatura será la misma en todas las fases y la energía interna total por unidad de masa de la fase consistirá en la suma de energía interna de cada una de las fases. De esta manera se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) + \nabla \cdot (i_c + j_{Es} + j_{El} + j_{Eg}) = f^E$$

(80) Tomado de A Gens & Olivella (2001)

Donde ρ_s es la masa de solido por unidad de volumen en fase sólida, ρ_L la masa de agua por unidad de volumen en fase líquida, ρ_g la masa de aire por unidad de volumen en fase gaseosa, S_L el volumen de líquido por unidad de volumen de vacíos, S_g el volumen de gas por unidad de volumen de vacíos, E_i la energía interna en la fase i , i_c el flujo de calor por conducción, j_{Ei} el flujo de energía por el movimiento de la fase i , y f^E hace referencia a la fuente o sumidero de energía.

Esta expresión involucra los flujos de calor mediante la ley de Fourier, lo que implica determinar el coeficiente de conductividad térmica, cuyo valor según A Gens & Olivella (2001) puede ser estimado de manera razonable como la media geométrica del coeficiente de conductividad térmica de cada fase. La ecuación planteada (ecuación 80) también involucra la energía interna de cada fase y el flujo advectivo de las mismas, según A Gens & Olivella (2001) dichas variables pueden ser determinadas si se establecen expresiones para la energía interna de cada fase, para lo cual A Gens & Olivella (2001) presenta expresiones que involucran la temperatura y la capacidad de calor específico de cada especie (mineral, agua y aire) en cada fase.

Estas expresiones han sido obtenidas experimentalmente para el vapor de agua a una temperatura de 100°C y para el caso del agua y el aire a 25°C, adicionalmente considera el calor latente de evaporación como un valor constante. El transporte advectivo es considerando mediante la ley de Darcy cuyas expresiones fueron presentadas en el numeral 4.2.1. De acuerdo con lo anterior A Gens & Olivella (2001) plantea utilizar las siguientes ecuaciones constitutivas para la solución de la ecuación de balance de energía interna:

$$i_c = -\lambda \nabla T \quad (81) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$\lambda = \lambda_S^{(1-\phi)} \lambda_L^{\phi} \lambda_g^{\phi(1-S_L)} = \lambda_{Sat}^{S_L} \lambda_{Dry}^{1-S_L} \quad (82) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$\lambda_{Sat} = \lambda_S^{(1-\phi)} \lambda_L^{\phi} \quad (83) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$\lambda_{Dry} = \lambda_S^{(1-\phi)} \lambda_g^{\phi} \quad (84) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$E_S = c_S T \quad (85) \text{ Tomado de A. Gens (2010)}$$

$$E_g \rho_g = (E_g^W \omega_g^W + E_g^a \omega_g^a) \rho_g = E_g^W \theta_g^W + E_g^a \theta_g^a \quad (86) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$E_L \rho_L = (E_L^W \omega_L^W + E_L^a \omega_L^a) \rho_L = E_L^W \theta_L^W + E_L^a \theta_L^a \quad (87) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$E_L^W \left(\frac{J}{Kg} \right) = 4180.0(T - T_0) \quad (88) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$E_L^a \left(\frac{J}{Kg} \right) = 1006.0(T - T_0) \quad (89) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$E_g^a \left(\frac{J}{Kg} \right) = 1006.0(T - T_0) \quad (90) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$E_g^W \left(\frac{J}{Kg} \right) = 2.5 \times 10^6 + 1900.0(T - T_0) \quad (91) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$j_{Es} = E_S \rho_S (1-\phi) \frac{du}{dt} \quad (92) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$j_{EL} = j'_{EL} + E_L \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt} \quad (93) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$= j'_L{}^W E_L^W + j'_L{}^a E_L^a + E_L \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt}$$

$$j_{Eg} = j'_{Eg} + E_g \rho_g S_g \phi \frac{du}{dt} \quad (94) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

$$= j'_g{}^W E_g^W + j'_g{}^a E_g^a + E_L \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt}$$

Donde λ_i corresponde al coeficiente de conductividad térmica de la fase i , c_s es la capacidad volumétrica de calor del suelo, y los demás términos han sido definidos anteriormente. Reemplazando estas ecuaciones constitutivas la expresión de balance de energía interna se puede expresar así:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(c_s T \rho_s (1-\phi) + (4180.0(T-T_0)\theta_L^w + 1006.0(T-T_0)\theta_L^a) \rho_L S_L \phi \right) + \dots$$

$$\dots + \nabla \cdot \left(-\lambda \nabla T + E_s \rho_s (1-\phi) \frac{du}{dt} + \left(j_L^w E_L^w + j_L^a E_L^a \right) + \left(E_L^w \theta_L^w + E_L^a \theta_L^a \right) \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt} \right) + \left(j_g^w E_g^w + j_g^a E_g^a \right) + \left(E_g^w \theta_g^w + E_g^a \theta_g^a \right) \rho_g S_g \phi \frac{du}{dt} \right) = f^E$$

(95) Adaptado de A Gens & Olivella (2001)

El sistema queda conformado por una (1) ecuación y veintiseis (26) incógnitas, de las cuales diecisiete (22) coinciden con las expuestas para las ecuaciones de balance de masa y momentum, tres (3) corresponden a coeficientes de conductividad térmica (λ) y la restante es la capacidad volumétrica de calor del suelo, cuyos valores pueden ser tomados de la literatura o estimados en laboratorio. Para las ecuaciones e incógnitas hasta ahora planteadas se presenta en la tabla 12 sus variables representativas, de tal forma que las filas corresponden a las variables de las ecuaciones de balance, mientras las columnas constituyen las incógnitas que fueron clasificadas por colores, donde el verde indica los valores constantes o a obtener previo a la solución del sistema, el amarillo corresponde a las variables dependientes y el color rojo a las variables de estado.

Tabla 12 Variables requeridas para la solución de las ecuaciones de conservación de masa y momentum - modelo THM A. Gens

	u_x/dt	u_y/dt	u_z/dt	T	P_L	P_g	ϕ	k	S_L	S_g	θ_s	ω_g^w	ω_L^a	E_L^w	E_L^a	E_g^w	E_g^a	k	τ	λ	g	R	D_m^a	D	h	β	c_s	λ_s	λ_g	λ_L	
ϕ							x																								
P_L					x																										
P_g						x																									
u_x/dt	x																														
u_y/dt		x																													
u_z/dt			x																												
T				x																											

De acuerdo con lo anterior el sistema ha logrado ser cerrado ya que cuenta con siete variables de estado y siete ecuaciones, las primeras corresponden a: la velocidad de la especie mineral en los tres sentidos, la temperatura, la presión del líquido, la presión del gas y la porosidad, mientras las siete ecuaciones están conformadas por: tres ecuaciones de balance de masa, tres de balance de momentum y una de balance de energía. La matriz de adyacencia que se presenta en la tabla 13 ilustra la relación entre las siete variables de estado y por tanto entre las ecuaciones a resolver.

Tabla 13 Matriz de adyacencia ecuaciones de conservación de masa, momentum y energía - modelo THM A. Gens

	ϕ	P_L	P_g	u_x/dt	u_y/dt	u_z/dt	T
ϕ	x						
P_L		x					
P_g			x				
u_x/dt				x			
u_y/dt					x		
u_z/dt						x	
T							x

4.2.4 OPTIMIZACIÓN DE LA SOLUCIÓN

Con el objeto de reducir el número de ecuaciones a resolver de forma simultánea, A Gens & Olivella (2001) plantea considerar la derivada material con respecto a la velocidad del sólido e introducir la ecuación de masa mineral en las tres ecuaciones de balance, permitiendo incorporar explícitamente el efecto de la variación de la porosidad en los términos de almacenamiento y eliminar la ecuación de balance mineral del conjunto de ecuaciones a resolver. De esta forma en las ecuaciones de balance de masa aparecerán los términos j' que representan flujos con respecto a la fase sólida, como se presenta a continuación:

Para la porosidad:

$$\frac{D_S \phi}{Dt} = (1 - \phi) \nabla \cdot \frac{du}{dt} \quad (96) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

Para conservación de masa de agua:

$$\phi \frac{D_S (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g)}{Dt} + (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \nabla \cdot \frac{du}{dt} + \nabla \cdot (j_L^w + j_g^w) = f^w \quad (97) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

Para conservación de masa de aire:

$$\phi \frac{D_S (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g)}{Dt} + (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \nabla \cdot \frac{du}{dt} + \nabla \cdot (j_L^a + j_g^a) = f^a \quad (98) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

Para conservación de momentum:

En sentido x:

$$\nabla \sigma_x = 0 \quad (99) \text{ Adaptado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

En sentido y:

$$\nabla \sigma_y = 0 \quad (100) \text{ Adaptado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

En sentido z:

$$\rho g + \nabla \sigma_z = 0 \quad (101) \text{ Adaptado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

Para conservación de energía interna:

$$\phi \frac{D_S (E_L \rho_L S_L + E_g \rho_g S_g)}{Dt} + (1 - \phi) \frac{D_S (E_S \rho_S)}{Dt} + (E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \nabla \cdot \frac{du}{dt} + \nabla \cdot (i_c + j'_{El} + j'_{Eg}) = f^E \quad (102) \text{ Tomado de A Gens \& Olivella (2001)}$$

El sistema queda planteado de tal forma que es posible resolverlo aplicado las seis ecuaciones de conservación mostradas anteriormente teniendo seis variables de estado que corresponde a: la velocidad de la especie mineral en los tres sentidos, la temperatura, la presión del líquido y la presión del gas, como se ilustra en la tabla 14, que presenta la relación entre las seis ecuaciones a resolver.

Tabla 14 Matriz de adyacencia ecuaciones de conservación expresadas en términos de derivadas materiales - modelo THM A. Gens

	P_L	P_g	u_x/dt	u_y/dt	u_z/dt	T
P_L	x					
P_g		x				
u_x/dt			x			
u_y/dt				x		
u_z/dt					x	
T						x

4.3 AVANCES DEL MODELO THM DE A. GENS Y OLIVELLA

El modelo THM de A Gens & Olivella (2001) expuesto en el numeral anterior ha sido mejorado por el autor mismo buscando la integración de otros procesos lo cual se expone en A. Gens (2010), en esta sección se incluyen algunos de dichos avances.

4.3.1 INCLUSIÓN DEL PROCESO DE CONGELAMIENTO DE AGUA

Uno de los avances consiste en integrar el proceso de congelamiento de agua, para ello A. Gens (2010) propone un volumen de control que abarca una fracción del suelo en la cual considera tres fases (sólida, hielo y líquido) y dos especies (mineral y agua), ya que los poros se consideran ocupados por agua líquida o agua congelada (hielo).

Dado lo anterior al aplicar el principio de conservación de masa se obtendrán dos ecuaciones de balance: conservación de masa mineral (ecuación 47) y masa de agua (ecuación 103), del principio de conservación de momentum se derivan las ecuaciones 76 a 78 (como se expuso en el numeral anterior), y la ecuación de conservación de energía introduce una expresión adicional (ecuación 104). Las expresiones de balance que varían con relación a las expuestas en el numeral anterior se presentan a continuación:

Para masa de agua:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_L^w S_L \phi + \theta_i^w S_i \phi) + \nabla \cdot (j_L^w + j_i^w) = f^w \quad (103) \text{ Tomado de A. Gens (2010)}$$

Para energía:

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_i \rho_i S_i \phi) + \nabla \cdot (i_c + j_{Es} + j_{Ei} + j_{Ee}) = f^E \quad (104) \text{ Tomado de A. Gens (2010)}$$

Donde los términos con subíndice i corresponden a aquellos de la fase hielo, y los demás han sido definidos anteriormente. Para la solución del sistema de ecuaciones A. Gens (2010) propone la utilización un conjunto de ecuaciones constitutivas que abarcan las presentadas en el numeral anterior (ecuaciones 50 a 72 y 81 a 94) omitiendo aquellas relacionadas con la presión de gas, y modificando algunas, como se muestra a continuación:

$$i_c = -\lambda \nabla T \quad (105) \text{ Tomado de A. Gens (2010)}$$

$$\lambda = \lambda_s^{(1-\phi)} \lambda_L^{S_L \phi} \lambda_i^{(1-S_L)\phi} \quad (106) \text{ Tomado de A. Gens (2010)}$$

$$p_i = \frac{\rho_i}{\rho_L} p_L - \rho_i l \left(\frac{T}{273.15} \right) \quad (107) \text{ Tomado de A. Gens (2010)}$$

$$S_L + S_i = l \quad (108) \text{ Tomado de A. Gens (2010)}$$

$$E_i = -l + c_i T \quad (109) \text{ Tomado de A. Gens (2010)}$$

Reemplazando las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones de balance el sistema se puede resolver si se considera:

- Que la succión es cero y la fase gaseosa no está presente en el sistema, por lo cual la presión de gas no será una variable de estado.
- El modelo constitutivo para la determinación de los esfuerzos debe contener el efecto del hielo en el comportamiento mecánico, o este puede ser despreciado.
- La optimización realizada a través de la derivada material no será utilizada.

Lo anterior permite resolver el sistema ya que este contará con seis (6) ecuaciones que corresponden a: dos de balance de masa (mineral y agua), tres de balance de momentum (una en cada dirección) y una ecuación de balance de energía, y con (6) incógnitas que corresponden a las siguientes variables de estado: la velocidad de la especie mineral en los tres sentidos, la temperatura, la presión del líquido y la porosidad.

4.3.2 CONSIDERANDO LOS EFECTOS QUÍMICOS

Considerar los efectos químicos según A. Gens (2010) requiere establecer las especies químicas a incluir y para cada una de estas construir su ecuación de conservación de masa que expresa el transporte reactivo de la especie química, de igual forma se deberá incluir este tipo de transporte en las ecuaciones de balance de masa como términos de fuente sumidero que representen el ingreso de masa por transporte reactivo. El sistema de ecuaciones en este caso está conformado por tres expresiones de conservación de masa (ecuaciones 47 a 49), tres ecuaciones de conservación de momentum (ecuaciones 76 a 78), una expresión de balance de

energía (ecuación 80), y una ecuación de balance de masa para cada especie química, que se pueden plantear de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t}(nS_L \rho_L c_i) + \nabla j_i = R_i \quad (110) \text{ Tomado de A. Gens (2010)}$$

$(i=1, \dots, N)$

Adicionalmente se requieren un conjunto de ecuaciones constitutivas, entre las cuales se encuentra una para representar la succión, que en este caso requiere incluir su componente osmótica, de tal forma que la succión total consistirá en la suma de la succión mátrica y la osmótica, ello implica plantear una ecuación constitutiva que permita estimar la succión osmótica, así como incluir el efecto de las deformaciones microscópicas (causadas por las reacciones químicas) y el efecto de la succión osmótica en la ley de comportamiento termo-hidro-químico-mecánico a utilizar. Para ello A. Gens (2010) propone:

$$s_m = s_M = s + s_o \quad (111) \text{ Tomado de Guimarães (2002)}$$

$$s_o = 10^{-6} \frac{RT}{v_w} \ln(a_w) \quad (112) \text{ Tomado de Guimarães (2002)}$$

$$d\sigma^* = D(\varepsilon, s, T, c)d\varepsilon + h(\varepsilon, s, T, c)ds + \beta(\varepsilon, s, T, c)dT + \Gamma(\varepsilon, s, T, c)dc$$

(113) Tomado de A. Gens (2010)

Donde s_m es la succión microestructural, s_M la succión macroestructural, s la succión mátrica, s_o la succión osmótica, v_w el volumen molar del agua, a_w la actividad del agua líquida y c corresponde a la concentración de especies químicas.

Tras reemplazar las ecuaciones constitutivas en las ecuaciones de balance, y utilizar la definición de la derivada material con respecto a la velocidad del mineral en la fase sólida, el sistema puede resolverse utilizando las ecuaciones de balance compuestas por: una ecuación de transporte reactivo por cada especie química, dos ecuaciones de conservación de masa (agua y aire), tres ecuaciones de balance de momentum y una ecuación de balance de energía, teniendo las siguientes variables de estado: la velocidad de la especie mineral en los tres sentidos, la temperatura, la presión del líquido, la presión del gas y la concentración de cada especie química.

4.4 DISCUSIÓN SOBRE LOS MODELOS THM EN EL MARCO DE LA EVAPORACIÓN ACOPLADA CON EL COMPORTAMIENTO MECANICO DE SUELOS

En esta sección se presentan algunas observaciones, comentarios y sugerencias, para el desarrollo de modelos que permitan acoplar el proceso de evaporación con el comportamiento

mecánico de suelos, para ello se hará referencia a diferentes conceptos y procesos discutidos en el capítulo 3 (DISCUSIÓN SOBRE EL ESTADO DEL CONOCIMIENTO) y a lo expuesto con relación a los modelos termo-hidro-mecánicos.

Resulta conveniente señalar que la evaporación es un proceso que depende de las características de la superficie evaporante, que en el caso de medios porosos y más específicamente de materiales térreos (bien sean suelos o rocas), esta superficie consiste en los espacios vacíos al interior del material (en suelos suelen ser denominados poros) ello implica que la consideración de este proceso al interior del suelo requiere definir un volumen de control que abarque una fracción importante del suelo, ya que la zona vadosa puede cubrir desde centímetros hasta decenas y centenas de metros Zepeda (2004), en dicho caso el límite superior del volumen de control puede abarcar sólo una fracción del suelo.

Sin embargo y como se mencionó en apartes anteriores la evaporación en si misma está sujeta a diversos procesos atmosféricos entre los que se incluyen la radiación solar y los procesos de turbulencia, por lo que la inclusión de dichos procesos requeriría considerar un volumen de control que cubra un fracción importante del suelo y a su vez una franja de hasta tres kilómetros de la atmosfera. En aras de lo anterior es fundamental considerar las ecuaciones de conservación de masa, momentum y energía, aplicadas a la atmosfera baja y específicamente a la capa límite atmosférica (ecuaciones 36 a 41), ya que estas permiten la modelación del proceso de evaporación.

La aplicación de dichas expresiones está condicionadas a la magnitud espacial del volumen de control escogido, de tal forma que si se escoge una franja que cubra toda la capa límite atmosférica las expresiones de balance a utilizar serán diferentes a si se considera sólo una de las capas contenidas en ella (ver figura 18). Para el caso de la modelación del proceso de evaporación acoplado con el comportamiento mecánico de suelos, se considera apropiado limitar el volumen de control a la franja denominada “capa límite interna” en la cual las expresiones de balance pueden ser simplificadas.

Dada la gran variedad de procesos que ocurren tanto en la zona superior (la atmosfera) como en el interior del suelo, puede ser conveniente considerar dos volúmenes de control y establecer una condición de frontera en la interface suelo - atmosfera que permita el acople de los dos sistemas, que se prevé pueda ser realizado a través del proceso de transferencia de calor tanto en el suelo como en la atmósfera.

En cualquier caso y dada la dependencia que la evaporación presenta con respecto a la geometría del poro, resulta conveniente considerar que el suelo se deforma y que por tanto en la medida en que se presenten deformaciones la geometría del poro se verá afectada alterando la magnitud de la evaporación. Este efecto no se relaciona a lo largo del documento ya que no se encontraron investigaciones al respecto, sin embargo y aunque puede ser este tema de interés de algunos investigadores, tampoco se encontró que los avances actuales señalen la importancia del cambio geométrico (del poro a causa de las deformaciones del suelo) en la magnitud de la evaporación, por lo que se considera conveniente realizar análisis de escala que revelen la importancia del mismo, ya que a lo largo de este documento sí se señala que para los procesos de flujo de masa de aire al interior del suelo el efecto mencionado es importante, y ello deja abierta la inquietud frente a su relevancia para el proceso de evaporación.

En el modelo THM presentado en el numeral anterior se involucra el proceso de evaporación en la ecuación de balance de energía al considera un valor constante de calor latente dentro de la expresión para la energía interna del agua en la fase gaseosa, dicha expresión puede representarse de mejor manera al incluir la expresión de Clausius-Claypeyron como se ilustra en A. Gens (2010), lo que adicionalmente permite considerar el proceso de congelación.

Como se ilustró en el capítulo 3 el balance de energía podría ser presentado de manera más clara al partir del primer principio de la termodinámica (ecuación 7), lo que permitiría incluir el trabajo realizado por el sistema y el proceso de transferencia de calor en el suelo de manera directa y con expresiones más adecuadas de la ley de Fourier como lo presentan Deardorff (1978); Brutsaert (1982); Stull (1988); Fábrega & Galeano (2010). Sin embargo debe aclararse que estas mejoras resultan convenientes en la medida que los análisis de escala revelen su importancia en el proceso, para ello se recomienda considerar las observaciones de Brutsaert (1982) con relación a la importancia del flujo de calor en el suelo en el balance energético, según quien en escalas temporales pequeñas este proceso es de gran importancia.

Cabe aclarar que los modelos constitutivos y particularmente la ley de comportamiento termo-hidro-mecánico a utilizar en los modelos THM pueden variar según el tipo de procesos considerados, y su elección debe realizarse en función del tipo de comportamientos mecánicos que el modelador espera presente el material térreo. Así mismo es crucial que la ley de comportamiento considere los efectos de las deformaciones, succión, temperatura y reacciones químicas, según el alcance del modelo, e incluso en casos donde se presenten campos

electromagnéticos la ley de comportamiento deberá incluir su efecto en la condición de esfuerzos.

Es conveniente que la ley de comportamiento termo-hidro-mecánico sea establecida con base en los principios físicos (balance de masa, momentun y energía) de tal forma que facilite su futuro acople con otros proceso, para ello se recomienda partir del modelo desarrollado por cosito Schofield & Wroth (1968) que dio origen a la teoría de estado crítico, el cual ha presentado diversas mejoras como se ilustra en A. Gens (2010).

5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- El estudio y avances en modelación acoplada de procesos de interacción suelo – atmosfera requiere de grupos interdisciplinarios, ya que los procesos y modelos involucrados en el mismo presentan una amplia variedad y gama de desarrollos que pueden ser aprovechados en pro de obtener una mejor comprensión del fenómeno de interacción suelo atmosfera, pero ello requiere de la participación de expertos en las diferentes temáticas. En Colombia este tipo de escenarios se encuentran enmarcados dentro de los grupos de excelencia propuestos por COLCIENCIAS, como una visión para el estudio de sistemas complejos, sobre los cuales se han desarrollado proyectos interdisciplinarios.
- Aunque el mapa conceptual ilustrado en este documento está enfocado al efecto de la evaporación en el comportamiento mecánico de suelos, los conceptos, métodos y procedimientos presentados son aplicables a otros procesos de interacción suelo atmosfera, y se consideran herramientas para la mejora e integración de modelos realizados por disciplinas como la física de medios porosos, la hidrología, ecohidrología, la ingeniería civil, ingeniería agrícola, ingeniería de petróleos la ingeniería ambiental y la biología
- En el presente documento se estableció un estado del conocimiento y un modelo conceptual para el estudio de la evaporación acoplada con el comportamiento mecánico de suelos, que se consideran los dos primeros pasos de un protocolo de modelación en esta temática, sin embargo la comprensión de estos procesos de manera acoplada, requiere de esfuerzos multidisciplinarios, en lo cual se considera estratégico la integración de las temáticas *Techne* y *Gaia* propuestas por el Centro Interdisciplinario de Sistemas Complejos (CISC).
- El desarrollo de un protocolo de modelación del proceso de evaporación acoplado con el comportamiento mecánico de suelos, requiere: 1) Sistemas de información, conocimiento y de datos, 2) Desarrollo de un modelo conceptual, 3) Desarrollo de un modelo matemático, 4) Desarrollo de un aplicativo computacional, 5) Verificación del modelo, 6) Calibración y validación del modelo, 7) Análisis de sensibilidad e incertidumbre paramétrica, 8) Creación de escenarios y 9) Simulación computacional donde cada una de estas fases puede constituirse en un proyecto de investigación, que

permitirán que el país presente amplios avances en el estudio del comportamiento esfuerzo – deformación de suelos parcialmente saturados, y su relación con los procesos atmosféricos.

- El comportamiento mecánico de suelos y su vínculo con los procesos atmosféricos resulta ser un problema complejo, en el cual la evaporación crea un efecto importante, cuyo estudio se recomienda sea realizado con aproximaciones termodinámicas considerando dos volúmenes de control, el primero abarcando la atmosfera baja y unos milímetros por debajo de la superficie, y el segundo comprendiendo el suelo y unos milímetros por encima de la superficie, de tal forma que el acople de las funciones de transporte de calor en el suelo y la atmosfera constituye el reto a asumir para lograr integrar los modelos hidrológicos y mecánicos desarrollados para el estudio de estos procesos.
- Incorporar la ecuación de balance de energía a partir de la primera ley de la termodinámica no sólo facilita la visualización de los términos considerados, si no que a su vez puede disminuir la complejidad de la ley de comportamiento termo-hidro-mecánico adoptada, ya que facilitaría el acople de los procesos de cambio de estado, cargas eléctricas y efectos químicos entre otros.
- La revisión de información reveló poca investigación sobre el efecto de campos electromagnéticos en el comportamiento mecánico de suelos, sin embargo dado que estos pueden afectar de manera considerable el flujo en medios porosos, alterando así los valores de potencial y por tanto la succión, y de igual manera hacen parte de las fuerzas de cuerpo que componen las expresiones de balance de momentum, se propone avanzar en el estudio del efecto de campos electromagnéticos, ya que dicha condición podría presentarse en el diseño de obras geotécnicas para elementos de transmisión u almacenamiento de energía eléctrica.
- Al establecer la precipitación y la temperatura como funciones de entrada a los modelos de comportamiento mecánico de suelos, queda abierta la posibilidad de involucrar escenarios de cambio climático, de tal forma que estas señales puedan ser introducidas como funciones continuas, permitiendo a su vez el estudio y análisis de la relación esfuerzo deformación de materiales térreos en escalas más pequeñas y ventanas de tiempo mucho más amplias que las actualmente utilizadas. Lo anterior abre las puertas

para el análisis de fenómenos de remoción en masa, diseño de taludes y cimentaciones, y en general estudios y diseños geotécnicos, más próximos a la realidad tras permitir la inclusión de la variabilidad temporal de los procesos atmosféricos y de sus efectos en el material terreo.

BIBLIOGRAFÍA

- Alonso, E., Gens, A., Lloret, A., & Delahaye, C. (1995). Effect of rain infiltration on the stability of slopes. *Unsaturated Soils*, 1, 241-249.
- Amorosi, A., & Rampello, S. (1998). *The influence of natural soil structure on the mechanical behaviour of a stiff clay*. Paper presented at the Symposium: Geotechnics of Hard Soils Soft Rocks.
- Aparicio Mijares, F. (1994). Fundamentos de hidrología de superficie. *Editorial Limusa, México*.
- Berdugo, I. (2007). *Tunnelling in sulphate-bearing rocks—expansive phenomena*. PhD thesis, Technical University of Catalonia, Barcelona.
- Berdugo, I., Alonso, E., Romero, E., Gens, A., & Albis, M. (2009). A Review of Expansive Phenomena in Wagenburg North Tunnel. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*.
- Berre, T., & Bjerrum, L. (1973). Shear strength of normally consolidated clays. *International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1.1, 39-49.
- Bethke, C. (1996). *Geochemical reaction modeling: Concepts and applications*: Oxford University Press, USA.
- Blatz, J., Cui, Y., & Oldecop, L. (2009). Vapour equilibrium and osmotic technique for suction control. *Laboratory and Field Testing of Unsaturated Soils*, 49-61.
- Brutsaert, W. (1982). *Evaporation into the atmosphere: theory, history, and applications*: Springer.
- Bueno, E., & Azúa, S. (1998). Medición del capital intelectual: modelo Intellect. *Madrid: Instituto Universitario Euroforum Escorial*.
- Caicedo, B., Ulloa, J., & Tristancho, J. (2008). Aparato oedométrico instrumentado para el estudio de la consolidación de suelos parcialmente saturados. *I Simposio Suramericano de Excavaciones en Roca – ISSAER*.
- Case, C. M. (1994). *Physical principles of flow in unsaturated porous media*: Oxford University Press.
- Castro, M., González, R., & Portela, A. (1991). Parametrización de la capa límite atmosférica en los modelos numéricos de pronóstico meteorológico. *Física de la Tierra*(3), 103.
- Cola, S., Sanavia, L., Simonini, P., & Schrefler, B. (2008). Coupled thermohydrromechanical analysis of Venice lagoon salt marshes. *Water Resources Research*, 44.
- Collins, B., & Znidarcic, D. (1998). Slope stability issues of rainfall induced landslides. *Geotechnical Hazards*, 79.
- Cui, Y., & Delage, P. (1996). Yielding and plastic behaviour of an unsaturated compacted silt. *Géotechnique*, 46(2), 291-311.
- Dakshnamurthy, V., & Fredlund, D. (1981). Mathematical Model for Predicting Moisture Flow in an Unsaturated Soil Under Hydraulic and Temperature Gradients. *Water Resources Res.*, 17(3), 714-722.
- Deardorff, J. (1978). Efficient prediction of ground surface temperature and moisture, with inclusion of a layer of vegetation. *Journal of Geophysical Research*, 83(C4), 1889-1903.
- Delage, P., Howat, M., & Cui, Y. (1998). The relationship between suction and swelling properties in a heavily compacted unsaturated clay. *Engineering Geology*, 50(1-2), 31-48.
- Díez, P. F. (2008). *Procesos Termosolares en baja, media y alta temperatura*: Universidad de Cantabria.
- Eagleson, P. (1978a). Climate, soil, and vegetation 3. A simplified model of soil moisture movement in the liquid phase. *Water Resources Research*, 14(5), 722-730.
- Eagleson, P. (1978b). Climate, soil, and vegetation: 1. Introduction to water balance dynamics. *Water Resources Research*, 14(5), 705-712.
- Eagleson, P. (2002). *Ecohydrology: Darwinian expression of vegetation form and function*: Cambridge Univ Pr.
- Entekhabi, D., Rodriguez-Iturbe, I., & Castelli, F. (1996). Mutual interaction of soil moisture state and atmospheric processes. *Journal of Hydrology*, 184(1-2), 3-17.
- Fábrega, I., & Galeano, J. (2010). Medición y Simulación de la Transferencia de Calor en Cimentaciones Activas de Madrid. *II Congreso de energía geotérmica en la edificación y la industria*.

- Futai, M., & Almelda, M. (2005). An experimental investigation of the mechanical behaviour of an unsaturated gneiss residual soil. *Géotechnique*, 55(3), 201-214.
- Gash, J. (1979). An analytical model of rainfall interception by forests. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 105(443), 43-55.
- Gash, J., Lloyd, C., & Lachaud, G. (1995). Estimating sparse forest rainfall interception with an analytical model. *Journal of Hydrology*, 170(1-4), 79-86.
- Gaviria, G. (2008). *Lecciones de meteorología dinámica y modelamiento atmosférico*: Univ. Nacional de Colombia.
- Gens, A. (2010). Soil-environment interactions in geotechnical engineering. *Géotechnique*, 60(1), 3-74.
- Gens, A., & Olivella, S. (2001). THM phenomena in saturated and unsaturated porous media. *Revue française de génie*, 155(5), 693-717.
- Gens, A., & Olivella, S. (2006). Coupled thermo-hydro-mechanical analysis of engineered barriers for high-level radioactive waste. 25(4).
- Ghezzehei, T. A., Trautz, R. C., Finsterle, S., Cook, P. J., & Ahlers, C. F. (2004). Modeling coupled evaporation and seepage in ventilated cavities. *Vadose Zone Journal*, 3(3), 806-818.
- Guimarães, L. (2002). *Análisis multi-componente no isoterma en medio poroso deformable no saturado*. Universidad Politécnica de Cataluña.
- Gusev, Y., & Nasonova, O. (1998). The land surface parameterization scheme SWAP: Description and partial validation. *Global and Planetary Change*, 19(1-4), 63-86.
- Harvie, C., Greenberg, J., & Weare, J. (1987). A chemical equilibrium algorithm for highly non-ideal multiphase systems: free energy minimization. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 51(5), 1045-1057.
- Israelsen, O., & Hansen, V. (1985). *Principios y aplicaciones del riego*: Reverté.
- Johnson, K., & Sitar, N. (1990). Hydrologic conditions leading to debris-flow initiation. *Canadian geotechnical journal*, 27(6), 789-801.
- Kondratyav, Y. (1969). *Radiation in the Atmosphere*: Academic Pr.
- Krieg, S. (2000). *Viskoses Bodenverhalten von Mudden, Seeton und Klei*: Inst. für Bodenmechanik und Felsmechanik.
- Lade, P. (2005). *Overview of constitutive models for soils*. Paper presented at the Proceedings of the Sessions of the Geo-Frontiers 2005 Congress.
- Laio, F., Porporato, A., Ridolfi, L., & Rodriguez-Iturbe, I. (2001). Plants in water-controlled ecosystems: active role in hydrologic processes and response to water stress:: II. Probabilistic soil moisture dynamics. *Advances in Water Resources*, 24(7), 707-723.
- Lehninger, A., Nelson, D., & Cox, M. (2005). *Lehninger principles of biochemistry*: Wh Freeman.
- Leroueil, S. (2001). Natural slopes and cuts: movement and failure mechanisms. 39th Rankine Lecture. *Géotechnique*, 51(3), 197-243.
- Leroueil, S., Tavenas, F., Brucy, F., La Rochelle, P., & Roy, M. (1979). Behavior of destructured natural clays. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 105(6), 759-778.
- Linacre, E. (1967). Climate and the evaporation from crops. *J. Irrig. Drain. Div. Am. Soc. civ. Engrs*, 93, 61-79.
- Lumb, P. (1975). Slope failures in Hong Kong. *Quarterly Journal of Engineering Geology & Hydrogeology*, 8(1), 31.
- Lupini, J., Skinner, A., & Vaughan, P. (1981). Drained residual strength of cohesive soils. *Géotechnique*, 31, 181-213.
- Maatouk, A., Leroueil, S., & La Rochelle, P. (1995). Yielding and critical state of a collapsible unsaturated silty soil. *Géotechnique*, 45(3), 465-477.
- Maderey, L., & Jiménez, R. (2005). Principios de hidrogeografía. *Estudio del ciclo hidrológico. primera. Universidad Nacional Autónoma de México. México*, 15-20.
- Mata, C., Romero, E., & Ledesma, A. (2002). Hydro-chemical effects on water retention in bentonite-sand mixtures. *Unsaturated Soils*, 283.
- Mitchell, J., Campanella, R., & Singh, A. (1968). Soil creep as a rate process. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 94, 231-253.

- Montgomery, D., Dietrich, W., Torres, R., Prestrud Anderson, S., Heffner, J., & Loague, K. (1997). Hydrologic response of a steep, unchanneled valley to natural and applied rainfall. *Water Resources Research*, 33(1), 91-109.
- Moya, J., & Mora, O. (2006). *Revisión del marco de referencia conceptual para el estudio de fenómenos de remoción en masa*. Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá.
- Muñoz-Seca, B., & Riverloa, J. (1997). *Gestión del conocimiento*. Barcelona: Folio.
- Murayama, S., & Shibata, T. (1958). On the rheological characteristics of clay, Part I. *Bulletin*, 26.
- Muzylo, A., Llorens, P., Valente, F., Keizer, J., Domingo, F., & Gash, J. (2009). A review of rainfall interception modelling. *Journal of Hydrology*, 370(1-4), 191-206.
- Neitsch, S., Arnold, J., Kiniry, J., & Williams, J. (2001). Soil and Water Assessment tool (SWAT) user's manual version 2000. *Grassland Soil and Water Research Laboratory*. Temple, TX: ARS.
- Obeid, W., Mounajed, G., & Alliche, A. (2001). Mathematical formulation of thermo-hygro-mechanical coupling problem in non-saturated porous media. *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, 190(39), 5105-5122.
- Obregón, N. (2004). *Modelación "Inteligente" en Ingeniería Civil y Geociencias*. Paper presented at the Primer Congreso Binacional de Tecnologías Informáticas.
- Obregón, N. (2006). *Proceso de análisis en ingeniería como estrategia para la profesionalización del docente-ingeniero*.
- Olivella, S., Carrera, J., Gens, A., & Alonso, E. (1994). Nonisothermal multiphase flow of brine and gas through saline media. *Transport in porous media*, 15(3), 271-293.
- Olivier, H. (1979). *Some aspects of the influence of mineralogy and moisture redistribution on the weathering behaviour of mudrocks*.
- Paltridge, G., & Platt, M. (1977). Radiative process in meteorology and climatology.
- Pypker, T., Bond, B., Link, T., Marks, D., & Unsworth, M. (2005). The importance of canopy structure in controlling the interception loss of rainfall: examples from a young and an old-growth Douglas-fir forest. *Agricultural and Forest Meteorology*, 130(1-2), 113-129.
- Quiñones, P. (1997). Necesidades hídricas de los cultivos. *Manual para Diseño de Zonas de Riego Pequeñas*. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Jiutepec, Morelos, México. pp, 13-174.
- Rampello, S. (1991). *Some remarks on the mechanical behaviour of stiff clays: the example of Todí clay*. Paper presented at the Proceedings of the workshop on experimental characterization and modelling of soils and soft Rocks.
- Rand, R. (1993). Hydration forces. *Annu. Rev. Phys. Chem*, 993(44), 369-395.
- Rejeb, A., & Cabrera, J. (2007). *Time-dependent evolution of the excavation damaged zone in the argillaceous Tourmemire site*.
- Rodríguez-Iturbe, I., & Porporato, A. (2004). *Ecohydrology of water-controlled ecosystems: soil moisture and plant dynamics*: Cambridge Univ Pr.
- Rodríguez-Iturbe, I., Porporato, A., Laio, F., & Ridolfi, L. (2001). Plants in water-controlled ecosystems: active role in hydrologic processes and response to water stress: I. Scope and general outline. *Advances in Water Resources*, 24(7), 695-705.
- Romero, E. (2001). *Controlled-suction techniques*. Paper presented at the 4º Simpósio Brasileiro de Solos Não Saturados.
- Rutter, A., Kershaw, K., Robins, P., & Morton, A. (1972). A predictive model of rainfall interception in forests, 1. Derivation of the model from observations in a plantation of Corsican pine. *Agricultural Meteorology*, 9, 367-384.
- Sanavia, L., Pesavento, F., & Schrefler, B. (2006). Finite element analysis of non-isothermal multiphase geomaterials with application to strain localization simulation. *Computational Mechanics*, 37(4), 331-348.
- Schofield, A., & Wroth, P. (1968). Critical state soil mechanics.

- Schrefler, B. (2002). Mechanics and thermodynamics of saturated/unsaturated porous materials and quantitative solutions. *Applied Mechanics Reviews*, 55, 351.
- Schrefler, B., Zhan, X., & Simoni, L. (1995). A coupled model for water flow, airflow and heat flow in deformable porous media. *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, 5, 531–547.
- Sears, F., & Salinger, G. (1980). *Termodinámica, teoría cinética y termodinámica estadística*: Reverté.
- Skempton, A. (1953). *The colloidal activity of clays*.
- Skempton, A. (1985). Residual strength of clays in landslides, folded strata and the laboratory: *Geotechnique*, v. 35. *ISI/GeoRef*, 3–18.
- Soto, M. (2008). Geotecnia en suelos no saturados. *Revista Académica Colombiana de Ciencias*, XXXII(125).
- Srikanthan, R., & McMahon, T. (2001). Stochastic generation of annual, monthly and daily climate data: A review. *Hydrology and Earth System Sciences*, 5(4), 653-670.
- Stull, R. (1988). *An introduction to boundary layer meteorology*: Springer.
- Sun, H., Wong, H., & Ho, K. (1998). *Analysis of infiltration in unsaturated ground*. Paper presented at the Proceedings Annual Seminar of Slope Engineering, Hong Kong.
- Tang, A., & Cui, Y. (2005). Controlling suction by the vapour equilibrium technique at different temperatures and its application in determining the water retention properties of MX80 clay. *Canadian geotechnical journal*, 42(1), 287-296.
- Tavenas, F., Leroueil, S., Rochelle, P., & Roy, M. (1978). Creep behaviour of an undisturbed lightly overconsolidated clay. *Canadian geotechnical journal*, 15(3), 402-423.
- Terzaghi, K., Peck, R., & Mesri, G. (1996). *Soil mechanics in engineering practice*: Wiley-Interscience.
- Tristancho, J., & Caicedo, B. (2008). Modelación física en centrifuga de la interacción suelo – atmósfera. *XII Congreso Colombiano de Geotecnia – XIICCG*.
- Tuller, M., Or, D., & Dudley, L. (1999). Adsorption and capillary condensation in porous media: Liquid retention and interfacial configurations in angular pores. *Water Resources Research*, 35(7), 1949-1964.
- Turner, A., Jayaprakash, G., & Schuster, L. (1996). *Landslides: Investigation and Mitigation. Chapter 1 - Introduction*.: Transportation Research Board.
- Van Dijk, A., & Bruijnzeel, L. (2001). Modelling rainfall interception by vegetation of variable density using an adapted analytical model. Part 1. Model description. *Journal of Hydrology*, 247(3-4), 230-238.
- Verruijt, A. (2001). Soil mechanics. *Delft University of Technology*, 145-150.
- Villegas, J. C., Tobón, C., & Breshears, D. D. (2007). Fog interception by non-vascular epiphytes in tropical montane cloud forests: dependencies on gauge type and meteorological conditions. *Wiley InterScience*.
- Weare, B. (1988). *An introduction to atmospheric thermodynamics and cloud physics* autor. University of California Davis.
- Xiao, Q., McPherson, E., Ustin, S., & Grismer, M. (2000). A new approach to modeling tree rainfall interception. *Journal of Geophysical Research*, 105(D23), 29,173-129,188.
- Yang, D., Rahardjo, H., Leong, E., & Choa, V. (1998). Coupled model for heat, moisture, air flow, and deformation problems in unsaturated soils. *Journal of engineering mechanics*, 124(12), 1331-1338.
- Zepeda, J. (2004). *Mecánica de Suelos No Saturados*: Universidad Autónoma de Querétaro.

ANEXOS

ANEXO 1. TABLAS DE REGISTRO DE INFORMACIÓN

HIDROLOGÍA Y ECOHIDROLOGÍA

TEMA	SUBTEMA	AUTOR	TITULO	FECHA
Hidrología, Ecohidrología y Evaporación	Biología	A. Lehninger, et al.	Lehninger principles of biochemistry	2005
	Ecohidrología	P. Eagleson	Climate, soil, and vegetation: 1. Introduction to water balance dynamics	1978
		P. Eagleson	Climate, soil, and vegetation 3. A simplified model of soil moisture movement in the liquid phase	1978
		I. Rodríguez-Iturbe, et al.	Plants in water-controlled ecosystems: active role in hydrologic processes and response to water stress: I. Scope and general outline	2001
		F. Laio, et al.	Plants in water-controlled ecosystems: active role in hydrologic processes and response to water stress: II. Probabilistic soil moisture dynamics	2001
		P. Eagleson	Ecohydrology: Darwinian expression of vegetation form and function	2002
		I. Rodríguez-Iturbe and A. Porporato	Ecohydrology of water-controlled ecosystems: soil moisture and plant dynamics	2004
	Hidrología	O. Israelsen and V. Hansen	Principios y aplicaciones del riego	1985
		F. Aparicio Mijares	Fundamentos de hidrología de superficie	1994
		P. Quiñones	Necesidades hídricas de los cultivos, Manual para Diseño de Zonas de Riego Pequeñas.	1997
		N. Obregón	Modelación "Inteligente" en Ingeniería Civil y Geociencias	2004
		L. Maderey and R. Jiménez	Principios de hidrogeografía	2005
		P. F. Díez	Procesos Termosolares en baja, media y alta temperatura	2008
	Hidrología - Capa Límite Atmosférica	Y. Kondratyav	Radiation in the Atmosphere	1969
		G. Paltridge and M. Platt	Radiative process in meteorology and climatology	1977
		R. Stull	An introduction to boundary layer meteorology	1988
		S. Neitsch, et al	Soil and Water Assessment tool (SWAT) user's manual version 2000	2001
		G. Gavia	Lecciones de meteorología dinámica y modelamiento atmosférico	2008
	Hidrología - Evaporación	E. Linacre	Climate and the evaporation from crops	1967
		W. Brutsaert	Evaporation into the atmosphere: theory, history, and applications	1982
	Hidrología - Intercepción	A. Rutter, et al.	A predictive model of rainfall interception in forests, 1. Derivation of the model from observations in a plantation of Corsican pine	1972
		J. Gash	An analytical model of rainfall interception by forests	1979
		J. Gash, et al.	Estimating sparse forest rainfall interception with an analytical model	1995
		Q. Xiao, et al.	A new approach to modeling tree rainfall interception	2000
		A. Van Dijk and L. Bruijnzeel	Modelling rainfall interception by vegetation of variable density using an adapted analytical model. Part 1. Model description	2001
		T. Pypker, et al.	The importance of canopy structure in controlling the interception loss of rainfall: examples from a young and an old-growth Douglas-fir forest	2005
		A. Muzylo, et al.	A review of rainfall interception modelling	2009
J. C. Villegas, et al.		Fog interception by non-vascular epiphytes in tropical montane cloud forests: dependencies on gauge type and meteorological conditions	2007	

MECÁNICA DE SUELOS

TEMA	SUBTEMA	AUTOR	TITULO	FECHA
MECANICA DE SUELOS	Clásica	A. Skempton	The colloidal activity of clays	1953
		J. Mitchell, et al.	Soil creep as a rate process	1968
		T. Berre and L. Bjerrum	Shear strength of normally consolidated clays	1973
		P. Lumb	Slope failures in Hong Kong	1975
		J. Lupini, et al.	Drained residual strength of cohesive soils	1981
		A. Skempton	Residual strength of clays in landslides, folded strata and the laboratory	1985
		A. Maatouk, et al.	Yielding and critical state of a collapsible unsaturated silty soil	1995
		K. Terzaghi, et al.	Soil mechanics in engineering practice	1996
		A. Amorosi and S. Rampello	The influence of natural soil structure on the mechanical behaviour of a stiff clay	1998
		A. Verruijt	Soil mechanics	2001
		J. Moya and O. Mora	Revisión del marco de referencia conceptual para el estudio de fenómenos de remoción en masa	2006
	Parcialmente Saturados	F. Tavenas, et al.	Creep behaviour of an undisturbed lightly overconsolidated clay	1978
		H. Olivier	Some aspects of the influence of mineralogy and moisture redistribution on the weathering behaviour of mudrocks	1979
		S. Leroueil, et al.	Behavior of destructured natural clays	1979
		K. Johnson and N. Sitar	Hydrologic conditions leading to debris-flow initiation	1990
		S. Rampello	Some remarks on the mechanical behaviour of stiff clays: the example of Todi clay	1991
		E. Alonso, et al.	Effect of rain infiltration on the stability of slopes	1995
		A. Turner, et al.	Landslides: Investigation and Mitigation	1996
		Y. Cui and P. Delage	Yielding and plastic behaviour of an unsaturated compacted silt	1996
		D. Montgomery, et al.	Hydrologic response of a steep, unchanneled valley to natural and applied rainfall	1997
		H. Sun, et al.	Analysis of infiltration in unsaturated ground	1998
		B. Collins and D. Znidarcic	Slope stability issues of rainfall induced landslides	1998
		M. Tuller, et al.	Adsorption and capillary condensation in porous media: Liquid retention and interfacial configurations in angular pores	1999
		S. Leroueil	Natural slopes and cuts: movement and failure mechanisms	2001
		J. Zepeda	Mecánica de Suelos No Saturados	2004
		T. A. Ghezzehei, et al.	Modeling coupled evaporation and seepage in ventilated cavities	2004
		M. Futai and M. Almelda	An experimental investigation of the mechanical behaviour of an unsaturated gneiss residual soil	2005
		P. Lade	Overview of constitutive models for soils	2005
B. Caicedo, et al.	Aparato oedométrico instrumentado para el estudio de la consolidación de suelos parcialmente saturados.	2008		
M. Soto	Geotecnia en suelos no saturados	2008		

TEMA	SUBTEMA	AUTOR	TITULO	FECHA
MECANICA DE SUELOS	Geoquímica	S. Murayama and T. Shibata	On the rheological characteristics of clay	1958
		C. Harvie, et al.	A chemical equilibrium algorithm for highly non-ideal multiphase systems: free energy minimization	1987
		R. Rand	Hydration forces	1993
		C. Bethke	Geochemical reaction modeling: Concepts and applications	1996
		C. Mata, et al.	Hydro-chemical effects on water retention in bentonite-sand mixtures	2002
		I. Berdugo	Tunnelling in sulphate-bearing rocks—expansive phenomena	2007
		A. Rejeb and J. Cabrera	Time-dependent evolution of the excavation damaged zone in the argillaceous Tournemire site	2007
		I. Berdugo, et al.	A Review of Expansive Phenomena in Wagenburg North Tunnel	2009
	Potencial y Succión	P. Delage, et al.	The relationship between suction and swelling properties in a heavily compacted unsaturated clay	1998
		E. Romero	Controlled-suction techniques	2001
		A. Tang and Y. Cui	Controlling suction by the vapour equilibrium technique at different temperatures and its application in determining the water retention properties of MX80 clay	2005
		J. Blatz, et al.	Vapour equilibrium and osmotic technique for suction control	2009
	Termodinámica del Suelo	J. Deardorff	Efficient prediction of ground surface temperature and moisture, with inclusion of a layer of vegetation	1978
		V. Dakshanamurthy and D. Fredlund	Mathematical Model for Predicting Moisture Flow in an Unsaturated Soil Under Hydraulic and Temperature Gradients	1981
		S. Olivella, et al.	Nonisothermal multiphase flow of brine and gas through saline media	1994
		C. M. Case	Physical principles of flow in unsaturated porous media	1994
		B. Schrefler, et al.	A coupled model for water flow, airflow and heat flow in deformable porous media	1995
		D. Yang, et al.	Coupled model for heat, moisture, air flow, and deformation problems in unsaturated soils	1998
		W. Obeid, et al.	Mathematical formulation of thermo-hygro-mechanical coupling problem in non-saturated porous media	2001
		A. Gens and S. Olivella	THM phenomena in saturated and unsaturated porous media	2001
		L. Guimarães	Análisis multi-componente no isoterma en medio poroso deformable no saturado	2002
		B. Schrefler	Mechanics and thermodynamics of saturated/unsaturated porous materials and quantitative solutions	2002
		L. Sanavia, et al.	Finite element analysis of non-isothermal multiphase geomaterials with application to strain localization simulation	2006
		A. Gens and S. Olivella	Coupled thermo-hydro-mechanical analysis of engineered barriers for high-level radioactive waste	2006
		S. Cola, et al.	Coupled thermohydromechanical analysis of Venice lagoon salt marshes	2008
		J. Tristáncho and B. Caicedo	Modelación física en centrifuga de la interacción suelo – atmósfera	2008
		I. Fábrega and J. Galeano	Medición y Simulación de la Transferencia de Calor en Cimentaciones Activas de Madrid	2010
A. Gens	Soil-environment interactions in geotechnical engineering	2010		

ANEXO 2 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MODELO TERMO-HIDRO-MECÁNICO DE A. GENS Y S. OLIVELLA PARA UN MEDIO POROSOS EN ESTADO SATURADO Y PARCIALMENTE SATURADO.

ECUACIONES DE BALANCE DE MASA

Para la deducción de las ecuaciones de conservación de masa usualmente se utiliza una aproximación Eulerina. De igual manera se considera medio continuo con un volumen de control en coordenadas cartesianas, siendo este un diferencial de forma cubica localizado entre el suelo (ver Figura).

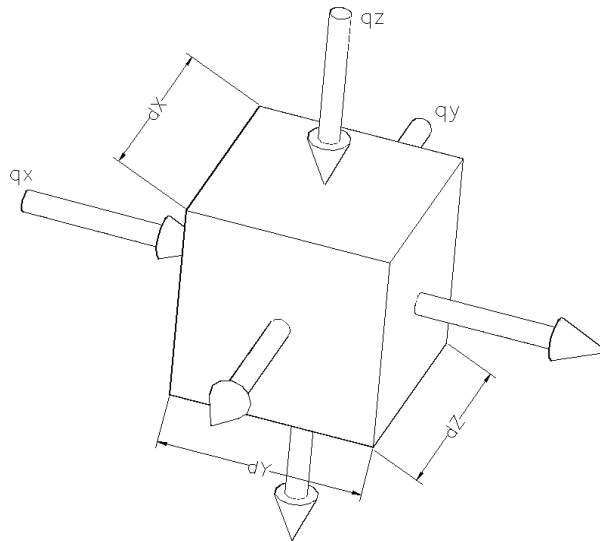


Figura. Esquema del volumen de control.

A continuación se presenta la metodología general para la obtención de las expresiones de conservación de masa, y posteriormente el desarrollo de cada ecuación de balance de masa utilizadas en el modelo de A Gens & Olivella (2001).

Primero se define q_i como el caudal por unidad de ancho que ingresa al volumen de control, se aplican las series de Taylor para obtener el caudal de salida (dado que es un medio continuo) haciendo una aproximación numérica de primer orden, es decir utilizando solo los dos primeros términos de la serie, de tal forma que el caudal de salida resulta.

$$q_{(i+\Delta i)} = q_i + \Delta i * \frac{\partial q_i}{\partial i}$$

Donde

$$q_i = \frac{[L]^3}{[t]} / [L]^2 \quad \text{Volumen por unidad de tiempo de unidad de longitud, en la dirección } i.$$

Luego se aplica el principio de conservación de masa

$$m_{(Entra)} - m_{(Sale)} = \Delta(masa)$$

$$\begin{aligned}
 & (q_x \rho_\pi \Delta Y \Delta Z \Delta t + q_y \rho_\pi \Delta X \Delta Z \Delta t + q_z \rho_\pi \Delta Y \Delta X \Delta t)_{\text{Entra}} \\
 & \left(\left(q_x + \Delta X \frac{\partial q_x}{\partial X} \right) \rho_\pi \Delta Y \Delta Z \Delta t + \left(q_y + \Delta Y \frac{\partial q_y}{\partial Y} \right) \rho_\pi \Delta X \Delta Z \Delta t + \left(q_z + \Delta Z \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) \rho_\pi \Delta Y \Delta X \Delta t \right)_{\text{Sale}} \\
 & = \left(q_x \rho_\pi \Delta Y \Delta Z \Delta t + q_y \rho_\pi \Delta X \Delta Z \Delta t + q_z \rho_\pi \Delta Y \Delta X \Delta t \right) + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) \rho_\pi \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t \Big|_{\text{Sale}} \\
 & m_{(\text{Entra})} - m_{(\text{Sale})} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) \rho_\pi \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t = \Delta(\text{masa}) \\
 & - \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) \rho_\pi \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t = \Delta(\Delta V * \rho_\pi) \\
 & \Delta(\rho_\pi) + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) \rho_\pi \Delta t = 0
 \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando Δt tiende a cero:

$$\begin{aligned}
 \lim \Delta t \rightarrow 0 \left[\Delta(\rho_\pi) + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) \rho_\pi \Delta t \right] \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\pi) + \nabla q \rho_\pi = f^\pi
 \end{aligned}$$

El modelo considera tres fases (sólida, líquida y gaseosa) que se indican con los subíndices s, L y g respectivamente, y tres especies (mineral, agua y aire) para el primero no se usan símbolos mientras los siguientes se relacionan con los superíndices w y a.

ECUACIONES DE BALANCE DE MASA MINERAL

Para la masa mineral se considera:

$q_i : \frac{[L]^3}{[t]} / [L]^2$	Caudal por unidad de área.
$u_i : [L]$	Vector de desplazamiento del mineral en la fase sólida.
$\theta_s = \frac{m_s}{V_s} : \frac{[M]}{[L]^3}$	Masa de mineral por unidad de volumen en fase sólida.
$\phi = \frac{V_v}{V_T} : \frac{[L]^3}{[L]^3}$	Porosidad, volumen de vacíos (agua y aire) por unidad de volumen total.
$V_T = V_v + V_s ; [L]^3$	De acuerdo con las relaciones de fase de los suelos el volumen total es igual al volumen de vacíos más el volumen de sólidos.

Entonces:

$$\theta_s (1 - \phi) = \frac{m_s}{V_s} \left(1 - \frac{V_v}{V_T} \right) = \frac{m_s}{V_s} \left(\frac{V_T - V_v}{V_T} \right) = \frac{m_s}{V_s} \left(\frac{V_s}{V_T} \right) = \frac{m_s}{V_T} : \frac{[M]}{[L]^3}$$

Principio de conservación de masa:

$$m_{(\text{Entra})} - m_{(\text{Sale})} = \Delta(\text{masa})$$

$$(q_x \theta_s (1 - \phi) \Delta Y \Delta Z \Delta t + q_y \theta_s (1 - \phi) \Delta X \Delta Z \Delta t + q_z \theta_s (1 - \phi) \Delta Y \Delta X \Delta t)_{\text{Entra}}$$

$$\left(\left(q_x + \Delta X \frac{\partial q_x}{\partial X} \right) \theta_s (1 - \phi) \Delta Y \Delta Z \Delta t + \left(q_y + \Delta Y \frac{\partial q_y}{\partial Y} \right) \theta_s (1 - \phi) \Delta X \Delta Z \Delta t + \left(q_z + \Delta Z \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) \theta_s (1 - \phi) \Delta Y \Delta X \Delta t \right)_{\text{Sale}}$$

$$= \left(q_x \theta_s (1-\phi) \Delta Y \Delta Z \Delta t + q_y \theta_s (1-\phi) \Delta X \Delta Z \Delta t + q_z \theta_s (1-\phi) \Delta Y \Delta X \Delta t + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) \theta_s (1-\phi) \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t \right)_{Sale}$$

$$m_{(Entra)} - m_{(Sale)} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) \theta_s (1-\phi) \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t = \Delta(masa)$$

$$- \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) \theta_s (1-\phi) \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t = \Delta(\Delta V * \theta_s (1-\phi))$$

$$\Delta(\theta_s (1-\phi)) + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) \theta_s (1-\phi) \Delta t = 0$$

Tomando el límite cuando Δt tiende a cero:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\Delta(\theta_s (1-\phi)) + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) \theta_s (1-\phi) \Delta t \right]$$

Ecuación de conservación de masa mineral en la fase sólida

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_s (1-\phi)) + \nabla \left[\frac{du}{dt} \theta_s (1-\phi) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\theta_s (1-\phi)) + \nabla j_s = 0$$

Partiendo de la definición de la derivada material y aplicando esta con respecto a la velocidad del mineral de la fase sólida, la expresión obtenida para la conservación de masa de mineral se puede transformar de la siguiente manera:

Derivada material:

$$\frac{D_s(\bullet)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \frac{du}{dt} \cdot \nabla(\bullet)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_s (1-\phi)) + \nabla j_s = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_s (1-\phi)) + \nabla \left[(1-\phi) \theta_s \frac{du}{dt} \right] = 0$$

$$(1-\phi) \frac{\partial}{\partial t} \theta_s + \theta_s \frac{\partial}{\partial t} (1-\phi) + \theta_s \frac{du}{dt} \nabla (1-\phi) + (1-\phi) \nabla \left(\theta_s \frac{du}{dt} \right) = 0$$

$$(1-\phi) \frac{\partial}{\partial t} \theta_s - \theta_s \frac{\partial}{\partial t} \phi - \theta_s \frac{du}{dt} \nabla \phi + (1-\phi) \left[\frac{du}{dt} \nabla \theta_s + \theta_s \nabla \frac{du}{dt} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + \frac{du}{dt} \nabla \phi = \frac{(1-\phi)}{\theta_s} \frac{\partial}{\partial t} \theta_s + \frac{(1-\phi)}{\theta_s} \left[\frac{du}{dt} \nabla \theta_s + \theta_s \nabla \frac{du}{dt} \right]$$

$$\frac{D_s \phi}{Dt} = \frac{(1-\phi)}{\theta_s} \frac{\partial}{\partial t} \theta_s + \frac{(1-\phi)}{\theta_s} \frac{du}{dt} \nabla \theta_s + (1-\phi) \nabla \frac{du}{dt}$$

$$\frac{D_s \phi}{Dt} = \frac{(1-\phi)}{\theta_s} \frac{D_s \theta_s}{Dt} + (1-\phi) \nabla \frac{du}{dt}$$

Eliminando el primer término se obtiene la siguiente expresión para el cambio de la porosidad:

$$\frac{D_s \phi}{Dt} = (1-\phi) \nabla \frac{du}{dt}$$

ECUACIONES DE BALANCE DE MASA DE AGUA

Para la masa agua se considera:

$$q_i : \frac{[L]^3}{[t]} / [L]^2 \quad \text{Caudal por unidad de área.}$$

$\theta_L^w = \frac{m_w}{V_L} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$	Masa de agua por unidad de volumen de la fase líquida.
$\theta_g^w = \frac{m_w}{V_g} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$	Masa de agua por unidad de volumen de la fase gaseosa.
$S_L = \frac{V_L}{V_v} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$	Volumen de líquido por unidad de volumen de vacíos.
$S_g = \frac{V_g}{V_v} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$	Volumen de gas por unidad de volumen de vacíos.
$\phi = \frac{V_v}{V_T} \cdot \frac{[L]^3}{[L]^3}$	Porosidad, volumen de vacíos (agua y aire) por unidad de volumen Total.
$V_T = V_v + V_s; [L]^3$	De acuerdo con las propiedades de fase de los suelos el volumen total es igual al volumen de vacíos (líquido más gas) más el volumen de sólidos.

Entonces:

$$\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi = \frac{m_L^w}{V_L} \frac{V_L}{V_v} \frac{V_v}{V_T} + \frac{m_g^w}{V_g} \frac{V_g}{V_v} \frac{V_v}{V_T} = \frac{m_L^w}{V_T} + \frac{m_g^w}{V_T} = \frac{m_L^w + m_g^w}{V_T} = \frac{m_w}{V_T} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$$

Principio de conservación de masa:

$$\begin{aligned} m_{(Entra)} - m_{(Sale)} &= \Delta(masa) \\ (q_x (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta Y \Delta Z \Delta t + q_y (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta X \Delta Z \Delta t + q_z (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta Y \Delta X \Delta t)_{Entra} \\ &= \left((q_x + \Delta X \frac{\partial q_x}{\partial X}) (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta Y \Delta Z \Delta t + (q_y + \Delta Y \frac{\partial q_y}{\partial Y}) (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta X \Delta Z \Delta t + (q_z + \Delta Z \frac{\partial q_z}{\partial Z}) (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta Y \Delta X \Delta t \right)_{Sale} \\ &= \left((q_x (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta Y \Delta Z \Delta t + q_y (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta X \Delta Z \Delta t + q_z (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta Y \Delta X \Delta t) + \dots \right)_{Sale} \\ &\left(\dots + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t \right)_{Sale} \\ m_{(Entra)} - m_{(Sale)} &= - \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t = \Delta(masa) \\ - \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t &= \Delta(\Delta V * (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi)) \\ \Delta(\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta t &= 0 \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando Δt tiende a cero:

$$\begin{aligned} \lim \Delta t \rightarrow 0 \left[\Delta(\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \Delta t \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) + \nabla \left[\frac{du}{dt} (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \right] q = \frac{\partial}{\partial t} (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) + \nabla (j_L^w + j_g^w) = f^w \\ \frac{\partial}{\partial t} (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) + \nabla q (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) = \frac{\partial}{\partial t} (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) + \nabla (j_L^w + j_g^w) = f^w \end{aligned}$$

Donde j_L^w corresponde al flujo total de agua en la fase líquida, y se define así:

$$j_L^w = i_L^w + \theta_L^w q_L + \theta_L^w S_L \phi \frac{du}{dt} = j_L^w + \theta_L^w S_L \phi \frac{du}{dt}$$

j_g^w corresponde al flujo total de agua en la fase gaseosa, y se expresa como:

$$j_g^w = i_g^w + \theta_g^w q_g + \theta_g^w S_g \phi \frac{du}{dt} = j'_g{}^w + \theta_g^w S_g \phi \frac{du}{dt}$$

Donde f^w hace referencia a la fuente o sumidero, y los términos i están asociados al flujo no advectivo.

Partiendo de la definición de la derivada material y aplicando esta con respecto a la velocidad del sólido, la ecuación de conservación de masa de agua, se puede transformar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) + \nabla(j_L^w + j_g^w) &= f^w \\ (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \frac{\partial}{\partial t} \phi + \phi \frac{\partial}{\partial t}(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) + \nabla \left[(j'_L{}^w + \theta_L^w S_L \phi) \frac{du}{dt} \right] + \left[(j'_g{}^w + \theta_g^w S_g \phi) \frac{du}{dt} \right] &= f^w \end{aligned}$$

Desarrollando el tercer término

$$\begin{aligned} \nabla \left[(j'_L{}^w + \theta_L^w S_L \phi) \frac{du}{dt} \right] + \left[(j'_g{}^w + \theta_g^w S_g \phi) \frac{du}{dt} \right] &= \nabla \left[(j'_L{}^w + j'_g{}^w) + (\theta_L^w S_L \phi \frac{du}{dt} + \theta_g^w S_g \phi \frac{du}{dt}) \right] \\ &= \nabla(j'_L{}^w + j'_g{}^w) + \nabla \left[\phi \frac{du}{dt} (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \right] \\ &= \nabla(j'_L{}^w + j'_g{}^w) + (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \left[\frac{du}{dt} \nabla(\phi) + \phi \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) \right] + \left(\phi \frac{du}{dt} \right) \nabla(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \\ &= \nabla(j'_L{}^w + j'_g{}^w) + (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \frac{du}{dt} \nabla(\phi) + (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \phi \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) + \left(\phi \frac{du}{dt} \right) \nabla(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión inicial

$$\begin{aligned} (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \frac{\partial}{\partial t} \phi + \phi \frac{\partial}{\partial t}(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) + \nabla(j'_L{}^w + j'_g{}^w) + (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \frac{du}{dt} \nabla(\phi) + \dots \\ \dots + (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \phi \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) + \left(\phi \frac{du}{dt} \right) \nabla(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) = f^w \end{aligned}$$

Organizando términos

$$\begin{aligned} \left[\phi \frac{\partial}{\partial t}(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) + \left(\phi \frac{du}{dt} \right) \nabla(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \right] + \left[(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \frac{\partial}{\partial t} \phi + (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \frac{du}{dt} \nabla(\phi) \right] + \dots \\ \dots + (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \phi \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) + \nabla(j'_L{}^w + j'_g{}^w) = f^w \end{aligned}$$

Aplicando la derivada material

$$\left[\phi \frac{D_s(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g)}{Dt} \right] + \left[(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \frac{D_s \phi}{Dt} \right] + (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) + \nabla(j'_L{}^w + j'_g{}^w) = f^w$$

Reemplazando la función para el cambio de porosidad

$$\left[\phi \frac{D_s(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g)}{Dt} \right] + \left[(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) (1 - \phi) \nabla \frac{du}{dt} \right] + (\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) + \nabla(j'_L{}^w + j'_g{}^w) = f^w$$

La siguiente expresión corresponde a la transformación de la ecuación de conservación de masa de agua y en ella los flujos quedan expresados con respecto a la fase sólida lo que permite utilizar la ley de Darcy para su representación

$$\left[\phi \frac{D_s(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g)}{Dt} \right] + (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) + \nabla(j'_L{}^w + j'_g{}^w) = f^w$$

ECUACIONES DE BALANCE DE MASA DE AIRE

$\theta_L^a = \frac{m_a}{V_L} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$	Masa de aire por unidad de volumen en fase líquida.
$\theta_g^a = \frac{m_a}{V_g} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$	Masa de aire por unidad de volumen en fase gaseosa.
$S_L = \frac{V_L}{V_v} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$	Volumen de líquido por unidad de volumen de vacíos.
$S_g = \frac{V_g}{V_v} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$	Volumen de gas por unidad de volumen de vacíos.
$\phi = \frac{V_v}{V_T} \cdot \frac{[L]^3}{[L]^3}$	Porosidad, volumen de vacíos (agua y aire) por unidad de volumen Total.
$V_T = V_v + V_s; [L]^3$	De acuerdo con las propiedades de fase de los suelos el volumen total es igual al volumen de vacíos (líquido más gas) más el volumen de sólidos.

Entonces:

$$\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi = \frac{m_L^a}{V_L} \frac{V_L}{V_v} \frac{V_v}{V_T} + \frac{m_g^a}{V_g} \frac{V_g}{V_v} \frac{V_v}{V_T} = \frac{m_L^a}{V_T} + \frac{m_g^a}{V_T} = \frac{m_L^a + m_g^a}{V_T} = \frac{m_a}{V_T} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$$

Principio de conservación de masa:

$$m_{(Entra)} - m_{(Sale)} = \Delta(masa)$$

$$\begin{aligned} & (q_x (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta Y \Delta Z \Delta t + q_y (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta X \Delta Z \Delta t + q_z (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta Y \Delta X \Delta t)_{Entra} \\ & \left(\left(q_x + \Delta X \frac{\partial q_x}{\partial X} \right) (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta Y \Delta Z \Delta t + \left(q_y + \Delta Y \frac{\partial q_y}{\partial Y} \right) (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta X \Delta Z \Delta t + \left(q_z + \Delta Z \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta Y \Delta X \Delta t \right)_{Sale} \\ & = \left(\left(q_x (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta Y \Delta Z \Delta t + q_y (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta X \Delta Z \Delta t + q_z (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta Y \Delta X \Delta t + \dots \right)_{Sale} \right. \\ & \left. \left(\dots + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t \right)_{Sale} \right) \\ & m_{(Entra)} - m_{(Sale)} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t = \Delta(masa) \\ & - \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t = \Delta(\Delta V * (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi)) \\ & \Delta \left((\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \right) + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta t = 0 \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando Δt tiende a cero:

$$\begin{aligned} & \lim \Delta t \rightarrow 0 \left[\Delta \left((\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \right) + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \Delta t \right] \\ & \frac{\partial}{\partial t} (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) + \nabla q (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) = \frac{\partial}{\partial t} (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) + \nabla (j_L^a + j_g^a) = f^a \end{aligned}$$

Donde j_L^a corresponde al flujo total de aire en la fase líquida, y se define así:

$$j_L^a = i_L^a + \theta_L^a q_L + \theta_L^a S_L \phi \frac{du}{dt} = j_L^a + \theta_L^a S_L \phi \frac{du}{dt}$$

j_g^a corresponde al flujo total de aire en la fase gaseosa, y se expresa como:

$$j_g^a = i_g^a + \theta_g^a q_g + \theta_g^a S_g \phi \frac{du}{dt} = j_g^a + \theta_g^a S_g \phi \frac{du}{dt}$$

Donde f^a hace referencia a la fuente o sumidero, y los términos i están asociados al flujo no advectivo.

Partiendo de la definición de la derivada material y aplicando esta con respecto a la velocidad del sólido, la ecuación de conservación de masa de aire, se puede transformar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) + \nabla(j_L^a + j_g^a) = f^a$$

$$(\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \frac{\partial}{\partial t} \phi + \phi \frac{\partial}{\partial t} (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) + \nabla \left[(j_L^a + \theta_L^a S_L \phi \frac{du}{dt}) + (j_g^a + \theta_g^a S_g \phi \frac{du}{dt}) \right] = f^a$$

Desarrollando el tercer término

$$\nabla \left[(j_L^a + \theta_L^a S_L \phi \frac{du}{dt}) + (j_g^a + \theta_g^a S_g \phi \frac{du}{dt}) \right] = \nabla \left[(j_L^a + j_g^a) + (\theta_L^a S_L \phi \frac{du}{dt} + \theta_g^a S_g \phi \frac{du}{dt}) \right]$$

$$= \nabla(j_L^a + j_g^a) + \nabla \left[\phi \frac{du}{dt} (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \right]$$

$$= \nabla(j_L^a + j_g^a) + (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \left[\frac{du}{dt} \nabla(\phi) + \phi \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) \right] + \left(\phi \frac{du}{dt} \right) \nabla(\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g)$$

$$= \nabla(j_L^a + j_g^a) + (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \frac{du}{dt} \nabla(\phi) + (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \phi \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) + \left(\phi \frac{du}{dt} \right) \nabla(\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g)$$

Remplazando en la expresión inicial

$$(\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \frac{\partial}{\partial t} \phi + \phi \frac{\partial}{\partial t} (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) + \nabla(j_L^a + j_g^a) + (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \frac{du}{dt} \nabla(\phi) + \dots$$

$$\dots + (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \phi \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) + \left(\phi \frac{du}{dt} \right) \nabla(\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) = f^a$$

Organizando términos

$$\left[\phi \frac{\partial}{\partial t} (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) + \left(\phi \frac{du}{dt} \right) \nabla(\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \right] + \left[(\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \frac{\partial}{\partial t} \phi + (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \frac{du}{dt} \nabla(\phi) \right] + \dots$$

$$\dots + (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \phi \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) + \nabla(j_L^a + j_g^a) = f^a$$

Aplicando la derivada material

$$\left[\phi \frac{D_s (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g)}{Dt} \right] + \left[(\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \frac{D_s \phi}{Dt} \right] + (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) + \nabla(j_L^a + j_g^a) = f^a$$

Remplazando la función para el cambio de porosidad

$$\left[\phi \frac{D_s (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g)}{Dt} \right] + \left[(\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) (1 - \phi) \nabla \frac{du}{dt} \right] + (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) + \nabla(j_L^a + j_g^a) = f^a$$

La siguiente expresión corresponde a la transformación de la ecuación de conservación de masa de aire y en ella los flujos quedan expresados con respecto a la fase sólida.

$$\left[\phi \frac{D_s (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g)}{Dt} \right] + (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g) \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) + \nabla(j_L^a + j_g^a) = f^a$$

INCLUYENDO LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS EN LAS ECUACIONES DE BALANCE DE MASA

Para la solución del sistema A Gens & Olivella (2001), plantea utilizar las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$j_g^a = i_g^a + \theta_g^a q_g$$

$$j_L^a = i_L^a + \theta_L^a q_L$$

$$j_g^w = i_g^w + \theta_g^w q_g$$

$$j_L^w = i_L^w + \theta_L^w q_L$$

$$S_L + S_g = \frac{V_L + V_g}{V_V} = 1$$

$$q_L = -K_L (\nabla P_L - \rho_L g)$$

$$q_g = -K_g (\nabla P_g - \rho_g g)$$

$$K_L = k^{k_{rL}} / \mu_L$$

$$K_g = k^{k_{rg}} / \mu_g$$

$$k_{rL} = S_e^{1/2} \left(1 - \left(1 - S_e^{1/2} \right)^2 \right)^2$$

$$S_e = \left(1 + \left(\frac{s}{P} \right)^{1-\lambda} \right)^{-\lambda}$$

$$P(N/m) = \sigma_0(T) = 0.03059 \exp \left(\frac{252.93}{273.15 + T} \right)$$

$$k_{rg} = 1 - k_{rL}$$

$$\rho_L (kg/m^3) = 1002.6 \exp \left(4.5 \times 10^{-4} (P_L - 0.1) - 3.4 \times 10^{-4} T \right)$$

$$\rho_g = \theta_g^a + \theta_g^w$$

$$\theta_g^a = \frac{M_a P_a}{R(273.15 + T)}$$

$$\theta_g^w = \frac{M_w P_w}{R(273.15 + T)}$$

$$M_a = 0.02895 (kg/mol)$$

$$M_g = 0.018 (kg/mol)$$

$$\mu_L (MPa \cdot s) = 2.1 \times 10^{-12} \exp \left(\frac{1808.5}{273.15 + T} \right)$$

$$\mu_g (MPa \cdot s) = 1.48 \times 10^{-12} \frac{(273.15 + T)^{1/2}}{1 + \frac{119}{273.15 + T}}$$

$$i_g^w = -D_g^w \nabla \omega_g^w$$

$$D_g^w = \phi \rho_g S_g \tau D_m^w \bar{I}$$

$$D_m^w (m^2/s) = 5.9 \times 10^{-12} \frac{(273.15 + T)^{2.3}}{P_g}$$

Reemplazando las expresiones anteriores en las ecuaciones de balance se obtiene.

BALANCE DE MASA DE MINERAL

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_s (1 - \phi)) + \nabla j_s = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_s (1 - \phi)) + \nabla j_s = \frac{\partial}{\partial t} (\theta_s (1 - \phi)) + \nabla \left[\frac{du}{dt} \theta_s (1 - \phi) \right] = 0$$

$$(1 - \phi) \frac{\partial}{\partial t} \theta_s + \theta_s \frac{\partial}{\partial t} (1 - \phi) + \theta_s (1 - \phi) \nabla \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} \nabla [\theta_s (1 - \phi)] = 0$$

$$(1-\phi)\frac{\partial}{\partial t}\theta_s + \theta_s\frac{\partial}{\partial t}(1-\phi) + \theta_s(1-\phi)\nabla\frac{du}{dt} + \frac{du}{dt}[(1-\phi)\nabla\theta_s + \theta_s\nabla(1-\phi)] = 0$$

Incógnitas: $t, \phi, \theta_s, \dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z$ (6)

BALANCE DE MASA DE AGUA

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta_L^w S_L \phi + \theta_g^w S_g \phi) + \nabla(j_L^w + j_g^w) = f^w$$

$$\phi\frac{\partial}{\partial t}(\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g) + (\theta_L^w S_L + \theta_g^w S_g)\frac{\partial}{\partial t}\phi + \nabla(j_L^w + j_g^w) = f^w$$

Los términos de flujo son:

1- Flujo de agua en la fase líquida

$$j_L^w = i_L^w + \theta_L^w q_L + \theta_L^w S_L \phi \frac{du}{dt} = -D_L^w \nabla \omega_L^w + \theta_L^w q_L + \theta_L^w S_L \phi \frac{du}{dt}$$

La difusividad de agua en la fase líquida es cero, entonces:

$$j_L^w = \theta_L^w [-K_L (\nabla P_L - \rho_L g)] + \theta_L^w S_L \phi \frac{du}{dt} = \theta_L^w \left[-k^{k_{rL}} / \mu_L (\nabla P_L - \rho_L g) \right] + \theta_L^w S_L \phi \frac{du}{dt}$$

$$j_L^w = \theta_L^w \left[-k \left(\frac{S_e^{1/2} (1 - (1 - S_e^{1/2})^2)}{\mu_L} \right) (\nabla P_L - \rho_L g) \right] + \theta_L^w S_L \phi \frac{du}{dt}$$

$$j_L^w = \theta_L^w \left[-k \frac{\left(\left(\left(1 + \left(\frac{s}{P} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{1/2} \left(1 - \left(1 - \left(\left(1 + \left(\frac{s}{P} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{1/2} \right)^{\lambda} \right)^2 \right)}{\mu_L} (\nabla P_L - \rho_L g) \right] + \theta_L^w S_L \phi \frac{du}{dt}$$

$$j_L^w = \theta_L^w (-k) \frac{\left(\left(\left(1 + \frac{s}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{1/2} \left(1 - \left(\left(1 + \frac{s}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{1/2} \right)^2}{\mu_L} (\nabla P_L - \rho_L g) + \theta_L^w S_L \phi \frac{du}{dt}$$

$$= \omega_L^w \rho_L (-k) \frac{\left(\left(\left(1 + \frac{s}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{1/2} \left(1 - \left(\left(1 + \frac{s}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{1/2} \right)^2}{2.1 \times 10^{-12} \exp\left(\frac{1808.5}{273.15+T}\right)} (\nabla P_L - \rho_L g) + \theta_L^w S_L \phi \frac{du}{dt}$$

$$j_L^W = \omega_L^W 1002.6 \exp(4.5 \times 10^{-4}(P_L - 0.1) - 3.4 \times 10^{-4}T)(-k)^* \dots$$

$$\frac{\left(\left(1 + \frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15 + T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \left(\left(\left(1 + \frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15 + T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}}{2.1 \times 10^{-12} \exp\left(\frac{1808.5}{273.15 + T}\right)} \dots$$

$$\dots \left(\nabla P_L - 1002.6 \exp(4.5 \times 10^{-4}(P_L - 0.1) - 3.4 \times 10^{-4}T)g \right) + \theta_L^W S_L \phi \frac{du}{dt}$$

2- Flujo de agua en la fase gaseosa

$$j_g^W = i_g^W + \theta_g^W q_g + \theta_g^W S_g \phi \frac{du}{dt} = -D_g^W \nabla \omega_g^W + \theta_g^W q_g + \theta_g^W S_g \phi \frac{du}{dt}$$

$$j_g^W = -\phi \rho_g S_g \tau D_m^W \bar{\Gamma} \nabla \omega_g^W + \theta_g^W [-K_L (\nabla P_L - \rho_L g)] + \theta_g^W S_g \phi \frac{du}{dt}$$

$$j_g^W = -\phi \rho_g S_g \tau \left(5.9 \times 10^{-12} \frac{(273.15 + T)^{2.3}}{P_g} \right) \bar{\Gamma} \nabla \omega_g^W + \theta_g^W [-K_g (\nabla P_g - \rho_g g)] + \theta_g^W S_g \phi \frac{du}{dt}$$

$$j_g^W = -\phi \rho_g S_g \tau \left(5.9 \times 10^{-12} \frac{(273.15 + T)^{2.3}}{P_g} \right) \bar{\Gamma} \nabla \omega_g^W + \theta_g^W \left[-k \frac{k_{rg}}{\mu_g} (\nabla P_g - \rho_g g) \right] + \theta_g^W S_g \phi \frac{du}{dt}$$

$$j_g^W = -\phi \rho_g S_g \tau \left(5.9 \times 10^{-12} \frac{(273.15 + T)^{2.3}}{P_g} \right) \bar{\Gamma} \nabla \omega_g^W + \theta_g^W \left[-k \frac{1 - k_{rL}}{\mu_g} (\nabla P_g - \rho_g g) \right] + \theta_g^W S_g \phi \frac{du}{dt}$$

$$j_g^W = \theta_g^W S_g \phi \frac{du}{dt} - \phi \rho_g S_g \tau \left(5.9 \times 10^{-12} \frac{(273.15 + T)^{2.3}}{P_g} \right) \bar{\Gamma} \nabla \omega_g^W + \dots$$

$$\frac{1 - \left(\left(1 + \frac{s}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15 + T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \left(\left(\left(1 + \frac{s}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15 + T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}}{\mu_g} (\nabla P_g - \rho_g g)$$

$$\dots + \theta_g^W (-k)$$

$$j_g^W = \theta_g^W S_g \phi \frac{du}{dt} - \phi (\theta_g^a + \theta_g^w) S_g \tau \left(5.9 \times 10^{-12} \frac{(273.15 + T)^{2.3}}{P_g} \right) \bar{\Gamma} \nabla \omega_g^W + \dots$$

$$\frac{1 - \left(\left(1 + \frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15 + T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \left(\left(\left(1 + \frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15 + T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}}{1.48 \times 10^{-12} \frac{(273.15 + T)^{1/2}}{1 + \frac{119}{273.15 + T}}} (\nabla P_g - (\theta_g^a + \theta_g^w)g)$$

$$\dots + \theta_g^W (-k)$$

$$j_g^w = \theta_g^w S_g \phi \frac{du}{dt} - \phi \left(\frac{M_a P_a}{R(273.15+T)} + \frac{M_w P_w}{R(273.15+T)} \right) S_g \tau \left(5.9 \times 10^{-12} \frac{(273.15+T)^{2.3}}{P_g} \right) \bar{\Gamma} \nabla \omega_g^w + \dots$$

$$1 - \left(\left(\left(\left(\frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\left(\left(\frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\lambda^2} \right)^2$$

$$\dots + \frac{1.48 \times 10^{-12} \frac{(273.15+T)^{1/2}}{1 + \frac{119}{273.15+T}}}{\dots}$$

$$\dots * \frac{M_w P_w}{R(273.15+T)} (-k) \left(\nabla P_g - \left(\frac{M_a P_a}{R(273.15+T)} + \frac{M_w P_w}{R(273.15+T)} \right) g \right)$$

$$j_g^w = \omega_L^w 1002.6 \exp(4.5 \times 10^{-4} (P_L - 0.1) - 3.4 \times 10^{-4} T) S_g \phi \frac{du}{dt} - \dots$$

$$\dots - \phi \left(\frac{0.02895 P_a + 0.018 P_L}{R(273.15+T)} \right) S_g \tau \left(5.9 \times 10^{-12} \frac{(273.15+T)^{2.3}}{P_a} \right) \bar{\Gamma} \nabla \omega_g^w + \dots$$

$$1 - \left(\left(\left(\left(\frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\left(\left(\frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\lambda^2} \right)^2$$

$$\dots + \frac{1.48 \times 10^{-12} \frac{(273.15+T)^{1/2}}{1 + \frac{119}{273.15+T}}}{\dots}$$

$$\dots * \frac{0.018 P_L}{R(273.15+T)} (-k) \left(\nabla P_a - \left(\frac{0.02895 P_a + 0.018 P_L}{R(273.15+T)} \right) g \right)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\theta_L^w S_L + \frac{M_w P_w}{R(273.15+T)} S_g \right) + \left(\theta_L^w S_L + \frac{M_w P_w}{R(273.15+T)} S_g \right) \frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla (j_L^w + j_g^w) = f^w$$

Incógnitas nuevas: $\theta_L^w, S_L, k, P_a, P_L, T, \lambda, g, R, S_g, \tau, \omega_g^w$

BALANCE DE MASA DE AIRE

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_L^a S_L \phi + \theta_g^a S_g \phi) + \nabla (j_L^a + j_g^a) = f^a$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) + (\theta_L^a S_L + \theta_g^a S_g) \frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla (j_L^a + j_g^a) = f^a$$

Los términos de flujo son:

1- Flujo de aire en la fase líquida

$$j_L^a = i_L^a + \theta_L^a q_L + \theta_L^a S_g \phi \frac{du}{dt} = -D_L^a \nabla \omega_L^a + \theta_L^a q_L + \theta_L^a S_g \phi \frac{du}{dt} = \theta_L^a S_L \phi \frac{du}{dt} + i_L^a + \theta_L^a q_L$$

$$j_L^a = \theta_L^a S_L \phi \frac{du}{dt} - D_L^a \nabla \omega_L^a + \theta_L^a q_L = \theta_L^a S_L \phi \frac{du}{dt} - \phi \rho_L S_L \tau D_m^a \nabla \omega_L^a + \theta_L^a [-K_L (\nabla P_L - \rho_L g)]$$

$$j_L^a = \theta_L^a S_L \phi \frac{du}{dt} - \phi \rho_L S_L \tau D_m^a \nabla \omega_L^a + \theta_L^w \left[-k^{k_{rL}} / \mu_L (\nabla P_L - \rho_L g) \right]$$

$$j_L^a = \theta_L^a S_L \phi \frac{du}{dt} - \phi \rho_L S_L \tau D_m^a \nabla \omega_L^a + \theta_L^a \left[-k \left(\frac{S_e^{1/2} \left(1 - \left(1 - S_e^{1/2} \right)^\lambda \right)^2}{\mu_L} \right) (\nabla P_L - \rho_L g) \right]$$

$$j_L^a = \theta_L^a S_L \phi \frac{du}{dt} - \phi \rho_L S_L \tau D_m^a \nabla \omega_L^a + \theta_L^a \left[-k \frac{\left(\left(\left(1 + \left(\frac{s}{P} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{1/2} \left(1 - \left(1 - \left(\left(1 + \left(\frac{s}{P} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{1/2} \right)^\lambda \right)^2 \right)}{\mu_L} (\nabla P_L - \rho_L g) \right]$$

$$j_L^a = \omega_L^a \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt} - \phi \rho_L S_L \tau D_m^a \nabla \omega_L^a + \dots$$

$$\dots + \omega_L^a \rho_L (-k) \frac{\left(\left(\left(1 + \frac{s}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{1/2} \left(1 - \left(1 - \left(\left(1 + \frac{s}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{1/2} \right)^\lambda \right)^2}{\mu_L} (\nabla P_L - \rho_L g)$$

$$j_L^a = \omega_L^a 1002.6 \exp\left(4.5 \times 10^{-4} (P_L - 0.1) - 3.4 \times 10^{-4} T\right) S_L \phi \frac{du}{dt} - \phi \rho_L S_L \tau D_m^a \nabla \omega_L^a + \dots$$

$$\dots + \omega_L^a 1002.6 \exp\left(4.5 \times 10^{-4} (P_L - 0.1) - 3.4 \times 10^{-4} T\right) (-k) * \dots$$

$$\dots * \frac{\left(\left(\left(1 + \frac{s}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{1/2} \left(1 - \left(1 - \left(\left(1 + \frac{s}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{1/2} \right)^\lambda \right)^2}{2.1 \times 10^{-12} \exp\left(\frac{1808.5}{273.15+T}\right)} * \dots$$

$$\dots * (\nabla P_L - 1002.6 \exp\left(4.5 \times 10^{-4} (P_L - 0.1) - 3.4 \times 10^{-4} T\right) g)$$

2- Flujo de aire en la fase gaseosa

$$j_g^a = i_g^a + \theta_g^a q_g + \theta_g^a S_g \phi \frac{du}{dt} = -D_g^a \nabla \omega_g^a + \theta_g^a q_g + \theta_g^a S_g \phi \frac{du}{dt}$$

La difusividad de aires en la fase gaseosa es cero, entonces:

$$j_g^a = \theta_g^a S_g \phi \frac{du}{dt} + \theta_g^a [-K_L (\nabla P_L - \rho_L g)] = \theta_g^a S_g \phi \frac{du}{dt} + \theta_g^w \left[-k \frac{k_{r_g}}{\mu_g} (\nabla P_g - \rho_g g) \right] = \theta_g^a S_g \phi \frac{du}{dt} + \theta_g^w \left[-k \frac{1-k_{r_L}}{\mu_g} (\nabla P_g - \rho_g g) \right]$$

$$j_g^a = \theta_g^a S_g \phi \frac{du}{dt} + \theta_g^a (-k) \frac{1 - \left(\left(1 + \left(\frac{s}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(1 - \left(1 + \left(\frac{s}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\lambda}}{\mu_g} (\nabla P_g - \rho_g g)$$

$$j_g^a = \theta_g^a S_g \phi \frac{du}{dt} + \theta_g^w (-k) \frac{1 - \left(\left(1 + \left(\frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(1 - \left(1 + \left(\frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\lambda}}{1.48 \times 10^{-12} \frac{(273.15+T)^{1/2}}{1 + \frac{119}{273.15+T}}} (\nabla P_g - (\theta_g^a + \theta_g^w) g)$$

$$j_g^a = \frac{M_w P_w}{R(273.15+T)} S_g \phi \frac{du}{dt} + \frac{M_w P_w}{R(273.15+T)} (-k) \left(\nabla P_g - \left(\frac{M_a P_a}{R(273.15+T)} + \frac{M_w P_w}{R(273.15+T)} \right) g \right) * \dots$$

$$\dots * \frac{1 - \left(\left(1 + \left(\frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(1 - \left(1 + \left(\frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\lambda}}{1.48 \times 10^{-12} \frac{(273.15+T)^{1/2}}{1 + \frac{119}{273.15+T}}}$$

$$j_g^a = \frac{M_w P_w}{R(273.15+T)} S_g \phi \frac{du}{dt} + \frac{0.018 P_L}{R(273.15+T)} (-k) \left(\nabla P_a - \left(\frac{0.02895 P_a + 0.018 P_L}{R(273.15+T)} \right) g \right) * \dots$$

$$\dots * \frac{1 - \left(\left(1 + \left(\frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(1 - \left(1 + \left(\frac{P_a - P_L}{0.03059 \exp\left(\frac{252.93}{273.15+T}\right)} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\lambda}}{1.48 \times 10^{-12} \frac{(273.15+T)^{1/2}}{1 + \frac{119}{273.15+T}}}$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\theta_L^a S_L + \frac{M_w P_w}{R(273.15+T)} S_g \right) + \left(\theta_L^a S_L + \frac{M_w P_w}{R(273.15+T)} S_g \right) \frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla (j_L^a + j_g^a) = f^a$$

Incógnitas nuevas: θ_L^a , ω_L^a , D_m^a

ECUACIONES DE BALANCE DE MOMENTUM

Para la deducción de las ecuaciones de conservación de momentum usualmente es realizada partiendo de la primera ley de Newton, a nivel macroscópico, se utiliza una aproximación Eulerina, se considera medio continuo con un volumen de control en coordenadas cartesianas, siendo este un diferencial de forma cubica localizado entre el suelo.

Partiendo de la primera ley de Newton, expresada en forma vectorial:

$$F = ma$$

Dividiendo por el volumen:

$$f = \rho \frac{DV}{Dt}$$

Dividiendo la fuerza por unidad de volumen en fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie:

$$f_{Cuerpo} + f_{Superficie} = \rho \frac{DV}{Dt}$$

Despreciando el efecto de campos electromagnéticos las fuerzas de cuerpo se reducen a la gravitatoria:

$$\rho g + f_{Superficie} = \rho \frac{DV}{Dt}$$

Considerando que las velocidades presentes en problemas de geotecnia medioambiental son bajas, se asume que los términos de fluencia son despreciables en comparación con los términos de esfuerzos, y que las fuerzas inerciales son despreciables. Utilizando las ecuaciones de esfuerzos se obtienen las siguientes tres expresiones:

$$\begin{aligned}\nabla \sigma_x &= 0 \\ \nabla \sigma_y &= 0 \\ \rho g + \nabla \sigma_z &= 0\end{aligned}$$

En notación vectorial las ecuaciones se pueden expresar así:

$$\rho g + \nabla \sigma = 0$$

ECUACIONES DE BALANCE DE ENERGÍA

El balance de energía se expresará en términos de energía interna. Si se asume equilibrio térmico entre las fases, entonces la temperatura será la misma en todas las fases y la energía interna total por unidad de masa de la fase consistirá en la suma de energía interna de cada una de las fases. Para este caso consideraremos:

$$\rho_s = \frac{m_s}{V_s} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$$

Masa de solido por unidad de volumen en fase sólida.

$$\rho_L = \frac{m_w}{V_L} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$$

Masa de agua por unidad de volumen en fase líquida.

$$\rho_g = \frac{m_a}{V_g} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$$

Masa de aire por unidad de volumen en fase gaseosa.

$$S_L = \frac{V_L}{V_v} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$$

Volumen de líquido por unidad de volumen de vacíos.

$$S_g = \frac{V_g}{V_v} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$$

Volumen de gas por unidad de volumen de vacíos.

$$E_i$$

Energía interna en la fase i.

$$\phi = \frac{V_v}{V_T} \cdot \frac{[L]^3}{[L]^3}$$

Porosidad, volumen de vacíos (agua y aire) por unidad de volumen Total.

$$V_T = V_v + V_s; [L]^3$$

De acuerdo con las propiedades de fase de los suelos el volumen total es igual al volumen de vacíos (líquido más gas) más el volumen de sólidos.

La energía interna de la fase solida por unidad de masa de solido puede expresarse como:

$$E_s^s = E_s \rho_s (1 - \phi) = E_s \frac{m_s}{V_s} \left(1 - \frac{V_v}{V_T}\right) = E_s \frac{m_s}{V_s} \left(\frac{V_T - V_v}{V_T}\right) = E_s \frac{m_s}{V_s} \left(\frac{V_s}{V_T}\right) = E_s \frac{m_s}{V_T} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$$

La energía interna de la fase liquida por unidad de masa de agua puede expresarse como:

$$E_L^w = E_L \rho_L S_L \phi = E_L \frac{m_w}{V_L} \frac{V_L}{V_v} \frac{V_v}{V_T} = E_L \frac{m_w}{V_T} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$$

La energía interna de la fase gaseosa por unidad de masa de aire puede expresarse como:

$$E_g^a = E_g \rho_g S_g \phi = E_g \frac{m_a}{V_g} \frac{V_g}{V_v} \frac{V_v}{V_T} = E_g \frac{m_a}{V_T} \cdot \frac{[M]}{[L]^3}$$

$$E_{(Entra)} - E_{(Sale)} = \Delta(E \text{ interna})$$

$$\left(q_x (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta Y \Delta Z \Delta t + q_y (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta X \Delta Z \Delta t + \dots \right)_{Entra}$$

$$\left(\dots + q_z (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta Y \Delta X \Delta t \right)_{Entra}$$

$$\left(\left(q_x + \Delta X \frac{\partial q_x}{\partial X} \right) (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta Y \Delta Z \Delta t + \left(q_y + \Delta Y \frac{\partial q_y}{\partial Y} \right) (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta X \Delta Z \Delta t + \dots \right)_{Sale}$$

$$\left(\dots + \left(q_z + \Delta Z \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta Y \Delta X \Delta t \right)_{Sale}$$

$$= \left(q_x (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta Y \Delta Z \Delta t + q_y (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta X \Delta Z \Delta t + \dots \right)_{Sale}$$

$$\left(\dots + q_z (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta Y \Delta X \Delta t + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t \right)_{Sale}$$

$$E_{(Entra)} - E_{(Sale)} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t = \Delta(E \text{ interna})$$

$$- \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta X \Delta Y \Delta Z \Delta t = \Delta(\Delta V * (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi))$$

$$\Delta \left((E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \right) + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta t = 0$$

$$\lim \Delta t \rightarrow 0 \left[\Delta \left((E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \right) + \left(\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + \frac{\partial q_z}{\partial Z} \right) (E_s \rho_s (1 - \phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \Delta t \right]$$

Considerando el cambio de estado que se genera en la superficie libre, en donde se presenta el calor en el gas, es necesario incluir un flujo conductivo de energía calórica i_c .

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) + \nabla(i_c + E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) = f^E$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) + \nabla(j_c + j_{Es} + j_{El} + j_{Eg}) = f^E$$

Donde j_{El} corresponde al flujo total de energía interna en la fase i , f^E hace referencia a la fuente o sumidero.

Partiendo de la definición de la derivada material y aplicando esta con respecto a la velocidad del sólido, la ecuación de conservación de masa de aire, se puede transformar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) + \nabla(j_c + j_{Es} + j_{El} + j_{Eg}) = f^E$$

Desarrollando el primer término

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) &= \frac{\partial}{\partial t}(E_s \rho_s (1-\phi)) + \frac{\partial}{\partial t}(E_L \rho_L S_L \phi) + \frac{\partial}{\partial t}(E_g \rho_g S_g \phi) \\ (1-\phi) \frac{\partial}{\partial t}(E_s \rho_s) + E_s \rho_s \frac{\partial}{\partial t}(1-\phi) + \phi \frac{\partial}{\partial t}(E_L \rho_L S_L) + (E_L \rho_L S_L) \frac{\partial}{\partial t} \phi + \phi \frac{\partial}{\partial t}(E_g \rho_g S_g) + (E_g \rho_g S_g) \frac{\partial}{\partial t} \phi \end{aligned}$$

Desarrollando el segundo término

$$\begin{aligned} \nabla(j_c + j_{Es} + j_{El} + j_{Eg}) &= \nabla\left(i_c + E_s \rho_s (1-\phi) \frac{du}{dt} + \left(j'_{El} + E_L \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt}\right) + \left(j'_{Eg} + E_g \rho_g S_g \phi \frac{du}{dt}\right)\right) \\ &= \nabla(i_c + j'_{El} + j'_{Eg}) + \nabla\left[\frac{du}{dt}(E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi)\right] \\ &= \nabla(i_c + j'_{El} + j'_{Eg}) + (E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \nabla \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} \nabla(E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \\ &= \nabla(i_c + j'_{El} + j'_{Eg}) + (E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \nabla \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} \left[(1-\phi) \nabla(E_s \rho_s) + E_s \rho_s \nabla(1-\phi) + \phi \nabla(E_L \rho_L S_L) \right. \\ &\quad \left. + E_L \rho_L S_L \nabla \phi + \phi \nabla(E_g \rho_g S_g) + E_g \rho_g S_g \nabla \phi \right] \end{aligned}$$

Remplazando en la expresión inicial y organizando términos

$$\begin{aligned} \left[\phi \frac{\partial}{\partial t}(E_L \rho_L S_L) + \phi \frac{\partial}{\partial t}(E_g \rho_g S_g) + \frac{du}{dt} \phi \nabla(E_L \rho_L S_L) + \frac{du}{dt} \phi \nabla(E_g \rho_g S_g) \right] + \left[(1-\phi) \frac{\partial}{\partial t}(E_s \rho_s) + \frac{du}{dt} (1-\phi) \nabla(E_s \rho_s) \right] + \dots \\ \dots \left[(E_L \rho_L S_L) \frac{\partial}{\partial t} \phi + (E_g \rho_g S_g) \frac{\partial}{\partial t} \phi + \frac{du}{dt} E_L \rho_L S_L \nabla \phi + \frac{du}{dt} E_g \rho_g S_g \nabla \phi \right] + \left[E_s \rho_s \frac{\partial}{\partial t}(1-\phi) + \frac{du}{dt} E_s \rho_s \nabla(1-\phi) \right] + \dots \\ \dots + (E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \nabla \frac{du}{dt} + \nabla(i_c + j'_{El} + j'_{Eg}) = f^E \end{aligned}$$

Aplicando la derivada material

$$\begin{aligned} \left[\phi \frac{D_s(E_L \rho_L S_L + E_g \rho_g S_g)}{Dt} \right] + \left[(1-\phi) \frac{D_s(E_s \rho_s)}{Dt} \right] + \left[(E_L \rho_L S_L + E_g \rho_g S_g) \frac{D_s \phi}{Dt} \right] + \left[E_s \rho_s \frac{D_s(1-\phi)}{Dt} \right] + \dots \\ \dots + (E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \nabla \frac{du}{dt} + \nabla(i_c + j'_{El} + j'_{Eg}) = f^E \end{aligned}$$

Remplazando la función para el cambio de porosidad

$$\begin{aligned} \left[\phi \frac{D_s(E_L \rho_L S_L + E_g \rho_g S_g)}{Dt} \right] + \left[(1-\phi) \frac{D_s(E_s \rho_s)}{Dt} \right] + \left[(E_L \rho_L S_L + E_g \rho_g S_g) (1-\phi) \nabla \frac{du}{dt} \right] + \left[-E_s \rho_s (1-\phi) \nabla \frac{du}{dt} \right] + \dots \\ \dots + (E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \nabla \frac{du}{dt} + \nabla(i_c + j'_{El} + j'_{Eg}) = f^E \end{aligned}$$

La siguiente expresión corresponde a la transformación de la ecuación de conservación de energía y en ella los flujos quedan expresados con respecto a la fase sólida.

$$\phi \frac{D_s(E_L \rho_L S_L + E_g \rho_g S_g)}{Dt} + (1-\phi) \frac{D_s(E_s \rho_s)}{Dt} + (E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) \nabla \frac{du}{dt} + \nabla(i_c + j'_{El} + j'_{Eg}) = f^E$$

Para la solución de la ecuación de balance de energía A Gens & Olivella (2001), plantea utilizar las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$i_c = -\lambda \nabla T$$

$$\lambda = \lambda_s^{(1-\phi)} \lambda_L^{\phi} \lambda_g^{\phi(1-S_L)} = \lambda_{sat}^{S_L} \lambda_{dry}^{1-S_L}$$

$$\lambda_{sat} = \lambda_s^{(1-\phi)} \lambda_L^{\phi}$$

$$\lambda_{dry} = \lambda_s^{(1-\phi)} \lambda_g^{\phi}$$

$$E_s = c_s T$$

$$E_g \rho_g = (E_g^w \omega_g^w + E_g^a \omega_g^a) \rho_g = E_g^w \theta_g^w + E_g^a \theta_g^a$$

$$E_L \rho_L = (E_L^w \omega_L^w + E_L^a \omega_L^a) \rho_L = E_L^w \theta_L^w + E_L^a \theta_L^a$$

$$E_L^w \left(\frac{J}{Kg} \right) = 4180.0(T - T_0)$$

$$E_L^a \left(\frac{J}{Kg} \right) = 1006.0(T - T_0)$$

$$E_g^a \left(\frac{J}{Kg} \right) = 1006.0(T - T_0)$$

$$E_g^w \left(\frac{J}{Kg} \right) = 2.5 \times 10^6 + 1900.0(T - T_0)$$

$$j_{Es} = E_s \rho_s (1-\phi) \frac{du}{dt}$$

$$j_{EL} = j'_{EL} + E_L \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt} = j'_L{}^w E_L^w + j'_L{}^a E_L^a + E_L \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt}$$

$$j_{Eg} = j'_{Eg} + E_g \rho_g S_g \phi \frac{du}{dt} = j'_g{}^w E_g^w + j'_g{}^a E_g^a + E_L \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt}$$

Reemplazando las ecuaciones constitutivas en la expresión de balance de energía.

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) + \nabla(i_c + j_{Es} + j_{EL} + j_{Eg}) = f^E$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_s \rho_s (1-\phi) + E_L \rho_L S_L \phi + E_g \rho_g S_g \phi) + \nabla \left(i_c + E_s \rho_s (1-\phi) \frac{du}{dt} + \left(j'_L{}^w E_L^w + j'_L{}^a E_L^a + E_L \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt} \right) + \left(j'_g{}^w E_g^w + j'_g{}^a E_g^a + E_L \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt} \right) \right) = f^E$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_s \rho_s (1-\phi) + (E_L^w \theta_L^w + E_L^a \theta_L^a) \rho_L S_L \phi + (E_g^w \theta_g^w + E_g^a \theta_g^a) \rho_g S_g \phi) + \dots$$

$$\dots + \nabla \left(-\lambda \nabla T + E_s \rho_s (1-\phi) \frac{du}{dt} + \left(j'_L{}^w E_L^w + j'_L{}^a E_L^a + (E_L^w \theta_L^w + E_L^a \theta_L^a) \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt} \right) + \left(j'_g{}^w E_g^w + j'_g{}^a E_g^a + (E_g^w \theta_g^w + E_g^a \theta_g^a) \rho_g S_g \phi \frac{du}{dt} \right) \right) = f^E$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (c_s T \rho_s (1-\phi) + (4180.0(T - T_0) \theta_L^w + 1006.0(T - T_0) \theta_L^a) \rho_L S_L \phi + ((2.5 \times 10^6 + 1900.0(T - T_0)) \theta_g^w + 1006.0(T - T_0) \theta_g^a) \rho_g S_g \phi) + \dots$$

$$\dots + \nabla \left(-(\lambda_s^{(1-\phi)} \lambda_L^{\phi} * \lambda_s^{(1-\phi)} \lambda_g^{\phi}) \nabla T + c_s T \rho_s (1-\phi) \frac{du}{dt} + \left(j'_L{}^w 4180.0(T - T_0) \theta_L^w + j'_L{}^a 1006.0(T - T_0) \theta_L^a + \left(4180.0(T - T_0) \theta_L^w + 1006.0(T - T_0) \theta_L^a \right) \rho_L S_L \phi \frac{du}{dt} \right) + \left(j'_g{}^w (2.5 \times 10^6 + 1900.0(T - T_0)) + j'_g{}^a 1006.0(T - T_0) \theta_g^a + \left((2.5 \times 10^6 + 1900.0(T - T_0)) \theta_g^w + 1006.0(T - T_0) \theta_g^a \right) \rho_g S_g \phi \frac{du}{dt} \right) \right) = f^E$$