

Trabajo de grado presentado como requisito para  
optar por el título de informático matemático

# **Conjuntos con órbita acotada para semigrupos de funciones analíticas**

Andrés Felipe Fang Fernández

Mayo 2013

Pontificia Universidad Javeriana  
Facultad de Ciencias  
Carrera de Informática Matemática

**Directores**

Prof. Renato Colucci, Ph.D.

Prof. Gerardo Román Chacón Pérez, Ph.D.

“Una vez que has entregado el alma, lo demás sigue con absoluta certeza, incluso en pleno caos” Henry Miller



---

## NOTA DE ADVERTENCIA

Artículo 23 de la Resolución N° 13 de Julio de 1946

“La Universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Solo velará por que no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y por que las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vea en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia”.



# Tabla de Contenido

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>1 Marco teórico</b>	<b>3</b>
1.1 Sistemas Dinámicos . . . . .	3
1.2 Sistemas Dinámicos Complejos . . . . .	4
1.3 Conjunto de Julia . . . . .	5
1.4 Sistemas Dinámicos Complejos para semigrupos . . . . .	5
1.4.1 Ramas Acotadas . . . . .	6
1.4.2 Atractores . . . . .	6
<b>2 Resultados principales</b>	<b>9</b>
2.1 Resumen . . . . .	9
2.2 Representación computacional . . . . .	9
2.2.1 Construcción del árbol de la órbita hacia delante . . . . .	10
2.2.2 Construcción del plano de atractores . . . . .	10
2.2.3 Graficación del plano de atractores . . . . .	11
<b>Bibliografía</b>	<b>13</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>15</b>





# Resumen

En la siguiente tesis se diseñó y se desarrolló una herramienta que permite representar métodos útiles para la descripción y definición de atractores para semigrupos de funciones analíticas.

El documento se divide en dos partes importantes, la primera parte se dedica a la presentación y definición de conceptos básicos para entender el desarrollo de la aplicación como lo es la definición de sistemas dinámicos, la definición del conjunto de Julia y propiedades relevantes de estos conjuntos.

La segunda parte mostrará cómo se realizó la construcción de una aplicación parametrizable desarrollada en JAVA en la que se programaron los algoritmos de detección de atractores y simulación de resultados para semigrupos de funciones analíticas con resultados tanto en dos dimensiones como en tres dimensiones.



# 1 Marco teórico

El objetivo de este marco teórico es dar las pautas para contextualizar y entender los conceptos principales que llevarán al correcto entendimiento de la teoría de atractores.

Primero se hará una introducción a la definición de sistemas dinámicos clásicos, luego se ampliará el concepto para sistemas dinámicos complejos, la inclusión de semigrupos y los métodos utilizados para poder medir los atractores de los mismos.

## 1.1 Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico es una transformación  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  en un espacio métrico  $(X, d)$ . Se denota como  $\{\mathbf{X}; f\}$ .

Los sistemas dinámicos involucran el hecho de iterar una función repetidamente. Iterar una función repetidamente significa evaluar una función una y otra vez usando el resultado de su aplicación inmediatamente anterior como el nuevo parámetro de entrada. Para una función  $f$ ,  $f^2(x)$  significa la segunda iteración de  $f$ , de donde se introduce que  $f^n$  es la  $n$ -ésima iteración de la función  $f$  evaluada en  $x$ . De lo anterior se desprende la siguiente definición:

**Definición 1.1.** La órbita de un punto  $x \in \mathbf{X}$  es la secuencia  $\{f^{on}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  de acuerdo con [Bar88].  $\square$

La teoría de los sistemas dinámicos está interesada en el comportamiento de la órbita, de donde nacen las siguientes definiciones:

**Definición 1.2.** Sea  $\{\mathbf{X}; f\}$  un sistema dinámico. Un *punto fijo* de  $f$  es un punto  $x \in \mathbf{X}$  tal que  $f(x) = x$ .  $\square$

**Definición 1.3.** Sea  $\{\mathbf{X}; f\}$  un sistema dinámico. Un *punto periódico* de  $f$  es un punto  $x \in \mathbf{X}$  tal que  $f^{on}(x) = x$  para algún  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Si  $x$  es un punto periódico de  $f$  entonces un entero  $n$  tal que  $f^{on}(x) = x, n \in \{1, 2, 3, \dots\}$  es llamado un periodo de  $x$ . El último de estos enteros es llamado el *periodo mínimo* del punto periódico  $f$ . La órbita de un punto periódico de  $f$  es llamado el *ciclo* de  $f$ .  $\square$

**Definición 1.4.** Sea  $\{\mathbf{X}; f\}$  un sistema dinámico y sea  $x_f \in \mathbf{X}$  un punto fijo de  $f$ . El punto  $x_f$  es llamado un punto fijo de atracción de  $f$  si existe un número  $\epsilon > 0$  tal que  $f$  mapea la bola  $B(x_f, \epsilon) = \{y \in \mathbf{X} : d(x_f, y) \leq \epsilon\}$ .  $\square$

**Definición 1.5.** Sea  $\{\mathbf{X}; f\}$  un sistema dinámico y sea  $x_f \in \mathbf{X}$  un punto fijo de  $f$ . El punto  $x_f$  es llamado un punto fijo repulsivo de  $f$  si hay números  $\epsilon > 0$  y  $C > 1$  tal que  $d(f(x_f), f(y)) \geq Cd(x_f, y)$  para todo  $y \in B(x_f, \epsilon)$ .  $\square$

## 1.2 Sistemas Dinámicos Complejos

Un sistema dinámico complejo es una transformación  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  en un espacio métrico  $(\mathbb{C}, d)$ .

Según [Dev92] la dinámica de la función cuadrática  $Q_0(z) = z^2$  en el plano complejo es especialmente fácil de entender, a modo de ejemplo. Al escribir  $z_0 = re^{i\theta}$  se observa la órbita de  $z_0$  sobre  $Q_0$  la cual está dada por:

$$\begin{aligned} z_0 &= re^{i\theta} \\ z_0^2 &= r^2 e^{i(2\theta)} \\ &\vdots \\ z_0^4 &= r^4 e^{i(4\theta)} \\ z_0^n &= r^{2^n} e^{i(2^n \theta)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Con lo que se puede concluir que la órbita de  $z_0$  tiende a tres posibles resultados:

- Si  $r < 1$ ,  $r^{2^n} \rightarrow 0$  mientras  $n \rightarrow \infty$  por lo que  $|Q_0^n(z_0)| \rightarrow 0$ .
- Si  $r > 1$ ,  $r^{2^n} \rightarrow \infty$  mientras  $n \rightarrow \infty$  por lo que  $|Q_0^n(z_0)| \rightarrow \infty$ .
- $r = 1$  es el círculo unitario. Si  $|z_0| = 1$  entonces  $|Q_0^n(z_0)| = 1$ .

El último caso hace referencia al caso en que el radio es igual a uno, por lo que sin importar el valor del ángulo la imagen de la función estará en el círculo unitario, pero el hecho de que el ángulo  $\theta$  se duplique en cada nueva iteración en la órbita hace que cuando esta tienda al infinito tenga un comportamiento caótico.

De esta forma se puede escribir el plano complejo como la unión de dos regiones complementarias, cuyas regiones contienen al conjunto de órbitas con dinámica regular o convergente y al conjunto de las órbitas con dinámica irregular o caótica.

Las órbitas convergentes son aquellas que tienden a un punto definido como el caso de  $r < 1$  mencionado anteriormente, mientras que en los otros dos casos la dinámica es caótica de acuerdo a las demostraciones de Devaney en [Dev92].

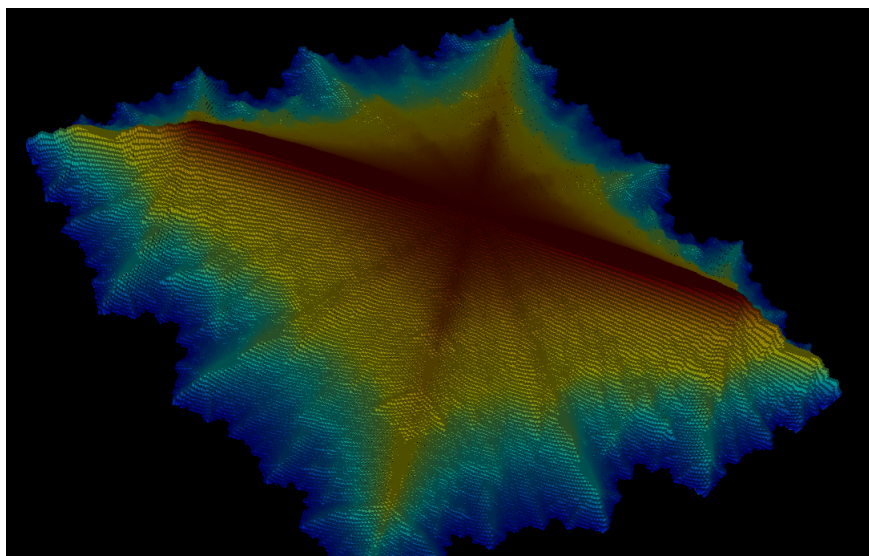
Se dice que la órbita de  $z$  bajo  $Q_c$  está *acotada* si existe un  $K$  tal que  $|Q_c^n(z)| < K$  para todo  $n$ . De otra forma se dice que la órbita es *no acotada*.

## 1.3 Conjunto de Julia

Sea  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  un polinomio de grado mayor a uno. Sea  $F_f$  el conjunto de puntos en  $\mathbb{C}$  cuyas órbitas convergen, es decir:

$$F_f = \{z \in \mathbb{C} : \{|f^{on}(z)|\}_{n=0}^{\infty} \text{ está acotado.}\}$$

Este conjunto es llamado el *Conjunto Lleno de Julia* asociado al polinomio  $f$ . La frontera de  $F_f$  es llamado el *Conjunto de Julia* del polinomio  $f$  y es denotado como  $J_f$  según [Bar88].



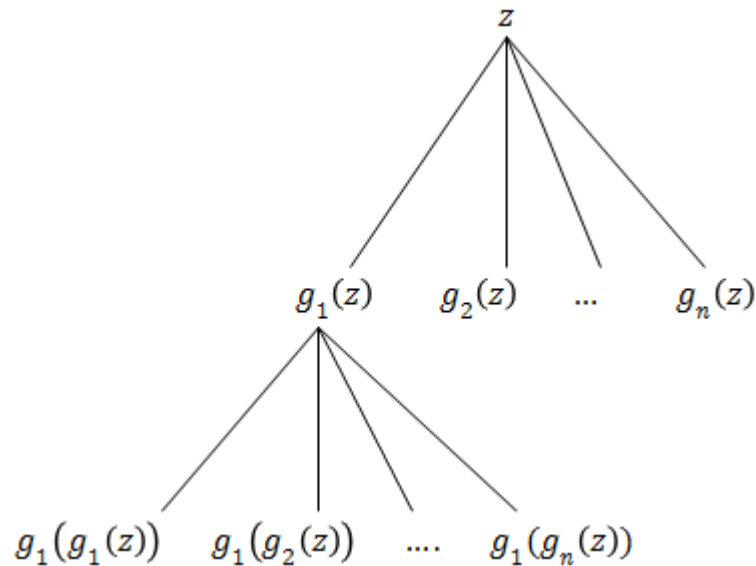
**Figure 1.1:** Convergencia del conjunto de Julia para el semigrupo  $G = \langle g_1, g_2 \rangle$  siendo  $g_1 = z^2$  y  $g_2 = z^2 - 1$

## 1.4 Sistemas Dinámicos Complejos para semigrupos

Los sistemas dinámicos complejos para semigrupos son la generalización de la dinámica compleja clásica pero estudiada con un número finito de polinomios  $G = \langle g_1, \dots, g_N \rangle$ .

Se introduce en [GRD12] que para cada punto  $z$  se puede denotar como  $T(z)$  al árbol de la órbita hacia delante con raíz en  $z$ .

Donde la órbita de un Sistema Dinámico Complejo se define como el árbol enario con raíz en  $z$  donde cada nivel se compone por los valores  $g(z)$  de las funciones  $g$  quienes han hecho la composición de los generadores de  $G$  desde la raíz. Cada nivel  $k$  del árbol tiene  $N^k$  nodos, donde  $N$  es el número de funciones en  $G$ .



Al igual que en los sistemas dinámicos tradicionales, en los semigrupos se busca estudiar el comportamiento de la órbita, para este caso se estudia en cada nivel del árbol  $T(z)$  bajo los parámetros nombrados a continuación.

### 1.4.1 Ramas Acotadas

Supongase  $z_o$  un punto fijo de atracción de  $F$ , La *cuenca de atracción* de  $x_o$  es el conjunto de todos los puntos cuya órbita tiende a  $x_o$ .

Cuando la órbita de todas las ramas de un árbol tiende a infinito, se denomina por Boyd en [Boy99] como  $A_\infty(G)$  con el fin de representar la *cuenca de atracción de infinito*. Se llamará  $A_o(G)$  al conjunto de ramas que están acotadas y se representará así

$$A_o(G) = \{z \in \mathbb{C} : q_k^i(z) \text{ está acotado para todo } k \in \mathbb{N} \text{ y } \forall i = 1, \dots, N^k\}$$

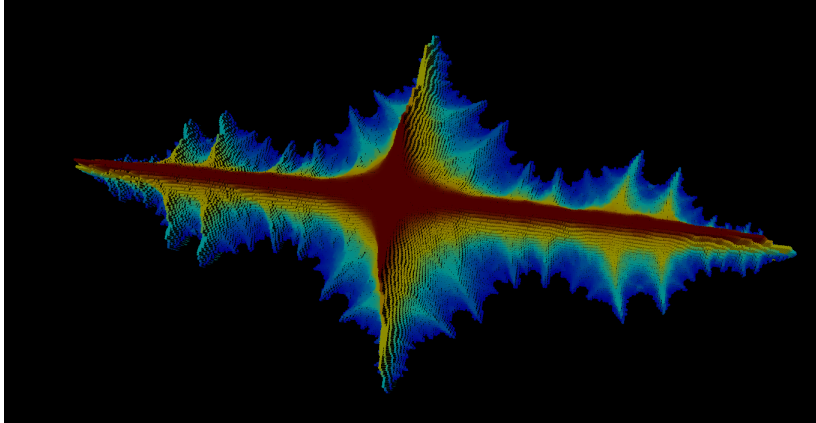
Donde el conjunto  $\{q_k^i(z) : i = 1, \dots, N^k\}$  representa todos los hijos del árbol al  $k$ -ésimo nivel del árbol  $T_k(z)$  de la órbita hacia delante del semigrupo en  $z$ .

### 1.4.2 Atractores

Al estudiar la órbita de los sistemas dinámicos se puede encontrar que hay casos intermedios entre  $A_o(G)$  y  $A_\infty(G)$  que vale la pena resaltar. En [GRD13] se estudian las ramas acotadas del árbol de la órbita hacia delante de  $T(z)$ , también se introduce la idea de que a cada nivel  $k$  del árbol, hay una función  $m_k$  que cuenta la proporción de hijos que permanecen dentro de una bola fija de radio  $R$  en el plano complejo. Para la elección de este radio se puede encontrar un teorema en [GRD13].

La función  $m(z)$  es definida como el límite de  $m_{k \rightarrow \infty}$ .

La importancia de la función  $m(z)$  radica en el hecho de que permite estudiar todos los casos intermedios entre  $A_0(G)$  y  $A_\infty(G)$ . Ver ejemplo en Fig. 1.2



**Figure 1.2:** Atractores de semigrupo para  $g_1 = z^2 - 1$  y  $g_2 = z^2 - 1.476$





# 2 Resultados principales

## 2.1 Resumen

En el siguiente capítulo se explicará la abstracción de los conceptos matemáticos repasados en el marco teórico y se ilustrará detenidamente cómo se definió cada uno de ellos para poder llevar a cabo una representación gráfica de los atractores para semigrupos. El algoritmo numérico creado para la representación de los atractores hace principal uso de la función  $m$  que mide la proporción de convergencia de las hojas del árbol  $T_k(z)$  para un nivel  $k$  del sistema dinámico generado en cada punto del plano complejo en el intervalo  $[-2, 2]$  tanto vertical como horizontalmente.

## 2.2 Representación computacional

Para poder hacer una representación abstracta de la teoría matemática del marco teórico se debió tener en cuenta el universo en el que se trabajó, es decir, examinar cada instancia matemática con la que se interactuó y definirla computacionalmente, en las cuales se incluyen las siguientes:

- Definición de números complejos
- Árbol de la órbita hacia delante de un sistema dinámico para semigrupos
- Plano Complejo
- Función  $m$

A partir de estas se puede generar una interpretación de los atractores para funciones analíticas mediante dos algoritmos importantes que se explicarán en las siguientes subsecciones.

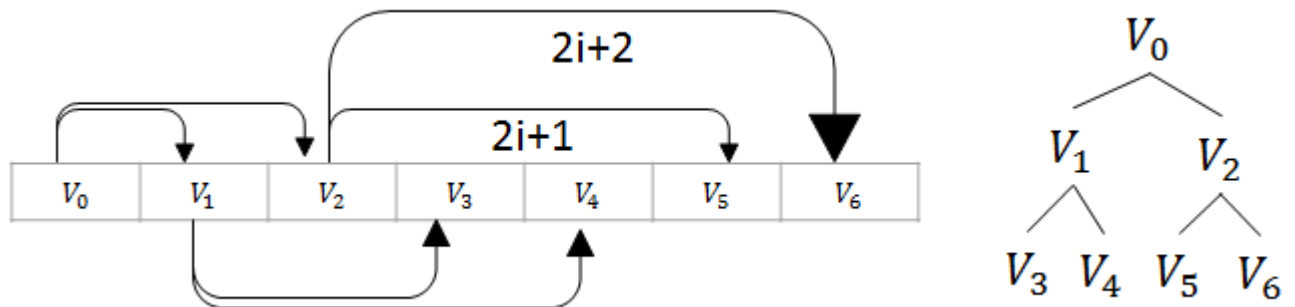
Adicionalmente la teoría afirma que el plano complejo tiene una representación continua, pero al tratar de representar la continuidad se deben establecer valores discretos lo suficientemente pequeños para que la forma discreta simule la forma continua, para este caso particular el  $\delta$  o tamaño del paso es 0,01, este valor se obtiene de la división de 400 píxeles en el intervalo  $[-2, 2]$ . Por lo que en el plano se buscará encontrar atractores para 160.000 números complejos.

El color de las imágenes presentadas hace referencia a la paleta de colores rojo-verde-azul siendo rojo la proporción 1 y azul la proporción cuando tiende a cero, si es cero no hay imagen.

## 2.2.1 Construcción del árbol de la órbita hacia delante

En la sec. 1.4 se define la órbita de un sistema dinámico como el árbol eneario de la composición de funciones en  $G$ . Para el caso de  $G = \langle g_1, g_2 \rangle$  se genera el árbol binario perfecto que se puede modelar con un arreglo de números  $V$ , un árbol binario perfecto es aquél que tiene todas sus hojas (vértices sin hijos) al mismo nivel, dicho arreglo tiene como elemento  $V_0$  a la raíz del árbol y cada elemento  $V_i$  es hijo de  $V_{\lfloor (i-1)/2 \rfloor}$ , a su vez cada elemento  $V_i$  es padre de sus dos hijos  $V_{2i+1}$  y  $V_{2i+2}$  como lo ilustra la gráfica Fig. 2.1

**Figure 2.1:** Representación del árbol binario como un vector



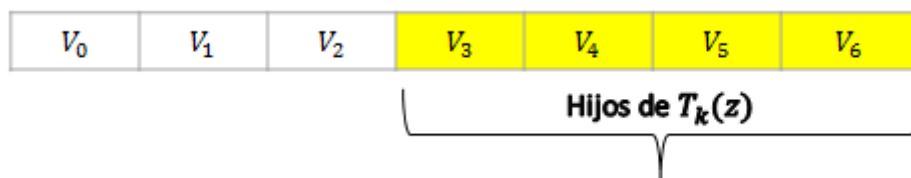
Los hijos de cada nodo son la composición de las funciones de  $G$ , para el ejemplo, el hijo izquierdo es la composición con  $g_1$  y el hijo derecho la composición con  $g_2$ .

De tal forma que, para cada punto  $z \in \mathbb{C}$  se puede construir su órbita en el arreglo  $V$ . El tamaño del arreglo es  $2^k$  donde  $k$  es el parámetro de la función  $m_k$ .

## 2.2.2 Construcción del plano de atractores

Una vez calculada la órbita para cada uno de los puntos del plano, se debe calcular la proporción de todas las hojas del árbol  $T_k(z)$  cuyo valor sea menor a  $R$ , siendo  $R$  el radio calculado en [GRD13]. Para calcular el valor de la función  $m_k$  se calcula la proporción de las hojas del árbol, por lo que estas se encuentran desde la posición  $2^{k-1}$  del arreglo  $V$  Fig. 2.2.

La función  $m_k$  arroja una proporción entre 0 y 1 para la pareja  $(x, y)$  en el plano complejo, de esta forma se puede observar si en el punto  $(x, y)$  hay un atractor para el semigrupo.



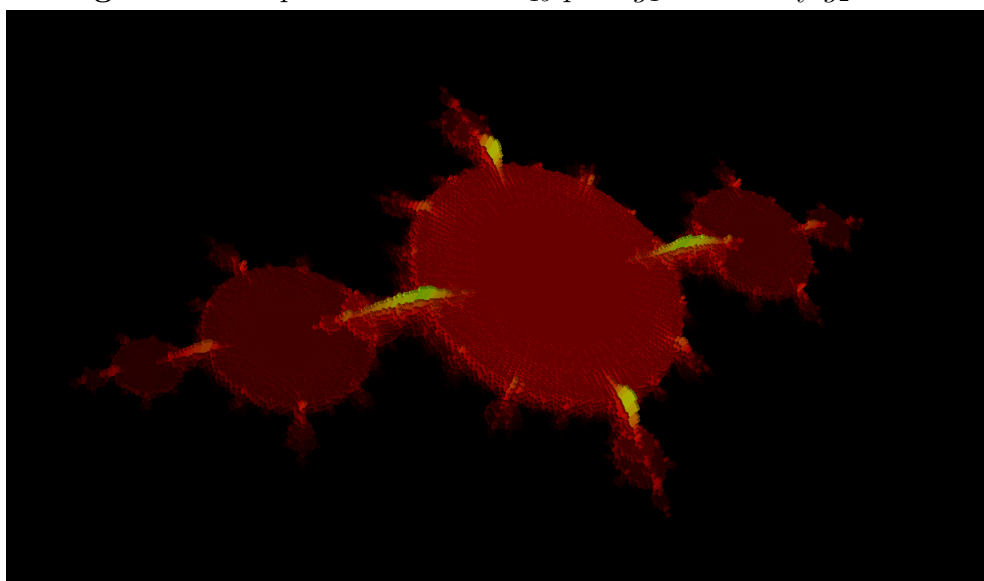
**Figure 2.2:** Hijos de un árbol binario completo representados en un vector.

### 2.2.3 Graficación del plano de atractores

Graficar los valores encontrados en el plano de atractores permite observar el comportamiento de los semigrupos en el plano, permite hacer conjeturas y en un punto podría ayudar a formalizar la teoría del comportamiento de los mismos.

Después de que se ha construido el plano de atractores se hace una representación de la función  $m$  parametrizándola en un plano 3D con una altura y color definidos para cada punto entre 0 y 1, el ejemplo del semigrupo  $G = \langle g_1, g_2 \rangle$  tal que  $g_1 = z^2 - 1$  y  $g_2 = 2z^2$  y  $m_k$  tal que  $k = 15$  se ve en Fig. 2.3.

**Figure 2.3:** Representación de  $m_{15}$  para  $g_1 = z^2 - 1$  y  $g_2 = 2z^2$





# Bibliografía

- [Bar88] Michael Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press, Inc, 1988.
- [Boy99] D. Boyd. *An invariant measure for finitely generated rational semigroups*. Complex Variables Theory Appl. 39, 1999.
- [Dev92] Robert L. Devaney. *First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Westview Press, 1992.
- [GRD12] Chacón G., Colucci R., and D'Angeli D. Density of bounded branches on the julia set of a semigroup. Preprint 2012.
- [GRD13] Chacón G., Colucci R., and D'Angeli D. Bounded branches of semigroups generated by polynomials. 2013.



# Nomenclatura

$\hat{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Plano Complejo extendido también llamado esfera de Riemann.
$\mathbb{C}$	Representación para el conjunto de los números complejos.
$A_\infty(G)$	$A_\infty(G)$ Cuenca de atracción de infinito, órbita cuyas ramas tienden a infinito.
$f^n$	$f^n$ es la n-ésima iteración de la función $f$ evaluada en un punto.
$Q_0(z)$	$Q_0(z)$ Es la ecuación cuadrática $z^2 + 0$ , tal que $z \in \mathbb{C}$ .
$z_0 = re^{i\theta}$	$z_0 = re^{i\theta}$ definición de número complejo en notación polar.