NEGOCIACIÓN DE FAMILIA: UNA COMPARACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS DE SOLUCIÓN A PARTIR DE UN JUEGO COOPERATIVO Y NO COOPERATIVO♦[1]

LUISA FERNANDA ARÉVALO SANABRIA‡[2]

DIRECTOR: FLAVIO HERNANDO JÁCOME LIÉVANO

RESUMEN

A partir del trabajo de Konrad Lommerud (2000) se analizan con una forma funcional específica los resultados de negociación de una pareja con un juego no cooperativo y luego del mismo juego desarrollado en forma cooperativa en su primera etapa. Se comparan los resultados a través de una función de utilidad que depende a su vez de funciones específicas de costos que describen el tiempo que se dedica al hogar y el salario.

Este trabajo es interesante ya que no se conocen estudios sobre la negociación de familia en los que se comparen los modelos de negociación aquí planteados.

Se concluye que con las funciones especificadas en este trabajo, el nivel de utilidad más alto se encuentra en el juego completamente no cooperativo, en ese modelo están también los niveles más altos de g y de w. Por su parte, los resultados del juego semicooperativo - No cooperativo en etapa 1 y cooperativo en etapa 2 son menores en utilidad, tiempo que se dedica al hogar y salario.

[1] Trabajo presentado para optar por el título de Magister en Economía de la Pontificia Universidad Javeriana.

[2] Agradezco al Doctor Flavio Jácome por su apoyo incondicional y enseñanzas, a mi esposo, padres y amigos quienes con sus palabras y constancia impulsaron este trabajo.

FAMILY NEGOTIATION: A COMPARISON OF OUTCOMES FROM A COOPERATIVE AND NON-COOPERATIVE GAME♦[3]

LUISA FERNANDA ARÉVALO SANABRIA‡[4]

DIRECTOR: FLAVIO HERNANDO JÁCOME LIÉVANO

ABSTRACT

Starting from the work of Konrad-Lommerud (2000), this paper analyzes, with a specific functional form, the result of a couple's negotiation with a non-cooperative game and also the same game developed in cooperative form from its first stage. It compares the outcomes in a method that depends upon the specific cost functions that describe the time that they dedicate to their home and salary.

This paper is interesting due to the lack of known studies regarding family negotiations that compare the negotiation models raised here.

It concludes that, within the specified functions of this paper, the higher utility level is found in the games that are completely non-cooperative. In this model, there are also higher levels of g and w. Meanwhile, the outcomes of the semi-cooperative game — non-cooperative in stage 1 and cooperative in stage 2 — show a lower in utility as well as time that is dedicated to home and salary.

[3] This paper is presented to obtain a master´s degree in economics from the Pontificia Universidad Javeriana.

[4] I am thankful the support of Dr. Flavio Jácome, my husband, my parents and my friends.

I. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO

Gary Becker, Premio Nobel de Economía en 1992, estableció a través de sus modelos nuevos campos de estudio frente a la teoría económica. Rosen (1993) menciona que son cuatro áreas principales en las que Becker hizo contribuciones de impacto: La economía de la discriminación, crimen y castigo, capital humano, y la economía del hogar.

Becker (1981) retoma el análisis económico de la familia ya planteado por él mismo en la década de los sesenta, donde el problema central es como se asignan los recursos dentro del hogar, adelanta un análisis de la familia como una empresa. Estudia al interior del hogar la división del trabajo, los nacimientos, el divorcio, razona también sobre el precio del tiempo, a partir del cual en un hogar no se decide únicamente que tiempo se dedica al mercado laboral con un salario monetario sino que también hace referencia al trabajo que se hace al interior de una casa y al tiempo que se dedica al estudio, así como tiene en cuenta el concepto de altruismo y desarrolla un modelo sobre este concepto.

Becker desarrolla conceptos económicos en el hogar como las ventajas comparativas entre los miembros del hogar, economías y deseconomías de escala, demanda de esposas frente al análisis de poligamia, condiciones de equilibrio para emparejamiento selectivo, la demanda de hijos, la inversión de los padres en capital humano de sus hijos, las dotaciones iniciales de reputación y relaciones sociales privilegiadas, entre otros.

Para Becker, el hogar es una unidad donde se toman decisiones tales como tener o no tener hijos, y también determinar el tiempo para educar a esos hijos, de esta manera hace una profundización no sólo de cantidad sino de calidad de las inversiones en capital humano.

La teoría de juegos hace referencia a la representación matemática de situaciones del comportamiento humano frente a la toma de decisiones en diversos escenarios. Actualmente viene siendo aplicada en campos como la economía, la sicología, a nivel empresarial, políticas públicas, negociación de conflictos de países, entre otros.

En un trabajo inicial Konrad y Lommerud (1995), desarrollan un juego de negociación de familia donde una pareja decide sobre invertir su tiempo en el bien público del hogar o trabajar en el mercado laboral externo; aunque lo hacen de forma no cooperativa en sus dos etapas, encontrando que hay una baja provisión del bien público. La justificación del juego desarrollado de esta manera, según los autores, es que puede ser una pareja que tiene problemas y está cerca de separarse, o que los padres pelean constantemente con sus hijos o pelean con sus hermanos por el cuidado de sus padres que ya son adultos mayores. Adicional a esto evaluan como afecta un impuesto al ingreso, que animará a que el miembro de la pareja afectado por el impuesto se desaliente a trabajar en el mercado laboral y se incentive por invertir más en el bien público del hogar, que mejoraría la eficiencia.

Konrad y Lommerud (2000) mencionan que las teorías económicas sobre el comportamiento de las familias generalmente asumen que la familia es capaz de alcanzar resultados eficientes. Dos ejemplos son el trabajo de Becker (1991) y el de Reuben Grounau (1973).

A partir del trabajo de Konrad y Lommerud (2000) se propone un modelo de negociación de familia en dos etapas que incluye elementos cooperativos y no cooperativos para decidir el tiempo que dedica cada miembro de una pareja a la inversión de tiempo en educación – que determinará el salario en el mercado laboral y, el tiempo a las actividades que comprenden el cuidado del hogar – definido como un bien público familiar.

Lundberg y Pollak (2003) cuestionan la eficiencia en los resultados de un matrimonio argumentando que con el tiempo los resultados pueden verse afectados por el poder de negociación de alguno de los miembros de la pareja, se introducen entonces mecanismos que podrían facilitar los acuerdos intertemporales de los miembros.

Andaluz y Molina (2007) analizan la sostenibilidad de los acuerdos de negociación de familia con el desarrollo de un juego repetido no cooperativo de una pareja con preferencias simétricas, agregan entonces un factor de descuento. A través de la caracterización de un equilibrio de Nash demuestran que el esposo con mayor poder de negociación tiene un incentivo más grande para usar preferencias lineales en consumo, pero para la sostenibilidad debe adicionarse también un componente de altruismo.

Los juegos cooperativos son juegos en los que los participantes llegan a un acuerdo, es decir que se lleva a cabo una negociación.

Por su parte, los juegos no cooperativos son juegos en los que no hay acuerdo, es decir cada uno toma su decisión sin importar la del otro.

Nash (1951) en la introducción de su artículo Non-cooperative games, llama juegos cooperativos a los juegos desarrollados por von Neumann-Morgenstern, donde hay coalición de los jugadores. Nash (1953) menciona que la palabra cooperativo hace referencia a que se supone que los individuos son capaces de discutir la situación y acordar un plan de acción racional conjunto, un acuerdo que además se asume a ser realizable. En los juegos cooperativos los jugadores establecen sus estrategias y comparten las ganancias a través del acuerdo.

A partir de la teoría clásica de juegos de von Neumann-Morgenstern, donde se establecieron conceptos como estrategias, función de pago, juego extensivo y en forma estratégica y función característica; se han planteado desde entonces varias maneras de llevar a cabo una negociación.

Nash fue el primero que planteó un problema formal de negociación y modeló con axiomas las propiedades que debe satisfacer la solución – llamada solución Nash de negociación. (Monsalve, 2005).

A partir del trabajo de Konrad Lommerud (2000), en este trabajo se analizan con una forma funcional específica los resultados de un juego no cooperativo y luego del mismo juego pero desarrollado en forma cooperativa, este último se ejecuta primero con los parámetros establecidos en una solución de negociación de Nash. El objetivo de este trabajo es comparar los resultados del trabajo de Konrad Lommerud con la definición de funciones específicas.

En la primera sección se describe el modelo desarrollado por Konrad Lommerud, en la segunda sección se plantea la variación de los modelos especificando las funciones de costos y el total de consumo del bien público familiar, en la tercera sección se analizan los resultados y en la cuarta sección, se establecen las conclusiones y recomendaciones.

II. MODELO KONRAD-LOMMERUD

A continuación se presenta el modelo base desarrollado por Konrad y Lommerud. Se considera primero un juego en dos etapas donde se resuelve a través de un equilibrio de Nash no cooperativo, en el que se maximiza la función de utilidad de cada uno de los jugadores y se establecen en la primera etapa los óptimos que determinan el nivel salarial de mercado (w); en la segunda etapa se determinan los niveles óptimos de tiempo para dedicar al hogar (g). Luego se resuelve el mismo juego en dos etapas a través de una negociación de Nash en la etapa 2, tomando como punto de desacuerdo los óptimos encontrados en el juego no cooperativo, la etapa 1 en este caso continúa siendo no cooperativa.

Los autores asumen que la decisión de la educación es no cooperativa porque la educación que determina el salario de mercado laboral toma lugar en una etapa temprana de la relación y quizás antes de formar la familia. La decisión de inversión en el bien público, argumentan, puede ser no cooperativa pero es más razonable que sea cooperativa, ya que el juego se repite.

Se considera una familia conformada por dos miembros, los jugadores 1 y 2, cada uno con una función de pagos descrita de la siguiente forma para cada individuo i:
$u^i = x_i + G - a(g_i) - b(w_i)$

Donde x_i es el consumo individual de bienes privados, y está definido como una función que depende del salario de mercado laboral (w_i), que a su vez depende del total de tiempo disponible (y) menos el tiempo total que se dedica al hogar o bien público familiar (g_i), así:

$x_i = w_i(y - g_i)$

Por otra parte, G está definido como la cantidad total de tiempo que se dedica al bien público familiar, es decir la suma de los tiempos que dedica cada uno de los miembros de la familia al hogar, así:

$G = g_1 + g_2$

La función $a(g_i)$ es una función que representa el costo síquico de contribuir al bien público del hogar; esta función es convexa y tiene un costo marginal bajo que puede ser incluso negativo, es decir que a medida que un individuo gasta más en esas actividades les va a disgustar de manera incremental.

De igual manera la función $b(w_i)$ describe el esfuerzo en educación, el cual incrementa el salario del mercado laboral - w, es decir que $b\prime(w_i) > 0$, y $b\prime\prime(w_i) > 0$. Se asume por simplicidad que el esfuerzo es observable y medible en términos monetarios.

Se contempla un juego de dos etapas, donde en la etapa 1 se elige el nivel de w simultánemente, y en la etapa 2 los jugadores eligen simultáneamente el tiempo para dedicar al hogar (g_i) a partir de los w_i que ya conocen.

El juego se desarrolla por el método de inducción hacia atrás, es decir que primero se resuelve la etapa 2, encontrando las cantidades óptimas de tiempo que se invierte en el bien público familiar, y luego, con el resultado de la etapa 2 se resuelve la etapa 1, donde se halla la cantidad óptima de salario w del mercado laboral. A continuación se resuelve el juego no cooperativo en la etapa 2, luego la etapa 1, y luego se desarrolla el juego cooperativo:

2.1 Caso No Cooperativo

El equilibrio de Nash no-cooperativo en etapa 2 para elecciones de educación dadas (w_1, w_2) es un par (g_1^*, g_2^*) tal que g_1^* maximiza la función de pagos para el jugador 1:

$$u^1 = w_1(y - g_1) + g_1 + g_2^* - a(g_1) - b(w_1)$$

para $g_1 \in [0, y]$, lo cual es análogo para el jugador 2. Las funciones de pago u^i son continuas en (g_1, g_2) y cóncavas en g_i; los espacio de estrategias $g_i \in [0, y]$ son compactos, convexos y no son conjuntos vacíos. Con estos supuestos, existe un equilibrio de Nash en estrategias puras. Las contribuciones que maximizan el pago de i pago no dependen de las elecciones de contribución del otro miembro de la familia, y la convexidad estricta de la función $a(g_i)$ hace esas elecciones de contribución únicas para un w_i dado. Por lo tanto el equilibrio es único. Al asumir una solución interior, las contribuciones de equilibrio son determinadas por las condiciones de primer orden así:

$$-w_i + 1 - a\prime(g_i) = 0$$

Sea g_i^* la solución de la ecuación anterior, se tiene:

$$g_i^{*\prime} \equiv \frac{dg_i^*}{dw_i} = -\frac{1}{a''} < 0$$

por la convexidad de $a(g_i)$, y $dg_i^*/dw_j = 0$ para todo $i \neq j$.

Luego de esto, se adelanta la caracterización del resultado eficiente. Donde se asume que se pueden realizar transferencias monetarias entre los miembros de la familia. Los niveles eficientes de contribuciones al bien público, denotados por g_1^e y g_2^e están implícitamente determinados por

$$w_1 + a\prime(g_1) = w_2 + a\prime(g_2) = 1 + 1,$$

asumiendo que la restricción presupuestal de tiempo $g_i^e \leq y$ no es vinculante.

La primera ecuación describe el hecho que los costos marginales de las contribuciones para el bien público deben ser iguales, y la segunda ecuación es la condición de Samuelson para provisión de bienes públicos por la cual los costos marginales de producción tienen que ser iguales a la suma de las disponibilidades a pagar.

Las cantidades por g_1^e y g_2^e son únicas y son una función únicamente del salario de cada individuo w_1 y w_2 respectivamente, con $g_i^{e\prime} \equiv dg_i^e/dw_i =$

$(-1/a\prime\prime) < 0$ y $dg_i^e/dw_j = 0$ para $i \neq j$. Además, $a\prime\prime > 0$, entonces se establece el siguiente resultado como una proposición:

$$g_i^e(w_i) > g_i^*(w_i)$$

Proposición 1. En el equilibrio de Nash no cooperativo, un incremento conjunto en las contribuciones al bien público serán una mejora de Pareto.

2.2 Caso Cooperativo

Para resolver el problema de contribución por una negociación de Nash, se toman los niveles de utilidad del equilibrio no cooperativo como el punto de desacuerdo. Se asume que se pueden hacer pagos monetarios entre los miembros de la familia. Puesto que la utilidad es lineal en el ingreso y puesto que las contribuciones eficientes de g_1^e y g_2^e dependen únicamente de w_1 y w_2, pero no sobre los resultados finales de utilidad, la frontera de posibilidades de utilidad es

$$u^1 = V - u^2, \text{ con}$$

$$V \equiv u^1(g_1^e, g_2^e) + u^2(g_1^e, g_2^e)$$

$$= \sum[(y - g_i^e)w_i - a(g_i) - b(w_i)] + 2(g_1^e + g_2^e)$$

La frontera de posibilidades de utilidad es lineal y tiene una pendiente menor a uno. La solución de negociación de Nash lleva a las utilidades

$$u_{NB}^i = \frac{V}{2} + \frac{u^{i*} - u^{j*}}{2} \text{ para } i, j \in \{1, 2\}, \text{ con } i \neq j.$$

La ecuación anterior muestra que cualquier cosa que influencia las diferencias de utilidad en el equilibrios no cooperativo influenciará la distribución intrafamiliar.

III. MODELO

Tomando como base el modelo planteado por Konrad y Lommerud, a continuación se desarrolla el juego definiendo una forma específica para las funciones de costo de inversión en tiempo para dedicar al bien público familiar y al mercado laboral.

La función $a(g_i)$, la cual representa el costo de contribuir al bien público del hogar del individuo i; que es convexa y con costo marginal creciente se especifíca de la siguiente manera:

$a(g_i) = \alpha g_i^2$

De igual manera, la función $b(w_i)$, que describe la inversión de tiempo en actividades de educación que determinan salario, convexa y con costo marginal creciente, es decir que cuando se aumenta en una unidad el tiempo que se dedica al estudio, se incrementa proporcionalmente el salario. Este costo marginal se define como $CMg = \partial b(w_i)/\partial w_i > 0$. La función $b(w_i)$ se define de la siguiente manera:

$b(w_i) = \beta w_i^2$

Las funciones se fijan de una forma cuadrática ya que representan adecuadamente el problema al que se enfrentan los miembros de la familia: Cuesta más dedicar más tiempo al bien familiar y cuesta más el esfuerzo para educación que determina w. El parámetro α establece la sensibilidad de la función de costos del bien público familiar respecto al tiempo que se invierte en dicho bien. El parámetro β es la magnitud que relaciona los cambios de la función de costos respecto al salario, determinado por el tiempo que se invierte en educación.

Para la función específica que se plantea, otra variación de este trabajo sobre el modelo de Konrad Lommerud es la definición de G, en el modelo base no hay una elección estratégica en el sentido en que la elección de bien público de cada individuo no depende de la elección del otro; en cambio en este modelo propuesto por un lado se supone una mayor ponderación al consumo del bien público familiar pues la cantidad total de bien público se define como el producto de lo que cada uno de los individuos dedica al hogar; es decir que esta función de producción doméstica tiene rendimientos crecientes a escala y hay una interacción en la elección de ambos jugadores, pues si uno de los dos no invierte tiempo no habrá bien público :

$G = g_1 g_2$

Se establecen los mismos dos posibles desarrollos para resolver este juego planteados por Konrad y Lommerud, es decir, en la etapa 1 la decisión de inversión en educación se asume no cooperativa y, la etapa dos se desarrolla tanto cooperativa como no cooperativamente. A continuación se nombran los dos modelos:

Modelo 1: Etapa 1 No cooperativa - Etapa 2 No cooperativa
Modelo 2: Etapa 1 No cooperativa - Etapa 2 Cooperativa

Los modelos se desarrollan por inducción hacia atrás, es decir que primero se resuelve la etapa 2 y luego la etapa 1.

3.1 Modelo 1 - No Cooperativo

A partir de los supuestos anteriores, el planteamiento del problema de maximización al que se enfrenta cada individuo es el siguiente para la etapa 2 cuando no hay cooperación es:

$$\text{máx } u_1 = w_1(y - g_1) + g_1 g_2 - \alpha g_1^2 - \beta w_1^2$$

$$\text{máx } u_2 = w_2(y - g_2) + g_1 g_2 - \alpha g_2^2 - \beta w_2^2$$

Donde a partir de las condiciones de primer orden obtenemos:

$$\frac{\partial u_1}{\partial g_1} = g_2 - w_1 - 2\alpha g_1 = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial g_2} = g_1 - w_2 - 2\alpha g_2 = 0$$

Y al despejar los g_i^* obtenemos los niveles de g para cada jugador:

$$g_1 = \frac{1}{1-4\alpha^2}\left(w_2 + 2\alpha w_1\right),\ \alpha \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

$$g_2 = \frac{1}{1-4\alpha^2}\left(w_1 + 2\alpha w_2\right),\ \alpha \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

Luego, se da lugar al desarrollo de la etapa 1 de manera no cooperativa de la siguiente manera, evaluando los g hallados y encontrando las condiciones de primer orden para establecer los w:

$$u_1 = w_1\left(y + \frac{1}{4\alpha^2-1}\left(w_2 + 2\alpha w_1\right)\right) - \beta w_1^2 - \frac{\alpha}{(4\alpha^2-1)^2}\left(w_2 + 2\alpha w_1\right)^2 + \frac{1}{(4\alpha^2-1)^2}\left(w_1 + 2\alpha w_2\right)\left(w_2 + 2\alpha w_1\right)$$

$$u_2 = w_2\left(y + \frac{1}{4\alpha^2-1}\left(w_1 + 2\alpha w_2\right)\right) - \beta w_2^2 - \frac{\alpha}{(4\alpha^2-1)^2}\left(w_1 + 2\alpha w_2\right)^2 + \frac{1}{(4\alpha^2-1)^2}\left(w_1 + 2\alpha w_2\right)\left(w_2 + 2\alpha w_1\right)$$

Donde a partir de las condiciones de primer orden se obtienen dos posibles soluciones:

$$w_1 = \frac{2y\alpha - y + 4y\alpha^2 - 8y\alpha^3}{-2\beta + 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + 8\alpha^2\beta - 16\alpha^3\beta}, w_2 = \frac{2y\alpha - y + 4y\alpha^2 - 8y\alpha^3}{-2\beta + 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + 8\alpha^2\beta - 16\alpha^3\beta}$$

$w_1 = \frac{1}{4\alpha^2}\left(8y\alpha^2 - y - 16y\alpha^4\right), w_2 = \frac{1}{4\alpha^2}\left(8y\alpha^2 - y - 16y\alpha^4\right)$

Para la segunda solución, al evaluar el término se encuentra que w siempre será negativo, así que lo descartamos, pues w debe ser siempre positivo.

De esta manera, los óptimos de cada jugador para g y w en el juego no cooperativo, y el nivel de utilidad, son los siguientes:

$w_1 = w_2 = \frac{2y\alpha+4y\alpha^2-8y\alpha^3-y}{-2\beta+4\alpha^2+4\alpha\beta+8\alpha^2\beta-16\alpha^3\beta}$

$g_1 = g_2 = \frac{4y\alpha^2-y}{4\alpha^2-2\beta+4\alpha\beta+8\alpha^2\beta-16\alpha^3\beta}$

$u_1 = \frac{1}{4}y^2\left(2\alpha-1\right)^3\left(2\alpha+1\right)\frac{4\beta\alpha^2-\alpha-\beta}{(2\alpha^2-\beta+2\alpha\beta+4\alpha^2\beta-8\alpha^3\beta)^2}$

$u_2 = \frac{1}{4}y^2\left(2\alpha-1\right)^3\left(2\alpha+1\right)\frac{4\beta\alpha^2-\alpha-\beta}{(2\alpha^2-\beta+2\alpha\beta+4\alpha^2\beta-8\alpha^3\beta)^2}$

3.2 Modelo 2 - Semicooperativo

Ahora vamos a suponer que los jugadores van a cooperar en el juego en

la etapa 2, es decir para decidir su dedicación al bien público, a través de una negociación de Nash, la cual se encuentra a través de la maximización del producto de las ganancias sujeto a la restricción que es la frontera, así:

máx $U_N = (u_1 - u_1^*)(u_2 - u_2^*)$ sujeto a $V = u_1 + u_2$

donde al reemplazar la ecuación que describe la frontera obtenemos:

máx $U_N = (u_1 - u_1^*)(V - u_1 - u_2^*)$

Por condiciones de primer orden obtenemos:

$u_{1N} = \frac{V+u_1^*-u_2^*}{2}$

Para esta ecuación ya tenemos los resultados de u_1^* y u_2^*, utilidades del equilibrio no cooperativo que en este juego son iguales, por lo tanto se tiene que:

$u_{1N} = \frac{V}{2}$

Esta frontera esta conformada por las contribuciones eficientes de g_1^e y g_2^e, es decir que:

$V \equiv u^1(g_1^e, g_2^e) + u^2(g_1^e, g_2^e)$

Para hallar el resultado eficiente se maximiza la suma de las utilidades, así el planteamiento del problema es:

Máx $u_5 = u_1 + u_2$

$u_5 = w_1(y - g_1) + g_1 g_2 - \alpha g_1^2 - \beta w_1^2 + w_2(y - g_2) + g_1 g_2 - \alpha g_2^2 - \beta w_2^2$

Y a partir de las condiciones de primer orden se obtiene que $g_1^e = \frac{1}{2-2\alpha^2}(w_2 + \alpha w_1)$ is true y $g_2^e = \frac{1}{2-2\alpha^2}(w_1 + \alpha w_2)$, para $\alpha \in \{-1, 1\}$.

De esta manera, en la ecuación $V = u_1 + u_2$, en la utilidad de cada jugador ahora se pueden reemplazar los g_i^e, así:

$g_1^e = \frac{1}{2-2\alpha^2}(w_2 + \alpha w_1)$

$g_2^e = \frac{1}{2-2\alpha^2}(w_1 + \alpha w_2)$

La expresión simplificada de V es:

$$V = \frac{1}{4(\alpha^2-1)} \begin{pmatrix} -4\beta\alpha^2 w_1^2 + 4y\alpha^2 w_1 - 4\beta\alpha^2 w_2^2 + 4y\alpha^2 w_2 + \alpha w_1^2 + \alpha w_2^2 + \\ 4\beta w_1^2 + 2w_1 w_2 - 4y w_1 + 4\beta w_2^2 - 4y w_2 \end{pmatrix}$$

Ya teniendo la frontera, podemos reemplazar en la utilidad de negociación de Nash, así:

$$u_{1N} = \frac{V}{2} = \frac{\left(-4\beta\alpha^2 w_1^2 + 4y\alpha^2 w_1 - 4\beta\alpha^2 w_2^2 + 4y\alpha^2 w_2 + \alpha w_1^2 + \alpha w_2^2 + 4\beta w_1^2 + 2w_1 w_2 - 4yw_1 + 4\beta w_2^2 - 4yw_2\right)}{8(\alpha^2 - 1)}$$

donde al simplificar obtenemos la utilidad para la solución de negociación de Nash del jugador 1:

$$u_{1N} = \frac{1}{8\alpha^2 - 8} \begin{pmatrix} -4\beta\alpha^2 w_1^2 + 4y\alpha^2 w_1 - 4\beta\alpha^2 w_2^2 + 4y\alpha^2 w_2 + \alpha w_1^2 + \alpha w_2^2 + 4\beta w_1^2 + \\ 2w_1 w_2 - 4yw_1 + 4\beta w_2^2 - 4yw_2 \end{pmatrix}$$

Y para el jugador 2 el resultado es el mismo:

$$u_{2N} = \frac{1}{8\alpha^2 - 8} \begin{pmatrix} -4\beta\alpha^2 w_1^2 + 4y\alpha^2 w_1 - 4\beta\alpha^2 w_2^2 + 4y\alpha^2 w_2 + \alpha w_1^2 + \alpha w_2^2 + 4\beta w_1^2 + \\ 2w_1 w_2 - 4yw_1 + 4\beta w_2^2 - 4yw_2 \end{pmatrix}$$

Ahora procedemos a resolver la etapa 1 de manera no cooperativa, así cada uno de los jugadores se enfrenta al siguiente problema de maximización, en el que reemplazamos los g hallados, es decir $g_1 = \frac{1}{2-2\alpha^2}(w_2 + \alpha w_1)$ y $g_2 = \frac{1}{2-2\alpha^2}(w_1 + \alpha w_2)$:

Para el jugador 1:

$$\text{máx } u_1 = w_1(y - g_1) + g_1 g_2 - \alpha g_1^2 - \beta w_1^2 =$$
$$w_1\left(y + \frac{1}{2\alpha^2 - 2}(w_2 + \alpha w_1)\right) - \beta w_1^2 - \frac{\alpha}{(2\alpha^2-2)^2}(w_2 + \alpha w_1)^2 + \frac{1}{(2\alpha^2-2)^2}(w_1 + \alpha w_2)(w_2 + \alpha w_1)$$

Simplificando: $\text{máx } u_1 = \frac{1}{4}\frac{w_1}{\alpha^2 - 1}\left(w_2 - 4y + \alpha w_1 + 4\beta w_1 + 4y\alpha^2 - 4\alpha^2 \beta w_1\right)$

Y para el jugador 2: $u_2 = \frac{1}{4}\frac{w_2}{\alpha^2 - 1}\left(w_1 - 4y + \alpha w_2 + 4\beta w_2 + 4y\alpha^2 - 4\alpha^2 \beta w_2\right)$

Por condiciones de primer orden, se obtienen dos resultados así:

$w_1 = \frac{4y - 4y\alpha^2}{2\alpha + 8\beta - 8\alpha^2\beta + 1}, w_2 = \frac{4y - 4y\alpha^2}{2\alpha + 8\beta - 8\alpha^2\beta + 1}$

$w_1 = 4y - 4y\alpha^2, w_2 = 4y - 4y\alpha^2$

Se descarta el segundo por generar valores negativos para w. Al tener los w en función de parámetros damos lugar al resultado de g, así:

$g_1 = \frac{1}{2\alpha^2 - 2}(-w_2 - \alpha w_1) = 2y\frac{\alpha + 1}{-8\beta\alpha^2 + 2\alpha + 8\beta + 1}$, y para el jugador 2:

$g_2 = \frac{1}{2\alpha^2-2}\left(-w_1 - \alpha w_2\right) = 2y\frac{\alpha+1}{-8\beta\alpha^2+2\alpha+8\beta+1}$

$w_1 = \frac{4y-4y\alpha^2}{2\alpha+8\beta-8\alpha^2\beta+1}, w_2 = \frac{4y-4y\alpha^2}{2\alpha+8\beta-8\alpha^2\beta+1}$

$g_1 = 2y\frac{\alpha+1}{-8\beta\alpha^2+2\alpha+8\beta+1}, g_2 = 2y\frac{\alpha+1}{-8\beta\alpha^2+2\alpha+8\beta+1}$

Ya con los niveles de g y w, obtenemos la utilidad al desarrollar el juego de esta manera, así:

$u_1 = w_1(y - g_1) + g_1 g_2 - \alpha g_1^2 - \beta w_1^2 = 4y^2\left(\alpha^2 - 1\right)\frac{4\beta\alpha^2-\alpha-4\beta}{(-8\beta\alpha^2+2\alpha+8\beta+1)^2}$

$u_2 = w_2(y - g_2) + g_1 g_2 - \alpha g_2^2 - \beta w_2^2 = 4y^2\left(\alpha^2 - 1\right)\frac{4\beta\alpha^2-\alpha-4\beta}{(-8\beta\alpha^2+2\alpha+8\beta+1)^2}$

IV. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Luego de resolver el juego en las dos posibles maneras de desarrollarlo, se presentan a continuación los datos de cada juego en la siguiente tabla para comparar los resultados:

Tabla 1. Resultados

	M1: No coop en E1 y E2	**M2: Coop E2 y NoCoop E1**
u	$\frac{1}{4}y^2\left(2\alpha-1\right)^3\left(2\alpha+1\right)\frac{4\beta\alpha^2-\alpha-\beta}{(2\alpha^2-\beta+2\alpha\beta+4\alpha^2\beta-8\alpha^3\beta)^2}$	$4y^2\left(\alpha^2-1\right)\frac{4\beta\alpha^2-\alpha-4\beta}{(-8\beta\alpha^2+2\alpha+8\beta+1)^2}$
g	$\frac{4y\alpha^2-y}{4\alpha^2-2\beta+4\alpha\beta+8\alpha^2\beta-16\alpha^3\beta}$	$2y\frac{\alpha+1}{-8\beta\alpha^2+2\alpha+8\beta+1}$
w	$\frac{2y\alpha-y+4y\alpha^2-8y\alpha^3}{-2\beta+4\alpha^2+4\alpha\beta+8\alpha^2\beta-16\alpha^3\beta}$	$\frac{4y-4y\alpha^2}{2\alpha+8\beta-8\alpha^2\beta+1}$

Con el fin de poder interpretar los resultados y adelantar el análisis de funciones asumimos que $y = 1$, donde y es el tiempo total que los individuos distribuyen para destinar al bien público familiar o a educación. A continuación se presentan las funciones finales con el supuesto mencionado:

Tabla 2. Comparación de resultados simplificados

	M1:No coop en E1 y E2	**M2:Coop E2 y NoCoop E1**
u	$\frac{1}{4}\left(2\alpha-1\right)^3\left(2\alpha+1\right)\frac{\beta(4\alpha^2-1)-\alpha}{(2\alpha^2(1+2\beta(1-2\alpha))-\beta(1-2\alpha))^2}$	$4\left(\alpha^2-1\right)\frac{4(\beta(\alpha^2-1))-\alpha}{(8\beta(1-\alpha^2)+2\alpha+1)^2}$
g	$\frac{1-4\alpha^2}{\alpha^2(8\beta(2\alpha-1)-4)+2\beta(1-2\alpha)}$	$\frac{2(\alpha+1)}{8\beta(1-\alpha^2)+2\alpha+1}$
w	$\frac{4\alpha^2(1-2\alpha)+2\alpha-1}{4\alpha^2(1+2\beta(1-2\alpha))-2\beta(1-2\alpha)}$	$\frac{4(1-\alpha^2)}{2(\alpha+4\beta(1-\alpha^2))+1}$

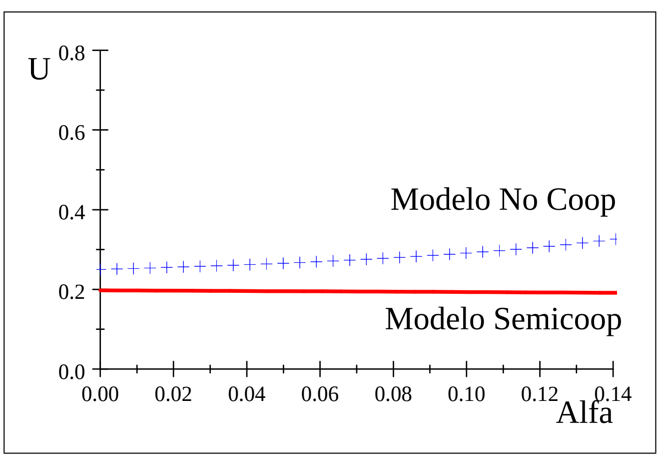
De acuerdo con lo planteado por Konrad Lommerud, los autores concluyen que en el caso del modelo 1, denominado por ellos semicooperativo, hay un nivel eficiente de g y un nivel de w que no es eficiente; por su parte el modelo completamente no cooperativo indican que el nivel de g es muy bajo y w es muy alto.

En la proposición 4 de Konrad Lommerud se afirma: "Los salarios de equilibrio en el juego cooperativo pueden ser más grandes que, iguales a, o más pequeños a los que están en el juego no cooperativo. Si el costo marginal $a\'(g_i)$ es convexo (cóncavo), entonces los salarios de equilibrio w_i^c en el juego cooperativo son más altos (más bajos) que los salarios de equilibrio w_i^* en el juego no cooperativo".

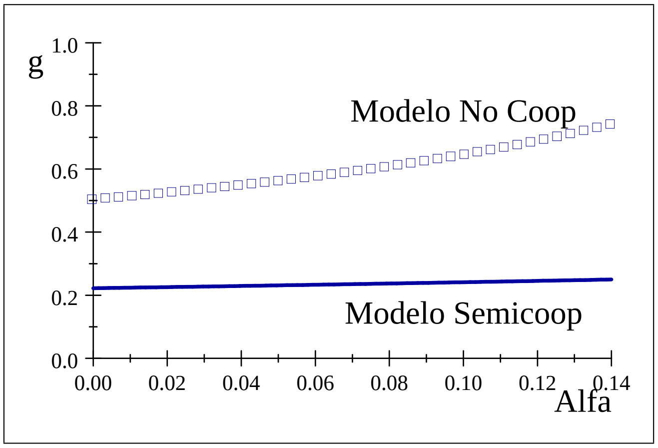
Para determinar en qué escenarios se encuentra la utilidad más alta, el nivel de tiempo que se destina al bien público familiar más alto y el nivel de salario más alto, se han graficado las funciones, tomando en cuenta que α se encuentra en el rango de 0 a 0,5 y β es un número positivo donde se le han asignado valores de 0.2, 1 y 5.

A continuación se muestran las gráficas de las funciones que se han descrito en la Tabla 2. Al asumir un $\beta = 1$, tomando en cuenta que el nivel de bien público familiar g debe estar en el rango de 0 y 1; se ha encontrado que α debe ser menor o igual a 0,14 para que todas las funciones sean comparables, pues a partir de 0,15 se generan valores mayores que 1 en los g del modelo 4. Es importante anotar que el orden de las funciones se mantiene igual si se modifican los valores de β por 0.2, 5 y 10; aunque varían los rangos de α. Para el caso de las gráficas que se muestran a continuación, asumimos $\beta = 1$:

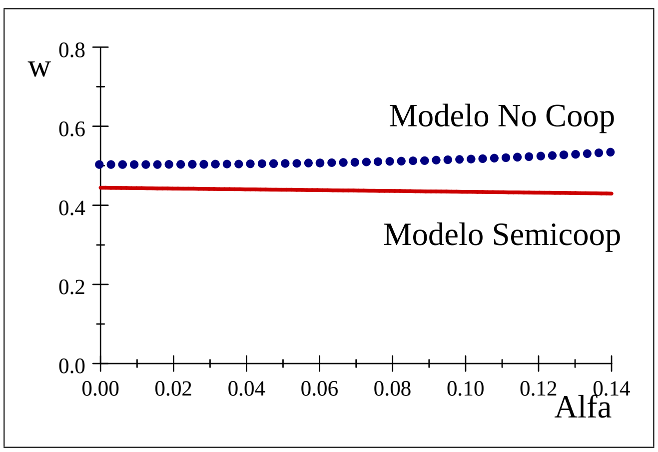
Gráfica 1. Funciones de utilidad



Gráfica 2. Funciones de bien público familiar - g



Gráfica 3. Funciones de salario - ws



Observamos en las gráficas anteriores que para el caso de la utilidad (Gráfica 1), es mayor el modelo completamente no cooperativo al semicooperativo. En cuanto al nivel de bien público familiar - g, el nivel es mayor también en el modelo no cooperativo (Gráfica 2). Finalmente en el caso del salario predomina también el modelo no cooperativo sobre el semicooperativo (Gráfica 3).

V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Al desarrollar los dos juegos por inducción hacia atrás, los modelos determinan un rango cerrado del parámetro que relaciona los cambios de la función de utilidad respecto al bien público familiar, es decir α, que comprende valores entre 0 y 1/2.

En el modelo de Konrad Lommerud la definición de G no es estratégica, pues la elección de bien público de cada individuo no depende de la elección del otro jugador. En cambio en el modelo propuesto en este trabajo, por un lado se supone una mayor ponderación al consumo del bien público familiar, pues la cantidad total de bien público se define como el producto de lo que cada uno de los individuos dedica al hogar; es decir que esta función de producción doméstica tiene rendimientos crecientes a escala y a su vez, hay una interacción en la elección de ambos jugadores, pues si uno de los dos no invierte tiempo no habrá bien público. Es decir que el juego se hace estratégico para la decisión de inversión de bien público familiar.

El parámetro β relaciona los cambios de la función de utilidad respecto al salario, determinado por el tiempo que se invierte en educación; por lo cual debe ser positivo.

Al asumir un $\beta = 1$, tomando en cuenta que el nivel de bien público familiar g debe estar en el rango de 0 y 1; se ha encontrado que α debe ser menor o igual a 0,14 para que todas las funciones sean comparables, pues a partir de 0,15 se generan valores mayores que 1 en los g del modelo 4. El orden de las funciones se mantiene igual si se modifican los valores de β por 0.2, 5 y 10; aunque varían los rangos de α. Bajo estos parámetros, al revisar los valores que se generan con las funciones de utilidad, de g y de w, en la siguiente tabla se muestra el orden de mayor a menor:

Tabla 3. Orden de resultados de las funciones de mayor a menor

Orden	Utilidad	g	w
1	Modelo 1	Modelo 1	Modelo 1
2	Modelo 2	Modelo 2	Modelo 2

Modelo 1: No cooperativo en E1 y E2
Modelo 2: No cooperativo en E1 y Cooperativo en E2

El nivel de utilidad más alto se encuentra en el modelo 1, que es cuando no hay cooperación en ambas etapas, mientras los niveles de g y w también ocupan esta posición. Al no cooperar en ninguna de las dos etapas, los individuos dan mayor importancia a cualificarse en términos de inversión en educación lo que conlleva a un mayor salario del mercado laboral, de igual manera en este modelo valoran más la inversión en el bien público familiar, así que destinan el mayor tiempo posible a este.

Cuando hay cooperación en la etapa 2, los individuos no dedican tanto tiempo al bien público familiar, posiblemente consideran que con el acuerdo es más que suficiente si cada uno dedica sólo un poco de tiempo, pues para ambos es costoso. Por su parte, en la etapa 1 la decisión de w no es tan alta, pues saben que cooperarán en la etapa 2 y esperan con ello obtener un nivel de utilidad que los satisface.

De acuerdo con las conclusiones de Konrad Lommerud, en el modelo semicooperativo hay un nivel eficiente de g y un nivel de w que no es eficiente; por su parte el modelo completamente no cooperativo concluyen el nivel de g es muy bajo y w es muy alto. En contraste con los resultados aquí obtenidos, nuestro modelo semicooperativo tiene un nivel de g bajo y un w también bajo, respecto al modelo no cooperativo.

Los resultados arrojan entonces, que el juego desarrollado de manera semicooperativa son inferiores con el modelo cooperativo en cuanto a los niveles de g y w, lo cual es contrario también a los resultados del modelo de Konrad Lommerud

Por su parte, Konrad Lommerud argumentan que las inversiones de tiempo en educación al ser definidas de manera no cooperativa conllevan a que el modelo no sea totalmente eficiente, por lo que la negociación de Nash en la definición del nivel de bien público familiar alcanzará una eficiencia restringida.

De esta manera, los resultados para las funciones aquí planteadas son distintas a lo arrojado por el modelo de Konrad Lommerud. La razón por la cual los resultados son diferentes es la definición de G para nuestro modelo, en la cual la elección de tiempo para destinar al bien público familiar de cada individuo afectará en mayor medida el total de bien público, pues se ha hecho estratégica esta elección.

Para futuros trabajos sería interesante evaluar los resultados planteando funciones de costo diferentes a las especificadas en este trabajo. Adicionalmente se podrían modelar temas como poder de negociación y aversión al riesgo; que se han planteado en otros trabajos teóricos pero no especificando funciones. Otra variación podría ser desarrollar los modelos considerando que en la etapa 1 del juego se cooperara.

VI. BIBLIOGRAFÍA

Andaluz, J., and J. A. Molina (2007). "On the sustainability of bargaining solutions in family decision models. Sustainability in family decision models", Rev Econ Household No. 5, pp. 405-418.

Arévalo, J., and S. Monsalve (2005). Un curso de teoría de juegos clásica. Universidad Externado de Colombia.

Becker, G. S. (1993) A Treatise on the Family. Enlarged edition. Harvard University Press.

Konrad, K. A., and K. E. Lommerud (1995). "Family policy with non-cooperative families", Scandinavian Journal of Economics No. 97, pp. 581-601.

Konrad, K. A., and K. E. Lommerud (2000). "The bargaining family revisited", Canadian Journal of Economics / Revue canadienne d´Economique, Vol. 33, N° 2, pp. 471-487.

Lundberg, S., and R. A. Pollak (2003). "Efficiency in Marriage", Review of Economics of the Household 1, pp. 153-167.