

Pontificia Universidad Javeriana.

Facultad de Ciencias.

Departamento de Matemáticas.

INTRODUCCIÓN GRÁFICA A LAS SUPERÁLGEBRAS DE LIE CLÁSICAS

Daniel Ruiz Restrepo

Directora: Eddy Pariguán

Bogotá - Colombia

Noviembre de 2015

Índice general

Agradecimientos	4
Introducción	5
1. Conceptos básicos de álgebras de Lie	8
2. Superálgebras de Lie	17
2.1. Conceptos básicos de superálgebras	17
2.2. Superálgebras de Lie	19
2.3. Superálgebra Lineal General	22
2.4. Representación gráfica de las Superálgebras de Lie clásicas	24
3. Superálgebra lineal especial $\mathfrak{sl}(m n)$	27
3.1. Superálgebra lineal especial $\mathfrak{sl}(2 1)$	28
3.1.1. Base para $\mathfrak{sl}(2 1)$	28
3.1.2. Subálgebra de Cartan	29
3.1.3. Sistema de raíces	29
3.1.4. Sistema de corraíces	30
3.1.5. Matriz de Cartan y diagrama de Dynkin	31
3.2. Superálgebra lineal especial $\mathfrak{sl}(m n)$	32
3.2.1. Conjunto de generadores $\mathfrak{sl}(m n)$	32
3.2.2. Subálgebra de Cartan	32

3.2.3.	Sistema de raíces	33
3.2.4.	Sistema de corraíces	33
3.2.5.	Matriz de Cartan y diagrama de Dynkin	34
4.	Superálgebra de Lie Ortosimpléctica impar $\mathfrak{osp}(2m + 1 2n) = B(m, n)$	36
4.1.	Conjunto de generadores $\mathfrak{osp}(2m + 1 2n)$	37
4.2.	Subálgebra de Cartan	38
4.3.	Sistema de raíces	38
4.4.	Sistema de corraíces	40
4.5.	Matriz de Cartan y diagrama de Dynkin	42
5.	Superálgebra de Lie Ortosimpléctica par $\mathfrak{osp}(2m 2n) = D(m, n)$	45
5.1.	Conjunto de generadores $\mathfrak{osp}(2m 2n)$	46
5.2.	Subálgebra de Cartan	46
5.3.	Sistema de raíces	46
5.4.	Sistema de corraíces	48
5.5.	Matriz de Cartan y diagrama de Dynkin	49
6.	Superálgebra de Lie Ortosimpléctica $\mathfrak{osp}(2 2n) = C(n + 1)$	50
6.1.	Generadores $\mathfrak{osp}(2 2n)$	50
6.2.	Subálgebra de Cartan	51
6.3.	Sistema de raíces	51
6.4.	Sistema de corraíces	52
6.5.	Matriz de Cartan y diagrama de Dynkin	53

Agradecimientos

Le agradezco a mis padres Bernardo y Esperanza por darme la oportunidad de estudiar en tan prestigiosa universidad, por siempre brindarme lo que necesito y asegurarse que nunca me falte nada. A mis hermanas María Angélica y Alejandra, a mis amigos y mi novia. A los profesores de la carrera, que aportaron un poco para hacer de mi lo que soy hoy en día. Adicionalmente quiero agradecer a Germán Combariza y a Andrés Vargas por los comentarios y los aportes a este trabajo de grado. Especialmente quiero agradecer a mi directora de tesis Eddy Pariguan por la ayuda, comprensión y paciencia. Finalmente a la Pontificia Universidad Javeriana por la financiación parcial de este trabajo a través del proyecto titulado “Semillero de Investigación. Teoría combinatoria y aplicaciones” con ID 00005841.

Introducción

Las superálgebras de Lie son generalizaciones de las álgebras de Lie. Una superálgebra de Lie es una superálgebra o álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada sobre un cuerpo con característica cero, en donde la operación $[,]$ (llamada supercorchete de Lie) debe cumplir las 3 propiedades siguientes: bilinealidad, superantisimetría y superidentidad de Jacobi. La importancia de las superálgebras de Lie recae en las áreas de la matemática y de la física. En [15], Kac escribe que el interés del campo de superálgebras apareció en la década de los 70's en física y más concretamente en el contexto de la supersimetría [6, 17, 24]. Una gran cantidad de resultados sobre superálgebras y álgebras graduadas ha sido escrito por Kac, Zelmanov, Wall, Shestakov y otros ([11, 22]). Además de la supersimetría en física, las superálgebras tienen aplicaciones en diferentes áreas de la matemática como la Geometría Algebraica, Teoría de Categorías, Grupos Cuánticos, entre otros. Teniendo en cuenta su importancia, resulta útil contar con una representación gráfica de éstas para facilitar el estudio y los cálculos en estos espacios abstractos. Por tanto, el presente proyecto tiene como objetivo realizar el estudio y la representación gráfica por medio de grafos dirigidos de las superálgebras de Lie clásicas. Cabe mencionar que la notación diagramática tiene diferentes aplicaciones en las matemáticas. Por ejemplo, en álgebra lineal, en Teoría de Representaciones y en Supersimetría. Para el caso del presente proyecto se utilizarán para la representación gráfica de las superálgebras de Lie clásicas.

Iniciaremos recopilando información de los libros propuestos en la bibliografía [8, 16, 18] entre otras, y en particular nos concentraremos en el artículo [5] el cual presenta una introducción gráfica a las álgebras de Lie.

La idea principal del trabajo será realizar el estudio completo de las superálgebras clásicas $\mathfrak{sl}(m|n)$, $\mathfrak{osp}(2m|2n)$, $\mathfrak{osp}(2m-1|2n)$ y $\mathfrak{osp}(2|2n)$ por medio de la representación gráfica mencionada. Primero se estudiarán las bases de estos espacios y se reemplazarán por los grafos equivalentes, teniendo así una forma más óptima y sencilla para trabajar y realizar operaciones con los elementos. A partir del desarrollo de los grafos, se calculará el álgebra de Cartan, la cual se define como la subálgebra maximal nilpotente que coincide con su propio normalizador. Para las superálgebras clásicas esta subálgebra se reduce a la subálgebra de Cartan de la parte par. Luego revisaremos el sistema de raíces de la superálgebra asociado al álgebra de Cartan. Para hallar el sistema de raíces de \mathfrak{g} , dado por $\Phi = \Phi_0 \cup \Phi_1$, se debe hallar Φ_0 y Φ_1 , donde Φ_0 es el sistema de raíces de la parte par de \mathfrak{g} y Φ_1 es un sistema de pesos para la representación de \mathfrak{g}_0 sobre \mathfrak{g}_1 . El espacio vectorial generado por todas las posibles raíces se llama espacio raíz, el cual es el dual de la subálgebra de Cartan como espacio vectorial. De estas raíces podemos obtener las raíces fundamentales o raíces simples. Adicional a esto, se estudiarán las corraíces asociadas a cada raíz. Con esta información se procede a calcular la matriz de Cartan para luego construir los diagrama de Dynkin de cada álgebra, los cuales tienen una cualidad particular y es que teniendo el diagrama asociado es posible recuperar (por medio de un procedimiento extenso [19] mirar también [23]) el álgebra de Lie simple. En general las definiciones para las álgebras y las superálgebras de Lie son similares, presentando cambios que aunque son pequeños son significativos y se debe tener especial cuidado y claridad sobre el espacio en el que se esté trabajando.

El documento estará dividido en varios capítulos. En el primero se explicarán y se expondrán los conceptos básicos de álgebras de Lie, de manera que el lector se contextualice con ellas. Lo anterior con el fin de comprenderlas a profundidad, su impacto en el estudio de las matemáticas y la necesidad de una representación gráfica de las mismas. En el segundo capítulo presentaremos los conceptos de superálgebras, superálgebras de Lie y algunos ejemplos para clarificar las definiciones y teoremas. Se omitirán las pruebas en el texto, ya que son resultados técnicos que requieren un mayor desarrollo de esta

teoría. La idea del trabajo es contextualizar al lector en los aspectos básicos de la teoría de superálgebras de Lie, haciendo énfasis en la representación gráfica. Para terminar el capítulo, presentaremos la representación gráfica que se utilizará para realizar el estudio. Los grafos fueron realizados en L^AT_EX utilizando el paquete “Tikz”. En el capítulo 3 comenzamos mostrando el proceso de estudio de una forma muy coloquial, de manera que el lector comprenda la secuencia en que se estudian las superálgebras por medio de estos grafos. Para esto desarrollamos primero $\mathfrak{sl}(1|2)$ explicando cada una de sus partes. Seguidamente, realizamos el estudio generalizado de esta superálgebra que es $\mathfrak{sl}(m|n)$ y que en la notación de Cartan es $A(m-1, n-1)$. En los capítulos 4, 5 y 6 presentamos el estudio por medio de los grafos bipartitos de las superálgebras $B(m, n)$, $D(m, n)$ y $C(n+1)$ respectivamente.

En el presente trabajo no se trabajará con supervariedades o con supergrupos. Si el lector desea aprender más sobre estos temas, puede revisar [3] y [14].

Todas las superálgebras utilizadas en esta tesis son sobre el cuerpo de los complejos y son de dimensión finita.

Capítulo 1

Conceptos básicos de álgebras de Lie

En este capítulo daremos una breve introducción a las álgebras de Lie, de manera que el lector se contextualice un poco con los términos y conceptos de estas álgebras. Además, varias definiciones son iguales o análogas a las definiciones de superálgebras de Lie por lo que nos servirán para aplicarlas en el desarrollo del proyecto. Se omiten las pruebas de algunos teoremas, pero el lector interesado en conocerlas puede revisar [10, 12, 23].

Definición 1. *Un álgebra de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ sobre un cuerpo \mathbb{K} de característica cero, es un espacio vectorial \mathfrak{g} con una aplicación bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, llamada corchete de Lie, que satisface*

i) $[\cdot, \cdot]$, es una operación bilineal.

ii) $[x, y] = -[y, x]$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ (Antisimetría).

iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$ (Identidad de Jacobi).

Teorema 2. *Sea A una \mathbb{K} -álgebra asociativa. A puede ser considerada como un álgebra de Lie $(A, [\cdot, \cdot])$ definiendo el corchete como*

$$[x, y] = xy - yx, \text{ para todo } x, y \in A.$$

Demostración. Para probar que A es un álgebra de Lie se deben probar las tres condiciones. Comenzaremos por la antisimetría:

i) Antisimetría: $[x, y] = xy - yx = -(yx - xy) = -[y, x]$

ii) Linealidad en la primera componente

$$[x + \lambda z, y] = (x + \lambda z)y - y(x + \lambda z) = xy - yx + \lambda(zy - yz) = [x, y] - \lambda[z, y].$$

Con la linealidad en la primera componente y la antisimetría se consigue la bilinealidad.

iii) La identidad de Jacobi se obtiene de las siguientes identidades

$$[x, [y, z]] = xyz - xzy - yzx + zyx,$$

$$[y, [z, x]] = yzx - yxz - zxy + xzy,$$

$$[z, [x, y]] = zxy - zyx - xyz + yxz.$$

□

Definición 3. Un morfismo de álgebras de Lie \mathfrak{g}_1 y \mathfrak{g}_2 es una transformación lineal $\rho : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ tal que $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}_1$.

Definición 4. i) Un subespacio A de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es una subálgebra de Lie si $[x, y] \in A$ para todo $x, y \in A$.

ii) Una subálgebra A de \mathfrak{g} es abeliana si $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in A$.

iii) Una subálgebra A de \mathfrak{g} es un ideal si $[x, y] \in A$ para todo $x \in A$ e $y \in \mathfrak{g}$.

iv) A es un ideal propio de \mathfrak{g} si $A \neq \{0\}$ y $A \neq \mathfrak{g}$.

Ejemplo 5. Dado cualquier espacio vectorial de dimensión finita V , el espacio de endomorfismos $\text{End}(V) = \{T : V \rightarrow V \mid T \text{ transformación lineal}\}$ con el corchete

$$[T, S] = T \circ S - S \circ T$$

es un álgebra de Lie, la cual denotamos $\mathfrak{gl}(V)$ y llamaremos Álgebra de Lie lineal general.

Proposición 6. Para cualquier \mathbb{K} -álgebra el espacio de derivaciones de A

$$\text{Der}(A) = \{D : A \rightarrow A \mid D(xy) = D(x)y + xD(y), \text{ para todo } x, y \in A\}$$

es una subálgebra de Lie de $\text{End}(A)$.

Demostración. Sean $D_1, D_2 \in \text{Der}(A)$ y $x, y \in A$ entonces

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](xy) &= (D_1 \circ D_2)(xy) - (D_2 \circ D_1)(xy) \\ &= D_1(D_2(xy)) - D_2(D_1(xy)) \\ &= D_1(D_2(x)y + xD_2(y)) - D_2(D_1(x)y + xD_1(y)) \\ &= D_1(D_2(x)y) + D_1(xD_2(y)) - D_2(D_1(x)y) - D_2(xD_1(y)) \\ &= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(x)y + x(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(y) \\ &= [D_1, D_2](x)y - x[D_1, D_2](y). \end{aligned}$$

Luego $[D_1, D_2]$ es nuevamente una derivación. □

Ejemplo 7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbb{K} . Luego podemos identificar el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ con el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ sobre \mathbb{K} , que denotamos también como $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, donde n es la dimensión de V . Las siguientes álgebras de Lie son subálgebras del álgebra lineal general:

- El álgebra lineal especial $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{K})$ o A_n , es la subálgebra de $\mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{K})$ de todos los endomorfismos o matrices de traza cero.
- El álgebra simpléctica $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$ o C_n definida como $\mathfrak{sp}_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \mid A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \text{ y } B = B^t, C = C^t \right\}$.
- Las álgebras ortogonales $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{K})$ y $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{K})$ o B_n y D_n , respectivamente. Definidas como $\mathfrak{so}_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B & -H^t \\ C & -A^t & -G^t \\ G & H & 0 \end{pmatrix} \mid A, B, C \in M_n(\mathbb{C}), H, G \in M_{1 \times n} \text{ y } B = -B^t, C = -C^t \right\}$ y $\mathfrak{so}_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \mid A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \text{ y } B = -B^t, C = -C^t \right\}$.

Las álgebras de Lie A_n, B_n, C_n y D_n son llamadas clásicas. Para mayor información sobre estas mirar [12]. Una representación gráfica para estos espacios se encuentra en [5]. Este trabajo está basado en ella.

La teoría de álgebras de Lie fue desarrollada principalmente por Wihelm Killing y Élie Cartan. En 1894 Élie clasificó todas las álgebras de Lie simples de dimensión finita sobre \mathbb{C} (ver [2]) y probó que deben ser isomorfas a alguna de las álgebras clásicas o a una de las excepcionales, como se enuncia formalmente más adelante en el Teorema 20. Realizando esta clasificación, Cartan introduce los conceptos de matriz de Cartan, sistema de raíces, entre otros, los cuales son de vital importancia para el desarrollo de esta tesis.

Definición 8. *i) Un álgebra de Lie es simple si no es abeliana y no contiene ideales propios no triviales.*

ii) Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es semisimple si no contiene ideales abelianos distintos de $\{0\}$.

Ejemplo 9. • $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es un álgebra semisimple y simple.

- El álgebra de Lie ortogonal especial $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C})$ es semisimple pero no simple ya que tiene un ideal que es isomorfo a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, más concretamente $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

El siguiente ejemplo se desarrollará a lo largo del capítulo con el propósito de que el lector comprenda los conceptos teóricos y los vea aplicados en un álgebra de Lie. Además se mostrará la forma abstracta como se estudian.

Utilizaremos el álgebra lineal especial $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Una base para este espacio es

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 10. Para cualquier álgebra de Lie \mathfrak{g} , la representación adjunta $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ está dada por $\text{ad}_x(y) = [x, y]$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Definición 11. Una subálgebra \mathfrak{h} de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es llamada subálgebra de Cartan si es maximal abeliana.

La subálgebra de Cartan para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} : a_1 + a_2 = 0 \right\}$.

Teorema 12. *Toda álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensión finita sobre \mathbb{C} posee una subálgebra de Cartan.*

Demostración. La prueba de este teorema se omite en este trabajo debido a su extensión, el lector interesado en ella puede remitirse a [20]. \square

Definición 13. *La forma de Killing en \mathfrak{g} es la transformación bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\langle x, y \rangle = \text{tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y)$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, donde \circ denota el producto en $\text{End}(\mathfrak{g})$. La traza del operador $\text{ad}_x \circ \text{ad}_y$ es independiente de la elección de la base de \mathfrak{g} . La forma de Killing tiene las siguientes propiedades:*

- 1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$ (Simétrica).
- 2) $\langle [x, y], z \rangle = \langle x, [y, z] \rangle, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ (Invariante bajo acción adjunta).
- 3) Si $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ son álgebras de Lie y $\rho : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ es un isomorfismo de álgebras de Lie, entonces

$$\rho(\langle x, y \rangle_{\mathfrak{g}_1}) = \langle \rho(x), \rho(y) \rangle_{\mathfrak{g}_2}.$$

Para probar la semisimplicidad de un álgebra de Lie directamente de la definición, habría que probar que ningún ideal es abeliano, lo que puede ser una tarea difícil. Es por esto que existe el siguiente teorema.

Teorema 14 (Criterio de Cartan). *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie entonces \mathfrak{g} es semisimple si y sólo si su forma de Killing es no degenerada (el determinante de la matriz asociada es distinto de cero).*

Para calcular la forma de Killing primero debemos hallar las matrices adjuntas para los elementos de la base.

$$\begin{aligned} \text{ad}_X(H) &= [X, H] = -2X, & \text{ad}_X(Y) &= [X, Y] = H, \\ \text{ad}_X(X) &= [X, X] = 0, & \text{ad}_Y(H) &= [Y, H] = 2Y. \end{aligned}$$

El resto de las relaciones se derivan de estas por la propiedad de antisimetría. Con esta información armamos las matrices adjuntas:

$$\text{ad}_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{ad}_Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora hallamos la forma de Killing. No es necesario hallar todas las relaciones ya que por las propiedades de la forma de Killing sabemos que es simétrica.

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle &= 0, & \langle H, X \rangle &= 0, & \langle Y, X \rangle &= 4, \\ \langle H, H \rangle &= 8, & \langle Y, H \rangle &= 0, & & \\ \langle Y, Y \rangle &= 0. & & & & \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz de la forma de Killing es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante es distinto de cero se prueba que la forma de Killing es no degenerada y por lo tanto $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es semisimple. Es aquí donde radica la importancia de la forma de Killing.

La prueba del teorema 14 se puede ver en [12].

En lo que sigue denotaremos por \mathfrak{h}^* el dual de la subálgebra de Cartan, más formalmente $\mathfrak{h}^* = \{f : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ lineal} \}$.

Definición 15. Sea \mathfrak{h} la subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . El álgebra \mathfrak{g} puede descomponerse de la siguiente manera:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \text{donde } \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : [h, x] = \alpha(h)x, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}.$$

El conjunto

$$\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* : \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

es el sistema de raíces de \mathfrak{g} .

A los elementos $\alpha \in \Phi$ los llamaremos *raíces* y a \mathfrak{g}_α *espacio raíz* asociado a α .

Sea $h \in \mathfrak{h}$, las raíces de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ son

$$[h, X] = (a_1 - a_2)X \quad \text{y} \quad [h, Y] = (a_2 - a_1)Y,$$

luego $\Phi = \{a_1 - a_2, a_2 - a_1\}$.

Definición 16. Dado un sistema de raíces Φ el grupo W generado por todas las reflexiones S_α con $\alpha \in \Phi$, donde $S_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$, se conoce como el grupo de Weyl asociado a Φ .

Existe un subconjunto $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ de Φ llamado *raíces fundamentales* o *raíces simples*, tal que Π es una base de \mathfrak{h}^* y cada raíz $\alpha \in \Phi$ se puede escribir como combinación lineal de raíces en Π con coeficientes en \mathbb{Z} que son todos no negativos o todos no positivos. Los enteros

$$A_{ij} = 2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \quad (1.1)$$

son llamados los enteros de Cartan y la matriz $A = (A_{ij})$ es la *Matriz de Cartan*. Si $i = j$ entonces $A_{ii} = 2$. Para cualquier $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi$ con $i \neq j$, $S_{\alpha_i}(\alpha_j)$ es una \mathbb{Z} -combinación de α_i y α_j . Como el coeficiente de α_j es 1, el coeficiente asociado a α_i en $S_{\alpha_i}(\alpha_j)$ debe ser un entero negativo. Además $A_{ij} = 0$ si y sólo si $A_{ji} = 0$. El ángulo θ_{ij} entre α_i y α_j está dado por la fórmula del coseno

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle^{\frac{1}{2}} \cos(\theta_{ij}).$$

Operando en esta ecuación obtenemos

$$4 \cos^2(\theta_{ij}) = 2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} 2\frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = A_{ij}A_{ji}.$$

Sea $n_{ij} = A_{ij}A_{ji}$, claramente $n_{ij} \in \mathbb{Z}$ y $n_{ij} \geq 0$. Como $0 \leq \cos^2(\theta_{ij}) \leq 1$ los únicos valores posibles para n_{ij} son 0, 1, 2 o 3.

Es posible mostrar la información de la matriz de Cartan de una manera gráfica y esto se hace utilizando los diagramas que definiremos a continuación, llamados diagramas de Dynkin. Los definiremos mostrando la manera como se construyen.

Definición 17. *Un Diagrama de Dynkin Δ asociado a un álgebra de Lie simple \mathfrak{g} es el grafo Δ con vértices $\{1, \dots, n\}$ en correspondencia biyectiva con el conjunto de raíces fundamentales Π de \mathfrak{g} tal que*

- 1) *Los vértices i, j ($i \neq j$) están unidos por $n_{ij} = A_{ij}A_{ji}$ aristas.*
- 2) *A cada par o trío de aristas que unan dos vértices, se coloca un símbolo de desigualdad ($< \acute{o} >$) apuntando hacia la raíz más corta con respecto a la forma de Killing.*
- 3) *La forma cuadrática*

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \neq j} \sqrt{n_{ij}} x_i x_j$$

asociada al diagrama es definida positiva.

Continuando con el ejemplo del álgebra lineal especial de dimensión 3, podemos decir que el conjunto de raíces fundamentales es $\Pi = \{a_1 - a_2\}$, lo que resulta en un diagrama de Dynkin que consta de un único vértice \circ . La forma cuadrática asociada al diagrama es $Q(x_1) = 2x_1^2$ y el grupo de Weyl de \mathfrak{sl}_2 es el grupo simétrico en dos elementos S_2 .

Es posible recuperar un álgebra de Lie simple \mathfrak{g} de su diagrama de Dynkin correspondiente. Mirar [23] y [19] para ver más detalles sobre esto.

Proposición 18. *Sea Φ el sistema de raíces asociado a un álgebra de Lie simple \mathfrak{g} y sea $\alpha \in \Phi$ una raíz. Para cada $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ distinto de cero, existe $x_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ y $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(h_\alpha) = 2$, $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$, $[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$ y $[h_\alpha, x_{-\alpha}] = 2x_{-\alpha}$.*

Definición 19. *Sea $\Phi \subset \mathfrak{h}$ el sistema de raíces asociado a un álgebra de Lie \mathfrak{g} .*

- 1) Para cualquier raíz $\alpha \in \Phi$, el elemento de Cartan $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ dado en el Proposición 18 es llamado corraíz asociada a la raíz α . Adicionalmente, $\Phi_c = \{h_\alpha : \alpha \in \Phi\}$ es el sistema de corraíces asociado a \mathfrak{h} y $\prod_c = \{h_\alpha : \alpha \in \prod\}$ el sistema de corraíces fundamental.
- 2) Los elementos $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathfrak{h}^*$ dados por las relaciones $w_i(h_j) = \delta_{ij}$, para todo $1 \leq i, j \leq n$, donde h_j es la corraíz asociada a la raíz fundamental α_j , son llamados pesos fundamentales.

Sean

$$x_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

los covectores asociados a las raíces $\alpha = a_1 - a_2$ y $-\alpha = a_2 - a_1$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, respectivamente.

La corraíz asociada es

$$[x_\alpha, x_{-\alpha}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = h_\alpha.$$

El peso fundamental es $w_1 = a_1$, ya que

$$(a_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

Para terminar este capítulo enunciaremos el teorema de clasificación de álgebras de Lie simples, que nos permite identificar cualquier álgebra Lie con una de las clásicas o excepcionales.

Teorema 20 (Clasificación de álgebras de Lie simples). *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita sobre \mathbb{C} , luego \mathfrak{g} es isomorfa a alguna de las siguientes álgebras*

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C}), \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.$$

La prueba de este teorema se puede ver en [10]. Las primeras cuatro álgebras de la lista del teorema anterior son las álgebras de Lie clásicas y en [5] se puede mirar el estudio de estas por medio de los grafos bipartitos. Las álgebras restantes son llamadas excepcionales y su definición y estudio se puede encontrar en [13].

Capítulo 2

Superálgebras de Lie

En este capítulo mostraremos primero los conceptos básicos de superálgebras, luego los conceptos básicos de superálgebra de Lie, que en algunos casos son similares o análogos a los del capítulo anterior debido a que las álgebras y las superálgebras de Lie guardan una importante relación entre ellas. Seguido de esto, presentamos la superálgebra lineal general $\mathfrak{gl}(m|n)$, de la cual emergen el resto de las superálgebras que estudiaremos en los capítulos siguientes. Para finalizar mostraremos la representación gráfica con la que se trabajará el resto de la tesis.

2.1. Conceptos básicos de superálgebras

Para poder definir lo que es una superálgebra primero es necesario entender los superespacios vectoriales.

Definición 21. *Un superespacio vectorial V es un espacio vectorial \mathbb{Z}_2 -graduado, es decir, un espacio vectorial V sobre un cuerpo \mathbb{K} con la siguiente descomposición*

$$V = V_0 \oplus V_1.$$

Definición 22. *Sea V un superespacio vectorial. La superdimensión de V se define como $\text{sdim}V := \dim V_0 - \dim V_1$.*

Definición 23. Sea $a \in V = V_0 \oplus V_1$, definimos la paridad de a como:

$$\bar{a} = \begin{cases} 0, & a \in V_0 \\ 1, & a \in V_1 \end{cases}$$

La paridad también se conoce como el grado. Los elementos que pertenecen a V_0 son llamados pares o bosones y los elementos de V_1 impares o fermiones. A estos elementos se les llama *homogeneos*.

Definición 24. Un subespacio de un superespacio vectorial $V = V_0 \oplus V_1$ es un superespacio vectorial $W = W_0 \oplus W_1 \subseteq V$ con graduaciones compatibles, es decir, $W_i \subseteq V_i$ para $i \in \mathbb{Z}_2$.

Definición 25. Una superálgebra \mathfrak{g} , también llamada álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada, es un superespacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ dotado con una multiplicación bilineal tal que

$$\mathfrak{g}_i \mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}, \text{ para } i, j \in \mathbb{Z}_2.$$

Definición 26. Un módulo M sobre una superálgebra \mathfrak{g} siempre se entiende en el sentido de la \mathbb{Z}_2 -graduación, i.e. $M = M_0 \oplus M_1$ tal que $\mathfrak{g}_i M_j \subseteq M_{i+j}$, para $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Las subsuperálgebras y los ideales de una superálgebra \mathfrak{g} , al igual que los módulos, se entienden en el sentido de la \mathbb{Z}_2 -graduación. La condición de simplicidad para una superálgebra es la misma que para un álgebra de Lie.

Definición 27. i) Un homomorfismo ρ de una superálgebra \mathfrak{g} en una superálgebra \mathfrak{g}' es una transformación lineal que respeta la \mathbb{Z}_2 -graduación, esto es, $\rho(\mathfrak{g}_0) \subseteq \mathfrak{g}'_0$ y $\rho(\mathfrak{g}_1) \subseteq \mathfrak{g}'_1$.

ii) Un homomorfismo entre \mathfrak{g} -módulos M y N es una transformación lineal $\rho : M \rightarrow N$ que satisface $\rho(am) = a\rho(m)$, con $a \in \mathfrak{g}$, $m \in M$.

Ejemplo 28. Sea A cualquier álgebra. Con la graduación $A_0 = A$, $A_1 = 0$, dotamos a A con la estructura de superálgebra. Ésta es llamada superálgebra trivial y no tiene estructura adicional a su estructura algebraica normal.

Ejemplo 29. Los cuaterniones \mathbb{H} toman la estructura de una superálgebra sobre \mathbb{R} con la siguiente graduación, $\mathbb{H} = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}k) \oplus (\mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j)$. Más generalmente, podemos definir el álgebra generalizada de los cuaterniones $\left(\frac{a, b}{\mathbb{K}}\right)^1$ como la \mathbb{K} -álgebra de dimensión cuatro con base $\{1, u, v, uv\}$, con multiplicación dada por $u^2 = a$, $v^2 = b$, $uv = -vu$. Al igual que con los cuaterniones, a esta álgebra se le puede dar la graduación $\left(\frac{a, b}{\mathbb{K}}\right)_0 = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}uv$ y $\left(\frac{a, b}{\mathbb{K}}\right)_1 = \mathbb{K}u \oplus \mathbb{K}v$.

Ejemplo 30. Sea A cualquier álgebra. Fijemos algún $\alpha \in Z(A)$ (centro de A), y definamos $A[u]$ como el álgebra $A + Au$ donde $u^2 = \alpha$. La multiplicación en $A[u]$ está dada por $(a_0 + a_1u)(b_0 + b_1u) = (a_0b_0 + \alpha a_1b_1) + u(a_0b_1 + b_0a_1)$, y $A[u]$ es una superálgebra con graduación $A_0 = A$ y $A_1 = Au$.

2.2. Superálgebras de Lie

Con la anterior sección en mano, podemos definir nuestro espacio de interés: las Superálgebras de Lie.

Definición 31. Una superálgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ con una aplicación bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, que satisface las siguientes propiedades

$$i) [a, b] = -(-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, a], \text{ para todo } a, b \in \mathfrak{g} \text{ (Superantisimetría),}$$

$$ii) [a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, [a, c]], \text{ para todo } a, b, c \in \mathfrak{g} \text{ (Superidentidad de Jacobi)}$$

es llamada superálgebra de Lie.

Definición 32. Si para todo $a, b \in \mathfrak{g}$

$$ab = (-1)^{\bar{a}\bar{b}}ba$$

entonces se dice que \mathfrak{g} es una superálgebra superconmutativa.

¹Se generaliza el álgebra para cualquier cuerpo \mathbb{K} con elementos a y b [21].

Ejemplo 33. Una superálgebra asociativa $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ sobre \mathbb{C} adquiere la estructura de superálgebra de Lie al tomar el supercorchete $[\cdot, \cdot]$

$$[a, b] = ab - (-1)^{\bar{a}\bar{b}}ba$$

para dos elementos $a, b \in \mathfrak{g}$.

Este corchete es de vital importancia en el desarrollo del trabajo ya que es el conmutador que le da estructura de superálgebra de Lie a los espacios que se estudian en los capítulos 3, 4, 5 y 6.

Las superálgebras de Lie son usualmente llamadas álgebras de Lie \mathbb{Z}_2 -graduadas. Cabe resaltar que \mathfrak{g}_0 es un álgebra de Lie mientras que \mathfrak{g}_1 no es un álgebra. Por lo tanto si $\mathfrak{g}_1 = 0$, \mathfrak{g} es un álgebra de Lie. Por otro lado, si $\mathfrak{g}_0 = 0$, la superálgebra tiene que ser abeliana ($[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$) por la condición de superantisimetría.

Definición 34. Para cualquier superálgebra de Lie \mathfrak{g} la representación adjunta $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ está dada por

$$\text{ad}_x(y) = [x, y], \text{ para todo } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Nota 35. A una superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ le podemos asociar la siguiente información

- Un álgebra de Lie \mathfrak{g}_0 .
- Un \mathfrak{g}_0 -módulo \mathfrak{g}_1 inducido por la acción adjunta.

Definición 36. Una representación ρ de \mathfrak{g} en \mathfrak{g}' es completamente reducible si para cada subespacio invariante, existe un subespacio complementario que a la vez es invariante.

Definición 37. Una superálgebra de Lie simple $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es clásica si la representación de \mathfrak{g}_0 sobre \mathfrak{g}_1 es completamente reducible.

Definición 38. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie clásica. Una subálgebra \mathfrak{h} es una subálgebra de Cartan para \mathfrak{g} si es una subálgebra de Cartan para \mathfrak{g}_0 .

Definición 39. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superálgebra de Lie clásica con dimensión n y sea \mathfrak{h} la subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . La superálgebra \mathfrak{g} puede descomponerse de la siguiente manera:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha, \text{ donde } \mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : [h, x] = \alpha(h)x, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}.$$

El conjunto

$$\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* : \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

es el sistema de raíces de \mathfrak{g} .

Definición 40. Sea $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \Phi$ sea un sistema de raíces. Π es simple o fundamental si existen vectores $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ y $f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ tal que

$$1) [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i \in \mathfrak{h}.$$

2) Los vectores e_i y f_i generan \mathfrak{g} y Π es el mínimo conjunto con estas propiedades.

El sistema de raíces se divide en una parte par y una impar ($\Phi = \Phi_0 \cup \Phi_1$). El conjunto de raíces pares se denotará Φ_0 y el conjunto de las raíces impares Φ_1 . Una raíz α es par si $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_0 \neq 0$. Análogamente, una raíz es impar si $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_1 \neq 0$.

Definición 41. Sea Φ un sistema de raíces para \mathfrak{g} . Para todo α existe un elemento $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que

$$[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha.$$

El conjunto

$$\Phi_c = \{h_\alpha : \alpha \in \Phi\}$$

se llama sistema de corraíces asociado a \mathfrak{g} .

Definición 42. La matriz de Cartan A asociada a una superálgebra de Lie \mathfrak{g} está dada por

$$A = A_{ij} = \alpha_j(h_i), \tag{2.1}$$

donde α_i es la i -ésima raíz fundamental y h_i es la correspondiente corraíz asociada.

Definición 43. El diagrama de Dynkin asociado a una superálgebra de Lie simple \mathfrak{g} es un grafo Δ con vértices $\{1, \dots, n\}$, con correspondencia biyectiva con el conjunto Π de raíces fundamentales de \mathfrak{g} tal que

- 1) Los vértices de Δ pueden ser \circ , \otimes y \bullet llamados, blancos, grises y negros respectivamente. A cada raíz fundamental par se le asocia un vértice blanco, a cada raíz fundamental impar con longitud distinta de cero ($A_{ii} \neq 0$) un vértice negro y a cada raíz impar de longitud cero ($A_{ii} = 0$) uno gris.
- 2) Los i -ésimos y j -ésimos vértices se unirán por n_{ij} aristas, donde

$$n_{ij} = \max(|A_{ij}|, |A_{ji}|).$$

- 3) Se agrega una flecha en las aristas que conecta el vértice i -ésimo con el j -ésimo cuando $n_{ij} > 1$ y $|A_{ij}| \neq |A_{ji}|$, apuntando de j a i si $|A_{ij}| > 1$.

Las superálgebras de Lie finitas fueron clasificadas por Victor G. Kac [15] en 1977. Existe un teorema análogo al teorema de clasificación de álgebras de Lie presentado en el capítulo pasado, pero ahora para superálgebras y lo enunciamos a continuación,

Teorema 44. Una superálgebra de Lie clásica es isomorfa a una de las álgebras de Lie simples A_n, B_n, \dots, E_8 , o a una de las superálgebras $A(m, n), B(m, n), C(n), D(m, n), D(2, 1; \alpha), F(4), G(3), P(n)$ o Q_n .

La prueba de este teorema se encuentra en [15].

En los capítulos siguientes de este trabajo se trabajará con las superálgebras $A(m, n), B(m, n), C(n), D(m, n)$. Para el lector interesado en conocer las definiciones y estudio de las superálgebras $D(2, 1; \alpha), F(4), G(3), P(n)$ y Q_n ver [4].

2.3. Superálgebra Lineal General

Las superálgebras de Lie clásicas se pueden representar como matrices de la siguiente manera. Sea V el espacio vectorial \mathbb{Z}_2 -graduado $V = V_0 \oplus V_1$ con $\dim V_0 = m$ y $\dim V_1 = n$. Luego el álgebra $\text{End}V$ adquiere naturalmente estructura de superálgebra por

$\text{End}V = \text{End}_0V \oplus \text{End}_1V$, donde $\text{End}_iV = \{\phi \in \text{End}V : \phi(V_j) \subset V_{i+j}\}$

La superálgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m|n)$ se define como la superálgebra $\text{End}V$ con el corchete anteriormente mencionado en el ejemplo 33. El álgebra $\mathfrak{gl}(m|n)$ está generada por las matrices de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde A y D son matrices $\mathfrak{gl}(m)$ y $\mathfrak{gl}(n)$ respectivamente y B y C son matrices rectangulares de $m \times n$ y $n \times m$ respectivamente.

Las matrices con elementos pares tiene la forma $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ y las matrices impares la forma $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

En particular, $\mathfrak{gl}(V)_0 \cong \mathfrak{gl}(m) \oplus \mathfrak{gl}(n)$ y $\mathfrak{gl}(V)_1$, como $\mathfrak{gl}(V)_0$ -módulo, es isomorfo a $(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^{n*}) \oplus (\mathbb{C}^{m*} \otimes \mathbb{C}^n)$, donde \mathbb{C}^{n*} denota el espacio dual de \mathbb{C}^n .

Definición 45. Sea $M \in \mathfrak{gl}(m|n)$. Definimos la supertraza como:

$$\text{str}(M) = \text{tr}(A) - \text{tr}(D).$$

donde $\text{tr}(x)$ se refiere a la traza de la matriz cuadrada x .

Se puede probar que $\text{str}([g, k]) = 0$ para $g, k \in \mathfrak{gl}(m|n)$ (ver [9]). Por lo tanto el subespacio

$$\mathfrak{sl}(m|n) := \{M \in \mathfrak{gl}(m|n) : \text{str}(M) = 0\},$$

es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(m|n)$ y se llama *Superálgebra de Lie lineal especial*.

Ejemplo 46. Tomemos la superálgebra $\mathfrak{gl}(1|1)$ y consideremos la siguiente base compuesta por matrices elementales

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $h = E_{0,1} + E_{1,1} = \text{Id}_{1|1}$. Luego h es central, $[e, f] = h$, y $\mathfrak{sl}(1|1)$ tiene por base el conjunto $\{e, f, h\}$.

Definición 47. Una representación lineal ρ de una superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ en V es un homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Definición 48. La transformación $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dada por $\text{ad}_g(a) = [g, a]$ es una representación lineal de \mathfrak{g} llamada la representación adjunta.

Definición 49. La forma de Killing en una superálgebra de Lie \mathfrak{g} es una forma bilineal dada por $\langle M, L \rangle = \text{str}(\text{ad}_M \circ \text{ad}_L)$, para $M, L \in \mathfrak{g}$. Tiene las siguientes propiedades:

- 1) $\langle M, L \rangle = 0$, para $M \in \mathfrak{g}_0, L \in \mathfrak{g}_1$.
- 2) $\langle M, L \rangle = (-1)^{\overline{M}\overline{L}} \langle L, M \rangle$, para $M, L \in \mathfrak{g}$.
- 3) $\langle [M, L], N \rangle = \langle M, [L, N] \rangle$, para $M, L, N \in \mathfrak{g}$.

Proposición 50. Sea \mathfrak{g} una superálgebra de Lie. Para cualquier $x, y \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ se tiene lo siguiente

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in \Phi_0} \alpha(x)\alpha(y) - \sum_{\alpha \in \Phi_1} \alpha(x)\alpha(y).$$

Demostración. La idea de la prueba es tomar una base de auto vectores $\{z_\alpha\}$ para el álgebra de Lie \mathfrak{g} . Con estos elementos tenemos $[y, z_\alpha] = \alpha(y)z_\alpha$ para todo $y \in \mathfrak{g}$. Como

$$\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)(z_\alpha) = \text{ad}(x)[y, z_\alpha] = \alpha(y)\text{ad}(x)z_\alpha = \alpha(y)[x, z_\alpha] = \alpha(x)\alpha(y)z_\alpha$$

entonces

$$\text{str}(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y)) = \sum_{\alpha \in \Phi_0} \alpha(x)\alpha(y) - \sum_{\alpha \in \Phi_1} \alpha(x)\alpha(y).$$

□

2.4. Representación gráfica de las Superálgebras de Lie clásicas

En la presente sección diremos que $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$. La representación gráfica de estas superálgebras se realizará por medio de grafos dirigido bipartitos. Denotaremos por $\text{Digraph}^1(m|n)$ el superespacio vectorial generado por los grafos dirigidos

bipartitos con un único vértice de inicio en el conjunto $[m+n]$ y un único vértice final en el conjunto $[m+n]$. Gráficamente tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{Digraph}^1(m|n) = \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{j} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \xrightarrow{i} \text{---} \end{array}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \right\rangle,$$

donde el símbolo



denota el grafo con vértice de inicio en i y vértice final j . El producto de estos grafos se define como

$$\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{j} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \xrightarrow{i} \text{---} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{l} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \end{array} = \begin{cases} \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{l} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \xrightarrow{i} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{l} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \xrightarrow{i} \text{---} \end{array}, & \text{si } j = k \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La traza en $\mathbf{Digraph}^1(m|n)$ se define como el funcional lineal $\text{tr} : \mathbf{Digraph}^1(m|n) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\text{tr} \left(\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{i} \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \xrightarrow{i} \text{---} \end{array} \right) = 1 \quad y \quad \text{tr} \left(\begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{j} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \xrightarrow{i} \text{---} \end{array} \right) = 0.$$

Existen dos tipos de grafos, los bosónicos y los fermiónicos. Se dice que un grafo es bosónico cuando la flecha no cruza la línea vertical, en otro caso es fermiónico, como se ilustra en la siguiente página.

Grafos bosónicos

$$\begin{array}{c} j \\ \hline \nearrow \quad | \\ \hline i \end{array} \circ \begin{array}{c} j \\ \hline | \quad \nearrow \\ \hline i \end{array}.$$

Grafos fermiónicos

$$\begin{array}{c} j \\ \hline \nearrow \\ \hline i \end{array} \circ \begin{array}{c} j \\ \hline \searrow \\ \hline i \end{array}.$$

El álgebra $\mathbf{Digraph}^1(m|n)$ es isomorfa a $\text{End}(\mathbb{C}^{m|n})$ a través de la siguiente aplicación

$$\mathbf{Digraph}^1(m|n) \cong \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^{m|n})$$

$$\begin{array}{c} j \\ \hline \nearrow \\ \hline i \end{array} \mapsto E_{ij}.$$

Donde E_{ij} es la matriz cuadrada de tamaño $(m+n) \times (m+n)$ con un uno en la fila i , columna j y en el resto ceros:

$$E_{ij} = \begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \end{array}$$

Capítulo 3

Superálgebra lineal especial $\mathfrak{sl}(m|n)$

En este capítulo realizamos el estudio de $\mathfrak{sl}(m|n)$. Comenzamos enunciando el caso particular cuando $m = n$, luego desarrollamos un caso sencillo de esta superálgebra con $m = 2$ y $n = 1$ para luego sí realizar el caso general.

La superálgebra unitaria $A(m-1, n-1) = \mathfrak{sl}(m|n)$ se define como la superálgebra de matrices $M \in \mathfrak{gl}(m|n)$ que satisface la condición de que la supertraza sea cero, es decir

$$\mathfrak{sl}(m|n) = \{M \in \mathfrak{gl}(m|n) : \text{str}(M) = 0\}.$$

Si $m = n$ entonces $\mathfrak{sl}(n|n)$ contiene un ideal I de una dimensión generado por la identidad $\mathbb{I}_{n|n}$, el cual es un ideal no trivial y en consecuencia la superálgebra no es simple. Sin embargo al hacer el cociente de la superálgebra por este ideal, la volvemos simple y de esta manera podemos dar la siguiente definición

$$A(m-1, n-1) = \begin{cases} \mathfrak{sl}(m|n) & \text{si } m \neq n, m, n \geq 1 \\ \mathfrak{psl}(n|n) := \mathfrak{sl}(n|n)/I & \text{si } m = n, n > 1 \end{cases}$$

Cuando $n = 1$, $\mathfrak{sl}(1|1)$ no es simple.

Para ver un estudio más detallado de este caso particular remitirse a [1].

A continuación se realizará el estudio utilizando grafos dirigidos para el álgebra $A(m-1, n-1)$. Para fijar las ideas del trabajo comenzaremos exponiendo el estudio de un caso simple de este espacio.

3.1. Superálgebra lineal especial $\mathfrak{sl}(2|1)$

Tomamos $m = 2$ y $n = 1$, luego

$$\mathfrak{sl}(2|1) = \{M \in \mathfrak{gl}(2|1) : \text{str}(M) = 0\}.$$

la matriz $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de 3×3 , donde A es una matriz de 2×2 , B es una matriz de 2×1 , C es de 1×2 y D tiene un sólo elemento.

3.1.1. Base para $\mathfrak{sl}(2|1)$

Generadores bosónicos (diagonales):

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline \uparrow \quad | \quad | \\ \hline 1 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \hline \quad | \quad | \uparrow \\ \hline 3 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 2 \\ \hline \uparrow \quad | \quad | \\ \hline 2 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \hline \quad | \quad | \uparrow \\ \hline 3 \end{array}$$

Generadores bosónicos (no diagonales):

$$\begin{array}{c} 2 \\ \hline \nearrow \quad | \quad | \\ \hline 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \\ \hline \nwarrow \quad | \quad | \\ \hline 2 \end{array}$$

Generadores fermiónicos:

$$\begin{array}{c} 3 \\ \hline \nearrow \quad | \quad | \\ \hline 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 3 \\ \hline \nearrow \quad | \quad | \\ \hline 2 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \\ \hline \nwarrow \quad | \quad | \\ \hline 3 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 2 \\ \hline \nwarrow \quad | \quad | \\ \hline 3 \end{array}$$

por lo tanto el conjunto de generadores para $\mathfrak{sl}(2|1)$ es

$$\mathfrak{sl}(2|1) = \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ \hline \uparrow \quad | \quad | \\ \hline 1 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \hline \quad | \quad | \uparrow \\ \hline 3 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \hline \uparrow \quad | \quad | \\ \hline 2 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \hline \quad | \quad | \uparrow \\ \hline 3 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \hline \nearrow \quad | \quad | \\ \hline 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \hline \nwarrow \quad | \quad | \\ \hline 2 \end{array}, \right. \\ \left. \begin{array}{c} 3 \\ \hline \nearrow \quad | \quad | \\ \hline 1 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \hline \nearrow \quad | \quad | \\ \hline 2 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \hline \nwarrow \quad | \quad | \\ \hline 3 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \hline \nwarrow \quad | \quad | \\ \hline 3 \end{array} \right\rangle \subset \mathbf{Digraph}^1(2|1)$$

Ahora miraremos la subálgebra de Cartan.

$$\left[h, \begin{array}{c} \overline{} \\ \swarrow \\ \overline{} \end{array} \right] = a_2 \begin{array}{c} \overline{} \\ \swarrow \\ \overline{} \end{array} - a_1 \begin{array}{c} \overline{} \\ \swarrow \\ \overline{} \end{array} = (a_2 - a_1) \begin{array}{c} \overline{} \\ \swarrow \\ \overline{} \end{array}.$$

Parte fermiónica:

$$\left[h, \begin{array}{c} \overline{} \\ \nearrow \\ \overline{} \end{array} \right] = a_1 \begin{array}{c} \overline{} \\ \nearrow \\ \overline{} \end{array} - b_1 \begin{array}{c} \overline{} \\ \nearrow \\ \overline{} \end{array} = (a_1 - b_1) \begin{array}{c} \overline{} \\ \nearrow \\ \overline{} \end{array},$$

$$\left[h, \begin{array}{c} \overline{} \\ \nearrow \\ \overline{} \end{array} \right] = a_2 \begin{array}{c} \overline{} \\ \nearrow \\ \overline{} \end{array} - b_1 \begin{array}{c} \overline{} \\ \nearrow \\ \overline{} \end{array} = (a_2 - b_1) \begin{array}{c} \overline{} \\ \nearrow \\ \overline{} \end{array},$$

$$\left[h, \begin{array}{c} \overline{} \\ \swarrow \\ \overline{} \end{array} \right] = b_1 \begin{array}{c} \overline{} \\ \swarrow \\ \overline{} \end{array} - a_1 \begin{array}{c} \overline{} \\ \swarrow \\ \overline{} \end{array} = (b_1 - a_1) \begin{array}{c} \overline{} \\ \swarrow \\ \overline{} \end{array},$$

$$\left[h, \begin{array}{c} \overline{} \\ \swarrow \\ \overline{} \end{array} \right] = b_1 \begin{array}{c} \overline{} \\ \swarrow \\ \overline{} \end{array} - a_2 \begin{array}{c} \overline{} \\ \swarrow \\ \overline{} \end{array} = (b_1 - a_2) \begin{array}{c} \overline{} \\ \swarrow \\ \overline{} \end{array}.$$

Entonces el sistema de raíces está dado por

$$\Phi_0 = \{\pm(a_1 - a_2)\}, \quad \Phi_1 = \{\pm(a_1 - b_1), \pm(a_2 - b_1)\},$$

$$\Phi = \{\pm(a_1 - a_2), \pm(a_1 - b_1), \pm(a_2 - b_1)\}.$$

Las raíces fundamentales del sistema son:

$$\Pi_0 = \{a_1 - a_2\}, \quad \Pi_1 = \{b_1 - a_1, b_1 - a_2\},$$

$$\Pi = \{b_1 - a_1, a_1 - a_2\}.$$

3.1.4. Sistema de corraíces

Sean x_α y $x_{-\alpha}$ los covectores asociados a las raíces α y $-\alpha$ de $\mathfrak{sl}(2|1)$, respectivamente. Un vector $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ es una corraíz asociada a la raíz $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ si $h_\alpha = [x_\alpha, x_{-\alpha}]$. De esta forma calculamos las corraíces asociadas a las raíces del sistema.

Definimos h_i como

$$h_i = \begin{array}{c} i \\ \uparrow \\ \hline \hline \\ \downarrow \\ i \end{array}.$$

1) Corraíz asociada a $\alpha_1 = a_1 - a_2$:

$$[x_{\alpha_1}, x_{-\alpha_1}] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ \nearrow \\ \hline \hline \\ \searrow \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \nwarrow \\ \hline \hline \\ \nearrow \\ 2 \end{array} \right] = \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ \hline \hline \\ \downarrow \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \\ \hline \hline \\ \downarrow \\ 2 \end{array} = h_1 - h_2.$$

2) Corraíz asociada a $\alpha_2 = b_1 - a_1$:

$$[x_{\alpha_2}, x_{-\alpha_2}] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \nwarrow \\ \hline \hline \\ \nearrow \\ 3 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \\ \hline \hline \\ \nwarrow \\ 1 \end{array} \right] = \begin{array}{c} 3 \\ \uparrow \\ \hline \hline \\ \downarrow \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ \hline \hline \\ \downarrow \\ 1 \end{array} = h_3 + h_1.$$

3) Corraíz asociada a $\alpha_3 = b_1 - a_2$:

$$[x_{\alpha_3}, x_{-\alpha_3}] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ \nwarrow \\ \hline \hline \\ \nearrow \\ 3 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ \nearrow \\ \hline \hline \\ \nwarrow \\ 2 \end{array} \right] = \begin{array}{c} 3 \\ \uparrow \\ \hline \hline \\ \downarrow \\ 3 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \\ \hline \hline \\ \downarrow \\ 2 \end{array} = h_3 + h_2.$$

Por lo tanto el sistema de corraíces del sistema es

$$\Phi_c = \{h_1 - h_2, h_3 + h_1, h_3 + h_2\}$$

y el sistema de corraíces funcamentales es

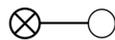
$$\Pi_c = \{h_3 + h_1, h_1 - h_2\}.$$

3.1.5. Matriz de Cartan y diagrama de Dynkin

La matriz de Cartan depende de la elección del sistema de raíces fundamentales, por lo que pueden existir varias matrices de Cartan. Sin embargo sólo existe un diagrama de Dynkin asociado a cada matriz. Para el sistema de raíces fundamentales escogido la matriz y el diagrama son los siguientes

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y su diagrama de Dynkin asociado



3.2. Superálgebra lineal especial $\mathfrak{sl}(m|n)$

Ahora realizaremos el estudio de esta superálgebra para el caso general. Recordando del capítulo anterior

$$A(m-1, n-1) := \mathfrak{sl}(m|n) = \{M \in \mathfrak{gl}(m|n) : \text{str}(M) = 0\}.$$

3.2.1. Conjunto de generadores $\mathfrak{sl}(m|n)$

Al igual que en el ejemplo anterior, estos generadores se dividen en bosónicos y fermiónicos.

Generadores bosónicos (diagonales):

$$\left\{ \begin{array}{c} p \\ \uparrow \quad | \quad | \\ \hline p \end{array} + \begin{array}{c} m+q \\ \uparrow \quad | \quad | \\ \hline m+q \end{array}, \quad 1 \leq p \leq m, \quad 1 \leq q \leq n \right\}.$$

Generadores bosónicos (no diagonales):

$$\left\{ \begin{array}{c} j \\ \nearrow \quad | \quad | \\ \hline i \end{array}, \begin{array}{c} m+l \\ \uparrow \quad | \quad | \\ \hline m+k \end{array}, \quad 1 \leq i \neq j \leq m, \quad 1 \leq k \neq l \leq n \right\}.$$

Generadores fermiónicos:

$$\left\{ \begin{array}{c} m+k \\ \nearrow \quad | \quad | \\ \hline i \end{array}, \begin{array}{c} i \\ \nwarrow \quad | \quad | \\ \hline m+k \end{array}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq k \leq n \right\}$$

por lo tanto el conjunto de generadores para $\mathfrak{sl}(m|n)$ es

$$\mathfrak{sl}(m|n) = \left\langle \begin{array}{c} p \\ \uparrow \quad | \quad | \\ \hline p \end{array} + \begin{array}{c} m+q \\ \uparrow \quad | \quad | \\ \hline m+q \end{array}, \begin{array}{c} j \\ \nearrow \quad | \quad | \\ \hline i \end{array}, \begin{array}{c} m+l \\ \uparrow \quad | \quad | \\ \hline m+k \end{array}, \begin{array}{c} m+k \\ \nearrow \quad | \quad | \\ \hline i \end{array}, \begin{array}{c} i \\ \nwarrow \quad | \quad | \\ \hline m+k \end{array} \right\rangle$$

donde $1 \leq i, j, p \leq m$, $1 \leq k, l, q \leq n$ con $i \neq j$ y $k \neq l$.

3.2.2. Subálgebra de Cartan

$$\mathfrak{h} = \left\langle \begin{array}{c} p \\ \uparrow \quad | \quad | \\ \hline p \end{array} + \begin{array}{c} m+q \\ \uparrow \quad | \quad | \\ \hline m+q \end{array}, \quad 1 \leq p \leq m, \quad 1 \leq q \leq n \right\rangle.$$

3.2.3. Sistema de raíces

Sea $h \in \mathfrak{h}$

$$h = \sum_{p=1}^m a_p \overline{\uparrow \quad \uparrow}^p + \sum_{q=1}^n b_q \overline{\quad \uparrow \quad \uparrow}^{m+q}, \text{ donde } \sum_{p=1}^m a_p - \sum_{q=1}^n b_q = 0.$$

El sistema de raíces se obtiene como:

$$\begin{aligned} \left[h, \overline{\uparrow \quad \uparrow}^j_i \right] &= (a_i - a_j) \overline{\uparrow \quad \uparrow}^j_i, \\ \left[h, \overline{\quad \uparrow \quad \uparrow}^{m+1}_{m+k} \right] &= (b_k - b_l) \overline{\quad \uparrow \quad \uparrow}^{m+1}_{m+k}, \\ \left[h, \overline{\uparrow \quad \uparrow}^{m+k}_i \right] &= (a_i - b_k) \overline{\uparrow \quad \uparrow}^{m+k}_i, \\ \left[h, \overline{\quad \uparrow \quad \uparrow}^i_{m+k} \right] &= (b_k - a_i) \overline{\quad \uparrow \quad \uparrow}^i_{m+k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto de raíces de $\mathfrak{sl}(m|n)$ es

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \{a_i - a_j, b_k - b_l, i \neq j, k \neq l\}, & \Phi_1 &= \{a_i - b_k, b_k - a_i\}, \\ \Phi &= \{a_i - a_j, b_k - b_l, a_i - b_k, b_k - a_i\}. \end{aligned}$$

y las raíces fundamentales son

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= b_1 - b_2, \alpha_2 = b_2 - b_3 \dots, \alpha_{n-1} = b_{n-1} - b_n, \alpha_n = b_n - a_1, \\ \alpha_{n+1} &= a_1 - a_2, \dots, \alpha_{m+n-1} = a_{m-1} - a_m, \\ \Pi &= \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+n-1}\}. \end{aligned}$$

3.2.4. Sistema de corraíces

Antes de hallar las corraíces definimos

$$h_i = \overline{\uparrow \quad \uparrow}^i_i, \quad g_k = \overline{\quad \uparrow \quad \uparrow}^{m+k}_{m+k}.$$

El sistema de corraíces para $\mathfrak{sl}(m|n)$ es

1) Corraíz asociada a $a_i - a_j$:

$$\left[\begin{array}{c} j \\ \hline \nearrow \\ i \end{array}, \begin{array}{c} i \\ \hline \nwarrow \\ j \end{array} \right] = \begin{array}{c} i \\ \hline \uparrow \\ i \end{array} - \begin{array}{c} j \\ \hline \uparrow \\ j \end{array} = h_i - h_j.$$

2) Corraíz asociada a $b_k - b_l$:

$$\left[\begin{array}{c} m+1 \\ \hline \nearrow \\ m+k \end{array}, \begin{array}{c} m+k \\ \hline \nwarrow \\ m+1 \end{array} \right] = \begin{array}{c} m+k \\ \hline \uparrow \\ m+k \end{array} - \begin{array}{c} m+1 \\ \hline \uparrow \\ m+1 \end{array} = g_k - g_l.$$

3) Corraíz asociada a $a_i - b_k$:

$$\left[\begin{array}{c} m+k \\ \hline \nearrow \\ i \end{array}, \begin{array}{c} i \\ \hline \nwarrow \\ m+k \end{array} \right] = \begin{array}{c} i \\ \hline \uparrow \\ i \end{array} + \begin{array}{c} m+k \\ \hline \uparrow \\ m+k \end{array} = h_i - g_k.$$

Luego

$$\Phi_c = \{\pm(h_i - h_j), \pm(g_k - g_l), h_i + g_k\}$$

y las corraíces fundamentales son

$$\Pi_c = \{g_1 - g_2, g_2 - g_3, \dots, g_n + h_1, h_1 - h_2, \dots, h_{m-1} - h_m\}.$$

3.2.5. Matriz de Cartan y diagrama de Dynkin

Utilizando la ecuación (2.1) se puede probar que la matriz de Cartan de $\mathfrak{sl}(m|n)$ es

$$\left[\begin{array}{cccc|c|cccc}
 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
 -1 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\
 0 & \ddots & & \ddots & 0 & & & & & \\
 \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & \ddots & & & & \vdots \\
 0 & & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & & 0 \\
 \hline
 0 & & & \ddots & -1 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\
 \hline
 0 & & & & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
 \vdots & & & & & \ddots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & 0 & \ddots & & \ddots & 0 \\
 & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\
 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2
 \end{array} \right] .$$

El diagrama de Dynkin es

$$A(m-1, n-1), \quad \bigcirc - \bigcirc \cdots \bigcirc - \bigotimes - \bigcirc \cdots \bigcirc - \bigcirc \cdot$$

Capítulo 4

Superálgebra de Lie Ortosimpléctica

impar $\mathfrak{osp}(2m + 1|2n) = B(m, n)$

Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(m|n)$ tenemos que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(m) \oplus \mathfrak{sp}(n)$, que es la suma directa entre el algebra de Lie ortogonal y el álgebra de Lie simpléctica, de aquí toma el nombre de ortosimpléctica.

En las álgebras de Lie existen diferencias importantes en la estructura de las álgebras ortogonales dependiendo de si es par o impar. Con las superálgebras pasa algo similar y es por esto que la superálgebras ortosimplécticas se dividen en tres familias:

- La superálgebra $B(m, n) = \mathfrak{osp}(2m + 1|2n)$ definida para $m \geq 0, n \geq 1$ con dimensión $2(m + n)^2 + m + 3n$.
- La superálgebra $C(n + 1) = \mathfrak{osp}(2|2n)$ para $n \geq 1$ con dimensión $2n^2 + 5n + 1$.
- La superálgebra $D(m, n) = \mathfrak{osp}(2m|2n)$ definida para $m \geq 2, n \geq 1$ con dimensión $2(m + n)^2 - m + n$.

En este capítulo estudiaremos la primera estructura mencionada. Esta superálgebra también es conocida como superálgebra de Lie orto-simpléctica impar y se define por

$$\mathfrak{osp}(2m + 1|2n) = \{X : X^t S + S X = 0\},$$

donde

$$S = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & I_m & 0 & & \\ I_m & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & 0 & I_n \\ & & & -I_n & 0 \end{array} \right) \in M_{2m+1+2n}(\mathbb{C}).$$

Luego $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ está compuesto por las matrices de la forma

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc|cc} A & B & U & X & X_1 \\ C & -A^t & V & Y & Y_1 \\ -V^t & -U^t & 0 & Z & Z_1 \\ \hline Y_1^t & X_1^t & Z_1^t & D & E \\ -Y^t & -X^t & -Z^t & F & -D^t \end{array} \right) : \begin{array}{l} B, C \in M_{m \times m}(\mathbb{C}), \quad B = -B^t, \quad C = -C^t, \\ E, F \in M_{n \times n}(\mathbb{C}), \quad E = E^t, \quad F = F^t, \\ U, V \in M_{m \times 1}(\mathbb{C}), \\ X, Y, X_1, Y_1 \in M_{m \times n}(\mathbb{C}), \\ Z, Z_1 \in M_{1 \times n}(\mathbb{C}). \end{array} \right\}.$$

Las matrices A y D son matrices cualquiera de tamaño $m \times m$ y $n \times n$, respectivamente.

4.1. Conjunto de generadores $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$

Podemos observar que si $n = 0$ entonces la superálgebra orto-simpléctica $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ es igual al álgebra de Lie ortogonal impar $\mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})$ y si $m = 0$ se tiene un caso especial, el cual analizaremos al final del capítulo. De esto podemos concluir que la submatriz de los elementos de $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ compuesta por las matrices A, B, C, U y V , tiene la misma forma que las matrices del álgebra de Lie $\mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})$. Sin embargo los generadores en este caso se escribirán con los grafos introducidos en este trabajo. Estos generadores son

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} i \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ i \end{array} - \begin{array}{c} m+i \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ m+i \end{array}, \begin{array}{c} m+j \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ i \end{array} - \begin{array}{c} m+i \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ j \end{array}, \begin{array}{c} j \\ \searrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ m+i \end{array} - \begin{array}{c} i \\ \searrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ m+j \end{array}, \begin{array}{c} j \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ i \end{array} - \begin{array}{c} m+i \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ m+j \end{array}, \\ \begin{array}{c} i \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ j \end{array} - \begin{array}{c} m+j \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ m+i \end{array}, \begin{array}{c} 2m+1 \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ i \end{array} - \begin{array}{c} m+i \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ 2m+1 \end{array}, \begin{array}{c} 2m+1 \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ m+i \end{array} - \begin{array}{c} i \\ \searrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ 2m+1 \end{array}, 1 \leq i < j \leq m \end{array} \right\}.$$

Igualmente sucede con la submatriz de los elementos de $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ compuesta por las matrices D, E y F , pero ahora generados por el álgebra de Lie simpléctica $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$. Como los generadores son conocidos, sólo basta con reescribirlos en los nuevos grafos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2m+1+k}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}} - \frac{2m+1+n+k}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}, \frac{2m+1+n+l}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}} + \frac{2m+1+n+k}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}, \frac{2m+1+l}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}} + \frac{2m+1+k}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}, \\ \frac{2m+1+l}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}} - \frac{2m+1+n+k}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}, \frac{2m+1+k}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}} - \frac{2m+1+n+l}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}, \frac{2m+1+n+k}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}, \frac{2m+1+k}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}} \end{array} \right\},$$

con $1 \leq k < l \leq n$.

De esta manera sólo nos resta encontrar los generadores fermiónicos. Sea F el conjunto de los generadores

$$F = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2m+1+k}{i} - \frac{m+i}{2m+1+n+k}, \frac{2m+1+k}{2m+1} - \frac{2m+1}{2m+1+n+k}, \frac{2m+1+n+k}{i} - \frac{2m+1}{2m+1+k}, \\ \frac{2m+1+n+k}{i} + \frac{m+i}{2m+1+k}, \frac{2m+1+n+k}{m+i} + \frac{i}{2m+1+n+k}, \frac{2m+1+n+k}{2m+1} + \frac{2m+1}{2m+1+k} \end{array} \right\},$$

con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq k \leq n$.

Por lo tanto $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ como subespacio de $\mathbf{Digraph}^1(2m+1|2n)$ está generado por

$$\mathfrak{osp}(2m+1|2n) = \langle \mathbf{graphs}(\mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})), \mathbf{graphs}(\mathfrak{sp}_{2m}(\mathbb{C})), \mathbf{graphs}(F) \rangle.$$

4.2. Subálgebra de Cartan

Tomamos como subálgebra de Cartan el siguientes subespacio

$$\mathfrak{h} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{p}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}} - \frac{m+p}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}, \frac{2m+1+q}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}} - \frac{2m+1+n+q}{\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}} \end{array}, 1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n \right\rangle.$$

4.3. Sistema de raíces

Sea $h \in \mathfrak{h}$ definida por

$$h = \sum_{p=1}^m a_p \left(\frac{p}{\uparrow \text{||||}} - \frac{m+p}{\uparrow \text{||||}} \right) + \sum_{q=1}^n b_q \left(\frac{2m+1+q}{\text{||||}\uparrow} - \frac{2m+1+n+q}{\text{||||}\uparrow} \right)$$

Calculamos las raíces positivas

$$\begin{aligned} \left[h, \frac{j}{\uparrow \text{||||}} - \frac{m+i}{\uparrow \text{||||}} \right] &= (a_i - a_j) \left(\frac{j}{\uparrow \text{||||}} - \frac{m+i}{\uparrow \text{||||}} \right), \\ \left[h, \frac{m+j}{\uparrow \text{||||}} - \frac{m+i}{\uparrow \text{||||}} \right] &= (a_i + a_j) \left(\frac{m+j}{\uparrow \text{||||}} - \frac{m+i}{\uparrow \text{||||}} \right), \\ \left[h, \frac{2m+1}{\uparrow \text{||||}} - \frac{m+i}{\uparrow \text{||||}} \right] &= a_i \left(\frac{2m+1}{\uparrow \text{||||}} - \frac{m+i}{\uparrow \text{||||}} \right), \\ \left[h, \frac{2m+1+l}{\text{||||}\uparrow} - \frac{2m+1+l}{\text{||||}\uparrow} \right] &= (b_k - b_l) \left(\frac{2m+1+l}{\text{||||}\uparrow} - \frac{2m+1+l}{\text{||||}\uparrow} \right), \\ \left[h, \frac{2m+1+n+l}{\text{||||}\uparrow} + \frac{2m+1+n+k}{\text{||||}\uparrow} \right] &= (b_k + b_l) \left(\frac{2m+1+n+l}{\text{||||}\uparrow} + \frac{2m+1+n+k}{\text{||||}\uparrow} \right), \\ \left[h, \frac{2m+1+n+k}{\text{||||}\uparrow} \right] &= 2b_k \left(\frac{2m+1+n+k}{\text{||||}\uparrow} \right). \end{aligned}$$

Consideremos la transformación lineal

$$T : \mathbf{Digraph}^1(2m+1|2n) \longrightarrow \mathbf{Digraph}^1(2m+1|2n)$$

que envía cada grafo en su opuesto. Esta transformación es un antimorfismo, i.e,

$T(ab) = T(b)T(a)$, para todo $a, b \in \mathbf{Digraph}^1(2m+1|2n)$. Por ejemplo,

$$T : \frac{m+j}{\uparrow \text{||||}} \longrightarrow \frac{i}{\text{||||}\downarrow}.$$

Utilizando esta transformación se hallan las raíces negativas.

En conclusión el conjunto de raíces pares de $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ es

$$\Phi_0 = \{\pm a_i \pm a_j, \pm a_i, \pm b_k \pm b_l, \pm 2b_k, \quad 1 \leq i \neq j \leq m, \quad 1 \leq k \neq l \leq n\}.$$

Nota 52. Podemos observar que la parte par del sistema de raíces es igual a la suma directa del sistema de raíces del álgebra de Lie $\mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})$ y $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$, esto es

$$\Phi_0 = \Phi_{\mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})} \oplus \Phi_{\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})}.$$

Ahora hallamos el conjunto de raíces impares de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left[h, \frac{\begin{array}{c} 2m+1+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ i \end{array}}{i} - \frac{\begin{array}{c} m+i \\ \downarrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \uparrow \\ 2m+1+n+k \end{array}}{2m+1+n+k} \right] &= (a_i - b_k) \left(\frac{\begin{array}{c} 2m+1+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ i \end{array}}{i} - \frac{\begin{array}{c} m+i \\ \downarrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \uparrow \\ 2m+1+n+k \end{array}}{2m+1+n+k} \right), \\ \left[h, \frac{\begin{array}{c} 2m+1+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ m+i \end{array}}{m+i} - \frac{\begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \uparrow \\ 2m+1+n+k \end{array}}{2m+1+n+k} \right] &= (-a_i - b_k) \left(\frac{\begin{array}{c} 2m+1+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ m+i \end{array}}{m+i} - \frac{\begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \uparrow \\ 2m+1+n+k \end{array}}{2m+1+n+k} \right), \\ \left[h, \frac{\begin{array}{c} 2m+1+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ 2m+1 \end{array}}{2m+1} - \frac{\begin{array}{c} 2m+1 \\ \downarrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \uparrow \\ 2m+1+n+k \end{array}}{2m+1+n+k} \right] &= (-b_k) \left(\frac{\begin{array}{c} 2m+1+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ 2m+1 \end{array}}{2m+1} - \frac{\begin{array}{c} 2m+1 \\ \downarrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \uparrow \\ 2m+1+n+k \end{array}}{2m+1+n+k} \right), \\ \left[h, \frac{\begin{array}{c} 2m+1+n+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ i \end{array}}{i} + \frac{\begin{array}{c} m+i \\ \downarrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \uparrow \\ 2m+1+k \end{array}}{2m+1+k} \right] &= (a_i + b_k) \left(\frac{\begin{array}{c} 2m+1+n+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ i \end{array}}{i} + \frac{\begin{array}{c} m+i \\ \downarrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \uparrow \\ 2m+1+k \end{array}}{2m+1+k} \right), \\ \left[h, \frac{\begin{array}{c} 2m+1+n+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ m+i \end{array}}{m+i} + \frac{\begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \uparrow \\ 2m+1+k \end{array}}{2m+1+k} \right] &= (-a_i + b_k) \left(\frac{\begin{array}{c} 2m+1+n+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ m+i \end{array}}{m+i} + \frac{\begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \uparrow \\ 2m+1+k \end{array}}{2m+1+k} \right), \\ \left[h, \frac{\begin{array}{c} 2m+1+n+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ 2m+1 \end{array}}{2m+1} + \frac{\begin{array}{c} 2m+1 \\ \downarrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \uparrow \\ 2m+1+k \end{array}}{2m+1+k} \right] &= (b_k) \left(\frac{\begin{array}{c} 2m+1+n+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ 2m+1 \end{array}}{2m+1} + \frac{\begin{array}{c} 2m+1 \\ \downarrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \uparrow \\ 2m+1+k \end{array}}{2m+1+k} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema de raíces impares es

$$\Phi_1 = \{\pm a_i \pm b_k, \pm b_k, 1 \leq i \neq j \leq m, 1 \leq k \neq l \leq n\}$$

y el sistema de raíces fundamentales es

$$\Pi = \{b_1 - b_2, b_2 - b_3, \dots, b_n - a_1, a_1 - a_2, \dots, a_{m-1} - a_m, a_m\}.$$

4.4. Sistema de corraíces

Para esta sección utilizaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned} h_i &= \frac{\begin{array}{c} i \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ i \end{array}}{i} - \frac{\begin{array}{c} m+i \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ m+i \end{array}}{m+i}, \\ g_k &= \frac{\begin{array}{c} 2m+1+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ 2m+1+k \end{array}}{2m+1+k} - \frac{\begin{array}{c} 2m+1+n+k \\ \uparrow \\ \hline \hline \hline \hline \\ \downarrow \\ 2m+1+n+k \end{array}}{2m+1+n+k}. \end{aligned}$$

Tomamos todas las raíces de Φ_0 y calculamos sus corraíces correspondientes.

1) Corraíz asociada a la raíz $a_i - a_j$:

$$\left[\begin{array}{c} j \\ \uparrow \\ \text{||||} \\ i \end{array} - \frac{m+i}{m+j} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{||||} \\ m+j \end{array}, \begin{array}{c} i \\ \uparrow \\ \text{||||} \\ j \end{array} - \frac{m+j}{m+i} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{||||} \\ m+i \end{array} \right] = h_i - h_j.$$

2) Corraíz asociada a $a_i + a_j$:

$$\left[\begin{array}{c} m+j \\ \uparrow \\ \text{||||} \\ i \end{array} - \frac{m+i}{j} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{||||} \\ j \end{array}, \begin{array}{c} j \\ \uparrow \\ \text{||||} \\ m+i \end{array} - \frac{i}{m+j} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{||||} \\ m+j \end{array} \right] = -h_i - h_j.$$

como $(a_i + a_j)(-h_i - h_j) = -2$ entonces la corraíz asociada a $a_i + a_j$ es $h_i + h_j$.

3) Corraíz asociada a a_i :

$$\left[\begin{array}{c} 2m+1 \\ \uparrow \\ \text{||||} \\ i \end{array} - \frac{m+i}{2m+1} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{||||} \\ 2m+1 \end{array}, \begin{array}{c} 2m+1 \\ \uparrow \\ \text{||||} \\ m+i \end{array} - \frac{m+i}{2m+1} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{||||} \\ 2m+1 \end{array} \right] = -h_i$$

la corraíz asociada a esta raíz es $2h_i$ ya que $a_i(2h_i) = 2$.

4) Corraíz asociada a $b_k - b_l$:

$$\left[\begin{array}{c} 2m+1+l \\ \uparrow \\ \text{||||} \\ 2m+1+k \end{array} - \frac{2m+1+n+k}{2m+1+n+l} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{||||} \\ 2m+1+n+l \end{array}, \begin{array}{c} 2m+1+k \\ \uparrow \\ \text{||||} \\ 2m+1+l \end{array} - \frac{2m+1+n+l}{2m+1+n+k} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{||||} \\ 2m+1+n+k \end{array} \right] = g_k - g_l.$$

5) Corraíz asociada a $b_k + b_l$:

$$\left[\begin{array}{c} 2m+1+n+l \\ \uparrow \\ \text{||||} \\ 2m+1+k \end{array} - \frac{2m+1+n+k}{2m+1+l} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{||||} \\ 2m+1+l \end{array}, \begin{array}{c} 2m+1+l \\ \uparrow \\ \text{||||} \\ 2m+1+n+k \end{array} - \frac{2m+1+k}{2m+1+n+l} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{||||} \\ 2m+1+n+l \end{array} \right] = g_k + g_l.$$

6) Corraíz asociada a $2b_k$:

$$\left[\begin{array}{c} 2m+1+n+k \\ \uparrow \\ \text{||||} \\ 2m+1+k \end{array}, \begin{array}{c} 2m+1+k \\ \uparrow \\ \text{||||} \\ 2m+1+n+k \end{array} \right] = g_k.$$

Luego, el conjunto obtenido es

$$\Phi_c^0 = \{\pm h_i \pm h_j, \pm 2h_i, \pm g_k \pm g_l, \pm g_k\}.$$

Nota 53. Sea $\Phi_0^c \subset \Phi_c$ el conjunto de todas las corraíces de $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ que provienen de Φ_0 . Entonces podemos observar que

$$\Phi_0^c = \Phi_{\mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})}^c \oplus \Phi_{\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})}^c.$$

Ahora calculamos las corraíces que provienen de Φ_1 , i.e. Φ_1^c :

1) Corraíz asociada a $a_i - b_k$:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{2m+1+k}{i} \\ \text{diagram} \end{array} - \begin{array}{c} \frac{m+i}{2m+1+n+k} \\ \text{diagram} \end{array}, \begin{array}{c} \frac{2m+1+n+k}{m+i} \\ \text{diagram} \end{array} + \begin{array}{c} \frac{i}{2m+1+k} \\ \text{diagram} \end{array} \right] = h_i + g_k.$$

2) Corraíz asociada a $a_i + b_k$:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{2m+1+n+k}{i} \\ \text{diagram} \end{array} + \begin{array}{c} \frac{m+i}{2m+1+k} \\ \text{diagram} \end{array}, \begin{array}{c} \frac{2m+1+k}{m+i} \\ \text{diagram} \end{array} - \begin{array}{c} \frac{i}{2m+1+n+k} \\ \text{diagram} \end{array} \right] = -h_i + g_k.$$

3) Corraíz asociada a b_k :

$$\left[\begin{array}{c} \frac{2m+1+n+k}{2m+1} \\ \text{diagram} \end{array} + \begin{array}{c} \frac{2m+1}{2m+1+k} \\ \text{diagram} \end{array}, \begin{array}{c} \frac{2m+1+k}{2m+1} \\ \text{diagram} \end{array} - \begin{array}{c} \frac{2m+1}{2m+1+n+k} \\ \text{diagram} \end{array} \right] = g_k$$

la corraíz asociada a esta raíz es $2g_k$ ya que $b_k(2g_k) = 2$.

Concluimos que

$$\Phi_c = \{\pm h_i \pm h_j, \pm 2h_i, \pm g_k \pm g_l, \pm g_k, \pm h_i \pm g_k, \pm 2g_k | 1 \leq i < j \leq m, 1 \leq k < l \leq n\}$$

es el sistema de corraíces de $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$, y el conjunto de raíces fundamentales es

$$\Pi_c = \{g_1 - g_2, g_2 - g_3, \dots, g_n + h_1, h_1 - h_2, \dots, h_{m-1} - h_m, 2h_m\}.$$

4.5. Matriz de Cartan y diagrama de Dynkin

Utilizando la ecuación (2.1) se puede verificar que la matriz de Cartan es

y su diagrama de Dynkin asociado es

$$B(0, n), \quad \circ \cdots \circ \rightrightarrows \bullet \cdot$$

Para obtener más información sobre este caso particular revisar [7] .

Capítulo 5

Superálgebra de Lie Ortosimpléctica

par $\mathfrak{osp}(2m|2n) = D(m, n)$

Esta superálgebra también es conocida como superálgebra de Lie ortosimpléctica impar y se define por

$$\mathfrak{osp}(2m|2n) = \{X : X^t S + SX = 0\},$$

donde

$$S = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & I_m & & \\ I_m & 0 & & \\ \hline & & 0 & I_n \\ & & -I_n & 0 \end{array} \right) \in M_{2m+2n}(\mathbb{C}).$$

Lo que es equivalente al conjunto de las matrices formadas por

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} A & B & X & X_1^t \\ C & -A^t & Y & Y_1^t \\ \hline Y_1^t & X_1^t & D & E \\ -Y^t & -X^t & F & -D^t \end{array} \right) : \begin{array}{l} A, B, C \in M_{m \times m}(\mathbb{C}), \quad B = -B^t, \quad C = -C^t, \\ D, E, F \in M_{n \times n}(\mathbb{C}), \quad E = E^t, \quad F = F^t, \\ X, Y, X_1, Y_1 \in M_{m \times n}(\mathbb{C}). \end{array} \right\}.$$

5.1. Conjunto de generadores $\mathfrak{osp}(2m|2n)$

Podemos observar que si $n = 0$ entonces la superálgebra ortosimpléctica $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ es igual al álgebra de Lie ortogonal par $\mathfrak{so}_{2m}(\mathbb{C})$ y si $m = 0$ es igual al álgebra de Lie simpléctica $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$. Al igual que en el capítulo anterior podemos concluir que la submatriz de los elementos de $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ compuesta por las matrices A, B, C, U, V , tienen la misma forma que los elementos del álgebra de Lie $\mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C})$. Igualmente sucede con la submatriz de los elementos de $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ compuesta por las matrices D, E y F , pero ahora generados por el álgebra de Lie $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$.

Así, sólo nos resta encontrar los generadores fermiónicos. Sea F el conjunto de éstos

$$F = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \nearrow \\ \hline \end{array}}_{i} - \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \searrow \\ \hline \end{array}}_{2m+n+k}^{m+i}, \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \nearrow \\ \hline \end{array}}_{m+i}^{2m+k} - \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \searrow \\ \hline \end{array}}_{2m+n+k}^i, \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \nearrow \\ \hline \end{array}}_i^{2m+n+k} + \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \searrow \\ \hline \end{array}}_{2m+k}^{m+i}, \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \nearrow \\ \hline \end{array}}_{m+i}^{2m+n+k} + \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \searrow \\ \hline \end{array}}_{2m+k}^i \end{array} \right\},$$

con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq k \leq n$.

Por lo tanto $\mathfrak{osp}(2m|2n)$, como subespacio de $\mathbf{Digraph}^1(2m|2n)$, está generado por

$$\mathfrak{osp}(2m|2n) = \langle \mathbf{graphs}(\mathfrak{so}_{2m}(\mathbb{C})), \mathbf{graphs}(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})), F \rangle.$$

5.2. Subálgebra de Cartan

La subálgebra de Cartan está generado por los mismos elementos que la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$

$$\mathfrak{h} = \left\langle \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}_p^p - \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}_{m+p}^{m+p}, \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}_{2m+q}^{2m+q} - \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}_{2m+n+q}^{2m+n+q}, 1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n \right\rangle.$$

5.3. Sistema de raíces

Sea $h \in \mathfrak{h}$ dada por

$$h = \sum_{p=1}^m a_p \left(\overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}_p^p - \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}_{m+p}^{m+p} \right) + \sum_{q=1}^n b_q \left(\overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}_{2m+q}^{2m+q} - \overline{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array}}_{2m+n+q}^{2m+n+q} \right).$$

Para calcular las raíces podemos tomar como referencia la Nota 52 del capítulo anterior y adaptarla para la nueva superálgebra, teniendo en cuenta que los cálculos y por tanto los resultados son análogos.

Sea $\Phi = \Phi_0 \cup \Phi_1$ un sistema de raíces asociado a $\mathfrak{osp}(2m|2n)$, entonces el sistema de raíces par es igual a la suma directa del sistema de raíces del álgebra de Lie $\mathfrak{so}_{2m}(\mathbb{C})$ y $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ esto es

$$\Phi_0 = \Phi_{\mathfrak{so}_{2m}(\mathbb{C})} \oplus \Phi_{\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})}.$$

Calculamos Φ_1

$$\begin{aligned} \left[h, \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \nearrow & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{i} - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \searrow & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{2m+n+k} \right] &= (a_i - b_k) \left(\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \nearrow & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{i} - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \searrow & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{2m+n+k} \right), \\ \left[h, \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \nearrow & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{m+i} - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \searrow & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{2m+n+k} \right] &= (-a_i - b_k) \left(\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \nearrow & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{m+i} - \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \searrow & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{2m+n+k} \right), \\ \left[h, \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \nearrow & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{i} + \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \searrow & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{2m+k} \right] &= (a_i + b_k) \left(\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \nearrow & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{i} + \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \searrow & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{2m+k} \right), \\ \left[h, \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \nearrow & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{m+i} + \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \searrow & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{2m+k} \right] &= (-a_i + b_k) \left(\frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \nearrow & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{m+i} + \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & \searrow & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}}{2m+k} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema de raíces es

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \{\pm a_i \pm a_j, \pm b_k \pm b_l, \pm 2b_k, \ 1 \leq i \neq j \leq m, \ 1 \leq k \neq l \leq n\}, & \Phi_1 &= \{\pm a_i \pm b_k\}, \\ \Phi &= \{\pm a_i \pm a_j, \pm b_k \pm b_l, \pm 2b_k, \pm a_i \pm b_k, \ 1 \leq i \neq j \leq m, \ 1 \leq k \neq l \leq n\}. \end{aligned}$$

y el sistema de raíces simples es

$$\Pi = \{b_1 - b_2, \dots, b_n - a_1, a_1 - a_2, \dots, a_{m-1} - a_m, a_{m-1} + a_m\}.$$

5.4. Sistema de corraíces

Utilizaremos la siguiente notación

$$h_i = \frac{i}{\uparrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \hline \hline \end{array}} - \frac{m+i}{\uparrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline \hline \hline \end{array}},$$

$$g_k = \frac{2m+1+k}{\begin{array}{|c|c|} \hline \hline \end{array}} - \frac{2m+1+n+k}{\begin{array}{|c|c|} \hline \hline \end{array}}.$$

Podemos utilizar la Nota 53 y adaptarla a $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ para no realizar los cálculos de algunas de las corraíces ya que son análogos a los realizados en el capítulo anterior. Esto reduce los cálculos significativamente.

Sea $\Phi_0^c \subset \Phi_c$ el conjunto de todas las corraíces de $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ que provienen de Φ_0 . Entonces

$$\Phi_0^c = \Phi_{\mathfrak{so}_{2m}(\mathbb{C})}^c \oplus \Phi_{\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})}^c.$$

Sólo hace falta calcular Φ_1^c :

1) Corraíz asociada a $a_i - b_k$:

$$\left[\frac{2m+k}{\begin{array}{|c|c|} \hline \hline \end{array}} - \frac{m+i}{\begin{array}{|c|c|} \hline \hline \end{array}}, \frac{2m+n+k}{\begin{array}{|c|c|} \hline \hline \end{array}} + \frac{i}{\begin{array}{|c|c|} \hline \hline \end{array}} \right] = h_i + g_k.$$

2) Corraíz asociada a $a_i + b_k$:

$$\left[\frac{2m+n+k}{\begin{array}{|c|c|} \hline \hline \end{array}} + \frac{m+i}{\begin{array}{|c|c|} \hline \hline \end{array}}, \frac{2m+k}{\begin{array}{|c|c|} \hline \hline \end{array}} - \frac{i}{\begin{array}{|c|c|} \hline \hline \end{array}} \right] = -h_i + g_k.$$

El sistema de corraíces de $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ es

$$\Phi_c = \Phi_0^c \cup \Phi_1^c = \{\pm h_i \pm h_j, \pm g_k \pm g_l, \pm g_k, \pm h_i \pm g_k, 1 \leq i < j \leq m, 1 \leq k < l \leq n\}$$

y el conjunto de raíces fundamentales es

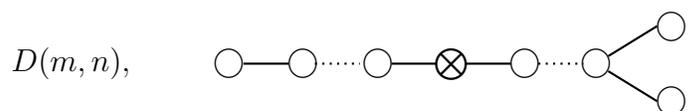
$$\Pi_c = \{g_1 - g_2, g_2 - g_3, \dots, g_n + h_1, h_1 - h_2, \dots, h_{m-1} - h_m, h_m\}.$$

5.5. Matriz de Cartan y diagrama de Dynkin

La matriz de Cartan asociada al sistema de raíces simples es

$$\left[\begin{array}{cccc|c|cccc} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & 0 & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & & & 0 \\ \hline 0 & & & \ddots & -1 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \hline 0 & & & & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 & \ddots & & -1 & -1 \\ & & & & & & & \ddots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

El diagrama de Dynkin asociado a la matriz de Cartan es



$$\mathfrak{osp}(2|2n) = \langle \text{graphs}(\mathfrak{so}_2(\mathbb{C})), \text{graphs}(\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})), F \rangle.$$

6.2. Subálgebra de Cartan

La subálgebra de Cartan es generada por los elementos siguientes

$$\mathfrak{h} = \left\langle \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \square \square \square \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \square \square \square \\ 2 \end{array}, \begin{array}{c} 2+k \\ \square \uparrow \square \square \\ 2+k \end{array} - \begin{array}{c} 2+n+p \\ \square \square \square \uparrow \\ 2+n+p \end{array}, 1 \leq p \leq n \right\rangle.$$

6.3. Sistema de raíces

Sea $h \in \mathfrak{h}$ definida por

$$h = a_1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \square \square \square \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \square \square \square \\ 2 \end{array} \right) + \sum_{p=1}^n b_p \left(\begin{array}{c} 2+p \\ \square \uparrow \square \square \\ 2+p \end{array} - \begin{array}{c} 2+n+p \\ \square \square \square \uparrow \\ 2+n+p \end{array} \right).$$

Sea $\Phi = \Phi_0 \cup \Phi_1$ un sistema de raíces asociado a $\mathfrak{osp}(2|2n)$, entonces el sistema de raíces par es igual a la suma directa del sistema de raíces del álgebra de Lie $\mathfrak{so}_2(\mathbb{C})$ y $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ esto es

$$\Phi_0 = \Phi_{\mathfrak{so}_2(\mathbb{C})} \oplus \Phi_{\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})}.$$

Sin embargo, el sistema de raíces de $\mathfrak{so}_2(\mathbb{C})$ es vacío ya que este espacio está generado únicamente por el elemento $\begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \square \square \square \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \square \square \square \\ 2 \end{array}$ de la subálgebra de Cartan, luego

$$\Phi_0 = \Phi_{\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})}.$$

Calculamos Φ_1

$$\begin{aligned} \left[h, \begin{array}{c} 2+k \\ \uparrow \square \square \square \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} 2 \\ \square \square \square \downarrow \\ 2+n+k \end{array} \right] &= (a_1 - b_k) \left(\begin{array}{c} 2+k \\ \uparrow \square \square \square \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} 2 \\ \square \square \square \downarrow \\ 2+n+k \end{array} \right), \\ \left[h, \begin{array}{c} 2+k \\ \square \square \square \downarrow \\ 2 \end{array} - \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \square \square \square \\ 2+n+k \end{array} \right] &= (-a_1 - b_k) \left(\begin{array}{c} 2+k \\ \square \square \square \downarrow \\ 2 \end{array} - \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \square \square \square \\ 2+n+k \end{array} \right), \\ \left[h, \begin{array}{c} 2+n+k \\ \square \square \square \downarrow \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \square \square \square \downarrow \\ 2+k \end{array} \right] &= (a_1 + b_k) \left(\begin{array}{c} 2+n+k \\ \square \square \square \downarrow \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \square \square \square \downarrow \\ 2+k \end{array} \right), \\ \left[h, \begin{array}{c} 2+n+k \\ \square \square \square \downarrow \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \square \square \square \downarrow \\ 2+k \end{array} \right] &= (-a_1 + b_k) \left(\begin{array}{c} 2+n+k \\ \square \square \square \downarrow \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \square \square \square \downarrow \\ 2+k \end{array} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema de raíces es

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \{\pm b_k \pm b_l, \pm 2b_k, 1 \leq k \neq l \leq n\}, & \Phi_1 &= \{\pm a_1 \pm b_k, 1 \leq k \leq n\}, \\ \Phi &= \{\pm b_k \pm b_l, \pm 2b_k, \pm a_i \pm b_k, 1 \leq k \neq l \leq n\}\end{aligned}$$

y el sistema de raíces simples es

$$\Pi = \{a_1 - b_1, b_1 - b_2, \dots, b_{n-1} - b_n, 2b_n\}.$$

6.4. Sistema de corraíces

Utilizaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned}h_1 &= \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \text{---} \text{---} \text{---} \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \text{---} \text{---} \text{---} \\ 2 \end{array}, \\ g_k &= \begin{array}{c} 2+k \\ \uparrow \uparrow \text{---} \text{---} \\ 2+k \end{array} - \begin{array}{c} 2+n+k \\ \text{---} \text{---} \uparrow \\ 2+n+k \end{array}.\end{aligned}$$

Análogamente a lo enunciado en la Nota 53 podemos decir lo siguiente:

Sea $\Phi_0^c \subset \Phi_c$ el conjunto de todas las corraíces de $\mathfrak{osp}(2|2n)$ que provienen de Φ_0 .

Entonces

$$\Phi_0^c = \Phi_{\mathfrak{so}_2(\mathbb{C})}^c \oplus \Phi_{\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})}^c.$$

Ahora calculamos las corraíces que provienen de Φ_1 , i.e. Φ_1^c :

1) Corraíz asociada a $a_1 - b_k$:

$$\left[\begin{array}{c} 2+k \\ \nearrow \text{---} \text{---} \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \text{---} \searrow \\ 2+n+k \end{array}, \begin{array}{c} 2+n+k \\ \nearrow \text{---} \text{---} \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \text{---} \searrow \\ 2+k \end{array} \right] = h_1 + g_k.$$

2) Corraíz asociada a $a_1 + b_k$:

$$\left[\begin{array}{c} 2+n+k \\ \nearrow \text{---} \text{---} \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \text{---} \searrow \\ 2+k \end{array}, \begin{array}{c} 2+k \\ \nearrow \text{---} \text{---} \\ 2 \end{array} - \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \text{---} \searrow \\ 2+n+k \end{array} \right] = -h_1 + g_k.$$

Luego el sistema es $\Phi_c = \{\pm g_k \pm g_l, \pm g_k, \pm(h_1 - g_k), 1 \leq k \neq l \leq n\}$ y las corraíces fundamentales son $\Pi_c = \{h_1 - g_1, g_1 - g_2, \dots, g_{n-1} - g_n\}$.

6.5. Matriz de Cartan y diagrama de Dynkin

La matriz de Cartan asociada al sistema de raíces simples es

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

El diagrama de Dynkin asociado a la matriz de Cartan es

$$C(n+1), \quad \otimes \text{---} \circ \cdots \circ \text{---} \circ \text{---} \circ.$$

Cuadro 6.1: Resumen

Superálgebra	Raíces fundamentales Π	Corraíces fundamentales Π_c	Matriz de Cartan	Diagrama de Dynkin
$\mathfrak{sl}(m n)$	$b_1 - b_2, b_2 - b_3, \dots, b_n - a_1, a_1 - a_2, \dots, a_{m-1} - a_m$	$g_1 - g_2, g_2 - g_3, \dots, g_n + h_1, h_1 - h_2, \dots, h_{m-1} - h_m$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$	
$\mathfrak{osp}(2m+1 2n)$	$b_1 - b_2, b_2 - b_3, \dots, b_n - a_1, a_1 - a_2, \dots, a_{m-1} - a_m, a_m$	$g_1 - g_2, g_2 - g_3, \dots, g_n + h_1, h_1 - h_2, \dots, h_{m-1} - h_m, 2h_m$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$	
$\mathfrak{osp}(0 2n)$	$b_1 - b_2, b_2 - b_3, \dots, b_{n-1} - b_n, b_n$	$g_1 - g_2, g_2 - g_3, \dots, g_{n-1} - g_n, 2g_n$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$	
$\mathfrak{osp}(2m 2n)$	$b_1 - b_2, \dots, b_n - a_1, a_1 - a_2, \dots, a_{m-1} - a_m, a_m$	$g_1 - g_2, g_2 - g_3, \dots, g_n + h_1, h_1 - h_2, \dots, h_{m-1} - h_m, h_m$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	
$\mathfrak{osp}(2 2n)$	$a_1 - b_1, b_1 - b_2, \dots, b_{n-1} - b_n, b_n, 2b_n$	$h_1 - g_1, g_1 - g_2, \dots, g_{n-1} - g_n$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$	

Bibliografía

- [1] Georgia Benkart, Alberto Elduque, and Consuelo Martinez. $A(n, n)$ -graded Lie superalgebras. *J. Reine Angew*, 573:139–156, 2004.
- [2] Élie Cartan. *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, volume 826. Nony, 1894.
- [3] Roger W. Carter, Ian G. MacDonald, and Graeme B. Segal. *Lectures on Lie groups and Lie algebras*. Cambridge University Press, 1995.
- [4] Shun-Jen Cheng and Weiqiang Wang. *Dualities and representations of Lie superalgebras*, volume 144 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Soc., 2012.
- [5] Rafael Díaz and Eddy Pariguán. Graphical introduction to classical Lie algebras. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Febrero 2008.
- [6] Steven Duplij, Warren Siegel, and Jonathan Bagger. *Concise Encyclopedia of Supersymmetry: And Noncommutative Structures in Mathematics and Physics*. Springer, 2004.
- [7] Richard J. Farmer. Orthosymplectic superalgebras in mathematics and physics. Master's thesis, Universidad de Tasmania, Octubre 1984.
- [8] Luc Frappat, Antonino Sciarrino, and Paul Sorba. *Dictionary on Lie algebra and superalgebras*. 1996.

- [9] Peter G.O. Freund. *Introduction to supersymmetry*. Cambridge University Press, 1988.
- [10] William Fulton and Joe Harris. Representation theory. A first course. *Graduate Texts in Mathematics*, 129, 1991.
- [11] Carlos Gómez-Ambrosi and Ivan P. Shestakov. On the Lie structure of the skew elements of a simple superalgebra with superinvolution. *Journal of Algebra*, 208(1):43–71, 1998.
- [12] James Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9. Springer, 1972.
- [13] Nathan Jacobson. *Exceptional Lie Algebras*. Yale University, 1957.
- [14] Alejandra P. Jancsa and Marco Farinati. Grupos y álgebras de Lie. (56), 2010.
- [15] Victor G. Kac. Lie superalgebras. *Advances in mathematics*, 26(1):8–96, 1977.
- [16] Victor G. Kac. A sketch of Lie superalgebra theory. *Communications in Mathematical Physics*, 53(1):31–64, 1977.
- [17] Victor G. Kac. Classification of supersymmetries. *arXiv preprint math-ph/0302016*, 2003.
- [18] Irving Kaplansky. Superalgebras. *Pacific Journal of Mathematics*, 86(1):93–98, 1980.
- [19] Alexander A. Kirillov. *An introduction to Lie groups and Lie algebras*, volume 113. Cambridge University Press Cambridge, 2008.
- [20] Anthony W. Knap. *Lie groups beyond an introduction*, volume 140. Springer Science & Business Media, 2013.
- [21] David W. Lewis. Quaternion algebras and the algebraic legacy of Hamilton’s quaternions. *Irish Math. Soc. Bulletin*, 57:41–64, 2006.

- [22] Susan Montgomery. Constructing simple Lie superalgebras from associative graded algebras. *Journal of Algebra*, 195(2):558–579, 1997.
- [23] Jean-Pierre Serre and Gareth A Jones. *Complex semisimple Lie algebras*. Springer-Verlag, 1987.
- [24] Veeravalli S. Varadarajan. *Supersymmetry for mathematicians: an introduction*. American Mathematical Soc., 2004.