

Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Ingenierías
Programa de Ingeniería Electrónica

**ALGORITMO DE ELECTROMAGNETISMO COMPUTACIONAL
BASADO EN EL MÉTODO DE LOS MOMENTOS**

Autor:

Henry Aristizábal Morales

Noviembre, 2016

Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Ingenierías
Programa de Ingeniería Electrónica

ALGORITMO DE ELECTROMAGNETISMO COMPUTACIONAL BASADO EN EL MÉTODO DE LOS MOMENTOS

Trabajo de profundización presentado como requisito para optar el título de
Magíster en Ingeniería Electrónica

Autor:

Henry Aristizábal Morales

Director:

Manuel Ricardo Pérez Cerquera

Noviembre, 2016

Bogotá, Colombia

Agradecimientos

Al profesor Manuel Ricardo Pérez Cerquera, quien con su sabiduría y paciencia me oriento para poder terminar con éxito el trabajo de grado y por el apoyo académico y personal que me brindó en mi proceso de formación.

A la Pontificia Universidad Javeriana por facilitar los espacios académicos e institucionales garantizando el apoyo necesario para la realización en los estudios de Maestría.

Al profesor Cesar Leonardo Niño Barrera por la gestión académica y administrativa, permitiéndome cimentar mi proceso de formación personal y profesional, el cual me brindará herramientas profesionales para enfrentar la vida.

Dedicatoria

A mi madre

Clarita

A mi hija

Daniela

A mis hermanos

Arlex, Claudia, Juan Carlos, Luis Gabriel

A mi sobrino

Samuel

Tabla de Contenido

1. MARCO TEORÍCO.....	1
1.1 Ecuaciones de Maxwell	1
1.2 Ecuación Integral de Campo Eléctrico (EFIE)	3
1.3 El Método de los Momentos	5
1.4 Técnica de Extracción de Singularidad.....	8
2. ESPECIFICACIONES Y DESARROLLOS	12
2.1 Características del equipo	12
2.2 Discretización de los Modelos Geométricos	12
2.3 Lenguaje de programación.....	14
2.3.1 Programa principal.....	14
2.3.2 Módulo de lectura	15
2.3.3 Identificación de la geometría del modelo.....	17
2.3.4 Generación Matriz de Impedancias.....	19
2.3.5 Cálculo de los elementos del Vector de Excitación	24
2.3.6 Cálculo de los elementos del Vector de las Densidades de Corriente.....	27
2.3.7 Cálculo del Campo Eléctrico radiado.....	28
3. RESULTADOS NUMÉRICOS.....	31
3.1 Cálculo del campo eléctrico radiado por una esfera conductora debido a un campo eléctrico incidente	31
3.2 Cálculo del campo eléctrico radiado por un dipolo planar debido a un campo eléctrico incidente y debido a la excitación de una fuente de voltaje entre las terminales del dipolo.....	37
3.3 Cálculo del campo eléctrico radiado por una antena impresa debido a un campo eléctrico incidente	42
4. CONCLUSIONES	45
5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	46
6. ANEXOS.....	47
6.1 Anexo Cálculo de la Impedancia Característica del Dipolo Planar.....	47
6.2 Anexo Cálculo de la Distribución de Corriente sobre la estructura del Dipolo Planar.....	49
ANEXO 2.....	51
CARTA DE AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES.....	51
ANEXO 3.....	54
DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	54

Lista de Acrónimos

CGS *Conjugate Gradient Squared*

EFIE *Electric Field Integral Equation*

FEM *Finite Element Method*

GiD[®] *Graphical Interface Design*

GUI *Graphical User Interface*

HFSS *High Frequency Structural Simulator*

MATLAB[®] *Mathematics Laboratory*

MoM *Method of Moments*

PEC *Perfectly Electrical Conductor*

RWG *Rao-Wilton-Glison*

INTRODUCCIÓN

Las técnicas para resolver problemas clásicos de electromagnetismo han evolucionado en el transcurso del tiempo; al principio, el análisis y diseño de los dispositivos y estructuras electromagnéticas se hacía de forma experimental, logrando su caracterización; este resultado se utilizaba para el desarrollo de nuevas tecnologías. Posteriormente, surgieron los modelos analíticos en donde se obtienen soluciones de forma cerrada, es decir, soluciones que modelan y describen el fenómeno electromagnético a través de una ecuación algebraica simplificada bajo situaciones ideales [2]. En la actualidad, se llega a la solución numérica utilizando algoritmos computacionales, en los cuales se manejan diversas técnicas de análisis numérico que describen los fenómenos en tiempo y espacio de problemas electromagnéticos que anteriormente no podían ser resueltos analíticamente [1, 2]. De hecho, muchas técnicas de análisis numérico han sido desarrolladas en los últimos años, dando lugar a los avances en ésta área, referidos bajo el nombre de electromagnetismo computacional (CEM). De la misma forma, el amplio rango de problemas electromagnéticos ha llevado al desarrollo de diferentes algoritmos en electromagnetismo computacional, cada uno con sus ventajas y limitaciones [3].

Por lo anterior, para profundizar en los métodos computacionales en electromagnetismo, el propósito en este trabajo es implementar un algoritmo basado en el Método de los Momentos (MoM) que permita simular objetos constituidos por materiales metálicos; la implementación se basa en la solución de la ecuación integral de campo eléctrico (*EFIE – Electric Field Integral Equation*); por consiguiente, se presenta la descripción para obtener la EFIE a partir de las ecuaciones de Maxwell y su representación en el vector potencial magnético, luego de obtener la expresión de la EFIE se procede aplicar el método de los momentos (MoM) para pasar la ecuación funcional a una ecuación lineal; así mismo, resolver la ecuación lineal a través de la implementación de un algoritmo en la que se pueda abordar y analizar problemas de radiación y/o dispersión en superficies conductoras.

El trabajo consta de tres capítulos, el primer capítulo presenta un breve resumen de algunos conceptos y propiedades básicas del análisis funcional, que permite entender cómo obtener la ecuación integral de campo eléctrico (EFIE) expresada en el dominio de la frecuencia, las características del método de los momentos (MoM) y su aplicación para este trabajo. En el segundo capítulo se presenta la metodología y el desarrollo de cada paso para la implementación del algoritmo en un lenguaje de uso libre. En el tercer capítulo se presentan los análisis y resultados al comparar el algoritmo elaborado en contraste con softwares comerciales como son HFSS y toolbox de antenas en MATLAB®.

1. MARCO TEORÍCO

1.1 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de James Clerk Maxwell representan bajo un modelo matemático las leyes de los fenómenos electromagnéticos; estas, determinan las relaciones entre la densidad de flujo eléctrico (\mathbf{D}), la densidad de flujo magnético (\mathbf{B}), la densidad de corriente eléctrica (\mathbf{J}) y la densidad de corriente magnética (\mathbf{M}) en función de la variación de la intensidad de campo eléctrico (\mathbf{E}) y de la intensidad de campo magnético (\mathbf{H}) en el espacio y en el tiempo, tanto en campos en el espacio como en sustancias materiales. [1]

Para el caso que se aborda en este trabajo, la versión de esas ecuaciones son las referentes a las variaciones armónicas respecto al tiempo de los campos electromagnéticos; y se expresan en el dominio de la frecuencia angular (ω); adicionalmente, se asume un medio homogéneo e isotrópico con parámetros de permeabilidad magnética (μ) y permitividad eléctrica (ϵ) constantes que deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell, las cuales son dadas como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} \quad (6)$$

Con μ_r y ϵ_r como los valores de permeabilidad y permitividad relativos; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m de permeabilidad y $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-9}$ F/m de permitividad en el vacío. De esta forma representan la relación entre los vectores de intensidad (\mathbf{E} , \mathbf{H}) e inducción (\mathbf{D} , \mathbf{B}) mediante la permitividad (ϵ) y la permeabilidad (μ) en medios materiales. [2]

Otra expresión importante es la ecuación de continuidad, la cual es una manifestación del principio de conservación de la carga. [2]

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho_e \quad (7)$$

Ahora bien, en problemas de radiación electromagnética se busca obtener el campo eléctrico en cualquier parte del espacio debido a un conjunto de corrientes eléctricas, así mismo, dada una fuente y una región del espacio con condiciones de contorno apropiadas, se busca una solución a las ecuaciones de Maxwell; para tal fin, es conveniente utilizar los potenciales como funciones auxiliares que simplifican la resolución de las ecuaciones y a partir de ello obtener el campo eléctrico.

A continuación, se presenta la expresión para calcular el campo eléctrico en función de los potenciales: [3, pág. 6 – 14].

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi_e - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F} \quad (8)$$

Dónde:

\mathbf{A} → es el vector potencial magnético en términos de una convolución de la densidad de corriente eléctrica y la función de Green; el vector \mathbf{A} está definido como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \iint_s \mathbf{J}(\mathbf{r}')\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (9)$$

\mathbf{F} → es el vector potencial eléctrico en términos de una convolución de la densidad de corriente magnética y la función de Green; el vector \mathbf{F} está definido como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \varepsilon \iint_s \mathbf{M}(\mathbf{r}')\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (10)$$

Cabe aclarar, aunque la densidad de corriente magnética (\mathbf{M}) y la densidad de carga magnética (ρ_m) no son cantidades físicamente realizables, ellas son a menudo empleadas como herramientas matemáticas para resolver problemas de radiación y dispersión. [3]

Φ_e → es el potencial escalar eléctrico definido como:

$$\Phi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \iint_s \rho_e\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (11)$$

ρ_e → es la densidad de carga eléctrica derivada de la ecuación de continuidad (7) y está definida como:

$$\rho_e = j \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}}{\omega} \quad (12)$$

$\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ → es la función de Green para un medio homogéneo en espacio libre definida como:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (13)$$

(\mathbf{r}) y (\mathbf{r}') → son vectores de posición; punto de observación y punto fuente respectivamente.
 $|\mathbf{r}, \mathbf{r}'|$ → es la distancia entre el punto de observación (x_o, y_o, z_o) y el punto fuente (x_s, y_s, z_s)

$$R = |\mathbf{r}, \mathbf{r}'| = \sqrt{(x_o - x_s)^2 + (y_o - y_s)^2 + (z_o - z_s)^2} \quad (14)$$

k → es el número de onda definido como:

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (15)$$

λ → es la longitud de onda definida como:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (16)$$

c → es la velocidad de la luz en el vacío $\approx 3 \times 10^8$ m/s

y f → es la frecuencia de operación en Hertz.

1.2 Ecuación Integral de Campo Eléctrico (EFIE)

La ecuación (8) expresa el campo eléctrico en cualquier parte de una región libre de fuentes; para el propósito de este trabajo, se analiza un conductor eléctrico perfecto (PEC – Perfect Electric Conductor); aquí, debe tenerse en cuenta que el campo en el interior del mismo es cero; los componentes tangenciales del campo eléctrico deben ser continuos en el cambio del conductor al medio exterior, esto implica que la corriente magnética se desvanece sobre él; entonces (8) se reduce a la siguiente ecuación:

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi_e \quad (17)$$

La divergencia de \mathbf{A} , está definida como: [3, pág. 11-12].

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\varepsilon\Phi_e \quad (18)$$

Despejando el potencial escalar eléctrico (Φ_e) en función de la divergencia de \mathbf{A} y sustituyendo en la ecuación (17), se obtiene el campo eléctrico en función del vector potencial magnético:

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \frac{j}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) \quad (19)$$

Ahora se escribe (19) al sustituir el vector \mathbf{A} de la ecuación (9), se obtiene:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iint_s \mathbf{J}(\mathbf{r}')\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')d\mathbf{r}' - \frac{j}{\omega\mu\epsilon}\nabla\nabla\cdot\iint_s \mathbf{J}(\mathbf{r}')\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (20)$$

Sacando el término $-j\omega\mu$ como factor común de la expresión e introduciendo los operadores de gradiente y divergencia dentro de la integral, (para la demostración de la inclusión de los operadores dentro de la integral consultar [3, pág. 13-14]), se obtiene:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu \iint_s \left[\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{\omega^2\mu\epsilon}\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla'\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (21)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación representa el vector potencial magnético, y el segundo representa el potencial escalar eléctrico.

Para resolver problemas de radiación y dispersión, a menudo es útil formular el problema en términos de un equivalente que puede ser más fácil o más conveniente para resolverlo en una región de interés. Estas equivalencias son escritas en términos de corrientes superficiales que modifican matemáticamente o eliminan la presencia de obstáculos en el problema original; por consiguiente, se derivará la ecuación integral de campo eléctrico, basados en el teorema de equivalencia física para resolver un problema de dispersión; involucrando resolver primero, una ecuación integral para la densidad de corriente eléctrica desconocida creada por un campo eléctrico incidente externo y conocido, para luego, integrar la densidad de corriente eléctrica y así obtener el campo eléctrico radiado. [3, pág. 20-24].

Por consiguiente, el campo eléctrico radiado es obtenido de una corriente superficial inducida vía:

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}') = -j\omega\mu \iint_s \left[\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2}\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla'\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}') \right] d\mathbf{r}' \quad (22)$$

Se elimina la dependencia del campo eléctrico radiado $\mathbf{E}^s(\mathbf{r}')$ en (22) forzando las condiciones de frontera sobre un campo eléctrico tangencial:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}')\times\mathbf{E}^s = -\mathbf{n}(\mathbf{r}')\times\mathbf{E}^i(\mathbf{r}') \quad (23)$$

Donde $\mathbf{n}(\mathbf{r}')$ es el vector normal a la superficie, esto permite escribir (22) en términos del campo eléctrico incidente $\mathbf{E}^i(\mathbf{r}')$ como:

$$-\frac{j}{\omega\mu}\mathbf{n}(\mathbf{r})\times\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r})\times\iint_s\left[\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k^2}\mathbf{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla'\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')\right]d\mathbf{r}' \quad (24)$$

La ecuación (24) es conocida como la Ecuación Integral del Campo Eléctrico (EFIE – Electric Field Integral Equation) para una superficie conductora. La derivación no impone ninguna restricción en la forma de la radiación, la EFIE puede ser aplicada tanto a superficies cerradas como abiertas y objetos delgados.

1.3 El Método de los Momentos

En la sección anterior se ha derivado la ecuación integral de campo eléctrico (EFIE); por consiguiente, para evitar complicaciones en resolverla analíticamente, se emplea un método computacional, en este trabajo se utilizará el método de los momentos (MoM), que es una técnica numérica usada para convertir la ecuación integral en un sistema lineal, que puede ser resuelta usando un computador. Para la conceptualización y detalles con respecto al método referirse a la referencia bibliográfica [2-8].

Las razones principales en la selección del método son:

- ✓ Resuelve las ecuaciones de Maxwell sin aproximaciones implícitas.
- ✓ Presenta mayor estabilidad numérica en la discretización de las integrales frente a las derivadas.
- ✓ Permite excluir el medio que está alrededor de la estructura y por consiguiente facilita el análisis de estructuras abiertas.
- ✓ Analiza el problema de forma rigurosa y precisa, teniendo en cuenta la mayoría de los fenómenos físicos que ocurren en las estructuras, con lo que el análisis es válido en principio para cualquier frecuencia.

Este método, permite la formulación sistemática del problema mediante la discretización de la EFIE, y calcular por métodos numéricos las densidades de corrientes desconocidas. Sin embargo, presenta una desventaja, la cual está dada a partir de restringirlo a problemas de tamaño eléctrico pequeño debido a las limitaciones en memoria y tiempo en el proceso computacional.

En el proceso de discretizar la EFIE y hallar las densidades de corrientes desconocidas, se realiza una aproximación de la función incógnita $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, vía una suma de coeficientes multiplicados por unas funciones base dadas por:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(\mathbf{r}) \quad (25)$$

Donde a_n son los coeficientes a ser determinados y $f_n(\mathbf{r})$ la función base que será descrita posteriormente.

La formulación del MoM se divide en tres partes:

- Discretización del modelo: es la formulación del dominio continuo al dominio discreto, llamado “*mallado*”; para el propósito de este trabajo y en concordancia con la elección de las funciones base, se deben usar celdas triangulares en el mallado del modelamiento de superficies; cuya característica importante es su versatilidad y la gran precisión al ser utilizadas en la representación de las diferentes formas geométricas, ver figura 1.

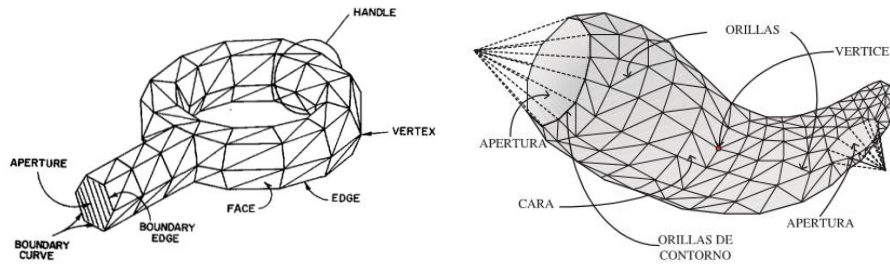


Figura 1. Imágenes tomadas de [6][7]. Representan el modelamiento de superficies arbitrarias por celdas triangulares

- Elección de las funciones de base y de prueba: el objetivo de la función base definida en los elementos fuente es modelar el comportamiento de una función desconocida a través de su dominio; las funciones base seleccionadas para el propósito del trabajo son las funciones vectoriales de base llamadas RWG [6]; su funcionamiento en la discretización de la corriente en elementos muy pequeños, en donde se puede asumir que la corriente eléctrica es constante aproximadamente. Estas funciones de base son definidas sobre los lados internos de una malla triangular (ver figura 2), garantizando que sus componentes normales sean continuos a través del lado en que estén definidos, por lo que garantizan continuidad en la densidad de corriente a lo largo de todo el conductor; igualmente, las RWG evitan la acumulación de cargas sobre los bordes donde está determinada la función. Estas cargas ficticias cuando se presentan, causan inestabilidades numéricas que impiden la convergencia de la solución.

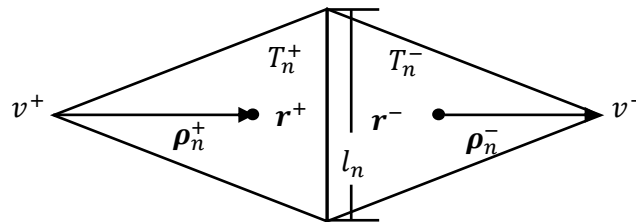


Figura 2. Representación de la función base RWG asociada a la arista en común entre celdas triangulares adyacentes.

La función base está definida como:

$$f_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{l_n}{2A_n^+} \boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}) & r \text{ en } T^+ \\ \frac{l_n}{2A_n^-} \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}) & r \text{ en } T^- \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (26)$$

Donde T_n^+ y T_n^- son los triángulos que comparten el borde n , l_n es la longitud del borde, A_n^\pm es el área del triángulo; sobre el triángulo T_n^+ el vector $\boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r})$, está definido desde el vértice \mathbf{v}^+ opuesto al lado común entre triángulos adyacentes hacia el punto \mathbf{r}^+ ; sobre el triángulo T_n^- el vector $\boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r})$, está definido desde el punto \mathbf{r}^- hacia el vértice \mathbf{v}^- opuesto del lado común entre triángulos adyacentes [3], dados por:

$$\boldsymbol{\rho}_n^+(\mathbf{r}) = \mathbf{v}^+ - \mathbf{r}^+ \quad \boldsymbol{\rho}_n^-(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^- - \mathbf{v}^- \quad (27)$$

Entre los puntos \mathbf{r}^+ y \mathbf{r}^- se re-ensamblan un pequeño dipolo espacial con una distribución de corriente lineal y es aproximadamente constante.

Adicionalmente, tomando la divergencia superficial de la función base se obtiene:

$$\nabla_s \cdot f_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{l_n}{A_n^+} & r \text{ en } T_n^+ \\ \frac{l_n}{A_n^-} & r \text{ en } T_n^- \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (28)$$

Dado lo anterior, la divergencia de la corriente es proporcional a la densidad de carga superficial a través de la ecuación de continuidad; en este sentido, la densidad de carga total asociada con el par de triángulos adyacentes es cero; como no hay acumulación de cargas sobre un borde, la función base RWG es una conformidad divergente. Las funciones de prueba o funciones de peso definidas en los elementos de observación ayudan a definir el producto interno entre estas y las funciones de base. Para este trabajo el método de Galerkin es usado, donde las funciones base son las mismas funciones de prueba; obteniendo como ventaja cumplir con las condiciones de contorno a través del dominio de la solución [3].

- Generación de la matriz de impedancias $[\mathbf{Z}_{N \times N}]$: es una matriz simétrica compleja y cuadrada ($N \times N$), donde N es el número de funciones base; esto es, el número de bordes internos en la estructura. Los elementos de la matriz expresan la iteración de una corriente a lo largo de un elemento fuente con un elemento de observación.

Una característica importante a tener en cuenta en el momento de generar la matriz de impedancias es su núcleo, el cual es singular cuando el punto de observación está dentro del rango de integración; esta característica será descrita y tratada posteriormente.

Dado lo anterior, la siguiente expresión representa la aplicación del método de los momentos, en la transformación de un sistema funcional a un sistema lineal:

$$[\mathbf{Z}_{N \times N}][\mathbf{I}_N] = [\mathbf{V}_N] \quad (29)$$

Donde $[\mathbf{I}_N]$ es el vector columna con N incógnitas numéricas y $[\mathbf{V}_N]$ es el vector columna del término independiente asociado con las funciones de prueba. Para resolver esta ecuación algebraica en este trabajo, se utiliza un método iterativo llamado Algoritmo del Gradiente Conjugado Cuadrado (CGS – Conjugate Gradient Squared). Este evita usar la transpuesta de la matriz $[\mathbf{Z}_{N \times N}]$ y converge más rápidamente a la solución por su agresiva formulación, a su vez, es más sensible a errores residuales y puede divergir rápidamente si el sistema está mal condicionado, este algoritmo requiere doble producto matriz–vector con $[\mathbf{Z}_{N \times N}]$ por iteración, [3, pág. 55-56] [12, pág. 241-244].

Una vez resuelto el sistema matricial al determinar los elementos del vector columna $[\mathbf{I}_N]$, el cual representa las densidades de corriente lineales que fluyen a través del lado n , se puede obtener parámetros como el campo eléctrico radiado o dispersado, la distribución de corriente, la impedancia característica, etc.

1.4 Técnica de Extracción de Singularidad

Como se mencionó anteriormente; en el proceso de generar la matriz de impedancias, su núcleo es singular cuando el punto de observación está dentro del rango de integración, esto es cuando $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ o están muy cerca; por consiguiente, la idea es extraer la singularidad y evaluar el término extraído en forma cerrada; en este sentido, se utiliza el método propuesto en [9], el cual presenta fórmulas recursivas por las cuales se pueden extraer un número de términos singulares de un núcleo, e integrar los términos extraídos por una función de forma polinómica en forma cerrada sobre celdas triangulares.

En la demostración de la técnica, solo se presenta las fórmulas obtenidas en [9] que son utilizadas para el propósito del trabajo; siendo así, se empieza con la representación de la función de Green (13) como una serie respecto a $\mathbf{R} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$:

$$\mathbf{G}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-jk)^n}{n!} \mathbf{R}^{n-1} \quad (30)$$

Los términos que causan problemas en el método de integración de Cuadratura Gaussiana son los términos pares de bajo orden respecto a n ; entonces, se remueve solo estos términos y luego son adicionados como términos separados, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \iint_S \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\
&= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{e^{-jkR}}{R} - \sum_{n=0,2,\dots}^{N'} \frac{(-jk)^n}{n!} R^{n-1} \right) \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\
&+ \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0,2,\dots}^{N'} \frac{(-jk)^n}{n!} \iint_S R^{n-1} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'
\end{aligned} \tag{31}$$

Si N' es lo suficientemente grande (ej. $N' > 2$), el primer término se calcula numéricamente con el método de Cuadratura Gaussiana y el límite cuando la distancia $R \rightarrow 0$ es dado por:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0,2,\dots}^{N'} \frac{(-jk)^n}{n!} R^{n-1} \rightarrow \frac{-jk}{4\pi} \tag{32}$$

Ahora, la función $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ se representa como una función polinómica de forma nodal de orden M , para N elementos dada como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \sum_{q=0}^Q \sum_{p=0}^P w_{qp} u^q(\mathbf{r}') v^p(\mathbf{r}') \tag{33}$$

Donde $Q+P=M$, u y v son las coordenadas sobre el triángulo, w_{qp} es una constante.

Los términos pares separados de la ecuación (31) puede ser calculados en forma cerrada; a continuación, se presentan formulas recursivas de integrales generales utilizadas para el desarrollo del trabajo; igualmente, se presentan simplificadas con respecto a los términos de bajo orden que se tomaron para la función polinómica; para este trabajo, n toma el valor de -1 , m toma el valor de 0 , y q toman los valores entre 0 y 1 ; para más detalles referente a las expresiones referirse a [9]:

$$\int_{S'} R^n u^q v^p ds' = \frac{\mathbf{U}}{n+2} \cdot \sum_{i=1}^3 \mathbf{m}_i \int_l R^{n+2} u^{q-1} v^p dl + u_0 \int_{S'} R^n u^{q-1} v^p ds' \tag{34}$$

$$\int_{S'} R^n u^q v^p ds' = \frac{\mathbf{V}}{n+2} \cdot \sum_{i=1}^3 \mathbf{m}_i \int_l R^{n+2} v^{p-1} u^q dl + v_0 \int_{S'} R^n v^{p-1} u^q ds' \tag{35}$$

Donde l indica el borde del triángulo, S' expresa la superficie del triángulo. A continuación, se presenta a partir de la figura 3, la notación tomado de [9] para calcular en forma cerrada los términos

de las ecuaciones (34) y (35), cabe aclarar que en las expresiones la letra en negrilla denota vector y las otras letras son escalares.

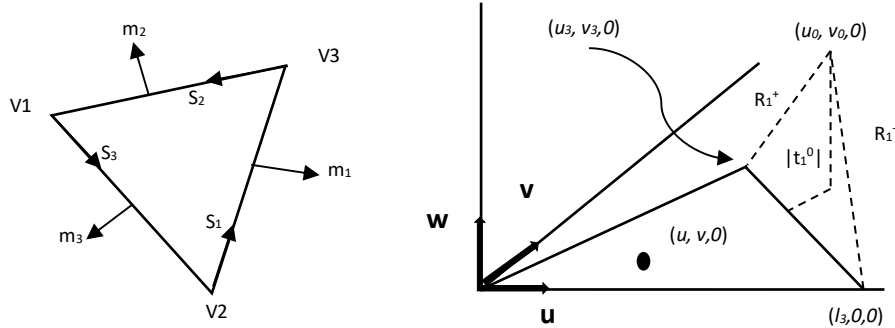


Figura 3. Imágenes tomadas de [9]. Representan al lado izquierdo las coordenadas globales en el triángulo, al lado derecho define las coordenadas locales para los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Primero se definen vectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= \frac{\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_{i+1}}{|\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_{i+1}|} & i = 1,2,3 \\ \mathbf{U} &= \mathbf{S}_3 \\ \mathbf{V} &= \frac{-\mathbf{S}_2 + (\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{U})\mathbf{U}}{|-\mathbf{S}_2 + (\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{U})\mathbf{U}|} \\ \mathbf{W} &= \frac{\mathbf{U} \times \mathbf{V}}{|\mathbf{U} \times \mathbf{V}|} \end{aligned} \quad (36)$$

Luego se definen escalares:

$$\begin{aligned} u &= (\mathbf{r}' - \mathbf{V}_1) \cdot \mathbf{U} \\ v &= (\mathbf{r}' - \mathbf{V}_1) \cdot \mathbf{V} \\ u_0 &= (\mathbf{r} - \mathbf{V}_1) \cdot \mathbf{U} \\ v_0 &= (\mathbf{r} - \mathbf{V}_1) \cdot \mathbf{V} \\ w_0 &= (\mathbf{r} - \mathbf{V}_1) \cdot \mathbf{W} \end{aligned} \quad (37)$$

\mathbf{m}_i es el vector normal del enésimo borde del triángulo, se define otros valores:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i &= \mathbf{S}_i \times \mathbf{W} \\ t_i^0 &= (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{m}_i \\ l_i &= |\mathbf{V}_{i+2} - \mathbf{V}_{i+1}| \\ \mathbf{S}_i^- &= (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}_i \\ \mathbf{S}_i^+ &= \mathbf{S}_i^- + l_i \\ R_i^+ &= R_{i+1}^- = |\mathbf{r} - \mathbf{V}_{i-1}| \\ R_i^0 &= \sqrt{(t_i^0)^2 + w_0^2} \end{aligned} \quad i = 1,2,3 \quad (38)$$

Ahora, se definen la integral sobre el borde y la integral sobre el triángulo:

Integral sobre el borde, definida como:

$$\int_l R^n(s) s^m dl(s) \quad (39)$$

Donde $n \geq -1$, $m \geq 0$, l es el n -ésimo borde de un triángulo y la integración a lo largo del borde es tomada con respecto al parámetro S .

Si $n = -1$ y $m = 0$

$$\int_l R^{-1} dl = \ln \left(\frac{S_i^+ + R_i^+}{S_i^- + R_i^-} \right) \quad (40)$$

La ecuación (40) es la integral base para integrales sobre el borde.

A continuación, se presenta una formula recursiva para una integral más general cuando $n \geq 1$ y $m = 0$

$$\int_l R^n dl = \frac{1}{n+1} \left(S_i^+ (R_i^+)^n - S_i^- (R_i^-)^n + n (R_i^0)^2 \int_l R^{n-2} dl \right) \quad (41)$$

Integral sobre el triángulo, primero para el caso de $n = -3$, definida como:

$$\int_{s'} R^{-3} ds' = \begin{cases} \frac{w}{w_0} \sum_{i=1}^3 \beta_i & |w_0| \neq 0 \\ 0 & w_0 = 0 \end{cases} \quad (42)$$

Donde:

$$\beta_i = \arctan \left(\frac{t_i^0 s_i^+}{(R_i^0)^2 + |w_0| R_i^+} \right) - \arctan \left(\frac{t_i^0 s_i^-}{(R_i^0)^2 + |w_0| R_i^-} \right) \quad (43)$$

La ecuación (42) es la integral base para las integrales sobre triángulos.

A continuación, se presenta una formula recursiva para una integral más general, ejemplo para $n \geq -1$

$$\int_{s'} R^n ds' = \sum_{i=1}^3 \frac{t_i^0}{n+2} \int_l R^n dl + \frac{n w_0^2}{n+2} \int_{s'} R^{n-2} ds' \quad w_0 \neq 0 \quad (44)$$

En la ecuación (44), si $w_0 = 0$ el segundo término de la expresión es omitido. Las ecuaciones (36) - (44) presentan expresiones para ser implementadas en las ecuaciones (34) y (35) y así obtener los valores de los términos pares separados de la ecuación (31).

2. ESPECIFICACIONES Y DESARROLLOS

2.1 Características del equipo

El equipo de hardware utilizado es un portátil marca Hewlett Packard con las siguientes especificaciones:

Procesador:	Intel® Core™ i7-4702MQ CPU @ 2.20GHz
Memoria Instalada (RAM):	12,0 GB
Tipo de sistema:	Sistema operativo de 64 bits

2.2 Discretización de los Modelos Geométricos

Se utiliza el software comercial en versión de evaluación GiD v13.0 [11], para el desarrollo de los modelos y la discretización de los mismos a través de la generación de la malla; adicionalmente, con las herramientas de visualización identificar las partes del modelo asignando colores sobre la estructura, ver figura 4.

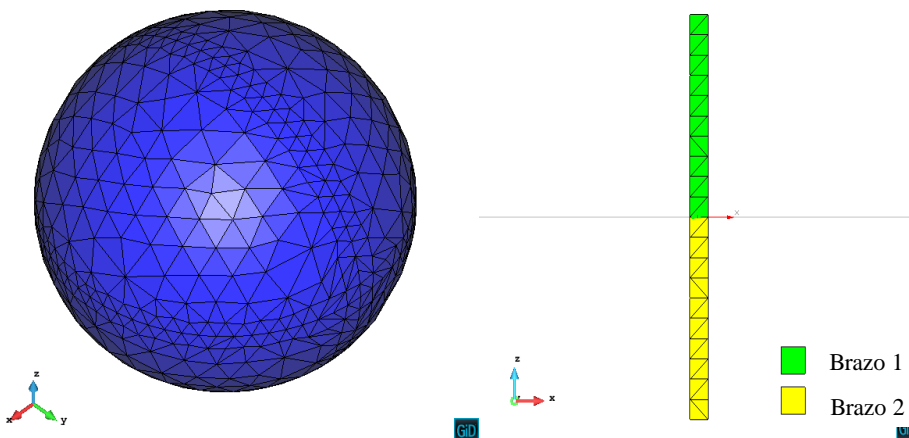
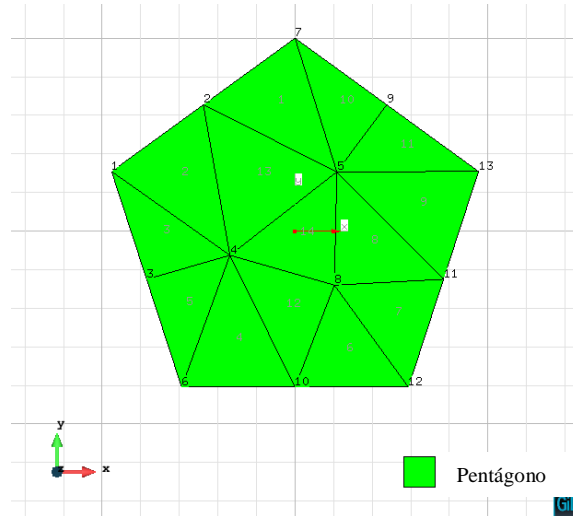


Figura 4. Modelos geométricos y su discretización. A la izquierda una esfera de radio $r = 1$ m. A la derecha una estructura que representa un dipolo planar, la longitud de 50 cm, el ancho de 2.5 mm.

En el proceso de la discretización, el software ofrece un valor por defecto de acuerdo a la geometría del modelo; pero esta opción puede ser modificada por el usuario, este valor define el número de elementos (celdas triangulares) en el modelo.

El software permite generar un archivo en formato plano; el cual, especifica una lista de nodos y de elementos que conforman el mallado de los modelos. A continuación, se ilustra en la figura 5 un ejemplo con un archivo que contiene 13 nodos y 14 elementos.



MESH dimension 3 ElemType Triangle Nnode 3

Coordinates

1	-4.75528258	1.54508497	0
2	-2.37764129	3.27254249	0
3	-3.84710442	-1.25	0
4	-1.6881425	-0.62712504	0
5	1.08356197	1.53436774	0
6	-2.93892626	-4.04508497	0
7	0	5	0
8	1.01839507	-1.40170057	0
9	2.37764129	3.27254249	0
10	-8.881e-016	-4.04508497	0
11	3.84710442	-1.25	0
12	2.93892626	-4.04508497	0
13	4.75528258	1.54508497	0

End Coordinates

Elements

1	7	2	5
2	2	1	4
3	1	3	4
4	4	6	10
5	4	3	6
6	10	12	8
7	12	11	8
8	8	11	5
9	5	11	13
10	9	7	5
11	9	5	13
12	10	8	4
13	5	2	4
14	5	4	8

End Elements

Figura 5. Formato del archivo entregado por el software GID® con la información de las coordenadas de cada nodo y los nodos asociados a cada elemento.

2.3 Lenguaje de programación

El algoritmo se implementa en el lenguaje FORTRAN v2003 [10] sobre el entorno de desarrollo integrado ECLIPSE v4.4 bajo plataforma LINUX 14.0 incorporada sobre una máquina virtual en el mismo equipo.

Las razones para seleccionar este lenguaje son:

- ✓ La utilización en áreas de desarrollo e investigación en la academia para aplicaciones científicas y el análisis numérico.
- ✓ El uso común en técnicas de cálculo por el soporte en notación matemática y comprobación estática en arreglos y matrices multidimensionales.

A continuación, se presenta una descripción en la elaboración del algoritmo implementado.

2.3.1 Programa principal

En el programa principal están definidos los módulos y subrutinas utilizadas en la implementación del algoritmo, en la figura 6 se representa a través de un diagrama de flujo.

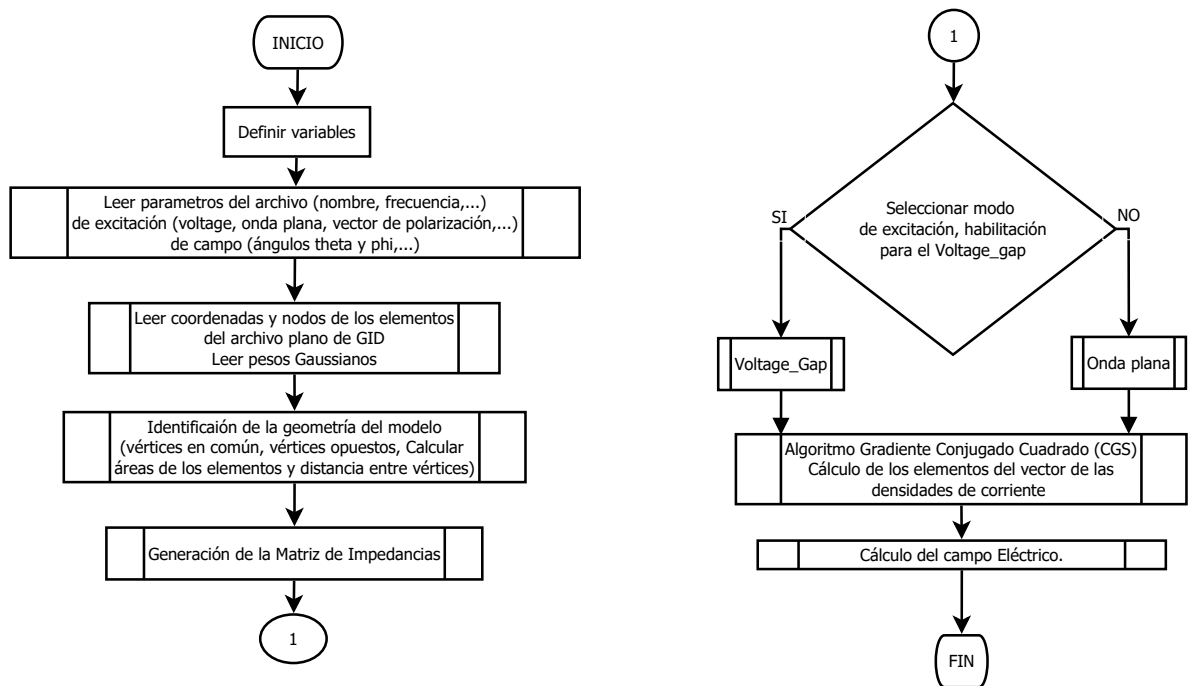


Figura 6. Diagrama de flujo del programa principal.

2.3.2 Módulo de lectura

En el módulo de lectura se definen las subrutinas que leen archivos, los cuales contienen la información de los parámetros de configuración para la elaboración del algoritmo. El primer archivo tiene los siguientes parámetros: el nombre del archivo donde está contenida la información del módulo discretizado, valores para configurar el grado de integración de la regla de Cuadratura Gaussiana, valores para el acondicionamiento del tipo de estructuras a trabajar en el algoritmo, el valor para determinar la precisión en los términos de extracción en la función de Green, valores para determinar puntos a lo largo del lado en común entre celdas triangulares, (la información después del signo de admiración es de carácter aclarativo y no es leído por el algoritmo). Ver figura 7.

```
Parametersmesh
dipole300MHz.msh      ! File name
1                    ! SOURCE points quadrature rule n = 1, 2, 3, 4, 5
1                    ! TEST points quadrature rule n = 1, 2, 3, 4, 5
.TRUE.              ! flag_type_surface  FALSE= 1 surface, TRUE=2 surface
300e6               ! frequency
1e-6               ! Eps_extraction
0                   ! r_start
1                   ! r_stop
1                   ! r_step
End parametersmesh
```

Figura 7. Formato del archivo con información para la configuración inicial del algoritmo.

El mismo archivo contiene los parámetros que definen el modo de excitación; valores del vector de desplazamiento del campo eléctrico incidente, valores del vector de polarización del campo eléctrico incidente, valores para el acondicionamiento del modo de excitación, valor en un modo de excitación (Voltage_gap), valor de identificación para aplicar el modo de excitación (Voltage_gap), valores de condicionamiento como la tolerancia y el número máximo de iteraciones, que serán utilizados en el módulo que describe el procedimiento del algoritmo gradiente conjugado cuadrado, para calcular los elementos del vector de las densidades de corriente eléctrica. Ver figura 8.

```
ParametersExcitation
0.                  ! kx (input part)
0.                  ! ky
1.                  ! kz (this vector will be normalized)
(1.,0.)            ! Ex
(0.,0.)            ! Ey
(0.,0.)            ! Ez
.TRUE.             ! Activate the Voltage GAP Excitation mode
1.                 ! Voltage GAP Value
2                  ! Label Fed
1e-6               ! Tolerance
20000              ! Max_of_iterations
End parametersExcitation
```

Figura 8. Formato del archivo con información de los parámetros que configuran el modo de excitación.

De igual forma, el archivo contiene los parámetros para determinar las condiciones que calculan el campo eléctrico radiado, valores para acondicionar el plano de polarización del campo, valores que

determinan el rango de los ángulos en el plano de polarización, el número de puntos a evaluar, valores de la distancia con respecto al modelo para calcular el campo eléctrico radiado. Ver figura 9.

```

Parameters Field
1          ! if 1 (free=theta const=phi); if 2 (free=phi const=theta);
0          ! const value
0          ! free init value
180       ! free final value (degrees)
100       ! number of points in the interval
0         ! radius start (meters)
1         ! radius stop (meters)
1         ! radius step
End parametersField

```

Figura 9. Formato del archivo con la información de los parámetros para calcular el campo eléctrico radiado.

Igualmente, en el mismo módulo de lectura se encuentran las subrutinas para leer el archivo entregado por el software GiD® con la información de las coordenadas de los nodos y los nodos asociados a cada elemento, la interpretación de la información entregada por el archivo es la siguiente:

Entrega el número de nodos especificados en la primera columna, seguido de las tres columnas con las coordenadas de los nodos respecto al eje x , y , y z , respectivamente. Así mismo, entrega el número de elementos especificados en la primera columna y en las siguientes tres columnas, los nodos asociados a cada elemento. Ver figura 10.

```

MESH dimension 3 ElemType Triangle Nnode 3
Coordinates
1  0.587785252 -0.809016994  0
2  0.769420884 -0.25  0
3  0 -0.809016994  0
4  0 0.202254249  0
5  0.951056516 0.309016994  0
6 -0.587785252 -0.809016994  0
7  0.475528258 0.654508497  0
8 -0.769420884 -0.25  0
9 -0.475528258 0.654508497  0
10 0 0 1 0
11 -0.951056516 0.309016994  0
End Coordinates

Elements
1 10 4 7
2 9 11 4
3 8 6 3
4 3 1 2
5 2 5 4
6 10 9 4
7 4 11 8
8 7 4 5
9 4 8 3
10 4 3 2
End Elements

```

Figura 10. Formato del archivo generado por el software GiD®, con la información de los nodos y las coordenadas de los mismos con respecto a los ejes; así mismo, los nodos asociados a cada elemento con respecto a la discretización del modelo.

De forma similar, en el módulo de lectura se encuentra la subrutina para leer el archivo con las coordenadas simples y el coeficiente de peso utilizados en el esquema de integración numérica Gaussiana sobre subdominios triangulares; la primera columna identifica el número de puntos en el

grado de integración; las columnas dos, tres, cuatro y cinco son las coordenadas simples y el coeficiente de peso α , β , γ y ω , respectivamente. Ver figura 11.

Weight Gaussiana Quadrature Rule				
n1				
1	0.33333331	0.33333331	0.33333331	1.00000000
Endn1				
n2				
1	0.66666663	0.16666666	0.16666666	0.33333331
2	0.16666666	0.66666663	0.16666666	0.33333331
3	0.16666666	0.16666666	0.66666663	0.33333331
Endn2				
n3				
1	0.33333333	0.33333333	0.33333333	-0.56250000
2	0.60000000	0.20000000	0.20000000	0.52083333
3	0.20000000	0.60000000	0.20000000	0.52083333
4	0.20000000	0.20000000	0.60000000	0.52083333
Endn3				
n4				
1	0.10810301	0.44594849	0.44594849	0.22338158
2	0.44594849	0.10810301	0.44594849	0.22338158
3	0.44594849	0.44594849	0.10810301	0.22338158
4	0.81684757	0.09157621	0.09157621	0.10995174
5	0.09157621	0.81684757	0.09157621	0.10995174
6	0.09157621	0.09157621	0.81684757	0.10995174
Endn4				
n5				
1	0.33333333	0.33333333	0.33333333	0.22500000
2	0.05971587	0.47014206	0.47014206	0.13239415
3	0.47014206	0.05971587	0.47014206	0.13239415
4	0.47014206	0.47014206	0.05971587	0.13239415
5	0.79742698	0.10128650	0.10128650	0.12593918
6	0.10128650	0.79742698	0.10128650	0.12593918
7	0.10128650	0.10128650	0.79742698	0.12593918
Endn5				

Figura 11. Formato del archivo con las coordenadas simples y el coeficiente de peso para el esquema de integración numérica Gaussiana sobre subdominios triangulares. [3, pág. 267-268]

2.3.3 Identificación de la geometría del modelo

Como se describe en los párrafos anteriores, solo se ha definido la obtención de información presentada en archivos; ahora, es importante relacionar esa información correspondiente a la identificación de las características del modelo; inicialmente, los datos de los nodos con sus respectivas coordenadas y los nodos asociados a cada elemento del modelo, permiten realizar los cálculos de la distancia entre los nodos, calcular el área y el centro de cada elemento y calcular la distancia entre el centro del elemento a cada uno de sus nodos, en la figura 12 un diagrama de flujo representa esta subrutina.

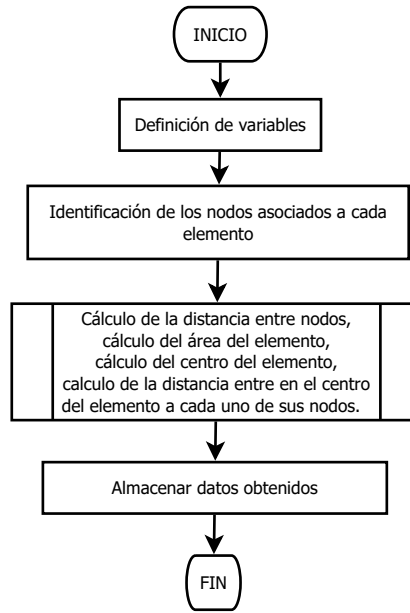


Figura 12. Diagrama de flujo que representa la subrutina para los cálculos de distancias y áreas de los elementos con la información de las coordenadas de los nodos.

La expresión de la ecuación (14) se utiliza de guía para calcular las distancias entre nodos y la distancia entre el centro del elemento a cada uno de sus nodos, las siguientes expresiones se utilizan para calcular las coordenadas del centro y el área del elemento, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{x_{v1} + x_{v2} + x_{v3}}{3} \\
 y_c &= \frac{y_{v1} + y_{v2} + y_{v3}}{3} \\
 z_c &= \frac{z_{v1} + z_{v2} + z_{v3}}{3}
 \end{aligned} \tag{45}$$

$$A_i = \frac{\|\overrightarrow{V_1V_2} \times \overrightarrow{V_1V_3}\|}{2}, \quad \overrightarrow{V_1V_2} = V_1 - V_2 \quad y \quad \overrightarrow{V_1V_3} = V_1 - V_3 \tag{46}$$

Donde x , y y z son las coordenadas con respecto a los nodos; V_1 , V_2 y V_3 son los nodos asociados a cada elemento, igualmente, A_i es el área del elemento.

De igual forma, con el fin de caracterizar el modelo se debe obtener información en el proceso para identificar los nodos que son comunes entre elementos adyacentes e identificar los nodos opuestos con respecto a los nodos que comparten en común los elementos adyacentes y así mismo, asociar los elementos a los nodos comunes y nodos opuestos. En la figura 13 el diagrama de flujo representa esta subrutina.

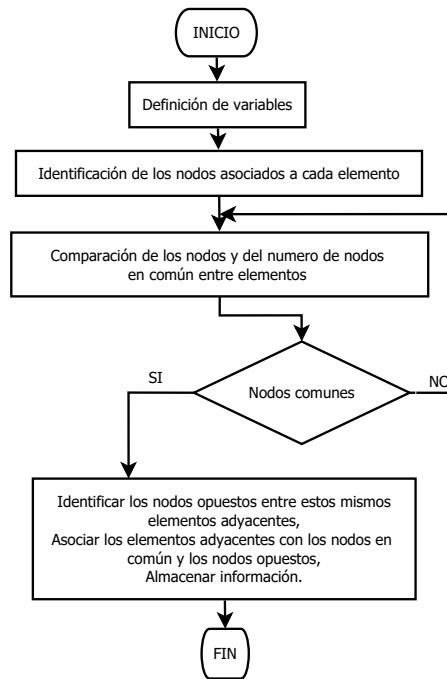


Figura 13. Diagrama de flujo para representar la identificación de los nodos en común y nodos opuestos entre celdas triangulares adyacentes.

En un principio no se conoce la cantidad de nodos en común y a su vez se necesita almacenar esta información junto con los nodos opuestos y la identificación de los elementos adyacentes a estos nodos, por lo tanto, se realiza un procedimiento de asignación dinámica de memoria. Adicionalmente, en el proceso de identificar y comparar los nodos asociados a cada elemento para determinar los nodos comunes y opuestos con otros elementos adyacentes se realiza el conteo de nodos en común, de esta forma nos entrega un valor que nos ayuda a determinar el número de funciones base a utilizar y el tamaño de la matriz de impedancias.

2.3.4 Generación Matriz de Impedancias

Describir el proceso de la generación de la matriz de impedancias, inicia a partir del desarrollo matemático aplicando el método de los momentos a la ecuación integral EFIE para superficies conductoras de forma arbitraria expresada en la ecuación (24) y finalmente pasar de una ecuación funcional a una ecuación lineal.

A partir de la ecuación (24) y sólo en los términos del lado derecho de la expresión, se sustituye las densidades de corriente eléctrica vía la suma de funciones base ponderadas, definida en la ecuación (25), igualmente, aplicando las funciones de prueba que son las mismas funciones de base por aplicar el método de Galerkin y, reemplazando la función de Green definida en la ecuación (13), se obtiene:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Z}_{m \times n}][\mathbf{I}_n] &= \int_{f_m} \int_{f_n} f_m(\mathbf{r}) \cdot a_n f_n(\mathbf{r}') \left(\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \\
&\pm \int_{f_m} \int_{f_n} \frac{1}{k^2} (\nabla \cdot f_m(\mathbf{r})) (\nabla' \cdot a_n f_n(\mathbf{r}')) \left(\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}
\end{aligned} \tag{47}$$

De la ecuación (47) los coeficientes a_n son las incógnitas a determinar, sustrayéndolos de las integrales forman el vector columna con las N incógnitas numéricas, de la misma forma, se pueden sacar de las integrales los valores constantes como 4π y k^2 , nuevamente, se reemplaza las funciones de base y de prueba por las funciones RWG para triángulos definidas en la ecuación (26), al mismo tiempo, se sustituye las expresiones generadas por la divergencia superficial definidas en la ecuación (28), obteniendo la expresión matemática de la matriz de impedancias:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{Z}_{m \times n}] &= \frac{1}{4\pi} \int_{f_m} \int_{f_n} \left(\frac{l_m}{2A_m^\pm} \boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}) \right) \cdot \left(\frac{l_n}{2A_n^\pm} \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}') \right) \left(\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \\
&\pm \frac{1}{4\pi k^2} \int_{f_m} \int_{f_n} \left(\frac{l_m}{A_m^\pm} \right) \left(\frac{l_n}{A_n^\pm} \right) \left(\frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}
\end{aligned} \tag{48}$$

En igual sentido, se saca factor común de las longitudes de los bordes sobre las áreas y sustituyendo las integrales por el esquema de integración numérica utilizando la regla de Cuadratura Gaussiana sobre subdominios triangulares, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{m \times n} &= \frac{l_m l_n}{4\pi} \left[\frac{1}{4} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \omega_p \omega_q \left(\boldsymbol{\rho}_m^\pm(\mathbf{r}_p) \cdot \boldsymbol{\rho}_n^\pm(\mathbf{r}'_q) \right) \left(\frac{e^{-jk|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}'_q|}}{|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}'_q|} \right) \right. \\
&\quad \left. \pm \frac{1}{k^2} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \omega_p \omega_q \left(\frac{e^{-jk|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}'_q|}}{|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}'_q|} \right) \right]
\end{aligned} \tag{49}$$

Los coeficientes de peso ω_p y ω_q de la regla de Cuadratura Gaussiana son normalizados con respecto al área del triángulo; cabe anotar que, el primer término entre los paréntesis cuadrados representa el vector potencial magnético (9) y el segundo representa el potencial escalar eléctrico (10); la ecuación obtenida en (49) es la expresión implementada en el algoritmo para generar los elementos de la matriz de impedancias. La expresión para definir los puntos de observación y fuente en el esquema de integración numérica referente a las coordenadas simples de la regla de Cuadratura Gaussiana sobre subdominios triangulares es:

$$\mathbf{r}, \mathbf{r}' = \begin{cases} x = \gamma x_{v_1} + \alpha x_{v_2} + \beta x_{v_3} \\ y = \gamma y_{v_1} + \alpha y_{v_2} + \beta y_{v_3} \\ z = \gamma z_{v_1} + \alpha z_{v_2} + \beta z_{v_3} \end{cases} \tag{50}$$

A continuación se presenta una descripción del proceso en la implementación: En primera instancia se obtiene la longitud del lado común (14), el centro (45) y el área del elemento (46); con ayuda de la información suministrada por el archivo entregado por GiD®, que contiene las coordenadas de los nodos y los nodos asociados a los elementos en combinación con la información obtenida en el módulo de identificar la geometría del modelo, que especifica los nodos en común y los nodos opuestos asociados a cada par de elementos y/o de celdas triangulares adyacentes.

Luego se hallan los puntos de observación (\mathbf{r}) y fuente (\mathbf{r}') con el esquema de integración numérica definidos en la ecuación (50), en donde alfa (α), beta (β) y gamma (γ) son los valores de las coordenadas simples que son mostrados en la figura 11.

En síntesis, estos procedimientos se hacen definiendo ciclos consistentes en evaluar cada punto de observación con cada punto fuente, definidos en cada elemento del modelo, y a su vez, dependiendo del número de puntos de observación o de fuente en cada elemento determinados por el número de puntos de la regla de Cuadratura Gaussiana.

Posteriormente, dentro de los ciclos ya establecidos se procede a calcular la distancia entre los puntos de observación y fuente con la ayuda de la ecuación (14), esta información no sólo se utiliza en el proceso de cálculo, sino que sirve para evaluar si el punto de observación está en el dominio de integración. La condición utilizada es:

$$\begin{aligned} &(\text{distancia entre el centro del elemento fuente y el punto de observación}) < \\ &3(\text{máxima distancia entre las distancias del centro del elemento fuente} \\ &\quad \text{hacia cada uno sus nodos}) \end{aligned}$$

Si no se cumple la condición, la función de Green es calculada con la ecuación (13); si se cumple la condición, en primera instancia, se realiza una extracción de términos en la función de Green por expandirla como una serie con respecto a \mathbf{R} para realizar los cálculos. Nuevamente, se evalúa si el valor absoluto del producto entre la constante k y \mathbf{R} es mayor a la unidad; si es mayor a la unidad, la función de Green se calcula con el término entre paréntesis de la ecuación (31) y, si no es mayor se calcula con la ecuación (32); en la figura 14 se presenta el diagrama de flujo de la subrutina para calcular la función de Green en el algoritmo implementado.

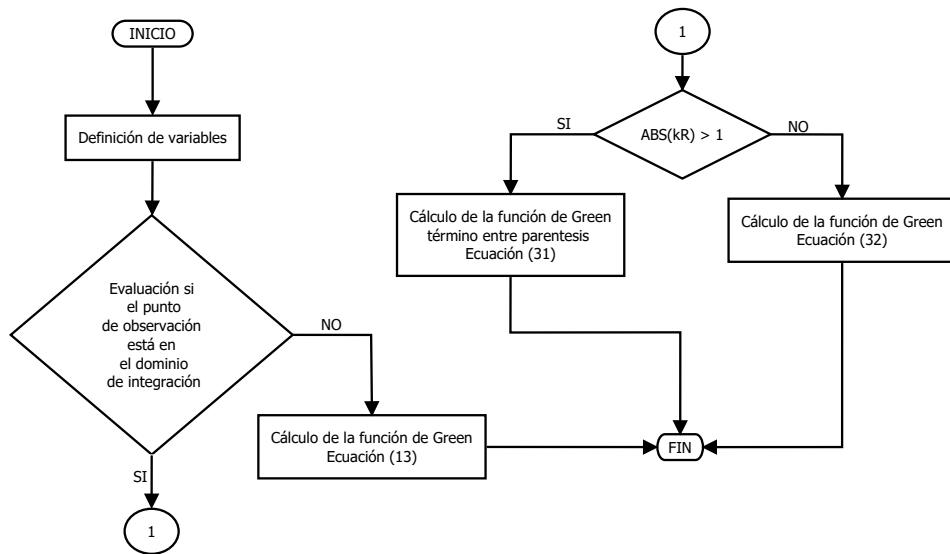


Figura 14. Diagrama de flujo de la subrutina para calcular la función de Green.

Luego se procede a extraer la singularidad con ayuda de las expresiones definidas en las ecuaciones (34) y (35), para resolver las expresiones se utilizan las ecuaciones (36) a (44); por lo tanto, estas expresiones sólo ayudan a calcular los términos pares de bajo orden en forma analítica referenciados por la ecuación (31); después son adicionados para calcular tanto el vector potencial magnético como el potencial escalar eléctrico. Ahora bien, si la distancia es mayor, se realiza el cálculo numérico de los potenciales, simplemente sustituyendo los términos en la ecuación (49). En la figura 15, un diagrama de flujo representa la subrutina para la extracción de la singularidad.

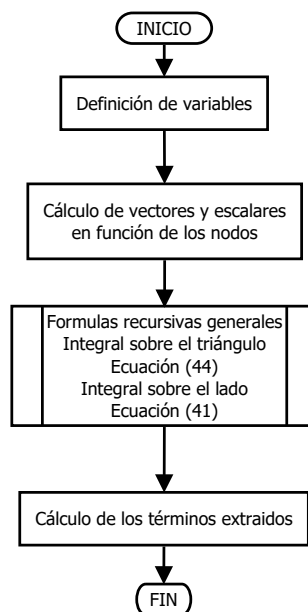


Figura 15. Diagrama de flujo de la subrutina para la extracción de la singularidad

Cabe aclarar que los puntos a evaluar se pueden definir en dos categorías: la primera denominada elementos de observación, la cual está caracterizada por puntos de observación definidos a partir del número de puntos de la regla de Cuadratura Gaussiana dentro de celdas adyacentes y la segunda denominada elementos de fuente, la cual está caracterizada por puntos fuente definidos de la misma forma.

De tal manera que, por cada par de puntos de observación definidos por cada par de celdas triangulares adyacentes de observación, evaluadas con respecto a cada par de puntos de fuente definidos por cada par de celdas triangulares adyacentes de fuente, se genera un elemento de la matriz de impedancias. El número de elementos que contenga la matriz dependerá del número de funciones base, éstas a su vez, dependen del número de lados en común por celdas triangulares adyacentes dentro del modelo discretizado, en contraste con el número de celdas triangulares en el que está discretizado el modelo. Por consiguiente, se ve reflejado en la implementación del algoritmo basado en el método de los momentos (MoM), con el tamaño de la matriz de impedancias, la precisión de los resultados y el tiempo de procesamiento y uso de memoria en el computador cuando se ejecuta el algoritmo implementado.

En la figura 16 se representa a través de un diagrama de flujo la subrutina para la generación de la matriz de impedancias.

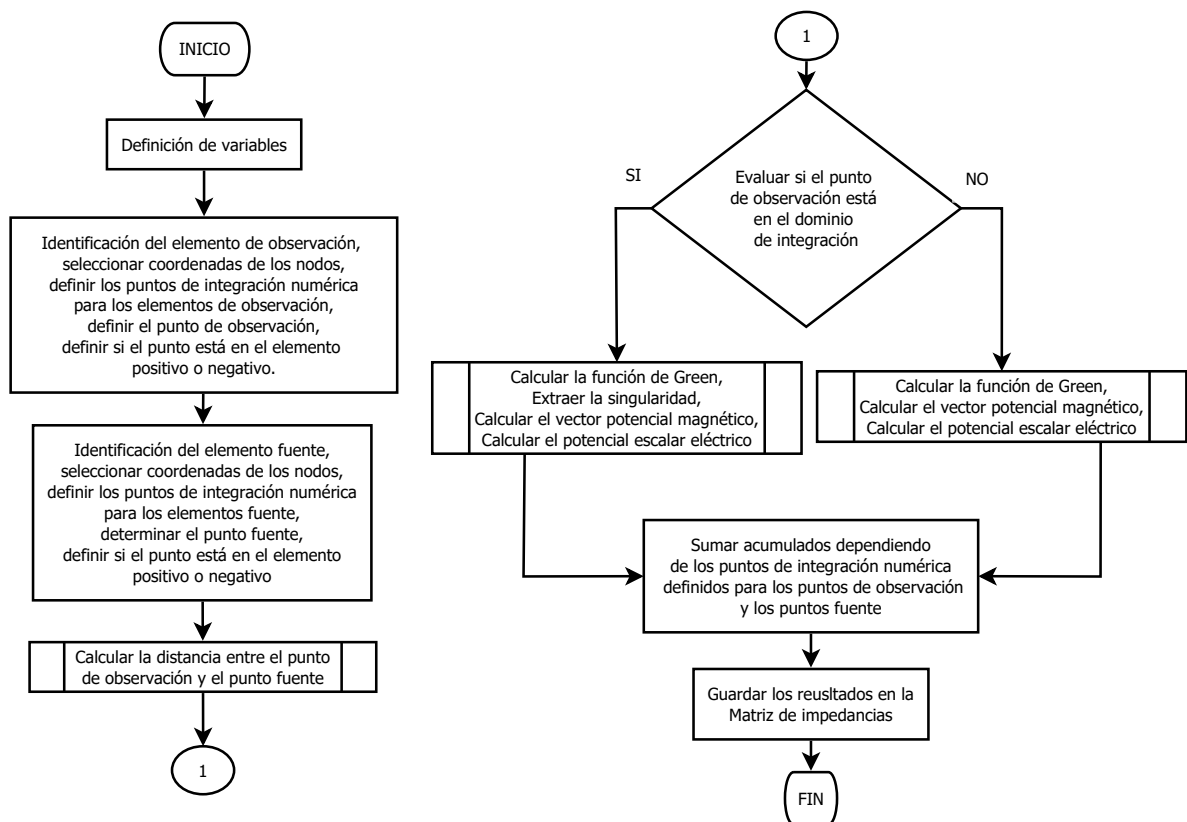


Figura 16. Diagrama de flujo que representa la subrutina para la generación de los elementos en la Matriz de Impedancias.

2.3.5 Cálculo de los elementos del Vector de Excitación

El vector de excitación está definido como:

$$[\mathbf{V}_N] = -\frac{j}{k} \int_{f_n} f_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (51)$$

Donde k es el número de onda definido en la ecuación (15), $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$ es el campo eléctrico incidente y $f_n(\mathbf{r})$ representa la función de prueba; así mismo, se sustituye la función por los términos de la ecuación (26) y, adicionalmente, se aplica la regla de la Cuadratura Gaussiana, se obtiene:

$$[\mathbf{V}_N] = -\frac{jl_n}{2k} \sum_{p=1}^P \omega_p \boldsymbol{\rho}_n^{\pm}(\mathbf{r}_p) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}_p) \quad (52)$$

A partir de la ecuación (52) se generan los modelos de excitación:

2.3.5.1 Modelo Onda Plana Incidente

Este modelo consiste en suponer la incidencia de una onda plana sobre la estructura del modelo; de esta forma, para la onda plana incidente en la polarización de $\hat{\theta}^i$ o $\hat{\phi}^i$, la ecuación está dada como:

$$[\mathbf{V}_N] = -\frac{jl_n}{2k} (\hat{\theta}^i, \hat{\phi}^i) \cdot \sum_{p=1}^P \omega_p \boldsymbol{\rho}_n^{\pm}(\mathbf{r}_p) e^{-jk\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}^i} \quad (53)$$

Donde \mathbf{r}^i es el vector que define el desplazamiento de la onda, $\hat{\theta}^i$ o $\hat{\phi}^i$ es el vector que define la polarización de la onda; estos vectores son definidos por el usuario en el archivo de los parámetros de excitación. La figura 17 ilustra en un diagrama de flujo la subrutina para generar los elementos del vector de excitación a partir de una onda plana incidente.

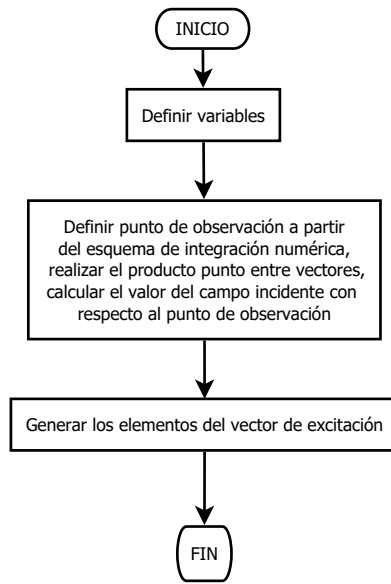


Figura 17. Diagrama de flujo que representa la subrutina para calcular los elementos del vector de excitación en el modelo de Onda Plana Incidente.

2.3.5.2 Modelo Voltaje Delta Gap

Este modelo consiste en suponer que se tiene un puerto excitado por una fuente de voltaje V_{gap} , dicha fuente de voltaje está aplicada dentro de una pequeña brecha infinitesimal de longitud $d \rightarrow 0$; el modelo de alimentación es sobre un lado compartido entre dos celdas triangulares adyacentes. Ver figura 18.

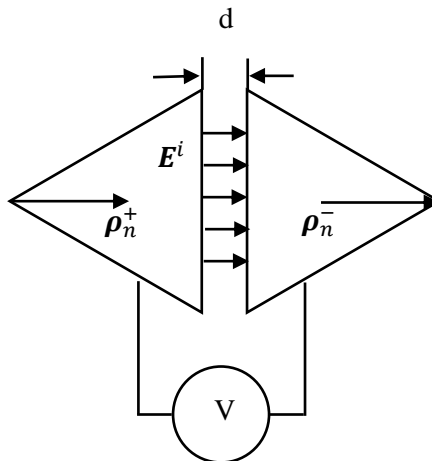


Figura 18. Imagen tomada [3]. Modelo de alimentación Delta-Gap sobre un lado compartido entre dos triángulos adyacentes.

Si se asume una brecha muy pequeña entre los dos triángulos adyacentes, el campo eléctrico existente solo se encuentra en la brecha y está dado por:

$$\mathbf{E}^i = \frac{V_{in}}{d} \hat{\mathbf{u}}_n \quad (54)$$

Donde $\hat{\mathbf{u}}_n$ es el vector normal al lado en el plano, V_{in} es el valor de la fuente de voltaje y d es la distancia en la brecha entre los triángulos. Ahora bien, usando la expresión (54) y el hecho de que la componente normal de una función RWG es uno a lo largo del lado en la cual es aplicada, la ecuación (51) se reduce a:

$$[\mathbf{V}_N] = -\frac{j}{k} l_n V_{in} \quad (55)$$

Donde l_n es la longitud del lado común entre celdas triangulares adyacentes aplicando el voltaje.

Estas fuentes de tensión crean corrientes inducidas que se modelan mediante corrientes en la estructura y están definidas sobre la mitad del segmento en el que está discretizado dicha excitación. Para el propósito de este trabajo, este modelo de excitación es utilizado sobre un dipolo planar. En la figura 19 el diagrama de flujo representa la subrutina para el modelo de excitación Voltaje Delta-Gap.

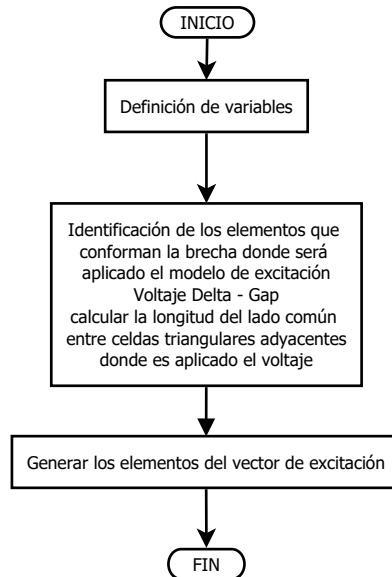


Figura 19. Diagrama de flujo de la subrutina para generar los elementos del vector de excitación a partir del modelo Voltaje Delta–Gap.

2.3.6 Cálculo de los elementos del Vector de las Densidades de Corriente

Para el propósito del trabajo se utiliza el algoritmo del Gradiente Conjugado Cuadrado (CGS), con el objetivo de solucionar el sistema matricial definido en la ecuación (29), precisamente, es un método iterativo que no modifica el sistema matricial original; se basa en calcular productos entre una matriz pre-acondicionada y un vector que es una aproximación del vector solución y que se actualiza en cada iteración reduciendo el vector residual. En la elaboración del algoritmo (CGS) se condiciona un valor residual relativo del orden de 10^{-6} , con el objeto de ser comparado con el residuo relativo calculado en el algoritmo (CGS) y, un número de iteraciones máximo, para que de igual forma, sea comparado con las iteraciones realizadas en el algoritmo (CGS) y evaluar si converge o no en la solución; estos datos están estipulados en el archivo de parámetros iniciales.

Tomando como base el modelo presentado en [3, pág. 56] y [12, pág. 241-244], se genera el algoritmo (CGS) para dar solución al sistema matricial y de esta forma obtener los elementos del vector de las densidades de corriente. Como condiciones iniciales, el vector utilizado como vector solución aproximado es el vector de las densidades de corriente con valor inicial igual a cero, de igual forma, la matriz pre-acondicionada utilizada es la matriz de impedancias; estos valores son sustituidos en las expresiones del algoritmo.

A continuación, se presenta la secuencia de operaciones en el algoritmo (CGS); igualmente, en la figura 20 ilustra el diagrama de flujo que representa la subrutina para calcular los elementos del vector solución.

- $\mathbf{r}_0 = [\mathbf{V}_N] - [\mathbf{Z}_{M \times N}][\mathbf{I}_N]$; $\mathbf{r}_{aux} = \mathbf{r}_0$ Definir un vector residual
- $r_R = ABS(\sqrt{\mathbf{r}_{aux} \cdot \mathbf{r}_{aux}}) / |[\mathbf{V}_N]|$ Definir un residuo relativo inicial
- *para* $i = 1, 2, \dots$, *hasta converger*
- $\rho_{i-1} = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_{aux}$
- *Si* $i = 1$; $\mathbf{p}_1 = \mathbf{u}_1 = \mathbf{r}_0$; $\mathbf{q}_0 = 0$; $\beta_0 = 0$ Definir vectores y escalares auxiliares
- *Si no*; $\beta_{i-1} = \rho_{i-1} / \rho_{i-2}$
- $\mathbf{u}_i = \mathbf{r}_{i-1} + \beta_{i-1} \mathbf{q}_{i-1}$
- $\mathbf{p}_i = \mathbf{u}_i + \beta_{i-1} (\mathbf{q}_{i-1} + \beta_{i-1} \mathbf{p}_{i-1})$
- $\mathbf{P}_p = [\mathbf{Z}_{M \times N}] \mathbf{p}_i$ Primer producto matriz - vector (56)
- $\alpha_i = \rho_{i-1} / (\mathbf{r}_{aux} \cdot \mathbf{P}_p)$
- $\mathbf{q}_i = \mathbf{u}_i - \alpha_i \mathbf{P}_p$
- $\mathbf{S}_p = [\mathbf{Z}_{M \times N}] (\mathbf{u}_i + \mathbf{q}_i)$ Segundo producto matriz -vector
- $[\mathbf{I}_N]_i = [\mathbf{I}_N]_{i-1} + \alpha_i \mathbf{S}_p$ Vector solución
- $\rho_{i-2} = \rho_{i-1}$
- $\mathbf{r}_{aux} = \mathbf{r}_{aux} - \alpha_i \mathbf{S}_p$ Actualización de variables auxiliares
- $r_R = ABS(\sqrt{\mathbf{r}_{aux} \cdot \mathbf{r}_{aux}}) / |[\mathbf{V}_N]|$ Actualización de residuo relativo
- *fin del ciclo*

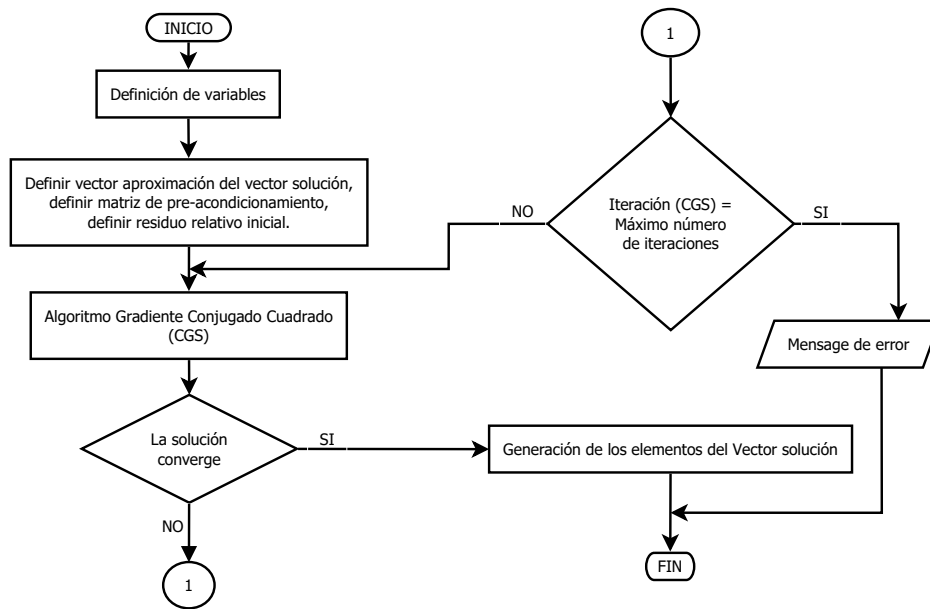


Figura 20. Diagrama de flujo que representa la subrutina para el cálculo de los elementos del vector solución de las Densidades de Corriente.

2.3.7 Cálculo del Campo Eléctrico radiado

Después de obtener el vector de las Densidades de Corriente, se puede calcular el campo eléctrico radiado por la estructura debido a una onda plana incidente o a una fuente de voltaje. En la figura 21 se representa en un diagrama de flujo la subrutina para calcular el campo eléctrico.

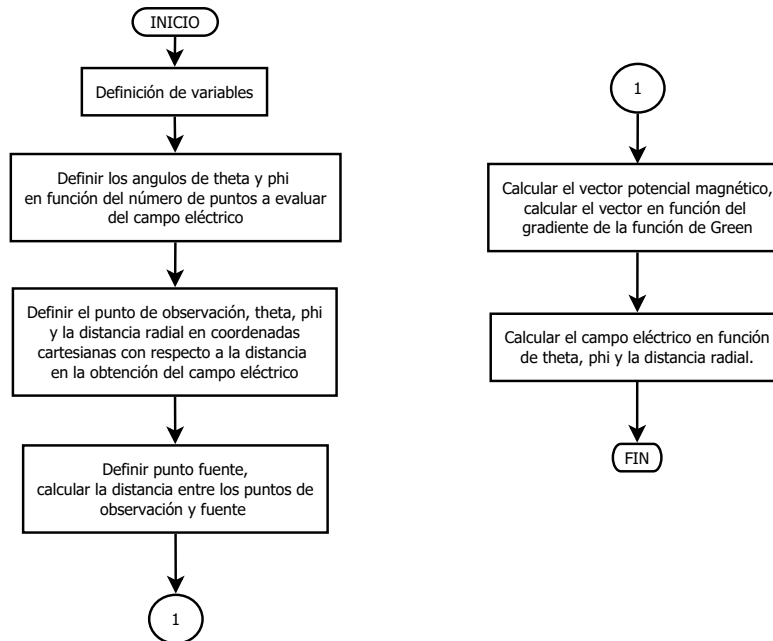


Figura 21. Diagrama de flujo que representa la subrutina para calcular el Campo Eléctrico.

El archivo de parámetros de campo entrega los valores de configuración de los ángulos θ y ϕ , la distancia y el número de puntos en los que será evaluado el campo eléctrico. Se define los valores de los ángulos en unidades de radianes y paso angular con respecto al número de puntos a evaluar, dados como:

$$\begin{aligned} \text{ángulo}_{\theta,\phi} &= \text{Valor}_{cte} * (\pi/180) \\ \text{ángulo}_{\theta,\phi} &= \text{Valor}_{inicial} * (\pi/180) \\ \text{paso}_{angular} &= \frac{\left(\left(\text{valor}_{final} - \text{valor}_{inicial} \right) * \left(\frac{\pi}{180} \right) \right)}{\text{número}_{puntos}} \end{aligned} \quad (57)$$

Luego, con los valores de los ángulos en radianes y la distancia a la que se evalúa el campo eléctrico se obtienen el punto de observación, el vector θ , el vector ϕ y el vector de la distancia radial en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} &\text{Punto de observación} \\ \mathbf{r}_{(1)} &= (\text{distancia a evaluar}) \sin \theta \cos \phi \\ \mathbf{r}_{(2)} &= (\text{distancia a evaluar}) \sin \theta \sin \phi \\ \mathbf{r}_{(3)} &= (\text{distancia a evaluar}) \cos \theta \\ &\text{Vector Theta } (\theta) \\ \widehat{\theta}_{(1)} &= \cos \theta \cos \phi \\ \widehat{\theta}_{(2)} &= \cos \theta \sin \phi \\ \widehat{\theta}_{(3)} &= -\sin \theta \\ &\text{Vector Phi } (\phi) \\ \widehat{\phi}_{(1)} &= -\sin \phi \\ \widehat{\phi}_{(2)} &= \cos \phi \\ \widehat{\phi}_{(3)} &= 0 \\ &\text{Vector distancia radial} \\ \widehat{dist}_{radial(1)} &= \sin \theta \cos \phi \\ \widehat{dist}_{radial(2)} &= \sin \theta \sin \phi \\ \widehat{dist}_{radial(3)} &= \cos \theta \end{aligned} \quad (58)$$

Para obtener el punto fuente y la distancia entre los puntos de observación y fuente, se utilizan las ecuaciones (50) y (14) respectivamente; el vector potencial y el vector con respecto al gradiente de la función de Green y utilizando la regla de Cuadratura Gaussiana se obtienen como:

$$vector_{potencial} = \sum_{q=1}^Q \omega_q \boldsymbol{\rho}_n^{\pm} \frac{e^{-jkR}}{8\pi R} \quad (59)$$

$$vector_{\nabla G(r,r')} = \sum_{q=1}^Q \left(\frac{e^{-jkR}}{4\pi R^2} \right) (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(-jk - \frac{1}{R} \right) \omega_q$$

Donde la distancia R es definida en la ecuación (14), el valor de k es definido en la ecuación (15), el vector $\boldsymbol{\rho}_n^{\pm}$ es definido en la ecuación (27), \mathbf{r}' es el punto fuente definido por la ecuación (50) y \mathbf{r} es el punto de observación definido en la ecuación (58).

Las expresiones para obtener el campo eléctrico están dadas como:

$$\mathbf{E}_{\theta} = \pm \sum_{i=1}^{número_{puntos}} \sum_{j=1}^{número_{funciones-base}} \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_i \cdot \left(vector_{potencial} - vector_{\nabla G(r,r')} \right) \right) * vector_{solución}(j)$$

$$\mathbf{E}_{\phi} = \pm \sum_{i=1}^{número_{puntos}} \sum_{j=1}^{número_{funciones-base}} \left(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_i \cdot \left(vector_{potencial} - vector_{\nabla G(r,r')} \right) \right) * vector_{solución}(j) \quad (60)$$

$$\mathbf{E}_{distradial} = \pm \sum_{i=1}^{número_{puntos}} \sum_{j=1}^{número_{funciones-base}} \left(\widehat{dist}_{radial}_i \cdot \left(vector_{potencial} - vector_{\nabla G(r,r')} \right) \right) * vector_{solución}(j)$$

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

3.1 Cálculo del campo eléctrico radiado por una esfera conductora debido a un campo eléctrico incidente

Como referencia se utiliza un paquete de software con una interfaz gráfica de usuario (GUI) desarrollada en MATLAB® (MIE-SERIES), esta interfaz muestra y guarda los datos calculados del campo eléctrico radiado de una esfera conductora, dieléctrica o quiral, debido a un campo eléctrico incidente [13]. El usuario puede configurar los parámetros de las propiedades de la esfera y de la onda plana incidente polarizada en el eje x y desplazándose en el eje z .

Este paquete de software entrega la solución analítica del problema, por este motivo, se presenta un ejemplo que será utilizado como referencia para el propósito de contrastar los resultados obtenidos con el algoritmo implementado; la interfaz se configura con una esfera conductora de radio de 1 m, la frecuencia de 40 MHz del campo eléctrico incidente; la medición de campo eléctrico radiado es a una distancia de 70 m en función de la componente del campo en E_θ , el número de 100 puntos a medir; la magnitud del campo eléctrico radiado E_θ es calculado sobre un arco definido por $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, y $\phi_0 = 0^\circ$ en coordenadas esféricas; el ángulo ϕ_0 es otro parámetro que el usuario puede configurar. En la figura 22 se muestra esta interfaz.

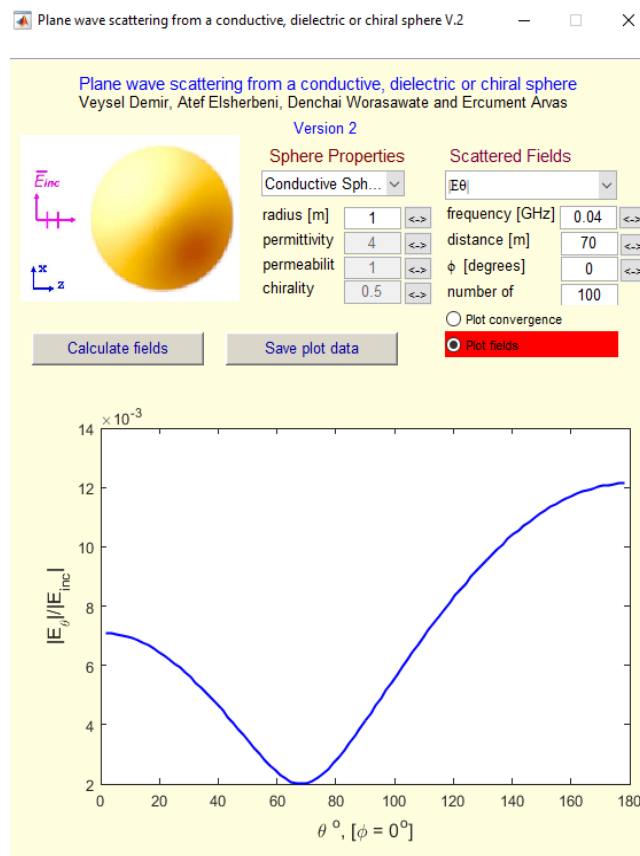


Figura 22. Imagen tomada de [13]. Interfaz gráfica de usuario (GUI), visualiza y salva los datos calculados del campo eléctrico radiado en una esfera PEC, dieléctrica o quiral debido a un campo eléctrico incidente.

Adicionalmente, bajo los mismos parámetros descritos para el software de la interfaz gráfica se realiza la generación del modelo y las simulaciones de la esfera conductora en los modos de operación FEM y MoM en el software HFSS; posteriormente, se procede a implementar el modelo de la esfera con la ayuda del software GID[®], en este mismo software, se realiza la discretización del modelo en celdas triangulares y se genera el archivo en formato plano que contiene la información referente a las coordenadas de los nodos y los nodos asociados a cada celda triangular. En la figura 23 se ilustra el modelo generado en el software GID[®].

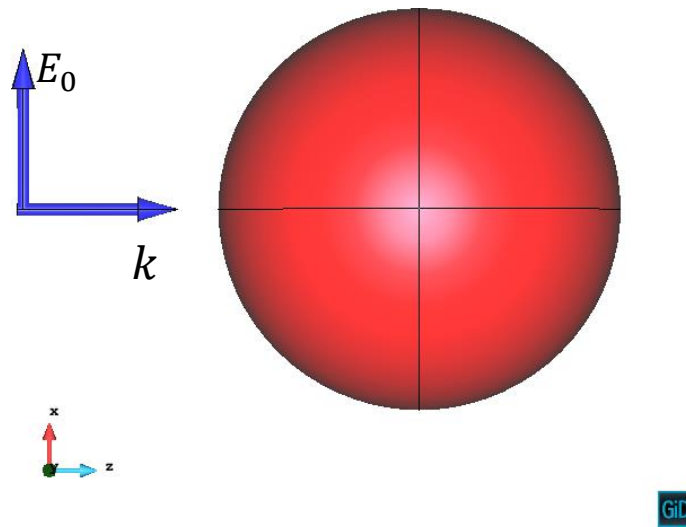


Figura 23. Ilustración del modelo de la esfera generado en el software GID[®].

De igual forma, se utilizan los mismos parámetros de configuración en el archivo que es leído por el algoritmo para calcular el campo eléctrico radiado. Ver figura 24.

Después de ejecutar el algoritmo se genera un archivo en formato plano con los resultados obtenidos; este contiene los siguientes datos: la primera columna define el número de puntos evaluados; la segunda, tercera y cuarta representan el valor real, el imaginario y la magnitud total del campo eléctrico radiado calculado para la esfera conductora. Ver figura 25.

```

Parametersmesh
Sphere.msh          ! File name
1                   ! SOURCE points quadrature rule n = 1, 2, 3, 4, 5
1                   ! TEST points quadrature rule n = 1, 2, 3, 4, 5
.FALSE.             ! flag_type_surface  FALSE= 1 surface, TRUE=2 surface
40e6                ! frequency
1e-6               ! Eps_extraction
0                   ! r_start
1                   ! r_stop
1                   ! r_step
End parametersmesh

ParametersExcitation
0.                  ! kx (input part)
0.                  ! ky
1.                  ! kz (this vector will be normalized)
(1.,0.)            ! Ex
(0.,0.)            ! Ey
(0.,0.)            ! Ez
.FALSE.            ! Activate the Voltage GAP Excitation mode
1.                  ! Voltage GAP Value
2                   ! Label Fed
1e-8               ! Tolerance
20000              ! Max_of_iterations
End parametersExcitation

Parameters Field
1                   ! if 1 (free=theta const=phi); if 2 (free=phi const=theta);
0                   ! const value
0                   ! free init value
180                ! free final value (degrees)
100                ! number of points in the interval
65                 ! radius start (meters)
70                 ! radius stop (meters)
5                  ! radius step
End parametersField

```

Figura 24. Formato del archivo con la información de los parámetros de configuración para calcular el campo eléctrico radiado de una esfera conductora debido a un campo eléctrico incidente.

```

1 -5.8931217047514459E-003 -2.7398580688448851E-003 6.4989003427062186E-003
2 -5.8891252906813230E-003 -2.7363696635861199E-003 6.4938059429841899E-003
3 -5.8771787882662858E-003 -2.7259812291670414E-003 6.4785958487173917E-003
4 -5.8572995113625893E-003 -2.7087109079389510E-003 6.4532993382142041E-003
5 -5.8295163662905915E-003 -2.6845888277320191E-003 6.4179652724857773E-003
.
.
.
96 7.9724253679352378E-003 8.0173887589358502E-003 1.1306550701217779E-002
97 7.9994711476195791E-003 8.0353380308819198E-003 1.1338350669834456E-002
98 8.0205463401102402E-003 8.0493302999542181E-003 1.1363136973196127E-002
99 8.0356364421611346E-003 8.0593630993402356E-003 1.1380895685208397E-002
100 8.0447308994565057E-003 8.0654344805509478E-003 1.1391616593123665E-002

```

Figura 25. Formato del archivo generado por el algoritmo con los datos calculados del campo eléctrico radiado por la esfera conductora.

La figura 26 ilustra una verificación con el paquete de software de la interfaz gráfica (MIE-SERIES, línea azul), en comparación con los resultados numéricos de los valores obtenidos con el algoritmo implementado (línea roja) y los valores obtenidos con el software HFSS en el modo de operación MoM (línea negra) y en el modo de operación FEM (línea verde), los cuales presentan una conformidad aproximada con respecto a los cálculos analíticos exactos.

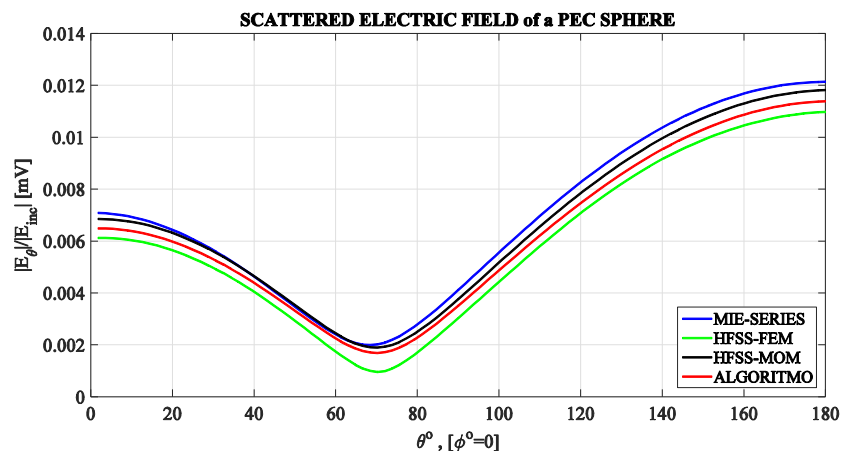


Figura 26. Gráfica de los datos obtenidos del paquete de software (MIE-SERIES), de las simulaciones del software HFSS en los modos de operación FEM y MoM y del algoritmo implementado calculando el campo eléctrico radiado para una esfera conductora debido a un campo eléctrico incidente.

De igual forma, la figura 27 muestra el error relativo de los valores numéricos obtenidos con el algoritmo implementado y los datos de las simulaciones hechas en el software HFSS con respecto a los valores analíticos exactos del paquete de software de la interfaz gráfica (MIE-SERIES); adicionalmente, el error relativo de los resultados numéricos entre el algoritmo implementado y las simulaciones hechas en el software HFSS.

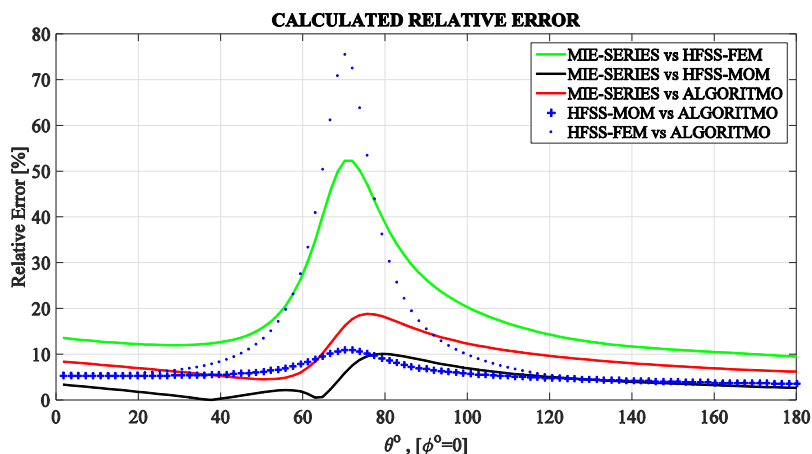


Figura 27. Gráfica que representa el error relativo de los datos obtenidos con el algoritmo y las simulaciones en el software HFSS con respecto a los datos obtenidos con el paquete de software (MIE-SERIES); igualmente, el error relativo de resultados numéricos entre el algoritmo implementado y las simulaciones hechas en el software de HFSS.

En la figura 27 indica un error relativo máximo del 10% en la simulación del software HFSS en el modo de operación MoM, un error relativo máximo del 18.85% con el algoritmo implementado y un error relativo máximo del 50% en la simulación del software HFSS en el modo de operación FEM, con respecto a los valores analíticos exactos del paquete de software (MIE-SERIES); en ese mismo sentido, muestra un error relativo máximo del 11% del algoritmo implementado con respecto a la simulación en el modo de operación MoM y un error relativo del 75.5% del algoritmo implementado con respecto a la simulación en el modo de operación FEM.

En la figura 28 se presentan graficas que muestran la convergencia de los resultados obtenidos con algoritmo implementado al incrementar el número de elementos que discretizan el modelo de la esfera del orden de $\lambda/5$ con 166 nodos y 328 elementos, de $\lambda/10$ con 570 nodos y 1136 elementos y de $\lambda/20$ con 1890 nodos y 3776 elementos, así mismo, el error relativo máximo del 19% con $\lambda/5$, el error relativo máximo del 10% con $\lambda/10$ y el error relativo máximo del 7.8% con $\lambda/20$, todos ellos con respecto al paquete de software de la interfaz gráfica (MIE-SERIES).

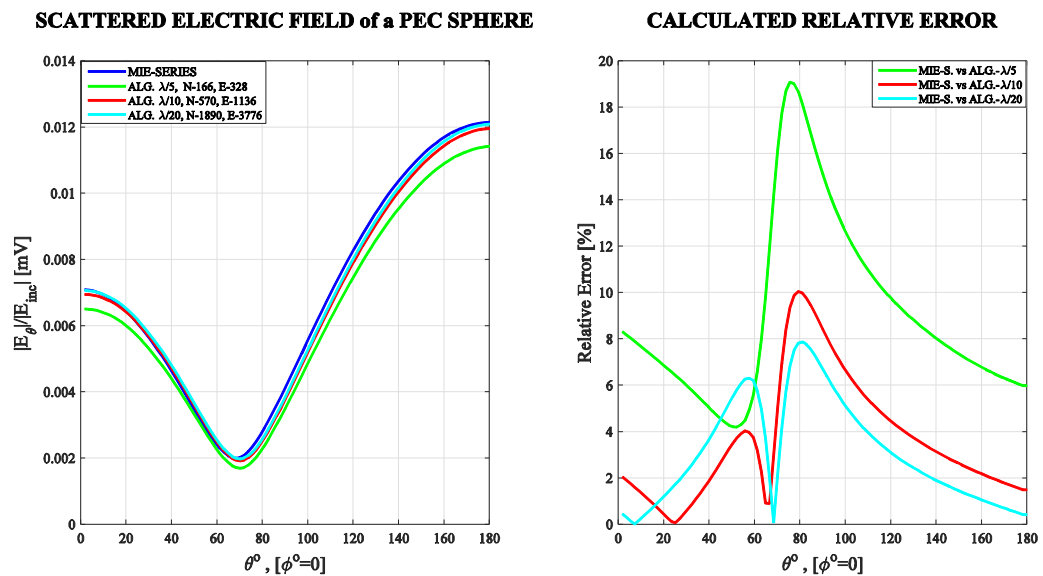


Figura 28. Gráfica que muestra la convergencia de los resultados obtenidos con el algoritmo implementado al incrementar el número de elementos que discretizan el modelo de la esfera del orden de $\lambda/5$, $\lambda/10$ y $\lambda/20$, adicionalmente, el error relativo con respecto al paquete de software de la interfaz gráfica (MIE-SERIES)

En la figura 29 se presentan la gráficas de los resultados obtenidos con el algoritmo implementado en la elección de una discretización del orden de $\lambda/5$ del modelo de la esfera y el aumento de los puntos de evaluación en la integración numérica de la regla de cuadratura Gaussiana del orden de $n=1$, $n=3$ y $n=5$, igualmente, el error relativo máximo del 19% al utilizar la regla de cuadratura del orden $n=1$, el error relativo máximo del 17.7% al utilizar la regla de cuadratura en el orden de $n=3$ y el error relativo máximo del 17.6% al utilizar la regla de cuadratura de orden $n=5$ con respecto al paquete de software de la interfaz gráfica (MIE-SERIES).

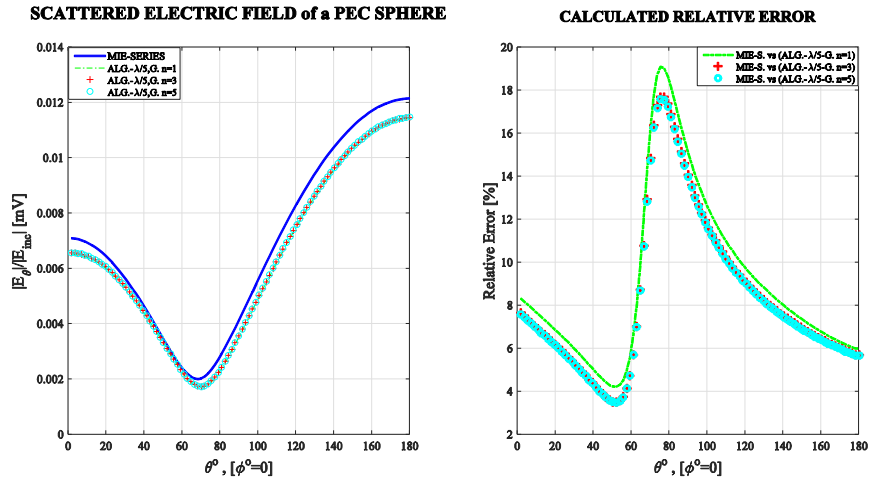


Figura 29. Graficas que representan los resultados obtenidos con el algoritmo implementado en la elección de una discretización del modelo de la esfera del orden de $\lambda/5$ y el aumento en el número de puntos a evaluar con la integración numérica en la regla de cuadratura Gaussiana del orden de $n=1$, $n=3$ y $n=5$, igualmente, el error relativo con respecto al paquete de software de la interfaz gráfica (MIE-SERIES)

En la figura 30 se presentan las gráficas de los resultados obtenidos con el algoritmo implementado en la elección de una discretización de una esfera del orden de $\lambda/20$ y el aumento en los puntos de evaluación en la integración numérica con la utilización de la regla de cuadratura Gaussiana en el orden de $n=1$, $n=3$ y $n=5$, de igual forma, el error relativo máximo del 7.8% al utilizar la regla de cuadratura en el orden de $n=1$, $n=3$ y $n=5$ con respecto al paquete de software de la interfaz gráfica (MIE-SERIES).

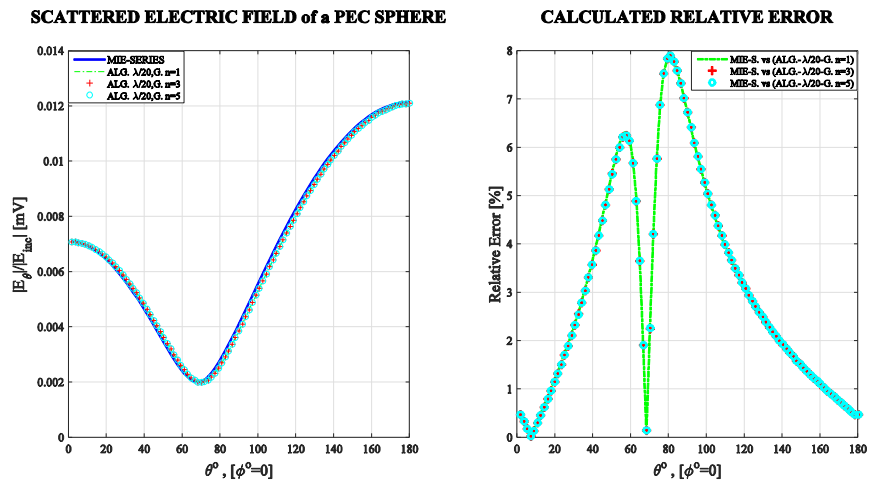


Figura 30. Graficas que representan los resultados obtenidos con el algoritmo implementado en la elección de una discretización del modelo de la esfera del orden de $\lambda/20$ y el aumento en el número de puntos a evaluar con la integración numérica en la regla de cuadratura Gaussiana del orden de $n=1$, $n=3$ y $n=5$, igualmente, el error relativo con respecto al paquete de software de la interfaz gráfica (MIE-SERIES)

3.2 Cálculo del campo eléctrico radiado por un dipolo planar debido a un campo eléctrico incidente y debido a la excitación de una fuente de voltaje entre las terminales del dipolo

Para el diseño del dipolo planar se toma las siguientes características; la frecuencia de operación es de 300 MHz, la longitud del dipolo planar será de $\lambda/2$, el ancho del dipolo planar es $1/20$ de la longitud del mismo; con estos datos se realiza el modelo en el software GID[®], ver figura 31; adicionalmente, con la ayuda de una herramienta del software se identifica cada brazo del dipolo planar con un color y un número, luego se procede a la discretización del modelo, por último se genera el archivo con la información de las coordenadas de los nodos y los nodos asociados a cada celda triangular; por lo tanto, el número que ayuda a identificar cada brazo del dipolo estará de forma paralela a la lista de los nodos asociados a cada celda triangular dentro del archivo generado por el software.

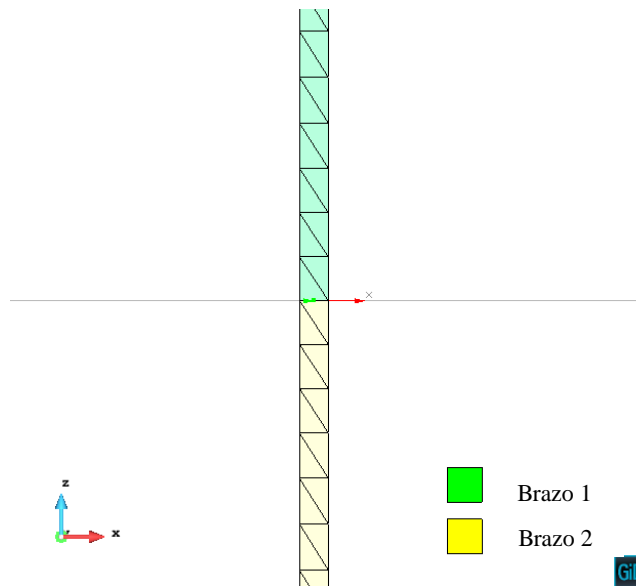


Figura 31. Modelo del dipolo planar generado por el software GID[®].

En la figura 32 se ilustra parte del archivo generado por el software GID[®] en la que se muestra la ubicación del número que se utiliza para identificar cada brazo del dipolo planar; la primera columna identifica el elemento o celda triangular, la segunda, tercera y cuarta columna identifica los nodos asociados a cada elemento, la quinta columna es el número que identifica los elementos asociados a cada brazo del dipolo planar; siendo así, que los elementos desde el 1 hasta el 114 están asociados al número 1 identificando el brazo superior del dipolo planar y los elementos desde el 115 hasta el 228 están asociados al número 2, que identifican el brazo inferior del dipolo planar mostrado en la figura 31.

```

Elements
1 230 229 227 1
2 115 116 117 1
. . . . .
. . . . .
114 172 171 173 1
115 116 115 114 2
. . . . .
. . . . .
227 57 55 58 2
228 57 58 60 2
End Elements

```

Figura 32. Parte del formato del archivo generado por el software GID®, se visualiza la lista de los elementos y los nodos asociados a cada uno de ellos, adicionalmente, el número que identifica los elementos asociados a cada brazo del dipolo planar.

Este número será utilizado para identificar los elementos que son adyacentes y su relación con respecto a cada uno de los brazos en el dipolo planar; de esta forma, se identifica la ubicación en la que será implementada la fuente de voltaje.

Igualmente, se genera los modelos y simulaciones en los modos de operación FEM y MoM en el software HFSS; en primera instancia, se calcula el campo eléctrico radiado por el dipolo planar debido a un campo eléctrico incidente; luego se calcula el campo eléctrico radiado debido a la conexión de una fuente de voltaje entre las terminales del dipolo planar, con los datos obtenidos y la información de los parámetros del dipolo planar se escriben y modifican los datos en el archivo de configuración de parámetros que lee el algoritmo. Estas modificaciones en el archivo se muestran en la figura 33 y 34 respectivamente. En la figura 34 se muestra una parte del archivo que necesita ser modificada en la que activa los parámetros para la fuente de voltaje y de esta forma calcular el campo eléctrico radiado.

```

Parametersmesh
dipole300MHz.msh      ! File name
1                    ! SOURCE points quadrature rule n = 1, 2, 3, 4, 5
1                    ! TEST points quadrature rule n = 1, 2, 3, 4, 5
. TRUE.              ! flag_type_surface  FALSE= 1 surface, TRUE=2 surface
300e6                ! frequency
1e-6                 ! Eps_extraction
0                    ! r_start
1                    ! r_stop
1                    ! r_step
End parametersmesh

ParametersExcitation
1.                   ! kx (input part)
0.                   ! ky
0.                   ! kz (this vector will be normalized)
(0.,0.)              ! Ex
(0.,0.)              ! Ey
(1.,0.)              ! Ez
. FALSE.             ! Activate the Voltage GAP Excitation mode
1.                   ! Voltage GAP Value
2                    ! Label Fed
1e-8                 ! Tolerance
20000                ! Max_of_iterations
End parametersExcitation

Parameters Field
2                    ! if 1 (free=theta const=phi); if 2 (free=phi const=theta);
0                    ! const value
0                    ! free init value
360                  ! free final value (degrees)
100                  ! number of points in the interval
0                    ! radius start (meters)
1                    ! radius stop (meters)
1                    ! radius step
End parametersField

```

Figura 33. Formato del archivo con la información de los parámetros de configuración para calcular el campo eléctrico radiado de un dipolo planar debido a un campo eléctrico incidente.

```

. TRUE.              ! Activate the Voltage GAP Excitation mode
1.                   ! Voltage GAP Value
2                    ! Label Fed

```

Figura 34. Ilustración de una parte del formato del archivo en la que necesita ser modificada para calcular y el campo eléctrico radiado por el dipolo planar debido a la excitación de una fuente de voltaje.

De igual forma, después de ejecutar el algoritmo se genera un archivo que contiene los datos del campo eléctrico radiado por el dipolo planar debido a un campo eléctrico incidente polarizado en el eje z y desplazándose en el eje x, el arco para el plano E está definido con $\theta = 0^\circ$ y $0 \leq \theta \leq 360^\circ$; luego en otra ejecución del algoritmo se calcula el campo eléctrico radiado por el dipolo planar debido a la excitación de una fuente de voltaje entre las terminales del dipolo; de igual forma, el arco para el plano H está definido con $\theta = 90^\circ$ y $0 \leq \theta \leq 360^\circ$; el formato de estos archivos es igual al generado en los cálculos para la esfera.

Los datos obtenidos de la magnitud del campo eléctrico radiado debido a una onda plana incidente en las componentes de E_θ y E_ϕ en plano E y en el plano H son graficados y se muestran en las figuras 35 y 36 respectivamente.

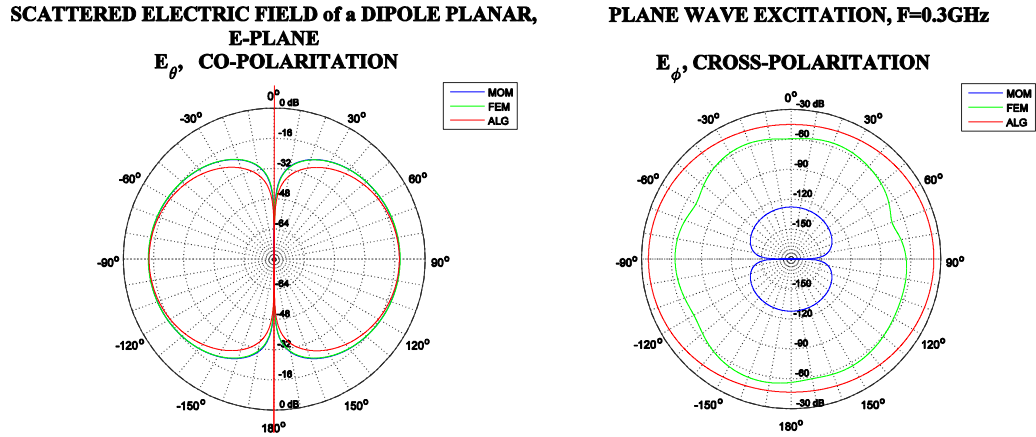


Figura 35. Gráfica de los datos obtenidos del campo eléctrico radiado en el plano E en las componentes E_θ y E_ϕ por un dipolo planar debido a un campo eléctrico incidente del algoritmo implementado y de las simulaciones con el software HFSS

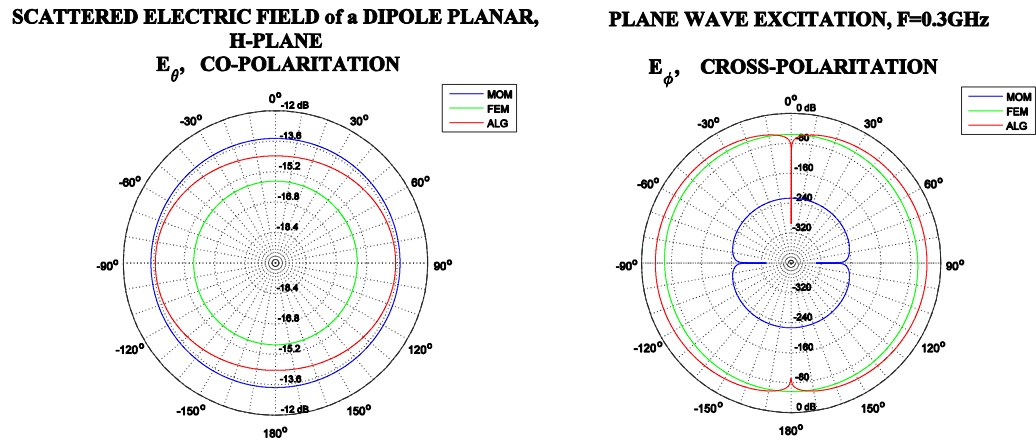


Figura 36. Gráfica de los datos obtenidos del campo eléctrico radiado en el plano H en las componentes E_θ y E_ϕ por un dipolo planar debido a un campo eléctrico incidente del algoritmo implementado y de las simulaciones con el software HFSS

En las figuras 35 y 36 indican similar conformidad entre los resultados numéricos obtenidos con el algoritmo implementado y la simulación hecha en el software HFSS en el modo de operación MoM.

Los datos obtenidos de la magnitud del campo eléctrico radiado debido a la excitación de una fuente de voltaje en las terminales del dipolo planar en las componentes de E_θ y E_ϕ en el plano E y en el plano H se muestran en las figuras 37 y 38 respectivamente.

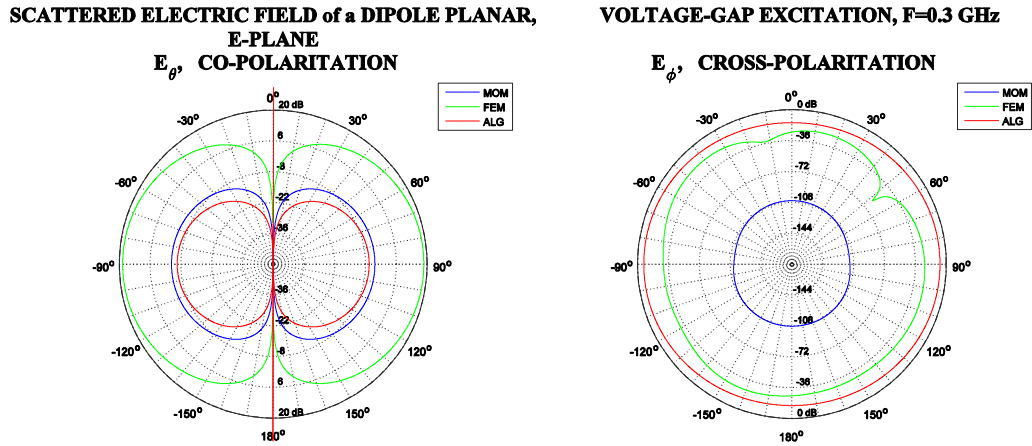


Figura 37. Gráfica de los datos obtenidos del campo eléctrico radiado en el plano E en las componentes E_θ y E_ϕ por un dipolo planar debido a una fuente de voltaje entre las terminales del dipolo del algoritmo implementado y de las simulaciones con el software HFSS

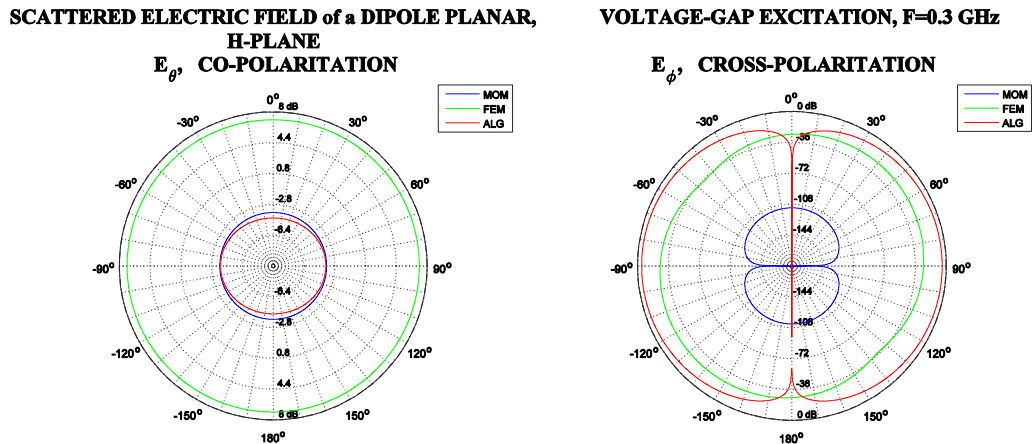


Figura 38. Gráfica de los datos obtenidos del campo eléctrico radiado en el plano H en las componentes E_θ y E_ϕ por un dipolo planar debido a una fuente de voltaje entre las terminales del dipolo del algoritmo implementado y de las simulaciones con el software HFSS

En las figuras 37 y 38 indican similar conformidad entre los resultados numéricos obtenidos con el algoritmo implementado y la simulación hecha en el software HFSS en el modo de operación MoM.

3.3 Cálculo del campo eléctrico radiado por una antena impresa debido a un campo eléctrico incidente

Se toma una antena impresa con línea de alimentación diseñada para trabajar a 10 GHz, en la simulación del algoritmo solo se toman las superficies conductoras como es la antena impresa y el plano de tierra, el sustrato entre las superficies no se tiene en cuenta. En la figura 39 se ilustra el modelo y su respectiva discretización de la antena impresa y del plano de tierra generados en el software GiD[®]. La información en el archivo de configuración de los parámetros iniciales para calcular el campo eléctrico radiado de la antena impresa debido a un campo eléctrico incidente se ilustra en la figura 40. El campo eléctrico incidente está polarizado en el eje x y su desplazamiento en el eje z, el arco en el plano E está definido por $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, y $\phi = 0^\circ$, del mismo modo, el arco en el plano H está definido por $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$, y $\theta = 90^\circ$ en coordenadas esféricas y es medido a una distancia de 1 metro.

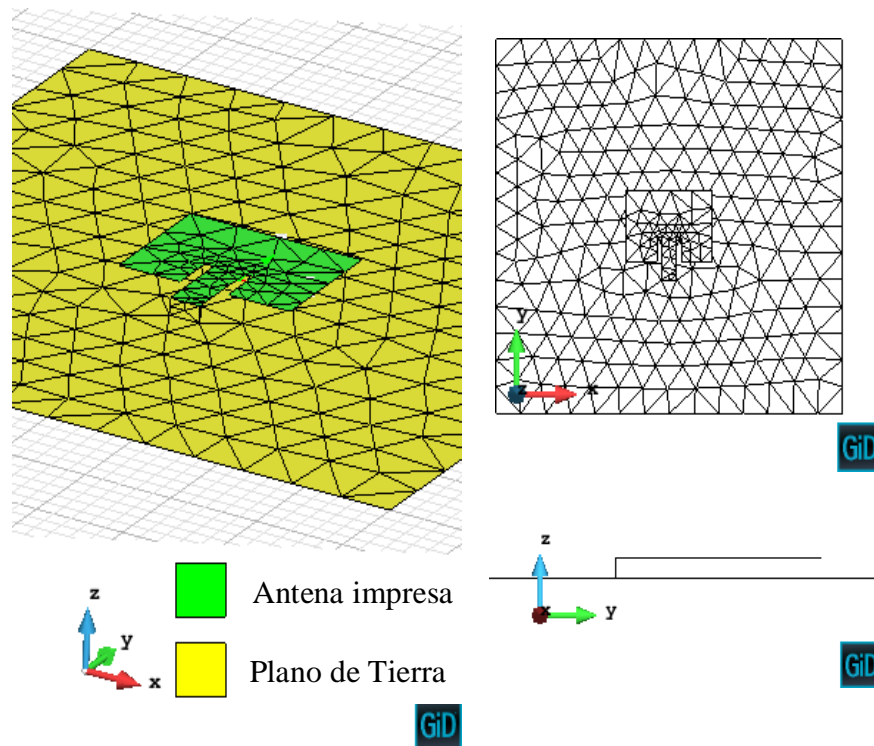


Figura 39. Modelo de la antena impresa y el plano de tierra generados en el software GiD[®].

De igual forma, después de ejecutar el algoritmo se genera un archivo que contiene los datos del campo eléctrico radiado por la antena impresa debido a un campo eléctrico incidente, el formato del archivo es igual al generado en los cálculos para la esfera; los datos obtenidos de la magnitud del campo eléctrico radiado en las componentes de E_θ y E_ϕ en los planos E y H se muestran en las figuras 41 y 42 respectivamente.

```

Parametersmesh
patch.msh          ! File name
1                 ! SOURCE points quadrature rule n = 1, 2, 3, 4, 5
1                 ! TEST points quadrature rule n = 1, 2, 3, 4, 5
.TRUE.           ! flag_type_surface  FALSE= 1 surface, TRUE=2 surface
10e9              ! frequency
1e-6              ! Eps_extraction
0                 ! r_start
1                 ! r_stop
1                 ! r_step
End parametersmesh

ParametersExcitation
0.                ! kx (input part)
0.                ! ky
1.                ! kz (this vector will be normalized)
(1.,0.)           ! Ex
(0.,0.)           ! Ey
(0.,0.)           ! Ez
.FALSE.           ! Activate the Voltage GAP Excitation mode
1.                ! Voltage GAP Value
2                 ! Label Fed
1e-8              ! Tolerance
20000             ! Max_of_iterations
End parametersExcitation

Parameters Field
2                 ! if 1 (free=theta const=phi); if 2 (free=phi const=theta);
0                 ! const value
0                 ! free init value
360               ! free final value (degrees)
100               ! number of points in the interval
0                 ! radius start (meters)
1                 ! radius stop (meters)
1                 ! radius step
End parametersField

```

Figura 40. Formato del archivo con la información de los parámetros de configuración para calcular el campo eléctrico radiado de una antena impresa debido a un campo eléctrico incidente.

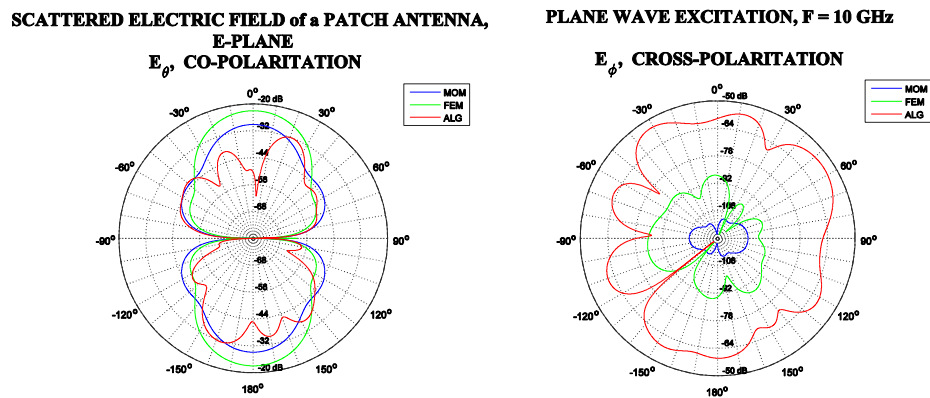
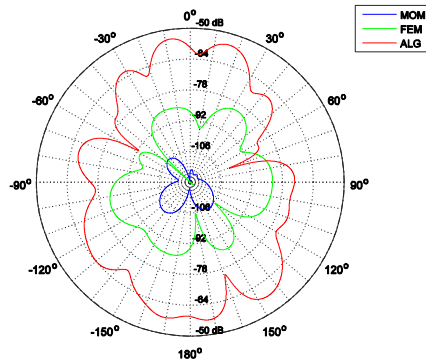


Figura 41. Gráfica del campo eléctrico radiado en el plano E en las componentes de E_θ y E_ϕ por la antena impresa debido a un campo eléctrico incidente

**SCATTERED ELECTRIC FIELD of a PATCH ANTENNA,
H-PLANE
 E_{θ} , CO-POLARITATION**



PLANE WAVE EXCITATION, F = 10 GHz

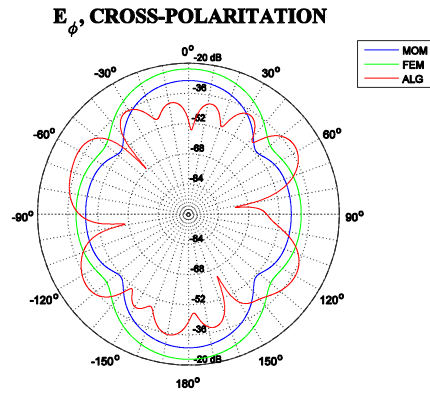


Figura 42. Gráfica del campo eléctrico radiado en el plano H en las componentes E_{θ} y E_{ϕ} por una antena impresa debido a un campo eléctrico incidente

En las figuras 41 y 42 ilustran que no existe conformidad entre los resultados numéricos obtenidos entre el algoritmo implementado y las simulaciones en los modos de operación FEM y MoM del software HFSS.

4. CONCLUSIONES

En el proceso de la implementación del algoritmo se logra cumplir el objetivo de conocer y aprender de una manera más detallada y metódica los pasos que siguen las herramientas de simulación en determinar y/o predecir con una excelente aproximación los valores que representan los fenómenos electromagnéticos en casos reales.

Para trabajos futuros se propone evaluar y contrastar otros métodos de solución del sistema matricial; la razón es que el algoritmo CGS presentaba estancamiento o no llegaba a converger en la solución y esto se debía al aumento en la discretización del modelo en una mayor cantidad de elementos.

En el trabajo no se presentan ejemplos con materiales dieléctricos como se había propuesto en un principio en el anteproyecto, la razón es que no se alcanzó a realizar la formulación de las expresiones matemáticas para el análisis de este tipo de materiales; queda como propuesta la revisión y/o modificación en la formulación del problema para este tipo de materiales en trabajos futuros; adicionalmente, mejorarlo con técnicas de inteligencia computacional.

Se aclara que los resultados obtenidos de la impedancia característica del dipolo planar con las formulas dadas en el libro [3, pág. 178, Ec. (7.63) y (7.64)] no presentan resultados satisfactorios. Igualmente, los resultados donde se gráfica el vector de las densidades de corriente multiplicados por las funciones base como lo ilustra la ecuación (25) para mostrar la distribución de corriente a lo largo de la estructura del dipolo planar, no se obtiene resultados satisfactorios. (Ver anexo).

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Fink D. y Christiansen D., (1992), *Manual de Ingeniería Electrónica*, Volumen I Fundamentos Para la Ingeniería Electrónica, Edit. Mc Graw Hill, (pp. 1-43).
- [2] Sadiku M., (2010), *Elementos de Electromagnetismo*, Tercera edición. Edit. Alfaomega. (pp. 660).
- [3] Gibson W., (2008), *The Methods of Moments in Electromagnetics*, New York, London, Edit. Chapman and Hall/CRC
- [4] Bansal R., (2006), *Engineering Electromagnetics - Applications*, Edit. Taylor and Francis Group. Chapter 5.
- [5] Ramesh G., (2008), *Analytical and Computational Methods in Electromagnetics*, Edit. Artech House. Chapter 1. (pp. 21-26).
- [6] Sadasiva R., Donald W. y Allen G., (1982), Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation. Vol. AP (30)*, 409-418.
- [7] Carvajal G., Duque D. y Zozaya A., (2009), Electromagnetic Scattering by Conductive Objects of Arbitrary: Solution in the Frequency Domain and the Radar Cross Section Estimation. *FARAUTE Ciens. Y Tec. 3(2)*, 1698-7418.
- [8] Cardama A., Jofre L., Rius J., Romeu J., Blanch S. y Ferrando M., *Antenas*. Edit. Alfaomega. Segunda Edición. Capítulo 8.
- [9] Järvenpää S., Taskinen M. y Ylä-Oijala P. (2003), Singularity extraction technique for integral equation methods with higher order basis functions on plane triangles and tetrahedra, *International Journal for Numerical Methods in Engineering, Int. J. Numer. Meth. Engng 58*: 1149-1165.
- [10] Chapman Stephen J., (2008), *Fortran 95/2003 for Scientists and Engineers*, Edit. Mc Graw Hill – Higher Education, Third Edition.
- [11] The Personal pre and post processor, (2016), GiD®: Graphical Interface Desing, CIMNE, Recuperado de <http://www.gidhome.com>.
- [12] Saad Y., (2003), *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Recuperado de http://www.users.cs.umn.edu/~saad/IterMethBook_2ndEd
- [13] Demir V., Elsherbeni A., Worasawate D. y Arvas E., A Graphical User Interface (GUI) for Plane Wave Scattering from a Conducting, Dielectric or a Chiral Sphere.
- [14] Hussein K. F. A., (2012), Accurate Representation of Excitation and Loading for Arbitrarily Shaped Antennas Composed of Conducting Surfaces in the Method of Moments, *Progress in Electromagnetics Research B, Vol. 36*, 151-171.

6. ANEXOS

6.1 Anexo Cálculo de la Impedancia Característica del Dipolo Planar.

Se presenta información de procedimientos realizados para calcular la impedancia característica de entrada en el dipolo planar, en los cuales no se lograron obtener resultados satisfactorios para ser presentados en el capítulo 3 de los resultados numéricos.

A continuación, se muestra en la tabla 1 los datos obtenidos del cálculo de la impedancia característica del dipolo planar realizados en la simulación en el software MATLAB® y por las simulaciones en el software HFSS en los modos de operación FEM y MoM.

Método	Valor real [Ω]	Valor imaginario [Ω]
Software MATLAB®	86.78	50.43
MoM - HFSS	84.3511	46.6417
FEM - HFSS	106.98	80.7765

Tabla 1. Datos obtenidos del cálculo de la impedancia característica de un dipolo planar de longitud de $\lambda/2$, y el ancho definido como $1/20$ de la longitud del dipolo a una frecuencia de operación de 300 MHz en las simulaciones de los softwares HFSS y MATLAB®

Partiendo de la información anterior que será utilizada como referencia y en base a la información entregada en [3, pág. 176-178, Ec. (7.63) y (7.64)], con los datos obtenidos del algoritmo configurado en el modo de excitación con una fuente de voltaje, se procede a obtener la impedancia característica del dipolo planar a partir de la siguiente expresión:

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = \frac{V_{in}}{l_n a_n} \quad (61)$$

Donde Z_{in} es la impedancia característica de entrada, V_{in} es el valor de la fuente de voltaje, usualmente se asigna el valor de uno; I_{in} es la corriente de entrada la cual es continua a través del lado l_n y constante a lo largo del mismo; está definida como $l_n a_n$ donde l_n es la longitud del lado común entre celdas triangulares adyacentes donde se aplica el voltaje y a_n son los elementos del vector solución que representan la densidad de corriente que fluye a través del lado n . En la tabla 2 se presenta el valor obtenido de la impedancia característica del dipolo planar con los valores obtenidos en el algoritmo de los elementos del vector de corriente.

Método	Valor real [Ω]	Valor imaginario [Ω]
Algoritmo - Vgap	37174.72	8159.43

Tabla 2. Valor de la impedancia característica del dipolo planar calculada con los valores obtenidos del vector de corriente y luego siendo sustituidos en la ecuación (61)

Luego se utiliza el procedimiento propuesto en [14] que consiste en aumentar la discretización en la zona donde se aplica el voltaje de excitación y de esta forma obtener impedancias características parciales para luego sumarlas en forma paralela.

A continuación, se presenta en la figura 43 el modelo del dipolo planar con la nueva configuración en el aumento de la discretización en la zona donde se aplica el voltaje de excitación.

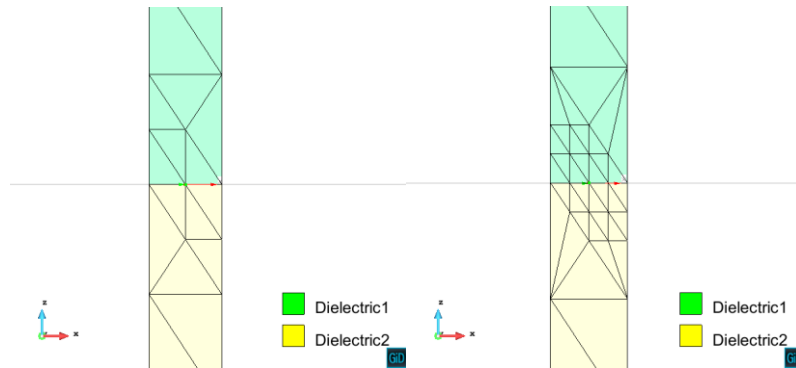


Figura 43. Las Gráficas muestran el aumento de la discretización en la zona donde se aplica el voltaje de excitación del modelo del dipolo planar referenciado en la figura 28.

En la tabla 3 se presentan los datos obtenidos calculando las impedancias características parciales, para luego sumarlas en forma paralela y así obtener la impedancia característica total del dipolo planar. En la configuración con el modelo de cuatro pares de celdas triangulares adyacentes no se obtienen resultados debido al estancamiento en el algoritmo del gradiente conjugado cuadrado, que se utiliza para resolver el sistema matricial en la ejecución del algoritmo implementado

Modelo	Valor real [Ω]	Valor imaginario [Ω]
Valor parcial – referido al modelo de dos pares de celdas triangulares adyacentes	10714.094	12449.23
Valor total – cálculo del paralelo	5357.047	6224.61

Tabla 3. Valor de la impedancia característica calculada con los valores obtenidos del vector de corriente y luego siendo sustituidos en la ecuación (61) del nuevo modelo del dipolo planar presentando una mayor discretización en la zona en donde es aplicado el voltaje de excitación

En los resultados mostrados en las tablas se pueden observar errores relativos muy grandes en los datos obtenidos con el algoritmo implementado con respecto a los datos proporcionados por las simulaciones en MATLAB[®] y en los modos de operación FEM y MoM del software HFSS.

6.2 Anexo Cálculo de la Distribución de Corriente sobre la estructura del Dipolo Planar.

En el siguiente anexo se presenta información de procedimientos realizados para calcular la distribución de corriente a lo largo de la estructura en el dipolo planar, en los cuales no se lograron obtener resultados satisfactorios para ser presentados en el capítulo 3 de los resultados numéricos.

Tomando los coeficientes del vector solución que a su vez representan las densidades de corriente se multiplica por las funciones base como se ilustra en la ecuación (25) y de esta forma obtener la distribución de corriente a lo largo de la estructura del dipolo planar; asumiendo que es de longitud $\lambda/2$ su valor máximo estará representado en el centro del dipolo donde se está excitando con una fuente de voltaje y se va desvaneciendo hacia los extremos de los brazos del dipolo hasta llegar a cero. En la figura 44 una gráfica representa la distribución de corriente a lo largo de la estructura del dipolo planar en contraste con los datos obtenidos de la distribución de corriente en la simulación del dipolo planar utilizando el toolbox de antenas en MATLAB®.

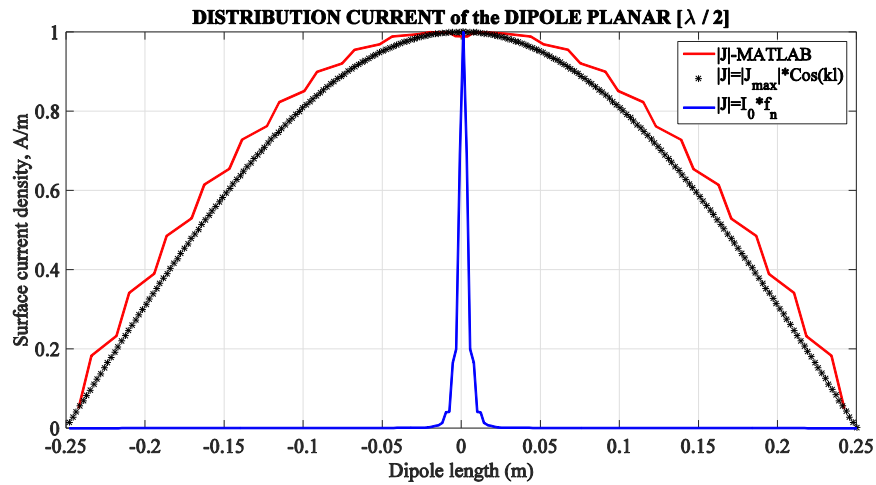


Figura 44. Gráfica de la distribución de corriente a lo largo de la estructura del dipolo planar.

Para determinar la distribución de corriente a lo largo y ancho de la estructura del dipolo planar se utiliza la siguiente expresión para definir las coordenadas de los puntos por una razón dada que dividen la recta que está delimitada por los nodos de evaluación:

$$(x, y, z) = \frac{V1_{(x,y,z)} + r_d * V2_{(x,y,z)}}{1 + r_d} \quad (62)$$

Donde $V1_{(x,y,z)}$ y $V2_{(x,y,z)}$ son los nodos que especifican el lado común y r_d es la razón dada para determinar puntos entre los nodos.

La ecuación (63) especifica la forma de calcular la distribución de corriente eléctrica a lo largo del dipolo planar graficado con asteriscos en la figura 41; tomando solo el valor máximo de las densidades de corriente presentado en el centro del dipolo debido a la excitación de la fuente de voltaje:

$$|J| = |J_{max}| * \cos kl \quad (63)$$

Donde $|J|$ representa la magnitud de la distribución de corriente a lo largo de la estructura del dipolo planar, $|J_{max}|$ representa el valor máximo de la densidad de corriente en el punto medio de la estructura del dipolo planar donde se aplica la fuente de voltaje, k es el número de onda definido en la ecuación (15) y l representa la longitud del dipolo.