STEVE ALLAN RUSSELL

ANÁLISIS EXEGÉTICO DE LAS EPISTEMES PITAGÓRICO-EUCLIDIANAS: HACIA UNA ONTOLOGÍA Y UNA EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

Facultad de Filosofía

31 de julio del 2017

ANÁLISIS EXEGÉTICO DE LAS EPISTEMES PITAGÓRICO-EUCLIDIANAS: HACIA UNA ONTOLOGÍA Y UNA EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS

Tesis Doctoral presentada por Steve Allan Russell, bajo la dirección del Profesor Francisco Sierra Gutiérrez, Ph.D., como requisito parcial para optar al título de Doctor en Filosofía

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

Facultad de Filosofía

Bogotá, 31 de julio de 2017

Bogotá, D.C., julio 7 de 2017

Doctor

DIEGO A. PINEDA R., Ph.D.

Decano

Facultad de Filosofía

Pontificia Universidad Javeriana

Ciudad

Apreciado Doctor Pineda:

Me complace sobremanera presentar ante Usted y, por su intermedio a la Facultad, la Tesis Doctoral en Filosofía: ANÁLISIS EXEGÉTICO DE LAS EPISTEMES PITAGÓRICO-EUCLIDIANAS: HACIA UNA ONTOLOGÍA Y UNA EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS, elaborada por el Señor: STEVE ALLAN RUSSELL, como requisito para recibir el título de Doctor en Filosofía.

El autor analiza de manera exegética, hermenéutica, histórica y crítica las nociones fundacionales de dos de los principales matemáticos de la Antigua Grecia: Pitágoras y Euclides. A lo largo de esta investigación, se expone el carácter ontológico y epistemológico que tales nociones implican, siendo este el producto de la reflexión filosófica del autor, la cual se constituye en un valioso aporte al campo de la Filosofía de las Matemáticas, en especial y, al de la Historia de la Filosofía Antigua, en general, y en lengua castellana.

Atestiguo, además, con esta, la seriedad, constancia, capacidad investigativa y crítica filosóficas del Señor Steve A. Russell, en esta su Tesis Doctoral.

De Usted, muy cordialmente,

Francisco S.

Francisco Sierra Gutiérrez, Ph.D.

Director

A

Mis padres

Enrique y María Luisa

Con todo mi amor

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi profunda gratitud a Francisco Sierra Gutiérrez, Ph.D. quien siempre confió en mí a lo largo de todos estos años, apoyándome de manera solícita e incondicional. Sin su consentimiento, la presente tesis no se hubiera realizado. Nuestra amistad y afecto han sido los pilares que han guiado esta tesis.

Deseo expresar mi gratitud a Carlos Eduardo Vasco Uribe, Ph.D. quien ha sido mi mentor a lo largo de los años, siempre estuvo dispuesto a escucharme y leer parte del material. Guardo con él las mismas pasiones por el tema que tanto nos une.

Mi contacto con el idioma griego antiguo se dio gracias a Georgia Kaltsidou, gracias a ella pude comprender y experimentar de primera mano la riqueza de los textos, en especial trabajamos muy de cerca a Tales de Mileto y Pitágoras de Samos. A ambos nos une el amor hacia la cultura clásica griega como el pilar sobre el cual se construyó todo Occidente y parte de Oriente.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Esta tesis expone un *Análisis exegético filosófico-matemático de las epistemes pitagórico-euclidianas*. El propio título nos indica que la tesis va surgiendo de la actividad exegética de los textos griegos estudiados: sin tal labor, hubiera sido imposible haber elaborado cualquier tipo de propuesta. La pobreza y la imprecisión de las traducciones hacen que se pierda gran parte de la riqueza guardada en los textos, en especial, cuando se sale de la propia lengua de origen de los mismos. Esto conlleva asumir un análisis cuidadoso no solo de los términos de referencia sino de los sinónimos relacionados con los mismos. El presente texto cae en el campo de lo que podríamos denominar filosofía de las matemáticas, el cual es un género bien específico que combina el método y la reflexión filosófica con el contenido propio de las matemáticas. El terreno donde ambas disciplinas se encuentran es el de la génesis de las nociones primitivas que fundamentan el quehacer matemático. Se ha querido denominar '*epistemes*' a estos inderivables filosófico-matemáticos que están situados en la parte más profunda desde donde se construyen las distintas disciplinas conocidas como la aritmética, la geometría y el álgebra, entre otras. Dado que la práctica especificada tanto de la filosofía como de la matemática se remonta a Pitágoras, quien fue el primero en llamar filósofo a quienes practicaban un estilo de vida en una comunidad sujeta a prácticas de iniciación, a su vez, fue también el primero en identificar el ejercicio de ser matemático con la maestría en la enseñanza: para alcanzar ambos cometidos se sirven de las metodologías propias de las disciplinas formales y artísticas. Dado que se requería estudiar textos completos en griego del campo del que se ocupa esta tesis, se ha escogido la obra de mayor impacto en toda la historia de las matemáticas: *Los Elementos* de Euclides, y el punto focal ha sido el análisis de los libros 1.1, 1.2, 1.3 y 7.1, que versan sobre las nociones primitivas o las epistemes propias tanto de la filosofía como de la matemática. El reconocimiento de estos nocionales fundamentales, asimismo, el discurso y método que se desprende de los mismos, es lo que va a constituir el producto de esta tesis.

La tesis está dividida en cinco capítulos: el primero versa sobre los orígenes más antiguos de la filosofía y la matemática en los griegos, para lo cual se ha escogido a Tales de Mileto y Pitágoras de Samos como sus representantes más visibles. Hay que situarse en aquella remota época donde se denominaba sabio a quienes exhibían ciertas características propiamente fundacionales de la cultura helénica. Asimismo, dada la dificultad de la ausencia de textos directos proveniente de ellos, ha sido preciso servirse de Diógenes Laercio en su notable obra *Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres*; igualmente, de la obra *La vida de Pitágoras* de Jámblico de Calcis. Debe advertirse que el único texto reconocidamente adjudicable a Pitágoras es el de *Los versos dorados*, el cual ha sido estudiado hasta la saciedad a fin de poder caracterizar su forma de pensamiento y de vida. Esto obedece a que en toda búsqueda filosófica y matemática prima el cultivo de la interioridad sin el cual no se puede acceder a ninguna de estas disciplinas. Se encuentra un símil en la música, donde la parte intepretativa propia de la técnica mantiene una distancia con el componente musical que le imprime el espíritu a la pieza.

El capítulo dos versa sobre la filosofía y la matemática de Pitágoras, y proviene de la *Metafísica* de Aristóteles; también ha sido de utilidad el libro VIII *Pitágoras y los pitagóricos* de Diógenes Laercio, los cuales han sido una gran guía para poder comprender su forma de vida y la manera en que practicaban una forma filosófica de vivir y el arte de la matemática. El capítulo tres versa sobre el libro 1.1 de *Los Elementos* de Euclides, y es el que mayor trabajo lleva: algunos estudiosos manifiestan que su contenido fue obra de Pitágoras; por tal motivo, reviste una importancia especial. Existen dos grandes momentos en la elaboración de esta tesis: el primero concierne a la identificación de la mónada pitagórica como un infinito que está fuera de cualquier tipo de caracterización cardinal u ordinal tradicional propia de las matemáticas modernas. El segundo gran momento y el más importante de toda esta investigación está situado en el origen de una ontología matemática (axioma 1.1.1 de *Los Elementos*) y en el de una epistemología matemática (axioma 1.1.2 de *Los Elementos*). Es tan importante esta caracterización, que podría dar lugar a la elaboración de unos buenos tratados sobre ambos temas agregando, además, el material de otros autores a lo largo de toda la historia hasta la modernidad. El cuarto capítulo versa sobre la teoría numérica contenida en los libros 1.2, 1.3 y 7.1 de *Los Elementos*. Autores como Alberto Campos (2006) en *Introducción a la historia y la filosofía de la matemática* reconoce allí unos aportes propios de Pitágoras. Esto conduce a ver a Euclides como un gran recopilador de una gran parte la tradición matemática griega y, a los aportes propios de su cosecha, le suma los de otros autores, textos que tuvo a su alcance debido a su cercanía con la famosa Biblioteca de Alejandría. Finalmente, el capítulo cinco trae las conclusiones y las tesis que han sido fruto del análisis de los capítulos previos. El orden expositivo ha querido presentar en el último capítulo lo que muchos esperarían que estuviera mencionado desde el primero pero, como ya ha sido anotado, tal proceder no hubiera sido posible dado que lo logrado tan solo se dio a lo largo de este análisis exegético de los textos originales sobre los que versa esta investigación.

El logro más importante de esta tesis es la caracterización del origen tanto de una ontología como de una epistemología de las matemáticas y, en esta forma, constituye una invitación para poder adelantar un trabajo meticuloso a profundidad en tales campos que no siempre han sido identificados con precisión. A partir de los mismos se podrá desarrollar una antropología matemática, así como una hermenéutica y una fenomenología de las matemáticas, sin descontar el poder reconocer las dos formas fundamentales en que se ha venido haciendo matemáticas: la llamada vía euclidiana fundamentada en el método axiomático y la vía aristotélica fundada en los trabajos que se encuentran en *Los Analíticos Primeros*, y que constituyen la propuesta que buscó derivar la matemática a partir de la lógica durante la segunda mitad del siglo XIX y comienzos del XX. Es de entender que el buscar estudiar las nociones primitivas reviste cierta importancia especial, tal como lo ha anotado Bertrand Russell (1919) en el capítulo 1 de *Introduction to Mathematical Philosophy*, para quien, la aparente simplicidad de estas categorías y definiciones básicas guarda una complejidad insospechada, dada la gran abstracción que se requiere en medio de una notable simplicidad lógica. Esta caracterización de la filosofía matemática es opuesta a la manera ordinaria de hacer matemáticas. Este trabajo aspira inspirar un acercamiento entre ambas disciplinas.

Junto a las consideraciones anteriores, es importante tener en cuenta las siguientes particularidades:

i. Esta investigación sigue un tipo de estructura de razonamiento deductivo inferencial propio de la lógica. Motivo por el cual, muchas de las oraciones podrían ser simbolizadas a nivel de un cálculo proposicional. Sea el caso, en el ejemplo: $p_1 \rightarrow^1 ((q \rightarrow^3 p_3) \rightarrow^2 p_2)$. Donde la p_1 es una proposición u oración de la cual se infieren tres oraciones más, donde los superíndices nos indica el orden deductivo impuesto por la implicación. Para llegar a afirmar p_2 se recorren las tres proposiciones previas. Esto hace que la parte literaria se vea afectada por la deducción lógica propia de las matemáticas.

ii. A lo largo del texto se presentan algunas repeticiones de varios conceptos, términos, vocablos, etc.; esto obedece a que, en el transfondo, se está siguiendo un tipo de demostración matemática, en la cual siempre se mencionan los argumentos y supuestos que fundamentan una prueba. Esto hace que el texto vuelva una y otra vez a tomarlos, donde está variando uno o varios de ellos a fin de buscar un nuevo camino deductivo, el cual habrá de brindar otras conclusiones aún con mínimas variaciones.

iii. El uso reiterativo del paréntesis en las palabras griegas obedece a que su traducción no siempre es válida; además, dentro del contexto demostrativo, asumen el papel de ser los argumentos sobre los cuales se está efectuando la reflexión. Esto constituye una invitación a seguir el texto a través de estos términos y palabras sobre las cuales se fundamenta toda la investigación. Se hace especial hincapié en que uno de los aportes esenciales de la presente tesis consiste en proponer la elaboración de una ontología matemática para lo cual los axiomas que la constituyan deberán de ser escritos en griego antiguo, lo cual permite que se constituyan en metaproposiciones de un lenguaje objeto, que facilita la construcción de variadas teorías o modelos a partir del mismo sin comprometer su integridad conceptual teórica.

Se advierte que la lectura de esta investigación exige cierto esfuerzo dado el carácter del tema, la dificultad de llevar al idioma español a unos extremos que no le son propios, y que son más naturales para otros idiomas, como el alemán, que permite oraciones largas, creación de nuevas palabras y todo un arsenal de declinaciones hoy desaparecidas en el castellano. No obstante, el tema que aquí se aborda es algo abstracto e instaura unos usos más cercanos a lo deductivo que prima sobre lo narrativo. El lector deberá de tener paciencia con el tema y disfrutar del mismo, pues vincula los procesos reflexivos de índole filosófica con temas propios de la matemática, algo de no muy común práctica. Una de las metas de esta tesis es mostrar que la matemática se construye a partir de unas muy pocas nociones, y que estas están todavía lejos de haber sido definidas apropiadamente. Este texto representa, entonces, una invitación a una aventura del pensamiento en procura de encontrar nuevos caminos y horizontes para poderla tratar, simbolizar y definir.

1. LOS INICIOS DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO COMO UNA FORMA DE VIVIR FILOSÓFICA

La matemática concebida como una disciplina formal que se estructura alrededor de unas nociones primitivas, de unos axiomas y teoremas, es un invento de la cultura helénica. Aunque su origen como saber dotado de unas características harto particulares se sitúa en Babilonia y Egipto; si bien las desarrollaron, no se tiene registro ni noticia alguna de que hayan utilizado un método deductivo axiomático tal como lo hicieron los griegos. El denominado teorema pitagórico está representado en la tableta *Plimpton 322*[1] perteneciente a la colección de la Universidad de Yale; en dicha tableta de arcilla se recrea el famoso teorema pitagórico. Esto nos lleva a pensar que muchos de los problemas que van a conducir a la creación de la matemática como un saber organizado en Pitágoras – quien, además fue el primero en utilizar el término matemático y el primero que identifico la filosofía como una forma de vida –, estuvieron presentes y fueron tratados a lo largo de varios milenios hasta que en los griegos lograron agruparlas y formalizarlas en un método y lenguaje simbólico apropiado, que aún hoy día se sigue utilizando. El inicio de las matemáticas acontece en tiempo de los sumerios, alrededor del 4500 a 4000 a.C.; luego, experimentó un gran avance con Sargón el Grande en el 2270 a.C., y se utilizó un sistema numérico basado en la base sexagesimal: este sistema aritmético se denomina cuneiforme, donde se cuenta, básicamente, con dos símbolos, el de la unidad y el de la decena[2]: se utiliza la unidad de manera reiterativa hasta llegar a nueve y luego cambia el símbolo con el diez, los dos interactúan reiterativamente hasta el número 59, el 60 se representa con un

---

[1] Tenemos los interesantes comentarios sobre este tópico realizados por G. Donald Allen en sus *Lectures on History of Mathematics*, donde presenta el sistema aritmético de los babilonios, menciona que no conocieron el cero, tuvieron la capacidad de extraer raíces cuadradas, utilizaron sistemas lineales de ecuaciones, asimismo con ayuda de algunas tablas resolvieron ecuaciones cúbicas, estudiaron las medidas circulares, no obstante algunos de sus planteamientos geométricos son imprecisos (pág. 17).
[2] Este tema está tratado en: *A History of Mathematics* por Florian Cajori (pág. 5-7).

cambio de posición apareciendo como un uno. Sobre el desarrollo de las matemáticas en Egipto[3] se tienen pocos documentos; fundamentalmente, los más importantes son dos papiros conocidos como: El Papiro matemático de Moscú (1700 a.C.) que se encuentra en el Museo Pushkin de Moscú, en el cual se demuestra el cálculo del volumen de un tronco; y el Papiro de *Ahmes*, también conocido como el papiro matemático de *Rhind* (2.000 a 1.800 a. C.) que se encuentra en el Museo Británico, donde se tratan temas relacionados con las fracciones, la notación, la aritmética, el álgebra, la geometría y las medidas. Donald Allen manifiesta que el desarrollo matemático en los citados papiros está más orientado hacia la resolución de problemas prácticos; se aprecia en ellos pocas contribuciones teóricas para una fundamentación rigurosa de las matemáticas. De igual manera, los egipcios utilizaron unos símbolos aritméticos diferentes para el: 1, 10, 100, 1000, 10.000, 100.000 y 1.000.000, hicieron un uso amplio de la adición para la solución de la mayoría de sus problemas.

Hemos visto que las matemáticas se originaron en Babilonia y Egipto, pero fueron conceptualizadas como un cuerpo teórico formal dotado por unas nociones primitivas y unos axiomas en Grecia; sus inicios como ciencia están en Tales de Mileto y en Pitágoras de Samos. No obstante, el propósito de esta investigación no es el examen del aspecto histórico, basta reconocer donde comenzó hasta llegar a abordar el libro que más influencia ha ejercido en las matemáticas a nivel mundial, que son *Los Elementos* de Euclides. Esta obra señala la manera en que la matemática se va construir y a desarrollar desde entonces hasta ahora: no ha variado el método científico trazado por *Los Elementos*, pues unificó todas las tradiciones e impuso unos procedimientos axiomáticos dotados de demostraciones de sus teoremas como aquella vía legítima para tratar las matemáticas. Detenerse a examinar todo lo escrito acerca de la misma por los pensadores griegos sería una tarea que tomaría demasiados años de intensa labor, lo que condujo a delimitar nuestro objeto de estudio a aquellas nociones primitivas sobre las cuales se construye tanto la aritmética como la geometría. Este temario está influenciado por el arduo empeño realizado desde

[3] Tema expuesto en *Egipt* en *Lectures on History of Mathematics*, de Donald Allen, donde se estudia con algún detalle el desarrollo matemático los dos papiros de Moscú y el de Ahmes (págs. 1-20).

mediados del siglo XIX a mediados del XX, donde aparecieron cuatro grandes escuelas[4]: la intuicionista, la formalista, la logicista y la predicativista. La principal motivación de la búsqueda por fundamentar las matemáticas proviene del surgimiento de la lógica en Inglaterra, en especial la obra *Las leyes del pensamiento* de George Boole[5], que para John Corcodan[6] es la obra que continúa, integra y supera los aportes de Aristóteles dentro la lógica matemática simbólica. La influencia de Boole es tan grande que motivó la tentativa de subordinar la axiomatización de la matemática a la de la lógica; este proyecto fue seguido por importantes pensadores como Gottlob Frege, Bertrand Russell, David Hilbert, entre otros; aunque no haya tenido éxito, ayudo a cimentar la teoría de conjuntos, la teoría de modelos, la teoría de la recursión relacionada con las ciencias de la computación y la teoría de la prueba fundamentada en axiomas y leyes de inferencia lógicas.

Se ha mencionado el proyecto de definir la construcción de las matemáticas a partir de la lógica como la gran tentativa propia de la mitad del siglo XIX a comienzos del XX, tentativa que no tuvo éxito no obstante produjo grandes adelantos en la manera en que la matemática debería construir su edificio argumentativo. La propuesta de esta investigación busca tomar un nuevo camino que, podría afirmarse, es anterior a nivel teórico; este hecho

[4] Este tema está amenamente tratado en: *Philosophy of Mathematics* por Leon Horsten. Pertenece a aquellos artículos publicados por *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* en toda una variedad de temas, hacemos especial hincapié al interés creciente que se observa en las universidades estadounidenses y europeas de buscar una fundamentación filosófica de las matemáticas.

[5] Uno de los trabajos más importantes que permitió que la lógica se desarrollará fue la obra de George Boole: *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, destacamos cómo trató importantes temas como: los signos y sus leyes, la derivación de las leyes, los principios de la lógica simbólica, los principios para interpretar, eliminar, reducir y abreviar, condiciones para un método perfecto, proposiciones secundarias, el método de probabilidades, los problemas en las causas, la probabilidad del juicio y la limitación del intelecto entre otros. Uno de sus grandes aportes fue el álgebra booleana que reduce a ceros y unos cualquier expresión del lenguaje. Ejemplifica el comportamiento de los circuitos eléctricos presentes en la unidad central de procesamiento de los computadores, en los códigos de las máquinas, el lenguaje de ensamblaje y los lenguajes de programación.

[6] Ver el importante artículo de John Corcoran: *Aristotle´s Prior Analytics and Boole´s Laws of Thought, en el cual menciona que Boole logró incorporar y continuar la lógica aristotélica, además de dotarla de un cuerpo formal de ecuaciones, donde la caracterización del lenguaje formal supera al planteado por Aristóteles. Este hecho condujo a que la lógica siguiera desarrollándose desde entonces, aspecto que también reconoció Alfred Tarski. Corcoran destaca como Boole aborda el universo del discurso como aquella instancia donde se iniciará la fundamentación de la lógica, en especial se menciona como el número 1 hace referencia a la entidad, al ser, a la cosa, a un individual, conlleva una delimitación del tema a tratar que varía según el contexto en que se desarrolla (pág. 274). En este sentido se asemeja a los inderivables matemáticos.*

fue reconocido por Russell y Whitehead[7] en *Principia Mathematica*, obra que buscó emular a Euclides en cuanto construye la matemática tal como él planteo y edifica la geometría a partir de unos pocos axiomas y/o nociones primitivas. Sin embargo, Euclides no comprometió su axiomatización y demostraciones a una denominable lógica simbólica, que busca subordinar el comportamiento o decibilidad de los axiomas aritmético-geométricos a las conectivas binarias y sus leyes de inferencia propias del cálculo proposicional de la lógica simbólica. Este hecho hizo que Euclides introdujera las nociones fundamentales, sus axiomas y nociones primitivas de manera independiente, sin tener que atarlas a una estructura lógica deductivo-inferencial de tipo binario (lógica booleana), como buscaron los lógicos y matemáticos de la citada época (1850-1930) en su tentativa de definir la construcción de la matemática a partir de una propuesta lógica. Es decir, Euclides, en *Los Elementos*, no comprometió las nociones primitivas ni sus axiomas fundantes a una estructura lógica, no cayó en tal trampa aunque conociera el trabajo de Aristóteles[8]: no es conveniente delimitar el tratamiento filosófico-matemático de los indiscernibles para que satisfagan unas exigencias lógicas, debido a que los amarra asfixiando el componente especulativo que los concibe, gobierna y transforma. El temario de las nociones de punto, línea y superficie, asimismo, el todo y la parte, son tratados como axiomas en Euclides mas no reducidos a tener que satisfacer una estructura lógica binaria.

De modo que, si bien no se desconoce la tentativa de la lógica simbólica de construir las matemáticas a partir de sus propios postulados, se va a buscar rescatar el papel central de las nociones primitivas como el motor desde el cual nace, crece, se desarrolla y se transforman las matemáticas. Este pensamiento está incorporado en la concepción actual comúnmente aceptada en que las matemáticas no pueden ser construidas ni ser reducidas a la lógica. El propósito de este trabajo es estudiar más de cerca los axiomas por medio de los cuales Euclides define sus nociones primitivas; asimismo analizar algunos de los conceptos matemáticos desarrollados por los pitagóricos y que se beneficiaron de la influencia de

[7] En la gran obra de Bertrand Russell y Alfred N. Whitehead, *Principia Mathematica*, se advierte la necesidad de definir la noción de individual en la introducción a la segunda edición (pág xix), tal como se plantea las ideas primitivas sobre las cuales se fundamentará la lógica y por ende las matemáticas en la parte de la lógica matemática conjunto con las proposiciones primitivas dentro de una teoría de la deducción (págs. 87 a 97).

[8] En su artículo: *Aristotle and Mathematics*, Henry Mendell manifiesta que Aristóteles buscó una manera distinta de construir y desarrollar sus pruebas a la de Euclides (pág. 1).

Tales de Mileto. Debido a lo extenso del temario, la investigación se centra en el análisis de aquellas nociones alrededor de las cuales se construye tanto la aritmética como la geometría. Adicionalmente, estudiaremos la filosofía pitagórica desde el único texto que ha llegado a nuestros días: *Los versos dorados*.

1.1. La instauración del pensamiento matemático por Tales de Mileto

Los orígenes de la matemática no son fáciles de precisar debido a que no están bien documentados; propiamente, la matemática como una disciplina formal dotada de las características que hoy reconocemos como propias a la misma, tan solo se da a partir de los griegos, quienes lograron reconocer la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos. La matemática irrumpe en Mesopotamia, en lo que se conoce como los babilonios, término que abarca toda una serie de pueblos que habitaron el área entre los ríos Tigris y Éufrates, región que fue ocupada por un pueblo no semítico ni indoeuropeo como fueron los sumerios alrededor de 4000 a. C.; luego, llegaron los acadios, pueblo semítico alrededor del 2500 a. C.; le suceden los asirios en 1000 a.C.; los caldeos un poco después y, finalmente, los persas en 700 a.C.; todos estos pueblos utilizaron un sistema numérico cuneiforme de base 60 que fue desarrollado por los acadios; luego surge la aritmética, el álgebra y la geometría, de las cuales no quedan muchos testimonios. También están los egipcios, donde la aparición de las matemáticas es similar a las fechas de babilonia; a su vez estos mantuvieron un contacto con los egipcios, sea a nivel de comercio y en la invasión por parte de los hicsos alrededor del 1700 a. C.; todo esto ayudó a difundir las matemáticas entre ambas culturas. Pero, la creación de las matemáticas proviene del período clásico griego y se sitúa en la ciudad iónica de Mileto, lugar propicio para el comercio tanto marítimo como terrestre que la hizo muy próspera y rica. Este hecho está resaltado por Morris Kline, dentro de lo que él ha denominado '*La creación de las matemáticas griegas clásicas*'[9]. Desde una perspectiva histórica, Kline divide su desarrollo en dos etapas: la

[9] Morris Kline en su obra: *The Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, comienza a estudiar el nacimiento de las matemáticas como se las conoce hoy día a partir de los griegos. Kline pone especial énfasis en la posición geográfica de las ciudades jónicas en Asia Menor y la enorme actividad comercial y cultural que tenían con sus vecinos (p.24-28).

denominada etapa clásica que se sitúa entre 600 a 300 a.C., y la etapa helenística que va del 300 a.C., la 600 d.C. Se resaltan dos hechos fundamentales que ayudaron en la construcción de la cultura griega, el primero es la adopción de un alfabeto inspirado en el de los fenicios y el segundo la disponibilidad de los papiros que permitió consignar y expandir sus ideas. Kline menciona una cita del filósofo neoplatónico Proclo (*Πρόκλος*): “Esta, en consecuencia, es la matemática: te recuerda la forma invisible del alma; da vida a sus propios descubrimientos; despierta la mente y purifica el intelecto; trae luz a nuestras ideas intrínsecas; elimina el olvido y la ignorancia que son nuestras por nacimiento” (Ob.cit. pág.24). Se reconoce como el padre de las matemáticas al gran matemático Tales de Mileto (*Θαλῆς ὁ Μιλήσιος*, 624 – c. 546 BC), quien a su vez tuvo de discípulos a dos Anaximandro (*Ἀναξίμανδρος*) y a Anaxímenes (*Ἀναξιμένης*). Estos hechos están bien documentados en: *Vida, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres* de Diógenes Laercio[10], quien manifestó que Tales no dejó nada escrito, siendo el primero en ser llamado sabio.

1.1.1. Los sabios como modelos de inspiración para la polis

Cabe resaltar que en aquellos tiempos tempranos de la Grecia clásica, vivieron personajes de una gran autoridad moral, que le dieron forma a la cultura griega y a la búsqueda de nobles ideales, algunos de ellos promovieron el ejercicio y el desarrollo de la democracia. Se tiene los famosos siete sabios de la antigua Grecia[11], quienes vivieron alrededor del siglo VI a.C. Cabe mencionar a Tales de Mileto (624-559 a.C.): filósofo y matemático, se le atribuye la sentecia conócete a ti mismo (*Know thyself. γνῶθι σεαυτόν*). Solón de Atenas (640-559 a.C.), conocido por la máxima *Nada con exceso, todo con*

[10] Esta importante obra traducida al español por D. José Ortíz y Sanz comienza con la vida de Tales de Mileto, es un testimonio de un valor incalculable para entender mejor la cultura griega.

[11] Una de las referencias más tempranas a los siete sabios de Grecia proviene de Platón, quien en su diálogo Protágoras (*Πρωταγόρας*) los menciona: [343a] *to utter such remarks is to be ascribed to his perfect education. Such men were Thales of Miletus, Pittacus of Mytilene, Bias of Priene, Solon of our city, Cleobulus of Lindus, Myson of Chen, and, last of the traditional seven, Chilon of Sparta. All these were enthusiasts, lovers and disciples of the Spartan culture; and you can recognize that character in their wisdom by the short, memorable sayings that fell from each of them they assembled together. [343α] τελέως πεπαιδευμένου ἐστὶν ἀνθρώπου. τούτων ἦν καὶ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος καὶ Πιττακὸς ὁ Μυτιληναῖος καὶ Βίας ὁ Πριηνεὺς καὶ Σόλων ὁ ἡμέτερος καὶ Κλεόβουλος ὁ Λίνδιος καὶ Μύσων ὁ Χηνεύς, καὶ ἕβδομος ἐν τούτοις ἐλέγετο Λακεδαιμόνιος Χίλων. οὗτοι πάντες ζηλωταὶ καὶ ἐρασταὶ καὶ μαθηταὶ ἦσαν τῆς Λακεδαιμονίων παιδείας, καὶ καταμάθοι ἄν τις αὐτῶν τὴν σοφίαν τοιαύτην οὖσαν, ῥήματα βραχέα ἀξιομνημόνευτα ἑκάστῳ εἰρημένα: οὗτοι καὶ κοινῇ συνελθόντες.*Ver: Plato, *Protagoras*, vol. 3, translated by W. Lamb, Havard University Press.

medida (*Nothing in excess. μηδέν ἄγαν*). Periandro de Corinto (627-587 a.C), una de sus sentencias es: *Sé previsor con todas las cosas* (*Be farsighted with everything. Ὅρα τό μέλλον*). Pítaco de Mitilene (640-568 a. C.) autor de: *Debes saber escoger la oportunidad* (*Know thy opportunity. γνῶθι καιρόν*). Bías de Priene (590-530 a.C.) manifestó: *La mayoría de los hombres son malos* (*Most men are bad. πλεῖστοι ἄνθρωποι κακοί*). Quilón de Esparta (aprox. 556 a.C.), se le conoce por decir: *No desees lo imposible* (*Do not desire the imposible. μή ἐπιθυμεῖν ἀδυνάτων*). Cleóbulo de Lindos (s. VI a.C.) es el autor de la máxima: *La moderación es lo mejor* (*Moderation is best in all things. πάν μέτρον άριστον*)[12].

> *Fue el primero que tuvo el nombre de sabio, cuando se nombraron así los siete, siendo arconte en Atenas*[13].
>
> (*He was the first to receive the name of Sage, in the archonship of Damasias at Athens. καί πρῶτος σοφός ὠνομάσθη ἄρχοντος Ἀθήνησι Δαμασίου*)[14].

Se entiende por sabio (*σοφός*) aquella persona que ha alcanzado una excelencia en el desarrollo integral de las virtudes y cualidades que lo convierten en un arquetipo a imitar, en especial, debido al inusitado y armonioso desarrollo de su propia humanidad. La condición de ser sabio también lo hace industrioso en variadas artes y oficios, agudo e inteligente, audaz y prudente, astuto y sabio, hábil con la palabra y a la vez erudito, temerario y valiente, dedicado al servicio de la polis y por ende conocedor de sus leyes. Alguien que a diario está aprendiendo y enseñando, un ciudadano comprometido que ejerce la política con responsabilidad y convicción, capaz anteponer el bien común a sus propios intereses, una persona que vive feliz y satisfecha con la vida, piadoso y obediente frente a la voluntad de la divinidad. Se advierte que la sabiduría (*σοφία*) encarna todas estas cualidades en su más alta expresión. En resumidas cuentas, un individuo completamente realizado y que ha cultivado cada faceta de su personalidad de manera cuidadosa e integra. Una vez más encontramos en Tales aquel modelo que el propio Platón resalta en *La*

---

[12] Ver en: Alan Griffiths (2005), *Seven Sages*, Oxford Classical Dictionary, Third Edition, Oxford.

[13] Diógenes Laercio, *Vida, opiniones y sentencias de los filósofos más importantes*, trad. José Ortíz y Sanz (1887). Libro primero, págs. 30-42.

[14] Diogenes Laertius, *Lives of Inminent Philosophers*, translated by R.D. Hicks (1925), Book 1, chapter 2, 22.

República, en cuanto es el guardián de la ciudad: “Luego tendrá que ser filósofo, fogoso, veloz y fuerte por naturaleza quien haya de desempeñar a la perfección su cargo de guardián en nuestra ciudad” (376c). De esta manera, el gobernante de la ciudad será el filósofo, él cual pertenece a una casta especial, que es la de los guardianes de la *Polis*.

1.1.2. La contemplación de la naturaleza viene después del servicio público

> *Después de los asuntos públicos se dedicó a la contemplación de la Naturaleza. Según algunos no dejó nada escrito.*
> (*[23] After engaging in politics he became a student of nature. According to some he left nothing in writing. Μετά δέ τά πολιτικά τῆς φυσικῆς ἐγένετο θεωρίας. καί κατά τινας μέν σύγγραμμα κατέλιπεν οὐδέν*).

Es importante reconocer, aquello que le aporta a la interioridad su completez, es decir, haberse dedicado a servir a los demás a nivel político en la polis antes de ocuparse de los propios asuntos, lo cual es indispensable para poder acceder a la contemplación. En este contexto el bien colectivo se antepone al interés personal. Esta concepción griega clásica es fundamental para el desarrollo de la personalidad, en especial, cuando debe ser cultivada en sus más altas cualidades. Se comienza forjando un individuo que está al servicio de los demás representados por la polis (*πόλις*), aquella comunidad viva donde el individuo se siente parte de un todo, que lo define y le da forma como sujeto concreto. Se asume como actividad suprema aquella que da unidad a la colectividad, en ella se adquieren aquellos valores que trascienden lo particular en pos de lo universal representado en lo comunitario. Es indispensable asumir la propia condición de ciudadano (*πολίτης*), la cual esculpe y escribe sobre roca (*χαράσσω*) el propio carácter (*χαρακτήρ*). Se vive como ciudadanos, es decir aquellos que han aceptado ser gobernados (*πολιτεύω*). En este contexto, surge la política (*πολιτεία*), como esa vida compartida bajo un común gobierno cuya normatividad se edificada en torno al bien común rige el bienestar de todos[15]. Esto se da debido a que

[15] En el libro VII de la República de Platón se comenta las virtudes del filósofo como gobernante, este hecho está expuesto después del mito de la caverna (514 α- 518ε), como sugiriendo que quienes logran salir de la misma son los más aptos para ser los guardianes de la polis.

existe un reconocimiento alrededor de un lugar común (*δῆμος*) en el cual se identifican los miembros de una comunidad como un pueblo (*δήμος*), vocablo del cual deriva la democracia (*δημοκρατία*), que proviene de *dēmokratéomai* (*δημοκρατέομαι*), que alude a la tenencia de una constitución democrática fruto de la prevalencia de los principios democráticos del gobierno (*κρατέω*) del pueblo. No en vano se hable que Tales nació en Mileto: es hijo de la ciudad que le debe lo que es como individuo libre, dado que la libertad es uno bienes más preciosos que otorga la polis a sus ciudadanos, permite que cada uno se pueda dedicar a lo que más desea una vez le haya servido. Es ahí, en Mileto, donde Tales ejerció su vida al servicio de los demás para luego dedicarse al estudio de la naturaleza, siendo esta segunda etapa de su vida como un nuevo nacimiento que le permite volver a afirmar su ser interno (*γίγνομαι*) en torno a lo natural (*φυσικός*), donde emerge la naturaleza (*φύσις*) propia como aquello que crece (*φύω*) fruto de la actividad de la vida.

Es de resaltar en, "*φυσικῆς ἐγένετο θεωρίας"*, donde la naturaleza está calificada por el verbo venir a la existencia, nacer, tomar lugar (*γίγνομαι*) en la forma del aoristo indicativo *ἐγένετο*, forma verbal muy utilizada para contar historias y eventos que tuvieron lugar en el pasado. Es un pasado dentro de un pasado donde se expresa un evento que está aconteciendo en un tiempo no sujeto a una demarcación. De ahí que en la raíz del aoristo (*ἀόριστος*) tenemos la alfa privativa α y el vocablo *ὅρος* que significa frontera, término y meta. Lo cual nos lleva a ver al aoristo como aquel estado pretérito sin límites, donde la acción se extiende tanto como sea necesaria para que pueda abrasar y satisfacer su propio propósito. Ese estado de *estar detenido y suspendido en el tiempo* es algo que califica el ejercicio de la teoría (*θεωρία*), abordada como aquella disposición propia de la actividad contemplativa característica del filósofo, como aquel espectador (*θεωρός*) que contempla el espectáculo que la naturaleza está realizando frente a él. De igual manera, también el vocablo alude a la actividad de observar que el nacimiento de los seres vivos tiene una connotación divina y mágica; no hay que olvidar que el espectador o consultante ante el oráculo (*θεωρός*) está relacionado con la deidad o Dios (*Θεός*): un ver que involucra una experiencia que testifica (*ὁράω*) esta vivencia que trasciende lo cotidiano. Es de esta manera que, cuando el ciudadano ha logrado elevar su situación moral fruto de estar al servicio de la polis, ha llegado a aquietar su interioridad alejándola de los fuegos de la juventud (*νεανίας*), lo lleva a controlar su impulsividad que lo hacía duro de entender. Mientras, el joven (*νέος*), por su misma condición, no está preparado para la contemplación del espectáculo de la naturaleza que Dios le está mostrando y frente al cual ha de volverse un espectador atento, desinteresado y humilde. Es claro que el cultivo de las virtudes, como la prudencia (*φρόνησις*), proviene de aquel pensar (*φρονέω*) que lo lleva a uno a estar en posesión de los sentidos y a tener ese entendimiento que le ha permitido adquirir esa sabiduría práctica. El sentido de justicia en Tales de Mileto, uno de los llamados siete sabios de Grecia tan reconocidos en la antigüedad, se desarrolló en el servicio a la polis centrada en el cumplimiento de la ley. Esta lo llevó a conocer de cerca a la justicia (*δικαιοσύνη*), de donde deriva el que es justo y recto (*δίκαιος*), aquel que practica la ley y observa las costumbres (*δίκη*). También es aquel que ha logrado atemperar su interioridad (*σωφροσύνη*), aquella sofrosine o temperancia fruto de la conquista de los deseos y el auto control de la propia mente. Se reconoce a quien es sabio (*σώφρων*) debido a que está en un estado de seguridad (*σῶς*) de la mente (*φρήν*), lugar donde se asientan las emociones y el intelecto, este hecho evidente se dio en Tales. Y, finalmente, sabio es quien ha adquirido el coraje y el valor de estar al servicio de la defensa de la polis, la valentía o la *andreía* (*ἀνδρεία*), como aquella condición en la que el hombre (*ἀνήρ*) muestra su hombría y su coraje.

Al igual que Pitágoras, se dice que Tales de Mileto no dejó nada escrito: "*σύγγραμμα κατέλιπεν οὐδέν*". Se tiene que la primera palabra es la unión de la proposición con (*σύν*) y escrito (*γράμμα*), la cual proviene *gráfo* (*γράφω*) que es escribir, bosquejar y procesar. Se muestra de esta manera, como lo escrito involucra una delimitación, donde se asume un compromiso que restringe, muy contrario a la actividad contemplativa donde lo indecible tiene primacía sobre lo decible. La concepción de la matemática en sus orígenes es muy distinta a la que tenemos hoy día; era una disciplina más inclinada a encontrar los elementos comunes de la aritmética, la geometría, la astronomía, y otros campos del saber cómo la música, la geografía, entre otros. Encontrar lo común a todas ellas y convertirlo en un tema que puede ser aprendido y enseñado, es lo que encontramos en el vocablo del cual se origina la matemática: *mantháno* (*μανθάνω*) significa lección, materia de un saber que puede ser enseñado y de la experiencia adquirida a partir de los incidentes de la vida. Este sustantivo está en relación con el verbo *mathaíno* (*μαθαίνω*) significa aprender, de *mathiteía* (*μαθητεία*) que es aprendizaje y de *mathitís* (*μαθητής*) que es el alumno o discípulo. Se nota cómo en algunas nociones, como la de la línea (*γρᾰμμή*), es un elemento que se puede encontrar tanto al trazar un mapa, al crear un símbolo, o al recrear un objeto de la geometría. Se tiene el verbo dejar atrás (*καταλείπω*), fruto de la unión de la proposición abajo (*κατα*) con dejar (*λείπω*). Luego viene la expresión que hace referencia a nada (*οὐδείς*), que está también conformada por "no o aún no" (*οὐδέ*) *y* "uno" (*εἷς*) unido a su vez a "nadie o nada" (*δείς*). Todo esto evoca alguien que no quiso dejar trazo alguno tras de sí, acción propia de los grandes fundadores de algunas religiones y escuelas de pensamiento. En muchos casos está involucrada una forma de vida que está más interesada en enseñar y en sembrar en los demás hábitos de vida, que les permita transformarse, y de esta manera, poder elevar su condición moral a fin de servir mejor a la comunidad.

1.1.3. Cómo la astrología y la astronomía eran una sola

> *Pues la Astrología náutica qué se le atribuye se dice que es de Foco de Samos. Calímaco le hace descubridor de la Orsa menor, diciendo en sus Yambos: Del Carro cuyas estrellas dan rumbo a los fenicios navegantes.*
>
> (*[23] for the Nautical Astronomy attributed to him is said to be by Phocus of Samos. Callimachus knows him as the discoverer of the Ursa Minor; for he says in his Iambics: Who first of men the course made plain of those small stars we call the Wain, whereby Phoenicians sail the main. ἡ γάρ εἰς αὐτόν ἀναφερομένη Ναυτική ἀστρολογία Φώκου λέγεται εἶναι τοῦ Σαμίου. Καλλίμαχος δ' αὐτόν οἶδεν εὑρετὴν τῆς ἄρκτου τῆς μικρᾶς, λέγων ἐν τοῖς Ἰάμβοις οὕτως καί τῆς ἁμάξης ἐλέγετο σταθμήσασθαι τούς ἀστερίσκους, ᾗ πλέουσι Φοίνικες*).

Es importante detenernos en la exégesis (*ἐξήγησις*) del texto, ya que nos está comunicando algo más de lo que parece a simple vista: es también en la actividad de mirar el cielo y las estrellas donde surge la geometría, como aquellos trazos que buscan conectar los puntos fijos y errantes del firmamento. Se hace referencia (*ἀναφέρω*) a que fue él quien descubrió la importancia de la Osa menor, constelación de la cual forma parte la estrella Polar, que además de ser la estrella más brillante siempre está cerca del polo norte celeste, lo que la hace ser un punto de referencia de inestimable valor en todo lo que respecta a la orientación tanto en tierra como en mar. Se dice que el poeta Calímaco conoció (*οἶδεν*, de *οἶδα*, conocer) que Tales de Mileto descubrió (*εὑρετήν*, de *εὑρίσκω*, descubrir) la Osa Menor (*ἄρκτου τῆς μικρᾶς*), constelación muy conocida en el hemisferio norte y constituida por siete estrellas, que parecen formar un carro (*ἅμαξα*) que puede ser medido por regla (*σταθμάω*). Estas estrellas (*ἀστερίσκος*) pequeñas les permitió navegar (*πλέω*) a los fenicios.

> *Pero, según otros, escribió dos cosas que son: Del regreso del sol de un trópico a otro, y Del equinoccio; «lo demás –dijo– era fácil de entender.» Algunos, son de parecer fue el primero que cultivó la Astrología, y predicó los eclipses del sol y mudanzas del aire, como escribe Eudemón en su Historia astrológica; y que por esta causa lo celebraron tanto Jenófanes y Heródoto. Lo mismo atestigua Heráclito y Demócrito.*
>
> (*But according to others he wrote nothing but two treatises, one On the Solstice and one On the Equinox, regarding all other matters as incognizable. He seems by some accounts to have been the first to study astronomy, the first to predict eclipses of the sun and to fix the solstices; so Eudemus in his History of Astronomy. It was this which gained for him the admiration of Xenophanes and Herodotus and the notice of Heraclitus and Democritus. κατά τινας δέ μόνα δύο συνέγραψε, Περί τροπῆς καί Ἰσημερίας, τά ἄλλ' ἀκατάληπτα εἶναι δοκιμάσας. δοκεῖ δέ κατά τινας πρῶτος ἀστρολογῆσαι καί ἡλιακὰς ἐκλείψεις καί τροπάς προειπεῖν, ὥς φησιν Εὔδημος ἐν τῇ περί τῶν Ἀστρολογουμένων ἱστορίᾳ: ὅθεν αὐτόν καί Ξενοφάνης καί Ἡρόδοτος θαυμάζει. μαρτυρεῖ δ' αὐτῷ καί Ἡράκλειτος καί Δημόκριτος*).

Según otros, fue el autor que escribió (*συγγράφω*) de manera solitaria (*μόνος*) dos tratados, el primero versa alrededor (*περί*) de la vuelta (*τροπέω*), lugar donde produce un cambio (*τροπικός*) o solsticio fruto de girar (*τρέπω*), lo que da origen a un equinoccio o *isimería* (*ἰσημερία*), que proviene de igual o equivalente (*ἴσος*) con día (*ημέρα ο ἦμαρ*). Hace referencia a aquella fecha donde el día y la noche tienen la misma duración, y señala aquel evento astronómico único que da inicio a la primavera como también al otoño; aquí el Sol atraviesa el plano del ecuador terrestre. Estas reflexiones surgen de analizar cómo el astro rey se mueve otrogando y modificando la vida en la Tierra, observaciones que se sincronizarán con una teoría ontológica acerca de la existencia de lo que nos rodea. Además, involucra educarse para poder observar con suma atención lo que nos circunda, asimismo, como el procurarse algunas herramientas a nivel de un cálculo, una aritmética y una geometría, como disciplinas propias de una matemática holística temprana. El segundo tratado versa sobre lo que no es aprehensible, abarcable ni conquistable, lo que proviene de *ἀκατάληπτος*: lo que no *α*- puede ser asido o conquistado (*καταλαμβάνω*), derivado de contra (*κατά*) con tomar (*λαμβάνω*), dado que no puede ser ni verificado ni intentado (*δοκιμάζω*) por su carácter de incomprensible. Se piensa (*δοκέω*) que fue el primero (*πρῶτος*) que estudió la astronomía o astrología (*ἀστρολογία*, *ἀστρολογέω*), e ilustra aquel período inaugural donde se estaban sentando las bases para la elaboración de una teoría del método científico fundamentado en una observación rigurosa sujeta a una comprobación empírica de los hechos. Estos están recreados en algunas leyes que recogen estas conclusiones tempranas generalizadas. Para lograr este propósito, intervienen algunos instrumentos de medición básicos como escuadras o compases, como la elaboración de un lenguaje formal básico de índole matemático que favorece la abstracción a fin de llegar a ciertas conclusiones. Asimismo, busca desarrollar algunas metodologías propias para registrar y medir las observaciones permitiendo llegar a los conceptos fundamentales de la astronomía. No hay que olvidar, que al equinoccio de primavera también se le denomina el punto vernal, es a partir del cual que se elaboran las coordenadas celestes para determinar la posición de un objeto en la esfera celeste con respecto al ecuador celeste, lo que nos da la declinación y la ascensión recta necesarios para precisar la latitud y longitud geográficas. Es a través de tal observación que se aprecia el movimiento del Sol alrededor de la Tierra, y cómo tal trayectoria se ve en la esfera celeste creando una forma geométrica conocida como la elipse de la que surge la eclíptica como el camino que el Sol describe en su recorrido por el firmamento.

Se dice que predijo los eclipses (*ἔκλειψις*) de Sol (*ἡλιακός*) y los cambios (*τροπή*) del aire, también estudió las estrellas (*ἀστρολογέω*), ejerció la astronomía-astrología (*ἀστρολόγος*) o sea el estudio y conocimiento de las estrellas (*ἀστήρ*) fruto de la atenta y sistemática observación (*ἱστορία*). Es, en consecuencia, un precursor de la manera en que se construye el conocimiento científico moderno, esto es fruto de su gran capacidad para inquirir (*ἱστορέω*) y se volvió un gran conocedor de sus leyes (*ἵστωρ*), motivo por el cual fue muy admirado (*θαυμάζω*) por Jenófanes (*Ξενοφάνης*) y Heródoto (*Ἡρόδοτος*), tal como también lo testificaron (*μαρτυρέω*) Heráclito (*Ἡράκλειτος*) y Demócrito (*Δημόκριτος*). Nos podemos percatar de la enorme fama que disfrutó Tales, asimismo, de la gran influencia que ejerció en todo el pensamiento y construcción tanto de las matemáticas como de las ciencias y sus metodologías. Se aprecia en Tales el comienzo de la visualización del Universo (*Σύμπαν*) como una totalidad ordenada y organizada que posee sus propias leyes, que puede ser observada y verificada. Al ser Tales de Mileto (*Θαλῆς ὁ Μιλήσιος*; c. 624 – c. 546 a.C.) anterior a Pitágoras de Samos (*Πυθαγόρας ὁ Σάμιος*; c. 570 – c. 495 a.C.) y por haber sido tan afamado y reconocido como uno de los Siete Sabios (*οἱ ἑπτά σοφοί*) de Grecia, Pitágoras conoció su pensamiento y obra, tal como se aprecia en el mismo legado en la que forjó su escuela en la ciudad de Crotona en la Magna Grecia (*Megalê El'lás*, *Μεγάλή Ελλάς*). Es de resaltar cómo el pensamiento helénico tuvo siglos para ir madurando e irse consolidando dentro de una pluralidad de escuelas y grandes pensadores, amparados por el enorme desarrollo que experimentó la polis, gracias a sus notables estadistas y gobernantes. No en vano que la filosofía, las ciencias, las matemáticas y la democracia hayan sido un invento de este gran pueblo, fruto de la unión de aquellos pueblos indoeuropeos conocidos como los aqueos, los dorios, los jonios, los eolios, los pelasgos y los arcadios, de cuya fusión surgió la cultura y la civilización moderna occidental.

1.1.4. De inmortalidad del alma en Tales de Mileto

> *Tiénenlo muchos por el primero que defendió la inmortalidad del alma; de este número es el poeta Querilo.*
>
> (*[24] And some, including Choerilus the poet, declare that he was the first to maintain the immortality of the soul. Ἔνιοι δέ καί αὐτόν πρῶτον εἰπεῖν φασιν ἀθανάτους τάς ψυχάς: ὧν ἐστι Χοιρίλος ὁ ποιητής*).

La sensibilidad (*φρόνησις*) en la cultura helénica fue muy cultivada a nivel práctico; y comprendía una actividad sensible (*φρόνιμος*) del pensar (*φρονέω*) en la mente (*φρήν*), hecho que recrea los primeros pasos para la formalización de las ciencias por medio de la filosofía, la cual fue un invento de los griegos entendida como ese dialogar reflexivo autofundamentado que buscar ir al fondo de lo que es experimentado y percibido por los sentidos y la mente. Es en ese contexto que los fieles observadores de la naturaleza (*φύσις*) perciben en lo que crece (*φύω*), a partir de la respiración (*ψύχω*), ese soplo cuya actividad indica la presencia de la vida como *zoé* (*ζωή*) y como *bíos* (*βίος*). Por tal motivo, lo que siempre ha estado, está y estará como presente es lo imperecedero, tal como el vocablo de alma (*ψυχή*) también es extensivo a la vida y al aliento que la instaura fruto de la actividad de la respiración (*ψύχω*), motivo por el cual, lo que escapa a la muerte es lo inmortal (*ἀθάνατος*), fruto de la unión de la alfa privativa (*alpha privativum*) *ᾰ̓-* con tánatos *(θάνατος)* la muerte. De ahí tenemos que lo que nos haría inmortales (*ἀθανατόω*) sería poder conservar a perpetuidad la respiración pero, sobretodo, una caliente que nunca se enfrié. La inmortalidad *(ἀθανασία)* del alma (*ψυχή*) involucraría verse perpetuamente habitada por ese soplo dador de vida. La teoría de la inmortalidad del alma permite recrear la trascendencia de la vida humana y su semejanza con aquellos que son inmortales. Se nota cómo los antiguos ponían una especial atención a la observación de la naturaleza, sus conclusiones eran sencillas y a la vez muy profundas, tal como identificar el origen y fundamento de la pulsión de la vida en la respiración que también es un palpitar.

1.1.5. La eclíptica como el camino que recorre el Sol entre los trópicos

Es de resaltar que Tales de Mileto abordó al Sol como una estrella, como un cuerpo celestial que puede ser observado de manera científica. Además de la hazaña de poder medir su diámetro en relación al de la Luna, lo que muestra una vez más que disfrutaba de un método científico apoyado en las matemáticas para poder efectuar sus mediciones, en especial el uso adecuado de la geometría para tales propósitos y de la herramienta de un cálculo, como aquel instrumento que permite establecer tales cifras.

> *Fue el primero que averiguó la carrera del sol de un trópico a otro; y el primero que, comparando la magnitud del sol con la de la luna, manifestó ser ésta setecientas veinte veces menor que aquél, como escriben algunos. El primero que llamó triaka/da (triacada) la*

tercera década del mes 15; y también el primero, según algunos, que disputó de la Naturaleza.

([24] *He was the first to determine the sun's course from solstice to solstice, and according to some the first to declare the size of the sun to be one seven hundred and twentieth part of the solar circle, and the size of the moon to be the same fraction of the lunar circle. He was the first to give the last day of the month the name of Thirtieth, and the first, some say, to discuss physical problems. πρῶτος δέ καί τήν ἀπό τροπῆς ἐπί τροπήν πάροδον εὗρε, καί πρῶτος τό τοῦ ἡλίου μέγεθος, τοῦ ἡλιακοῦ κύκλου ὥσπερ καί τό τῆς σελήνης μέγεθος, τοῦ σεληναίου ἑπτακοσιοστόν καί εἰκοστόν μέρος ἀπεφήνατο κατά τινας. πρῶτος δέ καί τήν ὑστάτην ἡμέραν τοῦ μηνός τριακάδα εἶπε. πρῶτος δέ καί περί φύσεως διελέχθη, ὥς τινες*).

Asimismo, Tales de Mileto[16] fue el primero que observó que el Sol efectúa una vuelta o giro (*τροπή*) alrededor de los trópicos (*τροπικός*), vuelta que se da como un paso (*πάροδος*) que encuentra (*εὑρίσκω*) su marcha por el firmamento. Esta observación requiere la conceptualización de una franja alrededor del ecuador celeste, en la cual el Sol asciende o desciende según se mueva entre los trópicos de cáncer y capricornio; igualmente, se plantea la noción de la eclíptica que es propiamente el camino que recorre y encuentra el Sol en su marcha. Tal observación es la base para poder fundamentar una astronomía que nos permita acceder a estudiar y situar otros cuerpos situados en la bóveda celeste.

De igual manera, Tales fue el primero (*πρῶτος*) en aproximarse a una estrella (*ἄστρον*) sea en este caso el Sol (*ἥλιος*) a fin de establecer una medida (*μέτρον*) de su magnitud o tamaño (*μέγεθος*), lo cual involucra una aplicación práctica de la geometría en una observación de carácter científico. El valorar al Sol como un círculo (*κύκλος*), *ἡλιακοῦ κύκλου*, involucra estudiar la manera de rodearlo (*κυκλόω*) tal como (*ὥσπερ*) si fuéramos a compararla con la magnitud de la Luna (*σελήνη*). Estas consideraciones competen con el estudio de la periferia (*περιφέρεια*) de lo circular o la circunferencia (*περιφέρεια*) que lleva

[16] Es de la opinión de Walter Rouse Ball autor de *A Short Account of the History of Mathematics*, que Tales estudió astronomía y geometría en Egipto. Entre sus logros se destacan los siguientes: manifestó que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales; que si dos líneas rectas se cortan, los ángulos opuestos por el vertice son iguales. Un triángulo está determinado si se conoce su base y los ángulos de la base. Los lados de los triángulos equiangulares son iguales; un círculo puede ser bisectado por cualquier diámetro. También manifestó que Tales fue maestro de Pitágoras (pág. 11-12).

a sentar las bases de distintas geometrías, como la analítica y la esférica. La relación entre *Helios* (*Ἥλιος*) y *Selene* (*Σελήνη*), del que emana la luz y la que brilla (*σέλας*) fruto de reflejarla, es la relación que se da entre el año y el mes. Tales estimó o mostró (*ἀποφαίνω*) que tal diferencia es 700 (*ἑπτακοσιοστός*) veinte (*εἰκοστός*) veces una porción (*μέρος*) de él, consideraciones que hoy día se aplican para medir los distintos tamaños de los cuerpos celestes.

1.1.6. El planteamiento de un método científico de observación: del diseño del calendario lunar a la actividad magnética de la tierra.

Aristóteles e Hipias dicen que Tales atribuyó alma a cosas inanimadas, demostrándolo por la piedra imán y por el electro.

Pánfilo escribe que habiendo aprendido de los egipcios la Geometría, inventó el triángulo rectángulo en un semicírculo, y que sacrificó un buey por el hallazgo. Otros, lo atribuyen a Pitágoras (16), uno de los cuales es Apolodoro logístico. También promovió mucho lo que dice Calímaco en su Yambos haber hallado Euforbo Frigio, a saber, el triángulo escaleno, y otras cosas concernientes a la especulación de las líneas.

(*[24] Aristotle and Hippias affirm that, arguing from the magnet and from amber, he attributed a soul or life even to inanimate objects. Pamphila states that, having learnt geometry from the Egyptians, he was the first to inscribe a right-angled triangle in a circle, whereupon he sacrificed an ox. [25] Others tell this tale of Pythagoras, amongst them Apollodorus the arithmetician* (*It was Pythagoras who developed to their furthest extent the discoveries attributed by Callimachus in his Iambics to Euphorbus the Phrygian, I mean "scalene triangles" and whatever else has to do with theoretical geometry. Ἀριστοτέλης δέ καί Ἱππίας φασίν αὐτόν καί τοῖς ἀψύχοις μεταδιδόναι ψυχῆς, τεκμαιρόμενον ἐκ τῆς λίθου τῆς μαγνήτιδος καί τοῦ ἠλέκτρου. παρά τε Αἰγυπτίων γεωμετρεῖν μαθόντα φησί Παμφίλη πρῶτον καταγράψαι κύκλου τό τρίγωνον ὀρθογώνιον, καί θῦσαι βοῦν. [25] οἱ δέ Πυθαγόραν φασίν, ὧν ἐστιν Ἀπολλόδωρος ὁ λογιστικός. οὗτος προήγαγεν ἐπί πλεῖστον, ἅ φησι Καλλίμαχος ἐν τοῖς Ἰάμβοις Εὔφορβον εὑρεῖν τόν Φρύγα, οἷον "σκαληνά καί τρίγωνα" καί ὅσα γραμμικῆς ἔχεται θεωρίας*).

Tales fue el primero que habló (*εἶπον*) del mes lunar (*μηνός*) como un período de treinta (*τριακάς*) días (*ἡμέρα*), también fue el primero (*πρῶτος*) que discutió (*διαλέγω*) acerca (*περί*) de la naturaleza (*φύσις*). Aristóteles (*Ἀριστοτέλης*) e Hipias (*Ἱππίας*) le atribuyen (*φάσις*) que afirmó que el alma (*ψυχή*) participa (*μεταδίδωμι*) de lo inanimado (*ἄψυχος*), hecho que lo mostró o señaló (*τεκμαίρω*) en la piedra (*λίθος*) ambar (*ἤλεκτρον*) por su actividad magnética (*μαγνητικός*), como magneto (*μάγνης*) o también por su actividad eléctrica (*ἠλεκτρόομαι*). Se aprecia, en Tales, ese observador atento a todo lo que lo rodea, dotado de una enorme capacidad para preguntar y diferenciar los umbrales de lo indecible y lo decible de la vida y el mundo. El primero, lo indecible, gravita alrededor de la dinámica mitos-logos (*μῦθος-λόγος*), apreciado en aquellas narrativas, leyendas, historias y discursos en los que se elabora una concepción del ser humano y su entorno. Mientras el segundo, lo decible, es muy diferente ya que además de fundamentarse en una narrativa, se elabora a partir de una observación que hoy la calificaríamos de científica y que está más imbuida por un carácter epistemológico. Es a partir de los fenómenos (*φαινόμενον*) abordados como aquellas cosas visibles que nos posibilita recrear una modelación justificable por medio de una verificación empírica (*ἐμπειρῐκός*) de aquellos acontecimientos percibidos en la naturaleza. En la cual se requiere de unas destrezas propias de alguien familiarizado y experimentado (*ἐμπειρικός*) en aquello que es observado.

Es notable que el tipo de observación que realizó Tales viene acompañada en algunos casos de algunos instrumentos básicos, sea de unas reglas lineales o triangulares que permiten establecer ciertas mediciones (*μέτρον*) de la observación, susceptibles de algún tipo de geometrización a fin de poder inferir algunas conclusiones y en estrecha unión con una aritmética. En todos los casos se requiere anotar las observaciones a fin de encontrar similitudes o diferencias que nos conduzcan a alguna conclusión, las cuales se dan fruto de unas generalizaciones que se establecen como una normatividad que es constatada en los hechos que se desenlazan a lo largo de un año, mes o día. Se advierte cómo una gran curiosidad unida a una gran sensibilidad conduce a estar en alerta a fin de identificar los fenómenos que no son usuales, los cuales son recreados por medio de un tipo de explicación epistemológica (*ἐπιστήμη*), que busca encontrar alguna ley o norma que esté por encima (*ἐπί*) y que permita establecer (*ἵστημι*) ciertas conclusiones. Estas deben satisfacer por su propia condición cierta universalidad aplicable a todos los casos particulares donde se la desee verificar. Tales poseía la habilidad de moverse en variados estratos cognoscitivos de diversa naturaleza epistemológica, desde inferir la noción de mes a partir del período orbital sinódico de la Luna, pasando a plantear la relación del tamaño de la Luna en relación al Sol en base a la magnitud aparente observada en la bóveda celeste, a plantear nociones tan elaboradas como el flujo magnético (*μαγνητική ροή*) que se observa entre unas piedras de ámbar. Esto le lleva a conjeturar que el alma (*ψυχή*) habita lo inanimado (*ἄψυχος*). A esto habría que sumarle sus grandes aportes a nivel de la aritmética y la geometría que involucran la presencia de un pensamiento abstracto, capaz de fundamentar un saber que no depende del acaecer accidental y fenoménico propios del mundo cambiante, el cual gravita alrededor de la dinámica entre la vida y la muerte, que él mismo planteó, se puede superar bajo el tema del retorno reiterado del alma al mundo.

Se menciona en repetidas ocasiones la influencia de la cultura egipcia en los griegos, sin embargo, no es fácil precisar los alcances de ésta debido a la falta de pruebas exactas más documentadas. Dice Pánfilo de Epidauro (*Παμφίλη*), historiador del siglo I d.C. quien en su magna obra *Comentarios históricos*, tratado de la historia de Grecia escrita en 33 libros, dice que Tales aprendió (*μανθάνω*) de los egipcios (*Αἰγύπτιος*) a medir (*γεωμετρέω*), a su vez fue el primero que dibujó y esbozó (*καταγράφω*) e inscribió en el círculo (*κύκλος*) un triángulo (*τρίγωνο*) rectángulo (*ὀρθογώνιον*), motivo por el cuál ofreció en sacrificio (*θύω*) un buey (*βοῦς*). Es claro, que los egipcios al haber logrado construir aquellas enormes y exactas pirámides eran muy diestros en la geometría (*γεωμετρία*); sin embargo, establecer lo que él recibió de ellos y lo que es de su propia cosecha no es fácil. Se dice que fue él primero que logró relacionar el triángulo con la circunferencia, lo que permite derivar sinnúmero de relaciones importantes. No obstante, nos encontramos con otras dificultades ya que dicen algunos como Apolonio Logístico (*Ἀπολλόδωρος ὁ λογιστικός*) o Apolonio de Pérgamo, el gran geómetra del siglo II a. C., en su tratado sobre las *cónicas* (*Κωνικά*) dice que fue Pitágoras (*Πυθαγόρας*) él que logró tal desarrollo y no Tales. Otros, dicen como Calímaco (*Καλλίμαχος*), conocido poeta, crítico y académico del siglo III a. C., y vinculado a la Biblioteca de Alejandría, menciona en sus *Yambos de Euforbo* (*Ἰάμβοις Εὔφορβον*) − propios de la poesía yámbica que utiliza el yambo (*Ἴαμβος*), métrica compuesta de sílabas breves alternadas con sílabas largas − que Tales descubrió (*εὑρίσκω*) los triángulos escalenos (*σκαληνά καί τρίγωνα*); es decir aquellos triángulos cuyos lados son desiguales (*σκαληνός*) dado que no tienen la misma longitud. Asimismo, se le atribuye tener (*ἔχω*) una teoría (*θεωρία*) sobre los trazos y las líneas geométricas (*γραμμικός*), especulaciones y consideraciones cuyos alcances se desconocen hoy día.

1.1.7. El agua como el principio que fundamenta todo lo que existe

Tenemos que en dicha época se buscaba plantear aquel elemento que es el principio fundamental sobre el cual se asienta la realidad. En Tales de Mileto, este es el agua, mientras en Pitágoras es el fuego.

> *Dijo que «el agua es el primer principio de las cosas; que el mundo está animado y lleno de espíritus». Fue inventor de las estaciones del año, y asignó a éste trescientos sesenta y cinco días. No tuvo maestro alguno, excepto que viajando por Egipto se familiarizó con los sacerdotes de aquella nación. Jerónimo dice que midió las pirámides por medio de la sombra, proporcionándola con la nuestra cuando es igual al cuerpo. Y Minies afirma que vivió en compañía de Trasíbulo, tirano de Mileto.*
>
> (*[27] His doctrine was that water is the universal primary substance, and that the world is animate and full of divinities. He is said to have discovered the seasons of the year and divided it into 365 days. He had no instructor, except that he went to Egypt and spent some time with the priests there. Hieronymus informs us that he measured the height of the pyramids by the shadow they cast, taking the observation at the hour when our shadow is of the same length as ourselves. He lived, as Minyas relates, with Thrasybulus, the tyrant of Miletus.[27] Ἀρχήν δέ τῶν πάντων ὕδωρ ὑπεστήσατο, καί τόν κόσμον ἔμψυχον καί δαιμόνων πλήρη. τάς τε ὥρας τοῦ ἐνιαυτοῦ φασιν αὐτόν εὑρεῖν καί εἰς τριακοσίας ἑξήκοντα πέντε ἡμέρας διελεῖν. Οὐδεὶς δέ αὐτοῦ καθηγήσατο, πλὴν ὅτι εἰς Αἴγυπτον ἐλθὼν τοῖς ἱερεῦσι συνδιέτριψεν. ὁ δέ Ἱερώνυμος καί ἐκμετρῆσαί φησιν αὐτόν τάς πυραμίδας ἐκ τῆς σκιᾶς, παρατηρήσαντα ὅτε ἡμῖν ἰσομεγέθης ἐστίν. συνεβίω δέ καί Θρασυβούλῳ τῷ Μιλησίων τυράννῳ, καθά φησι Μινύης*).

Tales de Mileto manifestó que el principio (*ἀρχή*) de todo (*πᾶς*) está en el agua (*ὕδωρ*), es aquello que subyace como la hipóstasis (*ὑφίστημι*) o sustancia fundamental que soporta la realidad. Es de destacar cómo en el inicio de la misma fundamentación de la filosofía y de las ciencias, ocurre un esfuerzo consciente que busca construir oraciones plenas de sentido, soportadas en una semántica que brinda muchas oportunidades interpretativas de la realidad dada la abundancia de sus figuras literarias y de su fuerza retórica; asimismo, de una sintaxis muy sólida propia de la lengua griega clásica en sus distintas variantes; tal riqueza facilitó expresar ideas muy complejas como también la posibilidad de verse transformadas en proposiciones formales. No solo se está satisfaciendo una narrativa capaz de estimular un diálogo prolífero sino que, además, es una invitación directa a un tipo de pensamiento de carácter deductivo especulativo del cual surgirá tanto el pensamiento filosófico como el científico y, por ende, el matemático[17]. Se ve que en esta oración hay un determinante cuantificador como todo (*πᾶς*) que subyace al sintagma nominal que es el agua (*ὕδωρ*), que le antecede el sintagma determinante (*ἀρχή*) cuyo núcleo es el determinante. A su vez, está el sintagma verbal, representado por el verbo hipóstasis (*ὑφίστημι*), siendo el núcleo sintáctico la palabra todo (*πᾶς*), aquel morfema que determina todas las propiedades sintácticas y combinatorias del sintagma. Lo que nos podría llevar a escribir una proposición que comienza con un cuantificador universal que es capaz garantizar que todo aquello sobre lo que se predica se va a cumplir: *todo desde el origen está hipostasiado por el agua*. Se aprecia cómo la misma lengua griega tenía una riqueza tal que le permitía construir oraciones capaces de estimular una reflexión formal de gran complejidad. También se infiere que ese origen (*ἀρχή*) no estaba vacío sino ocupado por el agua (*ὕδωρ*), que al llenarlo todo otorga existencia a aquello que se deriva de él, una reflexión directa a que la vida tal como la conocemos aparece y nace del agua. Basta ver cómo los humanos nacemos en medio del agua o líquido amniótico de la placenta. Tal concepción nos muestra que los griegos eran ajenos a la existencia de la nada como un estadio que se sitúa como lo primero (*πρῶτος*), razón por la cual les fue imposible concebir

[17] Es de la opinión de Carl Boyer, en su libro: *A History of Mathematics*, que Tales fue un discípulo de los egipcios y los caldeos. Fue el primer matemático verdadero, él que planteó la organización deductiva de la geometría (pág. 50).

el cero[18] que es una representación de la nada, aquel número cardinal situado antes del uno y que denota una ausencia de cantidad. En ese sentido, el cero se asemejaría al arché (*ἀρχή*) como fundamento, que en vez de estar vacío está lleno de agua (*ὕδωρ*), de manera análoga tal concepto involucra un estadio de individualización o singularidad como origen y sustrato de todo cuanto existe. El agua como arché (*ἀρχή*) involucra que es el gobernante o el arconte (*ἄρχων*), como regente (*ἀρχός*), que es lo primero que comienza a gobernar (*ἄρχω*).

1.1.8. La inmortalidad relativiza la existencia

Tales de Mileto afirmaba que el alma es inmortal, y tal posición pudo haber sido influenciada por sus viajes y estadías en el Antiguo Egipto. De igual manera, aquel planteamiento tan presente en muchas narraciones acerca del origen del universo, donde se afirma: que lo que se tuvo primero fue la noche o la oscuridad antes que la luz o el día.

> *«Pues ¿por qué no te mueres tú?», respondió: «Porque no hay diferencia». A uno que deseaba saber qué fue primero, la noche o el día, respondió: «La noche fue un día antes que el día».*
>
> (*He held there was no difference between life and death. "Why then," said one, "do you not die?" "Because," said he, "there is no difference." [36] To the question which is older, day or night, he replied: "Night is the older by one day." οὐδέν, ἔφη, τόν θάνατον διαφέρειν τοῦ ζῆν. "σύ οὖν," ἔφη τις, "διά τί οὐκ ἀποθνήσκεις;" "ὅτι," ἔφη, "οὐδέν διαφέρει." [36] πρός τόν πυθόμενον τί πρότερον γεγόνοι, νύξ ἢ ἡμέρα, "ἡ νύξ," ἔφη, "μιᾷ ἡμέρᾳ πρότερον"*).

[18] El número cero involucra un nivel de abstracción enorme, muy ligado su origen en la India antigua y que los árabes lo tomaron llamándolo *sifr* صِفْر, que es el cero o lo vacío deriva de *safara* صَفَرَ que significa estar vacío, una alusión al estado de la luna nueva cuando parece desaparecer. El concepto del número cero aparece tan solo en el siglo VII d. C. en la India con el matemático Brahmagupta (en sánscrito ब्रह्मगुप्त) autor del tratado *Brāhmasphuṭasiddhānta* (*Extensive Treatise of Brahma*) escrito en el año 628 d.C. que comprende dos trabajos uno en matemáticas y otro en astronomía. Brahma es el Dios de la creación, con lo cual el origen de tal concepto está fundamentado en el vacío como *śūnyatā*, aquello que carece de realidad, lo que no es, lo insustancial, lo vacío, la vacuidad. Este término proviene del sánscrito □□□□□□□ *(śūnyatā)*, la calidad de lo vacío, siendo *śūnyá:* 'vacío' y *tvā:* 'cualidad'. *Śūnyatā* significa también que no existe nada que no posea una existencia o esencia individual, todo lo que existe está relacionado y la pluralidad de los seres vivos que hay es una ilusión. Con lo cual, tal concepto involucra el uso de un cuantificador universal, el cero lo antecede todo, y en ese sentido involucra la existencia de un único estadio singular no pluralizado como fundamento de todo lo que existe.

La cita comienza con la forma pronominal "*de ninguna manera*" (*οὐδέν*) constituida por *οὐδέ* "ni siquiera, pero no, ninguno" y el *εἷς* "el número cardinal uno" que es una forma de potencializar la acción del verbo que sigue, *φημί,* que es decir o hablar, que es convergente por la acción misma del número uno que hace parte de la raíz. Este pronombre sintetiza y le aporta fuerza al protocolo que acompaña la introducción de las citas aludidas al propio Tales y que va acompañada de manera previa por esa recreación del diálogo sostenido entre nuestro sabio y su interlocutor. Se advierte aquí cómo la enseñanza y el ejercicio del mismo *logos* como epistemología se da a través de la acción de la palabra viva asumida bajo la forma del diálogo o la acción hablativa entre los dos hablantes (*διάλογος*) que están efectuando una acción locucionaria: aquel *logos* (*λόγος*) que se ve atravesado por la luz misma de la divinidad instaurando la comunicación y la comprensión en el diálogo. Qué más preguntar sino sobre aquello donde se desdibuja los linderos mismos de la realidad conocida, aquel contexto donde ella misma está en pos de los entornos de lo desconocido y lo inevitable frente a lo cual todo ser vivo está sujeto e impelido a experimentar y padecer: la muerte misma, el *thánatos* (*θάνατος*), sobre el cual debemos de pasar en medio o atravesar (*διαφέρω*), verbo constituido por la preposición a través de o entre (*διά*) y el verbo llevar encima o transportar (*φέρω*). La acción que este verbo sugiere es que aún en el diario vivir cada uno de nosotros llevamos consigo aquello que va acarrear la finalización o conclusión de nuestra propia existencia, donde ella se resume y se realiza en plenitud. El mismo verbo *diaphérō* (*διαφέρω*) también significa aquello que se pasa de unos a otros con la potestad de diferenciar, y qué más diversificación que la vida (*ζωή*) misma de las criaturas animales (*ζῷον*) que adquiere en el ser humano su expresión máxima y a la vez finita, como aquel aspecto singular característico de la vida. Se trata de una forma de expresar que la vida y la muerte van juntas, se acompañan, la una tan solo puede existir y darse gracias a la otra; son la expresión de una misma onda con sus crestas y sus valles, alusión directa a cómo la vida y la muerte se alternan y son la expresión de un mismo acontecimiento existencial. A su vez, la vida se le debe a Divinidad representada en el Padre de los Dioses, hecho que se evidencia en Zeus (*Ζεύς*), cuya forma poética se escribe como *Zḗn* (*Ζήν*); este aspecto está muy emparentado con las distintas conjugaciones de presente indicativo del verbo vivir *ζάω*, en especial, las del singular de la segunda *ζῇς* y tercera persona *ζῇ* que corresponde también a la forma imperativa *ζῇ*, clara referencia a que la vida se debe a Dios y gravita alrededor suyo.

"*Ninguno, expresó, atraviese la muerte*" (*ἀποθνῄσκω*), que conlleva la preposición *ἀπό*- (lejos de) + *θνῄσκω* (morir), "que decir que cualquiera pueda cruzarla". En dirección a lo que se aprende (*πῠνθάνομαι*) y que está antes, instaurando una superioridad (*πρότερος*), acarreando un nuevo estadio de existencia como aquella instancia que la genera (*γίγνομαι*). Surge entonces la pregunta: ¿Qué está primero la noche (*νύξ*) o el día (*ἡμέρα*)? Ciertamente, la noche; no obstante, tenemos otros significados para la palabra día (*ἡμέρα*), que es un período de la vida o el mismo tiempo evocado de manera poética. De la noche que precede, surge y comienza el día, que trae la vida organizada por la existencia del tiempo.

1.1.9. Lo divino nos habita por completo en el diario vivir

Apreciamos en Tales de Mileto a aquel pensador que ha logrado conciliar su vida contemplativa muy influenciada por la ciencia con aquellos temas propios de una teosofía, en la cual los dioses pueden testificar por completo cualquier actividad humana; de alguna manera, lo divino nos habita por entero, está presente en toda actividad que realicemos y en todo lo que pensemos o sintamos.

> *Preguntándole otro si los dioses veían las injusticias de los hombres, respondió: «Y aun hasta los pensamientos». A un adúltero que le preguntó si juraría no haber adulterado, respondió: «Pues ¿no es peor el perjurio que el adulterio?»*
>
> (*Someone asked him whether a man could hide an evil deed from the gods: "No," he replied, "nor yet an evil thought." To the adulterer who inquired if he should deny the charge upon oath he replied that perjury was no worse than adultery. ἠρώτησέ τις αὐτόν εἰ λήθοι θεούς ἄνθρωπος ἀδικῶν: "ἀλλ᾽ οὐδέ διανοούμενος," ἔφη. πρός τόν μοιχόν ἐρόμενον εἰ ὀμόσειε μή μεμοιχευκέναι, "οὐ χεῖρον," ἔφη, "μοιχείας ἐπιορκία"*).

Cuando se le preguntó (*ἐρωτάω*), si (*εἰ*) a los dioses (*θεός*) se les escapaba notar (*λανθάνω*) en los hombres (*ἄνθρωπος*) su manera equivocada de actuar (*ἀδικέω*); aquella propia de los injustos (*ἄδικος*), en cuanto carecen de justicia (*α*- sin + *δίκη* justicia), la cual cobija no solo la ley como tal sino también las maneras de comportarnos de manera correcta y ordenada. A ello dijo (*φημί*): aún (*ἄλλος*) también (*οὐδέ*) lo que se tiene en la mente (*διανοέω*), aquello que está atravesado (*δια*) por el entendimiento y la percepción (*νοέω)* propia del *nous* (*νοῦς*). En todos estos comentarios, se ha de resaltar aquella reflexión formal en la cual existe un ordenamiento propio de las facultades cognitivo-sensibles, en concordancia con el antropocentrismo excelso de los dioses, en los cuales se recrea aquello que el ser humano debe propender desarrollar y adquirir en su propia naturaleza a fin de lograr armonizar su vida y elevar su condición mortal. Se aprecia en los planteamientos de Tales unos dioses que han logrado superar aquellas condiciones propias de los hombres como son los malos hábitos; es una concepción que se aleja de la parte mitológica tan influenciada por aquellos dioses que actúan muchas veces fuera de los patrones dictados por la justicia (*δίκη*). Esta concepción la divinidad es sinónimo de rectitud, y al igual que el hombre está gobernado por los principios del recto pensar y la imparcialidad en la manera de conducirse en los asuntos del diario vivir. A su vez, se plantea cómo la divinidad es capaz de sentir y percibir todo lo que los seres humanos experimentan a unos niveles superiores muy por encima de la competencia misma de los hombres. Esta condición hace que el la humanidad pueda mejorar al tener la tutoría y el ejemplo de los seres perfectos e inmortales, quienes tienen la potestad de contactar los planos más profundos de la interioridad no existiendo ningún secreto que no lleguen a conocer a plenitud. Y, aún, cuando se está en presencia de un adúltero (*μοιχός*) que jura (*ὄμνυμι*) no (*μή*) haber cometido adulterio (*μοιχεύω*) respondió: no (*οὐ*) es peor (*χείρων*) el perjurio (*ἐπιορκία*) al adulterio. En esta respuesta, se nota la importancia de la palabra y de lo que uno se compromete con ella, hecho que anticipa el meta símbolo de la aseveración $\vdash$, donde el interlocutor se compromete que lo dicho por él, es verdadero. En ese sentido el lenguaje, que es el vehículo por el cual transita el *logos*, posee una importancia mayor que las acciones no edificantes realizadas por el mismo hombre, que aunque las premeditemos en silencio son menos graves que si afirmamos bajo juramento que no las hicimos.

1.1.10. El conocerse a sí mismo, es lo que nos permite construirnos a nosotros mismos

En el Templo de Apolo en Delfos se encontraba una sentencia que decía: conócete a ti mismo (*γνῶθι σεαυτόν*), la cual ha sido atribuida a muchos de los grandes sabios de la antigüedad griega; entre ellos a Tales de Mileto, a Heráclito, a Pitágoras, a Socrates, a Solón de Atenas. En fin, podemos apreciar en la misma sentencia ese espíritu propio de aquellos buscadores de la verdad, cuya tarea fundamental comienza en llegar a conocerse a sí mismos antes que todo lo demás.

> *Preguntado qué cosa es difícil, respondió: «El conocerse a sí mismo». Y también, qué cosa es fácil, dijo: «Dar consejo a otros».*
>
> (*[36] Being asked what is difficult, he replied, "To know oneself." "What is easy?" "To give advice to another" ἐρωτηθείς τί δύσκολον, ἔφη, "τό ἑαυτόν γνῶναι:" τί δέ εὔκολον, "τό ἄλλῳ ὑποθέσθαι*).

Preguntado (*ἐρωτάω*), qué es arduo o difícil (*δύσκολος*) dijo (*φημί*): *conocerse a sí mismo* (*"τό ἑαυτόν γνῶναι:"*); se nota que esta sentencia es el eje alrededor del cual se construye toda la filosofía y es el fundamento de toda actividad u obra humana. Y preguntado, que cosa es fácil (*εὔκολος*): *dar consejo a los otros* ("*τό ἄλλῳ ὑποθέσθαι*"). Este razonamiento es una consecuencia derivada del anterior, en cuanto si el llegar uno a conocerse a sí mismo es algo tan difícil, cómo podemos pretender sugerir a los demás lo que deben de hacer. Uno de los propósitos centrales de estas reflexiones es establecer que el origen del pensamiento matemático, tanto antiguo como moderno, deriva de este tipo de sentencias, las cuales encierran un profundo contenido cognoscitivo capaz de colonizar todas las áreas del conocimiento. En la primera sentencia podemos apreciar la propiedad reflexiva expresada como aRa, a = a. Dado que todo está constantemente fluyendo, como bien lo anotó Heráclito[19], tenemos que la propiedad predominante sería una de naturaleza irreflexiva o antireflexiva; sin embargo, dado que es aquella relación donde ningún elemento está relacionado consigo mismo, como lo es la relación de "mayor que" en los números reales. Sin embargo, tal planteamiento va aún más lejos, ya que se tiene una relación reflexiva que es cambiante, una suerte de propiedad reflexiva dinámica donde aRa', a ≠ a', pudiéndose dar en medio de una cadena reflexiva diferenciada de relaciones construida a nivel binario: aRa', a'Ra'', a''Ra''',.., donde a ≠ a' ≠ a'' ≠ a'''≠… ≠ a^n. También cabría preguntarse, si en la propiedad antireflexiva el inverso es distinto: aRa' es igual o no a a'Ra. Este tema es de enorme interés en relación a las matrices, a los vectores propios (*eigenvektor*) y los valores propios (*eigenwert*), la cual tiene en cuenta la actividad formal que subyace en el conocerse a sí mismo, sin embargo, tal propiedad reflexiva es más una propiedad antireflexiva. A su vez, la dificultad de aconsejar a otros muestra la propiedad simétrica: aRb y bRa, que también toca el problema de lo que es lo uno y lo que es lo otro, apreciable como la mismidad y la otreidad.

1.1.11. El planteamiento de una teología fundamentada en un único Dios

Es de resaltar en Tales de Mileto la concepción de reconocer un solo Dios, en el sentido que está fuera de las consideraciones propias de los mitos y sus generalogías. Se aprecia en Tales aquel pensador y científico que comprende que lo divino está más allá de los linderos de una construcción antropomorfa centrada en el ser humano como el eje de la creación o de todo lo que existe. Tales asume una posición que tiene una gran profundidad y que subordina el mito al *logos* entendido como aquel discurso reflexivo argumentable.

> *¿Qué cosa es suavísima? «Conseguir lo que se desea». ¿Qué cosa es Dios? «Lo que no tiene principio ni fin».*

[19] Platón cita a Heráclito en su diálogo *Crátilo*: "*todas las entidades se mueven y nada permanece en reposo*" (*τά ὄντα ἰέναι τε πάντα καί μένειν οὐδέν*, *All entities move and nothing remains still,* 401 d) y "*todo cambia y nada permanece quieto y tú no puedes sumergirte dos veces en la misma corriente*" (*πάντα χωρεῖ καί οὐδέν μένει, καί, δίς ἐς τόν αὐτόν ποταμόν οὐκ ἂν ἐμβαίης,* 402a. *Everything changes and nothing remains still, and, you cannot step twice into the same stream*).

(*[36]"What is most pleasant?" "Success." "What is the divine?" "That which has neither beginning nor end." τί ἥδιστον, "τό ἐπιτυγχάνειν:" τί τό θεῖον, "τό μήτε ἀρχήν ἔχον μήτε τελευτήν"*).

Preguntado, ¿qué te es placentero (*ἡδύς*)?, respondió: lograr dirigirse hacia la realización de los propios propósitos, lo que puede involucrar conocer nuevas personas y tener que desplazarse hacia un nuevo lugar (*ἐπιτυγχάνω*, unión de la preposición *ἐπι* que involucra desplazamiento y el verbo *τυγχάνω* que indica la realización de una meta o un objetivo); muy unido a la noción del éxito (*επιτυχία*). En este contexto, se resalta que algo que brinda una profunda satisfacción, es lograr alcanzar las metas que uno se ha propuesto en la vida; algo que de alguna manera está insertado en el diálogo de uno consigo mismo mediado con el de los demás. Se resalta la realización práctica de las metas, y este hecho exige mucho dado que una cosa es imaginar lo que uno quiere, y otra tener la competencia de poderlo llevar a cabo en hechos concretos. Preguntado, ¿Quién es Dios? Respondió: *El que no (μήτε) tiene (ἔχω) comienzo (ἀρχή) ni tampoco (μήτε) fin* "*τό μήτε ἀρχήν ἔχον μήτε τελευτήν.*", dado que no puede agotar sus logros (*τελευτάω*), es aquel que está más allá de cualquier proceso de realización, terminación o consumación. Vocablo relacionado con *teleutaîos* (*τελευταῖος*) que es último y *teleutḗ* (*τελευτή*) que es final, en unión a la desinencia que recae en el morfema -*αῖος*. Este comentario reviste una importancia capital dado que muestra que los griegos antiguos habían desarrollado una reflexión bastante profunda de la existencia de la divinidad, como aquello que carece de comienzo y de fin. Este concepto se ve muy reflejado en los mismos conjuntos numéricos, sean los enteros o los reales, en cuanto si se consideran los primeros como la unión de los enteros negativos con los enteros positivos: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3,...\}$, no están acotados ni inferior ni superiormente, al no tener ínfimo ni supremo, nos recrea aquello que figurativamente no tiene un origen ni un fin. Se advierte cómo los números, de alguna manera, muestran esta propiedad que caracteriza a la divinidad y tal análisis es llevado a su máxima expresión con la teoría de los números transfinitos de Georg Cantor[20]. Se puede

[20] Ver: *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, por Georg Cantor. Es de destacar que Cantor fue un individuo profundamente religioso, él mismo manifestó que su teoría se inspiró en Dios.

decir que la esencia del número está relacionada de manera íntima a algunos de los atributos que se dice que posee la Divinidad o Dios, siendo gran parte de la tarea de la misma matemática encontrar nuevos caminos a fin que sus respuestas y soluciones se aproximen a recrear y modelar la realidad propia de aquello que supera cualquier tipo de teoría, la incompletitud de cualquier sistema axiomático[21] es un reconocimiento de la naturaleza impensable propia de Dios (*θεῖος*).

1.1.12. La elaboración de una ética con base en la observación propia y de los demás

Es de resaltar que todo el que comienza a cultivar ese asombrarse, fruto de mirar las cosas (*θεάομαι*), aquellas maravillas (*θαῦμα*) que nos dejan sin palabra, es alguien que en este caso comienza a formalizar una ciencia que va desde las matemáticas y lo que conocemos hoy día como la física. Se resalta la integridad ética de este buscador que tiene una escala de valores bien definida sin caer en los excesos propios de los que viven en un mundo aparente y fugaz.

> *¿Qué cosa vemos raras veces? «Un tirano viejo». ¿Cómo sufrirá uno más fácilmente los infortunios? «Viendo a sus enemigos peor tratados de la fortuna». ¿Cómo viviremos mejor y más santamente? «No cometiendo lo que reprendemos en otros». ¿Quién es feliz? «El sano de cuerpo, abundante en riquezas y dotado de buena educación».*
>
> (*To the question what was the strangest thing he had ever seen, his answer was, "An aged tyrant." "How can one best bear adversity?" "If he should see his enemies in worse plight." "How shall we lead the best and most righteous life?" "By refraining from doing what we blame in others." [37] "What man is happy?" "He who has a healthy body, a resourceful mind and a docile nature" τί δέ καινόν εἴη τεθεαμένος ἔφη*: "*γέροντα τύραννον.*" *πῶς ἄν τις ἀτυχίαν ῥᾷστα φέροι*, "*εἰ τούς ἐχθρούς χεῖρον πράσσοντας βλέποι*:" *πῶς ἂν ἄριστα καί δικαιότατα βιώσαιμεν*, "*ἐάν ἃ τοῖς ἄλλοις ἐπιτιμῶμεν, αὐτοί μή δρῶμεν*:" *[37] τίς εὐδαίμων, "ὁ τό μέν σῶμα ὑγιής, τήν δέ ψυχήν εὔπορος, τήν δέ φύσιν εὐπαίδευτος*").

[21] Tema expuesto en: *Undecidable Theories, por Alfred Tarski, quien buscó encontrar otra vía a la de Gödel.*

¿Qué cosas nuevas (*καινός*) nos permitimos (*ἐάω*) observar (*θεάομαι*)?, a lo cual respondió: *un tirano (τύραννος) viejo (γέρων)*. Se advierte así cómo existe una condición moral, entendida como aquello que amerita ser mirado y admirado, ya que nos aporta un consejo del cual se desprende alguna lección. En este contexto, se aprecia quien en otrora poseía un poder despótico (*τυραννία*), en su vejez merma. Es de resaltar en relación con este tema, que aquel individuo inmerso en las matemáticas, la ciencia y la filosofía tiene una actitud austera frente a lo que ve, siempre en procura de aprender algo de los demás. Cómo puede alguien afectado por el infortunio (*ἀτυχία*) llevar (*φέρω*) una actitud apacible (*ῥᾴδιος*): sí (*εἰ*) ve (*βλέπω*) a los enemigos (*ἐχθρός*) padeciendo (*πράσσω*), "*εἰ τούς ἐχθρούς χεῖρον πράσσοντας βλέποι*". Se da una especie de ley de reciprocidad de la vida en la cual cuando alguien es aquejado por la desventura, aún los que no le son afectos también pueden padecerla, aspecto que muestra que nada ni nadie está exento a sufrir lo que en un momento nos puede llegar a nuestra cotidiana existencia. Cómo honraremos (*ἐπιτιμάω*) en otros (*ἄλλος*) lo que no (*μή*) logran (*δράω*) realizar por sí mismos (*αὐτός*): quienes estén bendecidos por tener un buen genio (*εὐδαίμων*), es decir quien tiene un buen (*εὖ*) dáimon (*δαίμων*), o sea se ve habitado por un buen espíritu. Se nota en este vocablo la presencia de una dimensión espiritual que involucra una interiorización en la naturaleza de la conciencia (*συνείδησις*), donde se comienza a percibir los propios pensamientos y aquello que los puede subyacer. Estamos frente a la existencia de algo que no es material y que de alguna manera nos gobierna y aporta la fortuna que va a gobernar nuestras vidas. El tema de la felicidad está dado por tener y verse habitado por un buen *dáimon*, en la que se nota la precedencia de los planos superiores de naturaleza no material sobre los planos inferiores gobernados por los elementos y la materia. Este hecho se ve reafirmado frente a la respuesta que concierne al cuerpo (*σῶμα*), vocablo que también hace alusión a la vida física; asimismo, a una cosa completa como a un objeto matemático tridimensional, cuerpo que debe de estar sano (*ὑγιής*): se ve cómo la concepción del cuerpo evolucionó dentro de las matemáticas a verse nombrado como la cosa[22] que, además, debe disfrutar de cierta

[22] Uno de los logros más importantes es la definición de número de Gottlob Frege: el número es la cosa (*Die Zahl ist eine Ding*), tema expuesto en *The Foundations of Arithmetic*, (pág. 11). Este hecho es resaltado por Bertrand Russell en *Introduction to Mathematical Philosophy*, para llegar a su propia definición: el número de una clase es la clase de todas las clases que son similares (pág. 15).

solidez reflejada en la fortaleza de sus planteamientos. De ahí que un sujeto sano y dotado de una comprensión apropiada, se vea reflejado en los entes matemáticos que buscan emular dichas propiedades, hecho muy palpable en la lógica y en la consistencia de las propuestas formales. A su vez, es dueño de una vida y espíritu (*ψυχή*) próspero (*εὔπορος*), aquel que posee una euforia (*εὐπορία*) que atrae riqueza, abundancia y prosperidad. Además, al estar dotados de una *physis* (*φύσις*) tenemos la potestad de desarrollar, producir y hacer crecer (*φύω*) una buena educación (*εὐπαίδευτος*) que nos capacita mejor. Se ve que la tenencia de una buena educación (*παιδεία*), algo muy unido a la manera de criar (*παιδεύω*) a los niños (*παῖς*), hace que a la vida no le falte nada ni en lo material ni en lo espiritual.

1.1.13. La buena conducta fundada en la amistad, y el cuidado de la propia interioridad

En este texto se aprecia uno de los inicios tempranos de la filosofía, fundamentada en ese amor filial (*φίλος*) hacia lo que es bueno, virtuoso y bello (*καλός*); en especial, encaminada hacia el logos (*λόγος*), como aquella palabra que encierra la sabiduría cuando es ejercitada con sabiduría y dominio de las virtudes. Se resalta que lo más importante está dentro de uno mismo, es lo que hay que cuidar y hermosear:

> *Decía que «nos debemos acordar de los amigos ausentes tanto como de los presentes. Que no el hermosear el exterior es cosa loable, sino el adornar el espíritu con las ciencias». «No te enriquezcas -decía también- con injusticias; ni publiques secreto que se te ha fiado.*
>
> ([37] *He tells us to remember friends, whether present or absent; not to pride ourselves upon outward appearance, but to study to be beautiful in character. "Shun ill-gotten gains," he says. "Let not idle words prejudice thee against those who have shared thy confidence." φίλων παρόντων καί ἀπόντων μεμνῆσθαί φησι: μή τήν ὄψιν καλλωπίζεσθαι, ἀλλά τοῖς ἐπιτηδεύμασιν εἶναι καλόν. "μή πλούτει," φησί, "κακῶς, μηδέ διαβαλλέτω σε λόγος πρός τούς πίστεως κεκοινωνηκότας"*).

Tales decía (*φημί*) que hay que recordar (*μιμνήσκω*) a los amigos (*φίλος*) que están presentes (*πάρειμι*) como a los ausentes (*ἄπειμι*): no (*μή*) hermosear la apariencia o aspecto (*ὄψις*) de la cara (*καλλωπίζω*), sino procurarse (*ἐπιτήδευμα*) lo que es correcto y bueno (*κάλως*). Así que, desde esos tiempos inmemoriales, el pensamiento griego se estructuró alrededor de una tendencia a tomar distancia de la inmediatez de la cotidianeidad gobernada por los constantes cambios de lo aparente y en centrarse en el componente de los valores que trascienden la apariencia tan apetecida por los sentidos. Este proceso reflexivo fue fundamental para la instauración del pensamiento formal de tipo abstracto, que requiere aprehender las formas puras que nos traen la percepción y aquellos procedimientos universales representativos de una acción verbal. En la acción de contar algo se está contextualizando un estado metaverbal que favorece el aprendizaje como también la posibilidad de simbolizar de manera abstracta un verbo capaz de representar la acción predicativa de un conjunto de verbos. Tal hecho se ve reflejado en el operador de la suma que tiene la posibilidad de expresar los demás operadores aritméticos en términos de él mismo, cumpliéndose la condición de poder aseverar la cuantificación a nivel universal de cualquier ente. Es notable que el número uno recoge aquel término también de naturaleza universal que posee una doble función: por una parte, ser el constituyente que denota la completitud de lo numérico y, por otra, poder representar una variable libre de naturaleza universal capaz de verse ligada en una predicación particular, como un individual capaz de señalar objetos concretos y nombrarlos como tales. Todo este pensamiento abstracto, en especial, el mismo hecho de plantear la existencia del número como aquella realidad que copia lo esencial sin posibilidad de distorsionar la realidad fenoménica, la cual es trascendida y sintetizada en la ciencia de los números o la aritmética. Al mismo tiempo se nota esa preocupación por lo que es verdadero tanto a nivel de la belleza exterior e interior que viene acompañado por unas cualidades morales que lo legitiman y le da una unidad de coherencia simétrica. Tales decía que no había que enriquecerse (*πλουτέω*) con aquello que maltrata, que es propio de lo que es malo (*κακός*). La palabra (*λόγος*) nos permite cruzar (*διαβάλλω*) en dirección (*πρός*) a la confianza (*πίστις*) depositada fruto de un ambiente de confraternidad (*κοινωνέω*). La fundamentación ética y moral griega gravita alrededor en aquella capacidad de poder confiar en el otro (*πείθω*), hecho que hace que la reflexión filosófica esté amparada en un sujeto que se ha conquistado a sí mismo en lo cotidiano. Este hecho posibilita que se pueda ocupar en temas que requieren una subjetividad (*υποκειμενικότητα*) más desarrollada; de una dimensión subjetiva (*ὑποκείμενον*) capaz de pensar temas complejos, tan solo posible si la actividad reflexiva descansa en un sujeto que es coherente consigo mismo y con los demás. Si consideramos que el sujeto es algo que está debajo (*ὑπόκειμαι*) soportando nuestro comportamiento, no en vano es aquello que está descansando o situado (*κεῖμαι*) debajo (*ὑπό*).

1.1.14. El bien se manifiesta de manera recíproca hacia los otros como hacia uno mismo

Se aprecia, enesta forma, la elaboración de una ética que está asociada al comportamiento que se tenga en la familia, en especial, con los padres e hijos. Se nota a este respecto, cómo la familia como célula, es el fundamento de la vida comunitaria y debe de estar revestida de un buen clima de convivencia y respeto. Sin ello, no es posible el desarrollo interior.

> *El bien que hicieres a tus padres, espéralo de tus hijos.*
>
> ([37]*"Whatever provision thou hast made for thy parents, the same must thou expect from thy children." "οὓς ἂν ἐράνους εἰσενέγκῃς," φησί, "τοῖς γονεῦσιν, τούς αὐτούς προσδέχου καί παρά τῶν τέκνων"*).

Al asistir Tales a aquellas charlas intelectuales conocidas como *éranos* (*ἔρανος*), se trae algo (*εἰσφέρω*) de las mismas; se trata de una cena compartida donde los comensales aportan algo; al respecto dijo: lo que bienvenidamente brindes (*προσδέχομαι*) a tus progenitores (*γονεύς*), espéralo también de tus hijos (*τέκνον*). Es una muestra de la ley de la compensación que mantiene el equilibrio entre todos los seres vivientes, lo que una vez más lleva a esa enorme preocupación por la manera en que uno se ha de conducir frente a sí mismo y ante los demás. Es una indicación clara que el surgimiento del conocimiento y de la palabra (*λόγος*), solo es posible en una sociedad que es profundamente moral, que no es posible acceder a las profundidades del *logos* si no se ha logrado una altura moral que permita poder aprehender lo que está reservado a los justos. Una vez más se percibe cómo el pensamiento griego logró llegar tan alto debido a que fue una lenta y gradual evolución, que marchó de manera pareja en donde los presupuestos pasados fueron trabajados y vueltos a ser pensados, siendo sentidos a lo largo de muchas generaciones hasta lograr un refinamiento y profundidad rara vez lograda por una colectividad humana organizada. Aunque hayan existido variadas corrientes de pensamiento, se refleja que lo observado por los antepasados fue retomado y mejorado a lo largo de los siglos. Esa unidad reflexiva tan matizada le permitió a los helenos llegar muy lejos en todas las artes (*τέχνη*) y ciencias (*ἐπιστήμη*); este refinamiento se apoyó en un lenguaje muy sofisticado que permitió grandes conquistas, en especial, en la filosofía. Estas consideraciones éticas de Tales de Mileto quizá adquieren una plenitud en la noción del Bien en *La República*[23] (*Politeia, Πολιτεία*) de Platón, que recoge varios siglos de reflexión colectiva.

1.1.15. Tales de Mileto como uno de los primeros meteorólogos

El hecho de tener la capacidad de diseñar un calendario lunar, así como de observar el comportamiento de los metales a nivel magnético, hace de Tales de Mileto un observador agudo de la naturaleza en torno suyo, en especial, de todos los fenómenos derivados de la misma. Influenciado por su estadía en el Antiguo Egipto y dado su carácter investigador, se lo reconoce como uno de los primeros científicos en el sentido moderno del término: aquel individuo que busca encontrar una explicación coherente y verificable frente a los sucesos que acontecen alrededor suyo, y que otros bajo igualdad de condiciones pueden verificar y constatar. En tales observaciones se tiene la presencia clara de un método científico, donde se esboza una teoría que busca explicar de manera universal unos fenómenos fruto de unas observaciones rigurosas que tienen en cuenta toda una serie de situaciones concretas.

> *Fue de opinión que las inundaciones del Nilo son causadas por los vientos etesios que soplan contra la corriente.*

---

[23] Tema tratado por Platón en la *República*, en 508e: - *Puedes, por tanto, decir que lo que proporciona la verdad a los objetos del conocimiento y la facultad de conocer al que conoce, es la idea del bien, a la cual debes concebir como objeto de conocimiento, pero también como causa de la ciencia y de la verdad*.

([37] *He explained the overflow of the Nile as due to the etesian winds which, blowing in the contrary direction, drove the waters upstream. τόν Νεῖλον εἶπε πληθύειν ἀνακοπτομένων τῶν ῥευμάτων ὑπό τῶν ἐτησίων ἐναντίων ὄντων*).

Tales dijo (*εἶπον*) que las inundaciones del Nilo (*Νεῖλος*) se deben a los vientos etesios[24] (*ἐτήσιος*); aquellos que tienen una periodicidad anual, que multiplican e incrementan (*πληθύνω*) las corrientes (*ῥεῦμα*) y las hacen retroceder (*ἀνακόπτω*) desde abajo (*ὑπό*) en dirección contraria u opuesta (*ἐναντίος*) a las cosas existentes (*ὄντα*). Cabe anotar que los acontecimientos del mundo antiguo tenían una amplia divulgación, que ningún país o comunidad estaba aislada, que muchas de las situaciones que se daban eran analizadas y estudíadas por todos, lo que muestra una unidad vivencial cognoscitiva que trascendía las fronteras de los pueblos que, en el caso de las comunidades helenas, se constituía bajo un esfuerzo conjunto que comenzaba a recrear una propuesta teórica fundamentada en una modelación de la realidad. En ella se encuentra la semilla del método científico actual que parte de observaciones atentas capaces de alguna generalización y verificables bajo una abstracción directa de los hechos.

Se considera que Pitágoras fue enseñado por Tales; no obstante, sus dos discípulos más conocidos fueron Anaximandro de Mileto y Anaxímenes de Mileto. Cabe ahora destacar el gran trabajo emprendido por el profesor Alberto Campos de la Universidad Nacional de Colombia[25] en relación a la matemática griega, donde aborda el estudio de Tales de Mileto y sus discípulos en el libro, *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática*, en el capítulo 1, Presocráticos. Allí resalta cómo la geometría fue inventada en Egipto, algo que se tiene claro si se estudia la construcción de las pirámides y la medición de las tierras. En ese sentido, Tales no introdujo la geometría en Grecia, sin embargo, su tratamiento como un cuerpo deductivo fundamentado en unos principios y unas nociones primitivas se le asocia a él. Se destaca su gran capacidad como observador y su habilidad para formalizarlo dentro de unas premisas. La motivación de presentar a Tales de Mileto es

[24] En la *Biblioteca Británica* en Línea: Los etesios (en griego antiguo *ετησίαι*, vientos anuales, en latín como *etesiae*), son aquellos fuertes vientos del norte, secos, del mar Egeo, soplan desde mayo hasta septiembre.

[25] La obra de Alberto Campos (2006) lleva por nombre *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática*, consta de dos tomos. El segundo tomo está dedicado a la formalización en Hilbert y en Bourbaki.

más como una referencia al comienzo de la matemática y la geometría griegas, dado que no quedó nada escrito de él ni de Pitágoras. Con todo, variados autores de la antigüedad mencionan sus grandes logros, lo que permite considerar que las nociones primitivas en las que se fundamenta tanto la aritmética y la geometría no les eran desconocidas. El propósito de la actual investigación está en profundizar las nociones fundamentales alrededor de las cuales se construye la matemática, debido a los grandes avances que ha experimentado esta disciplina, se aborda su diálogo con autores contemporáneos. Es conocido el período que va de la mitad del siglo XIX a la mitad del XX como aquel dedicado a la búsqueda de una fundamentación filosófica de las matemáticas. Por tal motivo se estudia tales nociones primitivas a la luz de la época en que volvieron a ser tratadas después de tantos siglos.

1.2. El pensamiento pitagórico a través de Los Versos Dorados

Existen valiosos testimonios de la vida de Pitágoras a través de Diógenes Laertius[26], para estos propósitos tan solo se tendrán en la cuenta aquellos comentarios que ayuden a comprender su filosofía y su matemática. Se dice que fue discípulo del filósofo presocrático Ferécides de Siros, uno de los siete sabios de Grecia. Se sabe que Aristóteles[27] criticó a Ferécides por no haber diferenciado el mito de la filosofía. Su fecha de nacimiento está situada durante la Olimpiada 59 y su muerte durante la Olimpiada 54, hecho corroborado por Cicerón. Plutarco lo denominó un teólogo[28]. No obstante, se dice que no recibió instrucción de ningún maestro aunque fue enseñado por los egipcios y los caldeos, y que obtuvo su conocimiento de los libros secretos de los fenicios. Fue uno de los primeros que afirmó la inmortalidad del alma y que el mundo está gobernado por tres principios: Zeus o el éter, lo ctónico o el caos, y Cronos o el tiempo. Afirmó que todas las cosas se forman a

[26] El texto de Diógenes Laercio: *Lives of Eminent Philosophers, book 8 Phythagoras, traducido del griego por R.D. Hicks, ilustra con detalle tanto la vida de Pitágoras como también parte de su filosofía y forma de vida.*

[27] Dice Aristóteles en su *Metafísica*: “Y la dificultad se produce no por considerar principio al uno, y principio como elemento, y al Número como procedente del Uno. Y lo mismo opinan los poetas antiguos, al decir que no reinan y mandan los primeros, como la Noche y el Cielo, o el Caos, o el Océano, sino Zeus. Pero estos llegan a expresarse así por creer que cambian los que gobiernan los entes, ya que de entre ellos tienen mezcla por no decirlo todo en forma de mito, como Ferécides y algunos otros” (1091b 1-10, Ed. García Yebra, Vol 2)

[28] Algunos aspectos de la vida de Ferécides están documentados en: *Dictionary of Greek and Roman Biography and Mythology*, Editor William Smith (pág. 258-9).

partir de los cuatro elementos. Así que, parte de lo que Pitágoras pregonaba en sus enseñanzas, tiene su base en estas enseñanzas fenicias. Tal hecho es importante debido a que delimita esta investigación y permite apreciar más a Pitágoras como alguien que fundamenta dentro de una teórica matematizable lo recibido de sus maestros: es decir, subsume parte de una tradición antigua a una lectura argumentativa fundamentada en unos modelos aritmético-geometrizables. Continúa Diógenes Laercio comentando que Pitágoras fue discípulo también de Hermodamas de Samos, quien estuvo vinculado a los misterios de Hermes; asimismo, fue ávido por el conocimiento y que se inició en todos los misterios en Grecia y en los países del extranjero[29]. Se inició en diversos ritos sagrados de tipo esotérico como el orfismo del cual provienen los misterios del Eleusis[30], cuya influencia se nota claramente en *Los Versos Dorados*. Se dice que el mismo Polícrates le dio una carta de recomendación para ser introducido ante el faraón Amosis II, aprendió el idioma egipcio y fue enseñado por los sacerdotes. De igual manera, estuvo en la cueva del filósofo y poeta Epiménides de Cnosos. Una vez que regresó a Samos se encontró con la tiranía de Polícrates, lo que lo llevó a irse a vivir a Crotona en la Magna Grecia situada al sur de la península italiana. Se dice que su escuela tuvo 300 seguidores, y que su gobierno fue una verdadera aristocracia, es decir, el gobierno del mejor.

Aunque se diga que Pitágoras no dejó escrito alguno, dicha sentencia puede deberse a que su colectividad y enseñanzas fueron prohibidas cuando escapó y más tarde murió en Metaponto. Diógenes Laercio menciona que escribió tres tratados: uno sobre educación, otro sobre los asuntos del gobierno del Estado y uno sobre la naturaleza[31]. Heráclito citado por Laercio, afirma que: "*Pitágoras, el hijo de Mnesarco, fue el más aprendido de todos los hombres en historia, y habiendo seleccionado de estas lecturas, adquirió su propia sabiduría y un aprendizaje extenso de este arte travieso*" (Diogénes Laercio, Libro VII, 6).

[29] Tenemos como en *Moralia*, libro V dedicado a Isis y Osiris, Plutarco afirma que Pitágoras fue muy admirado por los sacerdotes egipcios y que copió su simbolismo y enseñanzas ocultas (354-10, págs. 27-29).

[30] Aspecto comentado por Christoph Riedweg en su libro: *Pythagoras, his life, teaching and influence*. Se menciona como la doctrina de la salvación de Pitágoras, estaba influenciada por las enseñanzas órficas y los preceptos que gobernaban su diario vivir como comunidad. Famosas son las líneas tomadas de los himnos homéricos a Deméter, donde están bendecidos los que siguen los misterios eleusinos (pág. 63).

[31] Se dice que dijo en relación a la naturaleza: "por el aire que respiro y por el agua que bebo, no duraré en ser culpado por este discurso" (*οὐ μά τόν ἀέρα, τόν ἀναπνέω, οὐ μά τό ὕδωρ, τό πίνω, οὔ κοτ᾽ οἴσω ψόγον περί τοῦ*, libro VIII 6.6). Lo que evidencia, que él era consciente que aún por las enseñanzas más básicas sería perseguido y difamado.

Uno de los tantos méritos de Pitágoras de Samos fue acuñar el oficio de filósofo, como aquel amante de la sabiduría y del matemático, como aquel que ha logrado formalizar el conocimiento a través de la aritmética y la geometría. Esto llevó a que los definiera de manera conjunta, dejando entrever que el uno existe por virtud del otro, siendo interdependientes entre sí. La filosofía es vista como una forma de vida, donde lo importante es seguir sus preceptos sin que esté acondicionada a alcanzar una meta, que bien puede llegarse o no a lo largo de la vida. El texto que nos ha llegado a nosotros de los *Versos Dorados*[32] (*Χρύσεα Ἔπη*) o *Versos Áureos*, nos ha sido legados por el filósofo y matemático neopitagórico y neoplatónico Herón de Alejandría (*Ἱεροκλῆς ὁ Ἀλεξάνδρειος*). Están escritos en verso hexámetro y son atribuidos al propio Pitágoras, fueron transmitidos oralmente hasta que la persecución a los pitagóricos disminuyó, lo que permitió que fueran finalmente escritos[33].

En la obra *Los Versos Dorados* (*Χρύσεα Ἔπη*[34]), atribuida a Pitágoras, se comentan las condiciones y estilo de vida que se requieren para tener una excelencia moral, condición indispensable para que alguien pueda llamarse a sí mismo un filósofo. En ese sentido, da la impresión que lo importante es el camino más no el fin, lo que evidencia una vida sumergida en un misticismo profundo ajeno de las ambiciones y preocupaciones mundanas, influencia que encontramos en el mito del rey filósofo de Platón[35]. El filósofo neoplatónico Jámbico de Calcis menciona que: "*La comunidad pitagórica consistía en una multitud de personas que recibían de Pitágoras sus leyes y mandatos asimismo sus preceptos divinos. Tal era su reverencia hacia Pitágoras que lo habían elevado al rango de los dioses, como un benefactor de la divinidad, alguien tan celebrado como un daimón benéfico, otros lo llamaban el Apolo Hiperbóreo*" (*Iamblichus's Life of Pythagoras*, C.VI, pág.13-14). Pitágoras era para la comunidad alguien que les permitía compartir la luz de la felicidad y de la filosofía, preparándolos de manera juiciosa a fin que pudieran ser iniciados en sus

[32] El texto que se utilizará proviene de la traducción al inglés de Firth M. Florence: *The Golden Verses*; e, igualmente, se empleará la traducción al español de León Tournier Perron.
[33] Este hecho está documentado en: *The Pythagorean Sourcebook and Librery*, G. Sylvan Editor (pág. 163).
[34] El texto en griego proviene de la Biblioteca Augustana de la Universidad de Augsburgo.
[35] "A menos – proseguí que los filósofos reinen en las ciudades o que cuantos ahora se llaman reyes y dinastas practiquen noble y adecuadamente la filosofía, que vengan a coincidir una cosa y otra, la filosofía y el poder político" (*La República* de Platón, 473d).

enseñanzas. Las enseñanzas de Pitágoras se manttuvieron, tal como Diógenes Laercio lo menciona en relación al filósofo y matemático pitagórico Arquitas de Tarento, quien pregonaba: "*La relación entre la ley y el alma y la vida humana es idéntica a la armonía del sentido del oído y la voz; la ley instruye al alma, y en consecuencia la vida; como armonía regula la voz a través de la educación del oído*" (*D. Laertius, Lives of the Eminent Philosophers, Archytas*, Vol. 8, c. IV, 22b).

Tanto Pitágoras como sus discípulos buscan un tipo de conocimiento que está en íntimo equilibrio con la forma en que se vive la cotidianidad a nivel de sus hábitos alimenticios[36] y de las diversas costumbres que modelan la conducta de un individuo. Se reconoce que para llegar a ser un filósofo debe el aspirante ser capaz de volverse un aprendiz de la matemática, en ella obtiene la instrucción y formación que le permite acceder a conocer las formas puras bajo las cuales Dios aritmetizó y geometrizó el universo, donde vivimos y somos parte inseparable de él. La matemática es considerada como un saber que se enseña de manera íntima en la relación aprendiz-oyente (*μαθηματικός-ἀκουσματικοί*), en tal relación se reconoce que ambos están en proceso de adquirir un conocimiento certero y verdadero de la realidad, que tan solo se logra tener cuando se ha llegado a ser un filósofo (*φιλόσοφος*) realizado, donde la matemática es el compañero indispensable para esta travesía, es lo que lo disciplina y a la vez lo transforma en un artista. En esto se aprecia cómo Pitágoras consideraba a la música como una medicina, que si era usada de manera apropiada permitía sanar y purificar[37]. El ejercicio como disciplina está orientado a quitar el velo de la ignorancia posibilitando que el individuo alcance a conocer las verdades perennes de la que es portadora la matemática. Esto le permitirá adquirir una paz interior que se ve complementada con la práctica de la música y otras artes, todas inscritas alrededor de la observancia de una serie de preceptos morales muy estrictos. Estos están organizados alrededor de unos hábitos de riguroso

---

[36] Tema tratado por Diógenes Laercio: *Lives of Eminent Philosophers, libro* 8, cap. IV, numerales 12 y 18. En el 12 tenemos el tema de los alimentos, estos se han de consumir con moderación, preferiblemente vegetales; aunque en algunas ocasiones se consumía pescado o cordero. En el numeral 18 tenemos las costumbres de no tomar vino en el día y de procurarse una vestidura blanca de lana, la cual no era usual en el lugar; además inculcaba la limpieza personal, el control del comportamiento y los hábitos de vida.

[37] La música a través de ciertas canciones permitía producir tres distintos estados de la mente: *exartysis* o estar listo o adaptado, *synarmoge* o aptitud o elegancia de maneras, y *epaphe* o en contacto con uno mismo. Estos hechos son comentados por Jámbico: *Iamblichus*, *The Life of Pythagoras*, en el capítulo XXV, pág. 60).

seguimiento que propenden lograr una armonía del individuo consigo mismo y con todo lo que lo rodea.

De alguna manera, para Pitágoras, el filósofo debe de ser un matemático, esta disciplina lo va preparando para permitirle percibir su ser interno, le templa su carácter y le brinda la oportunidad de entender las formas puras bajo las cuales Dios organizó la vida en el universo. A su vez, los dioses al igual que el hombre hacen parte de este ordenamiento. En los *Versos Dorados* se percibe el contexto abreviado de una serie de preceptos morales que posibilitan que el hombre se acerque a Dios, en especial, el estar en plena armonía con lo que a cada momento está brotando de ese origen. Se busca que cada practicante logre un aquietamiento interno en perfecto equilibrio con el mundo que lo rodea y en comunidad. La matemática, entonces, es aquel campo donde primero se escucha –la labor de acusmático (*ἀκουσματικοί*) antes de ser matemático o aprendiz (*μαθηματικός*) –, de suerte que uno podría pensar que el filósofo (*φιλόσοφος*) sería el tercer estadio, aquel estado posterior que se da una vez uno haya recorrido variados caminos entre ellos los de la matemática, que ha sido un medio para volverse un amante en el sentido legítimo de la sabiduría. Se tiene la impresión al leer *Los Versos Dorados* (*Χρύσεα Ἔπη*) que estamos en presencia de un estilo de vida de tipo místico muy devoto a seguir los delineamientos trazados desde los cielos por la ley de Dios.

1.2.1. El cardinal uno y el ordinal primero como base de toda reflexión matemática

Es propósito de esta investigación mostrar que este texto atribuido a Pitágoras y el único que ha llegado a nuestros días, refleja su pensamiento filosófico-matemático. Pitágoras consideró que los números además de ser el origen del cosmos, representan las propiedades fundamentales de todo lo que existe. En este caso, el número uno (*εἶς*) al ser autosubsitente e infinito, posee propiedades que han sido emuladas a la existencia de un solo Dios. El adjetivo primero (*πρῶτος*) declinado en acusativo dual femenino (*πρῶτα*) unido a la forma plural acusativa (*θεούς*) de *θεός*, sustantivo dual masculino y femenino de dios o divinidad. De alguna manera, el uno (*εἶς*) como número cardinal está presente, al igual que el uno (*πρῶτος*) como número ordinal. Lo cual nos muestra que en el origen estaba el uno como fundamento de toda reflexión. A su vez, la declinación dual nos lleva al dos (*δύο*), muy en concordancia con el universo (*οὐρανός*) planteado por Pitágoras, el cual comenzó con la díada (*δυάς*) numérica. Una vez más, se nota cómo la existencia de los números desde el inicio de la vida se presenta en parejas: el uno masculino y el uno femenino, asimilables al número 1 como entero positivo y al 1 como entero negativo. Dado que el primer uno (*εἷς*) es anterior a todo, es único como mónada, representa la unidad (*μονάς*) fundamental de la que se deriva todo, podría evocar a la divinidad como un único Dios (*θεός*).

> *1. Honra a los Dioses inmortales a cada uno de acuerdo a su rango del modo establecido por la ley que subyace.*
> (*First worship the Immortal Gods, as they are established and ordained by the Law.*
> *Ἀθανάτους μέν πρῶτα θεούς, νόμωι ὡς διάκεινται,*)

En este verso se recrea la inmortalidad (*ἀθανασία*), que es la unión de la alfa privativa sin (*ἀ-*) con thánatos (*θάνατος*) la muerte, en concordancia (*μέν*) con lo que es lo primero y lo más importante (*πρῶτος*). Este término está relacionado con lo que es uno (ένα, relacionado con *ἕν*), que nos conduce al número uno (*εἷς*), que es único como una sola parte o elemento (*μονός*) semejante a Dios (*θεός*). A su vez, el uno puede ser apreciado como el fundamento de los números impares (*είναι μονοί αριθμοί)*. Se advierte cómo aquí se menciona aquel Dios único que es inmortal, lo que da a entrever que la concepción monoteísta ya estaba presente en Pitágoras. La ley (*νόμος*) evoca aquel precepto divino que es distribuido y dispensado (*νέμω*), vocablo que también tiene que ver con la actitud del pastor que lleva su ganado a pastar. Tal como el adverbio *hōs* (*ὡς*) está dado por aquello que está situado (*κεῖμαι*) o guardado como algo precioso o atesorado (*κειμήλιον*) en un movimiento dado en todas las direcciones (*διά-*) y que lo atraviesa a lo largo de todo su recorrido. Una vez más se nota cómo el pensamiento pitagórico toma la noción fundamental matemática del uno a nivel de una reflexión místico religiosa: lo uno (*εἷς*), único (*μονός*) y mónada que proviene de aquello que es la unidad (*μονάς*), en cuanto está solo y solitario. La matemática se instaura desde sus comienzos como una reflexión formal de la naturaleza en aquello que está unido a una sola forma (*μονοειδής*): *mónos* (*μόνος*) y *eidés* (*ειδής*), vocablo que proviene de *eidos* (*εἶδος*) que es la forma, la apariencia y la vista.

Es una forma hipotética de *eído* (*εἴδω*), un verbo cuyo tiempo presente es desconocido pero que se encuentra tan splo como un aoristo en *eídon* (*εἶδον*) en el verbo ver, parecer, percibir, experimentar y testificar (*ὁράω*, *εἴδομαι*) y conocer (*οἶδα*). Cabe resaltar cómo, al ampliar la noción, aparecen las nociones de forma e idea que serán desarrolladas de manera conjunta dentro de una metafísica, una ontología y una epistemología.

Hemos de destacar, igualmente, cómo el fundamento de lo numérico se encuentra en el número contado como cantidad o sea el uno (*εἶς*), y el número tomado en relación a un orden como lo primero (*πρῶτος*). Esta reflexión surge de considerar que tales instancias numéricas anteceden a todo, están dadas en todas las direcciones (*διά-*) de lo que está situado (*κεῖμαι*) en la realidad. Sin embargo, es posible afirmar que la formalización del número (*ἀριθμός*) a nivel conceptual dentro de una teoría, o la teorización de lo numérico, como aquella actividad formal de subsumir dentro de un modelo abstracto capaz de expresar tanto lo mínimo como lo máximo decible de un ente, se da fruto de la reflexión de la existencia de un Dios (*θεός*). Con esto se está aseverando que la matemática es una teoría formal que tan solo surge en aquellas civilizaciones donde se ha reconocido la existencia de una divinidad y se ha buscado observarla y estudiarla. Esto nos conduce al carácter sagrado de la misma, que siempre estuvo presente en los pitagóricos: el uno[38] (*εἶς*) evoca la unidad (*μονάς*) única (*μονός*) en todo sentido, es aquella ley (*νόμος*) que está como lo primero (*πρῶτος*), que distribuye y dispensa (*νέμω*) todo lo que se necesita para existir. Siendo el uno (*εἶς*) aquella forma (*εἶδος*) que acarrea la inmortalidad (*ἀθανασία*), en concordancia nos lleva a apreciar: lo que primero (*πρῶτος*) que se aprende, se comprende y se indaga (*μανθάνω*) tiene que ver con la naturaleza sagrada de Dios (*θεός*), que se recrea en el número uno (*εἶς*).

> *2. Respeta luego el juramento, y reverencia a los héroes ilustres,*
> (*Reverence the Oath, and next the Heroes, full of goodness and light.*
> *τίμα καί σέβου ὅρκον. ἔπειθ' ἥρωας ἀγαυούς*)

---

[38] La naturaleza sagrada de la matemática es tratada en el artículo de Ralph H. Abraham: *The new sacred Math*, donde menciona que la historia del alma comienza en tiempos de los antiguos egipcios con la construcción de la pirámide de Keops. Pitágoras, quien se instruyó en Egipto, sintetizó la filosofía espiritual y natural dentro del contexto de la cultura griega clásica, incluyendo los aspectos metafísico y sagrado del número uno, como la mónada, la unidad y sus emanaciones (pág. 7).

Como se ve, existe aquel honor reverencial destinado a rendir culto (*τιμή*), se trata de valorar y estimar el honor como algo que debe de hacer parte de la vida (*τιμάω*). Se recuerda la máxima délfica que dice: *rinde culto a los dioses* "*θεους σεβου", lo cual muchas veces se realiza por medio de un pago (τίσις*); ya sea en relación al honor de una persona (*τίω*) o mediante la taxación de un precio que se paga (*τίνω*). Este hecho, está dado por la presencia de la conjunción 'y' (*καί*) a aquel temor que se siente al estar en frente de la presencia de Dios (*σέβομαι*), desprendiéndose una actitud de respeto (*σεβασμός*) que en muchos casos es piadoso (*θεοσεβής*). Este respeto (*σέβας*) está orientado hacia el juramento (*ὅρκος*) realizado como una súplica solemne. En este comentario se resalta algo que nunca se ha escuchado en cuanto a que el pago al culto involucra otro comienzo para fundamentar las ciencias económicas. Tiene como ingrediente importante la actitud ética y moral de no aprovecharse del otro por temor a un castigo potencial por parte de algún dios. En consecuencia (*ἔπειτα*), por algo que proviene de arriba (*ἐπί*) en correspondencia (*εἶτα*) con la ocurrencia (*ἔπιδε*) de la presencia de un héroe (*ἥρως*) al cual se le da un recibimiento (*ἀγαπάω*) amoroso y querido (*ἀγαπητός*), fruto de su buena condición moral (*ἀγαθός*), la cual está en estrecha concordancia con el término homérico (*ἀγαυούς*). Estos versos están muy influenciados por los ideales propios de los antiguos griegos donde el héroe encarna unas virtudes morales que lo hace estar muy cerca de los dioses. Es una manera de ir recreando una antropología, en la que la pregunta acerca de la existencia del hombre va encontrando una respuesta en una serie de narrativas de hechos reales acontecidos y elevados como canón de conducta, dada la excelencia piadosa de sus protagonistas.

1.2.2. El uno de la divinidad se traslada al uno del daimón de cada individuo

Es conveniente apreciar cómo, desde la teoría de los tipos lógicos de Bertrand Russell,[39] pueden darse varios niveles de ordenamiento proposicional. Esto permite plantear la existencia del uno (*εἶς*) como mónada en un nivel proposicional distinto al uno (*εἶς*) como díada (*δυάς*), sea del uno-dos *εἶς-δύο*. A su vez, se puede transladar el uno (*εἶς*) en

[39] Bertrand Russell (1908), Mathematical Logic as based on the Theory of Types, *American Journal of Mathematics*, Vol.30, N.3, July 1908, pág. 222-262.

cada individuo humano; en este contexto, se está frente a la noción primitiva lógica de individual y a la clase de todos los seres humanos. Es decir, el uno puede ser jerarquizado en distintos niveles del lenguaje, con dominios proposicionales diferentes y sujetos a teorizaciones también diferentes. No obstante, el orden de jerarquía establecido por el primer uno se mantiene para todas las formulaciones que deseemos realizar.

> *3. y también a los genios subterráneos: cumplirás así lo que las leyes mandan.* (*Honour likewise the Terrestrial Dæmons by rendering them the worship lawfully due to them. τούς τε καταχθονίους σέβε δαίμονας ἔννομα ῥέζων*).

Aquello, además (*τούς τε*) de lo que está abajo (*κατα*), que fortalece dado que está establecido sobre el suelo y la superficie de la tierra (*χθών*) en (*καταχθονίους*), ha de tener en cuenta a los dioses (*δαίμων*) y su divino poder que determina al alma[40]. Se menciona el término daimón, como aquella afiliación divina que nos habita: que nos permite disfrutar y estar poseídos por un buen genio (*εὐδαίμων*), y estar felices en relación a nuestros propios pensamientos (*ἔννοια*). Estas consideraciones y nociones provienen de nuestra mente, intelecto, percepción, sentido, o alma (*νοῦς* es una variante de νόος). El *nous* se asemeja a un agregado de todas las facultades que constituyen y definen nuestra humanidad en todos los sentidos posibles. Estos pensamientos y demás aspectos del *nous* están orientados a comprender el valor de ofrecer sacrificios (ῥέζων) a los dioses, hecho que hace que ellos comprendan y perciban nuestra actitud que busca su favor. Así que, el adecuado desarrollo de la cognición humana está dado por aquella armonía que se establece en el interior y que reindivica la afiliación frente a la divinidad, que tanto nos habita como nos rodea en nuestro andar por la vida. El daimón (*δαίμων*), además, tiene la potestad de asumir una actitud vigilante frente a los propios pensamientos de cada uno (*ἔννοια*). Esto muestra cómo en la escuela pitagórica se estaba elaborando una ontología y una epistemología, donde la noción del *nous* (νόος) adquiere ese nivel de autoreflexión propia de un individuo consciente y conocedor de sus obligaciones. El deber de uno está ante todo con la propia divinidad frente

---

[40] El tema del daimón en Pitágoras está mencionado por Jámblico de Calcis, quien dice que Pitágoras fue enviado a la humanidad desde el Imperio de Apolo, esto es deducible por la manera en se dio su nacimiento y la variedad de la sabiduría propia de su alma. El vocablo daimón corresponde al alma. Ver: Iamblichus, *The Life of Pythagoras or Pythagoric Life* (pág. 4).

a la cual se han de ofrecer sacrificios (*ῥέζων*). Hay que resaltar que existen variados vocablos de los *Versos Dorados* donde uno se encuentra con el griego poético de Homero (*Ὅμηρος*), lo cual muestra cómo el propio Pitágoras no solo lo leyó sino además aplicó parte de sus enseñanzas morales. En especial, en lo concerniente a la construcción de una personalidad sólida, tal vocablo le corresponde a *pneuma* (*πνεῦμα*), en cuyos variados significados se incluye: aire, viento, aliento, respiración, vida, espíritu, alma e inspiración divina. Este sustantivo tiene como verbo a *pneó* (*πνέω*). En ese sentido, el ser humano (*ἄνθρωπος*) disfruta de una participación directa con la propia divinidad, ya que lo habita y, en consecuencia, es conocedora de todos sus actos y deberes. Se resalta la naturaleza holística (vocablo que proviene de *holos*, *ὅλος* que es todo, lo completo y lo perfecto) del pensamiento griego, en especial, del pitagórico, donde el hombre está inscrito y hace parte del cosmos: está para servirse del mismo siempre y cuando mantenga un equilibrio armónico con todo lo que lo rodea.

La naturaleza única del uno (*εἷς*), su unidad (*μονάς*), está presente en el daimón (*δαίμων*). Aquí se manifiesta la afiliación del individuo con Dios (*θεός*) que, de alguna manera, los dioses en este contexto pitagórico habitan a los individuos. Sin embargo, en algunos este daimón (*δαίμων*) posee una naturaleza más sagrada; sea el caso de Pitágoras, donde se evidencia la presencia de la mano de Apolo, tal como lo menciona Jámblico de Calcis. Este hecho puede ser apreciado en toda secuencia numérica, sea el caso en relación a la secuencia decimal, donde el 1 está presente en el 11, 111, 1111, etc. Este tipo de lectura de lo numérico ha sido conservada dentro de la tradición de algunas escuelas iniciáticas, donde los números representan la naturaleza oculta tanto en las cifras como en las palabras; no hay que olvidar que el alfabeto griego tenía un valor numérico[41]. En concordancia: alfa (α, 1), beta (β, 2), gamma (γ, 3), delta (δ, 4), épsilon (ε, 5), dseta (ζ, 6), eta (η, 7), theta (θ, 8), iota (ι, 10), kappa (κ, 20), lambda (λ, 30), mi (μ, 40), ni (ν, 50), xi (ξ, 60), ómicron (ο, 70), pi (π, 80), qoppa –letra griega antigua hoy opsolteta- (Ϙ, ϟ, 90), (ρ, 100), sigma (ς, 200), tau (τ, 300), ípsilon (υ, 400), fi (φ, 500), ji (χ, 600), psi (ψ, 700), omega (ω, 800) y sampi –letra arcaica jónica (ϡ, 900). El sistema de numeración griego más antiguo es el

[41] Este tópico está ilustrado en el artículo de Samuel Verdan: *Systèmes numéraux en Grèce ancienne*. En dicho texto se menciona como cada letra del alfabeto griego antiguo tenía un valor numérico (pág. 2 y 7).

acrofónico, palabra compuesta de *ákros* (*ἄκρος*), aquello que está en la extremidad, tanto al comienzo como al final; y *phoné* (*φωνή*), que es cualquier clase de sonido, sea de la voz humana o de los animales, también puede ser un discurso o el sonido articulado de las vocales. En la numeración acrofónica el valor está dado en relación con la letra inicial de una palabra, este hecho influenció la notación aritmética romana. Se utiliza una barra l para el 1, para el 5 se usa Γ, para el 10 tenemos Δ, para el 100 es H, para el 1000 es X y para 10.000 es M. Esta técnica procede de los babilonios, está también presente en el idioma hebreo y en el árabe.

1.2.3. El comportarse bien se asemeja al proceso bajo el cual se construyen los números

Para adquirir una buena conducta, esta debe seguir un ordenamiento con lo que está primero, lo cual se asemeja a aquel proceso matemático en que lo similar se sitúa como lo primero, como aquel morfismo que preserva una estructura, en este caso aritmética; este hecho es aplicable en todas las áreas que contituyen las matemáticas. Cada cifra numérica afirma que está bien construida, aunque cambie y se modifique tanto su aspecto cuantitativo como su aspecto cualitativo. Este aspecto es hereditario, algo que es mencionado por Bertrand Russell (1919) en *Introduction to Mathematical Philosophy*, donde manifiesta: "*El número de una clase es la clase de todas las clases que son similares a él*" (pág. 15), lo que está en relación a lo que es similar o isomórfico. A su vez, se utiliza en la construcción de los números naturales o inductivos, la propiedad que él denomina hereditaria, propia de la secuencia numérica inductiva respecto al predecesor inmediato y a la posteridad inmediata del número que le sigue.

4. Honra luego a tus padres y a tus parientes de sangre.
(*Honour likewise thy parents, and those most nearly related to thee.*
σούς τε γονεῖς τίμα τούς τ' ἄγχιστ' ἐγγεγαῶτας).

El honrar (*τιμάω*) a los padres o progenitores (*γονεύς*) se ha de hacer de la manera más cercana (*ἄγχιστος*), dado que son el fundamento de la raza, la familia y la descendencia (*γένος*). Lo hereditario (*ἐγγενικός*) es aquello que está dentro (*ἐν*) del género que define una familia (*γενικός*). Se resalta, una vez más, que existe un orden que se ve reflejado en que primero se honra a los dioses y luego a los padres. En Pitágoras, entonces, está lo uno (*εἶς*) como una mónada sola y única (*μονός*), que es lo primero (*πρῶτος*) y desde la cual se establece la ley (*νόμος*), es propia de un único Dios (*θεός*) inmortal (*ἀθάνατος*); hecho que se deriva a partir de la existencia del número uno antes de todos los números, es lo primero y es infinito. Ahora bien, los dioses (*θεούς*) en sentido plural, son a los que se honra, ya que ellos y todos incluyendo al hombre nacimos de ese Dios infinito, que está situado previamente a la creación ordenada del cosmos por el número: en esta concepción, todo lo que está dentro del cosmos, incluyendo los dioses propios de la mitología y la especie humana, estamos sujetos a la ley (*νόμος*) impartida desde el mismo inicio de los tiempos (*κρόνος*) y del lugar (*τόπος*) por esa mónada única. Así, se ve cómo lo hereditario puede tomarse como fundamento para la construcción de los números, hecho apreciado en la elaboración de unas categorías lógicas por parte de Bertrand Russell que sirven para fundamentar los números inductivos o hereditarios, aquellos que reciben la herencia del uno: siendo el uno (*εἶς*) el progenitor (*γονεύς*) de toda la secuencia numérica, hecho que se va a repetir aún frente a otros conjuntos numéricos. Sea por ejemplo en el conjunto de los números reales, donde las expresiones numéricas que estén en cualquier intervalo abierto (a’, b’) entre dos números reales [a, b] es va a repetir dentro de toda la secuencia numérica, teniendo en cuenta que a, b, a’, b’ $\in \mathbb{R}$, tal como a, b $\in \mathbb{N} \vee \mathbb{Z}^{+}$. Es decir el mismo intervalo se repite conservando la herencia y las propiedades del primero.

1.2.4. La areté como fundamento que lo lleva a uno a hacerse mejor a fin de ser filósofo

También se advierte en Pitágoras la honda preocupación por todo aquello que permite el cultivo de las virtudes, en especial para acceder a la amistad y a la areté (*ἀρετή*): aquella bondad en la que se expresa la excelencia y la bondad, que lleva a forjar al carácter propio de los que son los mejores (*ἄριστος*), otorgándoles gloria y reconocimiento a quienes lo cultiva.

5. *Y de los demás, hazte amigo del que descuella en virtud.*

(*Of all the rest of mankind, make him thy friend who distinguishes himself by his virtue. τῶν δ' ἄλλων ἀρετῆι ποιεῦ φίλον ὅστις ἄριστος*).

Aquellos (*τῶν*) quienes (*ποιος*) de ninguna (*δε, οὐδέν*) otra (*ἄλλος*) manera hacen (*ποιέω*), realizan o actúan de la mejor manera (*ἄριστος*), en concordancia con la *areté* (*ἀρετή*) hacia cualquiera (*ὅστις*) que sea amado o querido (φίλος). Esta breve sentencia se resalta el papel de la *areté* (*ἀρετή*), entendida como la excelencia de la virtud o del ser virtuoso. Involucra comportarse en concordancia con la bondad y la humanidad que impregna al individuo en su carácter, en la manera de comportarse consigo mismo y con los demás, independientemente de quiénes sean. Se aprecia, igualmente, la muy antigua preocupación de los griegos o helenos hacia la moral abordado como los hábitos, costumbres y maneras en que uno se comporta (*ἔθος*), como consecuencia de estar acostumbrado a hacer algo o no hacerlo sí es el caso (*ἔθω*). Sin embargo, la *areté* va aún más lejos dado que busca establecerse como una normativa que busca ser ejemplar, y que se desborda en dar el mejor ejemplo (*ἄριστος*) como modelo de ser humano: las virtudes han logrado alcanzar una altura que las hace que sirvan de patrón de conducta a seguir e imitar por parte de los demás. Una vez más, esa *areté* está encaminada hacia lo que es amado (*φίλος*), fruto de ese amor afecto y agradable (*φιλέω*), que se experimenta en la manera de uno conducirse en todos los asuntos del diario vivir tanto individual como colectivo. Se está frente a ese tipo de amistad amorosa (*φιλία*) que se cultiva y permite que la areté (*ἀρετή*) disfrute de un buen desarrollo. Este gran sabio (*σοφός*), Pitágoras, fue el primero en reconocer que existe el oficio de filósofo (*φιλόσοφος*) como forma de vida, pregona cultivar aquella manera excelente de conducirse que va a permitir que la sabiduría (*σοφία*) se dé: no obstante, la excelencia (*ἄριστος*) en la areté (*ἀρετή*) debe de ser lograda primero y antecede a la *sofía* (*σοφία*). No hay que olvidar que hace parte de la *sofía* la destreza en las artes (*τέχνη*) como la música, la carpintería y otras, como también la habilidad para aprender y tener un juicio balanceado y prudente en los asuntos del diario vivir. En ese sentido, el amor hacia el arte, la destreza en la aritmética (*ἀριθμητική*) como esa habilidad (*τέχνη*) en manejar los números (*ἀριθμός*), y la geometría (*γεωμέτρης*) hacen parte de una techné y una metría (*μετρία*), como habilidades que se desarrollan. Tan solo el que es un hábil artesano es capaz de lograr una conducta apropiada que le permite cultivar la sabiduría. De manera que Pitágoras efectuó una profunda reflexión de lo que consiste ser un filósofo, las condiciones que debe de cumplir y el entorno concreto que lo ha de rodear. Este tópico es mencionado por el filósofo neoplatónico Jámblico de Calcis (*Ἰάμβλιχος,* en latín, *Iamblichus Chalcidensis*), en el capítulo XII, se dice que Pitágoras menciona tres clases de individuos: los que acuden a los espectáculos públicos en masa, los que buscan reconocimiento por la fuerza de su cuerpo y los más liberales que se reúnen alrededor del arte y las producciones literarias. Otros hombres buscan la riqueza y el lujo, otros aman el poder y el dominio, otros poseen una ambición insana por la gloria. Y, finalmente, tenemos aquellos que tienen el carácter más puro, que se entregan a la contemplación de las cosas más bellas y que se denominan filósofos. Estos temas son tratados en *La Vida Pitagórica*[42], esto es una consecuencia de la participación de la primera esencia inteligible por parte de los filósofos.

> 6. *Cede a las palabras gentiles y no te opongas a los actos provechosos.*
> (*Always give ear to his mild exhortations, and take example from his virtuous and useful actions. Πραέσι δ' εἶκε λόγοισ' ἔργοισί τ' ἐπωφελίμοισι*).

De nuevo se está frente a la preocupación hacia aquello que acontece en los dominios de lo que se hace y se practica (*πράσσω*), aquellas cosas (*πρᾶγμα*) realizadas que no (*δε*) hay que hacer sin que exista antes una planificación o un propósito (*εἰκῇ*). Se trata de tener claro la imagen o figura (*εἰκών*) de lo que hay que realizar, en especial identificar su semblanza o parerecido (*ἔοικα*) de una manera amable y gentil[43] (*πρᾶος*). Se está frente a un tipo de discurso que es práctico (*ἕν πραέσι λόγους*) y, en consecuencia, ajeno a todo aquello que lo desoriente o le quite un asidero frente a la cotidianeidad o las situaciones propias del diario vivir. Por tal motivo, este *logos* (*λόγος*), es entendido como aquello que es dicho y es pensado debe guardar una unidad como palabra locucionada, propósito

[42] Jámblico menciona que Pitágoras fue el primero en llamarse a sí mismo filósofo, este tema puede ser apreciado en: *The Pythagorean Life* de Iamblichus (pág.28).

[43] Se destaca en el capítulo XX de Jámblico (ob. cit.), cómo Pitágoras examinaba la modestia, el silencio, la disposición a la amistad, la temperancia, el amor, la gentileza de los miembros de su comunidad. A estas cualidades él las denominaba como cultura (pág. 50).

considerado y acción ejecutada. En la manera en que uno se comporta subyace un orden con aquello que es dicho (*λέγω*), hay que tener bien presente que dentro de los significados adicionales de este verbo está poner en orden, arreglar, escoger o contar algo ya sea como narración o enumeración. Asimismo, su significado está muy relacionado con lo que descansa como propósito (*λέχομαι*). Para los antiguos griegos, en especial para Pitágoras, el hablar y decir algo involucra una acción asereverativa donde el pensamiento es conocedor de lo que se está diciendo, que refleja un equilibrio entre lo pensado y lo actuado. La mentira y la incongruencia con lo que se realiza se han de evitar a toda costa, tal es uno de los mensajes de esta sentencia. Es un recordatorio de lo que se hace, trabaja o realiza (*ἔργον*), se dice y habla (*εἶπον*) de tal manera que se ata, asegura y junta (*εἴρω*) con lo que se actúa. Al hacer esto se se obtiene una ventaja que tan solo trae los mejores beneficios (*ὄφελος*); en tal sentido, uno debe de favorecer la coherencia propia con sus propios actos. Hay que destacar en la enseñanza el uso de las parábolas por parte de los Pitagóricos[44] como un método de instrucción apropiado y necesario. En general, se menciona que los griegos lo adoptaron de los egipcios, hacían uso de símbolos que guardaban un contenido que debía de ser descubierto y abierto tan solo por aquellos individuos que tenían las cualidades morales necesarias. En esto se percibe que los textos muchas veces parecen ser oscuros e ininteligibles dado que están ocultando un arcano importante al vulgo carente de las cualidades morales e intelectuales para comprenderlo y hacer un buen uso del mismo.

7. *No guardes rencor al amigo por una falta leve.*
Avoid as much as possible hating thy friend for a slight fault.
Μηδ' ἔχθαιρε φίλον σόν ἁμαρτάδος εἵνεκα μικρῆς,

Nadie (*μηδέ*), bajo ningún medio, debe de tener o abrigar (*ἔχω*) hacia la amistad (*φῐλότης*) una actitud negativa cuando falla o actúa equivocadamente (*ἁμαρτάνω*) por cuenta de (*ἔχθαιρε*) de una trivialidad o pequeñez (*μικρός*) pueril (*υἱός*). Una vez más, se está frente a un tipo de generalización, donde bajo ninguna circunstancia en absoluto (*μηδείς*), se debe de tener frente al amigo (φίλος) una actitud que acentúe sus errores o

[44] Este tema es tratado en el capítulo XXIII (ob.cit), hecho que obedece al carácter iniciático de la escuela pitagórica a fin de proteger estos misterios divinos de los que no estaban iniciados en los mismos (pág. 55).

fallas (*ἁμαρτία*), nadie debe de ser el guardián o el vigilante (*ἔφορος*) del amigo transgresor (*ἁμαρτωλός*). Se nota en este comentario cómo la amistad involura la presencia de un amor amable y bondadoso (*φιλία*) que le lleva a minimizar (*μικρός*) la conducta inapropiada, y se diría que hace parte de la bondad de la areté (*ἀρετή*) asumir tal actitud. Tal hecho puede tener un significado adicional en cuanto es la amistad (*φιλία*) la actitud que hay que tener hacia la sabiduría (*σοφία*), la cual también requiere ser habidoso en las artes y los asuntos del diario vivir; lo que involucra que el sabio (*σοφός*) es alguien muy listo y agudo en temas prácticos y su inteligencia está unida a una actitud prudente, tolerante y paciente. Conducta que se debe de tener hacia la filosofía (*φιλοσοφία*) como ese amor hacia un conocimiento no solo teórico sino práctico. El valor de la amistad es también comentado por Jámblico, *La vida pitagórica*, cuanto afirma: "La fe nunca debe estar separada de la amistad"[45], se resalta la necesidad de evitar la disputa y la rivalidad en relación a la amistad, aún esta no debe de verse afectada por el infortunio. Se mencionan las amonestaciones dirigidas hacia los más jóvenes a fin de saberse conducir bien, fruto del desarrollo del tacto y el servicio.

1.2.5. La necesidad como el maestro por excelencia que forja nuestra areté

En esta máxima aparece la necesidad, lo obligatorio, lo que se da por la fuerza fruto de ser imprescindible e indispensable, *anánke* (*ἀνάγκη*), que impone algo por la propia ley natural propia del destino y la fatalidad. Este vocablo proviene del verbo (*ἀνάγκάζω*): obligar, forzar e imponer. Alude a aquello que conduce hacia arriba, o nos lleva a subir y a levantar (*ἀνάγω*); como también hacerse a la mar, o cuando un río se desborda o crece. Esto conlleva la importancia de los preceptos que resaltan el control propio: "la subyugación de la lengua es el más difícil" (pág. 44.ob. cit.). Todos estas amonestaciones van dirigidas a forjar la temperancia de los jóvenes, donde la pérdida del control es recuperado a través de una pasión amorosa hacia la música.

[45] Este tema es expuesto en el capítulo XXII en el texto de Jámblico en: *The Complete Pythagoras*, obra donde está recopilados todos los textos de Pitágoras. Cuyo editor es Sylvan Guthie (pág. 26).

8. Estas cosas hazlas en la medida de tus fuerzas, pues lo posible se encuentra junto a lo necesario.

(*And understand that] power is a near neighbour to necessity.*

ὄφρα δύνῃι δύναμις γάρ ἀνάγκης ἐγγύθι ναίει).

Se ha de notar en la anterior cita que varios de sus vocablos son propios del griego de Homero: tal como (*ofra, ὄφρα*) la fuerza (*δύναμις*) es capaz que algo se dé (*δύναμαι*) como consecuencia (*γάρ*) de la necesidad (*ἀνάγκης*), más cuando lo que se necesita se encuentra (*ναίω*) cerca (*ἐγγύθι*). En esta sentencia se percibe cómo, independiente de las circunstancias (*πῶς*) que lo rodean a uno, se tiene la posibilidad de hacer (*δυνατός*) aquello que al menos (*γε*) en lo posible (*ἄρα*) conduce a mejorar la propia situación; tal como se puede ir desde un lugar más bajo a un lugar más alto (*ἀνάγω*), hecho que se ve favorecido si uno está cerca (*ἐγγύς*) y con posibilidades de lograrlo (*ναίω*). En este verso se hace hincapié en la necesidad, como aquel instrumento que permite convocar el poder y las destrezas, otorgándole el valor real a los hechos que están en frente de uno. La vida misma nos coloca cerca de lo que cada uno tiene posibilidades de emprender, la diligencia en lograr aquello que nos constriñe hace parte de lo que nos forma y renueva. Cuando las circunstancias que rodean nuestra propia vida son más demandantes, se tiene más capacidad y vigor en acometerlas. Tal situación sirve para fortalecernos y otorgarle el sentido real al entorno habitado por nosotros tanto a nivel individual como colectivo. Podemos decir: que el poder es vecino de la necesidad.

9. Compenétrate en cumplir estos preceptos, pero atiéndete a dominar ante todo las necesidades

(*Know that all these things are as I have told thee; and accustom thyself to overcome and vanquish these passions. Ταῦτα μέν οὕτως ἴσθι, κρατεῖν δ' εἰθίζεο τῶνδε*).

En todo esto (*ταῦτα*), en consecuencia (*μέν*), y de esta manera (*οὕτως*), estamos de acuerdo (*ἴσθι*) en poder gobernar (*κρατεῖν*) estas (*τῶνδε*) necesidades. Se da una señalización precisa en esto (*οὗτος*) que está cerca de manera tan demandante, que convoca nuestra fuerza y poder (*ἴς*) de una manera proporcional (*ἴσος*). Esto posibilita una repartición adecuada y similar en cada uno de los frentes que hemos de atender a fin de controlarlos y poder mandarlos (*κρατεῖν*), tal como las probabilidades (*εἰκός*) se muestran (*ἔοικα*) en todo esto (*ὅδε*). Se resalta, igualmente, el papel que tienen los convenios frente al dominio de las necesidades, y se sugiere que existe una disposición a distribuir nuestras propias fuerzas de manera igualitaria y equivalente a lo imperioso de la situación: las necesidades imponen un orden que regula nuestros impulsos siendo conveniente fortalecer nuestro dominio sobre ellas. Prosigue Jámblico, los pitagóricos decían: “El deseo en él mismo es cierta tendencia, impulso y apetito del alma, que busca ser llenado con algo o que disfruta la presencia de algo en concordancia con algo que disfruta los sentidos” (pág. 46. Ob.cit.). Es por tal motivo que la educación de los jóvenes debe de comenzar en la edad más temprana, dado que también existen unos deseos contrarios que buscan la evacuación y la repulsión. Muchos deseos son adquiridos de manera artificial, y se hace necesario observarlos con atención, estando muy vigilantes. La práctica de algún deporte ayuda a fomentar tal autocontrol y el manejo responsable de las relaciones sexuales destinado a una procreación sana y deseada.

1.2.6. La moderación en todos los apetitos nos permite conducirnos con propiedad

El pitagorismo se centra en la búsqueda de una realización interior balanceada, tal hecho es apreciado en los comentarios que Diógenes Laercio trae de Pitágoras. Entre ellos, menciona la prohibición de matar animales y, consecuentemente, la importancia de no consumir su carne. Las razones para ello, según Laercio, radican en acostumbrar a sus miembros a una vida simple. De igual manera, se considera que hace parte de la alimentación el honrar a los dioses, se menciona que el único altar que había era el de Apolo: “La primera persona que aseveró que el alma iba a un círculo necesario, en el cual era transformada y confinada en diferentes tiempos a diferentes cuerpos” (Laercio, *Lives of Eminent Philosophers*, *Phytagoras*, libro VIII, numeral 12). Este hecho evidencia, que no es posible en una sola vida lograr ese equilibrio y dominio tanto del cuerpo físico como del timo (*θυμός*), lo que va a obligar a nacer y morir varias veces en distintas circunstancias a fin el equilibrio integral con uno mismo.

> *10. de tu estómago y de tu sueño, después los arranques de tus apetitos y de tu ira.* (*First gluttony, sloth, sensuality, and anger*. *γαστρός μέν πρώτιστα καί ὕπνου λαγνείης τε καί θυμοῦ*).

A continuación se exponen las necesidades más imperiosas que convocan y ordenan nuestras fuerzas, ante todo tenemos las propias del estómago (*γαστήρ*), vocablo que también hace referencia a la matriz, mientras (*μέν*) primariamente (*πρώτιστα*), se señala lo que está primero (*πρῶτος*). Se señala todo aquello que alimenta (*πουλυβότειρα*) como el sueño (*ὕπνος*) y los placeres como el deseo sexual (*λαγνεία*), y (*τε*) también (*καί*) las pasiones y la ira (*θυμός*). Los pitagóricos fueron, pues, muy juiciosos en sus prácticas alimenticias así como en todas las costumbres y hábitos destinados a descansar bien, esto hacía que la vida de sus miembros estuviera muy regulada en concordancia con lo que nos hace bien y en moderar aquello que nos puede afectar. Se nota que la desmesura en lo se come nos llevaría a la glotonería, la desmesura en el placer sexual nos conduciría a la lujuria. La pérdida del dominio del nuestra espiritualidad se aprecia en el *Thimo* (*θυμός*), se considera que las emociones gobiernan el estado del ánimo; su desproporción trae transtornos en la manera de conducirnos, depresiones, y toda suerte de dolencias mentales. El significado de thimo (*θυμός*) es muy amplio, uno de ellos es apreciarlo como el lugar donde se asientan las emociones, los sentimientos y los pensamientos. También evoca el alma, la vida, el aliento y la sangre, la mente, el amor, el corazón, asimismo, la rabia y la ira siendo, en consecuencia, el timo aquel estado que caracteriza a un individuo que está vivo e impregna con tal actitud todas las dimensiones de su vida. Hay que resaltar la importancia del sueño, a tal punto que existía una deidad asociada al mismo *Hipnos* (*῞Υπνος*), según el poeta griego Hésiodo (*Ἡσίοδος*) en su Teogonía[46] (*Θεογονία*) que indica el origen de los dioses, *Hipnos* es un joven hijo de la noche o *Nix* (*Νύξ*) tal como también la muerte o Tánatos (*Θάνατος*) también lo es. Entonces, Pitágoras ya era consciente que la desproporción de estos hábitos trae profundos perjuicios que afectan ante todo la propia *areté* y dan mal ejemplo a los demás.

---

[46] Tema analizado y tratado en: *Hesiod, The poems and Fragments*. Se expone como en el comienzo era el Caos y luego viene la Tierra y Eros, Del Caos surgió la Noche y Érebo o la oscuridad, y de los anteriores surgió el Éter y el Día (pág. 26).

1.2.7. Las sentencias o máximas pitagóricas encaminadas a la excelencia ética

Según Diógenes Laercio[47], Pitágoras afirmó que antes de estar entre los hombres pasó 270 años en las sombras; recuerda que fue la primera persona que publicó tres libros, de los cuales Platón dijo que adquirió por la suma de 100 minas. La gente que acudía a Megaponto, llamaba a esta casa El Templo de Ceres, y la calle que conducía a él, la de las musas. Pitágoras consideraba que sus enseñanzas no estaban destinadas a todo el mundo, para ello utilizó un prolífico lenguaje simbólico a fin de ocultar sus significados frente a los no iniciados en estos sagrados misterios. Cabe destacar las 16 máximas que están en el numeral XVII, que se complementan con las expuestas en estos *Los Versos Dorados*:

> *11. No cometas nunca una acción vergonzosa, Ni con nadie, ni a solas:*
> (*Do nothing evil, neither in the presence of others, nor privately;*
> *πρήξῃς δ' αἰσχρόν ποτέ μήτε μετ' ἄλλου μήτ' ἰδίῃ*).

La importancia de la actividad como acción concreta (*πρᾶξις*) es evocada en un sentido de amonestación preventiva, donde de ninguna manera (*οὐδέν*) la deshonra (*αἶσχος*) debe llegar frente a las cosas (*πρᾶγμα*) que se realicen. Sea en un tiempo o en otro (*ποτέ*), con (*μετά*) cualquier otra persona, o emprendiendo cualquier otra (*ἄλλος*) actividad consigo (*μητά*) mismo por su propia cuenta (*ἴδιος*). Así, la integridad de uno consigo mismo está comprometida en el momento de hacer o realizar (*πράσσω*) algo, no solo se trata del valor que reviste la acción misma, sino la conducta que se ha de observar en la que se debe de evitar lo vergonzoso (*αἰσχρός*). Nunca se debe estar con quienes lo puedan a uno inducir a actuar de una manera incorrecta, aún cuando uno esté completamente solo ocupado en sus propios asuntos, se debe de guardar una actitud de compostura donde nunca uno se sienta avergozado por la manera en que uno actúa, ya que además de traerle enfermedad lo hace lucir a uno feo. La actitud correcta sería entonces buscar aquello que es bello, virtuoso, correcto y noble (*καλός*), aspecto que está en plena armonía con el pensamiento pitagórico tan preocupado por el esmerado cultivo de las virtudes de la bondad y del bien en la *areté*

---

[47] En *Lives of Eminent Philosophers, libro VIII Pythagoras, numerals 15 y 16, Diógenes comenta la inusitada fama y reputación que disfrutaba Pitágoras, quien era capaz de convocar todas las noches alrededor de 600 personas que venían a escucharlo (The Complete Pythagoras, pág. 75-77).*

(*ἀρετή*) siempre buscando ser el mejor (*ἄριστος*) ser humano consigo mismo (*ἴδιος*). Notamos la importancia de la autocontención destinada a actuar de la manera más correcta a fin de salvaguardar la propia integridad.

12. *Por encima de todo, respétate a tí mismo.*
But above all things respect thyself.
πάντων δέ μάλιστ' αἰσχύνεο σαυτόν.

Esta sentencia comienza con el uso de un adjetivo plural neutro (*πάντων*) que hace alusión a todo (*πᾶς*), que en otra forma lo tenemos como el universo y la cosa más importante (παν), vocablo que se ve fortalecido y resaltado como algo desbordante en la forma superlativa de mucho, muy, completamente (*μάλα*), en muchísimo (*μάλιστα*). Una suerte de cuantificación que lo excede todo en aquello que puede ser objeto de un acto enumerable o dimensionable, lo más importante que está por encima de todo está en respetarse a sí mismo (*σεαυτοῦ*). Nos recuerda aquella sentencia que estaba en el pronaos del templo de Apolo en Delfos: *conócete a tí mismo* (*γνῶθι σεαυτόν*)[48], donde toda la fuerza está en el verbo llegar a conocer o aprender (*γινώσκω*). Esta última sentencia es atribuida a muchos grandes pensadores de la antigüedad griega, entre ellos, al propio Pitágoras.

13. *Seguidamente ejércete en practicar la justicia, en palabras y en obras,*
(*In the next place, observe justice in thy actions and in thy words.*
εἶτα δικαιοσύνην ἀσκεῖν ἔργωι τε λόγωι τε),

Aquí se tiene una consecuencia de algo que sigue como resultado (*εἶτα*), que remite a aquello sobre lo cual algo se fundamenta (*ἔπειτα*), vocablo que resulta de unir lo que está arriba (*ἐπί*) con el resultado de algo que debe de cumplir una condición: sí… (*εἰ*). Siempre y cuando se cumpla con la *dikaiosyne* (δικαιοσύνη), podemos realizar o manufacturar algo (*ἀσκεῖν*) que requiera trabajo (*ἔργον*) y (*τε*) pueda ser hablado, ordenado y calculado (*λέγω*). Estamos frente a la preocupación por la justicia, la *diké* (*δίκη*), tan presente en la cultura

[48] Esta sentencia está mencionada en la obra del geógrafo e historiador Pausanias: *Description of Greece,* en libro 10 numeral 24. Pausanias menciona como en el templo de Delfos estaban escritas algunas máximas útiles para la vida de los hombres, aunque no menciona que fueron de la autoría de los siete sabios de Grecia.

helénica a lo largo de muchos siglos de constante reflexión práctica sobre el tema. Es tan importante la justicia que ha sido elevada a una deidad, la *Diké*[49] (*Δίκη*), diosa de la justicia, según Hesíodo (*Ἡσίοδος*) hija del padre de los dioses Zeus (*Ζεύς*) y de Temis (*Θεμις*) que ejemplifica las leyes de la naturaleza. La preocupación pitagórica se centra en la práctica de la justicia, algo que se ejercita y en la cual se debe de estar entrenado (*ἄσκησις*): la *dikaiosyne* involucra una conducta completamente correcta en el cumplimiento de la ley fruto de la interiorización de las costumbres observadas (*δίκαιος*), que traen un orden balanceado, justo y correcto en el individuo como en su comunidad. Algo interesante, es vincular la noción de justicia con el trabajo (*ἔργον*), con lo cual se podría interpretar que no solo hay que trabajar y ejercitar la justicia en las acciones concretas sino, también, que tan solo aquellos que trabajan están en competencia de practicarla.

Hay que resaltar que los pitagóricos era una comunidad que sea autoabastecía y, en ese sentido, para ellos, el trabajo dignificaba y era un elemento necesario para construirse como individuo digno y útil. Esta oración tiene la presencia de un doble énfasis de la noción de trabajo; por una parte, tenemos la acción de trabajar que dignifica, honra y ejercita (*ἀσκέω*) y el trabajar realizando algo que puede dar lugar a ganar algo y que se puede ejercutar en algún sitio (*ἐργάζομαι*), ambos verbos resaltan la parte práctica en la ejecución de algo. A su vez, el *logos* (*λόγος*) está evocado en su doble significado como aquello que es dicho y como aquello que es pensado así que, en la misma acción de decir algo se está ordenándolo (*λέγω*), y tal hecho involucra el ejercicio de un trabajo; la palabra por medio de la cual nos construimos y nos transformamos tan solo puede ser ejercitada y aprehendida por quienes trabajan. Lo cual nos conduciría a que los peresozos no tienen la potestad de ejercitar ni la justicia ni la palabra[50], ni el justo pensar y actuar, trayendo caos a sus vidas debido a que un significado importante de logos es aquello que ordena e impone equilibrio: en la forma en que se habla y piensa se nota quien es justo y laborioso.

---

[49] La mención a la Diké o la justicia está en: Hesiod, *Theogony*, William Heinemann, line 901.
[50] El tema de adquirir y ejercitar las virtudes es bien apreciado y conocido por Pitágoras, sea en relación a la templanza y el autocontrol (Capítulo XXXI), sea en relación a la fortaleza (capítulo XXXII); asimismo en los hábitos del diario vivir (capítulo XXI), se hace un llamado al fortalecimiento del cuerpo a fin que esté sano, al ejercicio del estudio, comer sano, realizar sacrificios, y demás actividades diarias donde el trabajo está siempre presente. Ver: Iamblichus, *The Life of Pythagoras or Pythagoric Life*.

14. Aprende a no comportarte sin razón jamás.

(*And accustom not thyself to behave thyself in anything without rule, and without reason.*

μηδ' ἀλογίστως σαυτὸν ἔχειν περί μηδέν ἔθιζε),

La presente sentencia comienza con una advertencia (*μηδέ*), vocablo que deriva de no (*μη*) y, pero (*δέ*), no hay que hacer mención a falsas pretenciones o alardear (*ἀλογίστως*) de sí mismo (*σεαυτοῦ*) en aquello que se tiene (ἔχω) alrededor (*περί*) ni acostumbrarse (*ἐθίζω*) a ello. La doble negación en la oración tanto al comienzo (*μηδέ*) como al final (*μηδέ*) resalta esa doble amonestación, que se debe de evitar a toda costa tanto en el presumir como en el poseer en exceso (*άγαν). Esta sentencia nos lleva a la máxima délfica "no hacer nada en exceso" (μηδέν άγαν*), está máxima también se le atribuye a Solón de Atenas[51]. Se resalta que el valor no está en las posesiones ni en vanagloriarse en torno a lo que uno tiene, se debe de evitar a toda costa que uno se habitue a tal comportamiento anómalo e irracional (*ἀλείφω*). Una vez más, se ve cómo los pitagóricos no fomentaban las posesiones en las riquezas materiales e impulsaban a que sus miembros fueran modestos en todo el sentido del término. Así, resaltan el cultivo de las virtudes y gran parte de las máximas de ellos pudieron terminar siendo parte de los aforismos del Templo de Apolo en Délfos.

15. Y sabiendo que morir es la ley fatal para todos,

(*But always make this reflection, that it is ordained by destiny that all men shall die.*

Ἀλλά γνῶθι μέν, ὡς θανέειν πέπρωται ἅπασιν),

La oración comienza con la conjunción pero (*ἀλλά*), en cuanto a lo que se conoce, a lo que se tiene noticia (*γιγνώσκω*), consecuentemente (*μέν*) de esta manera (*ὡς*) lo que trae la muerte (*θάνατος*), que en lenguaje de Homero tiene relación con el destino[52] (*πέπρωται*) abordado en su totalidad para todo el mundo y todas las cosas (*ἅπας*). Es la evocación de lo

---

[51] En tal época se acostumbraban los preceptos, como las que estamos analizando en este momento de Pitágoras. De igual manera, a Solón se le conoce por su decálogo, consitente en diez máximas o sentencias, recogidas por Diógenes Laercio, cuya fuente es Apolodoro. Ver en: *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book1*.

[52] Homero toca el tema del destino, la moira o *Fate*, en la *Ilíada*, libro XXIV, línea 209 (200-216). Ver: Homer, *The Iliad*, English Translation by A.T. Murray.

que se es capaz de llegar a conocer, observar, experimentar (*εἴδομαι*), se topa con aquello que es uno (*εἷς*) para todos (*πᾶς*); se trata del morir (*θνῄσκω*), algo que está señalado por propio del destino (*μοῖρα*). Aquí nos encontramos con que cada quien recibe la parte que le corresponde (*μείρομαι*) en relación a su propia Moira (*Μοῖρα*) como repartidora del Destino de cada quien. Tal concepción ya estaba presente en Homero y, por ende, en Pitágoras.

16. que las riquezas, unas veces te plazca ganarlas y otras te plazca perderlas.
(*And that the goods of fortune are uncertain; and that as they may be acquired, so may they likewise be lost.*
χρήματα δ' ἄλλοτε μέν κτᾶσθαι φιλεῖ, ἄλλοτ' ὀλεσθαι).

Esta oración comienza con todo aquello que está relacionado con los medios de intercambio y medida del valor, el dinero (*χρήματα*) que en otro tiempo (*ἄλλοτε*), en consecuencia (*μέν*), permite: adquirir, ganar, comprar y poseer (*κτάομαι*) aquello que se puede amar o estimar en gran medida (*φιλέω*); otras (*ἄλλος*), se pueden perder fruto de la destrucción (*ὄλεθρος*). Esta sentencia analiza el uso y la utilidad (*χρῆσις*) que se le puede dar a aquello que encarna las posesiones y las riquezas de las cosas que son necesarias (*χρῆμα*), lo que nos conduce a la dificultad en saber utilizarlas, prestarlas, experimentarlas al usarlas y tenerlas (*χράω*). Las riquezas (*χρῆμα*) en sí mismas no son negativas, antes bien, permiten el relacionarse con las cosas (*χρῆμα*) que son diferentes (*ἀλλοῖος*). Este hecho conduce a que el entrometerse en los asuntos que pertenecen a los demás (*ἀλλοτριεπίσκοπος*) en muchos casos trae destrucción (*ὀλεθροφόρος*). El ganar algo, poderlo poseer por medio de una compra (*κτάομαι*), muchas veces está dirigido a aquello que es amado o querido (*φίλος*); sin embargo, otras veces (*ἕτερος*) es diferente dado que tales cosas muchas veces traen (*φέρω*) destrucción (*ὄλεθρος*). La normativa se sitúa en aquellas cosas (*χρῆμα*) que son necesarias para el diario vivir, las que se deben adquirir o comprar (*κτάομαι*) de los demás (*ἄλλος*) debido a su indispensable uso (*χράω*), y se debe tenerlas y, en algún sentido, amarlas (*φιλέω*), pero se debe estar en disposición de perderlas en caso de que las circunstancias propias de la vida así lo exijan[53].

[53] Este tema es una consecuencia directa de la transmigración del alma, que nos lleva a considerar que todo lo que nos rodea es momentáneo. Ver en *The Complete Pythagoras*, Diogenes Laercio (Chapter IV, pág. 72).

17. De los sufrimientos que cadena a los mortales por divino designio,

(*Concerning all the calamities that men suffer by divine fortune,*

ὅσσα δέ δαιμονίαισι τύχαις βροτοί ἄλγε' ἔχουσιν),

Este texto comienza con una forma poética homérica de naturaleza épica (*hóssos, ὅσσος*), que más tarde derivó en (*ὅσος*) pronombre que señala en qué medida, asimismo (*δέ*), el poder divino (*δαιμόνιον*), fruto de los actos de un dios inciden sobre los actos de los hombres (*τύχη*), determinan su destino y fortuna, y como mortales (*βροτος*), traen (*ἔχω*) dolor (*ἄλγος*). El ser humano se enfrenta con aquello que es extraordinario e inescrutable fruto de la divinidad (*δαιμόνιος*), señala la presencia de un dios y de un poder divino (*δαίμων*), como aquel espíritu o guardian espiritual que interviene en nuestro propio destino. Es propio de aquello que procede de lo divino (*δαιμόνιος*), que pueda revestir unas características buenas (*εὐδαίμων*) como unas malas (*κακοδαίμων*); como consecuencia de lo bueno (*εὖ*) o lo malo (*κακός*) fruto de la actuación de un dios (*τύχη*) que determina nuestro destino. La condición de ser mortales (*βροτος*) es el tener y estar poseídos (*ἔχω*) por aquello que trae dolor y problemas (*ἀλέγω*), a diferencia de los divinos e inmortales (ἀμβρόσιος) más dados a tener (*ἔχω*) la ambrosía (*ἀμβροσία*), aquel elixir de vida que otorga la inmortalidad y la presencia de lo bueno y noble (*ἐΰς*). En esta cita, Pitágoras resalta que el destino (*μοῖρα*) no está controlado por los mortales (*βροτος*) sino por los inmortales (*ἄμβροτος*), dada la presencia del dolor y la calamidad (*ἄλγος*). No nos queda otro recurso, como ya se mencionó, que practicar la areté (*ἀρετή*) a fin de fortalecer la justicia (*δίκη*) y el dominio de la palabra (*λόγος*) mediante la acción y el trabajo (*ἔργον*), lo que nos permitirá tener fuerza (*σθένος*) y no debilidad (*ἀσθένεια*) frente a la adversidad propia de un destino que no controlamos.

18. la parte que a tí corresponde, sopórtala sin indignación;

(*Support with patience thy lot, be it what it may, and never repine at it.*

ἣν ἂν μοῖραν ἔχῃς, ταύτην φέρε μὴδ' ἀγανάκτει).

Lo que ya viene dado por la existencia (*εἰμί*), aquello ya establecido para uno desde el pasado (*ἦν*), en cuanto a la parte que cada uno ha de recibir (*μείρομαι*), evoca aquel destino y parte (*μοῖρα*) que a veces trae (*ἔχω*) enemistad o hostilidad (*ἔχῃς); esta (οὗτος*) debe de ser llevada y conducida (*φέρω*), y no (*μηδέ*) sentida como algo indignate que nos cause pena o desagrado (*ἀγανακτέω*). Lo propio a uno es o fuere (*εἰμί/ ἦν*), está en compartir la porción que es distribuida y dividida (*μοιράω*) por el destino (*μοῖρα*), tal hecho nos permite dispensar (*μοιράζω*) lo que se tiene y posee (*ἔχω*). Esto (*αὕτη, τοῦτο*) debe de ser soportado (*φέρω*) sin (*μηδέ*) que estemos adoloridos o enfadados (*ἀγανακτέω*). Una vez más, se hace hincapié en que es propio de la condición de estar vivos y de ser lo que somos el saber aceptar la parte que nos corresponde por destino, al mismo tiempo la virtud nos obliga a asumirla sin queja alguna y sin desagrado. Esta importante sentencia establece la fortaleza que se debe de cultivar está fundamentada en una profunda comprensión de la vida, se debe estar agradecido con lo que se tiene, con el mundo tal como se nos da y presenta; ya será tarea de cada uno mejorarlo en la medidad de sus posibilidades y fuerzas.

19. pero es legítimo que le busques remedio en la medida de tus fuerzas;
(*But endeavour what thou canst to remedy it.*
ἰᾶσθαι δέ πρέπει καθ' ὅσον δύνηι, ὧδε δέ φράζευ).

La actual sentencia alude a curar (*ἰάομαι*) también (*δέ*) aquello que es visto y sentido con claridad (*πρέπω*), en concordancia (*καθά*) con la cantidad (*ὅσος*) de fuerza o capacidad (*δύναμαι*) que uno tiene, de esta manera (*ὧδε*) además (*δέ*) es considerado (*φράζω*). El imperativo está en poder pensar, entender y estar en posesión de los propios sentidos (*φρονέω*) a fin que la mente (*phrén, φρήν*) de uno tenga el entendimiento adecuado para ocuparse en sanar y reparar (*ἰάομαι*), y encontrar la cura y el remedio (*ἴασις*) contra (*κατά*) aquello que lo lleva a uno a hundirse (*δύω*) perdiendo el contacto y el control de uno mismo. Para ello tenemos que ser conspicuos en apreciar (*πρέπω*) cuanto (*ὅσος*) remedio (*ἴασις*) necesitamos en relación con las manifestaciones de nuestra propia fuerza (*δύναμις*). Es la consecuencia de ser amos (*δυνάστης*) del asiento de las emociones y la mente (*φρήν*), en este mismo presente (*ὅδε*) en la medida (*καθό*) en que seamos capaces (*δύναμαι*) de ello. En este comentario, se esconde cómo la salud depende del control que tengamos de nuestras emociones y pensamientos, y el mejor remedio está dado por tener una mente equilibrada; en resumidas cuentas, toda posibilidad de sanarnos comienza dentro de uno mismo. El estar sanos está en proporción a nuestras propias fuerzas, la enfermedad es, en consecuencia, el resultado de una mente (*φρήν*) débil que es el reflejo directo de una ausencia de fuerzas. No en vano las enfermedades mentales como la esquizofrenia provienen de un entendimiento o mente (*phrén*, *φρήν*) dividida (*σχίζειν*). El concepto de *phrén* (*φρήν*) en Pitágoras es visto como aquella instancia desde la cual podemos sanarnos y desde la cual se consolida nuestra fuerza y poder (*δύναμις*). El dominar la mente es lo que nos permite ser amos (*δυνάστης*) de nosotros mismos, y tal hecho se aprecia de manera clara (*πρέπω*) en la forma como estamos familiarizados con nosotros mismos y cómo entendemos (*φρονέω*) aquello que nos permite ser prudentes y sabios.

> *20.* *Porque no son tantas las desgracias que caen sobre los hombres buenos.*
> (*And consider that fate does not send the greatest portion of these misfortunes to good men.*
> *Οὐ πάνυ τοῖς ἀγαθοῖς τούτων πολύ Μοῖρα δίδωσιν*).

En esta oración elíptica el sujeto no está mencionado, no obstante, se refiere a aquellos que se han ejercitado en tener un adecuado entendimiento (*φρήν*); no (*οὐ*) para todos ellos juntos (*πάνυ, τοῖς*) es bueno (*ἀγαθός*) recibir (*δίδωμι*) estas (*τούτων*) muchas (*πολύ*) porciones del destino (*μοῖρα*)[54]. Aquí el destino es presentado con nombre propio, la *Moira* (*Μοῖρα*) que son las que reparten el destino que a cada uno le toca, que en los griegos eran tres: Cloto (la hilandera, *Κλωθώ*), Láquesis (*Λάχεσις*, la que echa a suertes y mide la longitud del hilo de la vida) y Átropos (*Ἄτροπος*, la inevitable, quien corta el hilo de la vida). Esta oración refleja cómo quienes hacen el bien (*ἀγαθοποιέω*) no (*οὐ*) todos (*τούτων*) ellos (*τοῖς*) están eximidos de lo que las Moiras les otorgan (*δίδωμι*). En consecuencia pueden existir experiencias fuertes o desgracias que deben poder soportar, está en los hombres que son amos (*δυνάστης*) de la mente y las emociones (*phrén*, *φρήν*) poder actuar haciendo el bien (*ἀγαθοποιΐα*), en concordancia a la bondad (*ἀγαθωσύνη*) que los habita. Esto (οὗτος) nos lleva a que de muchos (*πολὺς*), pocos (*ὀλίγος*) serán los que

[54] El tema de las Moiras es tratado por Hesiodo: *Theogony* (líneas 216-225), se hace hincapié en la imparcialidad de las mismas en castigar a quienes han transgredido la ley, tanto hombres como dioses.

tienen la posibilidad de aceptar con bondad el destino (*μοῖρα*) impuesto por las propias Moiras (*Μοῖραι*)[55]. Una vez más se refleja en esta cita cómo Pitágoras estaba muy influenciado por todos los mitos que de alguna manera tenían plena vigencia para él, ajeno a la cortante discriminación entre mito y *logos* más propia de estos tiempos modernos. La vida cotidiana pitagórica estaba imbuida en variados niveles de lectura de la realidad, donde el destino (*μοῖρα*) también tiene otro tipo de lectura más formal como aquella parte susceptible de ser dividida (*σχίζω*) o multiplicada (*πληθύνω*). No obstante en esta oración la Moira (*Μοῖρα*) es presentada en singular, da la impresión que puede ser una mención al destino en un sentido más general no tan influenciado por consideraciones de orden mítico, no obstante esto no quiere decir que esté excluyendo este tipo de lectura.

> *21.* *Muchas son las voces, unas indignas, otras nobles, que vienen a herir el oído:*
> (*There are among men many sorts of reasonings, good and bad;*
> *Πολλοί δ' ἀνθρώποισι λόγοι δειλοί τε καί ἐσθλοί προσπίπτουσ'*),

Esta oración comienza mencionando que una gran cantidad (*πολύς) además (δέ*) de seres humanos (*ἄνθρωπος*) dicen y piensan (*λόγος*) de manera cobarde (*δειλός*), y (*τε*) también (*καί*) aquellos que tienen éxito social y prosperidad (ἐσθλοί) tienden (*προς*) a caer (*πίπτω*). El comentario se centra en analizar la naturaleza humana, la humanidad (*ἄνθρωπος*) que en la forma superlativa muchos (*πολύς), la* gran mayoría (*πλεῖστος*) de los seres humanos no tiene un dominio apropiado de lo que hablan (*λέγω*). Esto sería reflejo de un pequeño (*ὀλίγος*) dominio del componente matemático y, por ende, numérico, que habita también en el logos (*λόγος*), no olvidemos que el verbo légo (*λέγω*) posee dos significados: uno relacionado con hablar y otro con ordenar o contar números. De manera que el ejercicio de la matemática trae control a la mente, al intelecto y a la voluntad (*phrēn, φρήν*), concepción propia del pensamiento pitagórico. Este uso inadecuado de la palabra (*λόγος*), hace que los seres humanos se comporten de manera tímida y miedosa (*δειλός*), afectando tanto aquellos que son prósperos (*ἐσθλοί*) como a aquellos que se han desplomado

[55] El tema de las Moiras es tratado por Platón en *La República*: "Había otras tres mujeres sentadas en círculo, cada una en un trono y a distancias iguales; eras las Parcas, hijas de la Necesidad, vestidas de blanco y con ínfulas en la cabeza: Láquesis, las cosas pasadas; Cloto, las presentes, y Átropo, las futuras" (617c).

(*προσπίπτουσ'*). El vocablo que significa rico y poderoso (*ἐσθλοί*) es de uso corriente en Hesíodo, poeta anterior al mismo Pitagóras, hecho que evidencia que fue un conocedor muy entererado tanto de él como de Homero, debido a la proliferación de vocablos propios del lenguaje de este último. Una vez más, es perceptible un Pitágoras conocedor de las grandezas y las flaquezas propias del género humano, donde todos se ven afectados quieránlo o no, en parte debido a la presencia del enigmático destino (*μοῖρα, Μοῖρα*). El remedio o la cura (*ἴασις*) frente a la incertidumbre propia del destino, estaría en fortalecer el dominio que uno tiene en lo que dice y piensa (*λέγω*) que se consigue al fortalecer el *phrēn* (*φρήν*): aquella instancia que en los tiempos de Pitágoras era el lugar de la mente, el diafragma y el abdomen en el cuerpo físico. También este vocablo puede significar el alma o el espíritu, la naturaleza y evoca también el movimiento de la sangre alrededor del corazón.

> *22.* *Que no te turben ni tampoco te vuelvas para no oírlas.*
> (*Admire them not too easily, nor reject them.*
> *ὧν μήτ' ἐκπλήσσεο μήτ' ἄρ' ἐάσῃς εἴργεσθαι σαυτόν*).

La actual cita comienza mencionando aquellos que no (*μήτε*) siendo (*ὦν*; presente participio de εἰμί, *ὤν*) dados a versen sobreafectados (*ἐκπλήσσεο*) ni (*μήτε*) en consecuencia (*ἄρα*) negligentes (*ἐάσῃς*) a decir menos de lo que piensan (*εἴρων*) de sí mismos (*σαυτόν*). Tenemos una cita con una doble negación (*μήτε*) que nos recuerda que no se cumple ni lo uno ni lo otro: al no estar (*ἐκτός*) afligido (*πλήσσω*) no se puede dar consejo (*ἐάω*). El estar sensibilizado es indispensable para comprender lo que acontece alrededor de uno, estas dos vivencias se han de juntar o atar (*εἴρων*). No hacerlo de la manera apropiada, es la base para la decepción y la hipocresía (*εἰρωνεία*) consigo mismo (*σαυτόν*). Esta es una sentencia donde se hace necesario verse golpeado o sacudido (*πλήσσω*) por los eventos que se dan fuera (*ἐκτός*) de uno a fin de poder conceder y aconsejar (*ἐάω*), el unir y sujetar (*εἴρω*) ambas actitudes, trae paz (*εἰρήνη*). La inapropiada dinámica entre ambas vivencias da la impresión de alguien que finge ser ignorante (*εἴρων*), lo que nos lleva a comportarnos irónicamente (*εἰρωνεία*) con nosotros mismos (*σαυτόν*)[56]. El consejo que subyace a la actual cita, hace referencia a la necesidad de mantener una actitud unida y unificada frente a los golpes y embates (*πληγή*) propios de la vida. Comprender lo que está en el fondo, nos brinda la posibilidad de estar de acuerdo y aconsejar (*ἐάω*) a otros siempre y cuando no actuemos de manera irónica (*εἴρων*), disimulando que no hemos entendido lo que está sucediendo. La integridad consigo mismo nos obliga a compenetrarnos con todo lo que nos rodea, no podemos marginarnos de las situaciones externas que otros padecen, siempre lo que hablemos, es consecuencia de una actitud comprometida que es capaz de comprender el padecimiento, y puede develar lo que está sucediendo con realismo y verdad. En este contexto, Pitágoras no ve con buenos ojos la ironía (*εἰρωνεία*) en cuanto presupone que es una forma hipócrita de actuar a fin de no decir ni comprometernos con lo que esta sucediendo alrededor de uno. En este comentario, se aprecia la dimensión dinámica de la vida donde acontecen las relaciones humanas y la dimensión interna o privada de cada uno, se hace hincapié en el equilibrio y en la mutua correspondencia que debe de existir entre ambos planos; cuando no se logra unirlos, surge la ironía y la hipocresía como maneras de actuar y pensar. La virtud que aquí se cultiva se da en el armónico encuentro entre dos extremos opuestos: la extrema aflicción (*ἐκτός*-*πλήσσω*) y dar consejo pacífico capaz de unir (*ἐάω*-*εἰρήνη*-*εἴρω*)**,** una conciliación de naturaleza dinámica la subyace dinamizándola.

23. Cuando oigas una mentira, sopórtalo con calma.
(*But if falsehoods be advanced, hear them with mildness, and arm thyself with patience.*
ψεῦδος δ' ἤν πέρ τίς λέγηται, πράως εἶχ').

La presente cita comienza con aquello que es una falsedad y una mentira (*ψεῦδος*), que además, *(δέ*) eran y estaban (*ἦν*, es la tercera persona del plural imperfecto de *εἰμί*)

[56] En su libro: *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, Walter Burkett, nos presenta los enfrentamientos entre las distintas escuelas pitagóricas, alude a lo que representaba la imagen misma de Pitágoras en cada una de ellas, lo que dio lugar a estas controversias. Tenemos la controversia entre aquellos que lo consideraban como la encarnación de la teoría pura, como Heráclides Póntico; mientras que otros, como Aristóxeno de Tarento y Dicearco de Mesina, lo consideran un político. Para Dicearco el alma es una mera palabra, ya que existe una inegable ironía originada en la doctrina de la metempsicosis (*μετεμψύχωσις*) pitagórica: donde se afirma la transmigración del alma y su subsecuente recarnación después de la muerte. Es de descatar cómo las enseñanzas de Pitágoras tienen una riqueza de interpretaciones en sus seguidores y discípulos (pág. 106).

alrededor (*πέρ*) de: ¿Quiénes? ¿Cuáles? ¿De qué clase? ¿Por qué? (*τίς*) dicen (*λέγω*) estas mentiras (*ψεῦδος*). Tenemos quienes (*τίς*) nos engañan y nos decepcionan al hablar (*λέγω*) en falso (*ψευδής*) y *(δέ)* se ve (*ἦν*) que están cerca rodeándonos (*περί*). El problema de lo que es la verdad (*ἀλήθεια*), como aquello que no es una mentira; con un amplio uso de la *α alpha privativum* o alfa privativa, debido a que es más fácil definirla por la vía negativa, de lo que no tiene que por la positiva de lo que tiene. En este caso, nos estamos enfrentando a aquello que no (*α*) es olvidado (*ληθής*), cuando las personas son confiables y honestas, o cuando las cosas son verdaderas y reales, son inocultables (*ἀληθής*): es una característica que se opone a lo que nos engaña por andar escondido y ser falso (*ψευδής*). En esta oración, notamos un gesto de gran exclamación debido a que manifiesta que la mentira y la falsedad (*ψεῦδος*) están por todo lado (*περί*) rodeándonos y transpasándonos (*περάω*), sin que podamos escapar a tan fatídico destino. La palabra misma y todo lo que ella dinamiza como lenguaje, como aquello que es dicho y pensado (*λόγος*) ha perdido su capacidad para ordenar y comunicar (*λέγω*). Tan solo quedan quienes (*τίς*) dicen mentiras para su propio beneficio (*ψεύδω*) trayendo caos (*χάος*), aquel estadio primigenio donde el verbo o la palabra (λόγος) ha perdido su doble naturaleza, que se aprecia en légo (*λέγω*): de poder ordenar algo en base a la existencia de los números (*ἀριθμός*) y poder decir algo con sentido. Se trata de poder superar este pasaje atravesándolo (*πείρω*), es poder abrirnos a una nueva jornada y apertura (*πόρος*) verdadera, genuina y honesta (*ἀληθής*)[57]. En el lado opuesto (*πέραν*), tenemos a quienes (*τίς*) impulsan este desorden fruto de ese bostezar (*χάσκω*), originado por la incapacidad para repartir y distribuir (*νέμω*) paz (*εἰρήνη*), dada la falsedad (*ψεῦδος*) en que viven. La cita termina con una exhortación, que aconseja de manera imperativa, el deber de tener (*ἔχω*) que tratar suavemente (*πράως*) a quienes mienten (*ψεύδω*), ser suave y amable (*πραΰς*), es la normativa que hay que seguir frente a quienes viven en la mentira (*ψεῦδος*).

---

[57] Diógenes Laercio menciona ese carácter siempre reflexivo de Pitágoras, dado a examinarse a sí mismo, de manera reiterativa. Alude citando sus propias palabras: "¿Qué he transgredido? ¿Qué he hecho? ¿Qué hubiera podido haber hecho y que he omitido?" Se nos muestra un Pitágoras que vigila de cerca la manera en que se comporta con los demás. Se destaca su prohibición de sacrificar animales, y tan solo ofrecer plegarias en los altares que estén inmaculados. Hacía énfasis en que uno debería ejercitarse en fortalecer el valor de sus propias creencias sin tener que jurar, que conlleva la defensa de la propia honorabilidad y credibilidad en lo que cada uno dice y hace (*Lives of Eminent Philosophers, book 8 Pythagoras, Cap. XIX).*

24. *Pero lo que ahora voy a decirte es preciso que lo cumplas siempre:*

Observe well, on every occasion, what I am going to tell thee:–

ὃ δέ τοι ἐρέω, ἐπί παντί τελείσθω·

Quienes (*ὅ*) en cambio de (*δέ*) usted (*σύ*) ciertamente (*τοι*) preguntan (*ἐρέω*), sobre (*ἐπί*) todo (*παντί*) lo logrado y realizado (*τελέω*). Esta sentencia comienza inquieriendo acerca de aquello que permite que un argumento tenga solidez y que todos sus constituyentes estén debidamente ligados y unidos (*εἴρω*). Se recuerda que en todo (*πᾶς*) existe una jerarquía y un orden, que muestra completez, realización y perfección (*τέλος*): este fin, propósito y objetivo es propio de quienes están sujetos a cumplir con los preceptos (*τελέω*), es decir, propiamente quienes no viven en la mentira y la falsedad. A tal virtud se la denominada la mansedumbre (*Πραυς), que como bien se anotó, Pitágoras fue uno de los primeros en reconocer tal virtud y a su vez en afirmar que las virtudes surgen de la unión concertada de dos instancias opuestas e irreconciliables. Recordemos además que* todo (*πᾶν*), es algo que debe de cumplir con una normativa para todos sus miembros, hecho que nos lleva al dios Pan[58] (*Πάν*), el dios de la naturaleza y los pastores: todo (*πᾶς*) está sujeto a las leyes y costumbres (*νόμος*) de la naturaleza. Tal como está sugerido en los Himnos Órficos o en la teogonía órfica la relación del Sol con Physis-Pan. Se dice que las prácticas órficas (*Ὀρφικά*) guardan una relación paralela con el pitagorismo. Tal hecho es mencionado por Aristóteles (*Ἀριστοτέλης*) quien afirmó, que el poéta Orfeo (*Ὀρφεύς*) nunca existió[59] y que fueron los pitagóricos quienes le ascribieron estos poemas.

25. *Que nadie, por sus dichos o por sus actos, te conmueva para que hagas o digas nada que no sea lo mejor para tí.*

(*Let no man either by his words, or by his deeds, ever seduce thee.*

Μηδείς μήτε λόγωι σε παρείπηι μήτε τίς πρῆξαι μηδ' είπεῖν),

[58] En el himno órfico diez dedicado a Pan, dice: la sustancia de todo, etérica, marina, espíritu general, fuego inmortal, por el cual todo el mundo es tuyo y todas las partes tuyas, oh poder divino. A su vez en el himno nueve está dedicado a Physis, la naturaleza, procreador, anciana y divina, madre, celestialmente abundante, reina venerable, en cada parte está tu dominio. (Ver Ophic Himns 9, 10)

[59] W. D Ross en *Aristotle; Ross, W. D. (William David), 1877; Smith, J. A. (John Alexander), 1863-1939 (1908). The works of Aristotle. p. 80. Menciona…..*

Esta declaración comienza aseverando que nadie (*μηδείς*) ni siquiera (*μηδέ*) es aficionado a hablar (*λόγῳ*) de lo suyo (*σε,* σύ) a menos que pueda argumentar un propósito (*παρέχω*), que ni aún (*μηδέ*) haya quienes (*τίς*) lo hayan realizado (*πράσσω*), ni (*μηδέ*) en lo que haya sido dicho (*εἰπεῖν*). Hay una acción reiterativa de negación (*μή,* no; *δέ,* y), que a lo largo de la cita se repite cuatro veces. Tal reincidencia de negar algo recae ante todo en la palabra (*λόγος*) y todo lo que ella conlleva, uniendo y atando (*εἴρω*). El gusto por hablar (*λογάω*) lleva a habladurías o declaraciones (*λόγῳ*) en torno a aquello (*παρά*) que se ha venido sosteniendo (*ἔχω*), y en muchos casos se ha negado: no (*μηδέ*) se encuentra ni un solo individuo (*εἷς*) que haya sido eximido de tales consideraciones (*μηδείς*). Ni aún (*μηδέ*) una solo una vez (*ἅπαξ*), lo dicho o contado (*λέγω*), puede no estar listo para someterse (*παρέχω*) a un escrutinio; siempre las acciones realizadas (*ἔργον*) serán un recordatorio de las cosas hechas (*πρᾶγμα*). Es más aún, existen formas en el aoristo infinitivo activo épico dórico (*εἰπεῖν,* en lo dicho *εἶπον*), que están ligadas al uso de los verbos decir (*λέγω*) y unir (*εἴρω*); donde se busca perpetuar o prolongar lo dicho o lo hablado acerca de ciertos individuos (*ἄνθρωπος*) o tema (*θέμα*) a fin de resaltarlo, como lo que está situado (*τίθημι*) y enseñado (*διδάσκω*). El destacar las cosas logradas[60], busca esa complementación confirmativa entre lo dicho y sostenido (*λέγω*), con lo hecho y trabajado (*ἐργάζομαι*). La praxis (*πρᾶξις*) es un vocablo con una riqueza inusitada de términos que resaltan el valor mismo de la acción en todos los frentes en que es posible que se dé. Tal hecho viene a darle solidez a esta sentencia ya que de lo que se habla es de lo que se ha logrado llevar a cabo en hechos concretos respaldados por acciones puntuales.

26. Reflexiona antes de obrar para no cometer tonterías:
(*Nor entice thee to say or to do what is not profitable for thyself.*
Ὅ τί τοι μή βέλτερόν ἐστιν).

Esta admonición comienza señalando, quién (*τίς*) de ustedes (*ὅ,* ὅς), ciertamente (*τοι*), no (*μή*) es (*ἐστιν*) mejor (*βελτίων*). Estamos frente a un señalamiento preciso hacia

[60] Diogénes Laercio menciona en *Lives of Eminent Philosophers, book 8 Pythagoras*: el numeral XVIII como el mismo Pitágoras guardaba una posición balanceada no propensa a los extremos, que evitaba reírse y se abstenía de las historias vacías; practicaba la adivinación para auspiciar y dar augurios. Cantaba acompañado de la lira, y daba gracias a los dioses y los hombres inminentes.

alguien concreto usted o tú (*σύ*) bajo un pronombre relativo (*τίς*) que pregunta por quién, qué, por qué, cuál, puede asegurar al que escucha, que es verdad lo que el hablante está diciendo (*τοι*), en cuanto que no (*μή*) se cumple en general, que se sea (*ἐστιν*) mejor (*βέλτερόν*). Aquí, el uso de una negación (*μή*) parece cuantificar para la mayoría de los individuos, que es realmente difícil, ser (εἰμί) bueno y noble a nivel moral (*ἀγαθός*), ya sea que uno nace (γίγνομαι) de esta manera. Como un estadio propio que es desde que la existencia comienza (*υπάρχω*), algo que es engendrado y producido (*γεννάω*) desde el origen (*γένεσις*) mismo en que nacemos. En sí se da una bienvenida amorosa (*ἀγαπάω*) a quienes siendo buenos (*καλός*) logran ser los mejores (*κάλλιστα*). El término *βέλτερόν ἐστιν*, 'es mejor', es de ocurrencia frecuente tanto en la Ilíada (*Ἰλιάς*) como en la Odisea[61] (*Ὀδύσσεια*) de Homero (*Ὅμηρος*), donde se resaltan aquellas cualidades morales que permiten la superación propia y la excelencia en la manera en que uno se conduce tanto consigo mismo con respecto a los demás. En esta forma, el pensamiento y las enseñanzas de Homero influyeron de manera profunda en Pitágoras como en gran parte de todos los helenos de la época y posteriores a él.

27. *Obrar y hablar sin discernimiento es de pobres gentes.*
(*Consult and deliberate before thou act, that thou mayest not commit foolish* actions.
Βουλεύου δέ πρό ἔργου, ὅπως μή μωρά πέληται).

Esta sentencia comienza aludiendo a lo valioso que es tomar o dar un consejo (*βουλεύω*) antes (*πρό*) de actuar (ἔργον); de tal manera que (*ὅπως*), no (*μή*) nos lleve a volvernos (*πέλω*) tontos (*μωρός, μωρά*). La decisión (*βουλή*) involucra un ejercicio de la voluntad y del querer muy impregnado de intenciones, donde siempre existe un deseo de preferir (*βούλομαι*) el mejor consejo (*ἀριστόβουλος*), que puede estar en frente y que nos invita seguir adelante (*πρόσω*). En este contexto, impera el trabajo vinculado a una acción (ἔργον), en la cual se valora la dificultad (*ἐργώδης*) que trae su realización completa (*ἔργον* unido al sufijo *–ώδης* que indica algo pleno de). Surge entonces la pregunta que indaga por

[61] Basta señalar una de las tantas entradas de este texto, cuando Odiseo dice: *Para un pobre es mejor mendigar por la ciudad que por los campos.* (For a beggar it is better to beg his food in the town than in the fields, *πτωχῷ βέλτερόν ἐστι κατά πτόλιν ἠέ κατ' ἀγρούς δαῖτα πτωχεύειν*. *The Odissey*, book 17, line 17).

quiénes *ὅπως* (*ὅς* quién y *πῶς* cómo) son capaces de llevar a cabo (*πέλω*) esta acción (ἔργον) de una manera no (*μή*) tonta ni lenta (*μωρός*). Se resalta el inestimable valor que rodea el contexto donde surgen las decisiones y, cómo tal hecho, siempre apunta a buscar lograr lo mejor (*ἀριστος*) de una manera anticipada (*πρό*), sea previendo lo que va a suceder antes que se dé como también en visualizar las dificultades (*ἐργώδης*) que deberán de ser superadas en la realización de la acción. Existe un trabajo (ἔργον) que hay que hacer y que busca acercarnos (*πελάζω*) a las condiciones reales a fin de mejorar nuestro desempeño. De alguna manera se evoca a los helenos en especial a los pélasgos (*πέλαγος*), aquellos que viven y se mueven en estos pequeños Mares sean El Egeo, El Adríatico o El Jónico. Se hace hincapié en el valor mismo de la acción y las condiciones que rodean el acto mismo por el cual uno se decide a realizarlo, en todo existe un esfuerzo que debe de ser previsto a fin de asegurar el éxito.

28. Tú en cambio siempre harás lo que no pueda dañarte.
(*For it is the part of a miserable man to speak and to act without reflection.*
Δειλοῦ τοι πράσσειν τε λέγειν τ' ἀνόητα πρός ἀνδρός).

La actual sentencia comienza refiriéndose a los miedosos (*δειλός*) que ciertamente (*τοι*) como tú (*σύ*), hacen (*πράσσειν*) y (*τε*) hablan (*λέγειν*) en vano (*ἀνόητα*) hacia los hombres (*ἀνδρός*). Estamos frente al miedo (*δειμα*) que se experimenta al actuar realizando algo hasta completarlo de manera concreta y palpable (πράσσω), y a lo que se dice habiendo contabilizado (*λέγω*) el esfuerzo involucrado; siempre se ha de evitar, actuar de manera inútil (*ἀνόητος*) para con los demás hombres (*ἀνήρ*). Una vez más, estamos asustados (*δειμαίνω*) cuando se impone la realización práctica de una actividad (*πρᾶξις*), la cual es aprehendida y ordenada previamente en la palabra (*λέγω*), y en aquello que la subyace y hace posible (*λόγος*). Prosigue una exhortación que advierte que es necesario para que tal situación se dé, que exista una normativa que ordene (*νομός*) a fin de evitar caer en el desgobierno y en la debilidad (*ἄνομος*) que se experimenta y que lo hace a uno lucir tonto (*ἀνόητος*) ante los demás (*ἀνήρ*). Una vez más, se pone de relieve la importancia de las cosas realizadas (*πρᾶγμα*), hecho que nos lleva a la capacidad de hacer o crear algo (*ποιέω*), aquel hombre que es versado en las leyes, la poesía, la música y la escritura (*ποιητής*); disciplinas que eran practicadas de manera simultánea por los pitagóricos. Se sugiere hablar de manera ordenada y coherente[62] (*λέγω*), y no incoordinada (*ἀνόητος*) en dirección (*πρός*) a otros (*ἀνδρός*). Tal hecho nos reúne (*ἀγείρω*) a hablar en colectivo o en asamblea (*ἀγορεύω*), donde los involucrados evalúan al hablante en cuanto a las acciones que ha realizado (*εἴρω*) y la autoridad que ellas otorgan. Sobra decir que quién es incompetente e incongruente en lo que hace y habla, se muestra cobarde y miedoso (*δειλοῦ*) ante todos los que se encuentra y lo rodean. Se resalta el valor del equilibrio y la unidad que debe de existir entre el actuar y el hablar, hecho que se aprecia con claridad en las cosas realizadas, que lo han de dignificar a uno; en caso que ocurra lo contrario, todo tipo de temores y penas surgen rodeándolo a uno, tanto si uno está solo como acompañado.

> *29. No entres en asuntos que ignoras, mas aprende lo que es necesario: tal es la norma de una vida agradable.*
> (*But do that which will not afflict thee afterwards, nor oblige thee to repentance.*
> *ἀλλη τάδ' ἐκτελέειν, ἅ σε μή μετέπειτ' ἀνιήσει*).

Esta sentencia comienza evocando al otro (*ἄλλος*) en cuanto es diferente (*ἀλλοῖος*), el cual en este lugar (*τόδε*), del cual procede (*ἐκ*), lleva a cabo de manera completa (*τελέω*), a quién (*ἅ*) tú (*σε*) no (*μή)* vas luego (*μετέπειτα*) a vencer (*ἀν* + *νικάω*). El tema de lo otro involucra una reciprocidad mutua (*ἀλλήλων*), que es lo primero (*πρῶτος*) como normativa a seguir aquí y ahora (*ὅδε*) a fin de realizar algo (*ἐκτελέω*) con ese otro individuo, teniendo en cuenta, que no (*οὐ, ἀ*) vas luego (*μετά, φέρω*) a imponerte (*νικάω*). Es importante reconocer en el otro (*ἕτερος*) su condición de ser diferente a uno, esto permite consolidar y extender (*ἐκτείνω*) las actividades mutuas sin (*ἐκτός*) las cuales no (*μή)* es posible realizar (*τελέω*) algo. Se descarta, en consecuencia (*ἔπειτα*), como propósito central (*τέλος*), cualquier tipo de dominio (*νικάω*) sobre él (ὅς), dado que se reconoce su condición única (*οἶος*) como sujeto que no debe de ser violentado ni vencido. Surge en el transfondo de toda esta

[62] Hemos de mencionar lo comentado por Jámblico, en cuanto Pitágoras ponía a prueba a los novicios, en especial se fijaba: en la capacidad de ellos de retener sus consejos, en preservar y ser reservados en lo que habían escuchado y aprendido. Examinaba con atención su modestia, y el manejo de sus deseos y pasiones. Pitágoras enseñaba la temperancia y el amor, su afección a una gentileza natural, que él denominaba cultura. Ver *Iamblichus*, chapter XX. En *The Complete Pythagoras*, pág. 25).

problemática la importancia del telos (*τέλος*) como condición indispensable y necesaria que permite la realización de las metas (*ἐκτελέω*), para lo cual se requiere que el otro (*ἄλλος*) sea tratado en condiciones igualitarias sin lo cual (*μηδέ*) no es posible traer o llevar (*φέρω*) algo hasta su completa realización (*τέλος*). En la primera proposición se enfatiza (*ἐκτείνω*) las condiciones inherentes que subyacen (*ἐκ*) al emprendimiento (*τελέω*) y en la segunda proposición tenemos que es fundamental evitar (*α*- la alfa privativa) cualquier tipo de servidumbre (*νικάω*) sobre el otro. Se visualiza de esta manera cómo debe de existir una concordia, armonía y paz con quienes uno desea llevar algo a cabo, siendo fundamental que ambos estén en igualdad de condiciones a fin que puedan ponerse de acuerdo con las metas y deberes que hacen parte del telos[63] (*τέλος*) de manera que logre ser alcanzado. Es destacable, una vez más, la excelencia (*ἀρετή*) que cada uno debe guardar y lograr consigo mismo, donde impera el ser virtuoso ante todo. Se debe cuidar la integridad del otro como no conquistable (*ἀνίκητος*), tal es la victoria (νίκη) que se busca y hace parte inseparable del telos en cuanto areté: siendo el propósito de la vida tratar al otro en condiciones parecidas a como uno se trata a sí mismo.

30. Tampoco descuides tu salud, ten moderación en el comer o el beber, y en la ejercitación del cuerpo.
(*Never do anything which thou dost not understand.*
Πρᾶσσε δέ μηδέ ἕν ὧν μή ἐπίστασαι, ἀλλά διδάσκευ ὅσσα χρεών),

La presente oración vuelve y nos coloca en el centro de la problemática del hacer en cuanto práctica (*πράσσω*), además (*δέ*), no obstante (*μηδέ*), lo lleva a uno (*ἕν*) a buscar (*ὧν) sobreexigirse (ἐπίστασαι*); sin embargo (*ἀλλά*), nos enseña (*διδάσκω*) tanto, como (*ὅσσα*)

[63] En su libro: *Pythagoras and the Pythagoreans: a Brief History*, Charles H. Kahn manifiesta la influencia de Pitágoras en Platón, en especial en los diálogos del Timeo, La República y el Teeteto, donde se elaboró una concepción pitagórica del telos como el objetivo divino de la vida humana. Se resalta cómo Socrates y Platón estaban de acuerdo con la perspectiva pitagórica de un telos que se volvia como dios (homoiosis theoi). Platón le agrega 'tan lejos como posible': [176b] and to escape is to become like God, so far as this is possible; and to become like God is to become righteous and holy and wise. ([176β] ἐκεῖσε φεύγειν ὅτι τάχιστα. φυγή δέ ὁμοίωσις θεῷ κατά τό δυνατόν: ὁμοίωσις δέ δίκαιον καί ὅσιον μετά φρονήσεως γενέσθαι). Se menciona como Eudoro de Alejandría presenta su platonismo bajo el máxima pitagórica 'seguir a Dios', donde Dios es entendido como un ser inteligente en vez de uno sensible, y es la fuente de la armonía para todo el órden cósmico (pág. 86).

debe serlo (*χρεών*), en concordancia con las circunstancias que nos rodean. Parte de las habilidades que brinda la destreza de uno para conducirse al actuar (*πρᾶξις*), es ser capaz de realizar (*ποιέω*) cosas (*πρᾶγμα*), en las cuales, no (*μή*) obstante (*δέ*), uno se sobre (*ἐπί*) pone (*ἵστημι*). Nadie (*μηδείς*) debe de hacer cosas (*πράσσω*) que lleven a agotarlo hasta sus últimas fuerzas (*ἐπί* + *ἵστημι*). La actitud a seguir debe ser una (*εἷς*), en la cual en cada momento (*ἅπαξ*), se esté aplicando el justo esfuerzo (*στάσις*) que le permita a uno conducirse como su propio dueño (*στασίαρχος*): ser (εἰμί) dueño (*ἀρχός*) de la manera en que uno realiza sus cosas, es lo que ha de estar primero (*πρῶτος*) en la manera de conducirse (*ἄρχω*). De otra manera (*ἀλλήλων*), se tiene la importancia de la instrucción y la enseñanza (*διδαχή*), que nos debe permitir ir tan lejos (*ὅσος*) como las necesidades nos lo dicten (*χρῆμα*). Después de todo (*ἕστηκα*), lo importante es lo que seamos capaces de construir o crear (*ποιέω*) a fin de poder ser nuestros propios amos (*στασίαρχος*) sobre (*ἐπί*) todo (*πᾶς*) lo que nos rodea. Tan solo por medio de la praxis (*πρᾶξις*) podemos situarnos (*στάσις*) respecto a nosotros mismos (*ἀρχός*) como también frente al universo que nos rodea (*πᾶν*). Surge, entonces, la pregunta de cómo lograrlo, aspecto que se ve respondido en la segunda cláusura que afirma el valor inestimable del enseñarnos e instruirnos (*διδαχή*), aspecto que es finalmente asimilado en la poiesis (*ποίησις*). Esta involucra esa capacidad de crear de una manera bella y poética, que inspire a todos en la medida (*τόσος*) que nos posibilite estar juntos (*ἅπας*) como colectividad organizada. Tal hecho debe de ser proclamado (*χράω*) a fin de que los dioses lo consientan en relación con nuestras necesidades y deseos (*χρῄ*). Lo otro (*ἄλλος*), aquello que es diferente, es el lugar óptimo para encontrar lo que necesitamos (*χρῄζω*): de la necesidad surge la creación y esta logra dominarse mediante una reiterada práctica que es enseñada en concordancia con el orden proporcionado (*χρῆμα*)[64]. A otro nivel, este mismo vocablo posee otro significado, como la cosa (*χρῆμα*) que es requerida para aplacar nuestras necesidades en concordancia con el uso proclamado (*χράω*) y la utilidad (*χρῆσις*). En ese sentido, es tarea del maestro (*διδάσκαλος*)

[64] Hierocles de Alejandría, nos dejó una obra donde comenta los Versos Dorados de Pitágoras: *Chrysa Epe* (*Golden Verses*) of Pythagoras. A él se le debe que algunas de las máximas pitagóricas nos hayan llegado a nuestros días, como: No vaya más allá del balance, o la proporción, o sea no trasgredir la justicia; no orine contra el Sol o sea modesto; no duerma al medio día o no te confines en la oscuridad. (Ver *Complete Pythagoras*, volumen II, pág. 92).

señalarnos el valor de la necesidad (*χρῆμα*) como aquello que más nos puede mostrar y enseñar, que es lo que nos coviene estar dispuestos a hacer (*χράω*) frente al todo (*ἅπας*) que nos rodea.

> *31.* *Por moderación entiendo lo que no te haga daño.*
> (*But learn all thou ought'st to know, and by that means thou wilt lead a very pleasant life.*
> *καί τερπνότατον βίον ὧδε διάξεις*).

Esta cita viene a concluir las dos anteriores, comienza con: aún, también (*καί*) las personas, aquellas que son las más alegres y encantadoras (*τερπνός*, más; su superlativo es *τατον*), tienen una manera de vivir (*βίος*), como consecuencia (*ὧδε*), de que están en completa posesión de unos buenos hábitos de vida (*διάξεις*). Así, el rostro de una persona (*πρόσωπον*) es la señal y el signo (*τέρας*) donde podemos apreciar lo que es grato y agradable (*τερπνός*): "como consecuencia de la buena fortuna y de las bendiciones de los dioses" (*πράγμα δε τερπνότατον). Un aspecto que sobresale en todo esto son los ojos* (*ὤψ*), en especial cuando son muy grandes (*βοῶπις*), alusión a tener ojos tan grandes como un buey (*βοῦς*). Este vocablo está relacionado con el estar saciado (*τέρπω*) de un estado de completa alegría (*τέρψις*); además, esconde el verbo soplar y respirar (*πνέω*) que caracteriza a la vida misma (*βίος*). En consecuencia, se sigue (*ὧδε*) que existe algo que la atraviesa en toda su extensión (*διά*) bajo un estado de completa posesión (ἕ*ξεις) de buenos hábitos tanto con la mente y el cuerpo; algo que se está en posesión y se tiene (ἔχω*), como un estado permanente (*διάξεις*) con el que se vive a diario. Es interesante el Comentario que realiza Cicerón en *Tusculanae Disputationes*, en el libro V numeral III que versa sobre '*Las virtudes suficientes para la felicidad*', donde menciona lo que Pitágoras dijo: "Que la vida humana le parecía un festival, donde la gente de toda Grecia acudía como un rebaño para ver los magníficos juegos… entramos a esta vida desde algún otro tipo de existencia. (…)Algunos están esclavizados a la gloria y otros al dinero. Pero existen unos pocos, quienes están dedicados al estudio del universo, creyendo que cualquier otra cosa adicional es trivial. Estos se hacen llamar estudiantes de la sabiduría, en otras palabras filósofos,…, la contemplación y el estudio de la naturaleza son superiores a cualquier otro tipo de actividad humana" (*Cicero´s Tusculan Disputations*, V-3, pág. 255-256). Aquí podemos ver ese estado de estar saciados (*τέρπω*) en completa alegría (*τέρψις*), como consecuencia de una vida (*βίος*) que ha logrado ser dominada por medio de unas conductas y unos hábitos apropiados (ἕξεις*). Siendo la contemplación la más alta y noble de todas las actividades propia de los amantes de la sabiduría o los filósofos.*

32. Acostúmbrate a una vida sana sin molicie, y guárdate de lo que pueda atraer la envidia.

(*In no wise neglect the health of thy body;*

οὐ δ' ὑγιείας τῆς περί σῶμ' ἀμέλειαν ἔχειν χρή),

Este texto comienza con una advertencia que es introducida por medio de la negación (*οὐ*), que indica que no es conveniente que acontezca lo que sigue: la introducción de una nueva negación (*δε*) pareciera que cumple con la ley de la lógica proposicional, donde la doble negación de una proposición equivale a afirmarla (~ ~ p = p). No obstante, el sentido buscado, es el de resaltar que de ninguna manera (*οὐδέν*) se debe de exprimir o presionar (*ἀμέλγω*) aquello que concierne a (*περί*) la salud[65] (*υγεία*) del cuerpo físico (*σῶμα). Se resalta que estar en posesión (*ἔχω) de un estado *saludable* (*υγιεινός*), es algo que se debe de hacer (*χρή*). Una vez más se utiliza un recurso de advertencia, el cual parece tener las funciones de un cuantificador universal: *οὐ… δε…* Tal hecho, invita a que todos los sujetos u objetos que siguen, deben de cumplir una condición; la cual está apoyada por los dos verbos situados al final. Uno es extremadamente importante, es el verbo tener (ἔχω); y el otro (*χρή*) tener que. Ambos verbos apoyarían el contenido de esta proposición u oración aseverativa universal. El tema central es preservar todo lo que rodea la vecindad (*περί*) de la salud (*υγεία*) del cuerpo físico (*σῶμα),* evitando conducirla a extremos donde esta peligra por verse exprimida y succionada al extremo (*ἀμέλγω*). Esta cita resalta a simple vista varios temas de muy variada procedencia, y sugiere que los Pitagóricos eran una comunidad iniciática que cuidaba mucho el cuerpo y todos los hábitos que pudieran

[65] Se puede apreciar la importancia de conservar una buena salud en muchos textos relacionados con la vida de los pitagóricos, basta citar el numeral XXI en Jámblico de Calcis, donde se menciona cómo los miembros de dicha fraternidad realizaban en silencio paseos temprano en la mañana antes de reunirse para discutir, y luego almorzaban con pan y miel, evitando el vino. Se preocupaban mucho por la salud del cuerpo, lo fortalecían con ejercicios, luego en la tarde realizaban otro paseo antes de tomar un baño y hacer ofrendas a los dioses. Ver Iamblichus, *The Pitagorean Life* (pág. 52).

deteriorlo y afectar la salud del mismo; tema que es bastante novedoso en tal época tan lejana, y que ha sido algo que ha interesado más a las culturas orientales desde su más remota antigüedad; mas las occidentales poco, con lo cual tales costumbres y normas están adelantadas a su tiempo: el darle un lugar preponderante al cuerpo físico (*σῶμα), que es básico cuidarlo dado que es el depositario de esa alma que reencarna. Esta concepción influenció a Platón, en su diálogo Fedón (Φαίδων) presenta la inmortalidad del alma*[66]. Por otra parte, la misma estructura de la oración presagia lo que se dará en *Los Primeros Analíticos* de Aristóteles unos siglos después, la búsqueda de una oración sujeta a un tipo de ordenamiento lógico por medio del silogismo[67]. En esta declaración se contiene y resalta el papel que tienen ciertos vocablos, lo que permite transformarla en una oración formal o proposición capaz de albergar una veracidad. Se prevee la aparición de la proposición, los cuantificadores, y algunos vocablos que van a cumplir las funciones denotativas: todo, ninguno (*οὐδέν*), alguno, uno; que son fundamentales para que se dé una estructura lógica formal capaz de servir de tránsito para la aparición de una ecuación de tipo matemático, fruto de la implementación de la abstracción y la generalización de la misma proposición.

> *33. No seas disipado en tus gastos como hacen los que ignoran lo que es honradez, pero no por ello dejes de ser generoso:*
>
> (*But give it drink and meat in due measure, and also the exercise of which it has need.*
>
> *Ἀλλὰ ποτοῦ τε μέτρον καί σίτου γυμνασίων τε ποιεῖσθαι*).

La actual sentencia hace referencia a lo otro (*ἄλλος*), aquello relacionado con la bebida (*πότος*), y (*τε*) con la medida (*μέτρον*) también (*καί*) del pan de trigo (*σῖτος*), que lleva a ejercitar (*γυμνάζω*) y (*τε*) a hacer (*ποιέω*). Es importante señalar que si se relaciona esta oración con la la anterior, aquello que es lo otro (*ἕτερος*) que se necesita para disfrutar

---

[66] En el diálogo de Platón, El Fedón, donde según Richard A. Archer-Hill aborda la preexistencia de nuestra alma es inseparable de la existencia de las ideas, el primero se sostiene o cae con el segundo. The Phaedon of Plato (pág.97). "…so also must our soul exist before we are born" (76e). Ver en Phaedon, Traducción David Gallop (pág. 33) Notamos la clara influencia pitagórica de la teoría de la reencarnación, tal como lo menciona Diógenes Laercio que Pitágoras afirmaba: "que él había recibido como un don de Mercurio, la transmigración perpetua de su alma". Ver *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book 8 Pythagoras, chapter IV.*

[67] El silogismo desarrollado por Aristóteles marca el inicio de la lógica formal, su importancia es tan grande que *Los Primeros Analíticos* lograron moldear la lógica matemática por completo, su influencia es y será enorme. Ver: Aristotle, *Prior Analytics*, A. Jenkinson.

de una buena salud (*υγεία*), es la medida (*μέτρον*) en la bebida (*πότος*) y en el pan (*σῖτος*). Se hace alusión a no excederse en tomar líquidos y en comer más pan de la cuenta, a fin de no embriagarse por el consumo de vino, asimismo, en no comer demasiado. Además, resulta interesante definir la diferencia por medio de lo otro (*ἄλλος, ἀλλοῖος*, *ἕτερος*): "lo otro es lo diferente, la alteridad es lo diferente, aquello que no es lo mismo (*ἴσος*) es lo diferente". Aquello otro que falta lograr para tener esa unidad (*οἷος*), que posibilita la completez del uno (*εἷς*), de uno consigo mismo; está dado en la medida (*μέτρον*), que indica ese equilibrio en las instancias mencionadas. Eso otro debe de ser trabajado arduamente y ejercitado con esfuerzo (*πόνος*), siendo el mismo cuerpo físico (*σῶμα) el que es el receptor de dicho esfuerzo, no en vano tenemos el ejercicio (γυμνασία*) o *gymnasía* que se practicaba de manera desnuda (*γυμνός*). Este hecho alude a la práctica de la gimnasia por parte de los pitagóricos, la cual es vista como algo creativo que se produce haciéndolo o realizándolo (*ποιέω*). Una vez más, reaparece la mención a la poiesis (*ποίησις*) a través de la cual los pitagóricos concebían al ser humano (*Ἄνθρωπος*) como una obra (*ποίημα*) que ha de ser trabajada arduamente (*πόνος*). El mismo ser humano es su propio hacedor (*ποιητής*), al igual que un verso o una pieza musical, él mismo se esculpe y le da forma (*μορφή*) a su propio cuerpo (*σῶμα) por medio de la gimnasia (γυμνασία*): arte que definía la búsqueda de los pitagóricos de su propia perfección, excelencia y virtud (*ἀρετή*). La poesis (*ποίησις*) como creación y producción, subyace en la concepción pitagórica. Son los propios seres humanos los que primero reciben sus beneficios, construyendo y creando tanto un interior como un exterior coherente: una psique (*ψυχή*) y un cuerpo físico (*σῶμα) armónicos, algo que se hace con inspiración y un profundo disfrute (ποιέω*). De alguna manera, el propio ser humano (*Ἄνθρωπος*) se construye a sí mismo, es su propia creación (*ποίησις*); según la manera en que se comporte y trabaje, logrará llegar a ser lo que es. Cabe destacar al trigo (*σῖτος*) como la base de toda la alimentación, y lo será como el soporte sobre el cual se edificará la cultura y la civilización occidentales.

> *34.* *Nada hay mejor que la mesura en todas las cosas.*
> (*Now by measure I mean what will not incommode thee.*
> *Μέτρον δέ λέγω τόδ', ὅ μή σ' ἀνιήσει*).

La actual cita comienza aludiendo a aquello que se utiliza para medir, la medida (*μέτρον*) concerniente (*δέ*) a aquello que se dice u ordena (*λέγω*) aquí (*τόδε*), lo cual (*ὅ*) no (*μή*) te (*σέ*) permite liberarte (*ἀνίημι*). Es de destacar, la medida (*μέτρον*) que permite medir algo, la regla o instancia que sirve de parámetro para mesurar algo además (*δέ*) sirve para poder contar. Este hecho alude a que también el verbo légo (*λέγω*) hace referencia al número (*ἀριθμός*), aquella instancia que sirve para sumar y contar con un orden, el cual se aprecia en aquello que nos da la medida (*μέτρον*). Además, se puede entender lo anterior bajo un singnificado complementario relacionado con la palabra (*λόγος*) que sirve para medir, ordenar y computar, significados contemplados en légo (*λέγω*). La sentencia aludida podría ser: "*La palabra es la medida de todas las cosas*"[68]. No solo la medida (*μέτρον*) está relacionada de manera directa con lo que decimos sino también con lo que escogemos, aquello que nos permite unir y juntar (*εἴρω*) en relación a lo dicho o hablado (*εἶπον*) con quien se quiera o acerca de lo que se quiera (*ὅστις*). Esto es debido (*ὃτι*) a que (*τίς*) ata (*εἴρω*), es sinónimo de légo (*λέγω*): lo que hablamos nos ata y reúne (*ἀγορεύω*) en torno al discurso (*ἀγορά*), que también tiene connotaciones públicas o colectivas frente a un lugar destinado para tales propósitos. En consecuencia (*τόδε*), no (*οὐ*) se ha de hablar aquello con lo que no podemos responsabilizarnos o dar cuenta, es la única manera de soltarnos (*ἀνίημι*) para poder no quedar comprometidos a responder por nuestras palabras (*ὄψ*), reconociendo su capacidad de crear (*ποιέω*). Dentro del verbo liberar o soltar (*ἀνίημι*) se esconde la alfa privativa (*α*) unida a aquello que se percibe, piensa o entiende (*νόημα*). Alusión directa al verbo noéo (*νοέω*) que nos conduce al nous (*νόος ο νοῦς*), como aquella instancia que es el asiento de la mente, de las percepciones y los pensamientos, lo cual llevaría en la aludida cita a afirmar que las palabras o lo que digamos (*λόγος*, *λέγω*) es la medida (*μέτρον*) de lo que somos como hombres (*ἀνήρ*), su inadecuado manejo no (*μή*) nos deja libres (*ἀνίημι*), lo que refleja una falta de percepción (*νόημα*) carente de todo propósito, entendimiento, sentimiento y alma (*νοῦς*).

---

[68] Parafraseando la sentencia de Protágoras que dice: El hombre es la medida de todas las cosas. Platón menciona a Protágoras en su diálogo *Teeteto*: "No veo porque él no dice su verdad desde el comienzo, que un cerdo o un perro con cara de mico o alguna otra criatura extraña de aquellas que tienen sensaciones, es la medida de todas las cosas". (I don't see why he does not say in the beginning of his Truth that a pig or a dog-faced baboon or some still stranger creature of those that have sensations is the measure of all things. 161c).

35. Haz pues lo que no te dañe,

(*Accustom thyself to a way of living that is neat and decent without luxury.*

Εἰθίζου δέ δίαιταν ἔχειν καθάρειον ἄθρυπτον καί πεφύλαξο τοιαῦτα ποιεῖν),

La actual cita hace referencia al acostumbrarse (*ἐθιζω*), también (*δέ*) como una forma de vida (*δίαιτα*) para la cual se tiene (*ἔχειν*) que estar limpio (*καθαρός*), al estar congregado con otras personas (*ἀθρόος*) e incluso (*καί*) se ha de guardar (*φυλάσσω*) tales cosas como (*τοιοῦτος*) fundamentales en el hacer (*ποιεῖν*). La presente oración es a modo de sentencia: acostúmbrate (*ἐθιζω*) a lo que permite conservar la vida (*διαιτάω*): es algo que hay que tener, poseer y llevar consigo (*ἔχω*) a fin que uno esté limpio (*καθαίρω*). El reunirse con otros (*ἀθροίζω*) conlleva haber protegido y preservado (*πεφύλαξο* perfecto de *φυλάσσω*) estas (*αὕτη*) tales cosas (*τοῖος*) productivas o hacedoras (ποιέω). Hay que estar dispuesto naturalmente (*ἐθέλω*) a evaluar (*διαιτητής*), es algo que se tiene (*ἔχω*) y se lleva consigo (*ὄχος*) dado que purifica (*καθαρτικός*). Estamos frente a la catarsis[69] (*Κάθαρσις*) que purifica los pensamientos, las emociones y el cuerpo físico trayendo aquella limpieza (*καθαρμός*) tan necesaria para la vida. El limpiarnos y purificarnos (*καθαρίζω*) facilita la integración, no hacerlo nos lleva a ser impíos (*ἄθυτος*), ya que también se entiende que la limpieza de alguna manera nos muestra a alguien que cumple con los preceptos, los sacrificios y las ofrendas a los dioses. No cumplir con estos deberes conlleva la pérdida del corazón (*ἀθυμέω*), como un estado de flojera general (*ἀθυμία*); se está en frente de una relación directa con el thimos (*θυμός*) como aquel lugar donde se asienta la espiritualidad o el alma que gobierna todos nuestros pensamientos, sentimientos, pasiones, deseos; ejemplifica también a la voluntad, a la mente, asimismo al corazón y a la vida que respira.

---

[69] El tema de la catarsis (*κάθαρσις*) está presente en Pitágoras a través de la música, tal como está mencionado en Jámblico: donde menciona que la música ayuda a preservar la salud, hecho que que hace que Pitágoras la utilice de manera cuidadosa ya que es una medicina. A su vez, para enderezar el alma, Pitágoras seleccionaba versos de Homero y Hesíodo (Ver en Iamblichus, *The Pitagorean Life*, XXI, (pág. 59-60). Este hecho, en que la música asimismo como la poesía sirven para sanar y purificar (*καθαίρω*), influenció a Aristóteles para que en su obra *Sobre la Poética* (*Περί ποιητικῆς*), comparará los efectos sanadores propios de la tragedia por el uso de la poesía y el canto dotados de ritmo, tono y número en la mente de los espectadores: "Por lenguaje enriquecido, quiero significar aquel que tiene ritmo y tono, es decir, una canción y por las clases separadamente, quiero decir aquellos efecto que son producido por el solo verso y por alguna otra canción (By "language enriched" I mean that which has rhythm and tune, i.e., song, and by "the kinds separately" I mean that some effects are produced by verse alone and some again by song". Aristotle, *Poetics*, 1449b).

En todo lo anterior, se debe estar vigilantes a fin de proteger y preservar (*φυλάσσω*), aquello que somos capaces de crear (ποιέω): dado que es lo que está primero es la ley que gobierna (ἄρχω) a la inmortalidad (*ἀθανασία*). Esta se halla en el timo que vigoriza nuestra propia respiración y la sangre que circula por nuestro cuerpo. Por tal motivo, se hace especial hincapié en cultivar unos hábitos de vida (*δίαιτα*) de manera colectiva (*ἄθυμος*), esto nos colabora en estar dispuestos (*ἐθέλω*) a purificarnos (*κάθαρσις*). Esto se logra cuando nos volvernos los custodios (*φύλαξ*) de las costumbres que preservan y unifican (*ἀθροίζω*). Una vez más, podemos apreciar en los pitagóricos esa profunda conciencia que tenían de sí mismos y de los hábitos de vida, asimiso, del tipo de iluminación que se puede lograr, como también las zonas del cuerpo que hay que cuidar. Se ve la edificación de una ética (*ἔθος*) vinculada a unos hábitos que hay que cultivar para disfrutar de una buena moral dotada de carácter (*ἠθικός*). Tal manera de vivir (*δίαιτα*) es algo con lo cual nos hemos de habituar (*ἐθιζω, ἔθω*), tanto en el diario vivir con nosotros mismos como en la convivencia con los demás: tal doble vía fortalece nuestro carácter (*ἦθος*). Se aprecia así que en los pitagóricos tal fortalecimiento tenía un umbral muy alto de exigencia, aquel que alcanza a llegar a una purificación tan elevada (*κάθαρσις*), que logra afectar el mismo metabolismo del cuerpo a través del timo[70] (*θυμός*). Se ve que quienes han logrado esto, tienen y mantienen (*ἔχω*) una enorme capacidad creativa (*ποιέω*), tan indispensable para la filosofía como forma de vida y la matemática como disciplina forjadora.

36. y reflexiona antes de actuar.
(*Avoid all things that will occasion envy.*
Ὁπόσα φθόνον ἴσχει).

En qué medida (*ὁπόσα*), el ser envidiado (*φθονέω*) estorba, y es un impedimento (*ἴσχω*). Se advierte que la negativa involucrada en esta sentencia es indirecta, y está más relacionada con la naturaleza del verbo detener o impedir (*ἴσχω*); que deriva del verbo tener

[70] Los significados de *θυμός* son amplios, el diccionario *Henry George Liddell & Robert Scott. A Greek-English Lexicon* identifica los siguientes: el aliento de vida en el sentido físico (mencionado por Homero en varios pasajes de la Ilíada y la Odisea); espíritu, fuerza; el alma tal como se muestra a través de las pasiones y los sentimientos; la mente, el temperamento y la voluntad; el lugar donde se asienta la rabia y la ira; el corazón como el asiento de las emociones; la mente y el alma como el lugar del pensamiento.

(*ἔχω*), con lo cual el significado negativo es algo tangencial más debido a la desproporción que puede darse en alguien que es muy fuerte (*ἰσχυρός*). Por tal motivo, el que es envidioso o aborrecido (*φθονερός*), es por una falta de frónesis (*φρόνησις*); que lo lleva a uno a no saberse comportar o conducir respecto a sí mismo. Ya que la envidia o la malenquerencia (*φθόνος*), es propia de alguien que no posee una mente moderada, temperada y autocontrolada (*σώφρων*): que es propia de quien está en posesión de su propia mente y de sus sentidos (*φρονέω*). En este contexto, lo que es un impedimento, es algo que lo sostiene a uno con fuerza conteniéndolo (*ἴσχω*). El ser que uno sea fuerte (*ἰσχυρός*) no es algo que haya que lamentar; más lo es en el doble significado de este verbo, es algo que se apodera de uno en caso que no se tenga la mesura y la moderación en las acciones prácticas (*φρόνησις*)[71]. La oración comienza extendiendo una cuantificación muy amplia, cuánto y qué grande (*ὁπόσος*), en qué lugares (*ὅπου*) uno debe ser capaz de refrenarse (*ἴσχω*) a fin que la fuerza y el poder (*ἰσχύς*) pueda ser contenido, de no ser así lo anterior lo puede llevar a uno a la ruina, la perdición y a su propia destrucción (*φθόρος*). La envidia (*φθόνος*) sería el resultado de una voluntad enferma incapaz de mantener una actitud temperada frente a su propia fuerza (*ἰσχύς*). Se destaca que la fuerza (*ἰσχύω*) involucra estar en posesión de toda nuestra salud y vigor, con lo cual quien logra ejercer su propia frónesis (*φρόνησις*) está en posesión de una mente (*φρήν*) segura (*σῶς*) y prudente que le permite saberse comportar (*φρονέω*). Esto hace que evite su ruina y perdición (*φθόρος*). Tanto el abrigar celos o ser aborrecido (*φθονέω*), es no estar en posesión (ἔχω, ἴσχω) de su propia fuerza (*ἰσχύς*). El estar en fuerza (*ισχύει*) de manera moderada (*σώφρων*), es lo que revelan todos estos vocablos cercanos (*παραπλήσιος*).

*37. No gastes tu tiempo en quienes son ignorantes y groseros**

(*And be not prodigal out of season, like one who knows not what is decent and honourable.*

Μή δαπανᾶν παρά καιρόν ὁποῖα καλῶν ἀδαήμων μηδ' ἀνελεύθερος ἴσθι).

[71] El filósofo peripatético Aristóxeno de Tarento, discípulo de Aristóteles, recoge una parte de la tradición pitagórica en lo concerniente a la catarsis como la medicina para tratar el cuerpo físico y la música para curar el alma. Existe una relación cercana entre ambas, dado que la enfermedad más afecta al cuerpo y la ignorancia al alma, en este contexto la frónesis (*φρόνησις*) es considerada como una purificación (*κάθαρσις ο καθαρμός*). Ver en: *Aristoxenus of Tarentum, discussion* (pág. 110-113).

La actual oración comienza con una advertencia, no (*μή*) gastes (*δαπάνη*) en gran medida (*παρά*) tu tiempo (*καιρός*) en quienes (*ὁποῖα*) se llaman (*καλέω*) ignorantes (*ἀδαήμων*) ni aún (*μηδέ*) en los groseros (*ἀνελεύθερος*) que se te brindan (*ἴσθι*). Se comprende cómo, al extender la negación (*μή*) en nadie (*μηδείς*), se sugiere de manera imperativa que debes invertir tus recursos (*δαπάνημα*) considerando el largo plazo (*παρά*) en las oportunidades proporcionadas que el tiempo (*καιρός*) te brinda. Este kairós (*καιρός*) es un tiempo ordenado por la acción del número, por eso se adecúa y es apto por la medida ganada y adquirida; en consecuencia, es un tiempo útil y provechoso. Un poco contrario al kronos[72] (*χρόνος*), que es un tiempo desarticulado y todavía caótico, previo al origen del cosmos por la acción ordenadora del número (*ἀριθμός*). Se manifiesta de manera enfática aquí la responsabilidad que cada uno de nosotros tiene con el manejo de su propio tiempo, y cómo este tiempo (*καιρός*) es algo que se gasta o que es devorado y consumido (*δάπτω*); no en vano el presupuesto se gasta, lo cual es un fiel reflejo del estado de los recursos diponibles (*δαπάνη*). Alusión a cómo el tiempo es engullido, se sentencia que hay que utilizarlo de manera constructiva dado que es limitado tal como nuestra vida lo es. También se hace una alusión a la economía propia que exige un inteligente manejo del propio presupuesto en concordancia a los recursos que uno disponde y a lo que es tributado (*δαπάνημα*). Tal sentencia prosigue señalando de manera amplia, quienesquiera (*ὁποῖος*) cuando te llaman (*καλέω*): se establece un límite que demarca una frontera (*ὅρος*), no se ha de olvidar que somos los guardianes y vigías (*οὖρος*) de nuestro propio tiempo[73] (*καιρός*). La realidad es a tan cruda al punto, que se asevera que el tiempo es todo lo que tenemos, ya

---

[72] En el artículo: *A Reflection on Greek Space/Time Concepts as Design Implications in Minecraft*, Isaac Lenhart, analiza los distintos conceptos griegos relacionados con el espacio y el tiempo. Tema presente a lo largo de toda la cultura griega, en especial los atomistas y los pitagóricos, tuvieron sus propias ideas acerca de las cualidades y la estructura del espacio-tiempo, antecediéndonos por más de dos mil años (pág. 1-3).

[73] Es notable ver cómo el kairos tiene una resonancia crítica en el mundo moderno, tal como se sugiere en: *Rhetoric and Kairos: Essays in History, Theory and Praxis*, editado por Phillip Sipiora y James Baumlin. Se menciona que el tratamiento que dio Pitágoras al kairos ha jugado un papel importante en la teoría de la retórica sofística. Como expresión del kairos, la retórica se convierte en el fundamento de la educación sofística, tal como lo han afirmado tanto Pitágoras de Samos como Gorgias de Leontinos, el kairos toca el problema del conocimiento humano. El kairos está en la teoría retórica de la dirección del análisis de Platón y en la exposición del llamado extrínsico en el topoi de Aristóteles, donde el kairos da significado al ethos retórico. Tanto el cronos como el kairos aprehenden de manera diferente las dimensiones metafísica e histórica de la realidad, el kairos requiere del cronos, el cual se convierte en una precondición necesaria que subyace los usos cualitativos del tiempo (pág. 15).

que representa el estado total de nuestros recursos (*δαπάνη*). Nuestra riqueza (*πλοῦτος*) está representada por el tiempo que tenemos. No hay que olvidar cómo Pitágoras antes mencionó al destino (μ*οίρα*) que cada uno debe de cumplir, al cual le subyacen las Moiras (*Μοῖρα*) que son las que determinan el tiempo limitado que cada uno tiene.

La negación (*μηδέ*) va acarreando de entrada una cuantificación al ser abordada como (*μηδείς*), ya que está singularizando (*εἷς*) al sujeto sobre el cual va a recaer el cumplimiento de la acción devoradora (*δαπάνη*) del tiempo. Eres el primero (*πρῶτος*), solo (*οἶος*) tú vas tanto a llamar como a ser requerido e invitado (*καλέω*) por otros para conversar (*διαλέγομαι*), tal es un estado natural propio del vivir en comunidad. Pero para ello hay que ser capaz de ordenar y delimitar (*ὁρίζω*) lo que lo rodea a uno, hay que saber escoger (*διαλέγω*) entre (*διά*) quienes vas a hablar (*λέγω*): el uso de prefijo (*διά*-) involucra algo que se sostiene durante un largo intervalo de tiempo, además tiene una gran capacidad para discriminar y diferenciar, e implica algo que se va a sostener hasta el final, buscando siempre completarlo a lo largo de tu vida (*διά* + *λέγω*). Se ha de preferir aquel discurso o conversación (*διάλεκτος*) que es útil, correcta y noble (*καλή*), y desechar aquella que es inútil y superficial (*ἀνελεύθερος*). Siempre se ha de tomar distancia de las invitaciones (*κλητός*) del ignorante (*ἀδαήμων*), dado que estimulan la faceta negativa y mala (*κακός*) del alma o daimón (*κακοδαίμων*). Tan solo se ha de preferir aquellos que están poseídos por un buen (*εὖ*) espíritu (*εὐδαίμων*), que representa lo bello y lo noble (*καλός*), aquella libertad que nos hace libres (*ἐλεύθερος*). Hemos de resaltar que Pitágoras y su escuela eran plenamente conscientes de la existencia de un alma o espiritú divino que nos habita[74] (*daimón, δαίμων*), que se expresa de manera positiva en los entendidos, sabios y conocedores (*δαήμων). S*e percibe cómo el daimón *(δαίμων*) siempre tiene una presencia activa, es nuestro deber (*ἔθος*) cultivarla a fin de evitar que se transforme en un foco de ignorancia (*ἀδαήμων*) y bajeza (*ἀνελεύθερος*). Nos hemos de dar completamente (*ἴσθι,* es la segunda persona del presente imperativo del verbo *εἰμί;* también corresponde al mismo

[74] En la obra de Thomas Stanley: *Pythagoras, his Life and Teaching, a Compendium of Classical Sources*, se menciona cómo los pitagóricos afirmaban que todo latón suena por cierto espíritu divino, razón por la cual todo trípode de metal está dedicado a Apolo. Y cuando los vientos están aquietados, el aire calmado, y todas las otras cosas quietas, todavía parece estremecerse el interior del caldero de latón: tal sonido del latón es la voz de la voz del daimón encerrado en el latón (capítulo IV, pág. 117).

tiempo en el verbo *οἶδα*) *al alma-espíritu (δαίμων*), en especial cuando es bueno (*εὖ*), es por lo que somos y existimos (*εἰμί*). El daimón se situa como un intermediario por medio del cual conocemos (*οἶδα*), vemos, percibimos y experimentamos (*εἴδομαι*) quienes somos y quienes nos rodean.

*38. Se mesurado con la mayoría en el comienzo del día **
(*Neither is covetous nor niggardly; a due measure is excellent in these things.*
Μέτρον δ' ἐπί πᾶσιν ἄριστον).

La presente cita introduce la noción de la medida de todas las cosas como normativa a seguir. Esto se debe a que orienta nuestras vidas y nos sirve para alimentarnos: mesura (*μέτρον*) no (*δε*) contra (*ἐπί*) todos (*πᾶσιν*) en el desayuno (*ἄριστον*). Se trae el vocablo metrón (*μέτρον*) que en sí mismo establece una cuantificación, ya que aplica para todo aquello que es susceptible de ser medido. Asimismo, posee un íntimo contacto con la propia techné (*τέχνη*), arte y técnica tan propios tanto de la aritmética (*ἀριθμητική*) como de la geometría (*γεωμετρία*), en cuanto medida (*μέτρον*) del número (*ἀριθμός*) y metría (*μετρία*) de la tierra (*γῆ*). El vocablo metrón (*μέτρον*) abre todo un universo (*πᾶν, Πάν*) bastante elaborado, más que para Pitágoras el samiano (*Πυθαγόρας ὁ Σάμιος*) insigne filósofo y matemático, tal palabra tenía una profundidad enorme y toda una polisemia de significados. En cuanto el metrón no solo busca establecer la medida en las matemáticas (*μαθηματικός*), en aquel maestro del aprendizaje (*μάθημα*), capaz de entender y construir un conocimiento; tanto del fundamento de la realidad (*φύσις*) como de aquello que puede ser percibido, notado e impuesto como un hábito de vida (*μανθάνω*). Por otra parte, luego de mencionar el metrón o la medida (*μέτρον*) y todo lo que ella implica, Pitágoras introduce la palabra que señala la totalidad válida para todos y cada uno (*πᾶς*) de manera que, nadie ni nada está exento de este tipo de consideraciones. Tal hecho está recreado por la introducción de una negación (δε, δεν), que es la forma abreviada para *oudén* (*οὐδέν,* pronombre neutro nom, ac, voc de οὐδείς), que establece que de ninguna manera y bajo ningún medio del todo, nadie ni nada se escapa a cumplir con los preceptos propios de la medición (*μετρία*). Hay, en la estructura de oudeís (οὐδείς), un reflejo de la exactitud de la lengua griega antigua tan dada a pensarse a sí misma, este vocablo es la unión de (*οὐδέ*) que contiene una negación (*οὐ*) y la conectiva binaria de la conjunción (∧, *δέ*) asimismo va unido al número cardinal uno (*εἷς*), lo que involucra una cuantificación universal del tipo: no existe un x (~ ∃ x), que es lo mismo que para todo x (∀x); como para también para todo x único, dada su singularidad (∀x!); de esta manera, se resalta la presencia del uno (*εἷς*) en la raíz. Todo y todos cumplen tal precepto, ya que todo lo que habita en el universo (παν), lo es fruto de la acción del tiempo ordenado (kairós, *καιρός*): lo cual es posible en virtud a la existencia del número, que posibilita que algo pueda ser medido (*μέτρον*).

El vocablo que hace referencia a todo (*πᾶς*) tiene una forma alternativa (*παῖς*), que significa niño, hijo o esclavo, palabra que nos lleva al maestro o al guía (*παιδαγωγός*). Esta oración transmite un mensaje más profundo, que está guardado en su interior: todos podemos ser enseñados y guiados (*ἀγωγός*), hecho resaltado debido a que la preposición sobre (*epí*, *ἐπί*) antecede a todo (*πᾶς*). Aquello que está sobre o encima de todo, que tiene la potestad de conducir y guiar (*ἄγω*), es propio de la medida (*μέτρον*) como actividad capaz de enseñarnos a comprender (*μανθάνω*). Esto evoca a la paideía[75] (*παιδεία*) como educación y entrenamiento, asimismo como la formación que se recibe desde la más tierna edad y que prosigue a lo largo de la vida, dando lugar más tarde a las virtudes de la excelencia o la areté (*ἀρετή*). Es de destacar que ambas consideraciones se mencionan, asimismo fueron tratadas y cultivadas por los pitagóricos. La oración termina con el vocablo utilizado para el desayuno (*ἄριστον*), que es la primera comida que se recibe en el día, tal como se tiene una primera enseñanza que se recibe (*παιδεύω*). Estas son las bases sobre las cuales se construye la paideía (*παιδεία*), que sirve de medida (*μέτρον*) para todos (*πᾶς*) los asuntos que hay que estar en posesión (*πᾶσις*) en la vida, debido que nos guían (*ἄγω*) en ser mejores seres humanos (*ἄνθρωπος*).

---

[75] El tema de la Paideia es amplimente tratado por Pitágoras, tal hecho lo podemos apreciar en el artículo de Eugene Afonasin: *Pythagorean Symbolism and the Philosophy Paideia in the Stromateis of Clement of Alexandria, donde se menciona que la tradición pitagórica hace parte de la herencia clásica, en especial aborda a Clemente de Alejandría como un filósofo neopitagórico. Él es una fuente confiable para entender las doctrinas pitagóricas, nos permite ampliar nuestro conocimiento de las mismas. Se menciona cómo el proceso de educación requiere tiempo y estaba bajo la dirección de un instructor erudito. Esto se debe debido a que se necesita ir cultivando la habilidad para escuchar y entender, desarrollando de esta manera, una especial disposición hacia el conocimiento: fortalecido por la fe en que el conocimiento real podrá ser alcanzado. En este proceso de paideia, el estudiante está logrando poco a poco cierto estado de perfección moral, aprendiendo las cosas de manera simbólica, dado que muchas veces no es posible verlas con claridad, esto le lleva a ejercitar sus capacidades analíticas por medio de las ciencias naturales y exactas (pág. 1, 2).*

*39. Haz lo que no te dañe, toma en cuenta lo que está antes a fin de actuar**
(*Do only the things that cannot hurt thee, and deliberate before thou dost them.*
Πρᾶσσε δέ ταῦθ', ἅ σε μή βλάψει, λόγισαι δέ πρό ἔργου).

Este verso hace un profundo hincapié al valor de la acción como instancia que da forma, orientando de esta manera lo que se dice y realiza: haz (*πρᾶσσε*) en cambio (*δέ*) esto (*ταῦθ'*), lo cual (*ἅ*) no (*μή*) te (*σε*) dañe (*βλάψει*), toma en cuenta (*λόγισαι*) aquello (*δέ*) que está antes y que se proyecta (*πρό*) en la acción (*ἔργου*). Una vez más, se está frente al hacer mismo (*πράσσω*), la importancia de la práctica que posibilita realizar una obra concreta y exitosa (*πρᾶγμα*). Se engloba la realización de algo que va desde un comienzo hasta un final, la acción se proyecta en su totalidad e impone esa destreza en ser competente en poderla llevar a cabo. En este contexto, la praxis (*πρᾶξις*) es entendida como aquello que permite crear y producir algo (*ποιέω*), sin embargo, esta oración evoca también una faceta de abstracción y generalización, dado que el *prágma* (*πρᾶγμα*) involucra la cosa realizada no solo en hechos sino también en objetos materiales y en aquello producido por la misma acción de la palabra. Luego prosigue una sentencia de índole ética (*ἠθικός*), que sirve para modelar los hábitos y el carácter (*ἦθος*), dado que es lo que nos hemos de habituar (*ἔθω*) para ser mejores (*εὖ*): esta (ὅς) cosa (*πρᾶγμα*) no (*μή*) debe de dañarte (*βλάπτω*). Así que la labor realizada[76] (*πράσσω*) cae bajo los dominios del discurso (*λόγος*), capaz de analizarla y evaluarla en detalle como una obra realizada y que puede finalmente ser evaluada mentalmente (*λογίζομαι*). Siempre se ha de mirar hacia delante teniendo en cuenta lo que está situado antes y detrás (*πρό*) evaluando la importancia de la acción (ἔργον), se nota que

[76] La filosofía pitagórica es vista como la inspiradora de la filosofía analítica, tanto en sus orígenes como en su nueva etapa como filosofía posanalítica. Esto se debe a la utilización de una metodología matematizante para descubrir la verdad, la cosa sin mí. Esto se da dentro del laberinto de un flujo exterior y un subjetivismo dentro de un mundo sensible y aparente. Para el autor James Luchte, en *Pythagoras and the Doctrine of Transmigration: Wandering Souls, esta es la tragedia que acompaña la vivisección o disección de la filosofía analítica pitagórica. Se puede encontrar allí una poética y una praxis en el tema de la transmigración de las almas que subraya los aspectos expresivos y mnemopoéticos de esta doctrina. Se plantea una emergencia de la filosofía pitagórica en la filosofía de la edad trágica, la que hace referencia a la trágica destrucción de la comunidad pitagórica. El autor menciona la fuerte identificación que existe entre el pitagorismo y el platonismo, el énfasis está en el cuerpo y la praxis del bios pitagórico, evita que se identifique el pitagorismo con la filosofía platónica más allá de una mera semblanza familiar. Está, además, la transgresión pitagórica de los límites homéricos, manifiestos en el alivio de una diferente relación del alma con el cuerpo en la narrativa de la transmigración, solamente un único cuerpo entre una sucesión de otros (pág. 1-6).*

ella requiere de una contextualización completa; y que a menos que se completen todos los requerimientos, no es posible realizarla. La singularización alrededor del objeto (*πρᾶγμα*) es enfatizada señalando con precisión esta cosa situada aquí (*οὗτος*), involucrando la actividad de aquello que puede ser calculado y medido a fin de evaluarsen las expectativas concretas (*λογίζομαι*). Se referencia el sujeto concreto, tú (σύ) no (*οὐδέ*) has de dañarte (*βλάφτω*) en lo que hagas. Se resalta el uso de dos vocablos relacionados con ese hacer, el uno con un cobertura más universal (*πράσσω*) que debe poder plasmarse en algo aprehensible (*ἔργον*) mediado por la acción de la palabra (*λέγω*), una que no solo tiene competencias en el aspecto narrativo sino también en el calculativo. De alguna manera se considera que lo que está plasmado dentro de la mente tiene que lograr la completez de plasmarse de manera idéntica (*ταὐτός*) en la cosa transformada, esta ha recibido el influjo de toda esa actividad mental (*λογίζομαι*), que va guiándola hasta que logra finalmente coincidir el objeto mental con la cosa concreta.

> *40.* *Y no dejes que el dulce sueño se apodere de tus lánguidos ojos*
> (*Never suffer sleep to close thy eyelids, after thy going to bed,*
> *Μή δ' ὕπνον μαλακοῖσιν ἐπ' ὄμμασι προσδέξασθαι*),

Este verso comienza con un consejo, y (*δέ*) no (*μή*) sufrás (*μαλακοῖσιν*) de sueño (*ὕπνον*) sobre (*ἐπί*) lo que sostiene (*προσδέξασθαι*) los párpados (*ὄμμασι*). Una vez más, se presenta una negación (*μή*) continuada (*δέ*) que indica que se está, además, negando lo que sigue (*μηδέ*); a su vez, la actual oración está unida a la proposición anterior bajo el uso de la conectiva o conjunción y (*δέ*), que indica una acción que prosigue en relación a los dominios del sueño (*ὕπνος*), el cual es amable y suave (*μαλακός*), puede revitalizar para hacerlo a uno fuerte (*μαλερός*), pero cuando se duerme en demasía se transforma en flojera y causa una gran debilidad y molice (*μαλάκα*), y aún la enfermedad *rodeada de estupidez y afeminación (μαλακία). Se debe estar en consecuencia encima (ἐπί*), dándole la bienvenida (*προσδέχομαι*) a aquello que es precioso, dado que nos trae la luz que ilumina nuestro rostro y forma humana (*ὄμμα*). En el fondo, el sueño (*ὕπνος*) tiene una relación también con la muerte (significado que está contemplado en la palabra (*hipnos*), y en relación también con *tánatos* (*θάνατος*), que es el hermano gémelo del sueño (*ὕπνος*), a su vez, ambos son hijos de la noche (*νύξ*). De alguna manera se menciona que el sueño (*ὕπνος*) nos ablanda y a la vez nos alivia (*μαλάσσω), esta doble naturaleza no es tanto el objeto de la cita más el buscar tener cierto control sobre todos (μάλιστα*) los linderos del mismo sueño (*ὕπνος*). Se ha ejercer un control (*προσέχω*), aquel que va en dirección (*πρός*) a estar en posesión y dominio (*ἔχω*) del mismo. Este control se ejerce sobre la puerta de los ojos (*ὄμμα*) cuyos motivos y razones se discutirán en el siguiente párrafo. Es curioso que el drama del sueño esté recreado de manera tan completa en la propia mitología, donde *Hipnos* (*Ὕπνος*) es el dios del sueño[77], hermano gémelo de *Tánatos* (*Θάνατος*) dios de la muerte y ambos hijos de *Nix* (*Νύξ*) la diosa de la noche que nació de Caos (*Χάος*) o estado primigenio de la existencia. El caos procede de *káslo* (*χάσκω*), que es tanto abrir algo como tener la boca abierta, aquel estadio propio del *crónos* o estado temporal previo al *kairos* o tiempo ordenador del cual emerge el *logos* (*λόγος*), cuyo acto de habla es también ordenador (*λέγω*). También este verbo alude a la falta de atención, hecho que se recrea en la cita. Aquí el tema (*θέμα*) central es el elemento fundacional (*θεμέλιος*) que gobierna la atención propia de la psiqué (*ψυχή*), como: vida, aliento de vida, respiración, mente y espíritu.

> *41. sin antes haber repasado lo que has hecho en el día:*
> (*Till thou hast examined by thy reason all thy actions of the day.*
> *Πρίν τῶν ἡμερινῶν ἔργων τρίς ἕκαστον ἐπελθεῖν*).

Esta declaración comienza estableciendo: antes (*πρίν*) realiza (*ἐπελθεῖν*) aquellas (*τῶν*) tareas (*ἔργων*) diarias (*ἡμερεύω*) tres veces (*τρίς*) cada día (*ἕκαστον*). Se sitúa frente a lo que antecede, a lo que está situado antes (*πρίν*) de manera prementoria, determinando al ser humano en el día a día (ἡμέρα). Se trata de aquellas labores realizadas (*ἔργον*) en las que se recogen todos Los esfuerzos diarios (ἡμέρα) como trabajadores (*ἐργάτης*). La sentencia es no dejar pasar ese día a día (*ἡμερεύω*) sin haber trabajado (*ἐργάζομαι*) al menos tres veces (*τρίς*) cada una de las cosas y obras (*ἔργον*) que ocupan el diario vivir (ἡμέρα).

[77] Pitágoras fue influenciado por Homero y Hesíodo, de este último tenemos la génesis de: *Hipnos, Thanatos,* (Theogony, 212), *Nyx* (Theogony, 124). El *Chaos* (116) está en: " En verdad ese primer caos vino a ser, pero próximo a una tierra amplia y guardada, el fundamento siempre seguro para todos los que no mueren y que mantienen los picos nevados del Olimpo" (In truth at first Chaos came to be, but next wide-bosomed Earth, the ever-sure foundation of all the deathless ones who hold the peaks of snowy Olympus). Ver en: *Hesiod. The Homeric Hymns and Homerica. Theogony*, William Heinemann.

Se resalta la necesidad de sobremontar las dificultades (*ἐργώδης*) que se presentan mientras alguien logra dominar su trabajo con propiedad. Además, se presenta una reflexión más profunda; dado lo efímero que es la vida diaria (*ἐφήμερος*), se hace necesario interiorizar el trabajo (*ἔργον*) que se está realizando a fin de sentarse y situarse tranquilamente (*κάθημαι*). El imperativo es poder identificar lo que está situado sobre (*ἐπί*) los humanos derterminándolos, viene (*ἔρχομαι*) y les llega a pesar de todo (*ἐπελθεῖν*). Tal situación frente a algo que siempre ha visitado al ser humano, está resaltada por el infinitivo del aoristo del verbo venir o ir (*ἔρχομαι*) que es *ἐλθεῖν*. El aoristo (*ἀόριστος*) significa un estado indeterminado o indefinido, que tiene como propósito resaltar el paso del flujo del tiempo; con esto se logra una mayor profundidad bajo una continuidad (ἡμέρα), en este caso, en el diario acontecer de un evento o de una acción (*ἔργον*). El mensaje es no dejar pasar la vida sin detenernos a examinarla, degustarla, y experimentarla con una mayor intensidad a fin de lograr asentarse (*ἧμαι*) frente a aquello que desciende (*κατά*) hacia los humanos; algo que los antecede (*πρό*), extendiéndose sobre ellos a fin de conducirlos (*ἐπελαύνω*). Se nos recuerda que la repetición reiterada de lo que hacemos es lo que nos permite convertirnos en unos trabajadores (ἐργάτης) esmerados y competentes. Además, que la perfección en todo lo que se hace, proviene de repetir una y otra vez lo que se realiza hasta su completo dominio.

42. *"¿En qué he fallado? ¿Qué he hecho? ¿Qué deber he dejado de cumplir?"*
(*Wherein have I done amiss? What have I done? What have I omitted that I ought to have done?*
«πῆι παρέβην; τί δ' ἔρεξα; τί μοι δέον οὐκ ἐτελέσθη;»)

Aquí se presentan tres sentencias, tal como si las tres veces (*τρίς*) en que toca realizar cada actividad (*ἔργον*) del numeral anterior, correspondiera a cada una a tres (τ*ρεῖς*) variantes distintas que a cualquiera le toca realizarlas, cada una está sujeta a un orden, siendo la primera (*πρῶτος*) la que dice qué (*πῆι*) he transgredido (*παρέβην*). Está el adverbio que indaga por la dirección a seguir y pregunta acerca del lugar (*πῇ, πῆ*), a dónde y de qué manera he violado (*παραβαίνω*) aquello que se ha ido (*βαίνω*) de mi lado (*παρά*).

Se está frente a aquello que por su misma naturaleza debe estar junto, atado y asegurado, para que sirva de estructura o marco de referencia (*πῆγμα*) para los mortales seres humanos (*βροτός*). Es preciso tener algo que permita asegurarse (*πήγνυμι*) a fin de poder establecerse y consolidarse, ya que en alguna parte (*πή) se lo habrá de encontrar. Aquí se está bajo la reiterada preocupación por el ethos (ἦθος*) concerniente a los hábitos (*ἔθος*) de vida que forman el carácter, las costumbres que fundamentan la ética (*ἠθική*): Con base en las costumbres que hemos hecho propias como resultado de habernos acostumbrado a ellas (*ἔθω*). El conducirse bien[78] (*ἠθικός*) pone de relieve la enorme importancia que daban los pitagóricos al componente moral que gobierna la vida y las acciones que de ellas emergen. En el fondo está la inquietud de que en caso que esté aconteciendo algo doloroso, es debido a que alguno se equivocado y no se ha comportando como debiera tanto consigo mismo como con los demás.

En segundo lugar (δεύτερος) tenemos la pregunta: qué (*τί*), además (*δέ*), he hecho (*ἔρεξα*). Estamos frente al interrogante: qué (*τί*), a quién (*τίς*), también (*δέ*), si lo ha de estar haciendo. Se resalta la presencia del aoristo (*ἔρεξα*) del verbo *rhézo* (*ῥέζω*), que hace hincapié en aquellas acciones que hay que realizar en hechos concretos (*ἔργον*). Se trata de actuar y lograr (*δράω*) algo palpable, y no (*δε*) tan solo experimentarlo, o hacer que otro lo haga por uno (*πάσχω*). En este sentido, nos hemos de responsabilizar a título personal en hacer algo, que nos beneficie directamente o que traiga beneficio a otros. Es tal la fuerza de esa responsabilidad y deber (*ὀφείλω*) que tengo, que parece que me he detenido en un tiempo pasado indeterminado que no me abandona, y me lo está recordando de manera reiterada. Aquí la preocupación moral vuelve a ser fuerte, la conciencia interior está recordando a cada momento los deberes y evalúa de manera crítica el desempeño con nosotros mismos y de nosotros hacia los demás.

En tercer lugar (*τρίτος*), está preguntando acerca de aquello que (*τί*) a mí (*μοι*) me ata como necesario (*δέον*), aquello que no (*οὐκ*) pude completar (*ἐτελέσθη*). Se está frente de lo que (*τί*) todavía sigue sin identificar: ¿qué?, todavía me falta (*δεῖ*) a mí (ἐγώ) por

[78] Hay que recordar lo que anota Diógenes Laercio de Pitágoras: “No transgredir la integridad y la justicia; el devorar nuestro corazón significa, que no hemos de menguar nuestra alma con dolor y penas; él recomendaba a quienes estaban por partir de esta vida no estar tan deseosos de vivir, y no sentirse muy atraídos por los placeres de la tierra (*Lives of Eminent Philosophers, book 8 Pythagoras, chapter XVII*).

completar (*τελέω*) en relación al propósito principal (*τέλος*) de mi propia vida. Se trata de aquello que todavía no (οὐ) tengo asegurado en mí mismo (*δέω*), siento una enorme necesidad dado que me falta (*δέω*) todavía por completarlo: he de poderlo llevar hasta un final plenamente realizado (*τελέω*) en concordancia con el propósito (*τέλος*) central de nuestra propia existencia. La presencia del aoristo pasado (*ἐτελέσθη*) de teléo (*τελέω*) relacionado con aquello que falta (*δέω*) por completar (*τελέω*), hace evidente una acción que está llamando de manera continua desde un pasado para recordar lo que no se ha cumplido con nosotros mismos. Este hecho está marcado por el uso muy fuerte del pronombre personal en primera persona singular ego (ἐγώ), que busca recordar que hay que centrarse en sí mismos a fin de efectuar una profunda reflexión que permita apreciar nuestra existencia como una sola y al mismo tiempo como un todo. La vida tiene un propósito (*τέλος*) en cada uno, para ello, primero hay que conocerse a fin de tener claridad acerca de la finalidad de la propia vida, en concordancia con lo que cada uno ha hecho para sí mismo (*τελέω*) y para los demás (*ῥέζω*). Una vez más, la teleología aristotélica[79] encuentra un origen muy claro en esta posición pitagórica: donde el origen de todo está en lo que es uno (*εἷς*), ese uno se proyecta fuera de sí mismo dando origen a un universo dual constituido por diez díadas (Aristóteles, *Metafísica* 986a. 20).

> *43. Comienza del comienzo y recórrelo todo, y repróchate los errores y alégrente los aciertos.*
> (*If in this examination thou find that thou hast done amiss, reprimand thyself severely for it;*
> *Ἀρξάμενος δ' ἀπό πρώτου ἐπέξιθι καί μετέπειτα δειλά μέν ἐκπρήξας ἐπιπλήσσεο*),

Esta oración dice: lo que comienza (*ἀρξάμενος*) por otro lado (*δέ*), como resultado de (*ἀπό*) de los primeros (*πρώτου*) miedos (*δειλὰ*) que aún (*καί*) sacamos (*ἐπέξιθι*), entonces (*μέν*) después (*μετέπειτα*) se cumple (*ἐκπρήξας*) lo que nos golpea desde adentro (*ἐπιπλήσσεο*). Se está en frente del mismo comienzo, en el arché (*ἀρχή*) como lo primero

---

[79] Se acepta en general, que la teleología aristotélica con sus causas finales fue descartada por la revolución científica en favor de una filosofía mecánica. Se recuerda que la teleología natural proviene de la adaptación de la filosofía aristotélica por los comentaristas griegos y los neoplatónicos, influenciados por el mito de la creación del *Timeo* de Platón. Aristóteles piensa que es possible integrar tales fines y movernos en un camino, que conserva la explicación de como la causalidad no viola la secuencia temporal hacia atrás. Ver: Monte Ransome Johnson, *Aristotle in Teleology* (pág. 21).

(*πρώτος*) a partir de lo cual (*ἀπό*) emerge lo que conduce contra el gran enemigo (*έπεξάγω*), que no es otro que nuestros miedos (*δειμός). Tanto antes como después también (καί, μετέπειτα... μέν*) están estos miedos terribles (*δεινός*) que han de ser expulsados desde adentro (*εχωθέω*) dado que pueden destruir y devastar por completo (*ἐκπέρθω*). Es de enorme importancia la mención de que es desde (*ἀπό*) el arché (*ἀρχή*) que comienza (*ἄρχομαι*) a librarse las batallas para expulsar (*ἔξωθέω*) lo que tanto nos agobia, que entre otras cosas, lleva a comportarnse de manera miedosa o cobarde (*δειλός*). Es inherente a la vida (*ψυχή*) la existencia desde sus más remotos orígenes de los miedos (*δειμαίνω*), este vocablo es muy cercano al daimón (*δαίμων*), lo que lleva a pensar que es propio de la vida esas luchas que se libran nuestro interior. No en vano los griegos personificaron al miedo, Deimos, como una deidad (*Δεῖμος); hijo de Ares (Ἄρης*) *y de Afrodita (Ἀφροδίτη*)[80], la guerra y el amor están desde los mismos comienzos del origen del universo. No obstante, sugiere Pitágoras, que hay que sacar tales miedos (*ἐκ*) aniquilándolos (*ἐκπράσσω*): no hay manera de evitarlo, la estrategia a seguir es permitir que salgan para luego franquearlos (*ἐκπεράω*). Se utiliza un verbo que indica la acción de salir o marchar contra alguien o algo (*έπεξέρχομαι*), pero como todo enemigo tiene que salir de su escondite a fin de poder librarse la batalla (*ἐκπρήξας*) con él. La solución está indicada en este último vocablo del cual podemos derivar la preposición (*ἐκ*) y el vocablo relacionado con la praxis (*πρᾶξις*), que se reúnen en el verbo *ékprasso* (*ἐκπράσσω*) que significa concluir, ejecutar y aniquilar. De manera que los miedos (*δειμός) hay que aniquilarlos para lo cual nos servirmos de unas acciones prácticas (πράσσω*) encaminadas en la cosa (*πρᾶγμα*) a eliminar, que es el mismo miedo, que debe de ser expulsado (*έπεξάγω*). Se nota que el tener miedo (*δειμαίνω*) y el estar amendrentado (*δειματόω*) es algo contrario a las tradiciones buscadas y enseñadas por los pitagóricos, es un estado que nos lleva a estar fuera desterrado (*ἔξω*). Desde el mismo inicio hasta el final aparece la preposición épi (*ἐπί*) que indica que hay que estar encima y en contra de tales vivencias hasta vencerlas golpeándolas (πλήσσω) y

[80] Es de resaltar la doble naturaleza que hay en el ser humano, entre la necesidad de la guerra y el deseo frente al amor y la pasión, tal hecho viene siendo recreado desde el comienzo de la civilización. Sea el caso en los griegos: en el comienzo de la batalla por Troya, los dioses se separarón en dos bandos; los que apoyaban a los griegos y los que apoyaban a los troyanos. Ares estaba indiferente, pero había prometido a su madre Hera y a su hermana Atenea que estaría del lado de los griegos en la batalla. Sin embargo, Afrodita lo convenció para que rompiera su alianza y se situará del lado de los troyanos. Ver Homer, *Iliad*, libro V, 820-834.

destruyéndolas (*πέρθω*). La batalla parece librarse desde (*ἀπό*) el origen mismo de nuestra existencia al sacar del interior (*ἔξ*) lo que causa los miedos y las desgracias (*δειλός*). El destruir y aniquilar (*πρήθω*) está situado antes como lo primero (*εἶς*), y lo que está después (*μετέπειτα*) como algo que es inevitable y necesario. Tal es la condición para estar en posesión[81] (*ἔχω*) de nosotros mismos como un deber inevitable señalado desde el comienzo (*ἄρχω*), siendo lo que nos ha de gobernar a fin de poder ser libres (*ἐλεύθερος*).

> *44. Esto es lo que hay que hacer.*
> (*And if thou hast done any good, rejoice.*
> *Χρηστά δέ τέρπευ*).

La presente cita concluye y cierra el texto anterior: lo útil (*χρηστά*) y (*δέ*) agradable (*τέρπευ*). Hecho que se da después de la propia conquista personal de los miedos (*δειμός), fruto de habernos reencontrado con nuestro propio origen y fundamento en* el arché (*ἀρχή*). Habiendo superado lo que es propio por naturaleza, al haberlos aniquilado (*ἐκπράσσω*) como consecuencia de la acción reiterativa de una praxis (*πρᾶξις*) realizada en hechos concretos *(πράσσω*); no queda otro recurso que sentirse muy satisfecho por estas acciones útiles, agradables, benevolentes y virtuosas (*τερπνός*). Desde el fondo de nosotros mismos, estamos necesitados (*χράομαι*) en superar los miedos (*δειμός), es algo deseado (χρᾶν*) desde lo más profundo de nosotros mismos. Lo cual nos muestra aquel conflicto mismo dentro de nuestro daimón (*δαίμων*): entre nuestro daimón bueno (*εὐδαίμων*) y nuestro daimón malo (*κακοδαίμων*). Esos miedos terribles (*δεινός*) son malos (*κακός*), mientras esas enormes alegrías y goces (*τέρψις*) son buenos (*εὖ*). Es algo inherente a nuestro propio destino, a la naturaleza contemplada desde el mismo daimón (*δαίμων*), que evoca al alma o espíritu que nos habita y que es el custodio de nuestro destino o moria (*μοῖρα*). Tal

[81] Comenta Diógenes Laercio cómo Pitágoras recomendaba de manera reiterada una vida equilibrada balanceada: evitar comer demasiada carne, al viajar hay que alternar el descanso con el esfuerzo, se ha de ejercitar la memoria, nunca hay que de decir o hacer algo con rabia, y siempre hay que dar gratitud a los dioses. Hay que tener muy presente la naturaleza dual animada por los contrarios que está presente por doquier en la realidad: luz y oscuridad, frio y calor. Y en ese sentido, están dispuestas las pasiones y los sentimientos. Además, manifiesta la sememejanza de los hombres con los dioses, lo cual explicaría las pasiones que los mueven y que están muy bien narradas en la Iliada y la Odisea de Homero. Además, recuerda que el alma proviene del éter y es inmortal dado que participa de la naturaleza del mismo. Ver *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book 8 Pythagoras, Chapter 23, 24, 26.*

naturaleza se percibe en las conductas de los mismos hombres, debido a que el ser humano ha heredado esta naturaleza dual. Está contemplado en la teoría pitagórica que el universo creado es ordenado a partir de la díada (*δυάς*): aquella instancia que permite la división entre nosotros mismos (*διαδατέομαι*), en la cual la realidad se presenta como el deselvomiento doble (*δισσός*), algo que se repite dos veces (*δίς*), lo que permite ambientar lo diferente como algo opuesto que se separa (*δίχα*). Es la díada (*δυάς*) la que establece que la naturaleza de los números, es dual (*δύο*), hecho que se ve reflejado en la presencia del bien y del mal como propios de la existencia del cosmos. Así, tanto lo útil y virtuoso (*χρηστός*) requiere ser guardado y defendido (*χραισμέω*), es necesario y conveniente (*χρή*) hacerlo, de lo contrario, se terminaría abandonados a esas angustias propias de la existencia. Existe la necesidad y la obligación (*χρεώ*) de superar aquello que hace cobardes o miedosos (*δειλός*) a los humanos. La necesidad (*χρεία*) conduce a la bondad y a la honestidad (*chréstotés*, *χρηστότης*), que está en la misma esencia del daimon (*δαίμων*): donde el bien (*εὖ*) es algo que le es más propio por naturaleza y es otorgado por estar feliz y alegre (*τερπνός*), mientras el mal (*κακός*) prospera por los miedos (*δειμός). Nuestra necesidad y obligación (χρέος*) está en cuidar lo que es útil, bueno y agradable (*χρηστός*) a fin de poder estar alegres (*τερπυός*). El mensaje sugiere que hay que saciarse y gozar de manera plena (*τέρπω*) estos placeres (*τέρψις*), lo cual es una necesidad (*χρεία*) que lleva a estar plenamente alegres y felices (*τέρψις*).

> *45. Estas cosas que hay que empeñarse en practicar, Estas cosas hay que amar.*
> (*Practise thoroughly all these things; meditate on them well; thou oughtest to love them with all thy heart.*
> *Ταῦτα πόνει, ταῦτ' ἐκμελέτα, τούτων χρή ἐρᾶν σε*).

La actual cita dice: estos (*ταῦτα*) trabajos (*πόνει*), estas (*ταῦτα*) prácticas dificultosas (*ἐκμελέτα*), estas (*τούτων*) necesidades (*χρή*) de estar enamorado (*ἐράω*)[82] de tí (*σε*). Se

[82] Lo que cabe destacar en este parráfo es el verbo *ἐράω*: enamorarse de alguien, amar con pasión o desear vivamente. Notamos su uso en un texto de la *Iliada* de Homero: "Ἥρη κεῖσε μέν ἔστι καί ὕστερον ὁρμηθῆναι νῶϊ δ᾽ ἄγ᾽ ἐν φιλότητι τραπείομεν εὐνηθέντε. οὐ γάρ πώ ποτέ μ᾽ ὧδε θεᾶς ἔρος οὐδὲ γυναικός" Se ve cómo la amistad, *φιλότης*, es difrutada, *τέρπω*, mientras el amor como eros, *ἔρος*, va dirigido a la mujer, esposa, *γυνή*. Hecho que se da cuando Zeús le dice a Hera: "Hera, thither mayest thou go even hereafter. But for us twain, come, let us take our joy couched together in love". Homer, Iliad, libro XIV, 312. También está el verbo

tiene ese señalamiento que reindivica el momento presente con todo el peso y el compromiso que demanda como algo impostergable e inderivable, esto y aquí (*οὗτος*) que requiere tantos trabajos fatigosos y árduos (*πόνος*). Estas (*ὅδε*) dificultades (*πονηρός*) tan pesadas que se han de trabajar y luchar penosamente (*πονέω*), esto (*τοῦτο*) que ha de apaciguar y aplacar (*μειλίσσω*) desde adentro y más allá (*ἐκ*); este a quien (*ὁ*) debería de (*χρή*) amar apasionadamente (*ἐράω*) como un gran amante (*ἐραστής*). Se está en frente a los rigores de todo aquello que trae profundas dificultades y angustias (*πόνος*), que tan solo logra ser remontado por ese tipo de hacer creativo capaz de transformar (*ποιέω*), tan presente en la poiesis (*ποίησις*) o la creación que afirma ese ser interno. Parte de las dificultades está en ese exigirse a fondo (*ἐκμελετάω*) a fin de ablandar y propiciar (*μειλίσσω*) lo que debe emerger de (*ἐκ*) adentro de nosotros y sin lo cual (*ἐκτός*) no es posible asumir lo que es debido en concordancia con nuestro destino (*χρεών*). Todo recae en ese verse atacado por la necesidad (*χρεία*) tan apremiante de amar con intensidad (*ἐράω*) a ti (σύ): aquí no solo se está frente a un ser humano, tan señalado por el pronombre tú (σύ), sino frente a cualquier tipo de objeto o actividad que debe de ser amada y realizada con todo nuestro amor en medio de fatigosas labores dictaminadas por el deber (*χρή*). Es decir, se está enfrente de quien despierta esos sentimientos tan árduos e imposibles de controlar o gobernar; tan solo cabe declarar y proclamar (*χράω*) el amor dada la necesidad y el querer (*χρεία*) que nos invade desde lo más profundo, siendo la única manera para aplacar (*ἐκμειλίσσω*) estos placeres (*τέρψις*) el satisfacerlos (*τέρπω*). No se está frente a ese afecto (*φιλέω*) propio de la amistad (*φιλία*), ni a ese ese amor cariñoso (*ἀγαπάω*), sino a ese amor que demanda ser amado por alguien con entrega y pasión (*ἐράω*). Lo difícil y árduo es tener a la persona en frente de uno como la cita bien lo sugiere, y comunicarle los sentimientos que uno tiene hacia ella. Se puede extender el significado de la actual cita en cuanto cualquier trabajo (*πόνος*) se ha de realizar con sentimiento en cualquier cosa que uno emprenda, frente a las dificultades y las fatigas (*πονηρός*), no nos queda más que una

---

ἔραμαι como expresón de amor, pasión y deseo ferviente por algo o alguien. Es de destacar cómo este verbo está muy cercano a eros *ἔρως* como amor, deseo y disfrute; y a la expresión, yo amo *ἐράω*, aquí tratada. Destacamos cómo eros ἔρως fue elevado a deidad como Eros *Ἔρως*: fue el cuarto dios en venir a la existencia después del Caos primordial, Gaia o la tierra y Tartaro o el inframundo (Hesiod, Theogony 116-122). Hay que destacar en esta cita de Pitágoras, que debemos realizar estos trabajos (*πόνος*), que aunque sean muy demandantes y exigentes, con un inusitado amor y pasión (*ἐράω, ἔραμαι*) tal como un amante lo haría.

entrega completa donde el amor (*ἐράω*) va unido a la necesidad (*χρεία*), nos brinda todas nuestras fuerzas en ese quehacer (*πράσσω*) hacia todas las cosas (*πρᾶγμα*) en las que ocupemos nuestro tiempo y vida.

> *46.* *Por ellas ingresarás en la divina senda de la perfección.*
> (*Tis they that will put thee in the way of divine virtue.*
> *ταῦτά σε τῆς θείης Ἀρετῆς εἰς ἴχνια θήσει*).

La actual cita dice: estas (*ταῦτά*) huellas (*ἴχνια*) sagradas (*θείης*) que tú (*σε*) tomarás (*θήσει*) dentro (*εἰς*), en las cuales (*τῆς*) está la virtud (*Ἀρετῆς*). Se está, una vez más, en frente de este (*οὗτος*) rastro (*ἴχνος*) que está colocado y situado (*τίθημι*) de tal manera que invita a ser seguido y rastreado (*ἰχνεύω*). Se ve y contempla (*θεάομαι*) la presencia de una actividad sagrada propia de los dioses (*θεῖος*), una vista (*θέα*) que señala el camino a la excelencia moral (*ἀρετή*). Una vez más, pareciera que la divinidad (*θεός*) se hace visible (*θεατός*) y de manera explícita nos coloca (*τίθημι*) dentro (*ἐς*) de los pasos (*ἴχνος*) que conducen a ella. El propósito es irse acostumbrando (*ἔθω*) a fin de poder procurar y anhelar (*ἰχανάω*) la excelencia en la bondad (*ἀρετή*). Esto que lleva al perfeccionamiento en cuanto eleva la condición moral, está en aquello frente a lo cual nos hemos acostumbrado (*ἔθω*): a las costumbres, hábitos y maneras (*ἔθος*), que nos permiten tener un carácter ético (*ἠθικός*). Aquí se resalta, que lo que hay que buscar es ser el mejor (*αριστος*) a nivel del carácter y los hábitos[83] (*ἦθος*) a fin de poder acceder a la excelencia (*ἀρετή*) propia de la areté. Es curioso resaltar que tal excelencia moral y ética es propiciada por la propia divinidad (*θεός*), que de alguna manera ofrece un espectáculo (*θεατρίζω*) para poder ser expectadores (*θεατής*) de aquello que posee una naturaleza sagrada (*θεῖος*). Tal camino (*ἴχνος*) está firmemente establecido para ser andado (*τίθημι*) por tí (σύ), el texto es bastante directo con aquel tema (*θέμα*) que rodea lo sagrado (*ἔνθεος*). La excelencia (*ἀρετή*) que el ser humano puede aspirar está inspirada en la visión o contemplación (*θέαμα*) que se nos muestra desde

[83] Pitágoras es recordado en particular por el exigente cultivo de la templanza, enseñaba esta virtud a sus discípulos de tal manera que muchas veces los hacía inflexibles. Tal es el caso, años después de su muerte, cuando el gobernante de Sicilia conocido como Dionisio I de Siracusa buscó por todos los medios posibles ganarse la amistad de los pitagóricos, lo cual le fue imposible y esto lo motivo a perseguirlos y a prohibir sus enseñanzas. Tópico tratado por Jámblico: ver Iamblichus, *The Pythagorean Life*, (chapter XXXI, pág.99).

lo divino. El mismo nombre de Teseo (*Θησεύς*) es muy cercano al tiempo futuro (*θήσει*) del verbo *títhemi* (*τίθημι*) tan mencionado en este párrafo y recuerda que este mítico rey unificó el Ático bajo Atenas y es el autor de inigualables hazañas. De alguna manera, Teseo es el mejor (*αριστος*) que encarna la excelencia propia de la areté (*ἀρετή*) como modelo a seguir e imitar, a su vez se dedicaba a pescar (*ἴχθνάω*). Pitágoras (*Πυθαγόρας*), entonces, vuelve a la necesidad de tomar los caminos que conducen a la excelencia, y estos son propiciados siempre por la divinidad; en esto se puede apreciar el profundo misticismo que rodeó y marcó su vida.

> *47. ¡Por quien trasmitió a nuestro entendimiento la Tetratkis la fuente de la perenne naturaleza.*
> (*I swear it by him who has transmitted into our souls the Sacred Quaternion, the source of nature, whose cause is eternal.*
> *ναί μά τόν ἁμετέραι ψυχᾶι παραδόντα τετρακτύν*),

La oración comienza afirmando sí, ciertamente (*ναί*) pero (*μά*) él mismo quien (*τόν*) nos ofreció y entregó (*παραδόντα*) a nuestras (*ἁμετέραι*) almas el tetraktys[84] (*τετρακτύν*). La frase tiene un tono aseverativo donde el hablante está comprometido con lo que está afirmando (*ναί*), vocablo que bien podría equivaler al metasímbolo aseverativo para las proposiciones ($\vdash$.), que vendría luego a complementarse con la proposición ($\vdash$. p). Luego se introduce la conjunción (*μά*) para volver a reindivicar el compromiso veritativo con lo aseverado: aquello que es nuestro (*ἡμέτερος*), muy preciado y valioso, que posibilita ese encuentro consigo mismo (*αὐτός*) de una manera directa. Tal como el objeto directo del acusativo (*τόν*) del pronombre personal (*ὁ*) lo permite; esto que es mío (*ἐμός*), lo nuestro (*τό ἡμέτερον*). ¿Qué es eso tan valioso? Aquello que remite a la psiqué (*ψυχή*), aquel lugar desde donde se da el primer soplo o aliento que trae la vida, el alma está caracterizada por ese respirar (*ψύχω*) frío (*ψυχρός*). Se está en presencia del pneuma (*πνεῦμα*), aquel aire o

---

[84] La *Tetraktys* de la decena, así es denominado por Edward Zeller, en su libro: *Outlines of the History of Greek Philosophy*, esta figura triangular alrededor de la cual los pitagóricos hacian su juramento de afiliación a su comunidad. Se trata de una representación del número 10, arreglado en cuatro filas de 1, 2, 3 y 4 puntos. Este método representaba los números en concordancia a sus propiedades geométricas. De los puntos se derivaban las líneas, de las líneas se derivaba el plano, y del plano se derivaban los sólidos planos (pág 52).

viento que es la manifestación de la presencia de la vida (*βίος, ζωή*) de aquello que está vivo (*ζῶ, ζάω*), el animal (*ζῷον*) humano (*ἄνθρωπος*). La característica de la vida (*ζωή*) es propiamente el poder respirar (*πνέω*) a través de los pulmones (*πνεύμων*), aquella bolsa que se expande y contrae. Entonces, esa entrega que realizó Pitágoras (*Πυθαγόρας*) de la *Tetraktys* (*τετρακτύς*), es algo que se puede enseñar (*παραδοτός*) y que sirve (*παραδράω*) para impulsar a moverse (*δονέω*) hacia esa realización con nosotros mismos (*αὐτός*), con nuestro propio yo y bajo el apoyo del substrato daimónico (*δαίμων*) tan mencionado antes. Ese acto de ofrecerse, entregarse y permitirse (*δίδωμι*) la *Tetraktys*, es algo que provino de (*παρά*) él con el fin de acompañar al ser humano a lo largo de su existencia. Tal entrega se realizó dándolo y colocándolo en nuestras propias manos (*παραδίδωμι*), transmitiendo y otorgando el conocimiento ahí guardado. Es más, el verbo está conjugado en el aoristo (*παραδόντα*), lo cual hace que esa acción se mantenga en el tiempo y posea una resonancia mayor. Esta cita es muy importante, dado que es la primera vez a lo largo de todos estos versos dorados (*Χρύσεα Ἔπη*), se toca algo relacionado con algo que es la fuente del conocimiento (*γνῶσις*). Aquello que puede ser conocido, percibido, observado y aprendido (*γιγνώσκω*), y lo hace a través de una construcción aritmético-geométrica que corresponde hoy día al número cuatro de los números triangulares. Algo que merece la pena resaltar, es cómo la *Tetraktys* (*τετρακτύς*) es algo que sirve para aproximarse a la psiqué (*ψυχή*); sea para develar su naturaleza, sea para dialogar con ella a fin de comprenderla y conocerla.

> *48. ¡Adelante pues! ponte al trabajo,*
> (*But never begin to set thy hand to any work, till thou hast first prayed the gods to accomplish what thou art going to begin.*
> *παγάν ἀενάου φύσεως*).

La cita sigue a fin de concluir: aseguremos (*παγάν*) lo que fluye siempre (*ἀενάου*) como origen de la naturaleza (*φύσεως*). Aquí se está en presencia de lo que debe de ser fijado y sujetado (*πήγνυμι*) como marco de referencia (*πῆγμα*), tal como el pico de una montaña (*πάγος*) permite una orientación clara. Se toma en cuenta que la *Tetratkys* (*τετρακτύς*), es la representación de ese movimiento perenne, que siempre fluye y es eterno (*ἀενάων*) en la propia naturaleza (*φύσις*). De esta manera se ha encontrado una representación o idea (*ἰδέα*) que sirve para modelar la realidad, y es en la *Tetrakys* donde se la puede ver, percibir, e investigar (*εἴδομαι*) como modelo (*τύπος*) de la naturaleza (*φύσις*). Se trata de presentar en estos textos hablados (*ἔπος*), aquellas formas (*εἶδος*) aritmético-geométricas[85] a través de las cuales se puede ver lo que está detrás de lo que se tiene enfrente de nosotros y de las que a su vez formamos parte. Del verbo hipotético (*εἴδω*), cuyo aoristo (*εἶδον*) corresponde a los verbos ver (*ὁράω*) y conocer (*οἶδα*). Esta es la misma fuente (*παγά, πηγή*), origen y nacimiento de la naturaleza (*φύσις*); y de alguna manera se ve en Pitágoras (*Πυθαγόρας*) ese primer científico o físico anterior e inspirador de Aristóteles (*Ἀριστοτέλης*). Pitágoras se acercó a la naturaleza utilizando un lenguaje matemático de carácter aritmético y geométrico, el cual utiliza un modelo abstracto a fin que sirva de instancia mediadora. Lo que siempre fluye como eterno (*ἀενάων*) es también aquello que tiene la posibilidad de soplar y respirar (*ἀείς,* plural de *ἀέντες,* que es el participio presente de *ἄημι*); aquello que permite que crezca y se desarrolle (*φύω*) todo lo que tiene vida (*βίος, ζωή*), que hace parte de la naturaleza (*φύσις*). Se hace especial hincapié en asegurarse, reunirse y solidificarse (*πήγνυμι*) con el propósito de poder disponer de una estructura, que permita reunir y asegurar en torno suyo (*πῆγμα*) un planteamiento fijo y sólido (*πάγιος*) que sea una fuente (*πηγή*) de inspiración robusta y compacta (*πηγός*), tal como la Tetratkys (*τετρακτύς*) ha sido ofrecida y entregada en nuestras manos (*παραδίδωμι*) por el propio Pitágoras. Tal ha sido su mensaje y encargo (*παραγγέλλω*) para estar conscientes, conocer y entender (*γιγνώσκω*) la naturaleza (*φύσις*).

49. *no sin antes rogar a los dioses que lo conduzcan a la perfección.*

(*When thou hast made this habit familiar to thee,*

ἀλλ' ἔρχευ ἐπ' ἔργον θεοῖσιν ἐπευξάμενος τελέσαι).

[85] La búsqueda pitagórica está inscrita en la escuela de los filósofos de la Escuela Iónica, quienes quisieron resolver el problema del origen del universo como un todo a partir de un principio primordial. Pitágoras manifestó, que el origen de todas las cosas está en el número y este permite entender los fenómenos universales en las relaciones numéricas. En este contexto están los principios musicales, que al igual que los numéricos, traen orden y una relación de armonía, en estos se fundamenta el principio que regula todo el cosmos. Este se aprecia en los intervalos entre los cuerpos del cielo, los cuales obececen a las leyes y a las relaciones de la armonía musical; esto lo condujo a su famosa teoría de la armonía de las esferas. Ver: Pythagoras en *Classical Dictionary of Greek and Roman Biography, Mythology and Geography*, William Smith, Editor (pág. 731).

Esta oración manifiesta: sobre todo (*ἄλλος*), lo que procede (*ἔρχευ*) de (*ἐπί*) las acciones (*ἔργον*) divinas (*θεοῖσιν*), se pide (*ἐπευξάμενος*) su cumplimiento (*τελέσαι*). Se esta aquí frente a lo otro (*ἄλλος*), aquello que es diferente y que permite contrastar algo a fin de poderlo reconocer, también se trata de lo otro que hace falta para lograr el pleno desarrollo y completez (*τέλειος*). Se está considerando aquello desde lo cual se parte, el mismo inicio que nos llega y hacia el cual habremos de marchar (*ἔρχομαι*), lo que nos lleva a actuar posee una jerarquía que está encima (*ἐπί*) de los actos (*ἔργον*) mismos a emprender gobernándolos. Se trata de la presencia de la divinidad (*θεός*), la cual es la meta misma hacia la cual vamos (*ἔρχομαι*), que reúne en sí misma toda perfección posible y realización completa (*τέλος*), siendo la instancia que permite la consumación de nuestros actos (*τελέω*). Lo otro que es diferente (*ἀλλοῖος*), es venir de un lugar a otro (*ἔρχομαι*) por medio de nuestro trabajo (*ἐργώδης*), que se orienta en ser los mejores (*ἄριστος*) a fin de lograr esa realización perfectiva[86] donde los males ya no nos aquejan más (*τελειόω*). Lo otro (*ἕτερος*) que le aporta todo el sentido a la vida, es poder cumplir (*τέλλω*) con cada una (*πᾶς*) de nuestras metas (*τέλος*); sin embargo, lograr alcanzar este fin de pleno crecimiento (*τέλειος*) involucra la presencia de la deidad (*θεός*). Tan solo podemos ser completos (*τέλειος*) por la mediación de la divinidad misma que establece hacia donde hay que ir y venir (*ἔρχομαι*), ya que de ella proviene aquellas acciones (*ἔργον*) que se ordenan según lo proveniente de arriba y que se sitúa sobre (*ἐπί*) nosotros determinándonos. El poder completar algo en torno a aquello que es perfectivo (*τελέω*) involucra la celebración misma de los misterios (*τελετή*), lo cual se hace profesando unas plegarias (*εὔχομαι*) en las cuales somos iniciados a fin de poder lograr nuestra realización plena (*τέλος*). Es de resaltar que los pitagóricos eran una comunidad gobernada por unos misterios sagrados; por tal motivo, el objeto de las mismas plegarias u oraciones (*εὐχή*) está en una vida muy orientada en unas actividades laborales (*ἐργάζομαι*), las cuales están destinadas en buscar a diario la perfección (*τελέω*). Desde que todo (*ἐπειδή*) está regido por la divinidad (*θεότης*), que es en sí misma

[86] El tema de pensar en y como Dios, nos presenta la emergencia de la filosofía como una ciencia especulativa, que cuenta las historias: del sabio Pitágoras y su movimiento, del poeta Jenófanes de Colofón, y del legislador Parménides de Elea. Cada uno a su propia manera manifestó que la verdadera introspección, discernimiento y conocimiento profundo (insight), no pertenecía a los mortales sino solo a los dioses. Pitágoras y sus seguidores buscaron tal conocimiento en las relaciones numéricas, que eran la clave para acceder al reino de lo divino. Ver en: *The Illustrated to Think like God*, de Arnold Hermann, (pág. 25).

bondadosa y complaciente (*εὐχερής*), es origen y meta alrededor de la cual se realizan lo ruegos y los votos (*εὖχος*). El tema de la perfección (*τέλος*) es algo que estuvo muy presente en la escuela pitagórica, la búsqueda de un ser humano bueno e íntimamente conectado con los designios mismos de la divinidad (*θεός*). Los pitagóricos fueron una comunidad dada a las iniciaciones y a los misterios, hecho que impregnó gran parte de la antigüedad tal como los Misterios Eleusinos[87] (*Ἐλευσίνια Μυστήρια*) que datan del año 1600 a.C. y que influyeron profundamente en Pitágoras.

> 50. *Si observares estas cosas conocerás el orden que reina entre los dioses inmortales y los hombres mortales,*
>
> (*Thou wilt know the constitution of the Immortal Gods and of men.*
>
> *Τούτων δέ κρατήσας γνώσεαι ἀθανάτων τε θεῶν θνητῶν τ' ἀνθρώπων σύστασιν*),

La actual oración inicia recalcando: estos (*τούτων*) en efecto (*δέ*) los que han gobernado (*κρατήσας*), han sido conscientes y han observado (*γνώσεαι*) a los inmortales (*ἀθανάτων*), ya (*τε*) lo divino (*θεῶν*) en los mortales (*θνητῶν*) ya (*τε*) a los seres humanos (*ἀνθρώπων*) en su organización (*σύστασιν*). La cita comienza con el pronombre genitivo plural estos (de este, οὗτος, *τούτων*), que va indicar algo perteneciente y reconfirmado (*δέ*) desde hace tiempo. Esto está dado por la mención del aoristo de gobernar (*κρατέω, κρατήσας*), y han conocido (*γνώσεαι*) aoristo de conocer (*γιγνώσκω*); lo propio, es perteneciente a los inmortales (*ἀθανάτων*), genitivo de inmortal o imperecedero (*ἀθανάτος*). Luego tenemos la comparación realizada por el doble uso de la conjunción (*τε*): lo inmortal (*θεῶν*) genitivo de (*θεός*), indica que lo divino se halla en los mortales

---

[87] Se menciona aquí a los Misterios Eleusinos y el culto al lobo en el artículo: *Pythagoras and the (Were) Wolf* de Kenneth R. Moore. En este se dice que el culto a los misterios asocian la luz con la oscuridad, aspecto que es central en los Himnos Órficos a Venus, los cuales son considerados un aspecto central en los Misterios Eleusinos. En ellos, se los menciona cómo el Lupercal es un Himno Órfico, que fue introducido más tarde en Roma como el culto al dios Pan Liceo (Lykaias) y al festival del Liceo, que se transformó en un festival mayor en Roma conocido como el Festival de Lupercalia. Asimismo, hace referencia a una caverna en las faldas del Monte Palatino en Roma. En sus orígenes está al Apolo Licio o del lobo o del crespúsculo luminoso. Aspecto presente en Pitágoras que llamaba a los intervalos de los tonos musicales, los intervalos del lobo. Tal culto al lobo se halla en *La República* de Platón, como la fábula del templo dedicado a Zeus Liceo en Arcadia (565d), hecho que condujo al nombre del Monte Liceo o montaña de los lobos (*Λύκαιον ὄρος*), lugar donde se encontraron los restos más antiguos de sacrificios humanos que datan entre 5.000 a 3.000 años a. C. (págs. 227- 236).

(*θνητῶν*); como (*τε*) a lo que es propio de los seres humanos (*ἀνθρώπων*) genitivo de (*ἄνθρωπος*), esto se aprecia en la manera como se reúnen y se organizan (*σύστασιν*). Esto (οὗτος) que es aprehensible frente al hecho mismo de gobernar (*κρατέω*), donde se ejercita un poder y una fuerza (*κράτος*); es una exhibición donde se revela el valor y el dominio sobre una situación (*κράτεος*). Esta (*ὅδε*) se conoce y percibe bajo un juicio (*γιγνώσκω*), que es capaz de percibir (*εἴδομαι*) lo que se ve (*ὁράω*) y se conoce (*οἶδα*) a fin de formar una opinión o concepción (*οἴομαι*) de la forma o apariencia (*εἶδος*) de lo inmortal (*ἀθανάτος*). Aquella cualidad propia de la inmortalidad (*ἀθανασία*) de quienes se escapan a la muerte (*θάνατος*). Luego, se entra a comparar lo que los dioses (*θεός*) tienen de mortal (*θνητός*): aquellas características que los acercan a la propia condición de los hombres mortales, y cómo esta ha sido recibida por la humanidad (*ἄνθρωπος*) en la manera en que se reúne y organiza (*σύστασις*) a fin de fortalecerse (*συντείνω*). El tema de fondo está en la posesión de un poder y fuerza (*κράτος*) que lleva al autogobierno y al autocontrol de uno mismo (*ἐγκρατής*), y que está encaminado a lograr la maestría en poderse uno gobernar (*ἐγκράτεια*). La solución está en el conocimiento mismo o gnosis (*γνῶσις*) surgida de aquello que es conoscible (*γιγνώσκω*), lo interesante es la afirmación que subyace: todo conocimiento proviene de quienes han logrado la inmortalidad (*ἀθανατίζω*), el verdadero conocimiento (*γνῶσις*) proviene de los dioses (*θεός*), o sea el conocimiento es propiamente divino e imperecedero (*ἀθανάτος*). Los seres humanos (*ἄνθρωπος*) como mortales (*θνητός*) pueden conocer en virtud a su afiliación frente a los inmortales (*ἀθανάτος*); más aún, han recibido de ellos la manera en que pueden todavía reunirse y organizarse (*σύστασις*). La forma en que el ser humano (*ἄνθρωπος*) se reúne en grupo y se asocia (*συντείνω*), es copiada de lo que se ve (*ὁράω*) y se conoce (*οἶδα*) de los inmortales. El ser humano, entonces, está poseído e inspirado por la divinidad (*θεότης*) que hay dentro (*ἐν*) de él (*ἐνθουσιάζω*). El morir (*θνήσκω*) se define a partir de lo que no muere, lo inmortal (*ἀθανασία*); lo que muestra una vez más esa tendencia a trascender de los griegos, y en especial de los pitagóricos en buscar e indagar acerca de la naturaleza (*φύσις*) y su origen (*ἀρχή*) divino (*θεός*): inmortal, imperecedero y perenne (*ἀθανάτος*).

51. en qué se separan las cosas y en qué se unen.

(*Even how far the different beings extend, and what contains and binds them together.*

ἧι τε ἕκαστα διέρχεται, ἧι τε κρατεῖται),

La actual oración comienza evocando: lo que era o sea (*ἧι*), también (*τε*) en cada uno (*ἕκαστα*) en atravesar (*διέρχεται*); lo que era o sea (*ἧι*), también (*τε*) para gobernar y asir (*κρατεῖται*). Estamos frente a una evocación propia del desempeño de cada individuo frente a lo que debe de hacer para afirmarse a sí mismo: aquello que es (*εἰμί*), en especial aquello que le es propio (ὅς), por lo cual establece una escogencia (*ᾗ*) fruto de haberse comparado con alguien. Este hecho está verificado por medio de una doble aseveración que se da al utilizar (*ἧι*) y (*τε*) al inicio de ambas proposiciones, se tiene una tensión en cada una de las dos (*ἑκάτερος*) declaraciones, donde se comprende que el sentido está dado en la contrastación mutua de ambas. La primera acción va dirigida a establecer algo que se cumple para todos los individuos, esto se da al introducir el pronombre cada (*ἕκαστος*) que denota una cuantificación universal: todo, cualquiera, cada, cada uno. Todos hemos de atravesar, ya sea para completar, difundir, y llegar (*διέρχομαι*) a una meta (*τέλος*) que es propia e inherente a cada uno de nosotros (*εἰμί*). A través de ella, se afirma nuestra propia psiquis (*ψυχή*) y naturaleza (*φύσις*), además del ser interno que nos habita (*δαίμων*). Como que en la vida debemos pasar a través (*διά*) de variadas situaciones, ya sea en medio de las mismas a fin de cruzarlas para llegar y a la vez salir (*ἔρχομαι*) de algo que nos es propio, aportándonos el sentido a nuestra existencia. Tal situación se asemeja al baile de la vida o danza (*ὀρχέομαι*) donde salta nuestra vida (*ζωή, βίος*), llevándonos a venir (*ἦλθον*) e ir (*εἶμι*) de manera amable: tal es el mensaje que está guardado en el interior de la primera cita, la danza que nos atraviesa por la cual llegamos a un lugar para luego volver a salir del mismo. La vida está constituida por una serie de llegadas y salidas inmersas en una variedad de fines y propósitos (*τέλος*). Tal es la manera en que la misma vida se proyecta y se expande en lo que nos es propio a cada uno de nosotros, dado que cada uno tiene que atravesar y recorrer situaciones existenciales propias en razón a nuestro destino (*μοῖρα*) y al ser interno divino (*δαίμων*). La vida está constituida por una serie de encuentros y salidas en relación a lo que nos motiva y mueve. La segunda cita se centra en afirmar y complementar la cita anterior, en relación a cada una (*ἕκαστος*) de las situaciones en las que hemos de prevalecer mucho tiempo (*ἑκάς*), en relación a cada uno de nosotros en cada una de las cosas (*τις*) que nos son propias. Se trata de atravesarlas con el propósito de completarlas (*διέρχομαι*), siendo fundamental lograr prevalecer en las mismas a fin de tener un dominio sobre las mismas fruto de haberlas asido (*κρατέω*). En el fondo tenemos el poder y la fuerza (*κράτος*), que hemos de realizar a fin de gobernarnos: es estar en posesión de un poder que muestre nuestro propio control interno (*ἐγκρατής*) frente a los caminos por los que atraviesa nuestra existencia. Ser nuestros propios amos en concordancia con lo que el destino (*μοῖρα*) y nuestro daimón (*δαίμων*) nos lo permite.

> *52.* *Y sabrás, como es justo que la naturaleza es una y la misma en todas partes,*
> (*Thou shalt likewise know that according to Law, the nature of this universe is in all things alike,*
> *γνώσηι δ', ἧ θέμις ἐστί, φύσιν περί παντός ὁμοίην*),

Esta oración inicia resaltando aquello que es conocido (*γνώσηι*), en efecto (*δ', δέ*), quien (*ἧ*), Temis (*θέμις*) es (*ἐστί*) la naturaleza (*φύσιν*) acerca y en derredor (*περί*) de todas las cosas (*παντός*) similares (*ὁμοίην*). La cita comienza interrogándonos acerca de lo que podemos llegar a conocer (*γινώσκω*) acerca (*δέ*) de Temis[88] (*θέμις*), encarnación de la ley divina, un Titán (*Τιτάν*), hija de Uranos (*Οὐρανός*) y de Gaía (*Γαῖα*). Estamos en frente de la ley divina (*θέμις*) que extiende y sostiene (*τείνω*) los cielos (*οὐρανός*) y la tierra (*γαῖα*), la ley que permite que exista y sea (*εἰμί*) el universo y la tierra sobre la cuál vivimos, construimos y sembramos a fin de alimentarnos y poder vivir. La naturaleza[89], (*φύσις*) en

---

[88] En la *Teogonía* de Hesíodo, se menciona que Temis (*θέμις*) está situada entre los seis hijos e hijas que tuvieron Gaia (*Γαῖα*) la Tierra y Uranos (*Οὐρανός*) el Cielo (*Teogony* 132). Temis hace referencia a la justicia en el sentido cósmico. A su vez de Zeus y Temis nace la Dike (*Δίκη*) o justicia temporal humana.

[89] Aquí se halla una importante definición de la naturaleza para Pitágoras, concerniente a aquel principio fundamental que unifica y, a su vez, sustenta la generación y la diversificación de la misma vida en todos los seres y especies que habitan el universo: es 'lo mismo' (*ὁμός*), que encontramos y tenemos todos (*πᾶς*). En su artículo: *Gauge and Space-Time Symmetry Unification,* J. Besprosvany, menciona cómo las ideas de unificación están sugeridas en el tratamiento integral del espín de las partículas elementales del femión y del bosón, y en los grados de libertad del grupo a izquierda. En tal texto, el autor manifiesta que el concepto de unificación está ligado a la primera idea de ciencia concebida por los primeros filósofos griegos, quienes en sus investigaciones acerca de la naturaleza buscaron principios unificadores. Una idea que ha perdurado desde

consecuencia, es: aquello que da la vida, crece, se desarrolla a fin de producir y sostener (*φύω*) todo (*πᾶς*) lo que nos rodea (*περί*) como lo mismo (*ὁμός*). Somos conscientes en: conocer, percibir, aprender y ver (γιγνώσκω) las leyes naturales (*θέμις*) que sostienen lo que somos, lo que existe (*εἰμί*), lo que es (*ἐστί*). Emerge la naturaleza como origen (*φύσις, ἀρχή*) de todo (*πᾶς*) lo que crece (*φύω*) de manera similar (*ὅμοιος*). Estamos frente a la definición de un tipo de cuantificación universal en sentido matemático: todo (*πᾶς*) como lo que es similar (*ὁμός*). Un tipo de formalización extremadamente compleja y uniabarcante que enriquecerá la lógica simbólica, debido a la vinculación del todo (*πᾶς*) como lo que es uno (*εἶς*). Está lo similar (*ὁμός*) como lo que es igual o equivalente o aún similar (*ἴσος*), hecho que invita a apreciar los isomorfismos (*ἴσος isos*, igual y *μορφή morphe* forma) entre todos los seres que están regidos por las mismas leyes (*θέμις*) que gobiernan a la naturaleza (*φύσις*). Se puede notar cómo la naturaleza (*φύσις*) es la que administra la justicia (*θέμιστεύω*) de todo el universo (παν) de manera similar (*ὁμοίως*), planteamiento que se encuentra en la fundamentación de todas las ciencias tanto puras como prácticas. Podemos percibir en la manera como Pitágoras (*Πυθαγόρας*) razona y construye sus oraciones, el origen mismo del proceso de axiomatización que definirá el método científico: el poder escribir una serie de oraciones que contengan elementos que permiten una generalización de las mismas como proposiciones susceptibles a ser formalizadas simbólicamente, además en medio de un tipo de reflexión deductiva de tipo inferencial que posibilita la elaboración de unas hipótesis aprehensibles en unos modelos susceptibles de ser teorizados. Se tiene así lo que se ve, percibe y observa (*εἴδομαι*) como unas imágenes (*εἶδος*) a través de las cuales se pueden ver (*ὁράω*) las formas (*εἶδος*) puras de naturaleza aritmética y geométrica que nos posibilitan conocer (*οἶδα*) la naturaleza (*φύσις*). Al final esas leyes (*θέμις*) se convierten en el guardián (*οὖρος*) de nuestro conocimiento o gnosis (*γνῶσις*), leyes que se pueden aprender (*μανθάνω*) para verse cobijadas en una matemática (*μάθημα*): en la cual los aprendices o matemáticos (*μαθηματικός*) instruyen y cuidan a sus discípulos (*μαθητής*).

---

aquellos tiempos y se ha convertido en una de las más poderosas herramientas en la física: es abscribir una estructura matemática a todos los fenómenos físicos, una idea que se le adjudica a Pitágoras (pág. 2).

53. Para que no esperes lo que no hay que esperar, ni nada quede oculto a tus ojos.

(*So that thou shalt not hope what thou ought'st not to hope; and nothing in this world shall be hid from thee.*
ὥστε σε μήτε ἄελπτ' ἐλπίζειν μήτε τι λήθειν).

Esta oración inicia resaltando cómo (*ὥστε*) tú (*σε*) no (*μήτε*) has de albergar ninguna (*ἄελπτ'*) esperanza (*ἐλπίζειν*) ni tampoco que (*μήτε*) alguien (*τι*) te haya olvidado (*λήθειν*). Tenemos el enfásis de un tipo de oración aseverativa de clausura en la cual lo que se va a afirmar disfruta de una gran amplitud de cobertura al inicio, en ella se está tomando en cuenta la naturaleza propia del ser humano en lo que se va a establecer: no obstante (*ὡς*) tú (σύ) bajo ninguna manera (*οὐδέ*) puedes albergar esperanza (*ἀελπτέω*) ni esperar con ansiedad (*ἐλπτίς*) que alguien (τις) se recuerde (*λήθειν*) de tí. La doble presencia de dos ejes de negación ni aún (*μήτε*)…. ni aún (*μήτε*), manifiesta ese sentido que la partícula de negación (*μή*) está doblemente contenida al igual que la partícula (*δέ*), la cual asume el papel de una conjunción y tiene funciones copulativas que se asemejan a una preposición, cuya tarea es soportar la argumentación fortaleciendo lo que está dicho en ella. De esta manera, lo que sigue es una cláusura que está cerrada y es de alguna manera inmodificable. No sujeta a cuestionamientos dado que el comportamiento y la naturaleza de las personas son de ese modo. La presencia del alfa privativa (α-) indica que estamos frente a la ausencia de esperanza que nos puede desesperar (*ἀελπτέω*), ya que la esperanza (*ἐλπτίς*) está ausente de manera completa en toda la franja espacio-temporal. Parece que la misma oración tiene una estructura lógica, donde se tiene una cuantificación universal que niega todo lo que está dentro de la misma proposición: $\sim (\forall_x)\ (P_x)$. Tampoco frente a lo inesperado (*ἄελπτος*) se tiene esperanza (*ἐλπωρή*), ni áun haciéndonos esperar (*ἔλπω*) aparece la esperanza (*ἐλπτίς*). Este razonamiento es fruto de un conocimiento profundo de la naturaleza humana, en especial, que no hay que esperar nada de los demás a fin de no desilusionarnos ni caer en estados de angustia. Al final, el planteamiento adquiere un nuevo enfásis que fortalece la estructura de la premisa inicial, se trata del vocablo alguien, algo, cualquiera (τις) que tiene las funciones de indicar la presencia del cuantificador universal. Se tiene también una cuantificación donde las variables libres son válidas dentro de los límites de la proposición, independiente del predicado y su complemento, siempre se va a cumplir lo que está afirmado o negado dentro de ella. Estas palabras denotativas son de enorme importancia en la lógica; fueron reconocidas y anticipadas inicialmente por Pitágoras (*Πυθαγόρας*) y planteadas por Aristóteles (*Ἀριστοτέλης*) de manera sistemática para ampliar y matizar su silogismo hipotético. Al final la ausencia (*ἀπουσία*) de esperanza (*ἐλπτίς*) recae sobre el mismo olvido (*λήθη*), como que el olvidar (*ληθάνω*) fuera causa de desesperanza (*ἀελπτής*). La máxima sería dar esperanza (*ἐλπίζω*) para no (*μή*) olvidar (*λήθειν*). Se siente esa preocupación tan ancestral entre los griegos por hacer perdurar su memoria y la realización de notables proyectos rodeados de una gran perfección a fin que su recuerdo y memoria no se pierda en el tiempo.

> *54. Conocerás a los hombres, víctimas de los males que ellos mismos se imponen,*
> (*Thou wilt likewise know, that men draw upon themselves their own misfortunes voluntarily, and of their own free choice.*
> *γνώσηι δ' ἀνθρώπους αὐθαίρετα πήματ' ἔχοντας τλήμονας*),

Esta oración indica que conocerás (*γνώσηι*) a los hombres (*ἀνθρώπους*) de manera espontánea (*αὐθαίρετα*) a través del sufrimiento (*πήματ'*) tenido (*ἔχοντας*) y soportado (*τλήμονας*). Se está aquí frente al propio conocimiento (*γνῶσις*) del ser humano (*ἄνθρωπος*), aquel conocerse (γιγνώσκω) que es buscado de manera voluntaria (*αυθαίρετος*), orientado a conocerse a sí mismo (*αὐτός*) en un proceso señalado por este pronombre reflexivo. Es dentro de ese conocerse (*γινώσκω*) del propio yo (*αὐτός*), donde se logra la conquista (*αἵρεσις*) que va a permitir develar la manera de pensar y de obrar del propio ser humano (*ἄνθρωπος*). Esa toma que busca develar un plan (*αἵρεσις*), es fruto de una escogencia que logra asir un propósito (*αἱρέσεως*) en concordancia con las propias convicciones, que le permiten a uno entender aquello que es agarrado por la mente (*αἱρέω*). El sufrimiento (*πῆμα*) permite aprender (*μανθάνω*) y enseñar (*διδάσκω*), nos convierte en los mejores aprendices (*μαθηματικός*) de nosotros mismos (*αὐτός*). Gran parte de la fuerza de la oración proviene del verbo tener (*ἔχω*) que parte de sus tantos amplios significados son: poseer, sostener, mantener, hacer, abstenerse de, etc. En este caso, la acción de mantener y conservar (*ἔχω*) nuestra propia integridad (*αὐτός*), en no dañarnos a nosotros mismos (*πημαίνω*) proviene de esa capacidad que tengamos para conocernos (γιγνώσκω). Es importante poder llevar y cargar (*ἔχω*), que es también otra de las etimologías más importantes de este verbo, aguantar y soportar (*τλάω*) el sufrimiento (*πῆμα*) con sentido y sensatamente (*ἐχόντως*). Se resalta el hombre (*ἀνήρ*) paciente y valeroso (*τλητός*) que de manera voluntaria (*αυθαίρετος*) asume sus propios dolores buscando conquistarlos (*αἱρέω*). Es así que en la escuela pitagórica se promovía el autocontrol fundamentado en el autoconocimiento de sí mismo, donde el dolor y los propios infortunios que la vida trae no deben de doblegar al individuo. El conocerse a sí mismo está contenido en esta oración: el conocerse voluntaria y libremente (γιγνώσκω *αυθαίρετος*) en su condición de ser humano (*ἄνθρωπος*), el vocablo voluntario tiene en su raíz etimológica en el pronombre reflexivo (*αὐτός*), que indica esa acción de conocerse a sí mismo. No es de extrañar que la famosa sentencia: "*conócete a ti mismo*"[90] (*γνῶθι σεαυτόν*), sea también atribuida entre otros al mismo Pitágoras. Notamos que el pronombre reflexivo (*σεαυτοῦ*) tiene una gran cercanía con el mismo pronombre reflexivo (*αὐτός*), de alguna manera son sinónimos. También se menciona que en Delfos junto a esta máxima estaba otra: "Nada en exceso" (*μηδέν ἄγαν*).

55. Ciegos a los bienes que les rodean, que no oyen ni ven:
(*Unhappy that they are! They neither see nor understand that their good is near them.*
Οἵτ' ἀγαθῶν πέλας ὄντων οὔτ' ἐσορῶσιν οὔτε κλύουσι),

[90] La cita de Pausanias en su obra *Descripción de Grecia* (Description of Greece), en el numeral 10. 24. 1 dice: En la parte delantera del temple en Delfos están escritas utiles máximas paa la vida de la gente, inscritas por aquellos que los griegos consideraban sabios. Estos eran: de Ioia, Tales de Mileto y Bías de Priene; de los Eolios en Lesbos, Pítaco de Mitilera; de los dóricos en Asia, Cleóbulo de Lindos; Solón de Atenas y Quilón de Esparta; los siete sabios, de acuerdo a la lista de Platón, el hijo de Aristón de Atenas. Estos sabios, luego, venían a Delfos y dedicaban a Apolo sus celebradas máximas, "Conócete a ti mismo" y "Nada en exceso" (In the fore-temple at Delphi are written maxims useful for the life of men, inscribed by those whom the Greeks say were sages. These were: from Ionia, Thales of Miletus and Bias of Priene; of the Aeolians in Lesbos, Pittacus of Mitylene; of the Dorians in Asia, Cleobulus of Lindus; Solon of Athens and Chilon of Sparta; the seventh sage, according to the list of Plato, the son of Ariston. These sages, then, came to Delphi and dedicated to Apollo the celebrated maxims, "*Know thyself,*" and "*Nothing in excess*." "*Γνῶθι σαυτόν καί Μηδέν ἄγαν*"). Tal cita de los siete sabios se encuentra en el diálogo *Protágoras* de Platón (343a).

La oracióninterroga: ¿en qué medida (*οἵτέ*) es bueno (*ἀγαθῶν*) lo que está (*ὄντων*) cerca (*πέλας*), y no (*οὔτε*) lo que es visto adentro (*ἐσορῶσιν*) ni lo que (*οὔτε*) es escuchado (*κλύουσι*)?. Estamos frente a una gran apertura en la indagación de esta pregunta, hecho que se ve resaltado por la enorme extensión de cobertura que plantea el adverbio (*οἵ*) en unión con el pronombre personal en acusativo singular (*τὲ, σὲ*). Donde el solo comienzo de este vocablo podría ser escrito como: ¿Hasta que punto tú? (*οἵτὲ*), luego se introducen los argumentos por los cuáles se está indagando, acerca de lo que es propiamente bueno, moral y afortunado (*ἀγαθός*). Lo que involucra hacer el bien y ser benéfico (*ἀγαθοποιέω*) hacia los que estén (*ὄντων*, forma imperativa del verbos ser, estar, existir *εἰμί*) cercanos o vecinos (*πέλας*). El juego posterior de las dos formas adverbiales (*οὔτε….οὔτε*) introduce dos negaciones, que no se cumplen absolutamente y de ningún modo (*οὔτι*) en los dos casos. Se señala que ni esto… ni aquello se cumple, ni se ve (*ὁράω*) hacia dentro (*ἐς*) ni se escucha (*κλύω*) aquello que es (*εἰμί*) bueno (*ἀγαθός*) y está (*εἰμί*) próximo o vecino (*πελάτης*). Esa oración presenta una reflexión que es en sí misma toda una tragedia *(τραγῳδία,* el canto *ᾠδή* de la cabra macho *τράγος*): la incapacidad del propio ser humano (*ἄνθρωπος*) de ver (*ὁράω*) y oir (*κλύω*) lo que es bueno y moralmente conveniente (*ἀγαθός*). Ni aún (*εἴτε*), si (*εἰ*) está (*εἰμί*) aún (*τε*) cerca (*πέλας*) no (*μήτε*) nos percatamos de ello. En el fondo es lo que define la propia esencia (*οὐσία*) del ser humano (*ἄνθρωπος*), aquello que le permite que sea (*οὐσία* es el presente participio de *εἰμί*), es hacer (*ποιέω*) el bien (*ἀγαθός*), aquel bien útil y noble (*ἀγαθοποιέω*). La incapacidad para acercarse (*πελάζω*) a obrar bien y tener una buena conducta (*ἀγαθοποιΐα*), es evidente bajo el uso tan reiterativo de instancias que involucran una negación (*οὔτε*). Nadie (*οὐδείς*) de ninguna manera (*οὔτι*) y de ningún modo (*μηδείς*) puede apreciar, lo que es visible (*ὁρατός*) como una visión (*ὅρασις*) ni escuchar (*ἀκούω*) lo que es bueno (*ἀγαθός*) o bello (*καλός*). Se tiene así a un ser humano que parece tener una doble naturaleza, una que se aproxima a hacer el bien y otra que es indiferente haciéndolo ciego y sordo. La utilización de la preposición dentro (*ἐς*) y, más cuando es usada con el acusativo, indica la proximidad de un objeto directo (*εἰς*), antecede al verbo ver, contemplar, percibir y poner atención (*ὁράω*), señala aquel proceso de introspección que busca apropiarnos de lo externo y hacerlo interno. Se trata de eliminar las diferencias entre lo externo y lo interno, facilitando un proceso cognoscitivo verdadero, que se da cuando el objeto interizado no es antagónico en un sentido no comunicado con el sujeto, sino complementario en el sentido de completez frente al mismo. Paradójicamente el ser interno que es lo más cercano, es al mismo tiempo lo más lejano. Es clara la presencia de un relativismo en la manera en que valoramos y percibimos la realidad. Es lo que está más cerca de cada uno de nosotros, lo más difícil de percibir y percatarnos de su existencia.

56. *Son pocos los que saben librarse de la desgracia.*
(*Few know how to deliver themselves out of their misfortunes.*
λύσιν δέ κακῶν παῦροι συνιᾶσιν).

Esta frase es una continuación de la anterior que apunta de inmediato a liberarnos (*λύσιν*) también (*δέ*) de lo malo (*κακῶν*), y son pocos (*παῦροι*) los conscientes de ello (*συνιᾶσιν*). Se está frente a las ataduras que no dejan ni ver (*ὁράω*) ni oir (*κλύω*), y es fundamental efectuar un proceso de disolución (*λύσις*) de lo malo (*κακός*), aquello que inhibe a la psiqué o alma (*ψυχή*); pocos (*παῦρος*) lo entienden y se dan cuenta de ello (*συνίημι*). Es necesario perder y desatar (*λύω*) por una parte (*δέ*), para que lo malo (*κακός*) sea destruido y abolido (*καταλύω*), aquello que nos aprisiona y que nos imposibilita ver (*ὁράω*) y escuchar (*κλύω*) a nuestra propia a la vida (*ψυχή*). Es evidencia de la respiración de la vida y el alma (*πνεῦμα*), ese soplo frio (*ψύχω*) que nos permite respirar para vivir (*πνέω*), y que se percibe también en nuestra propia mente (*ψυχή*). Ya se había comentado la importancia del daimón (*δαίμων*) que nos habita y, como tal vaciado (*λύσις*) nos liberaría (*λύ-σειν*). Se trata de destruir para disolver (*καταλύω*), proceso que es bien conocido desde la más remota antigüedad en aquellas prácticas de las escuelas iniciáticas, donde la malignidad incorpora los vicios de la cobardía (*κακία*), debe de ser reducida y rota (*λύω*). El liberarse de ello nos hace libres (*ἀπολύω*); no es de extrañar que el verbo liberar y desatar (*λύω*), consolide su significado junto a las dos preposiciones como lo son contra (*κατά*) y de (*ἀπό*), que se ilustran muy bien en los verbos: destruir (*καταλύω*) y liberarnos de (*ἀπολύω*) aquella malignidad (*κακία*) que nos trae infortunio, debilidad y deshonor, y falta de calidad de vida (*κακία*). Este proceso de disolución (*λύσις*)[91] tiene como propósito apaciguarnos y liberanos (*παύω*) haciendo que termine ese estado injurioso y carente de utilidad (*κακός*) que nos debilita y es causa de enfermedad (*παραλύω*). No obstante, se concluye que pocos (*παῦρος*) logran llevar esto a un final (*παύω*) que involucre el descanso y la cesación (*παῦλα*) de estos males (*κακός*). La razón de ello está también contenida en la oración y gravita alrededor del verbo entender a fin de juntar (*συνίημι*), que también es lo que permite que lleguemos a ese acuerdo (*συνίημι*), que es realizado de manera conjunta (*συν-*) a fin de dejar fluir y soltarnos (*ἵημι*) de lo que nos ata (*ἁρπάζω*). La utilización del verbo (*συνίημι*) sugiere que el proceso de liberación y disolución (*λύσις*) lo hacemos con alguien más, hecho sugerido en la preposición ante o entre (*σύν*), sea en colaboración con nuestra propia psiqué (*ψυχή*) o nuestro daimón (*δαίμων*), sea con otra persona. Sin embargo, es preferible la primera opción, aunque intervengan otros para ayudarnos a ver y oir, el proceso es interior: ya se mencionó que pocos (*παῦρος*) lo logran o son conscientes de ello (*συνίημι*). Al final el mensaje es claro: hay que dejar ir y soltar (*ἵημι*) aquello que está a nuestro lado (*σύν*) atándonos (*ἁρπάζω*). No hay que olvidar, que la preposición hacia abajo (*κατά*) es la que acompaña al verbo destruir (*καταλύω*); Como sugiriendo, que lo que nos habita como alma (*ψυχή*, *δαίμων*), es la que desciende para ayudar a soltarnos (*ἵημι*) de aquello que nos acompaña (*σύν*) y que debemos arrojarlo fuera (*ἀφίημι*).

57. *Tal es el destino que estorba el espíritu de los mortales,*
(*Such is the fate that blinds mankind, and takes away his senses.*
τοίη μοῖρ' αὐτῶν βλάπτει φρένας).

[91] Es de destacar cómo *lúcis λύσις* significa estar libres como consecuencia de la acción de soltar, involucra una solución o disolución a fin de rediminirnos o salvarnos. Aspectos comentados en: *Historical Dictionary of Ancient Greek Philosophy*, Anthony Preus, manifiesta que en el diálogo del *Fedón* (*Φαίδων ἢ περί ψυχῆς*, 67d), Platón trata la separación del alma (*ψυχή*) del cuerpo (*σῶμα*) en el momento de la muerte. En el *Fedón* de Platón se dice: Bien, luego, ¿Esto que llamamos muerte, no es, una liberación y separación del cuerpo? Exacto, dijo, ¿Pero, como ha sido sostenido, que los verdaderos filósofos y ellos son siempre los que están más dispuestos a liberarse y separse de su cuerpo ("Well, then, this is what we call death, is it not, a release and separation from the body?" "Exactly so," said he. "But, as we hold, the true philosophers and they alone are always most eager to release the soul, and just this—the release and separation of the soul from the body—is their study, is it not?" "Obviously". Ver Plato, *Phaedo,* 67d).

Este verso inicia mostrando cómo, en verdad (*τοίη*), el destino (*μοῖρα*) de nosotros mismos (*αὐτῶν*) entorpece (*βλάπτει*) el sano entendimiento (*φρένας*). Ciertamente (*τοί*), tu (*σύ*) destino (*μοῖρα*), aquella parte o porción del mismo que te corresponde, a tí en sí mismo (*αὐτός*), en muchos casos daña y lesiona (*βλάφτω*) el *phrén* (*φρήν*): aquella zona que está ubicada entre el tórax y el diafragma, lugar del corazón, al cual se le asocia la sede de las emociones, los apetitos y la mente, incluyendo la voluntad y el intelecto; motivo por el cual se requiere ser prudente, procurar dotarse de una mente moderada y autocontrolada (*σώφρων*), a fin de tener la actitud correcta frente a los designios de las Moiras (*Μοῖρα*) que gobiernan el destino de los seres humanos. El texto nos sitúa frente a la parte que cada uno recibe (*μείρομαι*) en cuanto destino (*μοῖρα*) que le toca cumplir, en especial, la duración y las circunstancias propias de la vida de cada uno. No hay manera de escapar a lo dispuesto por el destino (*μοιρίδιος*), aquello que ya viene de atrás y se presenta de nuevo (*αὖ*) como parte (*μοῖρα*) intrínseca de nuestra propia persona en ella y para sí misma (*αὐτός*). Aquí (*οὗτος*) frente a esto que nos precede (*ὅδε*) en este mismo presente, aunque provenga de un remoto pasado (*ἐκεῖνος*), no hay manera de evitarlo. A todos nos toca, razón por la cual existe el pronombre personal en genitivo plural (*αὐτῶν*) para indicar esa acción que se vuelca hacia todos, no hay nadie que escape de ella ni de su cumplimiento. Una vez más, es preciso disponer de un adecuado entendimiento que logre balancear entre las emociones, las sensaciones físicas y los pensamientos para que el phrén (*φρήν*) esté sano (*φρένας*). Hay que muy presente que el destino (*μοῖρα*) nos puede dañar (*βλάφτω*) a menos que logremos entrar en razón, estando bien instruidos y enseñados a fin de proceder con sensatez (*φρενόω*). Esto se logra teniendo un phrén[92] (*φρήν*) balanceado y equilibrado, pues existe una relación del phrén (*φρήν*) con el timo (*θυμός*), por cuanto ambos se consideran como el lugar donde se asientan las emociones, sensaciones, pensamientos y el alma, pero incluye también a la mente, la voluntad y el deseo. Un campo muy amplio; la diferencia está en que

[92] El tema de la *phrén* (*φρήν*) es tratado por Diógenes Laercio en Pitágoras, numeral IV, en el cual aborda el tema de la transmigración perpetua del alma. A su vez cuenta, cómo Hermes le indicó que podría consevar cualquier don excepto el de la inmortalidad. De modo que él escogió como conservar la memoria de una vida después de la muerte, reteniendo de esta manera sus experiencias. A su vez, hay que tener presente que en el numeral 30, en Diógenes Laercio, Pitágoras divide el alma en tres partes: la inteligencia o *nous* (*νόος, νοῦς*), la razón o *phrén* (*φρήν*) y la pasión o el *thimo* (θ*ύμος*). ([30] *Τήν δ᾽ ἀνθρώπου ψυχήν διαιρεῖσθαι τριχῆ, εἵς τε νοῦν καί φρένας καί θυμόν*). *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book VIII, Pythagoras, IV.*

el timo es un lugar más pasional donde se puede dar la ira. Se requiere que tanto la phrén (*φρήν*) como el timo (*θυμός*) estén balanceados y en concordancia con lo determinado por el destino (*μοῖρα*). Esto hace que se evite el daño o las lesiones (*βλάπτω*) a nosotros mismos (*αὐτῶν*) y se hace indispensable alcanzar un estado de equilibrio emocional, mental y físico propio de alguien moderado y atemperado en la sofrosine (*σωφροσύνη*). Uno mismo ha de lograr alcanzar un estado sano y seguro (*σῶς*) de mente, emociones y corazón (*φρων*), aspecto que se ve en la persona moderada, equilibrada, discreta y autocontrolada (*σώφρων*). En esta forma, un individuo puede pensar y entender dado que está en dominio y posesión de los sentidos, la mente y las emociones (*φρονέω*). Esto le permite ser sabio, prudente, sagaz y con buena confianza en sí mismo (*περίφρων*), reflejo de alguien que ha logrado una excelente comunicación con su alma, espíritu o daimón (*δαίμων*) y por ende con el cosmos (*οὐρανός*).

> 58. *Como cuentas infantiles ruedan de un lado a otro, oprimidos por males innumerables:*
> (*Like huge cylinders they roll to and fro and always oppressed with ills innumerable.*
> *Ὡς δέ κύλινδροι ἄλλοτ' ἐπ' ἄλλα φέρονται ἀπείρονα πήματ' ἔχοντες*).

Esta frase dice: de esta manera (*ὡς*), no obstante (*δέ*), los cilindros (*κύλινδροι*) en otro tiempo (*ἄλλοτε*) estaban encima (*ἐπί*); excepto (*ἄλλα*) que se transportaban de un lado a otro, (*φέρονται*) delimitando (*ἀπείρονα*) el sufrimiento (*πήματ'*) que se tuviera (*ἔχοντες*). La oración comienza con una forma adverbial demostrativa (*ώς*) que proviene de la oración anterior, su propósito es servir de ilustración o ejemplo de lo afirmado ahí: el destino (*μοῖρα*) se parece a un cilindro (*κύλινδρος*), en cuanto tiene esa facultad de repasar lo que se hace una y otra vez (*φέρω*). Este recurso se asemeja a una metáfora (*μεταφορά*), dada su posibilidad de transladar o llevar algo a lo largo (*μεταφέρω*), lo que involucra un cambio de posición (*μετά*) que es cargado consigo o transportado de un lado a otro (*φέρω*). De manera que la forma cilíndrica (*κύλινδρος*) es algo que permite enrollar, rodar en un ir y venir sin cesar (*κυλίνδω*). Se equipara al círculo (*κύκλος*), que tiene esa posibilidad tanto de separar como delimitar algo que está encerrado y contenido (*ἀπείργω*). Se halla, una vez más, la similitud del destino (*μοῖρα*) con el círculo (*κύκλος*) dado que enrolla (*κυλίνδω*) como el áperion[93] (*ἄπειρον*), aquello que carece de límites y que se adecúa a la búsqueda pitagórica del infinito: tanto el círculo como el destino son una representación (*εἶδος*) del mismo. Bajo el uso del adverbio demostrativo (*ὡς*), que indica dos clausuras interconectadas, se responden los interrogantes suscitados en la cita anterior y se analizan en la oración actual. Aquí se compara cómo el destino (*μοῖρα*) nos hace girar y dar vueltas (*κυκλόω*) hacia aquello que es lo otro, lo diferente y el resto (*ἄλλος*), que expresa esa acción en dos sentidos (*ἀλλήλων*) propia de la forma cilíndrica (*κύλινδρος*). Ella involucra una serie de cambios y variaciones (*ἀλλοίωσις*) promovidos y emprendidos (*ἀπείρω*) por aquella realidad que está sobre (*ἐπί*) nosotros determinándonos. Lo circular (*κυκλοτερής*) crea (*ποιέω*) un cubrimiento (*κύκλωσις*) que nos envuelve rodeándonos (*κυκλόω*), y su propósito fundamental es modificarnos para transformarnos (*ἀλλάσσω*) de diferentes maneras (*ἀλλοῖος*). Es curioso: lo que carece (*ἀ-* la alfa privativa) de límite o fin (*πέρας*), es lo que está más allá (*πέρα*) haciéndonos volver (*ματεύω*) sin importar el lugar (*πῄ, πή*) en donde estemos.

El eterno retorno es siempre algo agobiante dado que nos trae (*φέρω*) lo infinito (*ἄπειρος*), que se asemeja a algo circular (*κύκλος*), que debe de ser experimentado[94] de nuevo de manera ininterrumpida (*ἄπειρος*). Siempre se darán unos enfrentamientos en direcciones contrarias (*πέραν*). La tarea que ocupa al ser humano y en la cual se ejercita la phrén (*φρήν*), y por ende la sofrosine (*σωφροσύνη*), es lograr tener y sostenerse (*ἔχω*) en las cosas que uno realiza (*ποίημα*). Es fundamental que después (*ἐπεί*) de nuestras acciones y obras (*ποίημα*) se logre actuar con sentido y sensatez (*ἐχόντως*), comprendiendo que somos

---

[93] El Apeirón es incorporado en la teoría pitagórica en relación a la mónada como origen y principio que lo gobierna todo, de ella se deriva la díada a partir de la cual los números son concebidos, ver: *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book 8 Pythagoras*, N. 25. Esa mónada no es en sí misma un número, ese apeirón es un uno que se vuelve explícitamente otro distinto a si mismo dando origen a los contrarios (pág. 85), Ver: *Pythagoras and the Doctrine of Trasmigration: Wandering Souls*, James Luchte.

[94] El tema del valor de la experiencia fundamentada en la observación de la naturaleza, que busca investigar el mundo de manera empírica y recrear una serie de explicaciones acerca del mismo de manera racional, es algo que comienza en la escuela de los primeros filósofos iónicos. Este tema es tratado por Gabriel Idang, en *Thales, Anaximander and Anaximenes as Pathfinders of Modern Science*, donde afirma que la explicación del origen y estructura del mundo concebida de manera científica comienza con Tales de Mileto, Anaximandro de Mileto y Anaxímenes de Mileto. Su mérito radica en buscar un tipo de explicación que se fundamentará en lo mágico, lo religioso y lo mítico. Todos tuvieron un gran interés en la cosmología y se les reconoce como los primeros filósofos en el sentido clásico del término, y como filósofos naturales interesados en indagar acerca del sustrato único y por ende material que soporta la vida en el cosmos (pág. 57-65).

buscadores (*μαστήρ*) de aquello que es perenne (*ἄπειρος*)[95]. La doble acción que se sugiere, es traer (*φέρω*) a fin de separar (*ἀπείρογω*) aquello que nos limita (*πέρας*) a fin de atravesar y recorrer (*πείρω*) nuestro destino (*μοῖρα*) en lo posible sin dañarnos (βλάφτω) a nosotros mismos. Se percibe cómo el sufrimiento (*πῆμα, πημονῆ*) siempre está presente en ese devenir incesante que da vueltas sin que se vaya a ningún lugar. Lo que es infinito (*ἄπειρον*) carece de fronteras; este hecho se expresa en los dos sentidos que tiene el vocablo apeiros (*ἄπειρος*): el uno que se refiere a aquello que no tiene experiencia y es inconsciente de lo que acontece, y el otro en lo que carece de límite. Por ese motivo, quizá, la ignorancia y la imposibilidad de efectuar juicios del primero, sería el origen mismo de esa tendenica a asolar a otros y a dañarse a sí mismo (*πημαίνω*). Se sugiere al final el estar en firme posesión (*ἔχω*) de nuestras obras y cosas realizadas (*ποίημα*), algo que evoca la actividad creativa y productiva (*ποιέω*) de la poiesis (*ποίησις*). Los pitagóricos le otorgaban un gran valor al trabajo (*ἔργον*) y a lo logrado por él. Un trabajo que se siente desde adentro y que disfrutamos, debido a que es lo que nos hace diferentes (*ἀλλοιόω*), transformando nuestra manera de pensar y entender (*φρονέω*) en medio de una firme posesión de nuestros sentidos.

> *59. Porque sin advertirlo los castiga la Discordia, su natural y triste compañera,*
> (*For fatal strife, innate, pursues them everywhere, tossing them up and down; nor do they perceive it.*
> *λυγρά γάρ συνοπαδός Ἔρις βλάπτουσα λέληθεν σύμφυτος*),

La presente oración dice: triste (*λυγρά*) desde (*γάρ*) la compañía (*συνοπαδός*) de *Eris* (*Ἔρις*), estropeando (*βλάπτουσα*) sin ser notada (*λέληθεν*) en lo que crece junto (*σύμφυτος*).

---

[95] Es conveniente reconocer que el primer pensador griego que planteó el *Aperión* fue Anaximandro, quien lo consideró como el primer principio ilimitado; que no puede ser definido y siempre está en movimiento. Tema es tratado en: *From the Infinity (Aperion) of Anaximander in Ancient Greece to the Theory of Infinite Universes in Modern Cosmology*, por Theodossiou E, Mantarakis P, Dimitrijevic M, Manimanis V, Danezis. El Apeirón es el comienzo de todo según Anaximandro, da lugar a los principios contradictorios del calor y el frio, la humedad y la sequedad, que siempre están en constante y perpetúa lucha. El hombre puede comprender este eterno proceso en la vasta pluralidad de cosas y el infinito número de universos que existen. La cosmología de Anaximandro considera que del apeirón nacen innumerables mundos y por él son también finalmente absorbidos. Menciona el arché o comienzo como un elemento del cosmos que engloga y gobierna a todos. El Apeirón es una noción de la filosofía presocrática, que también está presente en Epícuro como fundamento del universo; y en Demócrito, quien consideró la existencia de infinitos atómos. (págs. 162-176).

Se afronta lo que es triste, penoso, miserable e infeliz (*λυγρός*) originado (*γάρ*) en aquello que está junto (*σύν*) como compañera (*ὀπαδός*), se trata de Eris[96] (*Ἔρις*), la diosa de la discordia y la confusión. Es ella quién custodia las manzanas doradas de la discordia, arrojando una en la boda de Peleo (*Πηλεύς*) y Tetis (*Θέτις*), la nereida ninfa del mar, dando origen a la guerra de Troya[97]. La discordia (*ἔρις*) turba y daña todo lo que acompaña (*ὀπαδέω*) de manera conjunta (*σύν*). Pitágoras, claro está, acude a Homero a fin de evocar a Eris (*Ἔρις*), la diosa de la discordia, que logra entrar y escapar sin ser notada (*λανθάνω*) de lo sembrado (*συμφύω*) por ella. Tenemos una reflexión más profunda en torno a aquello que nos hace desdichados e infelices (*λευγαλέος*), dado que nos limita en cualquier momento (*γε*) debido a (*ἄρα*) que está a nuestro lado (*σύν*) como compañero, guía y escolta (*ὀπαδός*). La condición de tristeza (*λυγρός*) termina perjudicando y transtornándonos (*βλάπτω*), creando un olvido (*λανθάνω*) propio de *Lethe* (*λήθω*), que es uno de los ríos de Hades (*ᾍδης*), el invisible inframundo[98]. Es notable cómo la etimología de aquello que escapa sin ser notado (*λανθάνω*), obedece a una conexión con Hades (*Ἅιδης*), el dios del reino de los muertos y que oculta a algo o a alguien para que sea olvidado. Se siembra

---

[96] *Eris* (Ἔρις), se sabe, es la diosa de la discordia y la rivalidad. El poeta Hesíodo menciona la existencia de dos diosas de la discordia o *Ἔρις* en su poema *Trabajos y Días* (*Ἔργα καὶ Ἡμέραι*): Así, después de todo, no hay una sola discordia, pero a lo largo de la Tierra hay dos. En cuanto a la primera, un hombre le podría alabarle cuando haya llegado a entenderla; pero la otra es censurable: y ellas son diferentes completamente en su naturaleza. La una nutre el mal y la batalla, siendo cruel: [15] no ama a ningún hombre; pero a la fuerza, a través de la voluntad de los dioses imperecederos, el hombre paga una desapacible Discordia a fin de honrarla. Pero la otra es la hija mayor de la oscura Noche, y del hijo de Cronos quienes están sentados en lo alto y habitan en el éter, la colocarón en el origen de la Tierra: y ella es más amable hacia los hombres. [20] Ella agita aún a los desamparados a trabajar mucho; para que un hombre incremente su deseo para trabajar el considera a su vecino, un hombre rico quien se precipita a arar y plantar y colocar su casa en orden; y el vecino rivaliza con su vecino en la medida en que corre en pos de la riqueza. La Discordia es saludable para los hombres (*So, after all, there was not one kind of Strife alone, but all over the earth there are two. As for the one, a man would praise her when he came to understand her; but the other is blameworthy: and they are wholly different in nature. For one fosters evil war and battle, being cruel: [15] her no man loves; but perforce, through the will of the deathless gods, men pay harsh Strife her honor due. But the other is the elder daughter of dark Night, and the son of Cronos who sits above and dwells in the aether, set her in the roots of the earth: and she is far kinder to men. [20] She stirs up even the shiftless to toil; for a man grows eager to work when he considers his neighbor, a rich man who hastens to plough and plant and put his house in good order; and neighbor vies with his neighbor as he hurries after wealth. This Strife is wholesome for men.* Ver: Hesiod, *Work and Days* 11-24).

[97] El tema de arrojar las manzanas en esta boda está consignado en el *Epitome* de Apolodoro (E.3.2), autor que usualmente es identificado como la Biblioteca de Pseudo-Apolodoro, compendio de antiguos mitos griegos de autoría no resuelta. A su vez, Homero aborda este tema de la Discordia en la *Ilíada* (4-441).

[98] Este tema está tratado en los *Himnos Órficos*, en el himno 85 *Oneiri* o A los Sueños. Ver: *The Mystical Initiations of Hymns of Orpheus*, traducido por Thomas Taylor.

(*φύω*) de esta manera lo que nos hace desdichados (*λευγαλέος*) desde que (*γάρ*) que la disputa, la rivalidad y la lucha (*ἔρις*) lesiona (*βλάπτω*) sin que se lo note. (*λανθάνω*). Pero, es la concordia (*συμφώνησις*) lo que hay que buscar; aquel estado de armonía y consenso (*σύμφωνος*) que, igualmente, puede crecer (*φύω*) a nuestro lado (*σύμφυτος*). Lo importante es saber qué nos ha de acompañar (*ὀπάζω*) en la vida o physis (*φύσις*), que al igual que una planta o un vástago (*φυτόν*) puede ser plantado para que crezca a nuestro lado (*συμφύω*) trayendo armonía (*ἁρμονία*), que es mucho mejor que aquello que es triste (*λυγρός*) y perjudicial (*βλάβερός*).

60. A la que no hay que provocar, sino cederle el paso y huir de ella.
Instead of provoking and stirring it up, they ought, by yielding, to avoid it.
Ἧν οὐ δεῖ προάγειν, εἴκοντα δέ φεύγειν.

La presente oración dice: en caso que (*ἣν*) no (*οὐ*) sea necesario (*δεῖ*) precederlo (*προάγειν*), apártate (*εἴκοντα*) y (*δέ*) huye (*φεύγειν*). Aparece aquí una condición (*ἐάν*) que manifiesta si (*εἰ*) en el caso que (*ἄν*) no (*οὐ*) se diga o haga aquello que es necesario (*δεῖ*), entonces hay que asegurarse (*δέω*) que sea llevado adelante (*προάγω*). Se nota la condición implícita que indica la fuerza de un evento que ha de ocurrir cuando (*ὅταν*) no (*μή*) se desea (*δεῖ*), y es indispensable observar (*ἄγω*) antes (*πρό*) a fin de persuadirnos (*προάγω*) que es conveniente (*ἔοικα*) escapar a fin de estar seguros (*φεύγω*). Se habla de una potencial confrontación ante la ausencia de algo que nos retiene (*δέω*), y se hace necesario darse cuenta antes a fin de anticiparse (*προάγω*) gracias a los anuncios hechos de antemano (*προαγγέλλω*): podemos predecir lo que va a suceder y es conveniente prevenir (*προαγορεύω*), retirarnos (*εἴκω*) y (*δέ*) dejar que escapen (*φεύγω*). Es indispensable la moderación y la prudencia propia de la sofrosine (*σωφροσύνη*), que sugiere que nos debemos de sacudir (*λύω*) cuando aún no (*μή*) estamos atados o comprometidos (*δέω*). Tenemos la libertad de darnos cuenta de lo que va a suceder mucho antes (*πρό*), y esto permite conducirnos (*ἄγω*) apropiadamente a fin de abandonar aquello que no tiene propósito (*εἰκῇ*) en lo que parece (*οἶκα*). La sentencia es clara, retírate cediendo el paso (*εἴκω*) con la finalidad de que puedan huir (*φεύγω*) esas tristesas y dolores (*λυγρός*) que nos hacen infelices (*λευγαλέος*). Por eso se sugiere que debemos escapar sin ser notados (*λανθάνω*) de aquello que es perjudicial (*βλάβερός*); tal es el propósito de los anuncios (*προάγγελσις*); son una invitación a advertir (*προαγορεύω*) lo que nos puede suceder y que es mejor evitarlo. Así, pues, el daño y el perjuicio (*βλάβη*) tienen su propia imagen (*εἰκών*), identificable a fin de poder apartarse (*εἴκω*) y poder escapar (*φεύγω*) a las calamidades o dejar que estas huyan en retirada (*φυγή*) de nuestro lado.

> *61.* *¡Oh padre Zeus! ¡De cuántos males no librarías a los hombres*
> (*Oh! Jupiter, our Father! If Thou would'st deliver men from all the evils that oppress them,*
> *Ζεῦ πάτερ, ἦ πολλῶν κε κακῶν λύσειας ἅπαντας*),

Esta oración comienza con una exhortación: Zeús (*Ζεῦ*), padre (*πάτερ*), soy y digo (*ἦ*) de demasiados (*πολλῶν*) e incluso aquellos (*κε*) males (*κακῶν*), liberanos (*λύσειας*) a todos (*ἅπαντας*). Estamos frente a Zeús (*Ζεύς*), el Padre de los dioses, hijo de Crónos (*Κρόνος*), tema ampliamente tratado por Pitágoras como el tiempo que está en el origen (*ἀρχή*) del universo (*οὐρανός*). En ese sentido, representa la fuerza que origina de la vida y la naturaleza (*φύσις*); es, en consecuencia, nuestro padre (*ἀρχή*) el que ha ordenado los cielos posibilitando la existencia tal como la conocemos. Bajo una forma perfecta (*ἦ*) se manifiesta lo que somos (εἰμί) o hemos dicho (aoristo de ἠμί), dado que Pitágoras (*Πυθαγόρας*) creía en la reencarnación o transmigración[99] del alma, manifiesta que siempre hemos existido y hablado demasiado (*πολύς*). También (*καί*) debemos liberarnos (*λύσις*) de todo (*πᾶς*) lo que ha estado a nuestro lado (*ἁ-* la *alfa copulativum* que indica unión o parecido) en todo aquello (*ἅπας*) que es inservible, injurioso, feo y que nos hace infelices (*κακός*). No hay que olvidar que un posible origen para aquello que es malo (*κακός*), está en el verbo que señala la acción de defecar o el excremento (*κακκάω*), cuya raíz proto indoeuropea es la *caca* (*kakka*). Es notable el enfásis que hace Pitágoras llamando a Zeús,

---

[99] El tema de la transmigración es mencionado por Jámblico de Calcis: Pitágoras tenía la costumbre de efectuar el máximo acercamiento posible, enseñando lo que podría preparnos a fin que aprendiéramos la verdad en otros temas. Por medio de las más claras y seguras indicaciones, él podría recordarles a sus más cercanos allegados su pasada vida vivida por su alma antes que estuviera confinada al cuerpo. Además, tenía la costumbre de recitar unos versos fúnebres homéricos, cantando y con el acompañamiento de la lira. Ver: Complete Pythagoras, Iamblichus, *The Pythagorean Life*, Chapter XIX, page 30.

Padre, separa y libera (*λύω*) de todo (*πᾶς*). Es decir, cuantifica de manera universal la solicitud o ruego; además, la enfatiza al incluir lo que se ha adherido (*α*, alfa copulativa) a esa totalidad (*ἅπας*) que representa todas las cosas existentes (παν). Se reconoce que parece que nos hemos desbordado (*πολύς*) en aquello que se ha pegado a nosotros, solicitándosele la liberación y la disolución (*λύσις*) de tantos males (*κακός*).

62. ¡Si tan solo les hicieras ver a qué demonio obedecen!
(*Show them of what dæmon they make use.*
Εἰ πᾶσιν δείξαις, οἵωι τῶι δαίμονι χρῶνται).

La presente cita inicia con una condición: si (*εἰ*) todo (*πᾶσιν*) se mostrara (*δείξαις*), se supondría (*οἵωι*) que tu (*τῶι*) daimón (*δαίμονι*) nos necesita (*χρῶνται*). Aquí se está frente a las condiciones mediante las cuales somos conducidos (*ἄγω*) en cada una y en todas (*πᾶς*) las cosas (*πρᾶγμα*) que realizamos. Si todo (*εἰ πᾶς*) se mostrara y revelara, nos llevaría a conocer y enseñar (*δείκνυμι*), cómo y de qué manera (*οἵως*) tu (*τῷ*) daimón (*δαίμων*) tanto nos necesita, como también nos permite experimentar (*χράομαι*) nuestra propia existencia (*εἰμί*). Aquella unión con el todo expresada en el parágrafo anterior (*ἅπας*), viene a manifestarse de manera activa en la conducción y guía (*ἀγωγός*), que él establece y que se establece desde Zeús (*Ζεύς*). Así que, todos y cada uno (*πᾶς*) tenemos la posibilidad de hacerlo. Se percibe cómo el término cada uno (*πᾶς*), puede ser escrito en el dialecto aeólico como (*παῖς*); vocablo que también significa niño, cuyo genitivo (*παιδός*) remite a la paideia (*παιδεία*): aquella formación y entrenamiento que se recibe en la niñez pero que perdura a lo largo de la vida, dado que siempre enseña cómo vivir. Por otra parte, hay que resaltar que parte de la raíz etimológica de todo (*πᾶς*), está presente en aquello que nos hace crecer y nos educa, nos disciplina como también nos castiga (*παιδεύω*). Recuérdese que el pedagogo (*παιδαγωγός*), originalmente, era ese exclavo o siervo que acompañaba tanto de ida como de regreso al niño al lugar de enseñanza; también, pasó a ser el maestro y el guía al cual hay que seguir, debido a que nos conduce, nos mantiene en el camino, nos observa y manda (*ἄγω*), tal como Zeús (*Ζεύς*) es nuestro pedagogo (*παιδαγωγός*), que todo (*πᾶς*) lo observa y conduce (*ἀγωγός*). De esta manera, se explican los ruegos y las súplicas que nos atan (*δέω*) a Él, ya que Él está a lo largo de nuestra existencia a nuestro lado, y de alguna manera está en posesión (*πᾶσις*) de nosotros. La segunda clausura concierne al consecuente de la proposición aseverativa: si (*εἰ*) tal cosa entonces tenemos tal cual otra. La segunda, trae la respuesta: Zeús (*Ζεύς*) está presente en todo (*πᾶς*) y está en unión con todos (*ἅπας*) por medio del daimón (*δαίμων*) que nos muestra (*δείκνυμι*) aquello en lo cual hemos de pensar, creer, desear y temer (*ὀΐω*). Por tal motivo, nuestro daimón (*δαίμων*) nos presenta y pronostica (*οἰωνίζομαι*) de qué manera (*οἵως*) se mostrará (*δεικνύω*) nuestro destino (*μοῖρα*), a la manera de un ave que vuela muy alto que anuncia el porvenir (*οἰωνός*).

El daimonión socrático (*δαιμόνιον*) ya estaba muy presente y había sido trabajado con esmero en Pitágoras; es más, aun aquello que es de procedencia divina, inescrutable y extraordinaria, el daimonios (*δαιμόνιος*) ya es tratado en Homero[100] (*Ὅμηρος*). Pareciera que el destino (*μοῖρα*) cae y ataca, o suministra las adecuadas respuestas en las que hay que ejercitarse y prepararse (*χράω*). De esta manera, el daimón[101] (*δαίμων*) nos hace conocer (*δείκνυμι*) el uso y el provecho (*χρεία*) que tienen tanto las cosas como los hechos (*πρᾶγμα*). Nos revela que necesitamos y el trato que hemos de dar (*χράομαι*) a los asuntos necesarios (*χρέος*), que han de ser realizados (*πράσσω*) en cumplimiento de nuestra paideia (*παιδεία*). Desde esta perspectiva, subyace la consideración que Zeús (*Ζεύς*) siempre nos está

[100] En la Illíada de Homero, se menciona cómo Atenea observa tus palabras, que siempre va a prestarles oído, concediendo si se le obedece: "*ella luego regresa al Olimpo para estar entre otros dioses*". Se aprecia que el vocablo daimón (*δαίμων*) ha sido traducido y tratado como sinónimo de dios (*Διός*): *ἣ δ' Οὔλυμπον δέ βεβήκει δώματ' ἐς αἰγιόχοιο Διός μετά δαίμονας ἄλλους*, (*Then she went back to Olympus among the other gods [daimones*]). Ver la Illiad, Homer, I.222. Se nota que *Διός*, dios, es el genitivo singular de Zeús.

[101] El daimón socrático se aprecia en el diálogo *El Crátilo* (*Κρατύλος*) de Platón: Sócrates dice: "*Por consiguiente, según mi opinión, lo que define a los démones es esto más que nada; y, como eran sensatos y «sabios» (daērnones), les dio el nombre de démones. Y, desde luego, en nuestra lengua arcaica aparece este mismo nombre. Conque dice bien este poeta, así como cuantos afirman que, cuando fallece un hombre bueno, consigue un gran destino y honra y se convierte en demon en virtud del nombre que le impone su prudencia. Así es, pues, como yo también sostengo que todo hombre que sea bueno es demónico, tanto en vida como muerto, y que recibe justamente el nombre de demon*" (398b). Ver Crátilo, Editorial Gredos. En este contexto, el daimón hace referencia a quien es sabio en el sentido de la sofrosine (*σωφροσύνη*), a su vez en la frase: *δαιμόνιον εἶναι καί ζῶντα καί τελευτήσαντα, καί ὀρθῶς 'δαίμονα' καλεῖσθαι*; *And so I assert that every good man, whether living or dead, is of spiritual nature, and is rightly called a spirit* (398c). El daimón es, así, lo que está vivo (ζῶον) y a la vez permite atravesar (*τελευτέω*) lo que es el propósito de nuestra vida o sea la muerte (*τελευτή*), y es llamado (*καλέω*) recto (*ὀρθός*) lo que es divino o propio del daimonión (*δαίμων*). En esta forma, el daimón conecta la vida con la muerte, acompañándolas. Ver Plato, *Cratylus.*

educando (*παιδεύω*) y guiando (*ἄγω*) por medio del daimón (*δαίμων*) que nos habita. Él siempre de alguna manera nos ve como unos niños (*παῖς*) a los que hay que asistir y guiar en todo (*πᾶς*), persuadiéndonos en lo que pensamos y sentimos (*οἴομαι*), proclamando y ordenando (*χράω*) aquello que hemos de experimentar (*χράομαι*). Todo (*πᾶς,* παν), la realidad como los cielos (*οὐρανός*), es una representación (*δεῖγμα*) establecida por Zeús (*Ζεύς*): es el espectáculo (*δείκηλον*) que nos lleva a creer, pensar y desear (*οἴω, οἴομαι*) quienes somos en lo profundo (*δαίμων*) y en la superficie (*χρώς*). Se aprecia, cómo lo que es necesario (*χράομαι*), está tanto en el color de nuestra piel, en su pigmentación y complexión (*χρῶμα*), como en lo que no es tan visible o palpable por medio de los sentidos (*δαίμων*). Los últimos dos vocablos de esta cita (*δαίμονι χρῶνται*) sugirían en consecuencia, que el daimón (*δαίμων*) se hace presente y se manifiesta en la superficie (*χρώς*) aún en todo aquello que tiene color y textura (*χρῶμα*). El todo (*πᾶς*) que nos subyace brota a la superficie (*χρώς*).

> *63. Pero para tí, ten confianza, porque de una divina raza están hechos los seres humanos,*
> (*But take courage; the race of man is divine,*
> *Ἀλλά σύ θάρσει, ἐπεί θεῖον γένος ἐστί βροτοῖσιν*),

Este fragmento del verso reza: sin embargo (*ἀλλά*), tú (*σύ*) has de tener buen ánimo (*θάρσει*), desde que (*ἐπεί*) es (*ἐστί*) divino (*θεῖον*) el género (*γένος*) de la raza humana (*βροτοῖσιν*). Aquí, la conjunción: excepto (*ἀλλά*), conecta las dos oraciones y sus clausuras como proposiciones completas, y se establecen de manera directa respecto al interlocutor. Aconseja: tú (*σύ*), confía y afronta (*θαρσέω*), desde que (*ἐπεί*) lo que procede de Dios (*θεῖος*) es y existe (εἰμί) en el linaje (*γενναῖος*) mortal humano (*βροτός*). El verso sitúa al individuo frente a lo otro y que lo hace diferente en relación con los demás (*ἄλλος*), a tí (*σύ*) en relación con las penas (*λυγρός*) del destino (*μοῖρα*); anímate (*θαρρύνω*), dado que lo que está sobre (*ἐπί*) indica de manera precisa (*εἰ*) que el origen de la descendencia (*γενεά*) de los seres humanos (*βροτός*) es (*ἐστί*) su pertenecia frente a Dios (*θεῖος*). También se hace presente la confianza y la seguridad (*θάρσησις*) de lo que nos hace diferentes (*ἀλλοῖος*) frente a los demás animales (*ζῷον*); es la tenencia del daimón (*δαίμων*), como ya se indicó, lo que nos relaciona directamente con Zeús (*Ζεύς*), Dios (*θέος*) del cual se engendró (*γεννάω*) el linaje (*γενναῖος*) de sangre (*βρότος*) con aquellos que padecen la muerte (*θάνατος*). Hay que estar llenos de confianza (*θάρσυνος*) en que lo divino[102] (*θεϊκός*), fue lo que hizo que viniéramos a la existencia (*γίγνομαι*) y lo que nos lleva a afirmar de manera inequívoca que nuestro nacimiento y origen (*γένεσις*) es divino (*θεῖος*). Lo otro que nos diferencia (*ἕτερος*), es un nacimiento producido (*γέννησις*) desde lo inmortal y divino (*ἄμβροτος*), lo que no muere (*ἀθάνατος*), cualidad que buscan adquirir algunos héroes (*ἥρωες*) en los mitos (*μῦθος*), narrativas e historias que cuentan el nacimiento (*γέννα*) de los seres humanos mortales (*βροτός*) y su génesis (*γένεσις*) divino (*θεία*). Hay que asumir una actitud aguerrida (*θαρρέω*) que dé confianza y osadía (*θάρρος*), dado que por nuestro origen (*γενεά*) divino (*θεϊκός*) no hemos de temer a morir (*θνῄσκω*). La cita busca darnos ánimo (*θαρρύνω*), puesto que (*ἐπειδή*) somos diferentes (*ἀλλοῖος*) porque existe (εἰμί) el daimón (*δαίμων*) divino (*θεῖος*) en la raza (*γένος*) humana (*βροτός*). La existencia del daimón se convierte en un eslabón necesario que conecta la vida con la muerte; además, facilita la reencarnación en este contexto pitagórico.

> *64.* *Y hay también la sagrada naturaleza que les muestra y les descubre todas las cosas.*
> (*Sacred nature reveals to them the most hidden mysteries.*
> *Οἷς ἱερά προφέρουσα φύσις δείκνυσιν ἕκαστα*).

Esta frase alude a lo (*οἷς*) sagrado (*ἱερά*) que muestra (*προφέρουσα*) su naturaleza (*φύσις*), haciéndola conocer (*δείκνυσιν*) a cada uno (*ἕκαστα*). El vocablo oís (*οἷς*), que significa oveja, el cual, unido al vocablo que sigue *íera* (*ἱερά*), vendría a ser la oveja sagrada. No obstante, en este contexto, se trata del pronombre relativo (*ὅς*) cuya función es

[102] Un tema que es tratado por Jámblico de Calcis: la amistad de los dioses con los hombres puede ser cultivada a través de la piedad y el conocimiento científico. Además, resaltó como todas las cosas están vinculadas con el mundo a través de una relación de amistad mutua, aún los seres irracionales pueden ser contactados si los tratamos con justicia, y por medio de la conexión y asociación física. Para ello es importante lograr pacificarse y conciliarse con el cuerpo físico que es mortal, con sus poderes latentes, que cuando son desenvueltos traen salud, además, el tener una dieta adecuada y una actitud del temperamento, que imite estas sanas condiciones propias de los elementos mundanos. Ver Iamblichus, *The Pithagorean Life*, chapter XXXIII, pág. 117-118. En este contexto pitagórico, la amistad de los dioses hacia los hombres se da dentro de esta afiliación divina, que el daimón brinda tanto en la vida y en la muerte.

introducir en relación al referente anterior una oración subordinada, siendo un sintagma complementante. Quien (*ὅς*), quien, aquel, él, para quien (*οἷς*) está conectado con los dioses, lo sagrado y consagrado (*ἱερός*): aquel que ha realizado sacrificios (*ἱερεύω*) y, en consecuencia, es custodio de lo sagrado; un hieromnemón (*ἱερομνήμων*), presenta y anuncia (*προφέρω*) la naturaleza (*φύσις*). Su tarea es revelarla a fin de enseñarla y mostrarla (*δείκνυμι*) a cada uno (*ἕκαστος*) o a todos (*ἕκαστα*, es un adjetivo en plural neutro en acusativo). También, podría interpretarse que la naturaleza (*φύσις*), ella misma, es como un ser viviente consciente de lo que ella (*ὅς*, *ὅϊς*) es (*ἐστί*), siendo ella sagrada (*ἱερός*) se presenta (*προφέρω*), dándose a conocer (*δείκνυμι*) a cada uno (*ἕκαστα*). En este contexto, también aparecen los hierofantes (*ἱεροφάντης*), aquellas personas que ejercen una función sagrada (*ἱερουργέω*), y parte de su tarea es tanto ofrecer sacrificios como cuidar del santurario (*ἱερόν*). En este sentido, quien está consagrado a lo sagrado (*ἱερεύς*) tiene el don de predecir y anunciar de antemano (*προφράζω*) lo que es producido (*φύω*) por la naturaleza (*φύσις*): aquello que desde antes (*πρό*) respira con fuerza (*φυσάω*), mostrando (*δείκνυμι*) aquello que puede ser visto (*δει*) por cada uno (*ἕκαστος*).

Esta oración está en plena armonía con la naturaleza iniciática de los pitagóricos, quienes veían y estaban enterados (*βλέπω*) que la naturaleza (*φύσις*) es sagrada (*ἱερός*), consagrando (*ἱερόω*) a quienes (*ὅς*) se comunicaban con lo sagrado (*ἱερωσύνη*). La misma naturaleza (*φύσις*) desde antes (*πρό*) lleva y transporta (*φέρω*) aquello que va a ser representado (*δείκνυμι*). Ella crea ejemplos y muestras (*δεῖγμα*) de lo que es necesario (*δεῖ*) para atarnos y sujetarnos (*δέω*) desde lejos (*ἑκάς*) a cada uno y a cada cosa (*τις*): una alusión clara que la la physis (*φύσις*) es aquel origen que como principio (*ἀρχή*) da forma a todo lo que crece (*φύω*), motivo por el cual debe ejercerse esa acción de amar (*δέω*) a cada uno (*ἕκαστος*) de nosotros de manera más fuerte. Este pronombre (*ἕκαστος*) lleva la terminación de la forma superlativa de los adjetivos (-*ιστος*), que resaltan la fuerza que cada uno recibe de ella. Se percibe la naturaleza es generosa (*πρόφρων*) como algo natural (*φυσικός*) a ella, que sopla con fuerza (*φυσιάω*) como dadora y dispensadora de la vida (*φυσίζοος*), trayendo unión a todos los miembros de una comunidad (*φυλή*). La naturaleza (*φύσις*) misma se revela (*δείκνυμι*) como sagrada (*ἱερά*), hecho que lleva a tener que profetizar e interpretar (*προφητεύω*), para lo cual se requiere ser un iniciado (*μυέω*) en sus misterios (*μυστήριον*).

> *65. De todo lo cual, si tomas lo que te pertenece, observarás mis mandamientos, que serán tu remedio,*
> (*If she impart to thee her secrets, thou wilt easily perform all the things which I have ordained thee.*
> *Ὧν εἰ σοί τι μέτεστι, κρατήσεις ὧν σε κελεύω ἐξακέσας*),

La actual cita dice: en consecuencia (*Ὧν*), si (*εἰ*) tú (*σοί*), alguien (*τι*) en medio (*μέτεστι*) estás en confinamiento (*κρατήσεις*), luego (*ὧν*) tú (*σε*) ordenas (*κελεύω*) curarte (*ἐξακέσας*). De nuevo, hay una exhortación: quién (*ὧν*), si (*εἰ*) tú (*σοί*), que eres alguien (τις) que estás en medio de tus posesiones, de lo tuyo, de tu familia, de tus amigos (*μέτειμι*); estando en aislamiento (*κρατήσεις*), en consecuencia, (*ὧν*) tú (*σε*) (de manera directa tal como lo indica el acusativo señalante de un objeto directo) tienes la potestad de poner en movimiento exhortando y exigiendo (*κελεύω*), tu entera cura y mejoría (*ἐξακέομαι*). Así que, bajo el cumplimiento de una condición, si (*εἰ*) habiendo sido (*ὤν*) (presente participio del verbo ser o existir εἰμί), situado en medio (*μέτειμι*) en concordancia con aquello que está en medio de tí mismo (*μετά- ἐστί*), de lo tuyo y de los tuyos (*σός*) goza de alguna manera de ese beneficio implícito sugerido más no nombrado; tienes la oportunidad de estar solo en un tipo de confinamiento autoimpuesto (*κράτηση*), que te permite a tí (*σύ*) expresar el deseo ordenando (*κελεύω*) a fin de curarte por completo (*ἐξακέομαι*). Se nota la importancia del apoyo de los seres más queridos y próximos en el vocablo (*μέτειμι*) que es, en realidad, la unión de la preposición meta (*μετά*) con el verbo ser o existir (εἰμί), o sea (*μετά-εἰμί*), nos sugiere también aquello que nos habita interiormente: debido a que lo que es nuestro (*σός, σή, σόν*), que no solo son nuestros seres queridos y todas nuestras posesiones, sino también lo que es nuestro a nivel interior. Es una exhortación directa al daimón (*δαίμων*), nuestro espíritu protector o la presencia divina dispensadora, que es capaz de establecer un diálogo directo con nosotros mismos. De alguna manera, los pitagóricos conocían el valor de la palabra (*λόγος*), como la que tiene la potestar de exhortar, mandar y ordenar (*κελεύω*) la mejoría completa (*ἐξακέομαι*) de todo lo que nos puede agobiar (*λυγρός*) y nos hace infelices (*λευγαλέος*).

La actual cita se circunscribe muy bien dentro de la tradición pitagórica que, siendo una escuela iniciática que practicaba ciertos misterios (*μυστήριον*) sagrados (*ἱερός*), comprendía el exhortar llamando y ordenando (*καλέω*) a aquello o aquel que nos habita y que está en medio de nosotros (*μέτειμι*). Se ha de tener una confianza amable y la seguridad, que vendrá (*εἶμι*) a tí (*σοί*), siempre y cuando (*εἰ*) lo exhortes y lo instes (*κέλομαι*) a ello. En cualquier caso (*ὦν*), siempre existe (*ἐστί*) junto a (*μετα-*) cada uno de nosotros. De lo que se trata es de dominar y prevalecer (*κρατέω*) sobre nosotros mismos; de estar en posesión de nuestro propio poder a fin de ejercer el autocontrol que lo lleva a uno a volverse su propio maestro (*ἐγκρατής*). Se trata del poder (*κράτος*) que está dentro (*ἐν-*), y que hace necesaria su dominación (*κράτησις*) a fin que nos pueda curar y cuidar (*ἀκέομαι*). Es claro que dentro de esta concepción pitagórica, la sanación o curación (*ἄκεσις*) depende de la palabra[103] (*λόγος*) que se expresa cuando ordenamos (*κελεύω*), siendo ella misma nuestra propia medicina (*ἄκεσμα*). De ahí la importancia de ser puros e integros (*ἀκέραιος*), de ser (*ἐστί*) nuestros propios domandores para así amansarnos (*ἀκεστήρ*). La misma preposición (*ἐκ*, *ἐξ*) nos indica que es un deber promover aquel cambio de condición a fin de que la cura (*ἄκεσις*) llegue. El detentar un poder o dominio (*κράτος*) está en fortalecer y afirmar (*κρατύνω*) nuestro propio control (*ἐγκράτεια*); por consiguiente (*οὖν*), el que seamos fuertes y poderosos (*κρατύς*), está en poder llamar o convocar (*καλήτωρ*) aquello que está a nuestro lado y entre nosotros (*μέτειμι*, *μετά*-εἰμί) para quedar libres y exentos (*ἀκέραστος*) de enfermedades fruto de una debilidad moral (*ἀσθένεια*). Esta es una consecuencia de la falta de fuerza (*ἀσθενής*); aquel que ha perdido la fuerza (*ἀ-σθένο*), el poder (*κράτος*, *σθένος*), es algo que reaulta del interior de nosotros mismos y tiene, también, origen sagrado (*ἱερός*).

[103] Hay que entender esto en el contexto de la palabra cantada de las canciones, asimismo de las sentencias y exhortaciones que se usaban para curar; estas eran acompañadas por algún instrumento musical como la lira. En ese sentido, el canto y la música eran considerados medicina (Ver: Iamblichus cap. XV pág. 18). También la poesía era considerada como un medio que nos conecta con nuestra alma, para tal fin se recitaban versos de Homero y Hesíodo; el baile también era considerado como terapéutico, y se acompañaba con instrumentos musicales (Ver Iamblichus, *The Pythagorean Life*, Cap. XXV pág. 27. The Complete Pythagoras).

66. y librarán tu alma de tales males.

(*And by the healing of thy soul, thou wilt deliver it from all evils, from all afflictions.*

ψυχήν δέ πόνων ἀπό τῶνδε σαώσεις).

Esta declaración menciona el aliento que otorga la vida: y (*δέ*) el alma (*ψυχήν*) en su trabajo (*πόνων*) como resultado de (*ἀπό*) estar presente (*τῶνδε*) una salvadora curación (*σαώσεις*). La cita inicia con la psique (*ψυχή*), que es uno de los términos que los antiguos griegos utilizaron para el alma, asociada y vinculada a aquella alma que es la instancia que posibilita la vida; esta se manifiesta como el aliento de vida o de la propia respiración; asimismom es uno de los lugares donde se fundamentan las emociones, la mente y por ende la voluntad[104]. De manera que, *Psiqué* (*ψυχή*) es un términos muy preciso, dinámico y transformador y viene asociado al soplar y respirar (*ψύχω*); ese soplo que es frío y que enfría. Esto indica que el principio dador de vida es el calor[105]; en la concepción pitagórica (*καῦμα*), no le pertenece al alma (*ψυχή*); más se diría que lo recibe, lo interioriza para luego proyectarlo sea soportando la propia existencia, sea posibilitando la de los demás. Pero el texto se refiere a aquel trabajo (*πόνος*) propio del alma (*ψυχή*) que, de alguna manera, es relizado con esfuerzo y demanda algún tipo de fatiga, algo que se consigue penosamente con trabajo (*πονέω*). Surge entonces la pregunta: ¿Qué busca trabajar el alma en el individuo? La respuesta está al final de la oración en relación con la necesidad de salvar, aliviar, preservar y rescatar (*σῴζω*), sana y salva (*σάος*) a la propia alma o psiqué (*ψυχή*). Un hecho entendible al ser una instancia receptora del principio vital y que, de alguna manera, tiene la responsabilidad de ponerse en movimiento originando y soportando la vida.

[104] Entre los distintos significados de *Psiqué* (*ψυχή*), están: 1. La vida en el sentido de estar vivo. 2. En un sentido poético representa el aliento de vida y la corriente de la sangre. 3. El alma como el componente inmortal e inmaterial de un individuo humano. 4. El espectro de una persona muerta. 5. La mente como el asiento del pensamiento y la facultad de la razón. 6. El espíritu. 7. El ser consciente o personalidad como centro de las emociones, los deseos y las afecciones. 8. El ser moral e intelectual. 9. La mente consciente de la inocencia. 10. Lo que gobierna a los animales y a las cosas inanimadas. 11. La substancia primera, origen de la vida y la conciencia. 12. El espíritu del universo. 13. El principio inmaterial de movimiento y de vida. 14. La Phyche en la alegoría de la Psyche y el Eros. Etimología tomada de: *ψυχή* en Liddell & Scott (1940) *A Greek–English Lexicon*.

[105] El calor como el principio que da origen a la vida junto a una teoría cosmológica es mencionado por Pitágoras. Ver *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book 8 Pythagoras, number 28.*

De la actividad de respirar que otorga y es manifestación de la presencia de la vida (*πνέω*), proviene ese *pneuma* (*πνεῦμα*) o vientecito perceptible como la manifestación de la presencia en ejercicio del alma; el individuo está habitado por ella como sinónimo de una vida en ejercicio. Ese soplo es fresco y frío (*ψῦχος*), vocablo al que se le asocia el invierno; una vez más, se advierte que la psiqué es receptora y, en ese sentido, tiene que ser salvaguardada de aquello que puede poner en peligro tanto su existencia como su adecudado funcionamiento. Ello viene ilustrado por aquel frío que puede causar esterilidad, pues si hiela, hace a la psiqué insensible e inútil (*ψυχρός*) y no la deja en un balance proporcionado o armónico. Cuando la psiqué (*ψυχή*) está inmersa en una insensibilidad e indiferencia (*ψυχρότης*) hay que rescatarla de tal estado, motivo por el cual se utiliza la preposición *ápó* (*ἀπό*) que, además de gobernar el caso genitivo asociado a tal estado en que se encuentra esa psiqué afligida, debe sacarla del mismo y llevarla lejos (*ἀπό*) de esta situación deplorable. Esta preposición involucra un cambio de estado, algo que se separa de algo previo; no obstante, están los verbos como decapitar (*ἀποκεφαλίζω*) y morir (*ἀποθνῄσκω*) que también la tienen como prefijo; lo cual ilustra muy bien la naturaleza proposicional y por ende transformadora de esta preposición, que trae y soporta un gran cambio entre el antecedente y el consecuente. Un antecedente donde existe un alma afligida (*ψυχήν πόνων*) que debe de ser sanada y salvada (*σαώσεις*) de esta situación (*τῶνδε*), mediante un cambio drástico que involucra una separación y alejamiento completo (*ἀπό*) de aquello que la agobia. También está presente la partícula *dé* (*δέ*) que, además de ser una conjunción, significa una partícula copulativa y que al estar situada en medio de la psiqué (*ψυχή*) y del trabajo (*πόνος*), sugiere que es propio del alma que sea trabajada. Es decir, es de la naturaleza en su origen (*φύσις*) que el alma (*ψυχή*) tenga que ser trabajada (*πονέω*). Esto unido al hecho que también la psiqué (*ψυχή*) significa el ser: como aquel lugar donde se asientan las emociones, el pensamiento y la voluntad, y debe padecer esa acción bajo un duro trabajo (*πόνος*).

En ese sentido, las plegarias ofrecidas (*εὔχομαι*) a Zeús[106] (*Ζεύς*) como nuestro salvador y preservador (*σωτήρ*), se refieren a salvar (*σῴζω*) el alma o psiqué (*ψυχή*). También en estas expresiones se pueden encontrar las palabras para cuerpo o soma (*σῶμα*), el vivir (*ζῶ*) y la vida (*ζωή*), tanto del cuerpo como del alma. De esa manera, la acción de salvar, librar del peligro y conservar (*σῴζω*) conlleva una asignación veritativa que involucra un juicio de valor que es claro, verdadero, manifiesto (*σαφής*), lo que conduce a la infabilidad de estar sano y salvo de manera incólumne y en su integridad (*σῶς*). Además, este señalamiento es personal, aquí y ahora (*ὅδε*), en este preciso momento, para él (*ὁ*) o ella (*ἡ*), que esté encaminada en esa dirección (-*δε*), ya previamente sugerida por la preposición ápó (*ἀπό*) en esto que está aquí y ahora (*οὗτος*). De modo claro y manifiesto (*σαφῶς*), se logrará preservar la psiqué (*ψυχή*), siempre y cuando uno busque salvarla y aliviarla (*σῴζω*) de aquello que la puede agobiar.

67. Abstiénete en los alimentos como dijimos, sea para las purificaciones, sea para la liberación del alma,

(*But abstain thou from the meats, which we have forbidden in the purifications and in the deliverance of the soul;*

ἀλλ' εἴργου βρωτῶν ὧν εἴπομεν ἔν τε καθαρμοῖς ἔν τε λύσει ψυχῆς).

En esta sentencia o máxima se aconseja: sin embargo (*ἀλλά*), apártate (*εἴργου*) de los comestibles (*βρωτῶν*), que por consiguiente (*ὧν*), se dicen (*εἴπομεν*) que (*ἔν*) también (*τε*) limpian (*καθαρμοῖς*) y que (ἔν) también (*τε*) liberan (*λύσει*) al alma o psiqué (*ψυχῆς*). El comenzar con la conjunción (*ἀλλά*), hace de esta oración una continuación de la exposición anterior; sin embargo (*ἀλλά*), estamos aprisionados, encerrados y apartados, fruto de esos impedimentos y obstáculos (*εἴργω*) relacionados con los alimentos (*βρῶσις*). Importa saber que los pitagóricos eran vegetarianos[107], le concedían una gran importancia al tipo de

[106] Es notable cómo al comienzo de estas plegarias dirigidas con el nombre propio Zeus, padre (*Ζεῦ πάτερ*), mencionado en el numeral 61, se reconoce nuestra afiliación divina como hijos de Dios. En esta reflexión se comprende, que tan solo por medio de *Ζεύς*, se entiende y adquiere sentido la vida humana.

[107] Jámblico de Calcis menciona cómo la comida era utilizada por los pitagóricos como un instrumento que contribuía a su desarrollo interior; estaba prohibido todo alimento que causara indigestión o flatulencia. Se

comida que consumían y la hacían parte de su desarrollo integral. No en vano el vocablo utilizado para comida (*βρῶσις*) también tiene un segundo significado, aquel propio de la acción de erosionar: el herrumbe que pueden sufrir algunos sitios y objetos. Esto nos lleva a la similitud con *brôma* (*βρῶμα*), que significa aquel gusano que habita en los barcos taladrando la madera para devorarla; simultáneamente, también significa lo que es comido y la comida. Por tal motivo, lo que apesta y es hediondo, es *brômos* (*βρῶμος*); vocablos muy cercanos a lo que es comer (*βιβρώσκω*). Se puede concluir que la comida es algo que eleva o algo que causa cautiverio (*εἴρερος*). Este hecho se ve fortalecido por verbos como (*ἀναβιβρώσκω*), que también significa comer; con todo, tenemos la preposición y el adverbio (*ἀνά*), que es: arriba o lo que está por encima de uno y sugiere que la comida de alguna manera lo eleva a uno o lo hunde. De igual manera, su sustantivo es (*ἀνάβρωσις*) que también significa corrosión o erosión, y da a entender que la digestión o asimilación de la comida purifica o va carcomiendo el organismo desde adentro.

En consecuencia, no todo alimento (*βρώμη*) es comestible (*βρώσιμος*). Luego (*ὧν*) como una consecuencia de tipo implicativo, lo dicho (*εἶπον*), lo anunciado y lo ordenado sirve para mirar (*ὁράω*), poniéndole mucha atención a quienes seguimos o acompañamos (*ἕπομαι*). Los pitagóricos, como bien se sabe, fue una escuela y colectividad iniciática en la que siempre se promovía una actitud crítica acerca del *hēgemón* (*ἡγεμών*), aquel líder que va primero, que precede a los demás a fin de guiarlos (*ἡγέομαι*), al que había que imitar, en especial, cuando está entre nosotros (*ἐν*). También (*τε*), se indaga en la escuela de qué clase son estos alimentos y cuáles (*οἷός*) nos van a llevar a tener la disposición y la capacidad (*τ' εἰμί*) para limpiarnos y purgarnos (*καθαίρω*). Esto conduce a apreciar el elemento central de la actual oración: la catarsis (*κάθαρσις*), que nos va a permitir recibir esta purificación y limpieza (*καθαρμός*) a nivel físico, emocional, mental y, en fin, espiritual. Este aspecto está muy cerca de los sacrificios realizados dentro de estos ritos expiatorios que brindan la

---

recomendaba alimentos que preservaran la salud y que fueran astringentes; en especial, se recomendaba el mijo. Se rechazaba todo tipo de comida que fuera extraña a los dioses o que nos alejara de la comunión con ellos. Los discípulos debían abstenerse de consumir lo que era utilizado para profetizar o para purificar la castidad del alma. Tan solo a aquellos filósofos que habían alcanzado la cima de la contemplación se les prohibía el vino o la comida de animales. Se permitía el consumo de carne a aquellos que no habían logrado una purificación adecuada. De igual manera, se evitaba consumir el corazón y el cerebro por ser la escalera y los sellos de la sabiduría y la vida; de igual manera, estaba prohibido consumir la malva, por ser considerada una planta mensajera de lo celeste con lo terrestre. Ver Iamblichus, *The Pythagorean Life*, (pág. 57).

oportunidad de redimirnos y liberarnos vaciándonos (*λύσις*). Tales ritos desata aquello que nos ata y que ha establecido cautiverio sobre nosotros (*λύω*), liberándonos a fin de rediminirnos (*λύω*). Se aspira a la pureza como resultado de una limpieza (*καθαρότης*) que nos libera, separándonos y alejándonos (*ἀπολύω*) de aquello (*ἀπό*) que nos destruye (*καταλύω*) dado que, en vez de levantarnos, nos lleva hacia abajo (*κατά*), nos debilita y nos origina enfermedades (*παραλύω*) debido (*παρά*) a esas pérdidas de la liberación (*λύσις*) posible. Al final de la oración es revelada la instancia que ha sido liberada (*λύω*), que es nada menos que la psiqué (*ψυχή*), aquel entorno desde el cual se soporta la vida, la respiración y la circulación de la sangre, lugar donde están asentados nuestros pensamientos y emociones. De esa alma, mente y espíritu (*ψυχή*) sopla y respira (*ψύχω*) aquel aliento que nos mantiene con vida (*πνέω*), ese vientecito (*πνεῦμα*) que es sinónimo de la dimensión espiritual propia del ser humano. Una vez más, se resalta la importancia de los comestibles (*βρωτός*), el saber alimentarnos (*τό βρωτόν*) y, a consecuencia de ello (*οὖν*) poder ser nuestros propios guardianes (*οὖρος*), concedores de nuestros cuidados (*ὤρα*) dentro (*ἐνί*) de aquello que nos hace limpios y puros (*καθαρός*). Tal limpieza purificadora (*καθαρίζω*) nos va a permitir liberar (*λύσις*) nuestra psiqué (*ψυχή*). La doble presencia de la preposición y la conjunción "*dentro/entre-y/también*" (*ἔν τε*) antes de la catarsis (*κάθαρσις*) y de la liberación expiatoria y redentora (*λύσις*), podría interpretarse como un 'si y solo si', la doble bicondicional lógica (↔): hay catarsis (*κάθαρσις*) si y solo si hay liberación (*λύσις*).

> *68.* *juzga y reflexiona de todas las cosas y de cada una,*
> (*Make a just distinction of them, and examine all things well.*
> *κρίνων καί φράζευ ἕκαστα*),

Esta breve sentencia separa (*κρίνων*) y (*καί*) da a conocer (*φράζευ*) cada una (*ἕκαστα*) de las cosas. Se afronta el tema de la actividad que permite separar de manera ordenada (*κρίνω*), escogiendo y seleccionando, lo cual es fruto de un discernimiento (*κρίνω*). Hay que recordar que en toda separación está contemplada una distinción entre los juicios (*κρίσις*) que nos van permitir tomar unas decisiones fruto de una elección (*κρίσις*). Es notable la riqueza de los vocablos griegos y su polisemia con los amplios significados a que remiten; por ello, a partir de unas pocas palabras es posible derivar un largo y prolífico texto. El individuo crítico (*κριτικός*) es aquel capaz de juzgar y dicernir (*κρίνω*); vocablo que también se utiliza para la actividad legal del juez o árbitro (*κριτής*) frente a un tribunal. Evoca las decisiones que hay realizar para tener un criterio (*κριτήριον*); igualmente, significa las acciones que se emprenden ante un tribunal donde se ejercita la justicia (*δικαιοσύνη*), la cual se entiende como esa manera de conducirnos correcta, ordenada y civilizadamente (*δίκαιος*). La justicia (*δικαιοσύνη*) es propia de alguien que respeta las costumbres, las leyes y la justicia (*δίκη*) viene asociada a estos juicios (*κρίσις*). Estos pronunciamientos (*κρίνω*) hay que darlos a conocer (*φράζω*) para que sean interpretados, entendidos y comprendidos (*φράζω*). Existe una relación directa en estos procesos donde se está evaluando y juzgando (*κρίνω*) de manera explicativa, con lo que se ha de observar para conocer (*φράζω*). Una vez más, tenemos la relación entre estas dos acciones que se requieren de manera mutua, motivo que lleva a que se utilice el vocablo (*ἕκαστος*) que indica cada una pero, en especial, cada una de los dos (*ἑκάτερος*). Esto conlleva asumir que para juzgar se requiere conocer, es decir: podemos juzgar (*κρίνω*), si y solo si, conocemos (*φράζω*). Ese conocer (*φράζω*) comporta también ese conocer o pensar (*φρονέω*) detrás del cual se halla la phrén (*φρήν*) o la mente donde se asientan las sensaciones físicas, las emociones, el intelecto y la voluntad. Se puede decir que juzgamos (*κρίνω*) apropiadamente si tenemos una mente balanceada, y en tanto seamos prudentes, sensibles y temperados (*σώφρων*). Se tiene también la frónesis (*φρόνησις*) como aquella instancia que recoge a la *phrén* (*φρήν*) en sus niveles más altos, puesto que involucra un tipo de sabiduría donde se actúa con sensatez, con buen juicio y dominio propio. El ser sensato, inteligente y sagaz (*φρόνιμος*), es una exigencia en relación a lo que se demanda en este contexto. La actividad valorativa está muy conectada con una vida capaz de asumir competencias balanceadas frente al exterior, y cómo el individuo se sitúa frente a su propia realidad a fin de poderla conocer y evaluar. De uno y otro lado (*ἑκατέρωθεν*), la acción valorativa es inminentemente práctica (*κρίνω*); hay que equilibrarla con la experiencia, la sagacidad, la cordura y la solidez moral (*φρόνημα*). Cumplido esto, podremos conocer y entender (*φράζω, φρονέω*); quiénes somos, y cómo nos hemos de conducir con respecto a nosotros mismos y a los demás.

69. alzando alto tu mente, que es la mejor de tus guías.

(*Leaving thyself always to be guided and directed by the understanding that comes from above, and that ought to hold the reins.*

ἡνίοχον γνώμην στήσας καθύπερθεν ἀρίστην).

Esta breve sentencia dice que, en la manera en que nos conduzcamos (*ἡνίοχον*), conoceremos (*γνώμην*) lo que hace que estemos en pie (*στήσας*), existiendo (*καθύπερθεν*) como los mejores (*ἀρίστην*). En esta oración hay una profunda reflexión acerca de quienes somos y cómo existimos (*εἰμί*). El planteamiento introduce la problemática acerca de la manera de conducirse y de llevar las riendas (*ἡνιοχέω*) de nuestra propia vida (*ψυχή*). Nuestra existencia se asemeja a la del auriga *(ἡνίοχος*) que busca conducirse a sí mismo (*ἡνιοχεία*), algo solo posible si cada uno toma las riendas (*ἡνίον*) de su propia psiqué (*ψυχή*): vida, respiración y mente. Para poder ser el conductor (*ἡνιοστρόφος*) de la propia vida, hay que conocerse (*γιγνώσκω*). Esto evoca el aforismo: "conócete a tí mismo" (*γνῶθι σεαυτόν*) atribuido, entre otros, al propio Pitágoras. Ese conocimiento (*γνῶσις*) busca que seamos capaces de percibir y de observar con discernimiento nuestra propia existencia. Lo interesante de esta cita es la unión de conocer (*γιγνώσκω*) y aquello que nos permite establecernos a nosotros mismos de manera balanceada (*ἵστημι*). La riqueza de matices de estos verbos es sencillamente enorme: la acción por la cual podemos hacer juicios (*γνωματεύω*) nos permite llegar a conocer y descubrir (*γνωρίζω*) algo a través de sus signos y marcas (*γνῶμα*). Este último vocablo reviste una gran importancia, ya que el lenguaje que hablamos está escrito por medio de unos símbolos (*σύμβολον*); no obstante, estos *gnôma* (*γνῶμα*) involucran unas marcas que son el resultado de un proceso reflexivo, no siendo cualquier trazo, sino aquel que está ordenado en concordancia con ciertas categorías predicativas gramaticales. No en vano, solo se puede conocer algo por medio de sus marcas (*γνώμη*); y esto hace que la inteligencia se ejercite a nivel simbólico y pueda entender algo a través de las señales propias de ese ente que se nos está mostrando.

El conocer (*γιγνώσκω*) es rico en una gran variedad de signos (*γνῶμα*) que nos permiten la construcción de un lenguaje constituido por sentencias (*γνωμολογία*); en ellas encontramos los signos que nos permiten reconocer lo que es susceptible de ser conocido (*γνώρισμα*). La importancia de esto es que estos signos se constituyen como una escritura o como un álgebra formal: el significado etimológico de palabra se encuentra con su representación como signo aritmético o geométrico. Se habla de haber alcanzado el umbral para estar capacitados de conocer (*γνωστικός*), lo cual implica aseverar que existen unas condiciones apropiadas para ser un conocedor (*γνωμονικός*); la facultad de conocer (*ἡ γνωστική*) nos da la opción de poder aprehender algo como cognoscible (*γνώριμος*) o poder modificar nuestra apreciación reconociendo nuestro error (*γνωσιμαχέω*). Tales vocablos nos revelan que en esta gnosis cognitiva (*γνώρισις*) está la posibilidad de formar juicios (*γνωματεύω*), lo cual es inherente a la naturaleza misma de la gnosis[108] (*γνῶσις*). Se advierte aquí el énfasis acerca del conocer como *ginósko* (*γινώσκω*), que involucra una capacitación para llegar a ser buenos conocedores y peritos (*γνωμονικός*). Esto hace que haya que tener un buen nivel de interpretación de los medios por medio de los cuales se puede conocer (*γνώμη*); esas señales y marcas que orientan los juicios, estimulan nuestra mente e inteligencia. Mientras el verbo *ístemi* (*ἵστημι*) está más relacionado con la manera como nos relacionamos tanto con nosotros mismos como con los demás a fin de poder sostenernos en pie y establecernos en un lugar. Por tal motivo, este verbo gobierna toda una amalgama de diferentes formas para acercarse tanto a uno mismo como a los demás. Esto se evidencia por la enorme cantidad de preposiciones que pueden anteceder al verbo ístemi (*ἵστημι*): en (*ἀνά*), desde (*ἐκ*), sobre (*ἐπί*), bajo (*κατά*), de (*παρά*), entre otras. No se debe

[108] El tema de la gnosis pitagórica es tratado por Pierre Beaudry en el artículo: *Pythagorean Spherics: The Missing Link between Egipt and Greece*. En dicho texto, el autor se centra en como Pitágoras aprendió la geometría constructiva de los egipcios y como descubrió la aplicación del principio de la proporción divina, que se expresa como un principio del balance de la justicia social entre los seres humanos. Aspecto tratado por Platón en *La República* (libro V, 449a); como la *agape* (*ἀγάπη*), aquello por lo que se siente gran estima y es amado. En especial, representa lo que es bueno y útil (*ἀγαθός*) para la constitución de la ciudad, haciendo que sea recta para los derechos de sus ciudadanos. Se resaltan los llamados sólidos platónicos, algunos de los cuales se le adjudican al propio Pitágoras. Se cita el *Timeo* de Platón, porque ellos están expresados como la correlación que existe entre las órbitas de la inteligencia en los cielos y las órbitas de nuestra razón. De los egipcios hemos recibido la concepción del hombre a imagen de Dios, que es el origen de la proporcionalidad pitagórica. Se recuerda que los egipcios estuvieron estudiando la proporcionalidad que existe entre los seres tanto en términos de conmensurabilidad e inconmensurabilidad (págs. 48 a 67). En el *Timeo* de Platón se expone el tema del día, la noche y los meses en relación con un proceso de dar vueltas en torno algo circular (*περίοδος*), lo que creó el arte del número (*μεμηχάνηνται μέν ἀριθμόν*); asimismo, la noción del tiempo (*χρόνος*) para comprender la naturaleza del universo (*φύσις*)… que lleva a apreciar las revoluciones de la razón en los cielos (*οὐρανῷ τοῦ νοῦ κατιδόντες περιόδους*). Ver Plato, *Timaeus* (47a, b). Es de resaltar cómo la gnosis (*γνῶσις*) en Pitágoras está medíada por la matemática, en especial, por la aritmética y la geometría que encuentran en el número y en la esfera los arquetipos que pueden expresar lo que es lo mejor y lo más útil (*ἀγαθός*) para todos los que desean su despertar espiritual.

olvidar que la episteme (*ἐφίστημι*) se forma de esta manera, y representa aquello que proviene de arriba y sirve para establecernos. De modo que podemos decir de los dos vocablos iniciales de esta cita: aquella gnosis (*γνῶσις*) que es construida, fruto de una aproximación variada ante aquello que va a permitir situarnos con respecto a nosotros mismos y a nuestro entorno (*γνώμην στήσας*).

Esta oración posee una carga existencial grande; lleva a que los conocedores (*γνώμων*) estén en condiciones de poderse levantar (*ἀνίστημι*), para lo cual han de efectuar una labor de construcción y sanación dentro de ellos mismos a fin que sean capaces de transformarse por completo. Ello concuerda con lo que proviene de arriba (*καθύπερθεν*) y posibilita nuestra existencia (*καθυπάρχω*), exactamente (*καθαπερ*) como los más distinguidos o los más valerosos (*ἀριστεύς*). El propósito de esta cita es precisamente aquel conocimiento (*γνῶσις*) que nos establece (*καθίστημι*) como los mejores (*ἄριστος*) en conducirnos (*ἡνιοχέω*) frente a nuestra propia vida (*ψυχή*). Y el tema central es la supremacía (*ἀριστεία*) sobre nosotros mismos, la cual está medíada por aquella capacidad de conocer (*γιγνώσκω*) aquello que otorga primacía sobre uno mismo (*παρίστημι*). No nos debemos contentar con algo mediocre sino todo lo contrario, hay que recurrir al uso de una forma superlativa de lo mejor (*ἀρίστην*), que gobierna aquello que es conquistado con mérito y valor (*ἀριστίνδην*). Nuestro premio (*ἀριστεῖον*) es ser los mejores (*ἄριστος*). También se debe resaltar que el ser los primeros (*καθύπερθεν*) está dado en relación al éter (*αἰθήρ*), aquel aire (*αέρας*) ligero que habita en la parte superior de la atmósfera y que también es traducido como el cielo o firmamento, aquel lugar donde habitan y moran los dioses. Todo esto está en plena armonía con el origen ígneo y ardiente (*αἴθων*) del cosmos (*οὐρανός*). La vida surge del fuego (*πῦρ*), cuya ignición que tanto ilumina como quema (*αἴθω*) tiene lugar en el éter (*αἰθήρ*)[109]. El ser los mejores en superarnos a nosotros mismos (*ἀριστεύω*) está en concordancia con los designios surgidos en los planos elevados de lo etérico o celeste (*αἰθέριος*).

[109] Diógenes Laercio menciona en relación a Pitágoras, cómo El Sol, La Luna y Las estrellas son dioses; aunque La Luna sea iluminada por El Sol. Tanto los dioses como los hombres se parecen en cuanto requieren del calor para existir y participan del mismo; se considera al calor como la causa de la vida. De igual manera, el calor utiliza al éter para propagarse, el alma se separa del éter y es inmortal. Ver *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book 8 Pythagoras, numerales 27 y 28.*

70. Si descuidas tu cuerpo para volar hasta los libres orbes del éter,

(*And when, after having divested thyself of thy mortal body, thou arrivest at the most pure Æther,*

Ἢν δ' ἀπολείψας σῶμα ἐς αἰθέρ' ἐλεύθερον ἔλθῃς),

Esta oración establece otra condición: si (*ἢν*) en cambio (*δέ*) dejaras (*ἀπολείψας*) el cuerpo (*σῶμα*) dentro (*ἐς*) del éter (*αἰθέρα*) libre (*ἐλεύθερον*) irías (*ἔλθῃς*). Aquí se presenta una conjunción contracta que indica una clausura donde está aconteciendo una acción hipotética; tal como si hubiera sido, o se estuviera realizando algo a lo largo de un buen período de tiempo (*ἢν*). Esta partícula involucra una condición y, por tal motivo, se la vincula al si condicional (*εἰ*) que contiene una exigencia y de alguna manera guarda en su interior una conectiva binaria implicativa: si tenemos tal condición expresada dentro de un antecedente entonces la tendremos como una consecuencia o resultado expresado en el consecuente. En el antecedente se encuentra un verbo bastante significativo por su énfasis: dejar o abandonar o dejar atrás (*ἀπολείπω*), el cual está constituido por el prefijo ápo (*ἀπο*-) que indica algo que se aleja de nosotros, asimismo, algo que se ha roto o separado. Además, este prefijo tiene una connotación explicativa en cuanto también significa: debido a que o por consiguiente; lo cual acomoda muy bien al ‘entonces’ que fuciona como la flecha de la implicación material (→). A su vez, está el verbo leípo (*λείπω*) que significa dejar, abandonar, dejar atrás; esto hace que en *apoleípo* (*ἀπολείπω*) la acción verbal tenga un peso mayor por tener un prefijo que potencializa la acción de este verbo, debida a que es una acción en la que uno se aparta cada vez más, y se la abandona más a cada momento. Luego, tenemos en el consecuente lo que estamos abandonando que no es otra cosa que el cuerpo físico; el soma (*σῶμα*). Es un proceso que busca la liberación (*ἐλεύθερος*) del cuerpo físico (*σῶμα*) a fin de adentrarnos en aquella región elevada dotada de un aire superior o éter (*αἰθήρ*), en la que vamos a encontrar la libertad y la liberación final (*ἐλευθέρωσις*). Se puede expresar la anterior oración como la unión de dos proposiciones materiales: $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow t)$, donde la p y la r son antecedentes en sus respectivas proposiciones, no obstante, a nivel del conjunto $(p \rightarrow q)$, representa el antecedente de toda la expresión. Entonces: si (*εἰ*) abandonamos (*ἀπολείπω*) el cuerpo físico (*σῶμα*) luego, la llegada (*ἦλθον*) al éter (*αἰθήρ*), nos traerá la libertad (*ἐλευθερία*).

La oración nos presenta un futuro en el que se estaría realizando una acción cuya ejecución es alargada (*ἐάν*), y tanto (*ḗn, ἢν*) como (*án, ἄν*) representan unas formas alternativas de una acción reiterativa que, por consiguiente, tiene que ser buscada de manera repetida y donde de algún modo no hay que rendirse sino hay que perseverar durante un buen tiempo. Tal situación se circunscribiría dentro de unos tiempos verbales en los cuales la acción se ve alargada: hubieras sido (pluscuanperfecto del subjuntivo) o habrías sido (pluscuanperfecto) o fuere (futuro subjuntivo), entre otros. Este hecho se ve incrementado por la presencia de la partícula (*δέ*), que acentúa la fuerza proposicional de aquello que se está buscando lograr. Este tipo de liberación (*ἐλευθερία*) del cuerpo físico (*σῶμα*) tan solo es posible si nos abandonamos (*λείπω*) en el éter (*αἰθήρ*), como si el éter siendo aquel medio que transmite tanto la luz (*φῶς*) como el calor (*καῦμα*), nos permitiera liberarnos del cuerpo físico (*σῶμα*) a fin de entrar en otro estadio de realización espiritual. Se logra ese estado en el que cesa todo tipo de sufrimiento o limitación propia de la vida somática. Aquí hay toda una invitación a pensar en las prácticas que debieron tener los pitagóricos, destinadas a liberarse (*ἐλεύθερόω*) del cuerpo físico (*σῶμα*) dejándolo atrás (*λείψανον*). Sin embargo, aunque resulte paradójico, para ello hay que ejercitar el cuerpo físico (*σωμασκέω*) con la gimnasia, la cual hay que realizar desnudos (*γυμνός*) de aquello que nos aflige (*λυγρός*) y se logra, entre otros, al ejercitar el cuerpo físico (*γυμνάζω*). Este abandono (*ἀπολείψις*) involucra dejar atrás y lejos (*ἀπό*) lo corpóreo (*σωματοειδής*) para adentrarse dentro (εἰς) de ese aire (*ἀήρ*)[110] capaz tanto de quemar como de iluminar (*αἴθω*). Así que, el ser humano habita algo más que el cuerpo físico (*σῶμα*), el cual es algo pesado dado que la venida o advenimiento del eleusis (*ἔλευσις*) tiene lugar en el éter (*αἰθήρ*). Esta

[110] Es interesante apreciar cómo se manifiesta: *[32] Todo el aire está lleno del almas que son llamadas genios y héroes*, (*[32] εἶναί τε πάντα τόν ἀέρα ψυχῶν ἔμπλεων: καί ταύτας δαίμονάς τε καί ἥρωας ὀνομάζεσθαι*). Este hecho vuelve a traer la noción del daimón (*δαίμων*), vocablo que para Pitágoras tenía un enorme valor y se lo ha traducido como: alma, espíritu guardián, deidad, poder divino, y también como, demonio, dentro de una interpretación más reciente de tipo eclesiástico. En este contexto, también está la psique (*ψυχή*): la vida, el aliento que otorga vida, el alma, el espíritu. Es aquello que otorga el alma (*ψυχόω*), en medio de un ambiente que está lleno (*ἔμπλεος*) de estos espíritus aéreos (*ἀέρα ψυχῶν*); donde todos son daímones y héroes (*ἥρως*). Aquí se afirma que la vida se origina en este éter o aire ligero, que palpita de vida, aquella manifestada por los daimones o los héroes en un sentido mitológico. Ver *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book 8 Pythagoras.*

condición de estar libres (*ἐλεύθερος*) es también el resultado de la piedad y compasión (*ἔλεος*) de la deidad (*θεός*); tal es el motivo de los ruegos y los lamentos (*ἐλελεῦ*) cuando estamos pidiendo y buscando esta libertad (*ἐλευθερία*). Ese proceso de liberación (*ἐλευθέρωσις*) es algo que llega y viene (*ἔρχομαι*) de una manera amable (*εἶμι*), como si vieniera o fuera (*ἦλθον*) anunciado por el propio destino (*μοῖρα*).

71. Serás un dios inmortal, incorruptible, ya no sujeto a la muerte.
(*Thou shalt be a God, immortal, incorruptible, and Death shall have no more dominion over thee.*
ἔσσεαι ἀθάνατος, θεός ἄμβροτος, οὐκέτι θνητός).

Finalmente, esta última oración manifiesta: serás (*ἔσσεαι*) inmortal (*ἀθάνατος*), un dios (*θεός*) incorruptible (*ἄμβροτος*), nunca más (*οὐκέτι*) mortal (*θνητός*). Se está frente a la conclusión de todos los anteriores parágrafos, y la cita comienza evocando al verbo ser y existir (*εἰμί*), bajo cuya forma futura se presenta aquello incapaz de morir (*ἀθάνατος*). Es el hecho mismo de la muerte (*θάνατος*) y cómo nos podemos alejar de ella. Se trata de la búsqueda de la inmortalidad (*ἀθανασία*), la manera de hacerse uno inmortal (*ἀθανατίζω*), y cuya respuesta está en la segunda proposición: asemejarse a la divinidad (*θεός*) para ser inmortal (*ἄμβροτος*). En este último vocablo está el secreto de cómo vencer a la muerte que subyace en la denominada ambrosía[111] (*ἀμβροσία*). Esta es elixir de vida, medicina, ungüento que los dioses usan para mantener su condición imperecedera e insepulta (*ἄθαπτος*). Al final se utiliza una forma adverbial que busca resaltar: ya no más (*οὐκέτι*), no (*οὐκ*) y, todavía (*ἔτι*); así, resalta que nunca más se retornará a morir (*θνῄσκω*). Propiamente, nunca más (*μηκέτι*) volveremos a ser mortales (*θνητός*). Existe un diálogo interior que diría: la condición de ser inferiores (*ἔσσυμεαι*) solamente será vencida (*ἡσσάομαι*), si (*εἰ*) logramos echar (*σεύω*) la muerte (*θάνατος*). El vencer (*ἡσσάω*) nos permitirá no seguir siendo inferiores y estar dominados por las enfermedades (*ἥσσων*), esto

[111] La ambrosía (*ἀμβροσία*), que proviene de *ἄμβροτος*: inmortal, divino, que pertenece a los dioses; es fruto de la unión entre la alfa privativa *ἀ-* y *βροτός*, mortal o el ser humano. La ambrosía era un elixir que otorgaba la vida eterna, es mencionada en *La Odisea* de Homero: *las palomas tímidas que trajeron la ambrosía al padre Zeus (the timorous doves that bear ambrosia to father Zeus, ταί τ' ἀμβροσίην Διί πατρί φέρουσιν,* Homer, *Odyssey,* book XII, line 62). Así, los pitagóricos buscaban el elixir de la eterna juventud, algo que es propio de las escuelas de los misterios iniciáticos.

nos hará vestir las ropas (*ἕννυμι*) de los que no mueren (*ἄμβροτος*). Se trata de entrar (*δύω*) en el interior (*ἐν*) de lo imperecedero (*ἀθάνατος*), logrando asemejarnos a la naturaleza divina (*θεότης*) siempre y cuando lo ambrosial e inmortal (*ἀμβρόσιος*) como elixir (*ἀμβροσία*) sea tomado. No (οὐ) más (*πω*), de ninguna manera más (*οὔπω*), seremos mortales (*θνητός*): se trata de superar nuestra condición como seres humanos (*βροτός*), en lograr asemejarnos a lo que está arriba (*ἄμ, ἀνά*), en poder aspirar a esa condición inmortal (*ἄμβροτος*). Es algo que está dicho (*πω*, *λέγω*) y ha de ser puesto en orden (*λέγω*). Es aquello frente a lo cual nos hemos de aferrar (*εἴρω*), es nuestra palabra, discurso, y narración (*λόγος*) lo que permite alejarnos de morir (*ἀποθνήσκω*) a fin de habitar en los planos superiores del éter (*αἰθήρ*).

1.2.8. Sinopsis reflexiva concluyente

El contexto central de los *Versos Dorados*[112] (*Χρύσεα Ἔπη*) está constituido por la inmortalidad (*ἀθανασία*) y la referencia a las leyes (*νόμος*) que deben de ser dispensadas (*νέμω*) a fin de alcanzar el estado de unidad (*μονάς*) propio de una realización de tipo espiritual. Pitágoras era muy dado a observar las prácticas sagradas (*θρησκεύω*) mediante las cuales se le rendía culto a los dioses "*θεους σεβου". Su culto y adoración a la divinidad (θρησκεία) se fundamentaba en tener una actitud piadosa* (*θεοσεβής*), soportada en un juramento (*ὅρκος*) que resalta la buena condición moral (*ἀγαθός*). Este camino puede ser recorrido gracias al daimón divino (*δαίμων*) que nos habita, ayudados por el ofrecimiento de sacrificios (*ῥέζων*) a los dioses a fin que su *pneuma* (*πνεῦμα*) nos llegue. El honrar (*τιμάω*) a los padres (*γονεύς*), hace parte de lo que todo observante piadoso (*θρῆσκος*) debe de guardar como parte de la ley (*νόμος*) proveniente del Dios (*θεός*) inmortal (*ἀθάνατος*). Este camino está marcado y conducido por la areté (*ἀρετή*), que busca que seamos los mejores (*ἄριστος*), en concordancia con lo que es amado (φίλος). El propósito (*λέχομαι*)

---

[112] Se dice que la autoría de *Los Versos Dorados* es el propio Pitágoras, y su lectura fue muy popular durante La Antigüedad, La Edad Media y El Renacimiento; sin embargo, se conoce de su existencia desde el siglo III a. C., y no ha podido ser establecida en el siglo V a. C. Uno de los filósofos que estudió de cerca esta obra pitagórica fue el neoplatónico Hierocles de Alejandría (*Ἱεροκλῆς ὁ Ἀλεξανδρεύς*), quien comentó los *Versos Dorados* de Pitágoras en el siglo V en su obra: *Hieroclis in aureum Pythagoreorum carmen commentarius*. Este hecho es referido por Christiane Joost-Gaugier en: *Measuring Haven, Pythagoras and His Influence on Thought and Art in Antiquity and Middle Ages* (pág.16).

central es animarnos en ser los dueños de nuestra propia palabra (*λόγος*), y esto nos lleva a comprender que todo nace de la necesidad (*ἀνάγκης*). Solo podemos sobreponernos a la adversidad propia de la vida si ejercitamos la fuerza (*δύναμις*) que nos instruye acerca de cómo gobernar (*κρατεῖν*) el timo (*θυμός*) y el hipno (*ὕπνος*): las glándulas que regulan nuestro metabolismo, y lugar donde se asientan nuestras emociones, sentimientos y pensamientos; asimismo espacio que soporta el sueño que nos alimenta (*πουλυβότειρα*) y renueva. Para recorrer este camino es necesario ejercitarnos en el dominio de nuestras acciones (*πρᾶξις*), teniendo siempre presente que lo virtuoso y noble (*καλός*) se da en el trabajo (*ἔργον*), que es la instancia que nos lleva a apreciar la justicia como *dikaiosyne* (*δικαιοσύνη*). La conducta moral busca hacer que uno se refrene en alardear (*ἀλογίστως*) y adopte una actitud opuesta, que sea prudente y atemperado en la propia sofrosine (*σωφροσύνη*), que comprende que se ha de estar en concordancia con el destino (*μοῖρα*) y su gran maestro la muerte (*θάνατος*).

I. Es sabio guardar aquella verdad que instruye

Es sabio (*σώφρων*) el que conoce y se guarda de los excesos en las cosas u objetos (*χρῆμα*) que se tienen, dado que muchos de ellos traen (*φέρω*) destrucción (*ὄλεθρος*) y dolor (*ἄλγος*) a los mortales (*βροτος*). Se pone énfasis en un desapego frente a las posesiones materiales, algo propio de quien fundamenta su seguridad en aquel bienestar liberador (*σωτηρία*); para ello, la mente (*phrén, φρήν*) debe de fortalecerse y de esta manera evita verse dividida (*σχίζειν*). Existe una gran preocupación en Pitágoras por el hombre (*ἄνθρωπος*), en especial, por la conducta o ethos (*ἦθος*) que debe cultivar y se fomenta el ser próspero (*ἐσθλοί*) a condición de superar los miedos (*δειλός*). La paz (*εἰρήνη*) exige haber rebasado la hipocresía (*εἰρωνεία*) que conlleva vivir en lo que es falso (*ψευδής*) y propio del caos (*χάος*). Nuestra actitud ante la vida debe propender por ser verdadera y honesta (*ἀληθής*); tal ha de ser nuestra meta (*τέλος*), pues ella misma es perfectiva en todo (*πᾶς*) lo que realicemos (*τελέω*). El saber sostenernos (*ἔχω*) en ello es lo que ha de ser enseñado (*διδάσκω*) y alrededor de lo cual se debe orientar lo que hablemos (*λέγω*): en lo que digamos debemos guardar lo que es verdadero y valioso (*ἀληθινός*), en especial, se ha de evitar la mentira (*ψεῦδος*) dado que incrementa la falsedad (*ψευδής*). La condición de ser mejores (*βελτίων*) está en la moral (*ἀγαθός*). El mejor consejo[113] (*ἀριστόβουλος*) que se puede recibir, es aquel que busca superar los miedos (*δειμα*), dado que arraigan la debilidad (*ἄνομος*). Siempre se ha de tener muy presente en nuestras acciones su reciprocidad con el otro (*ἀλλήλων*), esta es una norma o canón (*κανών*) que está primero (*πρῶτος*). Nuestra victoria (*νίκη*) está dada en ser dueños (*ἀρχός*) de la manera de conducirnos (*ἄρχω*). Se resalta en especial la importancia de la creación o *poiesis* (*ποίησις*), ya que enseña a instruirnos (*διδαχή*) y además aporta una gran utilidad (*χρῆσις*).

II. Siempre se ha de buscar estar limpios y libres

Es indispensable procurarse unos buenos hábitos de vida (*διάξεις*), que permitan saciarse (*τέρπω*) con gran alegría (*τέρψις*). Una preocupación especial en los pitagóricos está en relación con la salud (*υγεία*) del cuerpo físico (*σῶμα) que es reflejo directo* de la justa medida (*μέτρον*) en la bebida (*πότος*) y del pan (*σῖτος*). Nos hemos de liberar (*ἀνίημι*) a fin de poder estar limpios (*καθαίρω*), todo esto para evitar la flojera general (*ἀθυμία*), que es lo contrario a la catarsis (*Κάθαρσις*). Es la tarea de la ética (*ἔθος*) vigilar nuestros buenos hábitos (*δίαιτα*) que modelan nuestro carácter (*ἦθος*). Toda buena costumbre busca una purificación (*κάθαρσις*): ese es el camino que conduce a la inmortalidad (*ἀθανασία*). Algo que nos aleja de tal propósito, es envidiar (*φθονέω*) a los demás; ello se convierte en un impedimento (*ἴσχω*) originado por la ausencia de una adecuada frónesis (*φρόνησις*) que se adquiere si tenemos una mente temperada (*σώφρων*) y capaz de estar en dominio de aquello que se piensa (*φρονέω*). La fuerza (*ἰσχύω*) está en relación con el disfrute de una buena salud y que proviene de una mente (*φρήν*) segura (*σῶς*). El secreto para lograrlo está en no malgastar el tiempo (*καιρός*), dada su facilidad en ser devorado (*δάπτω*). Esto nos lleva a apreciar que nuestros recursos (*δαπάνη*) son limitados y, por tal motivo, no se ha de aceptar las invitaciones (*κλητός*) del ignorante (*ἀδαήμων*). Es necesario ordenar y delimitar (*ὁρίζω*)

[113] Pitágoras fue alguien que mantuvo una actitud ética y moral durante toda su vida; basta recordar las sentencias de Sexto el Pitagórico, ya mencionadas por Orígenes en el siglo III a. C. El sabio y el que desprecia las riquezas deben parecerse a Dios, no hay que rechazar las cosas más pequeñas ya que tendrán consecuencia en nosotros; Dios es una luz incapaz de recibir su opuesto; honra a Dios sobre todas las cosas que pueden gobernarte. Ver *Complete Pythagoras, Selected Sentences,* Sextus the Pythagorean, (p. 156-7).

aquello que lo rodea a uno a fin de evitar lo que nos pueda dañar (*βλάπτω*). Es indispensable fortalecer lo recibido en nuestras primeras enseñanzas (*παιδεύω*), ya que son el fundamento de nuestra paideía (*παιδεία*); esta aporta la medida (*μέτρον*) para estar en posesión (*πᾶσις*) de aquello que nos guía (*ἄγω*) para ser mejores seres humanos[114] (*ἄνθρωπος*). Se ha de tener en cuenta (*λογίζομαι*) la luz que se proyecta a través de nuestro rostro, debido a ella refleja la condición de nuestra forma humana (*ὄμμα*), hecho que nos lleva a apreciar quién está en control (*προσέχω*) de su propia la psiqué (*ψυχή*).

III. Realiza cada labor tres veces diarias

El pitagorismo resalta el valor de estar presentes, sobre todo, en lo que está a nuestro lado acompañádonos (*παρέχω*). Cada persona o situación tiene un propósito claro en el aquí y ahora mismo. En las labores realizadas (*ἔργον*) se recogen los esfuerzos del diario vivir (ἡμέρα) como trabajadores (*ἐργάτης*), siendo el trabajo algo que dignifica y humaniza. Las acciones (*πρᾶξις*) derivadas de esas labores diarias nos ayudan a conducirnos (*ἐπελαύνω*). En consecuencia, la sentencia que gobierna nuestro desempeño diario es: realiza las tareas (*ἔργων*) diarias (*ἡμερεύω*) tres veces (*τρίς*) cada día (*ἕκαστον*). Cada una de las veces en que las estemos realizando surge una nueva inquietud y una pregunta distinta: ¿Qué (*πῆι*) he transgredido (*παρέβην*)? ¿Qué (*τί*) en cambio (*δέ*) he hecho (*ἔρεξα*)? ¿Qué (*τί*) me (*μοι*) ata como necesario (*δέον*) y qué no (*οὐκ*) he podido completar (*ἐτελέσθη*)? Siendo cada actividad un eje de reflexión moral[115] acerca de la manera como uno se conduce y utiliza su propia vida: aquello que se ha ido (*βαίνω*) de mi lado (*παρά*), aquello que he hecho para otros con sacrificio (*ῥέζω*) y aquello que me falta (*δέω*) por completar (*τελέω*). En todo este

[114] Algo que es propio tanto de Pitágoras como de sus discípulos, al igual que una parte de las conclusiones que se vienen planteando, son las sentencias. Tal como se las puede apreciar en Jámblico de Calcis: En la medida que vivamos a través del alma, es virtuoso que vivamos bien; dado que vemos a través de los ojos, tal como vemos bien a través de las virtudes. Es mejor que la virtud esté acompañada de la pobreza; que la riqueza esté acompañada de la violencia, o que la frugalidad esté acompañada con riqueza, o que la verdad esté acompañada con enfermedad. Un templo debe estar adornado con regalos, pero nuestra alma debe estar adornada con discípulos. Los frutos de la tierra aparecen anualmente, los frutos de la filosofía maduran en todas las estaciones. Ver: *From the Protreptics of Iamblichus*, *The Complete Pythagoras* (pág. 160-161).

[115] Este tipo de preguntas está presente en *Pitágoras* por Diógenes Laercio: allí se muestra y revela un Pitágoras muy inclinado a examinar su propia conducta y la manera en que procede, siempre con un sentido crítico y autoconstructivo. Ver: *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book 8 Pythagoras, N. 19.*

contexto está presente el telos (*τέλος*), que recoge aquel propósito de la propia vida que se completa y realiza con perfección.

IV. Nuestro mayor enemigo son nuestros miedos internos

Una vez más, se plantean los obstáculos que impiden alcanzar tan añorada y requerida meta. Estos no son más que nuestros miedos (*δειμός); ellos son* nuestro gran enemigo (*ἐπεξάγω*). Estos están presentes desde la alborada misma de la vida en la arché (*ἀρχή*), lugar desde el cual comienzan (*ἄρχομαι*) a librarse aquellas batallas para expulsarlos (*ἔξωθέω*). Hemos de sacar fuera (*ἐκ*) tales miedos aniquilándolos (*ἐκπράσσω*); y esta es la necesaria condición para estar en posesión (*ἔχω*) de nosotros mismos a fin de poder ser libres (*ἐλεύθερος*). Es bastante curioso que el tener miedo (*δειμαίνω*) sea un vocablo muy cercano al daimón (*δαίμων*), esto evidencia una vez más que las grandes batallas las habremos de librar en nuestro interior. Hay que buscar incrementar la presencia de la divinidad que nos habita y aconseja desde dentro de nuestra propia psiqué (*ψυχή*). La malo, lo injurioso, lo dañino y lo inútil (*κακός*) proviene de estos miedos terribles (*δεινός*) que inhiben el disfrute completo (*τέρψις*) de lo que es bueno (*εὖ*). En un curioso giro[116] se nos presenta una posición muy particular, la cual es comentada varias veces a lo largo del texto. Se afirma que lo que es necesario (*χρεία*), es lo que nos guía a la bondad y honestidad (*chréstotés*, *χρηστότης*). El gozo pleno (*τέρπω*) de estos placeres (*τέρψις*) es una necesidad (*χρεία*) que se debería (*χρή*) amar (*ἐράω*) con pasión como lo hace un gran amante (*ἐραστής*). A su vez: "*La amistad siempre debe de estar acompañada de la fe, nunca debe de verse afectada por la falta de fortuna u otras vicisitudes propias de la vida*" (ob.cit. p.55). Notamos un Pitágoras muy interesado en cobijar todos los aspectos de la vida diaria a través de máximas y sentencias fáciles de comprender y de utilidad práctica inmediata.

---

[116] Jámblico de Calcis presenta las posiciones pitagóricas en una serie de preguntas con unas respuestas muy cortas: ¿Qué es la cosa más justa? El ofrecer sacrificios. ¿Qué es la más sabia? El número. ¿Qué es la más sabia que hay entre nosotros? La medicina. ¿Qué es la más bella? La armonía. ¿Qué es la más poderosa? Una decisión mental. ¿Qué es la más excelente? La felicidad. Ver Iamblichus, *The Pythagorean Life*, chapter XVIII (pág. 43-44).

V. La excelencia moral da forma a la psiqué asistida por el daimón

El camino que hay que seguir es el de la excelencia moral (*ἀρετή*) que rodea lo sagrado (*ἔνθεος*) tan presente en la naturaleza del alma o psiqué (*ψυχή*), como la responsable de nuestra respiración y aliento de vida (*ψύχω*). Una vez más, se nos presenta Pitágoras (*Πυθαγόρας*) como aquel filósofo y matemático que concebía la filosofía (*φιλοσοφία*) como el camino (*ὁδός*) virtuoso propio de la areté (*ἀρετή*). En cambio, la matemática, es propia de quien busca dominar las artes del aprendizaje (*μαθηματικός*), que conducen al conocimiento formal (*μάθημα*) de quienes desean aprender (*μανθάνω*) con base en algo indagado con gran pericia y esfuerzo. Uno de los grandes aportes del pitagorismo está en la *Tetraktys* (*τετρακτύς*), que es la representación de una figura triangular de diez números ordenados en cuatro filas que buscar recrear la armonía de las esferas propias del cosmos. Esta representación es enseñable (*παραδοτός*) y sirve (*παραδράω*) para facilitar la realización de nosotros mismos (*αὐτός*). Una de las exigencias del camino místico de los pitagóricos está en ser capaces de gobernarnos (*αὐθεντέω*) por medio de nuestros propios actos (*ἔργον*). Para ello, se debe de contar con la guía del daimón[117] (*δαίμων*) de cada uno: lugar donde la divinidad (*θεός*) se manifiesta a fin de conducirnos a ese estado de completez perfectiva (*τελείωσις*), y siendo la Tetratkys

---

[117] El daimón (*δαίμων*) está muy presente en Platón, y es mencionado especialmente en el *Crátilo*: *Sócrates - Por consiguiente, según mi opinión, lo que define a los démones es esto más que nada; y, como eran sensatos y «sabios» (daērnones), les dio el nombre de démones. Y, desde luego, en nuestra lengua arcaica aparece este mismo nombre. Conque dice bien este poeta, así como cuantos afirman que, cuando fallece un hombre bueno, consigue un gran destino y honra y se convierte en demon en virtud del nombre que le impone su prudencia. Así es, pues, como yo también sostengo que todo hombre que sea bueno es demónico, tanto en vida como muerto, y que recibe justamente el nombre de demon* (*Σωκράτης***:** *τοῦτο τοίνυν παντός μᾶλλον λέγει, ὡς ἐμοί δοκεῖ, τούς δαίμονας: ὅτι φρόνιμοι καί δαήμονες ἦσαν, ‘δαίμονας’ αὐτούς ὠνόμασεν: καί ἔν γε τῇ ἀρχαίᾳ τῇ ἡμετέρᾳ φωνῇ αὐτό συμβαίνει τό ὄνομα. λέγει οὖν καλῶς καί οὗτος καί ἄλλοι ποιηταί πολλοί ὅσοι λέγουσιν ὡς, ἐπειδάν τις ἀγαθὸς ὢν τελευτήσῃ, μεγάλην μοῖραν καί τιμήν ἔχει καί γίγνεται.* 398b). Es de destacar el uso del cuantificador universal todo (*παντός*) al inicio de esta argumentación, donde el verbo que caracteriza al daimón (*δαίμων*) es δαιμονάω, que quiere decir estar bajo el poder de ejercer un dominio en nuestra mente y en nuestros sentidos (*φρόνιμος*), dada la capacidad que tiene de conocer y experimentar (*δαήμων*). El daimón está desde el comienzo (*ἀρχαῖος*), es capaz de producir un sonido (*φωνέω*) por él mismo (*αὐτός*) a fin de ser llamado o nombrado (*ὀνομάζω*). Está unido a lo que es bello (*καλός*), bueno (*ἀγαθός*) y nos acompaña en nuestras realizaciones (*τελευτάω*). Es la parte (*μοῖρα*) que nos permite compartir, dividir y distribuir (*μοιράω*) todo aquello que aspira venir a la existencia (*γίγνομαι*) de manera honorable (*τιμάω*). Es importante tener en cuenta que en Pitágoras el daimón (*δαίμων*) nos acompaña a lo largo que de toda nuestra vida, nos habita y alguna manera puede ser considerado como una presencia de la divinidad en nosotros; siendo uno de sus propósitos más importantes asistirnos en la manera como nos conducimos ante nosotros mismos y ante los demás. La dimensión daimónica vigila nuestra areté (*ἀρετή*) y apoya nuestra alma (*ψυχή*).

(*τετρακτύς*) la representación de ese movimiento perenne (*ἀενάων*) propio de la naturaleza (*φύσις*) y presente en el telos (*τέλος*) que nos inicia (*τελέω*) en la celebración de los misterios (*τελετή*) tan evocados en la *Tetratkys*. El gobernarnos (*κρατέω*) hace parte del ejercicio de ser fuertes (*ἐγκρατής*) en cuanto estamos en posesión de nuestra propia fuerza (*κράτος*). El conocimiento o gnosis (*γνῶσις*) busca que conozcamos (*γιγνώσκω*) los caminos que conducen a la inmortalidad (*ἀθανατίζω*) como lo imperecedero (*ἀθανάτος*).

VI. El conocernos a nosotros mismos es el propósito de la vida

Es necesario completar todo lo que emprendamos (*πᾶς*) en concordancia con el telos (*τέλος*) que muestra que el destino (*μοῖρα*) opera en una doble vía: se ha de atravesar (*διά*) a fin de llegar (*διέρχομαι*) e, igualmente, se ha de salir (*ἔρχομαι*), en una suerte de entradas y salidas que vienen (*ἦλθον*) y van (*εἶμι*). El éxito en esta serie de encuentros y despedidas está en el control interno (*ἐγκρατής*) que debe estar en armonía con el ser interno divino (*δαίμων*). Es básico conocer y percibir (γιγνώσκω) las leyes naturales (*θέμις*), que son las guardas (*οὖρος*) de nuestro conocimiento o gnosis (*γνῶσις*). Pitágoras manifiesta una profunda preocupación por la justicia que, en su forma divina como *Themis* (*Θέμις*), es la encarnación del orden divino en las leyes y las costumbres. Es la naturaleza (*φύσις*) la que administra la justicia (*θέμιστεύω*) de manera similar (*ὁμοίως*). No obstante, las tareas las debemos hacer por nuestro propio sentido del deber[118], ya que es fácil olvidarlo (ληθάνω); ello origina cierto escepticismo donde no hay lugar para la esperanza (*ἄελπτέω*) o las expectativas (*ἐλπτίς*). Se ha tener siempre presente que todo tiene un tiempo de duración y cesa (λήγω) en concordancia con su propósito (*τέλος*). Por tal motivo, se debe buscar aprovechar cada momento de la vida, lo cual se da si uno logra conocerse (*γιγνώσκω*) a sí mismo (*αὐτός*). Tal proyecto es la misión de la vida que debe de ser emprendida y asumida de manera voluntaria (*αυθαίρετος*). Siempre hay que tener presentes nuestros propósitos (*αίρέσεως*), y la tarea de la mente (*φρήν*) es poderlos asir (*αίρέω*). Pitágoras, como gran conocedor del hombre (*ἄνθρωπος*), manifiesta que en la gran mayoría de las situaciones no

---

[118] Hay que destacar cómo Pitágoras, de manera reiterativa, insistía en el cumplimiento con el auto control, en guardar silencio a fin de gobernar la lengua; enseñaba e insitía en el diario cultivo de las virtudes, así como en la búsqueda de un conocimiento verdadero de índole matemático-científico. Temas expuestos en Iamblichus, *The Pythagorean Life*, capítulo XXXI (pág. 99-104).

somos capaces de ver (*ὁράω*) y de oir (*κλύω*) lo que es bueno y moralmente conveniente (*ἀγαθός*). Casi nadie (*οὐδείς*) aprecia las visiones (*ὅρασις*) y las escuchas (*ἀκούω*) de lo que es bueno (*ἀγαθός*) y bello (*καλός*).

VII. Hay que disolver lo que inhibe al alma, pocos lo entienden y lo ven

Lo que no nos deja ni ver (*ὁράω*) ni oir (*κλύω*) debe de ser desatado y disuelto (*λύω*) ya que está inhibiendo al alma (*ψυχή*): pocos (*παῦρος*) lo entienden y se dan cuenta de ello (*συνίημι*). Esta disolución (*λύσις*) tiene como propósito liberanos (*παύω*) de lo que es malo (*κακός*), lo que nos va a permitir estar en posesión (*ἔχω*) de nuestras obras (*ποίημα*), beneficiando la actividad creativa (*ποιέω*) de la poiesis (*ποίησις*). Para lograr todo lo anterior se requiere llegar a un acuerdo (*συνίημι*) a fin de soltarnos (*ἵημι*) de lo que nos ata (*ἁρπάζω*). Nos volvemos a encontrar con el destino (*μοῖρα*), que posee una forma circular (*κύκλος*) que es experimentada de manera ininterrumpida (*ἄπειρος*). Esto hace que el sufrimiento (*πῆμα*) esté siempre presente en ese incesante devenir que en en muchos casos lesiona (βλάφτω) a la *phrén* (*φρήν*), centro de nuestras emociones, los apetitos y pensamientos, debilitando nuestra voluntad e intelecto. Pitágoras ve al destino (*μοῖρα*) como un cilindro (*κύλινδρος*) que carga y la vez repasa (*φέρω*) los caminos por donde transita. La única manera de lograr sobreponerse a su dinámica es tener la moderación y templanza propias de la sofrosine (*σωφροσύνη*) que fomentan el autocontrol equilibrado (*σώφρων*). El cultivo del sabio (*σοφός*) es constante dado que lo que es doloroso (*λυγρός*) siempre está cerca; se trata de *Eris* (*Ἔρις*), la diosa de la discordia y la confusión. Esta siempre siembra (*φύω*) aquello que nos hace desdichados (*λευγαλέος*), promueve la lucha (*ἔρις*) que lesiona (*βλάπτω*) sin que nos percatemos (*λανθάνω*). En consecuencia, es imperioso fomentar la concordia (*συμφώνησις*) como aquel estado de armonía y consenso (*σύμφωνος*). Debemos estar atentosa lo que nos rodea, tener una actitud precavida en observar (*ἄγω*) antes (*πρό*) lo que puede suceder a fin de persuadirnos (*προάγω*) a escapar de los peligros (*φεύγω*). El anticiparnos (*προάγω*) se da en lo que se anuncia con antelación (*προαγγέλλω*); la sentencia pitagórica está dada en prevenir (*προαγορεύω*) y huir (*φεύγω*) de lo que es dañino, para lo cual es preciso habernos liberado (*λύω*) antes de lo que nos ata (*δέω*).

VIII. Zeus se manifiesta y nos habla a través de nuestro daimón

Los pitagóricos se acogieron a las tradiciones de los grandes poetas, sea la de Homero (*Ὅμηρος*) y la de Hesíodo (*Ἡσίοδος*); autores de la Ilíada (*Ἰλιάς*) y la Odisea (*Ὀδύσσεια*), poemas compuestos por 24 cantos, y la Teogonía (*Θεογονία*), obra que relata el origen de los dioses. Lo que podría diferenciar a Pitágoras (*Πυθαγόρας*) frente a sus predecesores es la búsqueda de una metafísica matemática. En ella, Dios (*θεός*) está representado en Zeús (*Ζεύς*), en quien está el origen (*ἀρχή*) de un universo (*οὐρανός*) susceptible de ser traducido a nivel aritmético y geométrico. En los *Versos Dorados* (*Χρύσεα Ἔπη*) es muy notable esa necesidad de establecer un diálogo directo con la divinidad para que nos libere[119] (*λύω*) de todo (*πᾶς*) aquello que nos afligue como lo malo, lo injurioso, lo bajo y lo feo (*κακός*). El aspecto práctico está en conducirnos (*ἄγω*) apropiadamente en todas (*πᾶς*) las cosas (*πρᾶγμα*) que emprendamos. Una categoría muy presente es la del daimón (*δαίμων*), que es apreciada como aquella instancia divina que nos habita y nos permite establecer un diálogo directo desde nuestro interior con la misma divinidad que nos instruye, aportándonos una *paideia* (*παιδεία*) de procedencia sagrada. Lo que procede de Dios (*θεῖος*) existe (εἰμί) en el linaje (*γενναῖος*) mortal humano (*βροτός*), donde Zeús (*Ζεύς*) es el gran pedagogo (*παιδαγωγός*) que observa (*ἄγω*) y conduce (*ἀγωγός*) todo (*πᾶς*, *παῖς*). Hay que destacar que el daimón (*δαίμων*) está individualizado en cada uno de nosotros, y una de sus tantas tareas es pronosticar (*οἰωνίζομαι*) nuestro destino (*μοῖρα*). La realización de las ofrendas (*ἱερόν*) está a cargo del hieromnemón (*ἱερομνήμων*), quien cuida de esa relación directa del hombre con Dios (*θεός*), capaz de curarlo todo (*ἐξακέομαι*) y que manifiesta que el poder (*κράτος*) que nos cura (*ἀκέομαι*) pero que procede de adentro (*ἐξ*, *ἐν*-) de cada uno de nosotros.

---

[119] Esta liberación se entiende que se da en el contexto de varias vidas, y ello pone un especial énfasis en la teoría de la transmigración del alma de Pitágoras. Este tema está expuesto por Diógenes Laercio en el capítulo IV. Ver: *The Complete Pythagoras*, Diogenes Laertius (pág. 73-74).

IX. Somos el auriga que conduce a la psiqué purificándola a fin de liberarla en el éter

Pitágoras manifiesta que el alma o psique (*ψυχή*) debe ser trabajada (*πόνέω*) a fin de salvarla (*σῴζω*), lo cual tan solo se logra mediante un alejamiento completo de lo que la agobia. Un gran impedimento (*εἴργω*) está dado en los alimentos (*βρῶσις*), ya que pueden destruirnos (*καταλύω*), originando enfermedades (*παραλύω*) y evitando nuestra liberación (*λύσις*). Es básico estar limpios (*καθαρός*), para lo cual, hemos de realizar una catarsis (*κάθαρσις*) purificadora (*καθαρίζω*). Ese proceso tiene su arraigo en la posibilidad de juzgar y dicernir (*κρίνω*) aquello que se conoce (*φράζω*) y piensa (*φρονέω*) por medio de la *phrén* (*φρήν*). Nuestra vida se asemeja al auriga *(ἡνίοχος*) que es capaz de conducirse a sí mismo (*ἡνιοχεία*) tomando las riendas (*ἡνίον*) de su propia psiqué (*ψυχή*): vida, respiración y mente. De ahí la importancia de llegarnos a conocer (*γιγνώσκω*) y consolidar ese conocimiento (*γνῶσις*) acerca de uno mismo: "conócete a tí mismo" (*γνῶθι σεαυτόν*); ese conocerse (*γιγνώσκω*) permite levantarnos (*ἵστημι*). El ser mejores (*ἀριστεύω*) día a día está en concordancia con nuestro origen en el plano etérico o celeste (*αἰθέριος*); para ello, debemos liberarnos (*ἐλεύθερος*) del cuerpo físico (*σῶμα*) y así adentrarnos en el éter (*αἰθήρ*) donde encontraremos nuestra liberación final (*ἐλευθέρωσις*). La condición de estar libres (*ἐλεύθερος*) es una consecuencia de la piedad y compasión (*ἔλεος*) de la deidad (*θεός*); tal es el propósito de los ruegos (*ἐλελεῦ*) dado que estamos pidiendo por nuestra propia libertad (*ἐλευθερία*). La gran conclusión de *Los Versos Dorados* (*Χρύσεα Ἔπη*) está en lograr acceder a aquel estadio de los que no mueren (*ἀθάνατος, ἄμβροτος*), se trata de buscar la inmortalidad (*ἀθανασία*), la cual se logra si nos asemejamos a la divinidad (*θεός*). Para ello debemos procurarnos la ambrosía (*ἀμβροσία*) o elixir de la vida para vencer (*ἡσσάω*) las enfermedades (*ἥσσων*), no solo las del soma (*σῶμα*) físico sino las del alma (*ψυχή*), que son un obstáculo para ingresar en los dominios sagrados del *ether*[120] (*αἰθήρ*).

[120] En el numeral 32 de Diógenes Laercio se dice que el aire está lleno de daimones. Se trata de una alusión directa al éter como aquel aire superior donde habitan y se mueven las entidades más elaboradas, y ello concuerda con toda la exposición de la manera como desciende el calor que dará vida a la tierra (numeral 28) y el alma inmortal que habita en el éter. Ver: *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book 8, Pythagoras, (N. 28-32).*

2. LA FUNDAMENTACIÓN FILOSÓFICA DE LAS MATEMÁTICAS EN PITÁGORAS

Mucho se ha podido decir acerca de las matemáticas en Pitágoras, en especial, en torno a la aritmética y la geometría; sin embargo, esta investigación busca realizar una exégesis (*ἐξήγησις*) con base en textos originales escritos en griego clásico. Este hecho trae sus limitaciones dado que no queda ningún documento matemático proveniente de Pitágoras, y tan solo se van a realizar aquellas interpretaciones en torno a algunos de los pocos textos que han llegado a nuestros días. Para ello, se conducirá (*ἐξηγέομαι*) sobre una vía de la cual se extraerá (*ἐκ*-) lo que ha antecedido y así poder recorrer los caminos que permitan gobernar con dominio (*ἡγέομαι*) el tema de este estudio. Da gusto leer el trabajo acerca de Pitágoras del Alberto Campos[121] quien se toma una gran libertad en la interpretación del legado pitagórico. No obstante, no se incluirán muchos de sus comentarios dado que no están respaldados de manera directa en algún texto original en griego. Puesto que la principal motivación de esta investigación está en los terrenos de la filosofía, en especial, de la ontología y la epistemología de las matemáticas, debe decirse de entrada que existe una notable paradoja que las rodea y que versa sobre los entes matemáticos. A diferencia de la filosofía − en que el ente (*ēns*) como el ser o la cosa, fruto de aquel participio presente del verbo ser y existir (*εἰμί*), nombrado como el ente (*ὤν*) y sobre el cual hay complejos y extensos trabajos propios de la ontología – encontrar e identificar en las matemáticas el ente o los entes sobre los que trata esta disciplina no es tan sencillo. En primer lugar, es preciso suministrar una definición axiomática de los mismos; este hecho en apariencia sencillo reviste una enorme dificultad: no existe hasta la fecha una definición apropiada de lo que es el punto o lo que es el número. Con todo, la filosofía no

[121] En *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática* de Alberto Campos (2006), capítulo 2, págs. 71 a 148. Universidad Nacional de Colombia, Departamento de matemáticas.

está obligada a dar una definición estándar de lo que es el ser pues tal hecho iría en contra de su misma naturaleza.

Pero la matemática busca axiomatizarse como disciplina y ciencia, y para ello requiere aportar unas definiciones completas y consistentes que permitan construir una epistemología que se vea reflejada en los distintos teoremas y en todas las demostraciones formales sujetas a una concatenación inferencial lógico deductiva estricta. Pitágoras entendió bien este hecho; sin embargo, su ontología es de carácter metafísico y teosófico, e incluye una aproximación mística y secreta hacia los misterios de su arte. En cuanto a su epistemología, el solo plateamiento del famoso teorema pitagórico en términos formales reviste la presencia de un método y de unos procedimientos de formalización que, si bien no han llegado a nuestros días, no significa que no hayan existido.

2.1. Introducción

Una de las primeras escuelas de que se tenga noticia que se dedicaron tanto a la enseñanza como a la investigación de las matemáticas fue la fundada por Pitágoras de Samos (*Πυθαγόρας ὁ Σάμιος*) en la ciudad de Crotona, al sur de la península itálica en la actual Calabria, alrededor del año 530 a. C. Fue concebida como una fraternidad en la cual eran admitidos tanto hombres como mujeres, aspecto poco usual en una época donde la enseñanza estaba más reservada para los varones. En principio, las personas debían asistir a las charlas que daban los matemáticos *mathēmatikoi* (*μαθηματικοί*) en calidad de oyentes o acusmásticos *akousmatikoi*[122] (*ἀκουσματικοί*), y tan solo después de haber logrado cierto dominio sobre los diversos temas se les permitía participar. Lo notable de la escuela pitagórica es que era una orden que practicaba el secretismo, como también una vida de austeridad para los miembros más devotos.

Algo a tener en cuenta es que el significado de las matemáticas ha variado a lo largo de los siglos. Parece que su inspiración y espíritu inicial se ha perdido en la alborada de

[122] Este tema está tratado por Jámblico de Calcis en: Iamblichus, *The Life of Pythagoras or Pythagoric Life*, traducido del griego por Thomas Taylor (1818). En el capítulo VI menciona, como la gran mayoría de los discípulos de Pitágoras eran *Acusmatici*, su cantidad en algún momento llegó a los dos mil. Llegaban con todos los miembros de sus familias y eran recibidos en el *Homacoion*, que por su tamaño se asemejaba a una ciudad, fundado en un lugar que recibía el nombre de la Magna Grecia. Pág. 13.

aquellos tiempos remotos pertenecientes a la cultura helénica antigua. Cuando se examina la etimología de la matemática se encuentra que proviene del verbo *manthánō* (*μανθάνω*) que significa aprender; en ese sentido, cualquier tipo de aprendizaje debía de utilizar los procedimientos abstractivos universalizadores propios de este tipo de pensamiento. Tal naturaleza hace que esta sea la disciplina idónea para la elaboración de pedagogías aplicables a todas las áreas del saber, hecho que obedece a que estimula todas las facultades que intervienen en la actividad cognoscitiva. La metodología matemática se fundamenta alrededor de unos principios veritativos válidos para la construcción de un conocimiento de naturaleza universal que inicialmente se constituye alrededor de la aritmética y la geometría, teniendo como instancia integradora el álgebra. En su génesis está un tipo de reflexión filosófica multivariada y una serie de consideraciones que hoy día pertenecerían al cálculo, al análisis matemático, a la teoría de números, a la teoría de modelos, a la teoría de las categorías, a la topología y a las distintas álgebras como son el álgebra abstracta y el álgebra homológica. Se pensaba que existía una correspondencia biyectiva entre el modelo recreado matemáticamente con aquella imagen de la realidad real abordada desde una ontología y una fenomenología en el desarrollo de una filosofía muy posterior. La verificación de aquello que es matematizable se daba en la astronomía, la música y la medicina; en ese sentido, hay que entender la armonía de las esferas, los sólidos platónicos y las distintas modelaciones aritméticas como los números pentagonales y el ordenamiento triangular de los números en la *Tetraktys*[123] (*Τετρακτύ*) pitagórica. Un punto de apoyo importante es el triángulo pitagórico al igual que los cinco poliedros regulares que se constituyen en uno de los más importantes epicentros de la reflexión matemática.

Para que algo pueda ser conocido y en consecuencia aprehendido dentro de un orden superior cognoscitivo de naturaleza matemática, implica que debe poder ser sometido a unos procesos numéricos y geométricos que se constituyen como la base sobre la cual se edifica cualquier tipo de metodología y pedagogía universal y verdadera. Estos

[123] Alberto Campos (2006) en su obra: *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática*, vol. 1, lógica y geometría griegas, aborda el número pitagórico como una aritmogeometría. Es a partir de una progresión aritmética cuyo primer término es 1 y cuya razón es 1, que se obtienen los números naturales: 1 =1, 1+1 = 2, 2+1 = 3, 3+1=4. Estos conducen a los números triangulares, representados como la serie: 1 + 2 + 3 …+ n = n(n+1)/2. Este último es un número triangular con n – 1 triángulos gnomónicos. La *Tetraktys* está constituida por los primeros cuatro números triangulares y se le asociaba un significado místico. Pág 77-78.

procedimientos matemático-filosóficos ayudan a darle solidez al pensamiento al evitar la divagación desordenada de la mente reflejada en planteamientos poco defendibles o sustentables. La reflexión vista como un proceso reiterativo adquiere un lugar primordial cuando se ocupa del esclarecimiento de los entes matemáticos, que exigen un constante y reiterativo refinamiento a fin de poderlos aprehender e interpretar dentro de modelaciones formales. La estrategia utilizada se estructura siguiendo un método de tipo inferencial deductivo abierto a un tipo de intuición heurística propia de todo descubrimiento (*εὑρίσκω*, *heurískō*), donde las distintas aseveraciones están concatenadas entre sí a una serie de normas de variado alcance o axiomas sujetos a una jerarquización que los ordena en concordancia con el grado de universalidad de la verdad formal afirmada en los mismos. Esta normativa axiomática opera como nociones primitivas que definen a una teoría y el marco que la recoge, interpreta y aplica. Puede considerarse a Pitágoras[124] como uno de los fundadores de este tipo de reflexión metodológica, científico-filosófico-matemática que es el fundamento de todas las ciencias desde aquellos tiempos remotos y que está muy presente hoy día. Estos presupuestos aseverados universalmente son capaces de garantizar la decibilidad y decidibilidad del sistema como teoría, la cual se propone modelar distintas realidades subsumiéndolas a unos entes formales aritmético-geométricos que la contienen. Alrededor estas se desarrollaron prácticas propias que fueron de enorme utilidad en la búsqueda de la perfección del número áureo y su utilización en la arquitectura; asimismo, el comercio que fue uno de los grandes beneficiados de los adelantos numérico contables.

Cabe resaltar que fue con Pitágoras que la filosofía (*φιλοσοφία*) comenzó a ser entendida como aquella disciplina que busca cultivar el amor a la sabiduría *fílos* (*φίλος*): amor, lo amado y *sofía* (*σοφία*): sabiduría, aprendizaje, prudencia, destreza. Todo esto involucra un estilo de vida propio y su desarrollo está íntimamente unido al de las

[124] Diógenes Laercio menciona en: *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book 8 Pythagoras, translated by R.D. Hicks (1925), como: [*6] Hay quienes insisten, de manera absurda, que Pitágoras no dejo nada escrito. En todos estos eventos, Heráclito, el físico, nos grita a nuestros oídos: "Pitágoras, hijo de Mnesarco, practicó la indagación más lejos que los demás hombres, logró la sabiduría por sus propios medios y por la selección de sus temas escritos; mostró que aprendió mucho, pero que tenía pocas habilidades manuales". Este comentario nos lleva al tratado sobre *La Naturaleza*, cuyas primeras palabras son: "Juro por el aire que respiro, por el agua que bebo, nunca sufriré censura por cuenta de este trabajo". De hecho, Pitágoras escribió tres libros: sobre *La Educación*, Sobre *El Arte de Gobernar*, y sobre *La Naturaleza*. *[46] Pitágoras: quien descubrió los secretos de la filosofía y los enseño, y a quien se le aplicaba la frase, "El maestro dijo" (Ipse dixit), lo cual se convirtió en un proverbio de la vida ordinaria* (ob.cit.).

matemáticas, a tal punto que son inseparables entre sí. El buen filósofo, además de ser un competente matemático es, a la vez, un esmerado músico, un entendido astrónomo, un hábil geómetra y un competente intérprete del funcionamiento de su propio organismo pues está dotado de algunos conocimientos médicos y, de alguna manera, un místico. Todo su saber termina siendo una manera de concebir la religión y de establecer un nuevo diálogo con la divinidad, concebida alrededor de las conclusiones derivadas de la fundamentación de un tipo de aritmética metafísica, donde la noción del número uno representa una de las mayores abstracciones formales a través de la cual es posible interpretar la Divinidad[125] monoteísta, ya que el uno se constituye como único e infinito en sí mismo. En cambio, las demás divinidades griegas de tipo politeísta se estructurarían alrededor de la noción de la díada numérica, y quedan sujetas a las leyes de los números que se constituyen en la normativa que gobierna a todos los entes sin distinción que habitan el universo. En ese sentido, en Pitágoras se aprecia una toma de distancia frente al prolífico mundo mítico helénico que, sin ignorarlo o atacarlo, busca ir más allá del mismo a fin de fundamentar la búsqueda del conocimiento en la ciencia, entendida como una filosofía matemática dotada de un cuerpo autónomo de saberes y prácticas comunes a todo aquello que puede ser aprehendido y conocido.

En aquel período inaugural de la cultura fundamentada en la búsqueda de los orígenes del conocimiento el practicante de las matemáticas vivía como un filósofo, como un buscador místico de la sabiduría que tenía que ejercitarse en variadas disciplinas que hoy día pertenecen a campos muy distintos. Tal desconexión de la unidad del conocimiento en la modernidad involucra la pérdida de esa cosmovisión y estilo de vida que tenían los primeros matemáticos que también eran llamados filósofos. Pitágoras concibió la filosofía como una forma de vida muy unida a la búsqueda integral de la sabiduría, como también al cultivo espiritual de la vida interior y a la excelencia ética de sus practicantes, y propugnaba

[125] Diógenes Laercio menciona en: *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book 8 Pythagoras, translated by R.D. Hicks (1925)* [25] El principio de todas las cosas está en la mónada o la unidad, de esta mónada surge la díada indefinida o el dos que sirve como el substrato material de la mónada, la cual es la causa: de la mónada y de la díada indefinida brotan los números. [33] Lo correcto tiene la fuerza de un juramento, y por eso, Zeus es llamado el Padre de los Juramentos. La virtud es armonía, y también la salud y todo lo bueno y Dios en sí mismo, esta es la razón por lo que dicen que todas las cosas fueron construidas en concordancia con las leyes de la armonía.

el ascetismo y el vegetarianismo por parte de sus miembros más dedicados. Gran parte del estilo y concepción de vida de los pitagóricos está consignado en los llamados *Versos Dorados* (*Χρύσεα Ἔπη*), que es un conjunto de 71 líneas de exhortaciones morales escritas en hexámetro dactílico que es una forma métrica de la poesía griega y latina. Debido a que no quedo ningún documento directo escrito atribuible al propio Pitágoras, hay que comprender que sus enseñanzas y escuela fueron perseguidas y proscritas. Por tal motivo, en el presente capítulo se acometen los comentarios realizados en torno a la temática de las matemáticas por Aristótoles y Diogénes Laercio. El propósito es poder deternerse con cuidado a fin de analizar el material y tratar la etimología de los distintos términos en griego antiguo debido a que los textos tan solo entregan toda su riqueza si se toma tal camino. Son especialmente significativos los comentarios que realizó Aristóteles acerca de Pitágoras en la Metafísica, debido a que son escritos por él mismo otorgándole un valor inestimable.

El propósito central de este capítulo está en afirmar que las matemáticas surgieron a partir de unas reflexiones filosóficas, las cuales están contenidas en una narrativa literaria que es susceptible de verse formalizada en una serie de premisas o proposiciones. Tal hecho lleva a que tales sentencias pueden ser elevadas al grado de unas premisas, sea el caso cuando Pitágoras dice, como se verá más adelante, que: *el número uno es infinito*[126].

---

[126] Se nota cómo el principio de todas las cosas está en la mónada, a su vez en la física (*Φυσικὴ ἀκρόασις*) de Aristóteles se hace mención a la noción de infinito en Pitágoras en varios sitios: *Algunos, como los Pitagóricos y Platón, hacían al infinito el principio en el sentido de la substancia autosubsistente, y no como un mero atributo de otra otra cosa* (*Some, as the Pythagoreans and Plato, make the infinite a principle in the sense of a self-subsistent substance, and not as a mere attribute of some other thing. οἱ μέν, ὥσπερ οἱ Πυθαγόρειοι καὶ Πλάτων, καθ' αὑτό, οὐχ ὡς συμβεβηκός τινι ἑτέρῳ ἀλλ' οὐσίαν αὐτὸ ὂν τὸ ἄπει ρον. 203a, 5-*6). *Solo los Pitagóricos situaban el infinito entre los objetos de los sentidos (no consideraban al número como separado de estos), y aseveraban que lo que está afuera del cielo es infinito* (*Only the Pythagoreans place the infinite among the objects of sense (they do not regard number as separable from these), and assert that what is outside the heaven is infinite. πλὴν οἱ μὲν Πυθαγόρειοι ἐν τοῖς αἰσθητοῖς (οὐ γὰρ χωριστὸν ποιοῦσιν τὸν ἀριθμόν), καὶ εἶναι τὸ ἔξω τοῦ οὐρανοῦ ἄπειρον, 203a, 7-8*). *Además, los Pitagóricos identificaban el infinito con el par. Por esto, ellos decían, cuando es cortado y cerrado por el impar, provee a las cosas con el elemento del infinito. Una indicación de esto es lo que ocurre con los números. Sí los gnomos son situados alrededor del uno, y sin el uno, la figura que resultará en una de las construcciones será siempre diferente, y en la otra siempre resultará la misma* (*If the Further, the Pythagoreans identify the infinite with the even. For this, they say, when it is cut off and shut in by the odd, provides things with the element of infinity. An indication of this is what happens with numbers. If the gnomons are placed round the one, and without the one, in the one construction the figure that results is always different, in the other it is always the same. καὶ οἱ μὲν τὸ ἄπειρον εἶναι τὸ ἄρτιον (τοῦτο γὰρ ἐναπολαμβανόμενον καὶ ὑπὸ τοῦ περιττοῦ περαινόμενον παρέχειν τοῖς οὖσι τὴν ἀπειρίαν· σημεῖον δ' εἶναι τούτου τὸ συμβαῖνον ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν·*

Tal proposición hoy día pertenecería a un metalenguaje formal, cuya jerarquía a nivel de una teoría de tipos lógicos estaría por encima de las representaciones que se hagan de la misma. Esto permitiría construir variadas modelaciones representables en varias teorías formales sin que se agote la formulación inicial. Tal hecho operaría con las demás sentencias de otros grandes filósofos de la antigüedad griega. Tal contacto con el origen de las matemáticas se ha perdido hoy día tanto en los matemáticos y en los filósofos, parte del aporte de esta tesis está en reindivicar el origen de las matemáticas en estas formulaciones escritas en griego antiguo. La única manera de poder despertar toda su capacidad transformadora está en contactar tal momento primigenio instaurado en el lenguaje e inscrito dentro de una narrativa literaria de origen mítico filosófico, la cual busca explicar a su vez la existencia misma de los números, en especial cuando se está en aquel paso que busca otorgarles un símbolo matemátizable o aritmetizable.

2.2 Aproximación al pensamiento pitagórico

Cabe advertir que no ha quedado ningún documento escrito directo atribuible a Pitágoras, dificultad que también tuvieron otros pensadores antiguos ya que los primeros fragmentos acerca de su vida y obra fueron escritos 150 años después de su muerte. Esto hace que sea muy difícil afirmar lo que es de su propia cosecha como la que fue de sus discípulos, unido al hecho de que algunos aspectos de su filosofía provienen de autores anteriores a él. Por tal motivo, se abordará tanto a Pitágoras como sus seguidores directos como los Pitagóricos. Esta estrategia la asumió el propio Aristóteles, que en su insigne obra *La Metafísica* (*Tά μετά τά φυσικά*) libro 1.5 (986a-23 a 986b-18; 987a-13 a 987a-29; 989b-29 a 990b-33) se refiere a ellos de manera plural. Estos textos tienen una gran similitud con los fragmentos de Filolao de Crotona (*Φιλόλαος*) de quien se dice fue su fuente primaria.

περιτιθεμένων γὰρ τῶν γνωμόνων περὶ τὸ ἓν καὶ χωρὶς ὁτὲ μὲν ἄλλο ἀεὶ γίγνεσθαι τὸ εἶδος, ὁτὲ δὲ ἕν, 203a 11-15). Se puede apreciar cómo la noción del infinito rodea los cielos, que a su vez está relacionado con los números pares, que por definición son completos. Sin embargo, se está tratando el infinito anterior a la díada (par e impar, infinito-finito) propio de la mónada primigenia fundamento de toda la existencia. Este es un concepto indefinible, dado que es una unidad que no tiene pluralidad y que se sitúa antes del origen de los números considerados como la unión de los pares e impares, es un infinito no apreciable como una serie matemática.

En torno al Pitágoras histórico se tejieron muchas historias y leyendas; se dice que en su juventud viajó por varios países, que conoció en persona al famoso matemático Tales de Mileto (*Θαλῆς ὁ Μιλήσιος*); se afirma que ambos aprendieron las matemáticas y la geometría de los sacerdotes del antiguo Egipto. Hay que destacar la enseñanza e influencia recibida de otros grandes pensadores presocráticos de los que fue discípulo directo como del poeta épico Creófilo de Samos (*Κρεόφυλος*), del pensador y conocedor de los misterios de Hermes Hermodámas de Samos (*Ἑρμοδάμας*), del bondadoso Bías de Priene (*Βίας ὁ Πριηνεύς*) que fue uno de los siete sabios de Grecia, del filósofo y polimata Anaximandro de Mileto (*Ἀναξίμανδρος*), y del pensador y cosmólogo Ferécides de Siros (*Φερεκύδης*). Se dice que aprendió de los fenicios la aritmética y de los caldeos la astronomía. De lo que sí se puede estar seguro, es que tuvo una excelente educación y que provenía de una familia acaudalada, que fue una persona muy ávida de conocimiento y que tuvo los medios para viajar, investigar y adquirir una formación integral por los distintos países de la región.

Los pitagóricos fueron una de las primeras fraternidades en cultivar las matemáticas (*μάθημα*), entendiéndose que por ello lo que es aprendido con esmero y que involucra un disciplinado esfuerzo a nivel de las facultades cognitivo-sensibles con el propósito de aprehender los elementos esenciales que subyacen a la realidad. Uno de los propósitos básicos era develar los principios que gobiernan a todos los entes, asimismo se promovía el dominio de las técnicas o techné (*τέχνη*) asociadas a las disciplinas que se estudiaban. Esto conlleva la apropiación de ciertas destrezas propias de un artesano capaz de resolver problemas concretos utilizando las herramientas propias de su arte. Para los antiguos griegos el significado de matemática es distinto al actual, dicha disciplina (*πειθαρχία*) versaba sobre aquello que es entregado de manera directa y aprendido oralmente, se desenvolvía dentro de un ambiente que requería una iniciación y una familiaridad con las costumbres y criterios de sus miembros.

La matemática nos muestra una doble naturaleza; por una parte, la tenemos como una episteme (*ἐπιστήμη*), palabra que deriva de epístamai (*ἐπίσταμαι*): vocalbo constituido por la proposición *ἐπί* (*epí*) que indica algo que está arriba, e *ἵστημι* (*hístēmi*) verbo que señala aquello que es establecido, causado, instituido y tejido, como lo establecido desde arriba. La episteme comparte una raíz relacionada con el tejido (*ἱστός*), vocablo que también se aprecia en la raíz de historia, narración o cuento *ἱστορίᾱ* (*historíā*) que proviene de *ἱστορέω* (*historéō*), aquello que es aprendido a través de la investigación e indagación. Ese inquirir que a su vez se relaciona con *hístōr* (*ἵστωρ*): el testigo, espectador, conocedor, sabio y testigo que conoce la ley. Con lo cual la historia sería aquel tejido visto por el conocedor que ha sido su testigo. A su vez, este vocablo se deriva de *οἶδα* (*oîda*) conocer, que está muy relacionado con el verbo ver *εἴδομαι* (*eídomai*); no en vano la teoría *θεωρία* (*theōría*) significa también ver, misión, espectáculo, contemplación; proviene de *θεωρός* (*theōrós*), el espectador o el que está mirando una representación que procede de *theós* (*θεός*) Dios y *ὁράω* (*horáō*) ver: el que ve o contempla a Dios. Se resalta de esta manera el carácter sagrado de quien tiene los oficios de acceder a conocer la naturaleza esencial de las cosas. La segunda naturaleza de la matemática está en aquella disciplina que busca develar la esencia o la *ousía* (*οὐσία*) propia de los entes (*εἶναι*) aprehendida bajo la mediación del número (*ἀριθμός*). Esta etapa tan solo se logra consumar cuando esta doble naturaleza teórica y práctica logra mirarse la una en la otra. El que la recibe es el discípulo (*μαθητής*), que requiere de un tutelaje y de la protección atenta por parte de su mentor, que siempre lo está supervisando y acompañando durante todo su proceso hasta que logra adquirir la fluidez y el dominio propios de este arte y conocimiento sagrado.

La matemática como la entendía el propio Pitágoras versa sobre aquellas destrezas propias del aprendizaje de la aritmética y la geometría, encuentra su origen alrededor de unas formulaciones de carácter metafísico como es aquella que dice que el universo se origina en el uno infinito. Esta oración es una invitación a la construcción de una teoría acerca de la axiomatización de los números enteros positivos; lo curioso es que este uno infinito es previo a la existencia de los números considerados como una secuencia ordenada que se estructura alrededor de la díada. De esta manera, se pueden reconocer dos niveles epistemológicos muy distintos entre sí; es tanta la riqueza que existe en estos sencillos parágrafos, que podría dar lugar a una nueva manera de ver a la aritmética y por ende a la geometría. Parte de la tarea en los capítulos que siguen es detenerse a analizar estos importantes contrastes que se desprenden del texto original en griego.

2.3. El pensamiento pitagórico abordado desde la Metafísica de Aristóteles

La escuela pitagórica ha ejercido una gran influencia histórica en distintas áreas del conocimiento dada su posición fundacional respecto a muchas de ellas; tiene su propia cosmogonía muy en concordancia con otras de su tiempo, y también fueron los primeros en hacer de la filosofía un estilo de vida; se esmeraron en cultivar las matemáticas, la geometría, la aritmética, la música y otros campos del saber. Aunque el pensamiento de Aristóteles (*Ἀριστοτέλης*) posee unos matices distintos, no obstante parece que él mismo no reconoce el gran impacto que tuvo Pitágoras en su obra, menciona a su autor no de manera personal sino como una escuela. Este hecho está refrendado en que el mismo Aristóteles se apoyó en otros autores dado que ya habían pasado dos siglos desde la desaparición de Pitágoras. Parece que Pitágoras era contrario a preocuparse por una memoria escrita en concordancia con las reglas que gobernaban su grupo, la naturaleza secreta e iniciática de sus enseñanzas. También la persecución que sufrió, su consecuente exilio y muerte en Metaponto, la disolución de su escuela y la proscripción de sus enseñanzas pudo haber ayudado a la destrucción de los manuscritos originales que podrían haber existido. No obstante, su influencia no ha parado de sentirse desde aquellos remotos tiempos y lleva a que Aristóteles los mencione en su *Metafísica* (985b-23 a 986b-9) más como una recopilación de una memoria histórica de variados autores. Da la impresión que sus planteamientos son distintos a los abogados por los pitagóricos, pero está más interesado en desarrollar los suyos propios que en llevar más lejos los preconizados por la escuela de Crotona. Con cierta ironía comienza su mención en medio de un ambiente rodeado de cierta bruma y misterio, dado que aún él mismo tropezó con algunas restricciones al carecer de una documentación directa y tuvo que apoyarse en fuentes secundarias.

2.3.1. Presentación del pensamiento pitagórico por Aristóteles

> *"En tiempos de estos, e incluso antes, los llamados pitagóricos, que fueron los primeros en cultivar las matemáticas, no solo hicieron avanzar a éstas, sino que, nutridos de ellas, creyeron que sus primeros principios eran los principios de todos los entes[127]".*
>
> (*At the same time, however, and even earlier the so-called Pythagoreans applied themselves to mathematics, and were the first to develop this science; and through studying it they came to believe that its principles are the principles of everything[128]. Ἐν δέ τούτοις καί πρό τούτων οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἁψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καί ἐντραφέντες ἐν αὐτοῖς τάς τούτων ἀρχάς τῶν ὄντων ἀρχάς ᾠήθησαν εἶναι πάντων*, 985b-23/25)[129].

Para Pitágoras, las matemáticas se utilizaban para pensar los principios u origen (*ἀρχή*) constitutivos de todos los entes (*ὄντων*, genitivo del participio de ser o estar *εἰμί*). En el origen estaban los números (*ἀριθμοί φύσει*), lo que evoca esa preexistencia de los mismos que los llevaría a constituirse como las instancias dinámicas que posibilitan que los entes puedan alcanzar nuevos estados existenciales (*Γίγνομαι*). Es de resaltar que ese cultivo estaba dado por un llamado (*κάλλος*) que contiene en su interior una dimensión sensible que embellece (*τό κάλλος εος*), y que por sus rasgos atrapa o sujeta (*ἅπτω*) al alumno no dejándolo escapar. Tal es la característica de la que se aprende (*μάθημα*) como fundamento de los entes en cuanto es lo que está situado como primero (*πρότερος*), nos impulsa a avanzar (*προάγω*), y es aquello que nos posibilita crecer bajo una crianza que educa (*ἐντρέφω*) nuestro propio ser (*αὐτός*) en relación con lo que está situado desde el origen mismo de aquello que nos gobierna y manda (*ἀρχηγετέω*). De esta manera, la práctica de las matemáticas imprime una formación única; es la disciplina por excelencia desde la cual se constituye el discipulado y es la columna vertebral de todo aprendizaje. La acción misma que conlleva el aprender se fundamenta en las matemáticas porque es lo que

[127] Aristóteles, *Metafísica*, Valentín García Yebra, Editorial Gredos, S. A.
[128] Aristotle, *Metaphysics*, Vols.17, 18, translated by Hugh Tredennick. Cambridge, Harvard University Press.
[129] Aristotle, (Greek Text), *Aristotle's Metaphysics* (*τά μετά τά φυσικά*), ed. W.D. Ross. Oxford: Clarendon Press. 1924.

antecede a todo lo que queramos y necesitamos adquirir para educarnos. Ese andar grato y amable se da de la mano del que instruye (*μαθηματικοί*) a los discípulos (*μαθητής*) que, en este caso, eran los acusmásticos (*ἀκουσματικοί*), ocupados de escuchar con atención. Se establece de esta manera cómo las matemáticas son el fundamento de la misma educación y la disciplina que forma por excelencia; además, es la teoría y la práctica más elevada que posibilitan cultivar el aprendizaje del conocimiento más excelso. Así, es importante destacar cómo en Pitágoras (*ὄντων ἀρχάς ᾠήθησαν εἶναι πάντων*) ya se va introduciendo la noción de un principio (*ἀρχή*) que subyace y precede a todos (*πᾶς*) los entes, tema que evolucionará dentro del planteamiento metafísico de la causalidad. Asimismo, el considerar este *arché* como aquello que establece y determina una normatividad aplicable a todos los entes, motivará la aparición de la predicación universal que dará lugar a las categorías y a las distintas partículas como todo, alguno, ninguno, que ayudarán a fundamentar el silogismo en Aristóteles. Aunque parezca que él no dé suficiente reconocimiento a Pitágoras, sus mismas categorías están inspiradas en los planteamientos desarrollados por este.

En este sentido, el estudio de los números es lo que fundamenta el conocimiento, y no hay nada por encima de este saber primigenio que da origen a la conceptualización de la realidad desde distintas perspectivas. Es claro que en Pitágoras se da una aproximación metafísica de la esencia de la realidad medíada por la naturaleza del número; en este encontramos aquello que es verdadero y, por ende, válido para todos los seres que habitan el universo. Los números se constituyen en el fundamento de la existencia, la ordena y la hace viable; es más, aún todos los entes incluyendo los dioses están subordinados a sus leyes. Es indudable la aproximación estética que se realiza frente al tema de la aritmética, en esto se puede presuponer una facultad cognoscitiva cercana al *calos* (*κἀλλος*) que es la que permite develar lo que fundamenta al universo; en ella se encuentra lo bello con lo bueno que lleva a aseverar su identidad. Es importante también la alta sensibilización que exige el abordaje de tales principios, que no son un mero ejercicio racional o mental sino toda una experiencia interna y profunda que abre al intelecto y le permite contemplar o percibir tal realidad de manera directa.

2.3.2. Los números son los primeros principios

Un tema esencial y profundamente revolucionario que logró trascender por dos mil años, es la visión de Pitágoras que concibió la matemática como el idioma de las ciencias, como aquel conocimiento fundamental que está en la base de todo saber e, igualmente, darle una existencia concreta y real a los números: un universo que ya está aritmetizado; mucho antes que el ser humano existier, los números le dieron forma al cosmos.

> *"Y, puesto que los números son, entre estos principios, los primeros por naturaleza, y en ellos les parecía contemplar muchas semejanzas con lo que es y lo que deviene, más que en el fuego, la tierra y en el agua, puesto que tal afección de los números era la justicia".*
>
> (*And since numbers are by nature first among these principles, and they fancied that they could detect in numbers, to a greater extent than in fire and earth and water, many analogues of what is and comes into being—such and such a property of number being justice. Ἐπεί δέ τούτων οἱ ἀριθμοί φύσει πρῶτοι, ἐν δέ τούτοις ἐδόκουν θεωρεῖν ὁμοιώματα πολλά τοῖς οὖσι καί γιγνομένοις, μᾶλλον ἢ ἐν πυρί καί γῇ καί ὕδατι, ὅτι τό μέν τοιονδί τῶν ἀριθμῶν πάθος δικαιοσύνη [985b26-30]*).

El número (*ἀριθμός*), entonces, es lo que está de primero (*πρότερος*) en la naturaleza o physis (*φύσις*), posee un estatuto existencial primigenio que antecede y fundamenta a todo lo que de ella nace y se nutre (*φύω*), siendo el origen desde el cual la naturaleza procrea. Se asemeja a decir que desde la alborada de los tiempos estaba el número como aquello que permite que emerja la vida misma, siendo potestad de su propia naturaleza ordenar y jerarquizar lo dado. Es la instancia que posibilita la diversificación de los principios constitutivos de los cuales emergerá la teoría de los elementos tratada por distintos pensadores dentro de la tradición helénica. Es de destacar cómo existía una deidad primordial llamada *Physis* apreciable en los himnos órficos[130]. Es a partir de la realidad de

[130] Thomas Taylor, en *Orphic Himns, The Mystical Initiations of Hymns of Orpheus*. University of Pennsylvania Press (1999), manifiesta: "Que los Himnos Órficos siempre han parecido ser uno de los legados más preciosos de la antigüedad. La belleza de sus alegorías cuando son abiertas encantan a todos, en especial, a aquellos que admiran las primeras bases de la poesía, en la personificación" (pág. 21). Hay que resaltar el artículo de E. Theodossiou, A. Dacanalis, M. Dimitrijevic y P. Mantarakis (2008): *The heliocentric system*

los números donde es posible contemplar y teorizar (*θεωρέω*) aquello que es lo semejante (*όμοιος*), lo que permanece sin cambio y que siempre es lo mismo y, por ende, lo más justo. Es propio de la naturaleza de los números el que algo nazca o emerja en un nuevo estado de ser (*γίγνομαι*), los elementos constitutivos como el fuego (*πῦρ*), la tierra (*πῦρ*), el agua (*ὕδωρ*), son el resultado directo de la afección de los números (*ἀριθμός*). Es más, incluso por su actividad íntima despierta aquel *pathos* (*πάθος*) como ese sentimiento apasionado que está inmerso en la misma existencia, llevándonos a experimentarla a fondo y siendo los números los referentes en los que puede verse develada y reflejada. Es a través de los números que es posible contactar la interioridad del ente, y estos son el medio por el cual se puede develar el orden moral que fundamenta las normas que hacen posible el ejercicio de la justicia abordada como la *dikaiosýnē (δικαιοσύνη*).

Un tema que despierta gran asombro es el plantear los números como aquello que está primero; en ese sentido, la existencia se plantea como una realidad ordenada bajo los números; y lo que puede ser recordado y tejido por la historia, se realiza por la acción contadora propia de los números. Es importante señalar que Pitágoras destaca la importancia de lo semejante (*όμοιος*), hecho que hoy día ha ejercido una enorme influencia en todas las matemáticas en aquello conocido como los morfismos. Se reconoce su inestimable influencia en la teoría matemática de las categorías que permite el estudio y conocimiento de los entes matemáticos; en el álgebra abstracta donde los homomorfismos comparten una misma estructura matemática compatible con las mismas operaciones; asimismo, los isomorfismos permiten la existencia del inverso bajo una biyectividad entre dos conjuntos ordenados. En fin, el tema de lo semejante es una de las más grandes estrategias y métodos de estudio para analizar y estudiar las matemáticas, además que permite conectarlas con otras disciplinas afines como son la geometría, la topología, el álgebra, la teoría de conjuntos, el análisis y la teoría de números.

---

from the Orphic Hymns and the Pythagoreans to Emperor Julian. En él se plantea que la teoría heliocéntrica se puede rastrear hasta los Himnos Órficos, a las enseñanaza de Anaximandro y Pitágoras. Aunque haya vuelto a ser refundada por Aristarco de Samos en el siglo III a.C., dicha teoría no prevaleció; esto se debe a que Aristóteles y Tolomeo estuvieron a favor de una teoría geocéntrica. A su vez, el último emperador bizántino, Juliano El Apóstata, sostuvo que la Tierra era un planeta que giraba en torno al Sol (págs. 123-4).

Una vez más, es notable poder abordar la posición pitagórica en torno a la teoría desde la similitud (*θεωρεῖν ὁμοιώματα*), pues se ha visto cómo las estructuras matemáticas son estudíadas desde los morfismos: como homomorfismos, los isomorfismos[131], los automorfismos, los epimorfismos o endomorfismos que permiten analizar la preservación de las estructuras algebraicas que los subyacen. Como conjuntos, se puede apreciar los órdenes a los cuales están sujetos, sea parcial o total u otros. Están también los matices donde se observan sus propiedades fundamentales como la reflexividad, la simetría y la transitividad[132], y las variantes del comportamiento de las funciones sea a nivel biyectivo, inyectivo, u otras, que se dan entre sus dominios y codominios que serán determinantes en la manera como se conformarán las operaciones. Es un hecho que una teoría es más fácil de ser abordada, estudíada y desarrollada desde las similitudes y no desde las diferencias. Es más fácil desde la similitud abordar la diferencia y asta ha sido la estrategia que gobierna la fundamentación de las estructuras matemáticas desde aquellos tiempos remotos. La noción de diferencia en la matemática ha sido más estudíada desde la teoría de conjuntos, siendo su alcance mucho más restringido y limitado. Como se acaba de comentar, tiene un mayor alcance teórico definir algo desde sus semejanzas y luego, desde ellas, establecer las diferencias: la diferencia es un concepto derivado y dependiente de la semejanza y no al revés.

---

[131] Este concepto está expuesto por JohnB. Fraleigh (2003), en *A First Course in Abstract Algebra* (7th Edition), se muestra que una función que preserve dos estructuras algebraicas binarias $\langle S, *\rangle$ y $\langle S', *'\rangle$ se denomina un isomorfismo de S con S', si es una función uno a uno que mapee S sobre S', tal que se cumple que: $\phi(x * y) = \phi(x) *' \phi(y)$ para todo $x, y \in S$, lo que es una propiedad homomórfica. Si tal mapa ϕ existe, luego S y S' son estructuras binarias isomórficas, y denotadas por $S \cong S'$, se omite * y *' de la notación. Se entiende que un morfismo es una estructura que preserva un mapa de una estructura matemática a la otra (pág. 29, 30).

[132] Se dice que tenemos una relación de equivalencia R sobre un conjunto S, si se satisface las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in S$: i. (Reflexiva) xRx, ii. (Simétrica) si xRy entonce se tiene yRx, iii. (transitiva) si xRy, yRz entonces se tiene xRz (ob.cit. pág. 7).

2.3.3. El número es el ente desde el cual se construye la armonía, se originan los elementos y se establecen las afecciones de toda la naturaleza

El número (*ἀριθμός*) es el fundamento de la armonía (*ἁρμονία*); y es, aún más, debido a que es el elemento[133] (*στοιχεῖον*); aquel universal capaz de representar a cualquier ente a nivel predicativo, evoca también aquella fila (*στοῖχος*) en su preeminencia como lo que está primero frente a una serie. Asimismo, es aquel principio elemental y simple, que permite relacionar a todos con todos: es la base sobre la cual se construye nuestro conocimiento.

> *"Y tal otra, el alma y el entendimiento, y otra, el tiempo oportuno, y lo mismo, por decirlo así, cada una de las restantes; y viendo, además, en los números las afecciones y las proporciones de las armonías, puesto que, en efecto, las demás cosas parecían asemejarse a los números en su naturaleza toda, Y los números eran los primeros de toda la naturaleza, pensaron que los elementos de los números eran los elementos de todos los entes, y que todo el cielo era armonía y número."*
>
> (*and such and such soul or mind, another opportunity, and similarly, more or less, with all the rest—and since they saw further that the properties and ratios of the musical scales are based on numbers, and since it seemed clear that all other things have their whole nature modelled upon numbers, and that numbers are the ultimate things in the whole physical universe. Τό δέ τοιονδί ψυχή τε καί νοῦς ἕτερον δέ καιρός καί τῶν ἄλλων ὡς εἰπεῖν ἕκαστον ὁμοίως, ἔτι δέ τῶν ἁρμονιῶν ἐν ἀριθμοῖς ὁρῶντες τά πάθη καί τούς λόγους, ἐπεί δή τά μέν ἄλλα τοῖς ἀριθμοῖς ἐφαίνοντο τήν φύσιν ἀφωμοιῶσθαι πᾶσαν, οἱ δ' ἀριθμοί πάσης τῆς φύσεως πρῶτοι, –[986α] [1] τά τῶν ἀριθμῶν στοιχεῖα τῶν ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλαβον εἶναι, καί τόν ὅλον οὐρανόν ἁρμονίαν εἶναι καί ἀριθμόν:*)

---

[133] Es importante apreciar que en la teoría moderna de conjuntos desarrollada por Georg Cantor, él denomina al elemento *Menge*, que en alemán significa cantidad o multitud. Lo que de alguna manera nos señala un sentido muy distinto a (*στοιχεῖον*). Aunque comparten su afiliación en relación a una serie numérica, se diferencian en cuanto *stoikheîon* señala alguien arbitrario en una fila y, en especial, el primero en un sentido más ordinal. Mientras *die Menge* posee una afiliación más cardinal, en cuanto cantidad. Ver Georg Cantor (1895), *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, (pág. 85). En dicha obra se resalta que *Menge*, traducido al ingles como *aggregate*, mantiene una relación con cualquier colección tratada como una totalidad (*Zusammenfassung zu einem Ganzen*).

La psycho (*ψύχω*), que vendría a ser la psiquis, evoca aquel soplo que entra en el momento del nacimiento instaurando la presencia activa de la vida. De igual manera, cuando alguien muere, es el primer soplo o aliento el que escapa del cuerpo y que indica que el alma ya no está en el mismo. Todo esto es una indicación clara de que para los pitagóricos los números no son ni abstracciones ni creaciones de la mente, sino que son realidades que están situadas en los niveles más altos que trascienden la mundaneidad contingente de la materia o la carne. En ellos, habita el espíritu. Se podría decir que el alma contiene a los números, lo que lleva a considerar la preeminencia del conocimiento de los números como anterior a toda otra forma del mismo. La existencia misma se manifiesta en los números que anteceden y suceden a cualquier tipo de manifestación propia de la vida. En los números, por un lado, se encuentra a la *psyche* y, por el otro, al *nous* (*νοῦς, νόος*), que tiene variadas acepciones como mente, intelecto o inteligencia. Es el espíritu el que contiene la esencia misma que define y diferencia al ser humano frente a los demás seres vivos. Si se fuera a definir dicha propiedad esencial humana como la razón, esta le correspondería al *nous*. En este breve comentario se identifica una epistemología, por cuanto los números son los que, además de contener al conocimiento, lo transportan, y su presencia es sinónimo de verdad, certeza y realidad que no se deja engañar por los sentidos. Si se pretendiera navegar metafóricamente en los océanos del *nous* los encontraríamos habitados por los números, inmersos en sus distintos tipos de asociaciones alrededor de las cuales ellos mismos se agrupan y se dinamizan. De igual manera, se establece que una expresión numérica o aritmética y, por ende, matemática posee la mayor jerarquía en cuanto conocimiento cierto y concreto: los números están por encima de las palabras. Si se quiere conocer algo que esté por fuera del padecimiento de la generación, hay que conocerlo numéricamente. Sea por el uso de *Tε* (por un lado…pero, por el otro) como de *ἕτερος* (el uno…y el otro…) ambos indican una relación entre dos personas o dos cosas, una suerte de complementariedad o de contrarios recíprocos: no hay *psique* sin *nous*. El número hace parte del soplo de la vida que instaura la existencia y las reglas que gobiernan el cosmos por medio de los números.

Por otra parte, está el *kairós* (*καῖρος*) que, además de simbolizar las proporciones, evoca una realidad primordial en el comienzo de la existencia entre *krónos* (*κρόνος*) y *kairós*[134]. Son dos aspectos de la misma realidad primigenia fundamental que evocan la estructura que constituye y da forma al universo, sea como el tiempo y el ritmo de este. Así, se construye una relación entre estas dos instancias que se miran mutuamente, *krónos* también personifica al tiempo dentro de su devenir del cual emerge en algún momento el *kairós*, como aquel tiempo que tiene la potestad de ordenar y organizar la realidad con base en una instancia superior, sea el caso: el devenir temporal ordinario y universal que todo lo cobija. Es decir, a partir del *krónos* se crean unos tiempos especiales que ordenan en proporción y en medida armónica lo dado en relación con lo numérico. Podría pensarse que el *kairós* ordena al *krónos* o el *kairós* le impone la realidad del número estructurado en proporción al *krónos*, ese tiempo primigenio de alguna manera caótico logra superar tal estado de indefinición gracias a la acción organizadora del *kairós*. Sigue un texto que hace alusión a lo otro (*ἄλλων*), que termina por volverse similar (*ὁμοίως*) por la acción ordenadora declarada y hablada por el *kairós*, que transporta al número que tiene potestad de verse dicho como una palabra que enuncia y ordena (*εἶπον*). Se puede decir que *krónos* es el tiempo ilimitado y eterno sin restricciones, mientras *kairós* es el tiempo limitado y ordenado, sujeto a restricciones y fronteras. El paso del *krónos* al *kairós* es posibilitado por los números; son ellos los que organizan el universo habitado por seres diversificados. Es en el *kairós* donde el tiempo se tiene en un sentido diferenciado tal como está dado en los climas y por su acción se genera una gran diversidad de manifestaciones dotadas de vida.

Igualmente, la armonía (*ἁρμονιῶν*) está vinculada a la existencia y a la actividad numeradora (*ἀριθμέω*) del número (*ἀριθμός*). El número es lo que establece la armonía pero solo para quienes son capaces de tener ojos (*ὁράω*) para ver o contemplar esta realidad que hay que mirarla desde el propio *nous* o desde una vista superior. Toda esta experiencia está enmarcada por la actividad del *pathos* (*πάθος*), que involucra una disposición a

---

[134] La diferencia entre *krónos* y *kairós* es explicada por John E. Smith (1969), en *Time, Times, and the Right Time; Chronos and Kairos*. Smith manifiesta que estas palabras abarcan el tiempo uniforme del sistema cósmico y el tiempo para la oportunidad, cómo la ocasión va y viene, determinando las características que tendrán para la historia. Cronos expresa la concepción fundamental del tiempo como medida, la duración de su perioricidad, la edad de un objeto o de un artefacto, y la variación de la velocidad por unidad de tiempo de la aceleración de los cuerpos, sea sobre la superficie de la Tierra o en el firmamento. Mientras el kairos hace alusión al carácter cualitativo del tiempo, a la posición especial de un evento o una acción, a la estación en que sucede una cosa y que no puede darse en otro momento, a aquel tiempo que señala una oportunidad como el tiempo correcto para que esta se dé (págs. 1- 13).

sensibilizarse o emocionarse y sin la cual no es posible percibir esta realidad tan cercana a la actividad del *logos* (*λόγος*). Es de resaltar cómo Aristóteles manifiesta que para los pitagóricos ya existía esa relación entre *pathos* y *logos*, entre un decir fruto de una experiencia sensible superior y un decir estructurado y ordenado más cercano a la esencia del número. A través de los números podemos conocer algo como también darlo a conocer; es lo que enciende e ilumina nuestra comprensión (*ἀριθμοῖς ἐφαίνοντο*), organiza y posibilita la *physis* (*φύσις*) como aquella naturaleza ordenada desde el origen. Los números hacen que las cosas y los entes sean semejantes a ellos; la naturaleza se multiplica y desarrolla con base en las similitudes (*ἀφομοιόω)* que tienen por fundamento a los números que se vierten cubriéndolo (*πάσσω*) todo (*πᾶς*). Desde el mismo origen, los números son los que están primero antecediendo (*πρότερος*) a todo (*πᾶς*). Los comentarios de los pitagóricos son reiterativos en afirmar la naturaleza fundante del número y cómo, de alguna manera, su presencia cuantifica u ordena toda la realidad posibilitando su diversificación. Al igual que en la propia actividad de la mente (*νοῦς*), los números están presentes creando las condiciones que posibilitan un estado adecuado y balanceado (*καῖρος*) desde el cual se ejerce una atracción que unifica (*ἁρμονία*) y que es apreciable en el contexto de las proporciones armónicas. En el número está presente el logos (*λόγος*). La teoría pitagórica de los números como instancias que están más allá de la realidad inmediata organizándola y modelándola tuvo una gran influencia en la elaboración en la teoría de las ideas de Platón[135] (*Πλάτων*). Los números están situados en el origen mismo de lo que existe (*ἀριθμοί πάσης τῆς φύσεως πρῶτοι*; 985b-35), aquello que establece la preeminencia como lo primero (*πρῶτος*).

Es muy notable cómo, en Pitágoras, se encuentra el comienzo del uso del cuantificar universal, todo (*πᾶς*), que será tan definitivo en el desarrollo de la lógica matemática en sus tiempos primerizos por medio del silogismo de Aristóteles; asimismo, tal noción se instaura

[135] En la *República* de Platón se presenta el famoso *mito de la caverna* (514a-520e), donde los objetos que existen son sombras de los verdaderos. Se resalta el papel del propio luminoso Sol, como el máximo objeto a contemplar y que está fuera de la caverna (516b). El astro rey nos ilumina a fin de liberarnos y permitirnos que dejemos nuestra prisión (517b). Hay que destacar que ese Sol se asemeja a la noción del uno (*εἷς*) pitagórico, por ser el origen de todo y el fundamento de lo que existe. A su vez, es posible abstraerse para afirmar que la idea es aquel nocional que está presente en toda formulación matemática como el elemento o el individual, lo común y a la vez lo universal que da armonía y unidad a todo el discurso formal deductivo.

en el estudio y análisis del número y, por ende, de las matemáticas. A su vez, esta viene unida a lo que es lo primero (*πρότερος*); un concepto que se plantea en este mismo nivel de discurso, aquel donde la teoría numérica busca ordenar desde ellos mismos lo que está presente. Este hecho se verá reflejado en las teorías acerca de la cardinalidad y la ordinalidad de los conjuntos numéricos y será el motor alrededor del cual gravitará la construcción de una teoría axiomática que propenderá por establecer una postulación definitiva acerca de los mismos. Una estrategia fundamental es introducir en una discusión el planteamiento de estos conceptos tan complejos como *cronos* y *kairós*, que aspiran ser revelados en torno a la validez de índole matemática. Esto permitirá que sean capaces de disfrutar de una aseverabilidad muy alta, que podrá cobijar la realidad misma y su alcance dinámico en todo aquello que sea planteado o afirmado. Esta estrategia se logra utilizando e introduciendo vocablos como 'todo' y 'primero', como aquella proposición u oración que define su comienzo y se traza todo el recorrido que la mantendrá verdadera. Es supremamente interesante, a su vez, que en la génesis misma del estudio del número (*ἀριθμός*) se considere el problema del movimiento, algo que fue olvidado durante varios milenios y tan solo volvió a ser abordado por las motivaciones que surgieron en torno a la aparición de la física newtoniana con la introducción del cálculo infinitesimal por parte de Newton y Leibniz.

La posición pitagórica va todavía un poco más lejos, ya que plantea que en la misma formalización conceptual de lo numérico, se ha de contemplar la naturaleza dinámica del mismo, sin depender de otras teorías exógenas como bien lo puede ser la física y aún el cálculo. Es como si la diferencia entre el *Kairós* (*καιρός*) con el *cronos* (*κρόνος)* estuviera dada fundamentalmente a nivel aritmético o numérico, que el número tan solo se lo puede estudiar de manera lícita o verdadera si se lo aborda en movimiento. Tal planteamiento debe ser rescatado, en especial hoy, cuanto el estudio de los sistemas dinámicos pertenece más a la física que a la matemática. La axiomatización del número a nivel dinámico es algo que en la actualidad se ha perdido, ya que es preciso considerar que las nociones primitivas de tal formulación subyacen en la diferencia entre del 0 con 1, y han de ser conceptualizadas de nuevo a nivel dinámico. Todavía no se entiende lo que es el cero y el uno. Pitágoras pensó tales conceptos mejor que nosotros e introdujo los enormes problemas y exigencias teóricas que ellos plantean. Una oración que tiene una gran profundidad es: *καιρός καί τῶν ἄλλων ὡς εἰπεῖν ἕκαστον ὁμοίως* (985b-31), donde se sugiere que lo otro (*ἄλλων*) tiende a la similitud (*ὁμοίως*). Es de entenderse que si todo desciende y emana de un mismo principio universal, las diferencias se reconcilian y anulan en la mismidad de ese origen trascendental único que cuantifica sobre la existencia de todo lo que habita la realidad.

2.3.4. El origen de la noción de función, dominio y codominio está en Pitágoras

Uno de los conceptos más importantes en matemáticas es la noción de función; tomó varios siglos su desarrollo hasta que Peter Gustav Lejeune Dirichlet[136] logró su formulación moderna a mediados del siglo XIX. La noción de función establece una correspondencia o acuerdo (*ὁμόλογος*) entre un elemento (*στοιχεῖον*) con los demás, donde este asume ser el *referent* frente a los demás que son abordados como los *referendum*: el elemento denotativo es el *referent* que marca y señala a fin de designar; mientras los demás constituidos como *referendum* traen de vuelta (*referō*) lo designado. En este proceso, el elemento (*στοιχεῖον*) está constituido como una parte (*μέρος*) en relación con los otros como un todo (*ὅλος*). Lo importante en este proceso es que se establece una relación entre el elemento de referencia con cada uno de los demás elementos que conforman ese todo que lo rodea, lo contiene y del cual es una expresión concreta. En tal proceso, cada uno recibe su parte (*μείρομαι*), de tal manera que se pueda dar esa unión (*ἁρμονία*) ordenadora, donde cada uno queda encajado (*ἁρμόζω*) con el otro. La realidad es asi abordada como universo (*οὐρανός*), crea una correspondencia (*ὁμολογέω*), una regulación (*διακόσμησις*) que divide y ordena (*διακοσμέω*) a ese elemento (*στοιχεῖον*) en relación con toda su vecindad, en tanto (*ὅσος*) que la hace encajar (*ἐφαρμόζω*) implementándola por completo. En todo este contexto, cada (*πᾶς*) elemento (*στοιχεῖον*) crea un intervalo (*διαλείπω*) que termina siendo ordenado de manera común (*ὁμός*). Esto lleva a que se establezca una relación del elemento

[136] Ver: Jürgen Elstrodt (2007), *The Life and Work of Gustav Lejeune Dirichlet*, y está en relación con las series de Fourier; Dirichlet definió la integral para una función continua sobre [a, b], como el límite de la descomposición de una suma para descomposiciones equidistantes, cuando el número de los puntos en el intervalo tiende a infinito. Dirichlet la denominó como una propiedad fundamental de una función continua en un intervalo cerrado (pág. 19, 20).

(*στοιχεῖον*) consigo mismo (*αὐτός*), lo que facilita que mantenga (*ἔχω*) lo que es (*εἶναι*), una cosa (*πράγμα*) completa (*ὅλος*) asimilable a un punto (*σημεῖον*) que va hacia (*πρός*) la completitud consigo mismo (*αὐτός*). Dicha completitud involucra la noción de límite.

> *Y todas las correspondencias que veían en los números y en las armonías con las afecciones y con las partes del cielo y con el orden universal, las reunían y reducían a sistema. Y, si en algún punto faltaba algo, se apresuraban a añadirlo, para que toda su doctrina fuera coherente (986α-4/7):*
>
> ([986a] [1] *they assumed the elements of numbers to be the elements of everything, and the whole universe to be a proportionor number. Whatever analogues to the processes and parts of the heavens and to the whole order of the universe they could exhibit in numbers and proportions, these they collected and correlated;and if there was any deficiency anywhere, they made haste to supply it, in order to make their system a connected whole. Καί ὅσα εἶχον ὁμολογούμενα ἔν τε τοῖς ἀριθμοῖς καί ταῖς ἁρμονίαις πρός [5] τά τοῦ οὐρανοῦ πάθη καί μέρη καί πρός τήν ὅλην διακόσμησιν, ταῦτα συνάγοντες ἐφήρμοττον. Κἂν εἴ τί που διέλειπε, προσεγλίχοντο τοῦ συνειρομένην πᾶσαν αὐτοῖς εἶναι τήν πραγματείαν:*)

Los números, entonces, son esos elementos (*στοιχεῖον*) que fungen como los primeros principios que establecen las condiciones mismas de la existencia de los entes. El ser que subyace a todo lo que existe; en este tiempo presente que es lo que es, en él están los números como fundamento de los elementos constitutivos de todo (*ἀριθμῶν στοιχεῖα τῶν ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλαβον εἶναι*; *986α-1*). El número asume las funciones de un cuantificador universal[137], que convoca y recrea a la totalidad (*ὅλος*), que es ordenada armónicamente dándole una forma al cielo y acarreando la misma existencia (*εἶχον*

[137] El número está presente en la cuantificación universal, dado que el vocablo 'todo' involucra su presencia. Este tópico es tocado por Lyda Sinapova (2005) en *Quantifiers in Predicate Calculus*, cuando define en una expresión una declaración universal de la forma: $\forall$ x $\in$ D, P(x); $\forall$x, D(x) $\rightarrow$ P(x). Se define que es verdad, si y solo si P(x) es verdadero para todo x en D. Es falso, si y solo si existe al menos un elemento en D para el cual P(x) es falso. Incluyendo el dominio de la expresión: $\forall$x, D(x) $\rightarrow$ P(x); para todo x, si D(x) es verdadero, P(x) es verdadero, x tiene la propiedad P. Sea el dominio en la expresión: $\forall$x, D(x) $\rightarrow$ Q(x), el primer predicado P(x) define un conjunto de objetos, sea el caso de números pares. El segundo predicado Q(x) establece la propiedad para todos los objetos de este conjunto, es decir los enteros, dado que los números pares hacen parte de los enteros. Se nota que el segundo predicado se define sobre un conjunto más grande que contiene al primer conjunto (pág. 1,2).

ὁμολογούμενα). Esta primacía anuncia la futura lógica simbólica en la que se sitúa al número como el garante desde el cual se jerarquiza la predicación de los cuantificadores universales sobre las oraciones. Es el número la instancia que permite establecer un orden sobre las categorías como fundamentos de lo decible y decidible, hecho que antecede a la decibilidad formal como aquel problema de decisión que va a ser uno de los tópicos más importantes para definir la axiomatización de los conjuntos numéricos, en especial, de los números enteros. Es con base en este pensar las cualidades de un universo movido y estructurado alrededor de los números, como se va a constituir aquella inspiración primigenia de naturaleza epistemológica que va modelar las distintas disciplinas que componen la matemática. En la transición de un número a otro se da una transformación cuantitativa y cualitativa que, cuando es llevada a un nivel de abstracción, mostrará en las oraciones su estructura semántica y sintáctica que servirá de fuente inspiradora del método inferencial sobre el que descansa la axiomatización de las ciencias y el método científico.

La lógica simbólica adquiere una forma sólida a partir de la mitad del siglo XIX con las obras *Las leyes del pensamiento*[138] (1854) de George Boole, *La conceptografía* (1879) de Gottlob Frege, *El formulario* (1891) de Giuseppe Peano, entre otros tantos. Se estaba en la búsqueda de la fundamentación de las matemáticas, proyecto que fue asumido en sus inicios por la lógica. No obstante, pese a tantos esfuerzos emprendidos por notables matemáticos a finales y comienzos de los siglos XIX y XX, tal proyecto no tuvo un final feliz. La razón estaba en que la noción de verdad no puede ser garantizada dentro del sistema, hecho que llevó a que *Principia Mathematica* (1910-3), insigne obra escrita por Bertrand Russell y Alfred North Whitehead, no lograra su cometido. Ni aún la tentativa de construir la matemática a partir de una lógica de primer orden unida a la teoría de conjuntos emprendida por David Hilbert y conocida como el *Programa de Hilbert* (1920) tuvo éxito. La razón estriba en que Kurt Gödel presentó sus dos teoremas de incompletez en 1931, demostrando que una axiomatización de la matemática alrededor de la teoría de Zermelo-

[138] Esta significativa obra: *The Laws of Thought*, George Boole (1854) piensa ir más lejos a lo presentado por Aristóteles en *Primeros Analíticos* (*Ἀναλυτικῶν προτέρων*). La obra de Boole está en el comienzo de la fundamentación de la lógica matemática moderna. Sea el caso, lo tratado en el capítulo IV, *The Principles of Symbolic Reasoning*, se expone una investigación de las leyes fundamentales que gobiernan las operaciones de la mente para hacer posible el razonamiento, y cómo estas pueden ser representadas en el lenguaje a través de símbolos. Se define la construcción de un método lógico que emula estas leyes del pensamiento (pág. 48).

Fraenkel era inconsistente debido a que surge la siguiente paradoja: un sistema axiomático puede ser completo pero inconsistente o ser consistente pero incompleto, lo cual lleva a que ambas situaciones nunca se dan al mismo tiempo. Esto dio lugar a que la lógica evolucionara hacia una teoría de modelos planteada por Alfred Tarski en su obra *Las teorías indecidibles* (1953), y cuyo fundamento es que no existe una sola lógica sino muchas lógicas, tantas cuantos modelos podamos construir y sean consistentes entre si. Esto ha dado lugar a una relativización de la lógica que se ve reflejada en las matemáticas avanzadas[139].

El número, en la concepción pitagórica, adquiere una representación real en el firmamento; la base numérica decimal (*δεκάς*) se ve reflejada en todo cuanto existe; el mundo de las esferas celestes se asimila a los planetas y las estrellas. Es un presagio del número como aquella mónada o séfira, entidad que evoca la perfección misma tanto del círculo como de la circunferencia, que anticipa la armonía y el equilibrio perfecto del universo. Se establece una modelación de lo que existe independientemente de que se haya encontrado o no: *ὅλον οὐρανὸν ἁρμονίαν εἶναι καί ἀριθμόν* (*986 α-1*), hecho que refleja al número como lo que otorga armonía y unidad a las distintas partes constitutivas de un todo que se ve reflejado en todos los sistemas donde la vida se hace presente. Tal realidad gobernada por el número establece una regulación ordenadora (*ὅλην διακόσμησιν*) que integra y reúne en torno suyo, como aquel elemento que todo lo penetra pegando y ejerciendo una especie de fuerza de atracción universal (*συνάγω*) y que posibilita la compactación para que algo pueda caber (*ἐφαρμόζω*) como definiendo al mismo espacio y su topología. El número define las formas mismas desde cualquier lugar (*πού*).

[139] Zalamea Fernando (2009), *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*, Universidad Nacional de Colombia: "El primer punto de importancia en la especificación del 'qué' son los objetos matemáticos consiste en tomarse realmente en serio la relatividad y el tránsito dentro de la matemática contemporánea. En este ámbito, los objetos dejan de ser fijos, estables, clásicos, bien fundamentados – en suma 'unos'− y se acercan, más bien, a lo movible, lo inestable, lo no clásico, lo fundamentado solo contextualmente – en suma lo múltiple −". Es de resaltar que Zalamea plantea cómo la nueva matemática está gobernada por un nuevo tipo de lógica, en la cual actúan estructuras arqueales correlativas, − es decir, "invariantes con respecto a un contexto dado y a una serie dada de correlaciones – que permiten justamente detectar y reintegrar las diferencias" (pág. 154). La matemática ha dejado de ser el terreno de lo absoluto para volverse el terreno de lo relativo, en concordancia con la teoría de la relatividad de Einstein y con los desarrollos de una matemática relativa por parte de Alexander Grothendieck, interesado en la búsqueda de aquellos invariantes, aquella propiedad que poseen ciertos objetos matemáticos de no cambiar cuando se les aplica unas transformaciones.

El texto acerca de Pitágoras comentado por Aristóteles en su *Metafísica* (986α-4) comienza por la pregunta de aquello que hace posible la existencia (*εἶχον ὁμολογούμενα*); un tema introducido por el verbo tener, poseer (*ἔχω*), con el verbo (*ὁμολογέω*) que manifiesta un acuerdo y el establecimiento de una correspondencia. En la unión de homós (*ὁμός*) −que ya se había visto en relación con los morfismos− como aquello que es lo mismo, lo común que posibilita una unión, vocablo que posee la misma raíz indoeuropea del número cardinal uno (*εἶς*). También está el logos (*λόγος*), término supremamente complejo que en este caso será abordado como la palabra viva pensada. De modo que aquello que es lo uno, lo que posibilita la existencia, se manifiesta como una palabra que tiene la potestad de ser aquel operador cuya función *f* es la mismidad que gravita alrededor de la armonía (*ἁρμονία*) que permite la integración y unificación a través del número (*ἀριθμός*). Los cielos o toda la realidad como universo (*οὐρανός*) se ve gobernada por la actividad dinámica del número, que cobija todo (*ὅλος*), a la misma totalidad (*ὅλοξ*) completa en sus partes (*μέρος*). Este sustantivo evoca la acción del verbo recibir uno su propia porción o parte (*μείρομαι*), hecho que afirma que es el número el que constituye la realidad como un todo constituido por unas partes. En su comienzo está completo y a su vez divide (*διακοσμέω*) la realidad estableciendo un orden que la regula (*διακόσμησις*). Se ha de tener presente el prefijo a través (*δια*) como lo que transpasa al cosmos; de este vocablo deriva el estudio del cosmos como cosmología (*κοσμολογία*), como aquello a través de lo cual se manifiesta la existencia atravesándola y cruzándola. Una alusión directa al ancestral problema del todo y la parte que ha sido una de las columnas más importantes de la reflexión tanto filosófica como matemática a lo largo de los siglos, y el cual viene ilustrado en la operación aritmética de la división que muestra cómo los números racionales pueden ser interpretados como fraccionarios. El numerador indica las partes de ese todo y denominador la totalidad del mismo, siendo posible dos opciones en a / b: b > a que es una fracción propia y a > b, que es una fracción impropia. Existe toda una variedad de situaciones en las que se pueden presentar las fracciones: mixta, reducible, irreducible, inversa, compuesta, equivalente, homogénea, heterogénea, decimal, continua, unitaria, etc., lo que simboliza esta importante relación binaria como razón aritmética.

En lo anterior se resalta la realidad tomada como Urano (*οὐρανός*) o el cielo, que se constituye en aquel conjunto que define un domino en el *Cronos* desordenado, el cual es ordenado por la actividad de los números dando lugar al codominio como *Kairós*. Los operadores aritméticos están presentes desde la suma a la división y a través de ellos se define la noción de función como una transformación que modifica el universo o realidad manifiesta. Para Pitágoras, los números son entidades reales y concretas; no son imaginarios ni abstracciones ni construcciones mentales sino entes con existencia propia. Este hecho fue retomado por Platón en su teoría de las ideas, donde los números disfrutaban de una explicación epistemológica en *El símil de la línea* en *La República* (*Πολιτεία*): por encima del mundo de la *doxa* tenemos a la *dianoia*, conocimiento discursivo del cual derivan las matemáticas y los principios contemplados en la *noesis* (508e-5)[140]. Algo que merece ponerse de relieve, es la capacidad del número de imprimir una acción capaz de transformar y alterar una realidad y, además, de influir en el estatuto existencial de la misma. Tal es la noción misma de función (f), donde podríamos decir que f^* es aquella transformación que imprime el número tanto consigo mismo como con su propia vecindad.

El número no es un ente vacío sino que está habitado por un movimiento que tiene la potestad de fundar y fundamentar la realidad, sometiendo a todos los entes a su propio gobierno. En ese sentido, el comienzo de la existencia de las criaturas en todos sus posibles planos está antecedido y posibilitado por la existencia de los números. En consecuencia, los números se constituyen en una noción primitiva irreducible e inderivable de la cual todo procede, muy unida a su capacidad de cuantificar y, en ese sentido, es la instancia que soporta la aseveración de cualquier tipo de proposición y de función proposicional. Algo a tener muy en la cuenta es que hoy día el concepto de número está vacío y su operador es externo a la conceptualización del mismo; tal hecho no se tuvo en la escuela pitagórica. Para Pitágoras, el número como símbolo o término y como predicado o función estaban unidos. Este hecho crea una enorme barrera entre la concepción clásica griega de la aritmética con aquella propia de la matemática moderna. Fue Gottlob Frege quien en su obra "*Fundamentos de la Aritmética*" definió: 'El número es una cosa' (*Die Zahl ist ein*

[140] Platón, *La República*, pág. 216, José Manuel Pabón y Manuel Fernández-Galiano, Centro de Estudios Políticos y Constitucionales, Madrid.

Ding)[141]. Tal hecho obedece a la estrategia de situar la axiomatización de los números enteros fuera de los mismos, dejando al símbolo vacío de todo contenido a fin de que sea más manipulable en una teoría que no quiere ni puede dar cuenta de la complejidad del número. En el caso pitagórico, la axiomatización de los números está unida a una metafísica y, al mismo tiempo, el símbolo no es vacío y su fundamentación es endógena en él y por él mismo. Este hecho motiva a que en la axiomatización moderna de los números, el operador de la suma (+) se sitúa como aquella función que define las transformaciones aritméticas que experimentan estos números enteros.

En Pitágoras, el operador aritmético del número no está restringido tan solo a la suma, tal hecho nos llena de sorpresas dado que manifiesta que la realidad se ve ordenada por la existencia de los números, mas no entra en detalles de cómo lo hace. Posteriormente, se abordará la existencia de la díada como el siguiente estadio de conceptualización del número, el cual pertenece a una nueva reglamentación axiomática vinculada a una teoría T_2 derivada de la teoría T_1 que la antecede. En ese sentido, sigue al lógico y matemático Alfred Tarski, en su obra acerca de la axiomatización de las teorías indecibles ("*A general method in proofs of undecidability*")[142]. La teoría pitagórica que presenta e introduce la existencia ordenadora de los números pertenecería a una teoría T_1 y la que introduce toda una variedad de díadas numéricas pertenecería a la teoría T_2, de tal suerte que $T_2 \subset T_1$. Donde T_2 es una extensión finita de T_1, la indecibilidad de T_1 afectaría también la decibilidad de T_2, debido a que se estaría en presencia de una indecibilidad hereditaria. Esto es especialmente claro en Pitágoras, que se abstiene de expresar toda la decidibilidad del número en su estado inaugural; no obstante, introduce unos supuestos conceptuales que disfrutan de un gran alcance. Estos vendrían a acondicionar cualquier tipo de teoría que se quiera realizar sobre los mismos números.

La capacidad del número de unir y reunir en torno suyo (*συνάγω*) de tal manera que todo encaja (*ἐφαρμόζω*), y en el intervalo (*διαλείπω*) entre dos expresiones numéricas no deja brechas innecesarias aprehensibles en espacio y tiempo. El número posee la propiedad

[141] Frege Gottlob (1884), *The Foundations of Arithmetic*, página 11, Pearson Longman.
[142] Tarski Alfred (1953), *A General Method in Proofs of Undecidability*, Dover Publications.

de crear un fuerte vínculo que aferra (*γλίχομαι*) y une a un nivel muy profundo (*συνείρω*) todo (*πᾶς*) en sí mismo (*αὐτός*), en una acción que es (*εἰμί*) consecuente consigo misma como aquella cosa (*πράγμα*) susceptible de ser elevada a un esmerado tratado (*πραγματεία*). En este importante parágrafo, los verbos que definen la acción del número son varios; no está la actividad de contar o sumar debido a que esta caracterización numérica es anterior a su manifestación como operación aritmética. Existe una actividad numérica previa a su manifestación concreta, presente en la teoría aristotélica del acto que es previo a la potencia. Este hecho también puede ser recreado en relación al *kronos* (acto) y al *kairós* (potencia). Este parágrafo (986α 3-5) es complejo y profundo, Pitágoras citado por Aristóteles en su *Metafísica*, manifiesta que la naturaleza del número es propiamente la de unir, algo que es propio del operador de la suma y de la conectiva binaria de la conjunción.

En ese sentido, la teoría pitagórica de los números satisface una propiedad muy importante que se conceptualizó más de dos mil años después en la fundamentación de los números reales por medio de las cortaduras de Dedekind (*Essays on the Theory of Numbers*)[143], que son considerados como intervalos totalmente ordenados y acotados. Estos números fueron contemplados en el teorema del triángulo pitagórico, cuando el cateto mide 1, el valor de la hipotenusa es de $\sqrt{2}$, fue el primer número irracional conocido cuyo valor aproximado es:

$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379 9....$

Pareciera que Pitágoras se hubiera anticipado a Tarski en su formulación del teorema fundamental de la deducción que subyace a estas argumentaciones: donde A es un conjunto de oraciones de una teoría T, y $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ son las oraciones, teniéndose que una oración arbitraria es Ψ, de manera que se cumple $(\Phi_1,\ldots,\Phi_n) \rightarrow \Psi$. Se tiene la ley del *modus ponendo ponens* como fundamento de la inferencia formal en la lógica simbólica. Se nota en Pitágoras que, a partir de tal posición, deriva todo su sistema y cómo en Frege, de manera más restringida y sin tanto peso conceptual como el de Pitágoras, conceptualiza al número como la cosa (*πράγμα*) que es evocada en el texto como (*πραγματεία*). Un hecho adicional sugiere que para Pitágoras ese operador que une, que tiene la capacidad de penetrar o volverse más fino está presente en la teoría pitagórica de la armonía de las

[143] Dedekind Richard (1901), *Essays on the Theory of Numbers*, Chicago Open Court Pub. Co.

esferas. Donde cada nota musical involucra un manejo más fino del operador, entendido como aquel que une toda la armonía como una totalidad. Algo parecido se observa en el movimiento de los planetas alrededor de estas esferas perfectas de distinto diámetro. Esto llevaría a obtener toda una sucesión de sumas donde el operador de la suma podría modificarse y dar lugar a una familia de operadores. Este hecho es muy similar a los que poseen la propiedad de la norma-T que se utiliza en la lógica multivariada**.**

2.3.5. Las categorías metafísicas estructuradas a partir de la base decimal de los números enteros establecen una biyección con la realidad real observada en el firmamento

Es fundamental reconocer que la base que define al número es el diez (*δεκά*), que viene a constituirse como la predicación completa acerca de un ente, del cual el número (*ἀριθμός*) es aquel predicado fundamental capaz de constituirse como una categoría (*κατηγορία*): aquella capaz de señalar con precisión aquello que es acusado y afirmado (*κατηγορέω*) acerca de un ente como individuo o individual con certeza aseverativa. En el diez (*δεκά*) se considera un todo (*ὅλος*) en relación a las partes (*μέρος*) que están representadas por cada uno de los diez números que conforman la base decimal estrictamente ordenados.

> *Así, por ejemplo, puesto que la década parece ser algo perfecto y abarcar toda la naturaleza de los números, dicen que también son diez los cuerpos que se mueven por el cielo, y, siendo nueve solo los visibles, ponen como décimo la Antitierra. Pero de esto hemos hablado con más detalle en otro sitio. Si volvemos a insistir aquí, es para que aprendamos también de estos filósofos cuáles dicen que son los principios y cómo caen dentro de las causas mencionadas.(986α 9-15).*
>
> (*For example, since the decad is considered to be a complete thing and to comprise the whole essential nature of the numerical system, they assert that the bodies which revolve in the heavens are ten; and there being only nine that are visible, they make the "antichthon" the tenth.We have treated this subject in greater detail elsewhere; but the object of our present review is to discover from these thinkers too what causes they assume and how these coincide with our list of causes. Λέγω δ' οἶον, ἐπειδή τέλειον ή δεκάς εἶναι δοκεῖ καί πᾶσαν*

περιειληφέναι τήν τῶν ἀριθμῶν φύσιν, [10] καί τά φερόμενα κατά τόν οὐρανόν δέκα μέν εἶναί φασιν, ὄντων δέ ἐννέα μόνον τῶν φανερῶν διά τοῦτο δεκάτην τήν ἀντίχθονα ποιοῦσιν. Διώρισται δέ περὶ τούτων ἐν ἑτέροις ἡμῖν ἀκριβέστερον. ἀλλ' οὗ δή χάριν ἐπερχόμεθα, τοῦτό ἐστιν ὅπως λάβωμεν καί παρά τούτων τίνας εἶναι τιθέασι τάς [15] ἀρχὰς καί πῶς εἰς τάς εἰρημένας ἐμπίπτουσιν αἰτίας. 986a 9-15).

2.3.5.1. El número crea espacios para ser recorridos por la acción de la palabra

La del número es aquella que permite separar, creando espacios intermedios que dimensión posibilitan acciones selectivas de escogencia. Estas divisiones presentes por doquier posibilitan un diálogo con los números e incentivan un razonamiento originado en los contrastes creados entre las distintas expresiones numéricas que están interactuando entre sí. De esta manera, el número fundamenta y permite generar una dialéctica, concebida como ese hablar razonado (*διαλεγω*) que crea esos espacios en medio (*διαλείπω*). Este vocablo también significa aquel intervalo que no es interpretable necesariamente en el espacio-tiempo, involucra una actividad incesante *ἀδιάλειπτος* que permanece (*λείπω*) y parece dejarnos al atravesarnos (*δια*). Es aquella trama que une y entrelaza de manera ininterrumpida (*συνείρω*). Aquí se nota cómo la existencia del número va ligada a una serie de predicaciones recreadas en una teoría que está unida de manera implícita a él mismo. Algo muy distinto acontece hoy día, debido a que el número está desposeído de todo tipo de significación y donde su axiomatización es externa a él mismo. Sea el caso Gottlob Frege para quien el número es una cosa, algo que ya está presente en Pitágoras cuando dice que el número es la cosa hecha, el agente o un hecho (*πραγματα*). En ese sentido, Pitágoras antecedió en la formulación del número a los grandes matemáticos del siglo XIX y XX por más de dos milenios. En la proposición que Gottlob Frege (1884) presentó en *The Foundations of Arithmetic*: El número es una cosa [144] (*Das Zahl ist ein Ding*), se utiliza la

[144] Hay que resaltar la enorme influencia que ha ejercido Immanuel Kant en muchas de las concepciones de la matemática, y cómo es clara su influencia en Gottlob Frege, cuando este último denomina al número como la cosa en sí. Este tópico fue tocado por Kant en su gran obra *Crítica de la Razón Pura* (1781), donde manifiesta: "Llamaré a un concepto problemático aquel que no contiene contradicción, pero que también está dado como una frontera para ciertos conceptos conectados con otras cogniciones. El concepto de noúmeno: de una cosa que no ha de ser pensada como un objeto de los sentidos pero más bien como la cosa en si misma (tan solo pensable a través del entendimiento puro), no es para nada contradictoria dado que uno no puede aseverar acerca de la sensibilidad, que sea la única clase posible de intuición" (pág. 362).

estrategia de restringirle los predicados al concepto del número y de apoyarse en la equipotencia que se da entre los conjuntos como una manera para construir los enteros positivos. Hoy abordamos el número como una cifra vacía que indica la existencia de una digitalización interpretable como cantidad y extensión, que no posee un concepto ni una idea de sí misma. La argumentación que la fundamenta es algo que es impuesto desde afuera a conveniencia de lo que se espera que ella cumpla en relación con una teoría o un modelo.

2.3.5.2. El número posee una naturaleza interna dinámica y organizadora

En la concepción pitagórica el número posee una naturaleza interna capaz de ordenar lo que se desprende de ella que, constituido como lo otro, posibilita y organiza su existencia. El número tiene en sentido metafórico su propio espíritu, como aquella representación que es capaz de ordenar el cielo amorfo primigenio a partir de su presencia activa. El número es percibido como algo que está en constante movimiento, dotado de una vida y no como un símbolo vacío inerte al cual se le imprime una dinámica en concordancia con una normativa abstracta. Para los pitagóricos, los números poseían y compartían una naturaleza que era divina, ya que reflejaba algo perenne que va más allá de la mera contingencia, vertiéndose en todo (*πᾶσαν αὐτοῖς*) el universo creado por su actividad. El número es la cosa (*πραγματα*) que establece una acción concordante con su propia naturaleza, capaz de imprimirle a lo otro su actividad (*πραγματεία*); además, soporta las condiciones del entorno derivado de ella. Se trata del firmamento que está constituido por diez cuerpos, hecho que emula de manera perfecta la base decimal de los diez primeros dígitos enteros. Lo que nos conduce a la existencia de una simetría entre el firmamento y la base numérica decimal. Esta simetría (*συμμετρία*) involucra que al situar dos conjuntos uno al lado del otro, se establece una serie de relaciones donde a cada elemento del dominio numérico le corresponde tan solo un único elemento del codominio universo.

Así, se afirma que, para Pitágoras, la correspondencia entre los dos es completa, lo que equivale a que se oueda tener una relación R cuyo inverso es R^{-1}, se cumple ARB y BRA. Si se considera que el número posee una actividad propia asociable al concepto de función, se dirá que existe una biyectividad: para todo elemento que pertenece a A, que simboliza los cuerpos del firmamento, se tiene un elemento en B que corresponde a uno de los diez números de la base decimal. Tenemos f: A → B, donde para todo x que pertenece a A $\forall x \in A$, existe un único "y" que pertenece a B: $\exists! y \in B$ tal que $f(x) = y$. También, en consecuencia, se cumple la función inversa f^{-1}, ya que si nos situamos en la base numérica decimal podemos establecer la misma correspondencia con los diez cuerpos constituyentes del firmamento pitagórico[145]. Algo que hay que agregar de la propiedad simétrica es que es la representación de la belleza, reflejo de la concordancia entre las proporciones y las dimensiones entre los dos sistemas considerados. Se obtiene en esta forma una armonía que se expresa como un equilibrio perfecto tanto en un estado inercial como en un estado en movimiento. Pitágoras está estableciendo una correspondencia entre los cuerpos del universo[146] y los números, donde los primeros siempre están en movimiento lo que involucra asociarle una naturaleza dinámica al número. Este hecho no ha sido todavía conceptualizado ni formulado por la aritmética moderna. Recuérdese que el movimiento fue introducido por el cálculo diferencial en relación con las exigencias y requerimientos del sistema astronómico newtoniano.

2.3.5.3. El número como la palabra enunciada que hace posible la existencia

La fundamentación conceptual de la aritmética moderna recae sobre el sistema axiomático que la legitima, mientras que para los pitagóricos, e tiene la correspondencia del concepto y el objeto; este hecho permite asociarle unas propiedades cualitativas tanto a los números como a los cuerpos celestiales. Algo a considerar son las propiedades de cada uno de estos objetos, que son invariantes a una transformación: en tal contexto dinámico cada

---

[145] Los pitagóricos desarrollarón la noción de perfección en el universo y acuñaron una palabra que es cosmos (*κόσμος*), que significa ordenar de manera adecuada. Según el filósofo peripatético Aecio, Pitágoras fue el primero en llamar 'el lugar de todas las cosas el cosmos', debido a su naturaleza ordenadora (*Aetius, De Vestutis Placitis*, II, 1, 1, D. 377,8). Citado por Theodossiou**,** Dacanalis**,** Dimitrijevic y Mantarakis (2008), *The heliocentric system from the Orphic Hymns and the Pythagoreans to Emperor Julian* (pág. 128).

[146] Según el doxógrafo griego Ionnes Estobeo (*Ἰωάννης ὁ Στοβαῖος*), el filósofo y matemático pitagórico Filolao (*Φιλόλαος*) dice: "Que existe fuego en el medio en el centro…y de nuevo más fuego en el punto más alto y todo lo rodea. Por naturaleza el medio está primero y alrededor danzan diez cuerpos divinos; el cielo, los planetas, el Sol, la Luna, la Tierra, el Antichton o Contratierra, y después de todo el fuego del hogar que mantiene la posición en el centro. El más alto punto están los elementos en su pureza, y él lo llama El Olimpo; las regiones debajo de su órbita están los cinco planetas con el Sol y la Luna, él los llama El Mundo; debajo de ellos se sitúa la generación y el cambio, él los llama Los Cielos". (*Stobaeus*, Vol. 1, 22, 1d.).

planeta como también cada número siguen siendo lo que son bajo la acción del otro. Si se le asocia una correspondencia al número 3 con el planeta Mercurio, cada uno sigue siendo él mismo. Surge entonces la pregunta: ¿Dónde se tendrían las afecciones derivadas de la dinámica de los planetas del firmamento con los diez números fundamentales? Habría que decir que están en el mismo origen del universo como un organismo vivo; en la misma vida que todos compartimos tanto los dioses como el hombre y los demás seres vivos, todos sometidos a las leyes causales derivadas de la existencia de los números. No en vano se menciona la propiedad de los números de estar en el origen (*ἀρχή*) de aquello que se dice, aquel *verbum* o palabra enunciada (*ἐρῶ*) con una capacidad de transformar. La palabra está dotada de una fuerza ilocucionaria performativa situada en el origen mismo de la existencia del universo. Pitágoras utiliza un verbo homérico que evoca la acción de una palabra que recae (*ἐμπίτνω*), constituida como el predicado de aquello que debe de ser ordenado de ese caos temprano por la acción dinámica de los números que son los responsables (*αἴτιος*) de tal evento generatriz del cosmos. Se advierte en este comentario de Pitágoras que la vida en el universo es fruto de la acción demandante (*αἰτέω*) evocada por la palabra.

2.3.5.4. El número uno, lo singular universal que organiza y ordena todo

Cabe señalar que esta posición pitagórica ha sido utilizada por las distintas teologías en cuanto sitúan el origen del universo como derivado de una acción verbal que desencadena su existencia, una acción donde el situar viene unido a un orden que establece y coloca (*τίθημι*). Pitágoras precisa la existencia de un único sujeto como el responsable de tal acción, argumenta que la existencia de los números y el firmamento procede del uno (*εἷς*) como único y singular (*οἶος*). El universo posee una unicidad fruto de la completitud que comparte con los números, la cual es una unidad que lo hace actuar como un único sujeto capaz de decretar algo utilizando aquella palabra que es ordenadora (*αἰτέω*). Se infiere que el todo está completo, está constituido por cada una de las partes que le son necesarias e indispensables en este ente singular e infinito. Pitágoras le asocia al uno (*εἷς*) la propiedad de ser infinito e ilimitado (*ἄπειρον*). Así que, todo este proceso está inmerso en la acción del verbo ser o estar (*εἰμί*) en la tercera persona del presente indicativo (*ἐστιν*) y en el presente infinitivo (*εἶναι*).

El número es aquello que permite aferrar las sumas mismas constitutivas del ser como un tratado susceptible de ser aprehendido (*προσεγλίχοντο τοῦ συνειρομένην πᾶσαν αὐτοῖς εἶναι τήν πραγματείαν*- 986α-5). El número, además de significar la cosa misma que reúne y permite decir algo, posee la propiedad de tener un cubrimiento válido para todos. Tal hecho está en concordancia con lo más fundamental; a la acción comunicativa le subyace la actividad que junta en torno suyo, la acción ordenadora de lo numérico. El verbo lego (*λέγω*) significa no solo decir o hablar, sino también ordenar y enumerar. La perfección misma, completa y plenamente realizada (*τέλειος*) está presente en el número concebido como la reunión armónica y perfecta del diez (*δεκάς*). No le falta ni le sobra nada, su actividad es la que permite que algo pueda realizarse y tener esa capacidad de ejecutar algo hasta que esté completo y acabado (*τελέω*). No en vano existe el verbo (*τέλλω*) que, además de realizar algo, evoca la salida del Sol y la venida a la existencia por medio del nacimiento, algo que es propio de la naturaleza del número. También, es inherente a su actividad, fomentar un crecimiento dotado de una actividad pensante que resuelve (*δοκέω*), que se derrama y se extiende por doquier (*πάσσω*) en concordancia con esa completitud que lo abraza todo (*πᾶς*) conteniéndolo (*περιλαμβάνω*). Para los pitagóricos, la concepción de una teoría de conjuntos se fundamentaría en la naturaleza del número: la noción de conjunto, de cuantificación y de predicación parten del número. Este permite reunir a todos en torno suyo, otorgándoles una la afiliación que hoy recae en la noción moderna del operador matemático de pertenencia $\in$, y que se definiría según Pitágoras desde el número. El número es la realidad perfecta por excelencia y la que permite que algo se asevere como tal; es decir, el metasímbolo que permite aseverar una proposición $\vdash$. P, se da en virtud a la naturaleza del número. No en vano toda la naturaleza (*φύσις*) concebida como el origen de todas las cosas está en los números (*ἀριθμῶν φύσιν*): el origen mismo de la *physis* surge de los números.

La noción de un singular universal estaría dado en el pensamiento de Pitágoras, donde la realidad se origina a partir del número uno, el cual es un singular que tiene la facultad de ser al mismo tiempo un universal. La diferencia se manifiesta en cada uno de los números que constituyen la base decimal como una pluralidad que se deriva de la singularidad del número uno. Habría que recordar que este uno es un infinito que se puede interpretar como aquel tiempo que lo trasciende todo, el *cronos* que luego es delimitado por la acción de ese tiempo oportuno o *kayros*, gobernado por una base decimal con números que son duales y econstruidos alrededor de la díada finito-infinito propia de un segundo infinito ordenado. En términos modernos tendríamos dos infinitos, el del número uno que posee una jerarquía superior y un segundo infinito de jerarquía inferior. Estos hechos fueron estudiados por Georg Cantor (1883) en su teoría acerca de los números transfinitos en su obra: *Contribución a la fundamentación de la teoría de los números transfinitos*. A diferencia de Cantor, Pitágoras plantea un infinito más elevado al que él menciona, ordenado, ya que del mismo se origina el universo y su orden no está dado por una secuencia numérica. En Cantor, el infinito más pequeño corresponde a los números naturales ω, que caben dentro de la categoría de un infinito contable, poseen la cardinalidad más pequeña que es la del aleph $\aleph_0$, y a partir de la misma es posible remontarse a los infinitos no contables en $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. En ese sentido, el infinito superior de Cantor se va construyendo desde algo más pequeño a algo cada vez más grande, mientras que en Pitágoras está dado en un sentido inverso: de un uno infinito previo a la existencia del cosmos se crea lo segundo como la pareja finito-infinito interpretable a nivel cardinal y ordinal como secuencias de números ordenados, cuyo orden sería inferior al primer infinito. Este tema llevó a Cantor introducir la *Hipótesis del Continuum* (1878) en relación con el conjunto de los números reales. La visión pitagórica es afin con la preexistencia de un Dios único e infinito previo a la existencia del universo y, en concordancia, su infinitud es de un orden superior a todo lo que surge de Él.

2.3.5.5. La doble dinámica del número: une y se proyecta

El espacio o intervalo vacío en medio de los números posibilita su existencia dinámica (*διαλείπω*); esto lleva a que se dé una actividad que mantiene el concatenamiento entre ellos y el cual tiene una enorme capacidad para unir y luchar por ello (*γλίχομαι*). También, se aprecia su tendencia a mantener una marcha incesante que además de unir no se detiene nunca (*συνείρω*). Pareciera que el número se mueve en una doble dinámica: por una parte, lo tenemos ejerciendo una labor de unificación bajo un movimiento o fuerza de atracción; por otra, lo tenemos imprimiendo un movimiento que lo arroja hacia fuera permitiéndole construir un camino sin que se pierda la cohesión central entre sus dos momentos. El número tiene la potestad de transportar algo llevándolo de un lado a otro (*φέρω*) bajo (*κατά*) los cielos (*οὐρανός*). Podríamos interpretar este hecho como que la realidad esencial de los números se verifica en verdad (*μέν*) bajo el modelo del cielo, el cual está constituido por una comunidad de diez (*δέκα*) cuerpos que marchan y coexisten como una misma comunidad: son diez instancias fundamentales, ni una más ni una menos; aunque existan números más grandes, en la base están estos diez atributos que juntos constituyen una realidad completa. No obstante, la acción del verbo ser o estar en su participio (*ὄντα*) indica que se sancionan diez numerandos que existen de manera diferenciada, hecho que está indicado en que cada uno de esos diez números están separados de los demás, y cada uno está solo a fin de poder conservar su propia identidad o naturaleza (*ἐννέα μόνον*).

2.3.5.6. Los nueve números visibles y el décimo invisible

Es potestad de los nueve números hacerse visibles o manifestarse (*φανερός*) recreando la propia situación que organiza al cosmos; se dan a conocer de manera activa incidiendo y modificando la propia existencia. Existe una actividad predicativa que transforma y crea la vida por medio de la actividad de estos nueve números. Sin embargo, se está hablando de diez, lo cual conduce a que ese décimo número celeste posee una naturaleza opuesta o contraria (*ἀντίχθων*); algo que se sitúa como un contrario de lo que está en frente, establece una relación de oposición con los nueve números restantes que están en frente y esta instancia numérica cumple con las funciones propias del número cero: se trata de la anti-tierra (*ἀντίχθων*). Este vocablo es la unión de la preposición (*ἀντί*) contra u opuesto y tierra (*χθών*). Evocaca también a una figura que busca un sistema perfecto de realidad en los diez números y con una base real en el universo. Recuérdese el problema metafísico y teórico que plantea la existencia del cero; tanto los griegos como las culturas del Medio Oriente que van desde la antigua Babilonia a Egipto, nunca lo pudieron conceptualizar ni encontraron una explicación de ese número cuyo estatuto existencial parecía inexplicable: es pero al mismo tiempo no es. ¿Qué es? Algo que subyace a la misma tierra o sea al suelo que habitamos y que es la posición privilegiada desde la cual percibimos a las nueve esferas o cuerpos constitutivos del cosmos que nos rodea. Este décimo e invisible cuerpo o número es bastante activo, no solo es algo contrario sino está investido de una actividad transformadora propia del verbo hacer (*ποιέω*), aquella actividad que se origina y parte de la anti-tierra (*ἀντίχθονα ποιοῦσιν*). En la actividad de los nueve números está actuando lo que los opone entre sí (*ἀντίχθονα ποιοῦσιν*), una semblanza que la relación que cada número mantiene con el otro es de oposición. Esta concepción permitirá introducir la división que lo limita (*ὁρίζω*), facilita nombrar algo al descomponer la misma unidad en sus partes constitutivas. En el origen (*ἀρχάς*) era el *verbum o el logos* como la causa o la pregunta (*εἰρημένας*) sobre la que recaía la incidencia del número.

En la realidad esencial del número se ve reflejada la perfección que se encuentra en los cielos; se nota que se recurre a lo circular y esférico como la forma más adecuada que ejemplifica esta perfección cósmica; se la observa en la forma del Sol, la Luna y los planetas conocidos en la época. En ese sentido, los nueve constituyen una unidad en la que existe una explicación que tanto satisface el aspecto extensivo-cuantitativo como el intensivo-cualitativo de la naturaleza del número, más la explicación del décimo número que se aparta de todos y está situado en un nivel de realidad distinto. Esta es una referencia directa a la armonía de las esferas y su incidencia en la música. Además, lo que no se debe perder de vista es que la completitud de lo numérico se da entre los diez números con sus cualidades y diferencias, hecho que manifiesta la unidad de lo numérico. Cada uno constituye una parte única de ese todo constituido por diez instancias distintas, donde de cada número se puede predicar algo distinto y de la unión de todos también se genera un diálogo más abarcante: los diez unidos generan una unidad armónica.

2.3.5.7. El número delimita y divide a fin de recrear lo otro

El número permite delimitar y dividir (*ὁρίζω*) entre lo que era antes y después de su propia actividad. Este hecho se aprecia en su capacidad para organizar el cosmos y darle forma; en ese sentido determina, define y fija linderos en derredor suyo (*περί*). El número permite contactar lo otro (*ἕτερος*) como algo diferente o contrario desde nuestro propio yo (*ἐγώ*) de una manera exacta (*ἀκριβής*). Se nota la disposición del número de penetrar la esencia de cada ente, de establecer un puente entre lo que es nombrado y lo que todavía no es nombrado y reconocido como tal: su actividad nos constituye y contruye a fin que podamos tener conciencia de quiénes somos. Lo otro (*ἄλλος*) es sujetado (*δέω*) como consecuencia del acercamiento benevolente (*χάρις*) de su misma naturaleza bondadosa, bella, encantadora y graciosa que se acerca (*ἐπέρχομαι*) cautivando. El poder de atracción proviene de la naturaleza activa del número, otorga la cohesión que permite que lo otro adquiera un orden o normativa de pertenencia a la realidad; además, lo hace de manera encantadora e irresistible, debido a que envuelve al otro alrededor de sus atributos embelleciéndolo y permitiendo que sea consciente y consistente consigo mismo. Esta es la manera en que el orden cósmico coloniza y penetra en aquello que todavía no tiene certeza de sí mismo, posibilita e incorpora lo que es lo más excelso y elevado en virtud. Esto es tomado y absorbido (*λάπτω*) bajo una acción de apoderamiento (*λαμβάνω*) propia de la esencia del número, la cual marcha paralelamente en todos. Depositado (*λαμβάνω*) desde el origen (*ἀρχή*) como lo que es realizado con pasión y solicitado (*ἐρῶν, ἐρέω*), aquello que atará y caerá sobre él que la incentivado a que actúe. Se nota en este pasaje aquel comentario en que el número vendría a ser el espejo de la naturaleza, aquella dimensión que permite acercarnos a quienes realmente somos. Se nos reconoce la capacidad de actuar con responsabilidad.

2.3.5.8. El número en su interior ejercita una acción amorosa que armoniza

Hay que tener presente que (*ἐρῶν*) puede ser visto como un sustantivo derivado de eros (*ἔρος*), y de su capacidad para amar (*ἔραμαι*) y al amor como (*ἐράω*). Este verbo es citado en el texto como un participio perfecto femenino (*εἰρημένας*) que sugiere que la actividad emanada de ese origen (*ἀρχή*) es de naturaleza amorosa y apasionada, lo que evoca que la génesis del cosmos desencadenada por los números es un acto de amor; en el origen se dieron las vías que son las que siguen al amor como palabra que se vierte responsablemente causando el origen del universo. *En el origen y en consecuencia se va dentro de estas acciones amorosas que caen sobre nosotros responsablemente* (*ἀρχὰς καὶ πῶς εἰς τὰς εἰρημένας ἐμπίπτουσιν αἰτίας.* 986α-15).

Es notable cómo, en Pitágoras, la génesis o el origen del cosmos parte del amor (*ἔρως*), cuya acción recae sobre (*ἐμπίτνω*) el mismo origen (*ἀρχή*). Es una indicación de que el amor es el causante y el responsable de la existencia de la misma realidad y, de alguna manera, es el componente dinámico que la causa (*αἴτιος*) y que en nuestro contexto está contenida en la naturaleza de los mismos números. La physis (*φύσις*) representa la naturaleza; en su origen recibió la forma dada por los números, los cuales son las instancias activas que imprimen cambio y movimiento. En ese sentido, la vida misma está cargada de una inusitada fuerza que se manifiesta en las ganas de vivir y en los mismos deseos de experimentarla a fondo, como aquello que se desarrolla y crece (*φύω*) por la acción misma de un *eros*, que abordado como *Eros* (*Ἔρως*) −ya mencionado por Hesíodo y Parménides− hace que sea *Eros* el primero de todos los dioses en existir. Esto lleva a conjeturar que el texto que ocupa la atención ahora, al igual que otros, posee varios niveles de lectura. Ya el mismo Pitágoras había mencionado la armonía (*ἁρμονία*) en relación con la existencia de todo (*ὅλος*) el cielo o universo (*οὐρανός*) estaba en los números (*ἀριθμός*). Hay que recordar que Armonía (*Ἁρμονία*) es la diosa de la armonía y que Urano (*Οὐρανός*) es el padre de los dioses y esposo de la Tierra, Gaia (*Γαῖα*). Esto permite ver que existe en algunos apartes del texto de Pitágoras una clara y alusiva lectura de tipo mítico. Así, Pitágoras reivindica el estatuto epistemológico del Mito (*μύθος*), no siendo tan solo una serie de leyendas o fábulas fantásticas de carácter religioso politeísta, sino un conocimiento de los más altos. Se podría sugerir que la matemática estaba fundamentada e inspirada en el mito, y que la estructura que entrelaza los mitos aportándole una unidad como una narrativa coherente y consistente se ve reflejada en la naturaleza axiomática de los números. Este hecho se expondrá más tarde en relación con el carácter dual que caracteriza la misma existencia como la unión complementaria de los contrarios y que es ejemplificada en el número dos o en la díada.

Cabe destacar que cuando Pitágoras manifiesta que el origen (*ἀρχή*) se ve predicado bajo la acción del verbo amar (*ἔραμαι*), se entiende desde este contexto que se está introduciendo una dualidad, presente en lo masculino y lo femenino. Esta será evidente a partir de la díada que proviene del número cardinal dos 2 (*δύο*), cuyo ordenamiento ordinal equivale a lo que está situado en segundo lugar (*δεύτερος*). El universo manifiesto que reúne e integra a todos bajo la acción dinámica del número uno, 1 (*εἷς*), como aquello que está primero (*πρῶτος*) que todos (*πᾶς*). Este vocablo que contiene la preposición pro (*πρό*), evoca una temporalidad presente desde el comienzo, desde donde todo se deriva u origina. El uno alberga la dualidad que se manifiesta en la naturaleza (*φύσις*) de los contrarios ya presupuestada en el número como (*ἀριθμῶν φύσιν*), que afirma que existen dos clases de números: los pares y los impares. Aunque se tenga la preminencia de los números impares sobre los pares, debido a que el número 1, en general, se dice que es impar. En Pitágoras, el número cardinal 1 tiene cierta preminencia sobre el 2; no obstante, al disfrutar de su cualidad de ser infinito en él mismo, pareciera que perteneciera a otro conjunto numérico {1} y el {x ∊ 2 / x es par ∨ x es impar}. En ese sentido, el primer número impar sería el 3 y el primer número par sería el 2. Aunque si se considera la existencia de los contrarios, se tendría el +1 y el – 1, como números muy distintos del uno (*εἷς*). Se puede derivar una secuencia numérica introduciendo el 1; además, que todo número par puede expresarse como un par al cual se le agrega un 1. Se vería que hay dos presupuestos: las naturalezas disímiles del 1 y del 2, y que los conecta a nivel de una fundamentación para generar una serie o sucesión de números a partir de la colaboración de ambos entornos conceptuales.

2.3.5.9. Los dos cielos y los dos infinitos involucrados en la formulación pitagórica

El tema del verbo amar (*ἔραμαι*) adquiere una preeminencia por cuanto de él deriva *eros* (*ἔρος*), que indica que en la génesis de la vida hubo mucho deseo. La fuerza derivada de esas ganas de vivir gracias al enfrentamiento complementario de los contrarios, manifiesta que todo lo que existe en el universo se da gracias a que siempre se da en parejas: Urano (*Οὐρανός*) y Gaia (*Γαῖα*), hombre y mujer, par e impar, positivo y negativo, etc. El propio amor (*ἐράω*) involucra una lucha o la presencia de los contrarios, en eso radica la naturaleza misma habitada por una dinámica que nunca para de transformarse a sí misma dado el enfrentamiento interno que la motiva. Desde esta perspectiva tenemos un primer cielo (*Οὐρανός-α*) carente de forma y un segundo cielo (*Οὐρανός-β*) que nace por el orden que los números imprimen posibilitando la existencia, como aquella vida capaz de reproducirse y multiplicarse a sí misma gracias a la acción de los contrarios. En todo esto es destacable cómo la noción de infinito está más dada en aquello que es uno (*εἷς*), aquello que está solo (*οἶος*) a nivel de un individual no referido a otro más que a él mismo. Este primer infinito (*ἄπειρος-α*) se caracteriza por ser un individual único carente de frontera e imposibilitado de situarse frente a lo otro a fin de contrastarse; se basta a sí mismo. El contraste de ese primer infinito le será dado por un segundo infinito (*ἄπειρος-β*), que es de naturaleza dual ya que su existencia está gobernada por la dualidad: finito (*πέρας*) – infinito (*ἄπειρον*). El primer infinito es determinante sobre el segundo que es de naturaleza dual. En ese sentido, siguiendo la teoría de modelos de Alfred Tarski, si el primer infinito está inscrito en una teoría cuya predicatividad es superior frente a la del segundo infinito, la modelación del primero parte de un único individual de naturaleza universal, mientras la modelación del segundo es derivada y dependiente del primero; además, presenta un comportamiento diferente por cuanto sus entes son parejas ordenadas.

2.3.6. El número como principio constitutivo de los entes que procede de lo uno que es el cielo

Este principio fundamental inderivable que puede ser tomado como el sustento de toda teoría, en este caso, viene asimilado al cardinal 1, como lo primero a partir del cual todo se origina. Es evidente la búsqueda de una aritmetización de la realidad que, además, sirve de soporte a todas las ciencias tanto puras como aplicadas.

> *Pues bien, parece que también estos consideran que el número es principio, no solo como materia para los entes, sino también como afecciones y hábitos, y que los elementos del número son lo par y lo impar, siendo uno de estos finito y el otro infinito, y que el uno procede de estos dos elementos (pues dicen que es par e impar), y que el número procede del uno, y que el cielo entero, según queda dicho, es números.(986α 18-21)*
>
> (*Well, it is obvious that these thinkers too consider number to be a first principle, both as the material of things and as constituting their properties and states. The elements of number, according to them, are the Even and the Odd. Of these the former is limited and the latter unlimited; Unity consists of both [20] (since it is both odd and even); number is derived from Unity; and numbers, as we have said, compose the whole sensible universe. Φαίνονται δή καί οὗτοι τόν ἀριθμόν νομίζοντες ἀρχήν εἶναι καί ὡς ὕλην τοῖς οὖσι καί ὡς πάθη τε καί ἕξεις, τοῦ δέ ἀριθμοῦ στοιχεῖα τό τε ἄρτιον καί τό περιττόν, τούτων δέ τό μέν πεπερασμένον τό δέ ἄπειρον, τό δ' ἓν ἐξ ἀμφοτέρων εἶναι τούτων [20] (καί γὰρ ἄρτιον εἶναι καί περιττόν), τόν δ' ἀριθμόν ἐκ τοῦ ἑνός, ἀριθμοὺς δέ, καθάπερ εἴρηται, τόν ὅλον οὐρανόν.986α 18-21*).

El número instaurado le da forma al cosmos[147], posee una naturaleza muy activa; parte de su actividad consiste en iluminarnos (*φαίνω*) haciendo visible lo que nos rodea a fin de poderlo conocer, creando un vínculo que nos lleva a poder establecer que el principio (*ἀρχήν*) de todo ente (*εἶναι*) está en los números (*ἀριθμόν*), que no solo sirven para contar sino para darle forma a lo existente. Es la materia (*ὕλη*) de cuanto habita el cosmos, posibilita que experimentemos nuestras pasiones (*πάθος*) fruto de lo que sentimos por estar vivos (*πάθημα*): es aquel estado que es lo más propio, que nos posee (*ἕξις*), que tenemos y cargamos fruto de la misma vida. El número no solo sirve de guía a lo largo de nuestra vida, comunica el mundo de la experiencia sensible mundana con el mundo de la vivencia inteligible que sirve de fundamento para la existencia del mismo cosmos. Es el puente que conecta nuestro intelecto con nuestras emociones permitiendo que nos experimentemos a nosotros mismos y a todo lo que nos rodea. Es el estado más legítimo y apropiado que hemos de cargar dado que nos posee o habita por completo. Así que, los elementos (*στοιχεῖα*) están imbuidos de la naturaleza del número, se podría decir que los elementos están aritmetizados (*ἀριθμοῦ στοιχεῖα*). Recuérdese que la numeración pitagórica otorga cualidades a los números y así también valora su naturaleza cuantitativa o extensiva. La diversidad de los números se corresponde con la diversidad de los elementos; recuérdese que la misma naturaleza (*φύσις*) esta imbuida del número. Adviértase que lo perfecto es una completitud proporcionada y justa (*ἄρτιος*) que permite afirmar algo asegurándolo (*ἀρτάω*) y fijándolo, propiedad que posee todo número par (*άρτιο αριθμό*). Mientras el número impar (*περιττός αριθμός*) posee una naturaleza más vinculada con aquello que se conoce muy bien (*περίοιδα*) y que evoca un estado superior (*περισσός*). La naturaleza del número par es completar algo hasta estabilizarlo mientras que la del número impar es conocer algo hasta llevarlo a un estado de excelencia: ambos vendrían a complementarse en cuanto algo completo es algo superior. Este aspecto se refleja porque el número par también puede escribirse como *μονός αριθμός*, donde se resalta la situación única y singular del mismo;

---

[147] En su artículo: *The Pythagoreans*, José Wudka (1989) plantea cómo la primera tentativa de expresar el universo en terminos numéricos se le debe a Pitágoras; esta idea nació a consecuencia de querer entender el mundo a través de las matemáticas, un concepto central en el desarrollo de la ciencia y matemática. Es más, al número 1 se le asocia el punto, el 2 a la línea, el 3 a la superficie y el 4 a los sólidos: 1 + 2 + 3 +4 = 10, que era un número sagrado (págs. 1-2).

mientras el número impar puede escribirse como *μονοί αριθμοί*; ambos, desde esta perspectiva, comparten la característica de conservar su integridad como números solos (*μονόω*).

2.3.6.1. La ley proviene del número asimismo la luz que nos lleva a comprender

La presencia del nomos (*νόμος*) que involucra la ley y la costumbre está presente en el verbo (*νομίζω*) que significa aquello que estamos habituados a utilizar y practicar. Es claro en este parágrafo:

> *Pues bien, parece que también estos consideran que el número es principio, no solo como materia para los entes,* (*Φαίνονται δή καί οὗτοι τόν ἀριθμόν νομίζοντες ἀρχὴν εἶναι καί ὡς ὕλην τοῖς οὖσι καί ὡς πάθη τε καί ἕξεις*).

Se percibe cómo la luz (*φαίνω*) se manifiesta en los números (*ἀριθμός*); aquella luz de la que emana el conocimiento y que crea la vida. Su naturaleza inminentemente activa y práctica involucra esa ley que lleva a distribuir (*νέμω*), dispensar y asignar aquello que viene dado y otorgado desde el origen (*ἀρχή*) como lo primero (*ἄρχω*). En ese sentido, el número uno representa ese momento único que funda y del cual nace y surge el universo; este posee, en consecuencia, las propiedades del mismo, entre ellas las de la infinitud. Es, además, de la que emerge la materia, *hylé* (*ὕλη*), que constituye a todos los entes, la madera de la que están hechas las viviendas y de la que como leña surge el fuego que ilumina y calienta nuestros hogares, que permite la cocción de nuestros alimentos y la elaboración de nuestras armas y herramientas al lograr la elaboración de los metales. También se hará referencia a ella más tarde como la substancia o la materia fundamental de todas las cosas; o representará luego la causa material en Aristóteles[148]. Esta materia que está íntimamente unida al *pathos* (*πάθος*) representa la misma experiencia de vivir, y en muchos casos está

[148] El tema de la causa material es tratado por Aristóteles en su *Metafísica*: *Causa singnifica: (a) en un sentido, como el resultado de la presencia de algo que viene a ser, −e.g. el bronze de una estatua y la plata de una copa, y las clases de material que ellas contienen. "Cause" means: (a) in one sense, that as the result of whose presence something comes into being—e.g. the bronze of a statue and the silver of a cup, and the classes of material which contain these*; (Libro V, 1013a-20), Aristotle, *Metaphysics* Vol. 17, Trad. Hugh Tredennick (1933). Aristóteles utiliza para causa el adjetivo *αἴτιος*: causante, autor, responsable en neutro *αἴτιον*.

unida al dolor y al sufrimiento. Es una característica de este estado de pasión donde tiene lugar aquello que sucede o acontece, que se tiene o posee (*ἔχω*) fruto del *nomos* que involucra esa división primigenia del todo en partes. En esta oración se está sugiriendo la diversificación de ese número primigenio fundamental del que emerge toda la realidad, al verse diversificado y dividido acarrea la existencia y aquello que la posibilita alimentándola. No en vano *nomos* (*νομός*) también significa pastura, campo, comida y residencia; es aquella ley que como una forma de justicia dispensa y adjudica lo que a cada uno le toca o le corresponde en concordancia con su naturaleza. Existe una íntima unión entre el *nomos* y la justicia, *Dike* (*Δίκη*), con lo cual, a partir de la existencia y la actividad de los números, se dispensa la justicia que gobierna tanto a los cielos, a los mismos dioses, a los hombres y todo lo que habita el universo.

2.3.6.2. La esencia del número está dada en lo par e impar

La problemática de la naturaleza par e impar del número nos lleva a lo finito (*περαίνω*) como a lo infinito o ilimitado (*ἄπειρος*), a aquello que carece de límite, de *ἀ* (sin) más *πεῖραρ, πέρας* (fin, límite, extremidad). Todo esto remite al *apeiron* (*ἄπειρον*) que es infinito, ilimitado e indefinido. A su vez, existe lo finito y lo infinito que está dentro (*εἶς*) y fuera (*ἐξ*); ambos se necesitan mutuamente realizándose en el ser (*εἶναι*) que se muestra entre el número par (*ἄρτιος*) y el número impar (*περισσός*). Todo lo que ha precedido a ambos períodos (*ἕνος*) pertenece al uno (*ἕνας*) en cuanto número los precede y cubre a todo el cielo. Los contrarios se necesitan, lo finito viene con lo finito, lo que todavía es inacabado viene acompañado de lo perfecto, a lo de adentro le viene asociado lo de afuera, estos extremos se vienen a encontrar con el uno que corresponde al cielo constituido por todas sus partes. Lo que aquí se tiene es la noción de un número uno equivalente al cosmos mismo; en ese número encontramos tanto las partes como los contrarios de las mismas. Un gran avance es considerar que las afecciones provienen de lo numérico en cuanto determina las costumbres e inclinaciones que están en el principio que gobierna a los entes (*ἀριθμόν νομίζοντες ἀρχήν εἶναι.* 986α-15). Lo numérico es aquello que completa, engloba y abraza al ente para circunscribirlo dentro de lo carente de fronteras como aquello que es infinito (*ἄπειρος*). También se aprecia el número como par e impar manifestando que de ahí procede lo uno (*καί γάρ ἄρτιον εἶναι καί περιττόν*. 986α-20): tal naturaleza dual (*ἕνος*) es esencial al número y a todas sus partes constitutivas que manifiestan una completitud bajo la unidad celestial. El concepto numérico es recreado en relación con los géneros masculino y femenino, y con los contrarios en medio de un escenario ilimitado (*ἄπειρο*). Pitágoras plantea una teoría para la fundamentación de los números, el número uno lo vincula como esa totalidad, no obstante, la génesis de los números como diversos entre sí los hará derivar de la díada. De esa manera evita caer en la impredicatividad de un número uno como una totalidad ilegítima no axiomatizable.

2.3.6.3. Pitágoras prefiguró la teoría de conjuntos e introdujo la noción de elemento

Es importante destacar que la noción de elemento (*στοιχείο*) está unida a la existencia del número, así es como el elemento numérico (*ἀριθμοῦ στοιχεῖα*) surge en este planteamiento pitagórico. Se sabe así que la teoría de los conjuntos de Georg Cantor está antecedida por la teoría pitagórica de los números, y cómo la noción de elemento (*Die Menge*) en Cantor está relacionada con el *stoicheío* (*στοιχείο*) pitagórico. En ese sentido, la aritmética vendría a constituirse en la disciplina insigne que inspiró la modelación formal de la matemática a partir de la teoría de conjuntos. A su vez, también ha sido inspiradora para la química, en especial, lo que hoy conocemos como la tabla periódica, que se origina a partir de esta formulación de los elementos (*στοιχεία*) que constituyen la materia. La *hylé* (*ὕλη*) se origina a partir de una formulación aritmética que involucra una totalidad abordada desde sus partes constitutivas fundamentales, capaz de agarrar y sostener (*ἀρτάω*) algo de manera completa y perfecta (*ἄρτιος*), en este preciso y justo (*ἄρτι*) momento, y más allá de todo límite (*περισσός*). Es perceptible cómo la misma noción de elemento aritmético y, por ende matemático, posee una fuerza de cohesión que sostiene de manera excesiva o suficiente lo que procede de arriba (*περί)* o del más allá rodeándolo y cobijándolo todo. Es también una evocación a los números impares que plantean los mayores retos dentro de una formulación aritmético matemática dado que rompe todos los estándares dentro de una regularidad normativa y formulativa, además, lo interesante es que pueden ser conceptualizados como un número par al cual se le agrega un uno: $\{2k + 1: k \in Z\}$.

2.3.6.4. Los números están en el tránsito de lo amorfo a lo formado bajo la luz

La actividad iluminadora (*φαίνω*) de los números (*ἀριθμός*) posibilita que algo aparezca, emergiendo de un estado que se supone no posee luz, ya que es potestad de los números traer algo a la existencia revelándose a sí mismo. Así, se sugiere que el estado previo a la actividad numérica estaba invadido por una oscuridad, ya que cuando se pasa del *cronos* (*κρόνος*) al *kairos* (*καιρός*) se implica la creación de una realidad dotada de una dimensionalidad expresada en una espacialidad y una temporalidad. En aquella dinámica dual que crea una diversidad de marcos de referencia para situar los entes diferenciados en especies y géneros de diferente jerarquía. En el *cronos* hay una ausencia de tiempo y espacio, es el no-lugar en el no-tiempo. La apariencia (*φάσις*) es un resultado de la actividad iluminadora y consecuencia calórica que proviene de los números, que hacen visible (*φαντάζω*) mostrando lo que los rodea y, simultáneamente, tal actividad viene acompañada de su opuesto complementario, la oscuridad. Pero esta oscuridad es distinta a la que se tiene en el *cronos* original previo al ordenamiento dual de la realidad; en ese estado previo a la existencia del *kairos* se tenía algo amorfo, donde todo estaba mezclado de manera indiferenciada. Pareciera que la creación del universo donde el cielo (*οὐρανός*) original, metafóricamente hablando, se desploma sobre sí mismo creando un cielo secundario unido y complementado por la tierra, fuera el fruto de una separación y escisión de lo que estaba contenido en el uno. Del mismo cielo primigenio emerge el cielo derivado una tierra a la que va a fertilizar para traer la vida.

A simple vista se distinguen dos estadios cualitativamente diferentes del número: uno que nos trae (*νομίζω*) la ley (*νόμος*), imponiendo una costumbre que es un tipo de uniformidad estable que posibilita el desarrollo de la vida desde el origen (*ἀρχή*) como lo primero (*ἄρχω*), (*ἀριθμὸν νομίζοντες ἀρχὴν εἶναι καὶ ὡς ὕλην*). Desde este estadio numérico primigenio surge la materia (*ὕλη*), desde donde se sufre (*πάσχω*), fruto de ese experimentar que trae emociones y se cae bajo el juego de los cambios de la fortuna y el infortunio (*πάθημα*). Es el lugar del pathos (*πάθος*) abordado como aquello que acontece y sucede fruto del devenir de la misma existencia. En este escenario, el segundo estadio numérico hace referencia al elemento aritmético (*ἀριθμοῦ στοιχεῖα τό τε ἄρτιον καί τό περιττόν*). Se sugiere que el mismo número posee una corporalidad capaz de materializarse a partir de un estado carente de materia como su primer estadio generatriz luminoso. En este estadio se manifiesta la dualidad numérica entre lo impar (*περιττόν*) y lo que es par (*ἄρτιον*). En consecuencia, se tendrían dos clases de elementos, donde existe una preeminencia de lo impar sobre lo impar, hecho que permite establecer no solo un orden sino también la conexión con el uno numérico primigenio que se da en el primer estado y que posibilita que se pueda construir una secuencia o una sucesión numérica en la que se toma al uno impar como origen pudiendo irlo alternando con el dos par y así construir todos los números por medio de dos sucesiones numéricas: la de los números impares y la de los pares, que se realizan en un final (*περαίνω*) que pasa (*περαστικός*) encaminándose (*περνώ*) hacia el infinito (*ἄπειρος*) (*τούτων δέ τό μέν πεπερασμένον τό δέ ἄπειρον*).

2.3.6.5. La existencia de dos órdenes cardinalidades para el número uno

De esta manera se ve que los dos infinitos son distintos, el del número uno parece rodearse a sí mismo y no es un infinito numérico[149] sino más bien un infinito amorfo carente de un ordenamiento, mientras el segundo infinito es de naturaleza numérica, está muy ordenado y es doble: se tiene un infinito impar y un infinito par derivados como consecuencia de las series numéricas que se proyectan con cierta independencia. Esto lleva a que el número establezca su arraigo en el lugar del primero, desde donde el uno se establece en relación con estos dos períodos (*τόν δ' ἀριθμόν ἐκ τοῦ ἑνός*). Sobra decir que existen a su vez dos números uno, el primer número uno es aquel que está en el *cronos*, que es infinito y el segundo uno es aquel conectado a la serie de los números impares y que posibilita la serie de los números pares. Tal es el estado de cosas de todo el universo (*τὸν ὅλον οὐρανόν*); se desprende de la dinámica de los números, donde lo impar tiende a relacionarse más con lo finito (*πέρας*) y lo impar con lo infinito (*ἄπειρον*). Pareciera que existe ese deseo de algún tipo de convergencia de las series, dado que los números impares impulsan hacia delante y los números pares contraen hacia dentro. En ese sentido el

[149] Georg Cantor (1895) en su obra: *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, introduce la existencia de varios infinitos, siendo el número cardinal Aleph-Cero $\aleph_0$ el número transfinito más pequeño, a partir del mismo se construyen infinitos más grandes: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, …,$\aleph_{\nu,\ldots}$ los cuales no agotarán la concepción de infinito, después de $\aleph_\nu$ tenemos $\aleph_\omega$, siendo más grande $\aleph_{\omega+1}$ (pág.109).

movimiento del universo sería el resultado de la dinámica que enfrenta las dos naturalezas contrarias que dinamizan las dos sucesiones numéricas.

2.3.7. Los números definen las categorías que constituyen la predicación de todo lo existente

Un tema que amerita toda nuestra atención es la relación de la base numérica, en este caso, los diez principios (*ἀρχάς δέκα*), como fundamento para una teoría conceptual acerca de las categorías matemáticas[150]. Este tópico introduciría una complejidad inimaginable en lo tocante a la naturaleza del número, dado que se podría establecer una sobreyectividad entre cada categoría con cada número: diez categorías corresponden a diez números básicos.

> *Pero otros, entre estos mismos, dicen que hay diez principios, que enumeran paralelamente: finito e infinito, impar y par, uno y pluralidad, derecho e izquierdo, masculino y femenino, quieto y en movimiento, recto y curvo, luz y oscuridad, bueno y malo, cuadrado y oblongo. (986α 21-26)*
>
> (*Others of this same school hold that there are ten principles, which they enunciate in a series of corresponding pairs: (1.) Limit and the Unlimited; (2.) Odd and Even; (3.) Unity and Plurality; (4.) Right and Left; (5.) Male and Female; (6.) Rest and Motion; (7.) Straight and Crooked; (8.) Light and Darkness; (9.) Good and Evil; (10.) Square and Oblong. Ἕτεροι δέ τῶν αὐτῶν τούτων τάς ἀρχάς δέκα λέγουσιν εἶναι τάς κατά συστοιχίαν λεγομένας, πέρας καί ἄπειρον, περιττόν καί ἄρτιον, ἓν καί πλῆθος, δεξιὸν καί ἀριστερόν, ἄρρεν [25] καί θῆλυ, ἠρεμοῦν καί κινούμενον, εὐθὺ καί καμπύλον, φῶς καί σκότος, ἀγαθὸν καί κακόν, τετράγωνον καί ἑτερόμηκες: 986α 21-26*).

[150] Uno de los aportes más significativos de las matemáticas modernas ha sido la obra de Saunders MacLane (1969): *Categories for the Working Mathematician*, en ella se toma el vocablo categoría para indicar un nuevo aspecto fundacional para apoyar las pruebas de los teoremas matemáticos, distinto al utilizado hoy día y conocido como la teoría de conjuntos. Se manifiesta que podemos describir las categorías por medio de axiomas y las denominaremos metacategorías. El tema se introduce con la noción de metagráfico, el cual consiste en los objetos a, b, c,…, las flechas f,g, h,… y dos operaciones: el dominio que asigna a cada flecha f un objeto a = dom$f$, codominio el cual asigna una flecha f a un objeto b = cod$f$. Se simboliza f: a → b. Una metateoría es un metagráfico con dos operaciones adicionales: identidad, la cual asigna a cada objeto una flecha $id_a = 1_a$: a → a. Y la composición que asigna a cada pareja ⟨g, f⟩ de flechas con domg = cod$f$, y una flecha go$f$ llamada su composición con go$f$ = dom$f$ → codg (pág. 7).

Una vez más, se afirma que desde el origen mismo (*ἀρχή*) tenemos diez (*δέκα*) principios o propiamente diez comandos. La década o el décimo involucra la noción de un orden dado y que estamos frente a un conjunto de números ordinales que establecen lo que es: primero, segundo, tercero, hasta lo que es décimo. Se tienen diez órdenes o actos de habla (*λέγω*) desde los cuales se establece y configura el ordenamiento de la realidad (*ἀρχάς δέκα λέγουσιν*). Estos son establecidos e impartidos desde la misma génesis de la realidad, con lo cual se puede aseverar que son diez funciones que acontecen de manera simultánea. No se tiene que unos sean primeros que otros, sino que los diez aparecen como nociones primitivas fundantes de la predicación de la realidad por la acción de la palabra. No en vano en el origen se halla la palabra y esta se manifiesta bajo el comando del diez, sin que pierda de vista que es un diez doble ya que está contemplando su contrario complementario. La base decimal numérica extendible a los enteros positivos como a los negativos se tendría desde el origen mismo del universo. Hacia abajo (*κατά*) existen estos los diez pilares o columnas (*συστοιχία*) que soportan la palabra o la misma actividad de hablar, actuando como uno solo dado que se utiliza la conjunción en presente infinitivo singular (*εἶναι*), que sugiere que funcionan y operan como un solo y único principio constitutivo dotado de diez facetas o lados dobles. Es posible imaginar un conjunto salida en cuyo dominio se tienen estas diez instancias dobles, o sea veinte, desde las cuales se puede establecer una serie de relaciones hacia lo que está fuera o se desprende de ellas, que abordadas como codominio permitirían definir diez funciones f que parten de diez parejas ordenadas.

2.3.7.1. El gran mérito de Pitágoras fue plantear el infinito fuera de una serie numérica

Algo que hay que destacar en Pitágoras es haber logrado conceptualizar y haber propuesto el infinito (*ἄπειρον*) como una unidad o mónada indivisa representada en el número uno. Es lo primero que existe y está dado antes de verse manifestado como díada, de la cual surgen sus diez principios dobles. El cosmos emerge a partir de la actividad de la díada, la cual trae a la existencia a los números tal como los conocemos. Sin embargo, el enorme mérito de Pitágoras es conceptualizar e imaginar un infinito ajeno a una serie o sucesión numérica. Luego, en el universo constituido por parejas complementarias y opuestas entre sí, presenta la pareja finito-infinito más afin a verse representado en una serie numérica aritmética. No se debe olvidar que los griegos no tuvieron un sistema de enumeración que les permitiera capturar y simbolizar expresiones numéricas muy grandes. En la primera aserción se tiene un uno infinito no ordenado ni diferenciado, el vocablo es la unión de la alfa privativa (*α*-) con un vocablo relacionado con un juicio, proceso, prueba, ensayo (*πεῖρα*). Lo que conduciría a algo que carece de experiencia, que es ignorante y no está familiarizado con algo. A su vez, hay otro significado asociado a límite o final (*πέρας*), que es el más aconsejable escoger: *aperios* (*ἄπειρος*) como ilimitado sin final, sin frontera, infinito, circular. La última aserción hace referencia a la tierra firme como continente en oposición a la isla (*ἤπειρος*).

2.3.7.2. Los diez principios pitagóricos son la base para la teoría de las categorías

Se menciona que existen 10 principios (*ἀρχάς δέκα*) constitutivos de la realidad que están desde el mismo origen, mencionados en la *Metafísica* de Aristóteles (986a 18-26):

- Finito (*πέρας*): está relacionado con fin, límite, frontera, meta o extremidad. Lo que está más allá (*πέρα*) y está relacionado con el verbo *περαίνω* que evoca lo que se ha cumplido o realizado.
- Infinito (*ἄπειρον*): que proviene de aquello que carece de prueba, lo ilimitado (*ἄπειρος*), aquello que no se puede experimentar, sin frontera. Sin experiencia o ignorante.
- Par (*ἄρτιον*): relacionado con aquello que es completo, perfecto, proporcionado, justo, que ha tenido un desarrollo integro, deseable (*ἄρτιος*). De *ἄρτι*, justo.
- Impar (*περιττόν*): hace referencia a aquello que se conoce bien, algo superior (*περίοιδα*). Aquello que está más allá del número regular (*περισσός*), algo prodigioso, extraño, extraordinario, que está sobre o encima, al otro lado, después de. Att. *περιττός , ή, όν,* (de *περί*, como *ἔπισσαι* de *ἐπί*, *μέτασσαι* de *μετά*).
- Unidad (*ἕν*): del cardinal uno (*εἷς*) o del ordinal primero, lo más prominente y temprano (*πρῶτος*), aún puede señalar un número primo.

- Pluralidad (*πλῆθος*): una multitud de cosas, un gran número, mayoría. Proviene del verbo *πλήθω*, completar, llenar, estar uno lleno, (plḗthō, “yo completo”). Es la contraparte del verbo intransitivo llenar, estar uno lleno o completamente satisfecho, como también una mujer encinta (*πίμπλημι*).
- Derecho (*δεξιόν*), que viene de *δεξιός*: aquello que está situado a la derecha, afortunado, feliz, venturoso, cortés, capaz. También nos remite al verbo *δείκνυμι* que significa traer algo a la luz, exponer o mostrar algo, darlo a conocer y exponer.
- Izquierdo (*ἀριστερόν*), relacionado con *ἀριστερός*: izquierda, ominoso, siniestro, azaroso, tosco, pesado, torpe, indómito, difícil.
- Masculino (*ἄρρεν*) que viene de *ἄρσην*: macho, fuerte, viril, enérgico.
- Femenino (*θῆλυ*) de *θῆλυς*: hembra, delicado, fresco, fructífero, alimentador, débil.
- Quieto (*ἠρεμοῦν*) de *ἠρεμέω*: estar tranquilo, descasar, quedar quieto.
- Movimiento (*κινούμενον*) de *κινέω*: poner en movimiento, remover, cambiar, agitar, temblar, avanzar.
- Recto (*εὐθύ*) de *εὐθύς*: directo, derecha, franco, honrado, rectamente, al punto.
- Curvo (*καμπύλον*) de *καμπύλος*: curvo, encorvado.
- Luz (*φῶς*) de *φάος*: luz del día, luz solar, luz de la vida, luz de una antorcha, la luz de los ojos; degustar, felicidad, deliberar, victoria, gloria.
- Oscuridad (*σκότος*): tinieblas, noche, ceguera, desvanecimiento, vértigo, sombra de la muerte, sombra dentro del vientre materno, error, decepción, ignorancia, misterio.
- Bueno (*ἀγαθόν*) de *ἀγαθός*: bueno, noble, probo, útil, valeroso, recto, afortunado.
- Malo (*κακόν*) de *κακός*: malo, sucio, sórdido, inhábil, cobarde, malévolo, bajo, vicio.
- Cuadrado (*τετράγωνον*) de *τετράγωνος*: con cuatro ángulos, cuadrado, perfecto, fuerte, sólido.
- Oblongo (*ἑτερόμηκες*) de *ἑτερομήκης*: con lados de longitud desigual, más largo que ancho, oval, ovalado, elíptico, parabólico.

Nótese cómo todo este tipo de caracterización acerca de la predicatividad de lo decible y decidible influyó en el planteamiento aristotélico de las categorías. El mismo

Pitágoras pareció no darle mucho crédito a este hecho, aunque tiene el mérito de haber mencionado este importante logro sobre el quecimentó su propia posición. Se puede decir que estos principios podrían reagruparse en: aquellos propios de la matemática: par e impar, derecho e izquierdo, recto y curvo, cuadrado y oblongo. Están más propios de una física como: luz y oscuridad, quieto y movimiento. Los propios de la filosofía serían todos en especial en esa época, donde fue Pitágoras el primero en acuñar la palabra filósofo, y que caracteriza a un practicante amoroso de las matemáticas, como también de la música, la astronomía, la gimnasia y otras artes. Esto llevaría a afirmar que todo filósofo es un matemático. La filosofía como las matemáticas comparten las siguientes parejas: finito e infinito, unidad y pluralidad, y habría una que pertenecería tanto a la filosofía abordada en torno a la conducta ética, como lo es la de bueno y malo.

2.3.7.3. El número establece la quietud y el movimiento como fundamento para la física

El número es aquello que se establece tanto en la quietud como en el movimiento (*ἠρεμοῦν καί κινούμενον*. 986α-25), como lo que es recto y curvo (*εὐθὺ καί καμπύλον*), luz y oscuridad (*φῶς καί σκότος*), lo bueno y lo malo (*ἀγαθόν καί κακόν*), el cuadrado y oblongo, propio de aquello que tiene lados de longitud desigual (*τετράγωνον καί ἑτερόμηκες*. 986- 25). Estas parejas se constituyen en los modeladores que ordenan y organizan al universo, en ellas se reflejan los estados posibles de predicación existencial de los entes. Es de resaltar, que en el manejo de la díada (*δυάς*) se tiene implícitamente una noción de ‘par ordenado’, tanto cualitativo como cuantitativo, y susceptible de verse vinculado con la serie numérica fundamental que gobierna la base numérica decimal. El número diez mismo se asemeja a la representación de un estado de categorización o predicación fundamental de todo lo que existe, donde los números impares (*μονοί αριθμοί*) son aquellos que diferencian y los números pares (*ζυγοί αριθμοί*) son los que balancean trayendo equilibrio.

Para Pitágoras, la naturaleza es concebida en torno a la dinámica que se da entre los contrarios en relación a la cualidad y a la cantidad: *Este se expresó indeterminadamente* *acerca de los contrarios*[151] (*οἱ δέ Πυθαγόρειοι καί πόσαι καί τίνες αἱ ἐναντιώσεις ἀπεφήναντο*, 986b-1). Este tópico enriquece las posibilidades de conceptualización teórica de los constituyentes de una matemática al abrir un gran espacio que puede ser colonizado y ocupado por variadas propuestas formales. Esto permite aseverar variados planteamientos de naturaleza epistemológica y ontológica que incentivan un adelanto mayor de los que ofrecía la práctica de la misma disciplina. No siempre lo que se plantea como posibilidad llega a ser concretado dentro de una teoría que, en el contexto pitagórico, poseía distintos niveles sujetos a diversos tratamientos formales. Sea en el caso entre la armonía de las esferas, de las cualidades propias de los enteros de una base decimal y del conocido axioma del triángulo pitagórico, se dan distintas jerarquías de lo que sería susceptible de ser matematizable. A su vez, la noción de lo que es la matemática es mucho más amplia y matizada de lo que es hoy día, el número era definido a nivel extensivo e intensivo, tema que hoy día no se toca por su complejidad.

2.3.7.4. El número fundamenta la noción de par ordenado

La necesidad de presentar una argumentación donde lo numérico concebido también como dualidad se presenta como principio constitutivo desde el mismo origen de cuanto existe: *Que los contrarios son principios de los entes*[152]*. Cuántos y cuáles son estos principios, solo nos dice una* (*ὅτι τἀναντία ἀρχαί τῶν ὄντων: τό δ' ὅσαι παρά τῶν ἑτέρων, καί τίνες αὗταί εἰσιν*, 986b-2). Lo opuesto está en el origen de lo que existe como está presente al lado de uno mismo. En la misma concepción del origen de cuanto existe siempre se manifiesta la dualidad, que está dada también en cada ente atándolo y dándole unidad (*ἐνδέχεται συνάγειν*). En vez de disociar la oposición crea armonía entre las distintas

---

[151] Traducción tomada de la *Metafísica de Aristóteles*, Edición trilingüe, Valentín García Yebra, Editorial Gredos, Madrid, 1970.

[152] La noción de pareja ordenada se relaciona con el concepto de contrario y con el de la díada, es tanta su importancia, que se habla de las conectivas lógicas binarias y de las tradicionales inferencias lógicas. Dado que toda relación se define entre dos términos, aunque se den muchas más proposiciones, siempre se las toma de dos en dos: sea $p \rightarrow q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \leftrightarrow q$. Ver: *Introducción a la lógica matemática* por P. Supples y S. Hill (1976). La noción de pareja ordenada es necesaria para la fundamentación de las matemáticas, tal como la que aporta Norbert Wiener (1914) en *A Simplification in the Logic of Relations*, como (a, b): = $\{\{\{a\}, \varnothing\},\{\{b\}\}\}$, en la cual se toma en cuenta la teoría de los tipos lógicos de Russell. Asimismo, se tiene la de Kzimierz Kuratowski (1921): (a, b) k: = $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

partes constitutivas, esto permite evocar el planteamiento de la unidad numérica del uno o lo uno como aquel englobante que todo lo contiene, dando lugar al planteamiento de una jerarquía aritmética donde tenemos una unidad suprema o un uno que contiene a todos los distintos enteros como expresiones de él mismo: *σαφῶς μέν οὐ διήρθρωται παρ᾽ ἐκείνων* (986b-5). Verdad distinta, que divide (*διαρθρόω*) a quien está vacío (*κενόω*), tanto a la materia (*Ὕλη*), ordenando los elementos: *pues afirman que la substancia está constituida y plasmada a partir de los elementos, considerados como inmanentes en ella* (*ἐοίκασι δ᾽ ὡς ἐν ὕλης εἴδει τά στοιχεῖα τάττειν: ἐκ τούτων γάρ ὡς ἐνυπαρχόντων συνεστάναι καί πεπλάσθαι φασί τήν οὐσίαν*, 986b-5). La substancia o la *ousía* está plasmada en estos elementos, que son identificables con los números en cuanto la unidad evocada por lo uno.

Los pitagóricos admitieron dos principios (*ἀρχάς*) que mantenían una relación con el origen mismo del movimiento como es lo limitado y lo ilimitado, donde lo ilimitado mismo (*ἄπειρος*) y el uno (*αὐτός*) son la sustancia (*οὐσία*) de las cosas predicadas (*κατηγοροῦνται*). Lo que lleva a anticipar cómo en la génesis misma de las categorías está el número inicialmente concebido como aquella unicidad que es capaz de integrar y agrupar a todos los entes, aquella unidad que engloba todo lo que puede ser dicho y a la vez carece de límite. Es a partir del desglose de ese todo que los números vienen a constituirse como numerandos distintos, cuya tarea es emular las propiedades propias constitutivas de la esencia o substancia del número. Las categorías se corresponden desde esta perspectiva en aquellos diferendos en los que se han desglosado los distintos aspectos que conforman la naturaleza del número. No en vano, el número es la sustancia que está presente en todas las cosas, afirmación que viene a anticipar que la predicación parte del número; asimismo, la cuantificación de una proposición está determinada por el ordenamiento jerárquico que parte de la propia naturaleza numérica. Se ha de tener muy presente que tal como desde el origen mismo la existencia se manifiesta a través de una década aritmética doble, este hecho permite establecer una correspondencia entre los diez principios constitutivos que sirven de pilares a la realidad. Sea el caso en que se puede establecer una biyectividad donde en el conjunto de salida se sitúan diez y en el de llega los otros diez.

2.3.7.5. El número pitagórico prefigura la noción de función y veracidad asertiva

Sea el caso de la función *ƒ(λέγω-ἀρχή)* $_{δέκα}$*: συστοιχία-λέγω*, interpretada desde una perspectiva matemática, el operador *f* que es aquella función capaz de transformar algo en otra cosa está dado por la palabra viva decir (*légo, λέγω*). Un operador capaz proclamar una acción verbal que reune y escoge en torno suyo ordena y enumera, esa función bien podría ser simbolizada como f^{λ}. No hemos de extrañar que en matemáticas el famoso matemático estadounidense Alonzo Church introdujó el llamado cálculo lambda para resolver el problema de la decisión (*Entscheidungsproblem*), que permite encontrar un algoritmo general para expresar una fórmula de primer orden como un teorema. Aunque no fue posible encontrarlo debido a los teoremas de Gödel sobre la incompletez de la axiomatización de la aritmética y por ende de las matemáticas. Es de gran utilización en la informática al facilitar las funciones computables, $f^{\lambda}\ (\alpha)_{10}\colon \sigma^{\lambda}$, la palabra permite instaurar los diez principios que soportan la existencia del cosmos.

En el comienzo del origen de la vida diferenciada se diligencian diez principios co-elementarios que hacen posible la existencia del universo. Estos han de ser entendidos como una serie ordenada doble de diez elementos que subyacen a la acción misma de la palabra soportándola o posibilitándola. En este parágrafo está unido al origen (*ἀρχή*) de la misma existencia del número como una serie ordenada de diez números cualitativa y cuantitativamente diferentes entre sí. Este concepto viene dado en la noción del décimo o del diez ordinal, ya que los números ordinales establecen un orden y no una mera cantidad para lo cual tendríamos los números cardinales. El vocablo *συστοιχία* tiene relación con el verbo *systíno* (*συστήνω*) cuyo significado es el de introducir o establecer, también relacionado con el verbo *synistó* (*συνιστώ*) que evoca la acción de recomendar o sugerir. Lo cual concuerda que desde el origen se introducen diez principios ordenados presentados como parejas antagónicas o complementarias, hay que destacar la presencia de la palabra o el acto de evocarla, la cual se da como una acción viva declarativa y perfomativa en el verbo *légo* (*λέγω*), que significa tanto decir o hablar asimismo como subyacer, también posee los significados de recoger, reunir, juntar, escoger, contar, enumerar, entre otros. Además, en medio de ambos textos (*ἀρχάς δέκα λέγουσιν) -[εἶναι τάς κατά]-* (*συστοιχίαν* *λεγομένας*) se halla el verbo ser o estar (*εἰμί*) en presente de indicativo (*εἶναι*) para indicar una acción infinitiva, que se desarrolla y acontece sin ningún tipo de limitación ni distinción de género ni número. Esta viene unida a una acción que desciende expresada por medio de la preposición (*κατά*), que significa: abajo, hacia abajo, entre, contra, a lo largo, hacia, atrás, completo. De esta manera, desde el origen se da el acto de habla que proclama la década aritmética que va a descender a fin de establecer los principios constitutivos de la realidad. Hay que destacar que el verbo *légo* (*λέγω*) aparece dos veces: una, indicando la acción que parte de un origen y, la otra, el destino, evocado como la realidad creada por la acción del número desde la cual de nuevo es evocada.

2.3.8. Los contrarios se constituyen en los principios plasmados en los elementos

Esto es lo que se puede deducir de ambas escuelas: que los contrarios son principios de los entes. Como pueden ser reducidos a las causas mencionadas, tampoco estos lo han explicado claramente, aunque parecen incluir los elementos en la de especie material; pues afirman que la substancia está constituida y plasmada a partir de los elementos, considerados como inmanentes en ella.

> *Mientras los pitagóricos enseñaron cuántos y cuáles eran. Esto es, por consiguiente, lo que se puede decir de ambas escuelas: que los contrarios son principos de todos los entes. Cuántos y cuáles son estos principios, solo nos lo dice una. Pero cómo pueden ser reducidos a las causas mencionadas, tampoco éstos lo han explicado claramente, aunque parecen incluir a los elementos enla de especie material; pues afirman que la substancia está constituida y plasmada a partir de los elementos, considerados como inmanentes en ella.*
>
> ([986b] [1] *but the Pythagoreans pronounced how many and what the contraries are. Thus from both these authorities we can gather thus much, that the contraries are first principles of things; and from the former, how many and what the contraries are.How these can be referred to our list of causes is not definitely expressed by them, but they appear to reckon their elements as material; for they say that these are the original constituents of which Being is fashioned and composed. [986β]* [1] *οἱ δέ Πυθαγόρειοι καί πόσαι καί τίνες αἱ ἐναντιώσεις* [2] *ἀπεφήναντο. παρά μέν οὖν τούτων ἀμφοῖν τοσοῦτον ἔστι λαβεῖν, ὅτι τἀναντία ἀρχαί τῶν ὄντων: τό δ' ὅσαι παρά τῶν ἑτέρων, καί τίνες αὗταί εἰσιν. πῶς μέντοι πρός* [5] *τάς*

> *εἰρημένας αἰτίας ἐνδέχεται συνάγειν, σαφῶς μέν οὐ διήρθρωται παρ' ἐκείνων, ἐοίκασι δ' ὡς ἐν ὕλης εἴδει τά στοιχεῖα τάττειν*: *ἐκ τούτων γάρ ὡς ἐνυπαρχόντων συνεστάναι καί πεπλάσθαι φασί τήν οὐσίαν*).

Los pitagóricos siempre estuvieron interesados en aquello sobre lo que versa la cantidad o la extensión (*πόσος*); en especial, el tema que más les atrajo estaba relacionado con la oposición (*ἐναντίωσις*). Se trata de aquello que se sitúa contra o en oposición a algo (*ἀντί*) capaz de desencadenar una oposición (*ἐναντίος*) que enfrente y genere una contrariedad. Tiene la potestad de atraer al situar la procedencia (*ἀπό*) de la misma y lo que la motiva. Esto lleva a poder comprender las maneras en que se muestra, revela o actúa (*ἀποφαίνω*) lo que la hace visible (*φαίνω*) en cuanto es capaz de traer y desplegar luz (*φάος*). Una vez más, se está frente al problema de la cantidad versus la cualidad, ya que la oposición se hace más visible cuando identificamos las naturalezas contrarias irreducibles entre sí. Estas vienen a constituirse como los *praedicāmentum* o aquellas categorías que permiten precisar las propiedades esenciales acerca de la naturaleza de algo, se constituyen en aquellas instancias que pueden orientarnos de manera asertiva y aseverativa en la legitimidad de lo que puede ser dicho o afirmado sobre cualquier ente. Resulta motivante encontrar la procedencia (*παρά*) de ambas (*ἄμφω*) en la medida que se sea capaz de tomarlas o asirlas (*λαμβάνω*); una vez más, surge la pareja como algo que se sitúa en frente de otro algo a manera de oposición (*ἐναντίος*), y está presente desde el mismo origen (*ἀρχή*) como aquello que realmente existe (*ὄντα*). Una preocupación esencial en todo el sistema pitagórico es garantizar la oposición desde el mismo origen (*ὅτι τἀναντία ἀρχαί τῶν ὄντων*) de las diez parejas en las que se fundamentan los principios que gobiernan y ordenan el cosmos.

La diferencia se establece a partir de lo otro (*ἕτερος*), más entendido como aquello que es diferente a nivel de un par, en especial, su segundo constituyente. Aquí se percibe cómo el orden viene dado por lo derivado, como aquel elemento que toma distancia y complementa, y permite distinguir el antecedente a partir del consecuente. Aquel (*τίς*) que está entrando y yendo (*εἴσειμι*) en una actividad reflexiva consigo mismo (*ἑαυτοῦ*), asume aquella vía (*πως*) en concordancia (*μέντοι*) con la dirección (*πρός*) indicada por esa fuerza irresistible propia del deseo y del amor (*ἐρῶ*). Este es el responsable (*αἴτιος*) de originar o causar (*αἰτία*) aquella acción que alguien emprende por sí mismo (*ἐνδέχομαι*): aquello que uno ha aceptado y recibido (*δέχομαι*), y que le permite a uno entrar (*δύω*) dentro (*ἐν*) a fin de poder reunir, unir y reconciliar (*συνάγω*) aquello que está junto a uno (*συν*) guiándolo (*ἄγω*). Este hecho permite que la acción parta de aquella fuerza que une los contrarios (*Ἔρως*), la cual posee una alta capacidad para orientarse y conducirse de manera asertiva uniendo naturalezas opuestas. Los diez principios están dados como fuerzas contrarias y enfrentadas entre sí que se hallan finalmente armonizadas y conciliadas como un único *momentum* por la fuerza emanada del amor (*ἔραμαι*). Esta desea apasionadamente (*ἔρως*) y es capaz de ser la fuerza que atrae y pega lo que de otra manera terminaría enfrentado y, en consecuencia, con posibilidades de desaparecer de manera definitiva. La existencia en este sentido está motivada por esta correspondencia dinámica dual de naturalezas contrarias conciliadas por la fuerza que le imprime movimiento a la vida.

2.3.8.1. La forma subyace a la materia ordenando los elementos

Es claro (*σαφής*), por otra parte (*μέν*), que tal fuerza que mantiene la coherencia entre los principios constitutivos no *(οὐ)* es capaz de seguir dividiéndolos, porque (*παρά*) la cosa que está más allá (*ἐκεῖνος*) está vacía (*κενόω*). Parece asemejarse (*ἔοικα*) que lo que hay dentro (*ἐν*) de la materia o substancia, la hylé (*ὕλη*) puede ser percibida (*εἴδομαι*) como la forma (*εἶδος*) o esencia que ordena (*τάσσω*) los elementos (*στοιχεία*). Se nota en este comentario que la fuerza que une (*ἔρως*) no está facultada para seguir dividiendo los principios constitutivos dados en parejas, no es visible y tan solo es perceptible la materia misma, no lo que la subyace. En ella se puede identificar una forma (*εἶδος*) que impone un tipo de ordenamiento a los elementos. En esta cita aparece el *eidos* que también es traducido como la especie o el tipo para indicar que está citado en una forma sustantivada dual neutra (*εἴδει*), clara indicación de que en griego, además del singular y el plural, tenemos una forma dual para las parejas o pares. Se hace alusión a los principios constitutivos emanados de la actividad ordenadora del número: a las diez parejas ordenadas les subyace una forma (*εἶδος*) que ordena (*τάσσω*), arregla y dispone los elementos. En ese sentido, los elementos (*Στοιχεία*) son reunidos (*συνάγω*) por las formas (*εἶδος*) de las que emana el orden. Este punto implica que los números que subyacen a los citados principios dobles se manifiestan como unas formas puras que imponen un orden no solo a nivel de cada pareja ordenada sino en toda la serie de los diez principios presentes desde el origen mismo del universo. En este comentario, las formas modelan la realidad, aquello que es visto (*ὁράω*) aunque cuando queremos verlas, están vacías (*κενόω*) por dentro o no son percibibles por medio de los sentidos. A partir (*ἐκ*) de estas (*τούτων*) viene a la existencia (*ὑπάρχω*) aquello que subyace (*ὑπο*) al mismo comienzo (*ἄρχω*) como lo primero, aquello que da forma (*πλάσσω*) modelando la apariencia (*φάσις*); aquello que es traído a luz revelándose y mostrándose (*φαίνω*) como la *ousía* (*οὐσία*), es decir, la esencia o la realidad inmutable de cada uno. En este parágrafo, parece Aristóteles parafrasear a Pitágoras en cuanto identifica en aquellas formas (*εἶδος*) puras de naturaleza numérica el fundamento de la existencia misma de la realidad, constituyéndose como la esencia misma o aquel presente participio femenino del verbo ser o estar (*εἰμί*) que da soporte haciendo posible la vida.

A partir de lo planteado, se puede apreciar que el pensamiento griego presentó un lento concatenamiento de variados supuestos que fueron trabajados, reflexionados, a lo largo de varios siglos y que, en la gran mayoría de los casos, fueron pensados simultáneamente por variados autores. Esto les permitió una profundidad que en muchos casos supera la actual, unida a una lengua cuya riqueza y complejidad les facilitaba aprehender conceptos complejos. Hay que resaltar la gramática, en especial, sus estructuras semánticas y sintácticas diseñadas para brindarle una movilidad a los planteamientos que hoy día no se tienen. También existía la posibilidad de crear nuevas palabras y abordar los conceptos desde distintos niveles de discurso. Basta mirar en las declinaciones en las que, además del número singular y el plural tenemos el dual; este hecho lo vemos reflejado en la conjugación de algunos verbos que tienen la desinencia dual, aspecto que se puede apreciar en los diez principios dobles pitagóricos. Se buscaba, entonces, tener un orden mental en el que distintos tipos de consideraciones eran atendidas en cada planteamiento o teoría. Cabe destacar aquí cómo la noción de idea (*ἰδέα*), abordada en Platón dos siglos después, retoma lo dejado por otros autores como Pitágoras como su eidos (*εἶδος*), aquello relacionado con lo que se ve (*εἴδω*). Es todo un intento por construir una teoría del conocimiento y una epistemología, definiendo las facultades que intervienen en la elaboración del conocimiento y los distintos niveles en que este se da.

2.3.9. Lo que se dice de las matemáticas y la ciencia es independiente de una valoración moral

Un tema que ha sido de gran incidencia es la reclamada objetividad de las matemáticas[153], la cual se viene a concretar en el tema de la axiomatización de la misma. La matemática viene a constituirse como una teoría (*θεωρός*) donde la naturaleza (*φύσις*) al ser observada (*θεωρέω*) adquiere un mayor protagonismo. Se construye de esta manera una forma para mirarla y estudiarla mediada por las matemáticas, la cual tiene como aspiración esencial que sus consideraciones sean suficientes (*ἱκανός*) y completas (*πλέως*). Se aprecia así cómo la formulación matemática antecede a las ciencias, y se sitúa con independencia frente a las problemáticas sociales y a su valoración moral.

> *Por lo dicho puede verse suficientemente el pensamiento de los antiguos que afirmaron la pluralidad de los elementos de la naturaleza. Algunos, en cambio, hablaron del universo como si fuera una sola naturaleza; pero no todos con igual perfección o conformidad con la naturaleza (986b10-12).*
>
> (*From this survey we can sufficiently understand the meaning of those ancients who taught that the elements of the natural world are a plurality. Others, however, theorized about the universe as though it were a single entity; but their doctrines are not all alike either in point of soundness or in respect of conformity with the facts of nature. Τῶν μέν οὖν παλαιῶν καί πλείω λεγόντων τά στοιχεῖα τῆς φύσεως ἐκ τούτων ἱκανόν [10] ἐστι θεωρῆσαι τήν διάνοιαν: εἰσὶ δέ τινες οἳ περί τοῦ παντός ὡς μιᾶς οὔσης φύσεως ἀπεφήναντο, τρόπον δέ οὐ τόν αὐτόν πάντες οὔτε τοῦ καλῶς οὔτε τοῦ κατά τήν φύσιν*).

---

[153] El artículo de William Tait (1998): Beyond the Axioms: the Question of Objectivity in Mathematics, donde se expone que la axiomatización de las matemáticas en su versión moderna se le debe a David Hilbert, aunque tiene sus raíces en Georg Cantor. En ella se nota que la existencia y la verdad de las matemáticas están soportadas por una axiomatización apropiada. Cantor consideraba a todos los números como reales, que ocupaban un lugar determinante en nuestro entendimiento y que eran capaces de modificar la substancia de nuestras mentes. La existencia de los números es un hecho objetivo que se da de manera independiente de nuestro conocimiento de ellos, esto refleja cierta concepción platónica en Cantor (p. 26-29).

Aquí se menciona cómo en aquellos tiempos remotos (*παλαιός*) se dijo (*λέγω*) algo completo (*πλέως*) y suficiente (*ἱκανός*) acerca de la naturaleza (*φύσις*) de los elementos (*στοιχεῖα*), la cual es (*ἐστι*) algo llamado a observar (*θεωρέω*) en aquellos planos donde emana la teoría (*θεωρός*). Aquella visita que se hacía al oráculo a fin de poder escrutar los designios de la divinidad (*θεός*), en ese ver (*ὁράω*) que guía al pensamiento (*νοῦς*) a lo largo de un razonamiento (*διάνοια*). Se advierte que los elementos son los constituyentes de la naturaleza, y esta posición estaría presente en las consideraciones de la llamada tabla periódica desarrollada siglos después por *Dmitri Ivánovich Mendeléyev*[154], la cual está inspirada en este ancestral planteamiento. Es fundamental apreciar la naturaleza (*φύσις*) concebida como aquello que da forma a los distintos seres vivos, que está situada en el origen mismo del tiempo y que se hace presente a través de los elementos (*στοιχεῖα*), los cuales se desarrollan o crecen (*φύω*) fruto de ese (*εἶδος*) que los ordena mediado por la actividad de los números. Los diez principios constitutivos que son y que son dichos o pronunciados en la alborada de los tiempos: *"ἀρχάς δέκα λέγουσιν εἶναι"*, evocan el origen (*ἀρχή*) mismo con lo que comienza (*ἄρχω*) la vida como naturaleza. Esta está dada por diez principios que son dichos (*λέγω*); ese decir, es declarativo, en cuanto ordena, y en este sentido, la palabra ordena la realidad y no es un mero ejercicio de un decir que nada dice o comunica, sino todo lo contrario, es perfomativo: impone y crea orden. Esto está dado en concordancia con los dos significados verbales del verbo *légo*: uno, como ordenar, arreglar, contar, enumerar y, otro, como decir, hablar, contar una historia. A su vez, estos diez principios involucran el uso del verbo ser o estar (*εἰμί*) en su infinitivo (*εἶναι*): lo que es en cuanto legitimidad existencial son estos diez principios donde, además, se evoca que son sinónimo de origen, uno que se hace sentir desde el comienzo como una década. Los diez orígenes articulados por la unidad del uno que está manifestada en ellos, pero está fuera del universo ordenado, subyacéndolo y causándolo.

Se aprecia la teoría matemática en la physis (*φύσις*) como una función f, una transformación que envía y despliega (*ἀποφαίνω*) desde el origen (*ἀρχή*) estos diez

[154] Hay que destacar la obra de Dmitri Mendeléyev (1869) *The Principles of Chemistry*, donde manifiesta que la ley períodica de los elementos contribuye a incrementar nuestra visión de la materia primordial y nos lleva a percibir los elementos aún no descubiertos que eran inaccesibles a la visión química tradicional (pág. 483).

principios. En ese sentido, se estaría frente a diez funciones debido a que cada una efectúa una operación o transformación diferente a las demás f(*φύσις*), en cuyo conjunto de salida tenemos el origen (*ἀρχή*) y cuyo conjunto de llegada tenemos el cosmos (*κόσμος*). El origen impone una dirección (*τρόπος*) que rodea (*περί*) todo (*πᾶς*) lo que existe (*εἶμι*) como uno (*εἷς*), la realidad recibe una serie de direcciones emanadas por los diez principios o fuerzas emanadas de lo que está primero (*πρῶτος*). Cubriendo y cobijando todo lo que existe, se está prefigurando el uso del cuantificador universal que luego desarrolló y completó Aristóteles y que posibilita aseverar una una oración veritativa. Se evidencia un planteamiento donde se prefiguran aquellas nociones tan presentes en la física moderna y el álgebra líneal. Una de ellas está en la noción de vector y su dirección, asimismo la incorporación de la preposición *perí* (*περί*) podría ser interpretada como el espacio de tipo euclidiano, como aquel espacio ordenado de duplas o secuencia ordenada de elementos: $V \times V \rightarrow V$. Hecho que vendría a recrear la estructura algebraica que subyace a las diez direcciones que parten desde el origen dándole forma al cosmos.

2.3.9.1. La propiedad reflexiva como fundamento de la dinámica del número

Un tema básico consiste en identificar qué tipo de relación es el que caracteriza al número. Con base en el verbo (*τρέπω*), se tiene la propiedad reflexiva que sirve de fundamento a las demás. La dirección parece ser redonda, dado que es una vuelta (*τρόπος*) alrededor (*περί*), inherente a esa propiedad emanada desde el origen de hacer girar (*τρέπω*) algo en torno suyo, una evocación de la esfera como aquella forma perfecta que recrea la forma del universo. Este texto parece hacer referencia de manera indirecta a la tan conocida teoría de la armonía de las esferas de Pitágoras[155]. El texto vuelve e introduce el adjetivo para calificar la presencia de una acción que cobija todo (*τρέπω*) y no (οὔτε) cualquiera (*τις*) que sea bueno y bello (*καλός*) puede desmentirla. A su vez, tampoco ningún ente que esté en contra (*κατά*) de la misma naturaleza (*φύσις*) puede ignorar lo que la caracteriza.

[155] La armonía de las esferas es abordada por Alberto Campos (2006) en *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática*, como: la maravillosa correspondencia entre razones de potencias de números de la Tetrackis y los sonidos consonánticos, que muestra una relación de la geometría con la música. La armonía resulta de poner límite a lo ilimitado, al unificar la multiplicidad de los constrastes, al considerar que los sonidos más complejos se les puede asignar relaciones numéricas (págs. 120-121).

Una vez más, se entiende por naturaleza aquello que crece y emerge (*φύω*) desde el origen de los tiempos. En estas oraciones se manifiesta que la misma existencia de la naturaleza está por encima de las calidades morales de los mismos individuos, lo que anticipa las certezas propias de la ciencia y, en particular, de las matemáticas, vistas como una ontología y epistemología de carácter metafísico caracterizada en estos planteamientos pitagóricos. Es algo que está fuera de los linderos de la moral abordada desde la belleza y la bondad como kalos (*καλός*): las verdades o certezas de las ciencias están más allá de una valoración de índole moral o ética, aunque la tienen en cuenta su formulación se efectúa con base en una normativa formal que es independiente del aspecto volitivo de los individuos. Pitágoras, entonces, reconoció que para hacer matemáticas y ciencia había que abordar los planteamientos de una manera formal; el planteamiento pitagórico puede ser recreado desde una axiomática a posteriori.

2.3.10. El eidos anticipa al logos

Se aprecia en esta cita acerca de los pitágoricos y comentada por Aristóteles en su *Metafísica*, que las causas (*αἴτιος*) nadie (*οὐδαμός*) las encaja (*συναρμόζω*) en torno a un discurso razonable (*λόγος*), dado que lo que existe (*εἰμί*) está adentro (*εἰς*), en verdad (*μέν*) como se ha dicho (*οὖν*). Eso que está dentro (*εἰς*) es lo uno (*εἷς*), lo primero (*πρῶτος*) que antecede a las causas (*αἴτιος*). Por lo tanto, se puede proponer que, si se asimila lo uno (*εἷς*) como lo que está dentro (*εἰς*), como una idea (*ἰδέα*) que es posible ver (*εἴδω*), eso que se ve (*εἴδομαι*) sería la forma (*εἶδος*) que antecede a la causa (*αἴτιος*). En ese sentido, la ontología es previa a la metafísica.

> *Para nuestra actual investigación de las causas no interesa en absoluto tratar de ellos*
>
> (*For the purposes of our present inquiry an account of their teaching is quite irrelevant, since they do not, εἰς μέν οὖν τήν νῦν σκέψιν τῶν αἰτίων οὐδαμῶς συναρμόττει περί αὐτῶν ὁ λόγος*, 986b-12).

Algo que es (*εἰμί*) confirmado (*οὖν*) como consecuencia (*μέν*) de lo que acontece ahora (*νῦν*) fruto de la percepción de los sentidos (*σκέψις*) como actividad mental (*σκέψη*), es lo que induce a pensar (*σκέπτομαι*) acerca del responsable o la causa (*αἴτιος*). Se asume que nadie (*οὐδαμός*) ha logrado hacerlas encajar (*συναρμόζω*) alrededor (*περί*) de la misma (*αὐτός*) palabra (*λόγος*). En este breve comentario se muestra un tipo de reflexión que utiliza una estructura de tipo inferencial, con una premisa sujeta a unas condiciones iniciales y que es la causante del desenlace de una conclusión. Sin embargo, tal estructura involucra algo que no siempre se da en esta clase de proposiciones: la presencia del aquí y el ahora mismo manifestado en la naturaleza de lo que es simultáneo (*ἅμα*). Esto se da por medio de un enlace que establece un vínculo, lo que sugiere un tipo de generalización; asimismo, la formalización de unas díadas alrededor de las cuales se entretejen los eventos que acontecen al mismo tiempo. Ahora bien, la percepción de ese ver integrado de los sentidos es al mismo tiempo un pensamiento (*σκέψις*), vocablo que unifica lo sensorial con lo mental. La pregunta recae sobre la responsabilidad (*αἰτία*) inasignable (*οὐδαμός*) de aquello que posibilita el ensamblaje (*συναρμόζω*) en torno al mismo *logos* (*λόγος*).

2.3.10.1. El operador de la suma como fundamento del número: el contar algo

Aquí se toca un problema de fondo que evoca todo un conjunto de verbos que son sinónimos entre sí: *συναρμόζω, ἀριθμέω, ἀπαριθμέω, διαριθμέω, ἐξαριθμέω, καταριθμέω, παραριθμέω, συναριθμέω.* Surge entonces la pregunta: ¿Qué tienen en común entre sí todos estos verbos? La respuesta está dada por la partícula *συν* que en muchos casos está situada como prefijo de otro vocablo y que significa “con, junto”. Su etimología proviene de la preposición (*σύν*) que significa al lado, con, y cuando está sola significa más o el símbolo del operador aritmético de la suma (+). En conclusión, todos los verbos mencionados tienen en común la actividad de contar, computar, calcular y enumerar, propio de la actividad aritmética de los números. No hay que olvidar que el *logos* (*λόγος*) no solo es la palabra y lo que es pensado, sino también es una oración, una narración o historia; asimismo, es una cuenta, un cómputo, un cálculo, además de poder evocar la razón como facultad cognoscitiva. Lo interesante de este planteamiento es la tentativa presente en varias culturas en aquellos momentos clásicos fundacionales, donde se estaba estructurando el lenguaje y otorgándole las diversas propiedades que debía de poder satisfacer. Sea el caso en los primeros tiempos de la formación de las lenguas de una cultura, incluye los dialectos cercanos a ella. Existía la tentativa de vincular a la palabra todas sus aserciones posibles, en su función de ser vehículo de diálogo, como también la identificación que algo narrado equivale a algo contado como número. Es importante identificar la fuerza que le imprime una preposición si se sitúa antes de la acción propiamente contable de *arithméo* (*ἀριθμέω*) como desde, cerca, a lado (*παρα*); debajo, bajo, antes (*κατα*); a través, sobre, por entre (*δια*); desde, aparte, lejos (*ἀπ*,ἀπό); más, con, junto (*συν*); desde, fuera, por fuera, desde, dentro, durante (*ἐξ, ἐκ*). Se observa la habilidad que tenían los griegos en tiempos de Pitágoras para enriquecer la actividad contable de los números, hecho que permitía darle una gran movilidad a los planteamientos teóricos y poder analizar a fondo la estructura misma de este maravilloso ente formal sobre el que descansa toda la matemática.

El ser capaz de contar una historia también equivaldría a poder aritmetizarla, lo que explica por qué en el significado de *logos* se encuentra simultáneamente la palabra en sus diversos usos incluida la actividad de contar como cálculo. El *logos* involucra una aritmetización, central en el pensamiento pitagórico puesto que, antes de la existencia del cosmos, el número uno era tenido como el causante de la existencia y del cual se derivan los números diferenciados. La díada aritmética sobre la que descansa el orden del cosmos evoca la realidad tal como se la conoce. En los números está encarnada la razón en cuanto orden, aquello que es dicho (*λέγω*) subyace, arregla y ordena; a su vez, contabilizar y enumerar, hacen parte del significado adicional de este verbo. Tal hecho evoca al *eidos* (*εἶδος*) como el responsable (*αἴτιος*) de hacer encajar (*συναρμόζω*) lo percibido y pensado (*σκέψις, σκέψη*) alrededor (*περί*) del mismo (*αὐτός*) *logos* (*λόγος*). El *eidos* (*εἶδος*) subyace y antecede al *logos* (*λόγος*), lo determina y en alguna manera lo causa. No queda más que afirmar, dada la preeminencia existencial de lo uno (*εἷς*) como lo que está primero (*πρῶτος*), aquello que es solo y único (*οἶος*). Lo que en el latín es uno (*unus*) evocando aquella raíz indo-europea (*óynos*) presente también en el proto-latín como (*oinos*). Es aquel uno pitagórico (*εἷς*) único (*οἶος*) que es infinito (*ἄπειρον*), el que tiene la posibilidad de evocar la palabra, hecho ya señalado: una palabra armonizada simultáneamente con su naturaleza contable númerica y contable narrativa o pensamiento razonado.

2.3.11. La vida emana y nace de lo uno, lo otro es la realidad de la generación y la diferencia

En este texto se puede apreciar cómo lo que es lo uno (*εἶς*) es el origen de todo lo que existe, en especial, la naturaleza (*φύσις*) se genera (*φύω*) a partir del mismo.

> *Pues no hacen como algunos fisiólogos, que, después de suponer que el Ente es uno, generan, sin embargo, a partir del Uno considerado como materia, sino que hablan de otro modo.*
>
> (*while assuming a unity, at the same time make out that Being is generated from the unity as from matter, as do some physicists, but give a different explanation; οὐ γάρ ὥσπερ ἔνιοι τῶν φυσιολόγων ἓν ὑποθέμενοι [15] τό ὂν ὅμως γεννῶσιν ὡς ἐξ ὕλης τοῦ ἑνός, ἀλλ' ἕτερον τρόπον οὗτοι λέγουσιν:*).

En consecuencia (*γάρ*), seguramente no (*οὐ*) tan pronto como (*ὥσπερ*) quede establecido, (*ἐνίζω*) en qué manera (*τῶν*) el discurso sobre la naturaleza investiga las causas naturales y los fenómenos (*φυσιολογέω*), pueda ser colocado (*τίθημι*) bajo (*ὑπο*) aquello que es uno (*ἕν, εἶς*). Una vez más se hace referencia a quienes se ocupan del develamiento de la *physis* (*φύσις*) como la naturaleza, aquello que crece (*φύω*) dando origen a los seres vivos. El fisiólogo (*φυσιόλογος*) es visto como aquel que indaga sobre las causas que se observa en la vida, hoy día se hace énfasis en el estudio de las funciones de la vida. El propio vocablo (*φυσιολογία*) también evoca lo incontable que subyace (*ὑποτίθημι*) a todo lo que existe como lo que es uno y el mismo (*ὁμός*), aquello que aún bajo la diferencia se mantiene sin embargo como lo mismo para todos (*ὅμως*). Es una evocación directa a que el fundamento de la vida es uno solo y común a todos los seres vivos, puede asumir variadas formas y diversas maneras de mostrarse, de crecer y desarrollarse: es esa instancia que está primero (*πρῶτος*) posibilitando que la vida sea engendrada. El nacimiento (*γέννα*) como descendencia (*γένος*) evoca también su condición plural (*γέννες*), hecho que resalta que lo que surge de lo uno (*εἶς*) tan solo puede existir como parte de una descendencia, de un clan, nación, raza y, en fin, cualquier tipo o clase dentro de un proceso dinámico. Es la contraparte causal de (*γίγνομαι*) nacer, aquel estadio que evoca el proceso de llegar a la vida a fin de convertirse en algo. Se combina de esta manera la acción dinámica de la crianza como pluralidades diferenciadas pertenecientes a una especie (*γεννάω*) con el acto que instaura y trae la vida (*γίγνομαι*), las dos instancias coexisten y actúan de manera sincronizada. De manera (*ὡς*) que desde (*ἐξ, ἐκ*) la materia (*ὕλη*); también vista como el bosque donde la vida está en completa armonía y el barro (*ὗλις*) que se vería como el elemento común que constituye a todos los entes, cualquiera (*τις*) que pertenezca al período anterior (*ἕνος*) que se sitúa como lo primero (*πρῶτος*), lo que es uno (*εἷς*). Alusión directa a que lo uno antecede a la vida y a todo nacimiento, no pudiendo ser engendrado ni haber nacido de nadie.

El número uno cardinal como el ordinal primero está fuera de toda consideración sujeta a una generación, cambio y especie. Este planteamiento soporta el hecho que el uno y lo primero debe de ser visto y estudiado de una manera distinta; por tal motivo, el mismo Pitágoras lo sitúa como un conjunto unitario, único y tan solo referenciado a sí mismo. El uno no es un número en el sentido usual del término dado que pertenece a una clase distinta a los demás números que están dados en especie, en cuanto constituidos como dualidades y sujetos al imperio de la década. Si se considera los contrarios que se dan a este nivel, sea la pareja positivo-negativo, se tienen los números enteros positivos y los negativos: {… – 3, – 2, – 1,…, 1, 2, 3…}. Existen dos clasificaciones numéricas: la primera que hace referencia a los nueve cuerpos estelares visibles o manifiestos (*φανερός*), y uno que no se ve o sea la anti-tierra[156] (*ἀντίχθων*). Aquí se podría afirmar que la antitierra equivaldría a ese número invisible o cero. La segunda, es la de los diez principios constitutivos dobles, la cual es una invitación a un análisis sobre la naturaleza cualitativa del número. Lo que nos conduce a una definición por intensión y no tan solo por extensión o cuantitatividad que es el manejo tradicional con que se aborda al número. Pitágoras prefiguró y estudió ambos sistemas de definición y formalización de los números. Se dice (*λέγω*) que lo otro (*ἄλλος*) que es diferente del uno (*εἷς*), el otro que acompaña a este par y que es el segundo y otro (*ἕτερος*),

[156] Al filósofo y matemático pitagórico Filolao (*Φιλόλαος*) se le atribuye la Antitierra, en este modelo astronómico pitagórico, el Sol es una esfera en movimiento que está en el centro del universo y alrededor de la cual se mueven los planetas. Este hecho anticipa a Nicólas Copérnico Ver: *Dictionary of Phrase and Fable*, E Cobham Brewer (1894), (pág. 1233-4). Estos hechos fueron recopilados por el doxógrafo neoplatónico Ioannes Estobeo (*Ἰωάννης ὁ Στοβαῖος*) del siglo VI d.C. Algunos dicen que Estobeo mezcló el pitagorismo con el platonismo, tal como lo comenta Chisholm Hugh (1911) en *Joannes Stobaeus*, en E. Britannica.

tiene la propiedad de girar (*τρόπος*) y doblarse aquí frente a lo que le precede (*οὗτος*). Esta es una alusión a lo esférico como la forma geométrica por excelencia, subyace como *eidos* (*εἶδος*) a la realidad formal y experimental. Al percatarse de la presencia del verbo decir, ordenar, escoger, reunir, contar, enumerar (*λέγω*), este puede ser interpretado en el sentido tradicional como lo dicho en torno a un tema. Como aquella palabra que está en el origen ordendo en torno suyo a la realidad, ese logos creador o gestador de la vida.

2.3.12. Lo que Es, es inmóvil y origina toda la vida

Lo que se nos aparece y revela a fin de ser conocido (*φαίνω*), lo que es y existe (*εἶναι*), es lo inmóvil (*ἀκίνητος*) como fundamento de la naturaleza (*φύσις*). El principio primordial a partir del cual todo se genera es precisamente aquello que carece por completo de movimiento. El cambio que conocemos está vinculado a la generación, pero existe otro tipo de dinámica propia de lo uno y que antecede a la generación del dos a partir del uno.

> *Aquellos, en efecto, añaden el movimiento al generar el todo, mientras que estos dicen que es inmóvil). Sin embargo, hay un punto que corresponde a la presente investigación.*
>
> (*for the physicists assume motion also, at any rate when explaining the generation of the universe; but these thinkers hold that it is immovable. Nevertheless thus much is pertinent to our present inquiry. ἐκεῖνοι μέν γάρ προστιθέασι κίνησιν, γεννῶντές γε τό πᾶν, οὗτοι δέ ἀκίνητον εἶναί φασιν*: *οὐ μήν ἀλλά τοσοῦτόν γε οἰκεῖόν ἐστι τῇ νῦν σκέψει*. [986β [18]).

Quien esté situado allá (*ἐκεῖνος*), en ese lugar que evoca una toma de distancia y de tiempo, ahí (*ἐκεῖ*), en consecuencia (*μέν*), debe existir por lo menos (*γάρ*) alguien, que coloque y sitúe la acción allá a fin de poderla volver a hacer (*προστίθημι*). Evoca aquella actividad que va encaminada hacia algo (*προσ*) con una dirección explícita fruto de haber situado (*τίθημι*) algo con un propósito claro, es buscar un cambio de lo establecido por medio de un movimiento (*κίνησις*). Este logra dar nacimiento (*γεννάω*) al menos (*γε*) a aquel (*τό*) todo (*πᾶς*), este (*οὗτος*) e (*δέ*) inmóvil (*ἀκίνητος*) ser (*εἶναι*) que es que se manifiesta en lo aparente (*φάσις*), siendo lo que causa todo trayéndolo a la luz a fin de revelarlo y posibilitar su existencia (*φαίνω*). En este breve comentario se tiene aquella instancia inmóvil (*ἀκίνητος*) desde la cual se genera todo movimiento (*κίνησις*) y todo cambio, es aquel Ser que Es (*εἶναι*) que se proyecta fuera de sí mismo (*προστίθημι*) para dar nacimiento a la vida (*γεννάω*). Este hecho es evidenciado en la misma naturaleza luminosa (*φαίνω*) que es sinónimo de alguien que emerge creando la luz (*φῶς*) iluminándonos (*φωτίζω*) a todos (*πᾶς*). Tal es lo que caracteriza el origen de un cosmos habitado por entes originados a partir del mismo. El Uno (*εἷς*) que es (*εἶναι*), que se sabe de sí mismo, muestra que existe una preeminencia de aquel estado desde el cual emana una existencia llena en cuanto no es la nada sino todo lo contrario, está lleno de si mismo. Es importante la caracterización de lo otro como aquello derivado de lo que es; tal afirmación se fundamenta en que lo uno que Es no posee algo adicional a Él mismo para fundamentarlo. Este hecho conlleva a que pierde su preeminencia a nivel causal, debido a que hay algo que lo antecede y su existencia no está garantizada de manera incondicional. La nada ni nadie antecede a la predicación de la existencia ya que aún la nada involucraría algún tipo de existencia. Lo otro involucra que está recibiendo su existencia de algo anterior, la única instancia de la que se puede predicar algo sin ser derivado de otra es de lo uno: un uno que es a la vez una totalidad, que no existe nada ni nadie exterior a él mismo, debido a que él es lo que está adentro y fuera. La derivación de lo otro tan solo puede realizarse a partir de esa unidad que a la vez es una totalidad. La misma existencia de lo uno hace surgir lo otro, en cuanto ese mirarse a si mismo involucra un tipo de autoconciencia, que vendría a constituirse como lo otro. Lo que fundamenta la posibilidad de conocer algo o alguien es a partir de lo que es, que se constituye en el fundamento de todo conocimiento o acto existencial. Se nota la estructura sintáctica del antiguo griego que favorece la reflexión, en esta oración los distintos términos se ayudan e incrementan lo aseverado debido a que tienen algo en común todos entre sí.

No (*οὐ*) definitivamente (*μήν*) lo otro (*ἄλλος*) es tan extenso (*τοσοῦτος*) que al menos (*γε*) está (*ἐστι*) habitado (*οἰκέω*) aquí o allá (*τῇ*) ahora (*νῦν*) cuando lo miramos, pensamos o consideramos (*σκέπτομα*). Esto es solamente para señalar al uno cómo es, a partir de lo que carece de movimiento, aquella instancia singular y única. Lo que es lo universal como fundamento de todo cuanto existe causa lo que es lo otro, algo que es amplio y matizado que existe en cualquier lugar. Se advierte, igualmente, cómo la misma visión de algo percibida por medio de los sentidos (*σκέψις*) involucra el ejercicio de una actividad mental como pensamiento (*σκέψη*) de naturaleza plural (*σκέψεις*), dado que se tienen pensamientos no solo a nivel individual sino colectivo. En este sentido, aquella concepción algo materialista que en el origen era la nada, es algo equivocada y contraria a la concepción griega, en especial a la pitagórica, donde el cosmos está en todo lugar habitado por una vida que es el reflejo de una actividad mental. El cosmos es el hogar (*οἶκος*) donde habita la luz (*φῶς*) que es lo que posibilita dar nacimiento (*γεννάω*) a lo otro (*ἄλλος*) de lo cual todos formamos parte como fruto derivado de ese ser (*εἶναι*) inmóvil (*ἀκίνητος*), que nos subyace y del cual procede todo nacimiento (*γέννησις*). Se trata del movimiento que se contrapone entre el origen inmanifestado e impercibible del *eidos* (*εἶδος*) que está presente en lo que es (*εἶναι*), uno (*εἷς*) e infinito (*ἄπειρον*). El mismo hecho de considerar lo infinito como lo inmóvil y a la vez como lo uno, es algo que posee una profundidad a nivel ontológico y epistemológico de alcances insospechados e incalculables.

2.3.13. La dualidad del origen evidencia un proceso reflexivo doble diferenciado

La existencia de la díada presente en el dos (*δύο*) es la que genera el cosmos, anuncia la existencia de dos principios fundamentales, cada uno hace referencia a la naturaleza contraria propia de esta dualidad. La díada es encionada por Pitágoras en los diez principios dobles, opuestos cada uno consigo mismo y que están situados en el origen (*ἀρχή*).

> *Los pitagóricos, por su parte, admitieron, en el mismo sentido, dos principios; pero añadieron algo que le es propio:*
>
> ([987a] [13] *Pythagoreans, while they likewise spoke of two principles, made this further addition, which is peculiar to them: Οἱ δέ Πυθαγόρειοι δύο μέν τάς ἀρχάς κατά τόν αὐτόν εἰρήκασι τρόπον, τοσοῦτον [15] δέ προσεπέθεσαν ὃ καί ἴδιόν ἐστιν αὐτῶν,*).

Los pitagóricos plantearon que el origen mismo está constituido por dos (*δύο*) principios (*δύο μέν τάς ἀρχάς*). La forma femenina plural (*ἀρχάς*) de *arché* (*ἀρχή*) evoca un origen dual o doble; desde el comienzo de los tiempos todo crece (*ἄρχω*) y se desarrolla en dos caminos de manera simultánea. Es el fruto de un proceso de descenso desde algo que le antecede (*κατά*); la raíz de este vocablo significa algo que está en contra, por tal motivo, se la considera generadora de calamidad (*κατάρα*). Invoca algo que puede ser asido, confiscado o retenido (*κατάσχω*). Aquello que desciende de lo que es en sí mismo (*αὐτός*) se ama (*ἐρῶ*), segunda persona singular imperativa del verbo amar (*ἔραμαι*), también vista como una declinación del sustantivo (*ἔρος*) y del verbo amar (*ἐράω*) en cuanto es solicitado (*ἐρέω*) y dicho (*ἐρῶ*). Se resalta la gran similitud en la conjugación de algunos tiempos en los verbos amar y decir, hecho que no es accidental dada la enorme capacidad reflexiva de los antiguos griegos: ambos comparten formas infinitivas, tal como amar se escribe (*ἐρῶ o ἐράω*) al igual que decir, contar, o hablar también escrita como (*ἐρῶ, ἐρεῶ*); al igual que (*ἐρῶ*) es también la primera persona del presente indicativo del aoristo de amar (*ἐράω*). Los griegos eran muy propensos a un pensamiento algo críptico, sin olvidar la riqueza de sus figuras literarias de naturaleza retórica, lo que facilitó llevar sus reflexiones a sus propios límites o confines adecuando la gramática a tales exigencias. El origen mismo manifiesta que la misma naturaleza (*φύσις*) es dual (dualidad que bien se puede ver reflejada en estos significados dobles, donde verbos aparentemente distintos se encuentran para abrazar una concepción de fondo tan solo comprensible para los más entendidos). Los pitagóricos eran una escuela secreta, dueña de unas tradiciones esotéricas (*ἐσωτερικός*) pertenecientes a un círculo interno. Hay declinaciones, números, pronombres duales en griego, y este hecho tiene profundas razones que se ven reflejadas en el amor mismo que requiere del concurso de dos fuerzas provenientes de naturalezas distintas. El cosmos está animado de una fuerza que mantiene su coherencia fruto de una acción que busca unificar las naturalezas contrarias que se vuelcan doblándose (*τρόπος*) la una hacia la otra en sus direcciones. Este tema invita a pensar que tendría que existir un estadio previo carente de tal dualidad primordial, el uno donde no existen contradicciones ni contrarios como anteriores al mismo. Ese uno es tan amplio (*τοσοῦτος*) y (*δέ*) se dirige hacia algo que está situado sobre (*προσεπιτίθημι*), aquel (*ὅς*) aún (*καί*) por sí mismo (*ἴδιος*), es (*ἐστιν*) él mismo (*αὐτός*). Este comentario nos remite a lo que antecede a la dualidad como algo que es uno en sí y por sí mismo, carente de cualquier oposición y autolegitimado, puesto que no depende de nada y se basta a sí mismo.

2.3.13.1. La dualidad como un acto reflexivo de uno en sí mismo

El proceso de doble reflexión que se aprecia en los dos vocablos: (*αὐτός*) y (*ἴδιος*), evoca la relación reflexiva aRa en "(*Πυθαγόρειοι*) *δύο… ἀρχάς… αὐτόν… ἴδιόν ἐστιν αὐτῶν*". En la última parte de esta oración se aprecia que sería doble: aRa', *ἴδιόν ἐστιν αὐτῶν,* en aquello que es lo mismo con lo mismo. Se hace referencia a la doble reflexividad que desciende del uno infinito, carente de fronteras hacia la díada, y cómo por medio de este proceso reflexivo se establecen unas fronteras que demarcan. Se tienen vocablos como vuelta o dirección (*τρόπος*) y situar de nuevo (*προσεπιτίθημι*), que involucran un movimiento y, en consecuencia, cambios, ya que lo que no carece de movimiento y es inmóvil (*ἀκίνητος*) es propio del uno (*εἶς*) que es infinito (*ἄπειρον*). En consecuencia, lo otro (*ἄλλος*) recibe su posibilidad de ser (*εἶναι*) de aquello que lo antecede y por el cual es engendrado (*γεννάω*). El que es dueño de la acción verbal de ser o estar (*εἰμί*), es aquella imanencia derivada de lo que es uno en sí mismo y no requiere de lo otro para llegar a ser. Este primer *apeirón* es distinto al segundo *apeirón* que está mencionado como uno de los diez principios duales (*πέρας*)-(*ἄπειρον*), que se hallan en el comienzo del origen del cosmos o de la *arché*. Este primer *apeirón* es inmóvil e infinito y solo. Estos tres conceptos son interdependientes y plantean grandes interrogantes a nivel de una teoría metafísica. En matemáticas, el infinito se percibe como una instancia dinámica (segundo *aperión*), el considerarlo como lo que siempre permanece y está (*εἰμί*), es algo nuevo. Este uno (*εἶς*) es ausente de espacio y tiempo; lo que está en pareja es dinámico.

El uno está en un lugar carente de divisiones y oposiciones, dado que no existe lo otro que lo confronte, y el mirarse a sí mismo es directo como un estado permamente de ser, es (*ἐστιν*). El verbo ser-estar (*εἰμί*) posee una jerarquía ya que su nivel más alto como proposición formal está en el ser-estar del *aperión* inmóvil del uno. De igual manera, diríamos que este primer uno (*εἶς*) posee una cardinalidad y ordinalidad distinta a los números que se expresan dentro de una serie que es ordenada alrededor de la década. Se destaca, una vez más, la presencia de dos sistemas de numeración decimal; estas dos bases numéricas están sugeridas primero, en torno a los nueve cuerpos planetarios y el décimo como la antitierra; luego, en los diez principios dobles que gobiernan el cosmos desde su aparición en su mismo origen. La antitierra (*ἀντίχθονα*) puede sugerir la necesidad conceptual a nivel de la aritmética de la existencia del cero, número cuya conceptualización es extremadamente difícil y a veces casi imposible de ver. Aún hoy día no se tiene claro lo qué es y las exigencias formales que plantea su presencia aparentemente ausente pero evidentemente sentida. Para los griegos, la formalización del cero y su simbolización aritmética nunca se dio. El cero[157] como concepto plenamente identificado, aislado y simbolizado a nivel aritmético tan solo lo tuvieron en la India y en la cultura Maya mesoamericana. En los primeros, significó el vacío (*śūnya*) propio de un estado de iluminación y, en los segundos, tiene un símbolo propio e interviene en variadas operaciones aritméticas muy vinculadas con la existencia de los caledarios. Las dos etapas de ida y regreso de un proceso reflexivo, cuando se tiene alguna mínima diferencia del uno en relación al otro, daría lugar a la relación simétrica (*σύμμετρος*, de *σύν*, con y *μέτρον,* medida). Esta es una propiedad importante en la matemática, en la estética griega y en la noción de armonía (*ἁρμονία*). Es un acuerdo que posibilita la concertación bajo la unión de instancias que abrigan algo opuesto.

2.3.14. Los contrarios prefiguran lo limitado e ilimitado como fundamento predicativo

Los antiguos tenían, pues, una teoría fundamentada en que los contrarios son el origen mismo de los elementos, como también la necesidad de establecer límites frente a los principios primordiales para que surjan los elementos[158].

> *Que no consideraron lo limitado y lo ilimitado y el uno fuesen otras tantas naturalezas, como el fuego o la tierra u otra cosa semejante, sino que lo ilimitado mismo y el uno mismo*

---

[157] El cero es un concepto muy complejo, no lo tuvieron en la antigüedad ni los babilonios, ni los egipcios ni los griegos; cuando sumaban o calculaban dejaban un espacio vacío para representar su presencia operativa. Fue el matemático indio Brahmagupta en el siglo VII el que lo introdujo como concepto matemático, como también algunas de sus propiedades. Ver Carl Boyer (1968), *A History of Mathematics*, (pág. 242).

[158] Hay que destacar las variadas menciones que realiza Bertrand Russell (1945) en su obra: *The History of Western Philosophy*, de cómo Heráclito manifestó que existe un fuego central que nunca muere; asimismo, Parménides sostuvo que el fuego está constituido de pequeños átomos esféricos; Anaxágoras afirmó que todo es infinitamente divisible, cada porción contiene algún elemento, en especial todo contiene algo de fuego. La doctrina de los cuatro elementos también está expuesta en el *Timeo* de Platón (48b), (págs. 46, 61, 72). Así, se tiene que de la oposición del calor con la sequedad se origina el fuego, de la oposición de la humedad con el frío se origina el agua, de la sequedad con el frío surge la tierra, y el calor con la humedad el aire.

eran la substancia de las cosas de que se predican, por lo cual también el número era la substancia de todas las cosas. (987α 16/19)

(*they believed, not that the Limited and the Unlimited are separate entities, like fire or water or some other such thing, but that the Unlimited itself and the One itself are the essence of those things of which they are predicated, and hence that number is the essence of all things. ὅτι τό πεπερασμένον καί τό ἄπειρον καί τό ἓν οὐχ ἑτέρας τινάς ᾠήθησαν εἶναι φύσεις, οἷον πῦρ ἢ γῆν ἤ τι τοιοῦτον ἕτερον, ἀλλ' αὐτό τό ἄπειρον καί αὐτό τό ἓν οὐσίαν εἶναι τούτων ὧν κατηγοροῦνται, διό καί ἀριθμόν εἶναι τήν οὐσίαν πάντων. 987α-16/19).*

Quien (*ὅτι*) que sea capaz de llevar a un final o de realizar (*περαίνω*) y aún (*καί*) el o aquel (*τό*) que no que tiene límites, infinito, interminable y circular (*ἄπειρος*) y (*καί*) aquel (*τό*) que es uno (*εἷς*) y no (*οὐχ*) otro (*ἕτερος*) cualquiera (*τις*) supone (*οἴομαι*) es (*εἶναι*) capaz de crecer en concordancia con la naturaleza manifiesta en el origen (*φύσις*). Aquí, se está en presencia de una reflexión muy delicada y profunda en la que se le otorga al uno un estado de sujeto en cuanto ser o ente (*ὅτι*), que tiene la potestad de realizar algo (*περαίνω*) a partir de una actividad que surge y se origina en la oposición y en la confrontación (*περα*). Cuando se pregunta de quién se trata, se dice que es aquel que es uno (*εἷς*) e infinito (*ἄπειρος*); luego, el comentario viene fortalecido al negar (*οὐχ*) que se trate de otro (*ἕτερος*) cualesquiera (*τινάς*) que ese sea. Ese uno no es para nada lo otro o el otro o lo otro u otros; es el único que es como soy (*εἶναι*) frente al origen (*φύσις*), es quien califica y determina toda la naturaleza. Es importante señalar, cómo el fundamento de la totalidad y la pluralidad diferenciada surge de lo que es uno, indiferenciado y único. El origen y causa de todo está en lo singular individualizado al máximo nivel en cuanto tan solo existe un único ser e instancia que se puede situar en el origen y establecer la existencia del cosmos a partir del soy (*εἶναι*). En ese soy, todo está dicho y afirmado, basta tan solo su presencia para que emerga todo como lo otro. Ese soy es un decir infinito y universal donde todos los actos de habla están dichos. No siendo necesario agregar nada, basta que exista ese único acto universal que establece la existencia del cosmos y todo lo que lo habita en parejas.

2.3.14.1. El número como la substancia que establece la existencia de lo diverso

Es notable que existe algo previo a la misma cosmogonía tan mentada en la época, aquella constituida por la unión de contrarios tal como la caliente y lo frío; el uno como concepto parece anteceder a todo cambio o generación y a la misma existencia del universo. Lo que es completo y acabado, lo que nos permite realizar algo, y que además es completo, es lo infinito, es lo uno. La unidad abordada como lo uno no tiene a nada ni a nadie con qué oponerse, no existe lo otro sino el mismo uno que se manifiesta como infinitud. Es en ese sentido que lo uno y lo infinito son sustancia y esta se corresponde con el número: el número[159] es la sustancia o la *ousía* (*οὐσία*) que fundamenta la existencia y aquello que constituye a todos los entes y partir del cual se originan los contrarios. Aquello que es propio a la misma condición de ser (*εἰμί*) está dado en la naturaleza de los números, que al igual que lo uno es ilimitado. El número es uno y es ilimitado. Tal hecho establece que las estructuras que gobiernan a los números anteceden la misma manifestación de la existencia de los seres vivos y de la realidad constituida por la relación de los contrarios. Sea el caso del fuego con la tierra va a constituirse como aquello que subyace como ley o norma sobre la cual se levanta la naturaleza y todo lo que la habita. Hay que notar que existen dos existencias, la una está en el *cronos* antes del devenir del universo organizado como *kairos* donde tendríamos la segunda noción de existencia. En el primer estadio la existencia es plena y más cercana a la denominada eternidad, involucra un estado de conciencia y no en vano en la mitología es el lugar de Urano. El nacimiento del universo podría interpretarse como esa primera unión con Gea de la que surge la vida. La segunda existencia involucra la presencia de seres vivos, que van desde los más perfectos como los dioses a los hombres y todo lo que habita el universo.

Tal como lo es de la clase (*οἷος*) del fuego (*πῦρ*) o (*ἤ*) la tierra (*γῆ*) o (*ἤ*) cualquiera (*τις*) tal como este (*τοιοῦτος*) otro (*ἕτερος*), otro aún (*ἄλλος*) en sí mismo (*αὐτός*) el (*τό, ὁ*)

---

[159] Es interesante anotar esta mención de Aristóteles sobre el Cielo: *los pitagóricos decían, que todo y todas las cosas están definidas por el tres; para el final y el medio y el cominzo constituye el número de todos y también el número de la tríada*. *De coel.* i. 1; 268 a 10. (For as the Pythagoreans say, the all and all things are defined by threes; for end and middle and beginning constitute the number of the all, and also the number of the triad). Hay que resaltar cómo se comienza a dar una interpretación cualitativa de la naturaleza de cada número, donde el número 3 parece representar entre otros temas la temporalidad de una secuencia.

infinito (*ἀπείρων*) y (*καί*) el (*ὁ*) uno (*ἕν, εἷς*) como *ousía* (*οὐσία*) o la substancia propia que nos constituye. La *ousía* se deriva del presente participio femenino del verbo ser (*εἰμί*), *ousía* que es (ser, *εἶναι*), este (*οὗτος*) quien (*ὅς*) afirma (*κατηγορέω*). Un afirmar que en muchos casos es incriminatorio y acusador, ya que está dado en contra (*κατά*) de lo que se habla en la asamblea (*ἀγορεύω*) o en *ágora* (*αγορα*). Debido (*διό*) también (*καί*) al número (*ἀριθμός*) que es (ser, *εἶναι*) aquella (*τήν*) *ousía* o substancia (*οὐσία*) de todos (*πάντων, πᾶς*). Aquí se advierte cómo todo procede del infinito, en especial, el primer infinito, que viene a constituirse como *ousía* bajo el tránsito de ese primer infinito al segundo infinito. Ya que el uno infinito inmóvil carece de *ousía*, ésta está reservada para el cosmos existente y es la substancia la que lo constituye. Es en esta realidad donde existen los contrarios donde el Ser (*εἶναι*) se afirma en medio de ese panorama enfrentado (*κατά*), estableciendo un diálogo que involucra toda una contrastación de opiniones y planteamientos (*κατηγορέω*). Se advierte cómo el ser (*εἶναι*) tiene una doble comunicación y presencia con la realidad; por una parte, como fundamento de la substancia (*οὐσία*), como aquel elemento (*στοιχεῖον*) universal que es el principio de todos los elementos como el fuego (*πῦρ*), o como la tierra (*γῆ*), esta *ousía* que está inmersa en un proceso que le permite relacionarse con cualquier otro (*ἕτερος*) elemento, independiente del que sea o sea cualquier elemento arbitrario. Todo esto es posible gracias a otro (*ἄλλος*) que le permita relacionarse a la ousía consigo misma (*αὐτός*), hecho que solo es posible si está en contacto con ese uno (*εἷς*) infinito (*ἀπείρων*) que posibilita que la *ousía* (*οὐσία*) sea. El ser (*εἶναι*) de la *ousía* está dado y soportado por este infinito que está más allá del cosmos ordenado por los números dados en especie y género. Además, es lo que permite que esa *ousía* pueda adquirir un estatus universal que cuantifique sobre la existencia de todo (*πάντων, πᾶς*) lo que habita el cosmos. Ese uno supremo e infinito, permanente e inmóvil, no está sujeto al dilema de la parte y el todo, ya que es un uno que a su vez es todo y completo en sí mismo. Esto lleva a que la *ousía* cuantifica como un único individual que puede adoptar incontables formas tanto contables como incontables, bajo una cuantificación de grado superior que está dada como la única (*οἷος*) primera (*πρῶτος*) y una (*ένας*). Esta *ousía* se vierte dentro de una realidad derivada dual constituida por contrarios que han de ser armonizados desde este primer principio numérico que instaura la existencia del cosmos.

2.3.14.2. La diferencia de clase y jerarquía lógicas en relación con el número y el elemento pitagórico

La forma pronominal (*οἷος*) sugiere la existencia de la clase a la que pertencen los elementos del fuego o de la tierra o cualquiera; se nota que si se fuera a simbolizar la clase donde pertenece cualquier elemento (*στοιχεῖον*), se tendrí: $\{\Sigma\} = \{\sigma_\pi, \sigma_\gamma, .., \sigma_\lambda, ..., \sigma_\lambda{}^{*}\}$. Donde lo interesante es que hablar de elemento (*στοιχεῖον*) equivale a hablar de número (*ἀριθμός*), esto lleva a que *στοιχεῖον* ≡ *ἀριθμός*. La complejidad del planteamiento no termina aquí, dado que la noción de número posee una jerarquía superior que nos lleva a afirmar *στοιχεῖον* ⊂ *ἀριθμός*, que el elemento(s) es subconjunto del número(s). Este hecho puede conducir a una teoría de los tipos lógicos, donde se tiene una jerarquía a la izquierda de un orden tan elevado que no es sobrepasable ni acotable: es decir, *ἀριθμός* *≡ *στοιχεῖον*. De manera que no existe ningún umbral anterior y todo orden que se quiera encontrar está situado a la derecha y es inferior y está acotado[160]. En tal sentido, es cognoscible y modelable como teoría todo lo que descienda del mismo. Notamos cómo el texto matemático filosofado posee una complejidad que reta a la imaginación y en nuestro caso a una hermeneia (*ἑρμηνεία*) matemático-filosófica, que nos conduzca a esbozar una semiótica (*σημειωτικός*) de la semiosis (*σημείωσις*) del símbolo (*σημεῖον*) matemático. Aquella marca (*σῆμα*) que aporta una señal e indicación (*σημασία*), que nos lleva a motrar, significar, indicar, interpretar (*σημαίνω*) lo que fundamenta al símbolo matemático como instancia primigenia anterior, determinante e independiente del símbolo propio de un morfema. La génesis del símbolo matemático tendría un camino distinto, obedeciendo a otras estrategias

---

[160] El significado de las direcciones está contemplado en los pitagóricos, mencionados por Aristóteles en su obra *Sobre el Cielo* (*Περὶ οὐρανοῦ*): *Por consiguiente uno de los pitagóricos podría estar sorprendido en lo que ellos decían, que existían solamente dos primeros principios, el derecho y el izquierdo, y dejaron de lado los otros cuatro como que no tuvieran la más mínima validez; dado que no existe menos diferencia entre arriba y abajo, de frente y atrás de la que existe entre lo que es derecho y izquierdo en todas las criaturas (Wherefore one of the Pythagoreans might be surprised in that they say that there are only these two first principles, the right and the left, and they pass over four of them as not having the least validity; for there is no less difference up and down, and front and back than there is right and left in all creatures.* ii. 2; 285 a 10). Véase la enorme importancia que suscitan las direcciones en relación a un ente, en especial, cuando se trata de una formulación lógica, sea el caso del *definiens* y el *definiendum*. Se puede proponer como definición formal de un símbolo matemático la siguiente: {símbolo / es la representación abstracta de una constante lógica}. En este caso el símbolo es el *definiendum* y la representación abstracta de una constante lógica es el *definiens*. Hemos de notar que el *definiendum* está a la izquierda mientras el *definiens* está a la derecha.

y requerimientos morfológicos y sintácticos, aquel que interpreta los símbolos (*σημειωτικός*) los signos (*σημεῖον*) o marcas que revelan el transitar del pensamiento matemático inicialmente orientado en la aritmética o métrica del número.

En general, una reflexión reiterativa del signo (*σῆμα*) como marca o señal es en nuestro caso el resultado de una abstracción matemática. Los griegos tenían una concepción muy distinta de los romanos de la noción de abstracción (*abstractiō*) como separación (*separatio*), en cuanto que el proceso cognitivo involucra la aprehensión de la totalidad. Si analizamos la episteme (*ἐπιστήμη*), notamos que proviene de *epístemai* (*ἐπίσταμαι*) vocablo formado por una preposición que indica aquello que está arriba o sobre *epí* (*ἐπί*) y aquello que hace que algo se quede, permitiéndole que se levante y se establezca *hístēmi* (*ἵστημι*) . En ese sentido los griegos estaban más interesados en ir a aquel fundamento que posibilita la existencia de algo, que está arriba de todo como principio fundante al cual los hombres se ven sometidos ajenos a lo que deseen o busquen. Mientras el pensamiento romano reflejado en su lengua, el latín, tenía una cosmovisión del mundo muy distinta que se ve reflejada en este vocablo más dado a una intervención intencionada a la cual se le impone una voluntad humana de dominio. Esto nos lleva a que el proceso de simbolización griego no es propiamente abstractivo en el sentido comúnmente entendido, más el símbolo era el representarte de una totalidad conformada por unas partes o principios. Esto nos conduce a que hemos de tener dos clases de simbolizaciones distintas aunque complementarias entre sí, muy presentes en el espíritu de la matemática moderna: una que simboliza a los conjuntos y a las clases como totalidades y una que simboliza los elementos que pertenecen a estas clases. En cuanto la diferencia que se podría encontrar en los griegos está en que existe una concepción de armonía (*ἁρμονία*) tan presente en el discurso de Pitágoras, que significa unión, acuerdo, articulación; derivada del verbo *harmózō* (*ἁρμόζω*) que destaca aquello que se logra conciliar, encajar, hacer coincidir, arreglar, gobernar, juntar y componer. Esto hace que hoy día impere una actitud romana de abstracción en la matemática pero no una griega, que todavía no está resuelta en el problema del todo y la parte, tan presente en la doctrina pitagórica.

2.3.14.3. Repercusiones del problema pitagórico del número como elemento

Uno de los grandes problemas que gobierna a las matemáticas es aquel del todo y la parte, tratado más recientemente por Edmund Husserl, amigo cercano de Cantor. No obstante, su formulación matemática comenzó con Giuseppe Peano y Georg Cantor. Luego, en *Principia Mathematica* (1910) se logra dar la definición canónica de conjunto, y Ernst Zermelo propone la primera axiomatización de la teoría de conjuntos (1908). El filósofo inglés Alfred North Whitehead (1916) trabajó este tema en su obra *Proceso y Realidad*[161] (*Process and Reality*), y afirma que existen diversos grados en los que varía formalmente tal problemática, lo cual lo condujo a la geometría libre de puntos. En el caso presente, esto lleva a que si se parte de la equivalencia matemática pitagórica entre el elemento con el número *στοιχεῖον* ≡ *ἀριθμός*, se encontrará toda una variedad conceptual simbolizable de tal equivalencia. Por una parte, se tiene que para Pitágoras los planetas eran elementos, al igual que los primeros principios de los que se deriva el cosmos, asimismo como los números. Esto involucra que en tal equivalencia tenemos ímplicitamente una noción de orden jerárquico donde la noción de número (*ἀριθμός*) es superior a la de elemento (*στοιχεῖον*). Lo cual conduciría a una relación de equivalencia jerárquica donde las expresiones a ambos lados del signo de equivalencia (≡) no son simétricas entre sí. Tal equivalencia jerárquica asimétrica que conserva y conecta a ambos conjuntos pero que establece una precedencia del uno sobre el otro, en el caso que aquí se trata, la realidad del número está por encima de la del elemento. Pitágoras afirma que los números crearon el universo y todo lo que lo habita, incluidos los elementos como el fuego y los planetas. Aunque se pueden establecer algunas biyecciones entre ambos conjuntos, el de los números con el de los elementos, no obstante, pueden existir relaciones en la realidad de los números que todavía no encuentran

[161] Manifiesta Alfred North Whitehead (1929) en *Process and Reality an Essay in Cosmology: "Si debemos de creer en la tradición pitagórica, el surgimiento de la filosofía europea fue en gran medida promovida por el desarrollo de la matemática como una ciencia general abstracta. Pero en su consecuente desarrollo, el método de la filosofía también ha sido viciado por el ejemplo de la matemática. El método primario de la matemática es la deducción; el método primario de la filosofía es la generalización descriptiva. Bajo la influencia de la matemática, la deducción ha sido insertada en la filosofía como su método estándar, en vez de tomar su verdadero lugar, como un modo esencial de verificación auxiliar por medio del cual se verifican el alcance de las generalidades. Esta falta de comprensión del método filosófico, ha velado el considerable éxito de la filosofía en proveer nociones genéricas, que agregen lucidez a nuestra comprensión de los hechos de la experiencia" (pág. 10).*

una correspondencia con algún ente de la realidad. Este hecho es aún más palpable en la realidad superior del uno infinito inmóvil que al poseer una naturaleza infinita de un grado tan superior es inabarcable por el par dual finito-infinito que existe en el universo, más dada a ser el lugar desde el cual se construye la comprensión y la imagen del mismo. Es tan complejo este concepto que no está ni aún contenido ni mencionado en la teoría de los números transfinitos de Cantor.

2.3.14.4. Propuesta para una modelación aritmética de los agregados pitagóricos

En consecuencia, se puede pensar una jerarquía analítica aritmética en las fórmulas de las lógicas de segundo orden. Sea el caso, se tienen en relación a los números, a los elementos y a los planetas las siguientes expresiones: $\alpha_1^{10}\gamma \equiv \sum_1^{10} \Delta \equiv \prod_1^{10} \beta$. Cuando uno se pregunta cómo funcionaría el lenguaje asociado a cada uno de las mencionadas clases, se diría: L = {1, S, +, =, <,$\in$}. Donde los términos son formados a partir de la unidad 1, se respeta la función sucesor de S, el operador binario es la suma, la relación de igualdad = y la de comparación < son las que se dan entre dos individuales, la relación de pertenencia $\in$ se da en relación a la membresía de un individuo frente a la clase a la que pertenece. El anterior criterio permitirá escribir simbólicamente fórmulas bien elaboradas. Pero antes, hay que volver a examinar los criterios utilizados y ver si son lícitos en concordancia con los supuestos teóricos planteados desde la perspectiva pitagórica. Ante todo, se tiene la diversa jerarquía del uno 1 infinito ∞ que simbolizaremos como 1/∞ que pertenece a una clase que es única y cuya jerarquía está por encima de todas las demás. La función f que la caracteriza es la de permanencia o en palabras del propio Pitágoras la inmovilidad como acinético (*ακίνησις*) inmóvil (*ἀκίνητος*) que la caracteriza a tal plano previo a la aparición de la *physis* (*φύσις*), y la *ousía* (*οὐσία*): aquello que se levanta y para (*ἵστημι*); aquel estado de permanencia (*περιμένω*) que simboliza aquello que siempre permanece y está (*μένω*) en alrededor (*περι*) se simbolizará por π, de esta manera queda incluida esa propiedad de curvarse o doblarse (*τρόπος*). En cuanto al operador que lo califica es el verbo ser (*εἰμί*), como la instancia desde la cual se fundamenta la existencia y su estado es lo único que es, es el ser (*εἶναι*), que se lo situará en el lugar del operador de la pertenencia $\in$ y será simbolizado como aquella *hupostasis* (*ὑπόστασις*) que le subyace a la misma substancia, se notará con la letra epsilón ε. Dado que no es una realidad igual a ninguna otra, no se cumple la relación de igualdad (≠) ni de comparación, lo que lleva a que lo que la caracteriza sea ese ser igual a sí mismo. Este hecho ha sido ampliamente recreado por vocablos como (*αὐτός*) que se pueden extender a todas las formas isomórficas (*ἴσοςμορφή*), aquellas que son iguales (*ἴσος*) a sí mismas en su forma (*μορφή*). Con lo cual se escogerá la letra Σ para simbolizar tal propiedad. Todo lo anterior está expresado dentro de un lenguaje formal L propio de este plano inmanente, que ordenado bajo un subíndice α daría: $L_{\alpha} = \{1/\infty, \pi, \Sigma, \varepsilon\}$. Así, se evoca aquello que nos subyace como lo uno (*εἷς*), que tiene esa propiedad reflexiva de ser igual a sí mismo Σ, y de doblarse como fundamento de la existencia de su Ser ε a su deredor π.

En cuanto la teoría que manejan los números Pitagóricos deriva de la anterior, se podría conjeturar: $L_{\beta} = \{1_{10},\ldots.\}$. Notaremos 1_{10} para simbolizar los diez cuerpos planetarios que son la representación de los nueve números fundamentales más el décimo o la antitierra. Se nota que existe una biyección de los nueve números situados en el dominio hacia un décimo número situado en el codominio, en tal sentido, la función f^{C} vendría a complementar algo que les falta a los anteriores números, y surge la pregunta: ¿qué es? Se presenta un enorme problema cuando se tiene una serie numérica, es que se proyecta ininterrumpidamente hacia atrás o hacia adelante sin que nadie la detenga. A su vez, una condición indispensable y necesaria para poder escribir un expresión numérica es que existen varios numerandos diferentes entre sí que unen. Cuando su devenir ha llegado alcanzando cierto numerando, sea el nueve, tenemos que la serie regresa o retorna al cero: esto se da con la finalidad de volverse a proyectar bajo una secuencia nueva manifiesta en la tenencia de un mayor número de elementos asimismo el orden que impera desde el comienzo. Sea el caso 1,…, 9 regresamos al cero con 10 y comenzamos la nueva secuencia bajo el gobierno del uno en cuanto 11,…, 19, regresamos al cero con el 20 y volvemos a comenzar la secuencia bajo un orden superior con 21,…, 29 y así sucesivamente. Cabe notar que en los tiempos de Pitágoras se utilizaba el alfabeto de la alfa a la teta para indicar esta notación decimal, es decir, existían símbolos distintos para los diferentes numerandos de la base numérica decimal. En el anterior caso, la ausencia del cero haría imposible simbolizar una expresión numérica grande, de igual manera sería imposible realizar las operaciones básicas de la aritmética en dichas cifras. Una forma elegante para abordar el problema conceptual del cero, tan difícil de ver y entender, es lo que los antiguos denominaban la anti-tierra (*ἀντίχθων*).

El problema del todo y la parte viene a determinar la naturaleza de las operaciones aritméticas que se pueden construir, tal hecho será notado como T/P_s. Luego, se tiene la pregunta de qué tipo de operación básica caracterizaría esa década aritmética pitagórica, y se dirá que es la suma. Los griegos se servían de variados términos para señalar la aritmetización del número, por tal motivo se la simbolizará como una suma partida por la similaridad $+_s/\sim$: aquí se señala la posibilidad de poder construir una variedad de operaciones aritméticas, planteamiento también apoyado en que la construcción de los números en Pitágoras no solo se hacía por extensión sino por intensión. Tal aspecto cualitativo amerita diversas operaciones a fin de explicar la naturaleza distinta de cada número con el otro, muy evidente en los diez numerandos básicos que se elevarían a ser predicamentos numéricos o categorías numéricas distintas entre sí como partes y reunidas conforman una única totalidad. Con lo cual, la expresión inicial se volvería: $L_\beta = \{1_{10}, T/P_s, +_s/\sim, \ldots.\}$. Luego, tenemos aquella instancia que a diferencia del antiguo estadio L_α que se da en ese gravitar alrededor de sí mismo (*περιμένω*) evocado en el símbolo de la letra pi π, en este nuevo estadio se caracteriza por una realidad que engloba la diferencia la abordaremos como una variedad π. Tal aspecto no ha pasado desapercibido en las matemáticas modernas y está recogido por la teoría de los fibrados vectoriales, donde a cada punto de un espacio topológico se le puede asociar unas variedades diferenciables que permitan pegarlos o intersectarlos por medio de curvas tangentes a dichos puntos. La simbolización matemática moderna comparte algo de la nuestra, sea el caso, denominaremos esa recreación de la realidad pitágorica del cosmos ordenado por medio de unos espacios topológicos base X y un espacio total E, donde tenemos una función continúa surjectiva $\pi: E \rightarrow X$. Tenemos que para cada x en X, la estructura del espacio vectorial real en la fibra $\pi^{-1}(\{x\})$ satisface la condición de compatibilidad, que para cada punto en X hay una vecindad abierta U, un número natural n y un homeomorfismo (De *ὅμοιος*, mismo y *μορφή*, forma) es una biyección entre dos espacios topológicos, continua y con inverso: φ:

$U \times R^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$. Utilizaremos la letra griega fi (φ) para simbolizar esta propiedad. Lo anterior nos lleva a que la expresión ahora es: $L_\beta = \{1_{10}, T/P_s, +_s/\sim, \varphi\}$.

Finalmente, se tiene la propuesta numérica que parte de los diez principios duales; simbolizaremos 2_{10}, a dicha dualidad fundamental. Se nota que se constituye también como un todo, apreciable como un espacio topológico abierto caracterizado en que ningún elemento del conjunto puede tocar la frontera. Sea (X, d) un espacio métrico, $U \subset X$ es un conjunto abierto si para todo $x \in U$ existe una bola abierta tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$. La anterior escogencia obedece a las ventajas de poder modelar la realidad espacial con cierta libertad. Surge entonces la pregunta que indaga acerca de las múltiples relaciones que pueden tener todos los diez principios entre ellos mismos y entre sí mismos, esta última caracterización involucra un proceso reflexivo con su propia diferencia u oposición. Cabe notar cómo en matemáticas tal concepto no está dado, lo cual evidencia la preeminencia de una reflexión filosófico-matemática que plantea los entes y las propiedades que muchas veces estos han de tener. En tal relación reflexiva oponente está cobijada por el sustantivo *antidiatithémi* (*ἀντιδιατίθεμαι*), el cual está muy en concordancia tanto con las proposiciones y el verbo que han sido utilizados de manera reiterativa por Pitágoras, y que señala la unión de tres componentes: la preposición *anti* (*ἀντί*) que significa en contra, opuesto, al mismo tiempo y en lugar de; la preposición *dia* (*δια- διά*) que evoca aquella actividad que se da en medio y a lo largo en diferente dirección y mixtura; y el verbo *tithemi* (*τίθημι*) que significa colocar, establecer, ordenar, afirmar y causar. Esto evoca de manera muy cercana la actividad de cada principio dual en parejas que se oponen entre sí de manera complementaria. Una pareja se dice duo (*δυο*) y el número dos (*δύο*) a su vez la noción de diá (*διά*) involucra algo en medio que en muchos casos puede ser dos, o aquello que se coloca en medio de las parejas duales de principios. Simbolizaremos nuestra propiedad reflexiva por $R^\alpha{}_\delta$, con lo que estamos cobijando en el superíndice la propiedad de oposición y en el subíndice la propiedad de dualidad. Cuando se pregunta: ¿Qué tipo de operaciones aritméticas se dan entre estos diez principios fundamentales? Se dirá que en relación con las variedades como espacios topológicos, es permitido recrear diversas operaciones muy en concordancia con la anterior, la noción de bola homeomórfica o isomórfica sobre un espacio euclidiano abierto B^n bajo una función bi continua, se adecúa a ser el entorno donde se puede modelar y representar el comportamiento de dichos diez principios duales constitutivos de la realidad emanados desde el origen del universo. Lo anterior conduce al lenguaje que los ha de representar como L_{γ}: $\{2_{10}, B (x, \varepsilon), R^{\alpha}{}_{\delta}, B^{n}\}$.

2.3.14.5. Recreación formal de la realidad dual pitagórica

Ahora bien, haría falta la realidad dual recreada a partir de la díada matemática y captada en los diez principios que definen la *arché* (*ἀρχή*) u origen de donde proviene la *physis* (*φύσις*) como aquella naturaleza viva. Pitágoras identifica dos grandes conjuntos numéricos, aquellos que son pares (*ζυγοί αριθμοί*) y los impares (*μονοί αριθμοί*). El número par es nombrado en relación con algo que es completo y perfecto, dado que está bien provisto (*ἄρτιος*). En su forma adverbial, señala algo que se da ahora, en este preciso momento, algo que es justo y verdadero. También, se evoca como aquello que es gemelo, par (*ζυγός*), que proviene de algo balanceado, en especial, hace referencia a la yunta que mantiene unidos dos bueyes uncidos por el yugo. Siendo cualquier cosa que permite mantener unidas dos piezas. El impar (*περιττόν*) está relacionado con aquello que es innecesario, superfluo, prescindible. Evoca aquello que es solitario y solo, con una parte o elemento (*μονός*), impar. Es también aquello que está primero (*πρώτος*) y en ese sentido el número 1 es impar, esto hace que comparta una cercanía con ese uno primegio infinito.

Se dirá que los números pares (*ἄρτιον*) son completos e involucran la unión con alguien con quien se está emparejado. Mientras los números impares (*περιττόν*), cuya etimología tradicional señala algo que es innecesario y superfluo, evocan algo que está solo y requieren una parte o elemento para que los complemente. Aunque está claro que en Pitágoras tal significado varía y se acerca más a representar la complejidad que está en los números impares que de alguna manera evoca su naturaleza fundamental. Los números pares invitan a aquello que es finito (*πέρας*), algo con frontera y límite. Mientras los números impares están relacionados con lo que es infinito (*ἄπειρον*), lo que no tiene frontera y es ilimitado. Tal hecho invita a pensar, que si se tiene una serie aritmética de números pares e impares se la podría simbolizar como: a los pares $P = \{2, 4, 6, 8,\ldots\}$ y a los impares $I = \{1, 3, 5, 7, 9,\ldots\}$. Sin embargo, la concepción que tienen los pitagóricos de los números pares e impares es distinta a la de nosotros, en cuanto son concebidos unidos y esto tiene especial relevancia, por lo que todo número par tiene una cota superior o mayorante en el número impar que le sigue. Esto hace que los números pares se les considere que están acotados y, en ese sentido sean finitos. Mientras los números impares tal como la serie numérica comienza y termina con ellos no están acotados, más cuando tienen relación con lo infinito. La noción de orden de los números pares e impares es distinta a la de nosotros, se diría que si consideramos ambos conjuntos unidos en uno solo N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,…}, y si consideramos que se tiene una relación binaria (N, ≤) en que se dice que es un conjunto parcialmente ordenado dado que es reflexivo, antisimétrico y transitivo, los pitagóricos verían el tema con otros ojos y bajo otros criterios:

i. Todo número par posee una cota inferior y una superior y estas están dadas por dos números impares. En ese sentido se dice que son completos (*ἄρτιος*), asimismo, tienen una frontera lo que los lleva a ser finitos (*πέρας*). Pero, a su vez, se dice que todo número par lo caracteriza la presencia de un yugo (*ζυγός*), o sea una instancia que mantiene unida a dos piezas. De nuevo estamos en presencia de la noción de par o pareja entendida como aquella realidad fruto de la díada, esto nos remontaría aún más lejos porque el 2 cabe exactamente en el 4 dos veces, se ajusta a la perfección o de manera completa. Pero el 4 y 6 no cumplen está propiedad, lo que invita a que los números pares estén a su vez constituidos por otros subconjuntos que les permita afirmar su completez numérica como pares a fin que se puedan ajustar y coincidir de manera perfecta.

ii. Los números impares no poseen cota ni inferior ni superior, dado que a nivel inferior los subyace el 1 infinito e inmóvil, mientras a nivel superior no se puede encontrar un número par que los limite. En ese sentido, se dice que son incompletos pero no en un sentido finitista sino que rompe con todos los linderos o conceptos que se le quiera imponer. Siempre nos superarán. En cuanto a que el vocablo (*περιττόν*) significa también algo innecesario y superfluo es en relación con la completez y a la posibilidad de definir una totalidad y las partes que la constituyen.

iii. De modo que para ellos la noción de reflexión, simetría y transitividad son propiedades que ellos no consideraban en los números, y si lo hacían era de otra manera. Este aspecto está muy presente en la teoría matemática moderna, y no nos ha quedado un legado de Pitágoras y su escuela que nos permita apreciar los caminos optados para fundamentar la existencia de sus sistemas numéricos. No obstante, es posible presuponer que es muy distinta a la actual, en especial, debido a que la existencia de los números es real y su concepción se daba no solo por cantidad sino por cualidad.

El número es aquello que se establece tanto en la quietud como el movimiento (*ἠρεμοῦν καί κινούμενον*. 986α-25), como lo que es recto y curvo (*εὐθὺ καί καμπύλον*), luz y oscuridad (*φῶς καί σκότος*), lo bueno y lo malo (*ἀγαθόν καί κακόν*), el cuadrado y aquello con lados de longitud desigual (*τετράγωνον καί ἑτερόμηκες*). (986α- 25). Es el modelador que ordena y organiza el universo, en él se reflejan los estados posibles de predicación existencial de los entes. Es de resaltar en el manejo de la díada (*δυάς*), que se tiene implícitamente una noción de "par ordenado" tanto cualitativo como cuantitativo, el cual está vinculado con la serie numérica fundamental que gobierna la base numérica decimal. Se presupone que el número diez mismo es la representación de un estado de categorización o predicación fundamental de todo lo que existe, donde los números impares (*μονοί αριθμοί*) son aquellos que diferencian y son balanceados de manera equilibrada por los números pares (*ζυγοί αριθμοί*).

2.3.15. El término como la cosa evoca el fundamento de lo primordial

También es importante señalar la búsqueda en toda teoría axiomática de aquellas nociones que están primero; se tiene la noción primitiva de individual como el fundamento de una proposición atómica[162].

> *De este modo, pues, se expresaron acerca de esto, y comenzaron a hablar y a definir acerca de la quididad, aunque procedieron de manera demasiado simple. Definían, en efecto, superficialmente, y pensaban que lo primero en que se diese el término enunciado era la substancia de la cosa, como si alguien creyera que es lo mismo el duplo que la díada, porque adonde primero se da es el duplo es un conjunto de dos. De lo contrario, el uno sería*

[162] Este tema es tocado en la introducción a la segunda edición *Principia Mathematica* de N. Whitehead y B. Russell (1927), donde la noción de individual se constituye como el fundamento para las proposiciones atómicas y por ende de la función elemental de un individual. Este hecho está antecedido por la presentación de la incompatibilidad como una idea primitiva que va a permitir redefinir las proposiciones primitivas de la lógica (págs, xvi a xx). Se destaca cómo esta noción que se constituye en algo irreductible y, por ende, sirve de soporte frente a lo más básico, que puede ser tratada en una proposición predicable y aseverable.

muchas cosas, que es lo que tuvieron que admitir ellos. Esto es lo que podemos deducir de los más antiguos y de los otros. (987α 26/28).

[20] Such is the nature of their pronouncements on this subject. They also began to discuss and define the "what" of things; but their procedure was far too simple. They defined superficially, and supposed that the essence of a thing is that to which the term under consideration first applies—e.g. as if it were to be thought that "double" and "2" are the same, because 2 is the first number which is double another.But presumably "to be double a number" is not the same as "to be the number 2." Otherwise, one thing will be many—a consequence which actually followed in their system. This much, then, can be learned from other and earlier schools of thought. Περί τε [20] τούτων οὖν τοῦτον ἀπεφήναντο τόν τρόπον, καί περί τοῦ τί ἐστιν ἤρξαντο μέν λέγειν καί ὁρίζεσθαι, λίαν δ' ἁπλῶς ἐπραγματεύθησαν. Ορίζοντό τε γάρ ἐπιπολαίως, καί ᾧ πρώτῳ ὑπάρξειεν ὁ λεχθείς ὅρος, τοῦτ' εἶναι τήν οὐσίαν τοῦ πράγματος ἐνόμιζον, ὥσπερ εἴ τις οἴοιτο ταὐτόν εἶναι διπλάσιον καί τήν [25] δυάδα διότι πρῶτον ὑπάρχει τοῖς δυσί τό διπλάσιον. Ἀλλ' οὐ ταὐτόν ἴσως ἐστί τό εἶναι διπλασίῳ καί δυάδι: εἰ δέ μή, πολλά τό ἓν ἔσται, ὃ κἀκείνοις συνέβαινεν. παρά μέν οὖν τῶν πρότερον καί τῶν ἄλλων τοσαῦτα ἔστι λαβεῖν. (987α-26/28).

Lo primero es lo (*ἄρχω*) que nos permite emprender algo y de lo cual se parte, siendo aquello que subyace a todo y que divide (*ὁρίζω*) delimitando y, en consecuencia, definiendo. Esto hace que todo sea más simple (*ἁπλόος*) y, en esa medida, es más claro, dada la acción de unificación en una sola dirección sobre la que recae la acción que nos concierne (*πραγματεύομαι*). En el tratado (*πραγματεία*) que nos ocupa se busca establecer la preeminencia de aquella cosa[163] (*πρᾶγμα*) que va a ser tratada y definida (*ὁρίζω*). Hay que

[163] Alfred Tarski (1956) en su obra: *Logic, Semantics and Metamatematics*, aborda el tema de aquellos dos grupos de conceptos sobre los que se van a establecer las metodologías de las ciencias como deductiva. Se aborda el tema de la definibilidad de los conceptos bajo dos grupos de conceptos: el primer grupo está constituido con conceptos tales como axioma, oración derivada o teorema, regla de inferencia, prueba; el segundo grupo está constituido por conceptos como: concepto primitivo, concepto indefinido, término, término primitivo, concepto definible o regla de definición. Se busca establecer la definibilidad y la mutua independencia de los conceptos bajo el problema de la completez de los conceptos de cualquier arbitraria teoría deductiva. Se nota, en este sentido, que la noción de (*πρᾶγμα*) esta asociada al segundo grupo de los conceptos primitivos. *Prâgma* (*πρᾶγμα*) significa tanto cosa como un hecho, en ese sentido se asimila a la noción de término, de individual, de primitivo; es decir, que no es susceptible de ulteriores simplificaciones, además que conserva ese carácter de neutro, en una suerte de variable real o libre. Este concepto va a asumir luego el peso de convertirse en una constante extra-lógica al ser definida alrededor de una teoría concreta, al

advertir que este último verbo posee varias aserciones puesto que al definir algo lo estoy delimitando, le establezco unas fronteras (*ὅρος*) que deben de circunscribirlo. Este hecho conduce a la propia división (*ὁρίζω*), que no es más que la relación que se da entre el todo y la parte. Sin embargo, también en (*ὅρος*) tenemos los términos que constituyen una definición o el término que define, que se asemeja a aquel enunciado capaz de delimitar algo; por eso, también se entiende que la definición tiene clara sus metas y puede extenderse, abrazar y contener lo que está delante de ella como fin. Es notable que la terminología de *orología* (*ορολογία*) le subyace la acción misma de nombrar (*ονομάζω*) e involucra delimitar algo, aquel término (*ὅρος*) que se va a constituir en un enunciado. Inicialmente, la acción delimitativa arranca de lo superficial (*ἐπιπόλαιος*), donde lo primero (*πρῶτος*) que existe (*ὑπάρχω*) desde un comienzo que lo subyace y está por debajo como fundamento (*ὑπό* + *ἄρχω*) mismo de la existencia (*ὕπαρξη*). Es cercano a lo que se establece como lo que es (*ἵστημι*), como aquel que es llamado (*λέγομαι*), como la forma activa de (*λέω*), lo enunciado como término (*λεχθεὶς ὅρος*): que es una forma irregular muy rara de un participio de un aoristo pasivo del verbo decir (*λέγω*), con potestad de discernir y muy relacionado con el logos (*ο λόγος*). Aquel término que está en el fundamento de todo lo que se dice, que evoca a la esencia (*οὐσία*) misma de las cosas que está dada en el término (*ὅρος*).

En una primera instancia estaba el término enunciado como la substancia de la cosa o del ente, el doble como duplicado (*διπλάσιος*) de lo mismo, de donde viene el doble (*διπλό*) muy distinto a la díada (*δυάδα*), de donde procede el número dos (*δυάς*) emparentado con una pareja, un par o un grupo de dos, el dos tiene la preminencia sobre lo doble o la díada[164] (*δυάδα διότι πρῶτον ὑπάρχει τοῖς δυσί τό διπλάσιον*). Lo cual va en

---

servir para fundamentar el conjunto de las oraciones X que constituyen una teoría, sea ‘a’ ese término y ‘B’ el conjunto de tales constantes, cada oración se definirá como: (x): x = a.≡. ϕ(x; b’, b’’,…), donde b’, b’’ son otras constantes extra-lógicas definidas por ‘a’ (págs. 298-300).

[164] Se puede apreciar en los comentarios de Posidonio de Apanea, que: “*Los primeros principios están en los números y en las simetrías que existen entre ellos, las cuales Pitágoras las llamó armonías, y los elementos compuestos de ambos, que las llamó geométricos. Y de nuevo él incluye la mónada y la díada indefinida entre estos primeros principios: y para él uno de los primeros principios se encamina hacia la causa creativa y de dar forma, en la cual la inteligencia, que es Dios, y la otra se encamina hacia la causa pasiva y material, la cual es el universo visible. Y él dijo, quye el punto de comienzo está en el número que es la década*” Aet. *Plac.* i. 3; *Dox.* 280. Texto recopilado y traducido por Arthur Fairbanks (1898), Editor and Translator, *Pythagoras and the Pythagoreans* (pág. 144).

concordancia con que lo uno no puede ser muchas cosas, un razonamiento afín a una futura axiomatización de la aritmética. Se trata de un razonamiento superior por cuanto evoca la mónada y luego la díada como fundamentos de una posible aritmética que se fundamenta en la noción de grupo, y concuerda con las propiedades de una estructura algebraica que permite construir los números con algunas ventajas teóricas claras al poseer en la medida que posee una estructura con tantas posibilidades de manejo. Recuérdese que el duplo está relacionado con una acción de doblar (*διπλασιάζω*) muy cercana a la operación aritmética de la multiplicación, también se asemeja a algo múltiple que se ve expandido. La díada, en cambio, está relacionada con la diferencia (*η διαφορά*) que se establece inicialmente en poder establecer un conjunto de diferencias entre dos entes. Lo que proviene de ser distinto o diferente (*διαφέρω*) lo uno con lo otro, de algo que pasa a través de algo (forma genitiva) o que causa algo (forma acusativa) *διά* + *φέρω* que lo carga o trae.

Tanto en la mónada como en la díada existe esa propiedad de generar cambios, y estos se originan por su capacidad de atravesar al propio término (*ὅρος*) donde subyace la esencia o sustancia del ente (*εἶναι*) que es. No hay que olvidar que cuando atravieso algo lo parto en dos, lo que haría que la díada tiene preeminencia sobre el dos. Este hecho se observa en la noción de diámetro (*διά*, a través + *μέτρον*, medida), y evoca esa posibilidad de que al atravesar algo lo hago susceptible de ser medido o cuantificado. Al igual que diáfano (*διαφανής*), que evoca a los rayos del sol atravesando algo para hacerlo más claro o puro, o transparente. Es posible conjeturar la fundamentación de la construcción de los números a partir de la relación entre la mónada y la díada, la cual tiene esa posibilidad de crear una serie de términos distintos que sirven para medir o contar algo: la mónada como principio constitutivo se ve atravesada por el *logos* creando la díada, que establece las dualidades que fundamentan la realidad. El mismo Pitágoras estudió con tanto detalle diversos grupos de díadas asemejándolas a unas categorías (*κατηγορέω*), y no en vano se puede descomponer tal vocablo como la relación entre lo que está en contra (*κατά*) + el hablar en una asamblea (*ἀγορεύω*), involucrando ese mismo proceso de diferenciación surgida de los contrarios.

La *ousía* que nos acompaña (*ἐπιπόλος*) que se sitúa arriba, en la superficie, y por lo que hay que trabajarla esforzándonos (*ἐπιπονέω*) dada su preeminencia como aquello de lo cual parte la misma existencia. En consecuencia, es el comienzo (*ὑπάρχω*) subyacente que fundamenta lo que es y que está dicho, lo que se constituye en una frontera (*ὅρος*) que a la vez es meta, norma y límite de cuanto existe. La *ousía* abordada como la cosa (*πρᾶγμα*) o el evento que hemos reconocido y asumido como propio, dado que nos hemos acostumbrado (*νομίζω*) a él fruto de la una práctica interiorizada. La *ousía* es lo que es idéntico (*ταὐτός*) consigo mismo, tiene la potestad de transformarse para ser (*εἶναι*) aquello que es doble o dual (*διπλάσιος*) tal como se ha visto en las dualidades básicas sobre las que se predica la misma existencia. Todo esto viene a acompañar y calificar las propiedades básicas del número dos (*δυάς*), ya que lo primero (*πρῶτος*) antecede y es con lo que se comienza (*ὑπάρχω*) dando y causando el origen de tal despliegue dual de contrarios. Se ha advertido ya que la unidad es la base de todo cuanto existe, que se halla en un estado de existencia pleno e infinito antes de generar este universo caracterizado por la coexistencia de los opuestos. Asimismo, Pitágoras parece invitar a que consideremos el estudio de lo uno o lo primero bajo un orden distinto, como una ordinalidad simple y a la vez ilimitada que se sitúa como la substancia o la esencia que fundamenta toda la existencia en todos sus órdenes posibles.

Aquello que es idéntico (*ταὐτός*) y que permite que algo pueda llegar a ser (*εἶνα*) igual (*ἴσως*), a verse transformado en una dualidad, duplicándolo (*διπλάσιος*) en los mencionados contrarios, es propio de la naturaleza del número: el número existe como uno e infinito en la misma existencia del universo (*οὐρανός*), pero, una vez surge el universo se organiza como naturaleza (*Φυσις*). Ese número uno e idéntico consigo mismo da origen a los contrarios que desde cierta perspectiva ejemplifican la propiedad del número dos (*δυάς*), abordado más como dualidad, fruto de su capacidad de doblarse o ser doble (*διπλασιάζω*). No en vano se afirma que el duplo y la díada no tienen el mismo ser: algo que se dobla y la presencia de dos entes, parece que tienen un fundamento distinto. Esto podría conducir a la transformación del único número uno ilimitado en los distintos números, en especial, como de la unidad se origina la dualidad y el dos. Se nota que equivalen a conceptos distintos que aunque tienen la misma cantidad no obstante poseen cualidades distintas. El uno puede ser dicho de muchas maneras: *πολλά τό ἓν ἔσται*, el uno (*εἶς*) se manifiesta como muchos (*πολύς*) es una condición propia de ser (*εἰμί*) él mismo. Por eso, el uno posee este atributo que lo acompaña y está a su lado (*ἐκεῖνος συμβαίνω*), es una cualidad que está dada antes (*πρότερος*) en su propia naturaleza y que tiene el poder de devenir en algo distinto u otro (*ἄλλος*), extendiéndose todo lo que se quiera (*τοσοῦτος*), en la medida que tiene la capacidad de aprehenderlo o asirlo (*λαμβάνω*).

La realidad del número subyace como lo primero, se impone en la superficie como aquella instancia que divide estableciendo una frontera sobre la cual la substancia del ente se manifiesta como un acto pensado. Es importante que el número anteceda a todo como fundamento de la misma substancia, y pareciera que a través de la función numérica $f(n)$ el pensamiento adquiriera la definición que lo caracteriza. Con mayor razón, cuando es básico establecer un delineamiento, que además de constituirse como una marca que separa y ordena, jerarquiza y posibilita el mismo darse de las cosas. Un tema que es recurrente para Aristóteles cuando cuestiona la posición de los pitagóricos de querer establecer una igualdad entre la dupla, la díada y el número dos, como si tal comparación evocara la misma unidad de lo uno e idéntico consigo mismo, como algo que no es posible. No solo por la propia situación de orden que se impone sino también por querer asociarle a cada estadio numérico un ser, lo cual sería imposible para la concepción aristotélica.

No obstante, a este respecto se puede estar frente a una de las mayores diferencias en la concepción misma del número entre los pitagóricos y el propio Aristóteles, puesto que, para Pitágoras, la noción de número posee ante todo la propiedad de unificar. Lo cual es intrínseco a su propia naturaleza o esencia (la *οὐσία* es una substantivación del presente participio femenino de *εἶναι*, que lleva al presente infinitivo de *εἰμί* o verbo ser en cuanto yo soy). Es decir, el número posibilita el ser de los entes, el que algo y todo pueda ser y llegar a ser es algo de potestad del número. A su vez, es la instancia que legitima la misma existencia, opera como un garante de todo cuanto existe y, en ese sentido, asume las funciones de lo que en lógica vendría a ser un cuantificador universal. El número es también aquello que permite asir algo otorgándole una unicidad o unidad. Para los pitagóricos, el número está en el origen mismo y antecede al mismo acto por el cual algo aparece. Pero lo significativo para Pitágoras son las cualidades propias de cada número, lo que hace que la noción de díada forme parte de una noción cualitativa que la diferencia de la unidad, algo parecido acontecería con la tríada y así sucesivamente hasta el número nueve: involucra definir la esencia del número desde la cualidad propia de cada uno.

2. 4. El pensamiento pitagórico según Diógenes Laercio

Las costumbres y el pensamiento de Pitágoras fue investigado con esmero por el historiador griego Diógenes Laertius (*Διογένης Λαέρτιος*), quien vivió en el siglo III de nuestra era y del cual se sabe muy poco. Hay que destacar su enorme y juicioso trabajo al haber logrado escribir diez tomos de su magna obra conocida como *Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres*[165]. Documento de inestimable valor en cuyo octavo libro toca la vida del famoso filósofo y matemático griego Pitágoras de Samos. Se pueden traer a colación algunas de las citas relacionadas con el tema que se está analizando bajo la traducción realizada del griego por José Ortiz y Sanz.

2.4.1. La mónada y la díada como fundamento para una nueva teoría aritmética

> *Alejandro, en las Sucesiones de los filósofos, dice haber hallado en los escritos pitagóricos también las cosas siguientes: 25.Que el principio de todas las cosas es la unidad, y que de ésta procede la dualidad, que es indefinida y depende, como materia, de la unidad que la causa. Así, la numeración proviene de la unidad y de la dualidad indefinida.*
>
> (*Alexander in his Successions of Philosophers says that he found in the Pythagorean memoirs the following tenets as well. [25] The principle of all things is the monad or unit ; arising from this monad the undefined dyad or two serves as material substratum to the monad, which is cause ; from the monad and the undefined dyad spring numbers*[166] *; Φησὶ δ' ὁ Ἀλέξανδρος ἐν Ταῖς τῶν φιλοσόφων διαδοχαῖς καί ταῦτα εὑρηκέναι ἐν Πυθαγορικοῖς ὑπομνήμασιν. [25] ἀρχήν μέν ἁπάντων μονάδα: ἐκ δέ τῆς μονάδος ἀόριστον δυάδα ὡς ἂν ὕλην τῇ μονάδι αἰτίῳ ὄντι ὑποστῆναι: ἐκ δέ τῆς μονάδος καί τῆς ἀορίστου δυάδος τούς ἀριθμούς:*).

[165] Laercio Diógenes, *Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres*, José Ortiz y Sanz, revisada y corregida por Georgía Kaltsiduo.
[166] Laertius Diogenes, *Lives of Eminent Philosophers*, ed. Robert D. Hicks, Harvard University Press,1925.

Diógenes Laertius platea en el capítulo dedicado a la vida y obra de Pitágoras, que él dijó que el origen (*arché, ἀρχή*) de todas las cosas está fundado en la mónada[167] (*μονάδα*). Esta guarda relación con la unidad (*monas, μονάς*) que de por sí es única y autoconsistente consigo misma. Es la instancia que se constituye como el principio a partir del cual se origina la existencia, siendo en este sentido la instancia fundacional que de alguna manera lo contiene todo. Esta mónada única (*ἁπάντων μονάδα*) está unida de manera inseparable al origen, destacando cómo *ἅπας* posee la misma raíz que uno (*εἷς*) y todo (*πᾶς*). Asimismo se puede afirmar que es la actividad primigenia que posibilita que se predique o se pueda decir algo. Uno de estos usos la convierte en una suerte de cuantificador que cuantifica posibilitando la existencia de un universo. De la mónada surge la díada no definida, carente de fronteras (*ἀόριστον δυάδα*), aquella instancia no visible (*ἀόρατος*), es decir, no accesible a la vista (*ὁράω*). De esta díada procede la *hyle* (*ὕλη*) que viene a constituirse como aquella sustancia o materia que es la base que fundamenta la mónada, la causa (*αἴτιος*) que la subyace (*ὑφίστημι*): se da esa dinámica que crea la realidad que conocemos a partir de una mónada única y soberana que origina la dualidad ilimitada e indeterminada (*ἀόριστος*), fundamento de los números. Aquí existe toda una propuesta para la construcción de los números entendidos dentro de un contexto más amplio por cuanto todos los entes están constituidos por los mismos, si se parte de la dinámica de una mónada única a partir de la cual se origina una dualidad de contrarios que de por sí es ilimitada e indeterminable. Es importante ver cómo todo comienzo se da amparado en el concepto de la unidad monadal; si bien, hay otra palabra para unión que es *enosis* (*ἕνωσις*) formada por la preposición en o

[167] Nótese que el tema de la mónada impactó a Gottfried Leibniz (1721) en su obra *Monadología*, en ella plantea una definición de mónada: "*La mónada que vamos a hablar aquí no es otra cosa que una substancia simple; que está en las compuestas, simple quiere decir, que no tiene partes*" (pág. 48). Una vez más se percibe ese esfuerzo que también caracterizó a los llamados atomistas griegos, Leucipo y Demócrito (*Δημόκριτος*), que definieron el átomo como aquello que no tiene partes. Diógenes Laercio comenta acerca de Demócrito en: *Laërtius Diogenes, Lives of Eminent Philosophers, book 9 Democritus, translated by R.D. Hicks (1925):* [44] *His opinions are these. The first principles of the universe are atoms and empty space ; everything else is merely thought to exist ([44] Δοκεῖ δ' αὐτῷ τάδε: ἀρχὰς εἶναι τῶν ὅλων ἀτόμους καὶ κενόν, τὰ δ' ἄλλα πάντα νενομίσθαι: ἀπείρους τε εἶναι κόσμους καὶ γενητοὺς καὶ φθαρτούς).* El átomo (*ἄτομος*) es aquello que no puede ser cortado en partes más pequeñas, es indivisible y también significa un individual, muy en condancia con la búsqueda en la lógica de aquella noción fundamental inderivable, indefinible, simple que es un individual. Átomo proviene de unir como prefijo la alpha privativum *ἀ-*, que indica ausencia de una propiedad con el verbo cortar (*τέμνω*). Entonces, en el origen (*ἀρχή*) estaba la mónada y el vacío (*κενός*), a su vez estaba presente lo carente de límite, el *áperios*: el infinito (*ἄπειρος*) es (*εἶναι*) el cosmos (*κόσμος*).

con (*έν*) y el sufijo *osis* (*ωσις*) que evoca la unión o fusión como un proceso activo que combina naturalezas opuestas aunque complementarias, tal como se da en la unión sexual. Con lo cual la unión que se da en la mónada está en ausencia de contrarios y no existe lo otro con lo cual tenga que reunirse o fusionarse, esto hace que tal estado carezca de partes asimismo, no posee una interioridad que se contraste con una exterioridad, es algo autocontenido que cobija y cubre todo lo que existe y es el único estadio donde la unidad es a su vez totalidad.

Cabe resaltar la fundamentación del número (*αριθμός*) en su comienzo (*ἀρχή*) cómo lo primero (*ἄρχω*) está dado en la mónada[168] (*μονάδα*) que, además de evocar una unidad de medida, también significa un punto o una unidad, cuya característica es que se da la equivalencia entre una parte sola que a su vez es un todo indiviso. Solo (*μονός*), soltero (*μόνος*), que todavía no está en función de algo que lo complemente, no comprometido con lo otro que a este nivel sería algo inexistente, la mismidad y la otroriedad se constituyen como un único momento (*ορμή*). Se trata del instante fundante de la realidad como cosmos organizado tan vinculado con el *Kairós* (*καιρός*), como aquel "momento adecuado y oportuno" que se da después de que los números han ordenado el Cronos (*κρόνος*) primigenio. Es curioso que la mónada, como aquello que está solo, esté muy unida al significado de número impar (*μονοί αριθμοί*), como para destacar la singularidad de las propiedades únicas de este conjunto de números. Hay una relación muy cercana entre lo que está solo (*μόνος, μονός*) con lo que es lo primero (*πρώτος*), como si se entendiera que lo que es o fue primero es o estuvo solo y es indiviso. De ahí que, también los números impares se dicen los números primeros (*πρώτος αριθμός*); si analizamos la expresión que define a un número impar como $n = 2k + 1$, donde k es un entero, se nota que existe de alguna manera la presencia de la dualidad y de la unidad interactuando de manera simultánea. Es de resaltar que el proceso de diferenciación de lo que igual consigo mismo

[168] Posidonio de Apanea manifiesta en relación a Pitágoras que él consideraba a la mónada como el lugar donde se asienta la inteligencia. De igual manera, todas las formas y las clases se dan en concordancia con la mónada; a su vez, la percepción es posibilitada por la misma mónada. Mientras que a la díada se le identifica como indefinida y concierne más a la ciencia. Se ajusta a toda prueba y persuación, y es el lugar donde se asienta el silogismo, que permite reunir aquello que es preguntado acerca de las cosas, a su vez la tríada resulta de la comprensión de la díada. Aet. *Plac.* i. 3; *Dox.* 280. Texto recopilado y traducido por Arthur *Fairbanks (1898), Editor and Translator, Pythagoras and the Pythagoreans (pág. 145).*

se manifiesta en los números impares. Mónada que es única (*ἅπαςα*), que posee la misma raíz que uno (*εἷς*) + todo (*πᾶς*), donde está contemplado como cada uno o cada parte se constituye como una totalidad, de ahí proviene el universo (*παν*) como una instancia omniabarcante. Tenemos al cardinal uno (*ένα*) que nos remite a *εἷς* que corresponde también al cardinal uno y está emparentado con su forma ordinal como (*πρῶτος*) y su forma adverbial como todo (*ἅπαξ*). Al considerar la naturaleza de los números impares pareciera como si en la génesis misma estuviera presupuestada la dualidad, donde el ser indeterminado (*ἀοριστέω*) o indefinido (*ἀοριστόω*) es el motivo por el cual se habla una dualidad indefinida (*ἀόριστον δυάδα*), de la cual emerge el número cardinal dos (*δυάς*). Lo interesante en todo este análisis es que en una posible teorización axiomática de los números se antepone la existencia de lo uno en cuanto único y la díada como dualidad indivisa e indeterminada como aspectos cualitativos cuantificados que estarían antes de una axiomatización aritmética meramente extensiva o cuantitativa. Es como si se dispusiera de una metafundamentación numérica que antecede a la fundamentación formal, la mónada y la díada están situadas en un nivel proposicional anterior a la serie numérica misma.

Este paso puede ser interpretado como una axiomatización del número abordado como un número entero positivo o un natural, y se observa en este proceso que la definición se da dentro de una estrategia que busca fundamentarlo de manera doble tanto intensiva como extensiva: este tipo de tratamiento es algo que hoy día se ha perdido. La axiomatización[169] de la aritmética abordada en segunda mitad del siglo XIX, bien sea por Giuseppe Peano, Gottlob Frege, David Hilbert, Ernst Zermelo, John von Neumann, Adolf Fraenkel y otros tantos, nunca le asocia unas cualidades a los números y su deducción se aborda tan solo en referencia a su aspecto cuantitativo más no cualitativo. La razón estriba en la antigua costumbre que se remonta a los orígenes de la civilización, en la cual los números se utilizaban para sumar cantidades y contabilizar actividades comerciales, tal fue

[169] Como El Movimiento Axiomático llama Morris Kline (1972) en *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* a todas estas tentativas de darle rigor a las matemáticas. La estrategia utilizada era comenzar con unos términos indefinidos cuyas propiedades debían de ser especificadas por estos axiomas, el objetivo del trabajo era derivar las consecuencias a partir de los mismos. Estos se planteaban en concordancia a su mutua independencia, consistencia y categoricidad. Hilbert fue un entusiasta de este método axiomático y de la clase de pensamiento que se deriva de él, ayudaba en determinar el curso de una investigación sin importar su dominio (pág. 1027-8).

el origen de la aritmética. Si la axiomatización extensiva de los números enteros positivos ha sido infructuosa, una axiomatización que además considere el aspecto intensivo o cualitativo sería mucho más compleja. Habría que encontrar las razones que hacen a cada uno de los números de la base decimal distinto al otro, esto llevaría a incrementar y complejizar los usos de las nociones tradicionales e incorporar muchas nuevas. Sea el caso, a nivel extensivo se tiene que $2 + 3 = 5$, pero a nivel intensivo, cada número tendría su propio operador: el componente cualitativo involucraría, por ejemplo, que sumar naranjas con peras es distinto. Esto se debe a que tanto las naranjas como las peras pertenecen a conjuntos distintos, podríamos solucionar esto creando un nuevo conjunto, donde tanto las naranjas como las peras sean subconjuntos del mismo, sea este conjunto el de las frutas. En este caso, estamos sumando frutas y nos da 5. El sumar a nivel intensivo o por cualidad nos lleva a que tengamos que definir las propiedades que caracterizan a cada número, esto haría que se den otros predicados que podrían llevar a modificar la operación anterior, a manera de ilustración se podría simbolizar como: 2 (+*) 3 =°, donde el +* es el operador de la suma para el dos definido a nivel intensivo o sea por cualidad, a su vez tendríamos una variedad de signos de igualdad, =°, sería uno de ellos. El razonamiento anterior llevaría a nueve operadores, uno para cada número del 1 al 9. Otra complejidad sería que habría que replantear la noción del cero, ya que llegar al mismo cero desde cada número sería distinto. El cero dejaría de ser una mera cifra y pasaría a ser un concepto que amarra lo numérico.

Podemos aseverar que esa mónada fundante de la unidad como eje de cuanto existe evoca en algo lo que Bertrand Russell y Alfred North Whitehead[170] nombraran como la clase única al número cardinal 1. Pitágoras se esfuerza por tratar de construir una epistemología de la aritmética anclada en consideraciones de tipo metafísico, en la que los números poseen unos contenidos o cualidades en las que se revela su naturaleza. Algo que se aprecia en la elaboración de un número uno que, además de contenerse a sí mismo como un todo, posee la propiedad que la totalidad sea una unidad: unidad ≡ totalidad. Sin

[170] Russell Bertrand y Whitehead North (1910) en *Principia Mathematica*, se define al número uno como la clase de todas las clases unitarias (*the class of all unit classes*). Se tiene que el 1 es ambiguo en relación al tipo. El símbolo $1(\alpha)$, donde α es el tipo, significa todas las clases cuyo único miembro pertenece al tipo α. En concordancia $\xi \in 1(\text{Indiv})$, significará que ξ es la clase que consiste en un solo individual, siempre que (Indiv) represente la clase de los individuales (pág 345).

embargo, se entiende que existe una indivisibilidad en la mónada, que su unidad es indivisible: *enosis* (*ἕνωσις*) significa unión pero de unos contrarios complementarios tal como se da en los dos constituyentes de la díada de cada pareja, esa fusión o unión evocaría de nuevo una mónada pero fruto de una reunión de dos naturalezas contrarias y complementarias. La etimología de la mónada está asociada a lo que está solo, aislado y carente de algo que lo acompañe. Sea el caso del término monádico (*μοναχικός*), también está asociada con monarca (*μονάρχης*) y monarquía (*μοναρχία*), con soledad o desolación (*μοναξιά*). *Mónos epístemai* (*ἐπίσταμαι*) que es solitario está asociado con *manós* (*μανός*) que es raro, escaso, poco denso. Tenemos también la *moní* (*μονή*) como la estancia, morada o el domicilio, de donde se derivó la etimología de monasterio (*μοναστήρι*) y enfermería. El vocablo *mónimos* (*μόνιμος*) significa algo permanente y constante, y en *monagos* (*μοναχός*) tenemos algo que está solo y solitario, siendo la raíz para monje. En todos los casos en que nos referimos a la mónada tenemos algo solitario autosubsistente que es una morada o un lugar permanente, que de alguna manera posee una conciencia o se sabe de él-ella misma, que no está vacío sino que está lleno de sí mismo en un estado de plenitud de algo que es, y tal condición es lo que le permite derivar la díada. Al no ser la mónada algo vacío sino algo lleno en completitud que se fundamenta a sí misma a partir de sí misma, se podría decir que la mónada posee la propiedad reflexiva aRa y que de alguna manera esta deviene en algo diferente como aRã, con a ≠ ã, que más tarde se transformará en aRb siendo el origen de las parejas ordenadas (a, b). A partir de ellas emerge la realidad diferenciada de la categorización de la díada bajo un grupo de predicamentos diversos que vienen a constituirse como la instancia fundamental que definiría la génesis de los números. Se puede decir que estamos en presencia de varios niveles de lo numérico, un número uno infinito previo a la aparición de la serie numérica de los números enteros que está recreada a partir de dos series, la de los números pares y la de los impares.

Es en una unidad constituida como principio y una dualidad carente de fronteras donde se constituyen las dos instancias que permiten construir estos números completos positivos en relación a dos axiomas fundamentales. Sin embargo, la dificultad está en poder simbolizar tales metaproposiciones en relación con una lógica matemática debido a la complejidad que ambas serían propicias a verse simbolizadas en relación con una teoría de los tipos lógicos donde siempre superarían las predicaciones que se hagan de ellas, pero que estarían por debajo de aquella predicación que las transforme en impredicativas. Es interesante señalar la concepción de un origen a partir del cual todo se construye o elabora, que dicho principio es una unidad que también puede ser vista como una totalidad a partir de la cual se originan todo lo que existe. Se habla de un único principio emanado de aquella mónada primigenia fundamento de todo cuanto existe. Es una mónada que no está contenida en ninguna otra, es la causa de la cual surge el uno como garante de la realidad. Luego, a partir de esta mónada surge la dualidad que se aprecia como una serie muy definida y matizada de contrarios. Es a través de estos contrastes como se busca explicar las características intrínsecas y extrínsecas de la existencia de los distintos seres vivos que nos rodean, todos nos caracterizamos por pertenecer a una familia o especie y en tener un género sea masculino o femenino. En este juego de contrates se tendría una mónada singular que se contrasta con una díada pluralizante. Da la impresión que la génesis de la noción moderna de la *función siguiente*[171] estuviera recreada en este paso, sin embargo, esta díada no está restringida a la noción del número dos. Va más allá de estos dos principios constitutivos en los que se generan los números a partir del uno, el dos, y así sucesivamente. Si se toma en cuenta los opuestos que se construyen a partir de la díada, se tendrían tanto los números enteros positivos como los números enteros negativos.

La fundamentación pitagórica de los números enteros estaría en un nivel deductivo distinto a los tradicionalmente manejados, en unos metaniveles que permiten establecer dos metaxiomas que sirven para proponer como dos nociones primitivas, la de la unidad y a la de la dualidad. Asimismo, se puede observar dos funciones: la una de tipo reflexivo que está presente en el número uno o la mónada y, la otra, expresada como una serie de dualidades que le sirve de *substratum material*. En esta última se aprecia la díada donde se da una relación simétrica $\forall$ a, b $\in$ A (*arché*) aRb $\rightarrow$ bRa, pero al mismo tiempo se tiene una relación asimétrica: $\forall$ a, b $\in$ A aRb $\rightarrow \neg$ (bRa). La complejidad de la situación no está

[171] Este tema está ampliamente tratado por Bertrand Russell (1919) en su obra *Introduction to Mathematical Philosophy*, en la cual menciona que la noción de siguiente o sucesor hace parte de las cinco proposiciones primitivas con las que Giuseppe Peano buscó fundamentar al conjunto de los números naturales (pág. 9). Russell buscará brindar una fundamentación lógica de los naturales, para lo cual la noción de siguiente o sucesor será reemplazada por la noción de hereditario, en este caso respecto a la posteridad del cero (pág. 17).

completamente expresada en las dos expresiones anteriores. Diríamos más bien: $\forall$ (a, b) $\in$ P ($A_{10}{}^{2}$), (a, b) $\subset$ P(A): aRb $\rightarrow$ bRa, donde a $\neq$ b, (min a R max b) y (max a R min b). Por lo tanto, existe una relación de oposición complementaria, donde a tiene algo de b en mínima proporción a fin de poder soportar la mutua necesidad, dependencia y unidad como pareja ordenada. Las nociones de orden, en este sentido, varían un poco de las tradicionales manejadas en las matemáticas usuales; es un orden total subordinado a unos órdenes parciales. Además, hay una serie finita diversa que da lugar a una serie infinita diversa. Cabe resaltar cómo la formulación filosófico-matemática establece unas propias variantes en la modelación de las teorías, tal aspecto hace que la filosofía sea indispensable como campo reflexivo conceptual de la matemática. La constitución pitagórica de los números sirve como fundamento de la realidad, se establece así una ontología y una epistemología de la mónada y la díada. Tal interpretación conduciría al planteamiento de una metafísica, dado que los números son la causa a partir de la cual se crea, ordena y deriva todo el universo conocido.

2.4.2. La preeminencia del número en relación al logos y su orden frente al símbolo

Hay que destacar cómo Pitágoras construye toda su geometría a partir del punto, y como una línea viene a ser definida como una sucesión de puntos, teniendo dos extremos, a su vez la superficie vendrá luego y de ella se construirán las figuras sólidas. Como ya se anotó, se dice que el libro primero de Euclides fue escrito por Pitágoras.

> *Desde los números surgen los puntos, de los puntos surgen las líneas, de las líneas surgen las figuras planas, de las figuras planas surgen las figuras sólidas, de las figuras sólidas surgen los cuerpos sensibles. Los elementos son cuatro, fuego agua, tierra y aire. (VIII, 25).*
>
> (*from numbers, points ; from points, lines ; from lines, plane figures ; from plane figures, solid figures ; from solid figures, sensible bodies, the elements of which are four, fire, water, earth and air; Ἐκ δέ τῶν ἀριθμῶν τά σημεῖα: ἐκ δέ τούτων τάς γραμμάς, ἐξ ὧν τά ἐπίπεδα σχήματα: ἐκ δέ τῶν ἐπιπέδων τά στερεά σχήματα: ἐκ δέ τούτων τά αἰσθητά σώματα, ὧν καί τά στοιχεῖα εἶναι τέτταρα, πῦρ, ὕδωρ, γῆν, ἀέρα:*).

Se puede considerar a los números como las entidades puras o trascendentales de las que se derivan todas las demás: por lo tanto, se ve cierta preeminencia de la aritmética sobre la geometría, lo que llevaría a tratar de explicar la segunda en términos de la primera. Se nota que los números al igual que los entes geométricos poseen una realidad concreta con un estatuto ontológico superior a los entes sensibles, no siendo abstracciones ni construcciones mentales sino entes reales en el pleno sentido del término. Se aprecia a la matemática como aquel conocimiento superior que se desarrolla bajo el influjo directo de la mónada y díada, dando origen a los demás conceptos que van a constituir a la geometría y a las ciencias. En el número (*ἀριθμός*) se originan las nociones primitivas de la geometría, es como si la aritmética antecediera a la geometría y determinara las definiciones de esta. Propiamente, la *metría* (*μετρία*) del número o *arithmós* antecediera a la metría de la tierra (*γῆ* o *geo*) derivadas de *metrón* (*μέτρον*) medida. En esta concepción, el número no es una mera cifra que indica una cantidad o medida de algo, sino que a través del concepto de número podemos encontrar la explicación de la existencia de todos los entes que habitan el universo. Se notan varios saltos conceptuales: el primero es de la mónada a la díada, el segundo de estos a los números, el tercero de estos a los entes geométricos, un cuarto salto está dado de los entes geométricos a los cuerpos sensibles.

Surge la pregunta que indaga por lo que se genera o se causa a partir de los números: *ἐκ δὲ τῶν ἀριθμῶν τά σημεῖα*, que señala un entorno desde el cual el número como instancia activa origina al punto (*σημείο*). No obstante, este vocablo también posee otras aserciones, tal como en su forma genitiva (*σημεῖον*) significa también marca, signo e indicio “aquella marca por medio de la cual una cosa es conocida”, como también indica “una señal que presagia algo que proviene de la divinidad” y la presencia de un límite o frontera que toma cuerpo en un signo. Adviértase que *sima* (*σῆμα*) es el símbolo o marca que nos va a permitir conocer algo, pero, además evoca aquella señal proveniente de la divinidad en la cual se instaura algo, es el comienzo de algo e, incluso, además indica una constelación celestial. También se la identifica con la estrella Sirio[172], conocida por los griegos como *Σείριος* (*Seirios*) y hoy día llamada *Alfa Canis Maioris* situada en la constelación de *Canis Maior*, y es la estrella más brillante de todo el cielo nocturno vista desde la Tierra. Se ve

[172] Tomado de: *σῆμα en* Liddell & Scott (1940) *A Greek–English Lexicon*, Oxford: Clarendon Press.

cómo el número irrumpe en la realidad en distintos niveles, sea en la realidad cósmica como una estrella que evoca también al punto como presencia de la dimensión ininteligible e invisible propia de lo numérico. Además, es la marca y el signo que nos va a posibilitar construir una lengua, proviene del verbo (*σημαίνω*) que brinda la posibilidad de significar e identificar algo que nos permite interpretarlo y explicarlo a fin de poder concluir algo. Se nota que el número concebido de esta manera es la causa de la existencia del universo como también de la lengua, pues en el substrato de lo simbólico nos encontramos con lo numérico, siendo la esencia misma del número el símbolo. Ahora bien, de los puntos surgen las líneas (*γραμμή*), con un doble significado; por una parte, a nivel formal, la noción primitiva de punto es previa a la de la línea, lo que bien podría llevarnos a conjeturar que una línea está constituida por puntos; de igual manera, es una forma poética para referirnos a la vida, como aquella línea a lo largo de la cual la vida se va desenvolviendo. Hay también una remisión al verbo grafo (*γρᾰ́φω*) del cual se origina la escritura como el arte de escribir, asimismo lo que es bosquejar, dibujar, procesar o demandar a alguien. Al final se nota que en la misma acción de escribir o simplemente delinear cualquier tipo de forma gráfica le subyace el número (*ἀριθμός*) cuya actividad de numerar (*ἀριθμέω*) subyace a todo acto de habla y escritura del lenguaje cotidiano. Este hecho es de capital importancia, ya que se está aseverando que el morfema como número antecede al morfema como palabra: el número (*ἀριθμός*) es previo al *logos* (*λόγος*). Se podría afirmar también que el *logos* como número es anterior al *logos* como palabra. Lo que involucra que la matemática antecede a las estructuras gramaticales y lingüistas, las define y les da forma para que pueda ser entendible, comunicable e interpretable tanto como lengua hablada como escrita.

Posteriormente se dice que de las líneas surgen las figuras planas (*ἐξ ὧν τά ἐπίπεδα σχήματα*), notamos que (*ἐπίπεδος*) es aquello que está sobre el suelo, y se encuentra muy relacionado con la proposición *ἐπί*, sobre y *πεδίο*, que significa campo, dominio o rango; de ahí derivan vocablos como el dominio científico (*επιστημονικό πεδίο*) y el campo del conocimiento (*πεδίο γνώση*). Es de resaltar que estar colocado sobre algo involucra que lo que está arriba como superficie en este caso lineal está soportado por algo que esta debajo o que lo subyace, sea el caso de la línea. Pero, también, indica una manera de construcción metodológica de la *episteme* (*ἐπιστήμη*): lo que está sobre en la preposición *epí* (*ἐπί*) + colocar, establecer, poner, *istemi* (*ἵστημι*). Este aspecto indica que el conocimiento se construye como una sucesión de capas o pliegues que se van sumando o agregando una encima de la otra en una superficie sobre la cual se apoya dentro de un proceso de elevación o ascensión que caracteriza a la actividad humana. A su vez, *skhêma* (*σχῆμα*) que significa forma, apariencia; diagrama deriva del verbo tener (*ἔχω*) que unido con el vocablo *ma* (*μα*) es utilizado para ser agregado a los sustantivos neutros. También esta palabra está muy relacionada con *morphḗ* (*μορφή*), cuyo significado es forma y apariencia. Esta consideración implica eso que está sobre el suelo en *ἐπίπεδος* o sobre una línea que se le asemeja es aquello que adquiere una forma que no es completa y por consiguiente es aparente. Es el fundamento diagramático el que va a sostener lo que se levante sobre ella, lo va a tener en sentido de contenerlo y sostenerlo. Esto lleva a la sentencia: "*de las figuras planas surgen las figuras sólidas*[173]*" (ἐκ δέ τῶν ἐπιπέδων τά στερεά σχήματα)*. Se suele dar un énfasis especial a aquello que es firme y sólido a nivel de un aspecto fundacional como lo es *stereós* (*στερεός*) y que posee una corporalidad tridimensional previa a que devenga en un cuerpo físico. Para, finalmente, concluir que "*de las figuras sólidas surgen los cuerpos sensibles"* (*ἐκ δέ τούτων τά αἰσθητά σώματα*), en especial lo sensible que es percibible (*αἰσθητός*) y que está relacionado con la percepción y la sensación (*αἴσθησις*) de quien percibe (*αἰσθητής*) los cuerpos y su cuerpo o *soma* (*σῶμα*). Una corporalidad que es aprehensible por medio de los sentidos físicos, corporalidad que está dotada de una materia dentro de un espacio tridimensional. Se percata en estos dos últimos comentarios la forma tridimensional de naturaleza geométrica propia de las figuras sólidas que le antecede a la forma tridimensional del cuerpo físico: la aritmética le antecede a la geometría y esta le antecede a lo material de característica físico-sensible.

[173] Es interesante destacar cómo en todo este tránsito de lo plano a lo sólido, se está planteando el retornar a aquellos temas tratados en el método exhaustivo planteado por Antifonte de Atenas en el siglo V a.C., cuyo propósito era encontrar el área de una figura al inscribir dentro de la misma una secuencia de polígonos, los cuales convergen resolviendo de esta manera el área a calcular. Este hecho, de nuevo, es recreado por Bonaventura Cavalieri en el siglo XVII, en lo que se conoció como el principio de los indivisibles. Eso le permitió calcular el área de un triángulo esférico en términos de sus grados esféricos, el cual es igual a su exceso esférico. Tal hecho anticipa el cálculo integral. Ver *Solid Geometry with Problems and Applications* por H. E. Slaught y N. J. Lennes (1919), (págs. 143, 214).

Se subraya en esta forma cómo la aparición de los elementos se da a partir de un modelo geométrico consistente en una línea vertical unida a una línea horizontal; en cada línea tenemos la presencia de una díada de principios constitutivos de naturalezas opuestas: calor-frío y humedad-sequedad, que al verse relacionados originan una combinación de cuatro elementos. A partir de estas formas puras numérico-geométricas se puede derivar el mundo real habitado por los cuerpos sensibles (*αἰσθητά σώματα*), un mundo que viene a estar encima de las formas geométricas volumétricas, lo cual es una indicación para señalar que las formas de los cuerpos sensibles derivan de las formas geométricas. Esto evidencia que todo el universo está ordenado por los números y ordenado también a nivel geométrico, teniendo presente que la aritmética le antecede a la geometría. Es posible conjeturar que existe una relación biyectiva entre la aritmética y la geometría: teniendo dos conjuntos A, Γ, que simbolizan la aritmética y la geometría podemos contruir una relación $A \rightarrow \Gamma$, tal que $\alpha \rightarrow \gamma = f(\alpha)$. Esta se caracteriza que para toda forma geométrica $\gamma \in \Gamma$: $\exists!\ \alpha \in A$ tal que $f(\alpha) = \gamma$. Sea el caso que relacionemos el uno o mónada (εἷς, *αἰσθητά σώματα*) con el punto (*σημείο*), la díada con la línea (*γραμμή*), la base decimal del número (*οὐρανὸν δέκα ἀριθμῶν φύσιν*) con las figuras planas (*ἐπίπεδα σχήματα*), los diez principios duales *(ἀρχάς δέκα λέγουσιν εἶναι*) con las figuras sólidas (*στερεά σχήματα*), y, finalmente, los entes animados concreto que habitan el universo (*κόσμον ἔμψυχον*) con los cuerpos sensibles (*αἰσθητά σώματα*).

Toda esta exposición muestra cómo se construye un conocimiento propiamente formal de naturaleza matemática y científica bajo una epistemología (*ἐπιστήμη*); y, a la vez, también se tendría una ontología: lo que está encima, sobre, en unión con el presente participio del verbo ser o existir (*εἰμί*), más *logos* (*λόγος*), lo que vendría a satisfacer la existencia de los seres vivos sensibles. En Pitágoras, la ontología está fundamentada en la existencia de la mónada y, a partir del desarrollo activo de la misma, se construye una epistemología. Se le suma a estas consideraciones un planteamiento metafísico al derivar todo lo que existe a partir de la mónada, que es la instancia que fundamenta la misma existencia y la vida que se origina de ella. Los griegos antiguos construyeron una lengua donde la etimología de sus vocablos nos muestra toda una trama explicativa de la realidad recreada por ellos: el que percibe (*αἰσθητής*), lo sensible (*αἰσθητός*) son vocablos que comienzan con la letra alfa α y contienen además a la letra *zita θ* ambas presentes en *arithmós ἀριθμός*, lo que pudiera indicar, que la realidad sensible se origina de la realidad de los números. Finalmente, tal proceso adquiere su plena realización con la aparición de los elementos (*στοιχεῖον*), vocablo que posee una riqueza de significados muy concordantes entre sí a fin de abarcar la cosmovisión propia de los pitagóricos: es un elemento en el sentido químico, es un elemento primario que subyace algo complejo, es la letra como un componente del alfabeto, es una parte del discurso, es un principio fundamental, es la sombra de un reloj de Sol y es, además, un signo del zodíaco. Pero este vocablo viene unido a otros en la oración: *siendo cuatro igualmente los elementos* (*ὧν καί τά στοιχεῖα εἶναι τέτταρα*). En esta oración tenemos la presencia del verbo ser o existir (*εἰμί*) que hace su aparición para ser el predicado de los elementos (*στοιχεῖον*) bajo la cuantificación del número cardinal cuatro (*τέσσαρες*), lo que indica que de alguna manera la existencia del mundo sensible está gobernada por este número y en concordancia al mismo se dan los cuatro elementos en cantidades y cualidades distintas: fuego, agua, tierra y aire (*πῦρ, ὕδωρ, γῆν, ἀέρα*).

2.4.3. Los elementos incorporna una inteligencia consciente fruto de su naturaleza

Hay que destacar la figura de la esfera (*σφαῖρα*) como aquella forma que sirve para fundamentar la existencia del cosmos (*κόσμος*), dada su capacidad para abrazar y rodear (*περιέχω*) lo que existe.

> *Estos elementos intercambian y se transforman el uno en el otro de manera completa, y combinados producen un universo animado, inteligente y esférico, con la tierra en su centro, la tierra siendo ella misma esférica y es habitada a su alrededor (VIII-25).*
>
> (*these elements interchange and turn into one another completely, and combine to produce a universe animate, intelligent, spherical, with the earth at its centre, the earth itself too being spherical and inhabited round about. μεταβάλλειν δέ καί τρέπεσθαι δι' ὅλων, καί γίνεσθαι ἐξ αὐτῶν κόσμον ἔμψυχον, νοερόν, σφαιροειδῆ, μέσην περιέχοντα τήν γῆν καί αὐτήν σφαιροειδῆ καί περιοικουμένην*).

Existe toda una variedad de modificaciones que experimentan los elementos (*σχήματα*) transformaciones y giros (*μεταβάλλω*), fruto de una acción reiterativa que indica una serie de cambios (*μετα*). Estos se establecen para ser puestos en movimiento (*βάλλω*), generando un direccionamiento que encausa (*τρέπω*) a las distintas partes que constituyen el todo (*ὅλος*), se trata de una totalidad que evoca la presencia balanceada de los cuatro elementos. Cada elemento (*σχῆμα*) determina y establece una forma que instaura un tipo de manifestación singular de la naturaleza, algo que se tiene (*ἔχω*) como propio y que define la mutua vecindad conteniéndola y, a la vez, estableciendo unos linderos que se complementan entre sí. Es en ese entorno donde se origina la vida (*γίγνομαι*) que conlleva un orden que gobierna (*κόσμος*) y que es inherente a la naturaleza misma del cosmos. Este vocablo le viene asociada la ley con la que se mueve y existe el universo mismo, como un único organismo animado que hace que la vida adquiera esa unidad (*ἔμψυχος*), que le permite existir y ser percibida (*νοέω*) dentro de un circularidad (*σφαιροειδής*) esférica (*σφαιρικός*). Es el comienzo a partir del cual brota la inteligencia (*νοῦς*), lo que va a facilitar la creación de las condiciones propicias para que los entes actúen de manera inteligente. Es muy importante comprender cómo el *nóos* (*νόος*) es algo que se extiende a todo el cosmos a la manera de un orden universal que penetra todo lo vivo, no siendo algo exclusivo de los seres humanos (*ἄνθρωπος*) sino que está presente en todo el universo ordenado. Los elementos (*σχῆμα*) están imbuidos de esa inteligencia (*νόος*), que les permite actuar en concordancia con su propia naturaleza a fin de crear la unidad fundamentada por los cuatro elementos. En ese sentido, todo tendría un propósito en concordancia con la unidad emanada de ese uno infinito que funda y ordena todo el universo[174] y lo que lo habita. Es así cómo la vida aparece en relación con la existencia del cosmos. El verbo que posibilita la existencia para que acontezca, sea producida y nazca (*γίγνομαι*) la vida (*βιος*), a partir de la unión y de la dinámica de los cuatro elementos. Es dentro de ese entorno en el que emergen los entes animados (*ἔμψυχος*) que habitan el cosmos como un mundo esférico

---

[174] Posidonio de Apanea manifiesta: Los seguidores de Pitágoras sostenían que el universe era una esfera en concordancia a los cuatro elementos, pero solo el fuego más alto es cónico (Aet. Plac. i.15; 314). Los pitagóricos llamaban color a la manifestación de la material (Aet. Plac. i.16; 314). Los cuerpos están sujetos al cambio de condición y son divisibles a infinito (Aet. Plac i. 18; 316). Textos recopilados y traducidos por Arthur *Fairbanks (1898), Editor and Translator, Pythagoras and the Pythagoreans (pág. 146).*

(*σφαιρικός*). Se tiene la esfera (*σφαῖρα*) en cuyo entorno surge lo mental (*νοερός*) que nos permite percibir y pensar (*νοέω*). La actividad de pensar está unida de manera inseparable a la percepción; de ahí que, a falta de percepción, no hay pensamiento. La mente (*νοῦς*) y su actividad como pensamiento se da en este universo redondo, una alusión directa a que tanto el Cosmos como la Tierra (*γῆ*) son esféricos. La descendencia (*γένος*), que involucra dar nacimiento (*γεννάω*) a una progenie de progenitores (*γονεύς*), caracteriza la existencia de este cosmos esférico que también contiene las estrellas, y en el cual Pitágoras elaboró su cosmogonía y su teoría de la armonía de las esferas.

Asimismo, existe un viento que está en medio y que señala una dirección o un norte (*μέσην*) otorgándole un ritmo que abraza y rodea (*περιέχω*) a la propia tierra (*γῆ*) y que mora alrededor suyo (*περιοικέω*). Este hecho se aprecia en el verbo que posibilita la existencia y la vida como un nuevo estado (*γίγνομαι*) donde surge el ser (*αὐτός*), sujeto a un orden (*κόσμος*), emanado de aquello que tiene vida (*ἔμψυχος*), aspecto observado en la oración: *καί γίνεσθαι ἐξ αὐτῶν κόσμον ἔμψυχον*. Ello muestra cómo el origen y la génesis de la vida, asímismo como todos los procesos internos a que están sujetos todos los entes vivos, se interrelacionan entre sí para dar lugar a otros entes vivos, hecho que tiene lugar en la dinámica interna de estos elementos. Sea el caso del ser humano (*ἄνθρωπος*), donde tenemos la presencia del hombre (*ἀνήρ*) más dado a llevar algo de un estado inferior a uno superior (*ἀνάγω*), tal como la mujer (*γυνή*) está muy vinculada al proceso que otorga la vida (*γίγνομαι*). Es el proceso propio de los contrarios que caracteriza la existencia de un universo de naturaleza dual representado en la díada aritmética, como aquel número (*ἀριθμός*) de una jerarquía superior. No es propiamente el número entero dos, que aunque también fue construido por los pitagóricos, este representa un estado superior que establece que todo lo que habita en el universo ordenado posee un naturaleza dual, hecho que se aprecia en los elementos y en los seres de naturalezas contrarias. El prefijo *ἀρι* en *ἀριθμός* indica algo que está vinculado a la bondad y a la excelencia, tal como (*ἄριστος*) indica lo que es lo mejor. Tal actividad de los contrarios logra su unidad perfecta, armónica y completa en lo esférico (*σφαιρικός*). En concordancia, la esfera (*σφαῖρα*) es aquella figura que es la suma de las perfecciones, donde la unidad como un todo adquiere su máxima expresión.

2.4.4. Lo que está arriba y lo que está abajo como modelación de la realidad

En este comentario se refleja cómo el cosmos (*κόσμος*) replica su propia forma, haciendo que lo que está abajo se asemeje a lo que está arriba: el concepto que subyace a esta concepción es el de *antípodos*[175] (*ἀντίποδος*), como aquello que está situado al frente, como lo opuesto.

26. Que hay antípodas, nosotros debajo y ellos encima. Que en el mundo existen por mitad la luz y la sombra, el calor y el frío, el seco y el húmedo. De éstos, cuando reina el calor es verano; cuando el frío, invierno. Que cuando estas cosas se dividen por iguales partes, son muy buenas las estaciones del año, de las cuales las flores es la saludable primavera, y la que fenece es el enfermizo otoño. En cuanto al día, florece la aurora y fallece la tarde, por cuya razón es también más insalubre. Que el aire que circuye la tierra quieto o no agitado es enfermizo, y cuantas cosas hay en él son mortales. Que el aire superior se mueve siempre, es puro y sano, y cuantos en él moran son inmortales y por tanto, divinos.

(*[26] There are also antipodes, and our "down" is their "up." Light and darkness have equal part in the universe, so have hot and cold, and dry and moist ; and of these, if hot preponderates, we have summer; if cold, winter; if dry, spring; if moist, late autumn. If all are in equilibrium, we have the best periods of the year, of which the freshness of spring constitutes the healthy season, and the decay of late autumn the unhealthy. So too, in the day, freshness belongs to the morning, and decay to the evening, which is therefore more unhealthy. The air about the earth is stagnant and unwholesome, and all within it is mortal; but the uppermost air is ever-moved and pure and healthy, and all within it is immortal and consequently divine. [26] εἶναι δέ καί ἀντίποδας καί τά ἡμῖν κάτω ἐκείνοις ἄνω. ἰσόμοιρά τ᾽ εἶναι ἐν τῷ κόσμῳ φῶς καί σκότος, καί θερμόν καί ψυχρόν, καί ξηρόν καί ὑγρόν: ὧν κατ᾽ ἐπικράτειαν θερμοῦ μέν θέρος γίνεσθαι, ψυχροῦ δέ χειμῶνα, ξηροῦ δ᾽ ἔαρ, καί ὑγροῦ φθινόπωρον. ἐὰν δέ ἰσομοιρῇ, τά κάλλιστα εἶναι τοῦ ἔτους, οὗ τό μέν θάλλον ἔαρ ὑγιεινόν, τό δέ φθίνον φθινόπωρον νοσερόν. ἀλλά καί τῆς ἡμέρας θάλλειν μέν τήν ἕω, φθίνειν δέ τήν ἑσπέραν: ὅθεν καί νοσερωτέραν εἶναι. τόν τε περί τήν γῆν ἀέρα ἄσειστον καί νοσερόν καί τά ἐν αὐτῷ πάντα θνητά: τόν δέ ἀνωτάτω ἀεικίνητόν τ᾽ εἶναι καί καθαρόν καί ὑγιᾶ καί πάντα τά ἐν αὐτῷ ἀθάνατα καί διά τοῦτο θεῖα*).

[175] Este vocablo es fruto de la unión de la preposición en contra (*ἀντί*) que está como prefijo con el sustantivo de pie (*πούς*).

En este contexto, se pone de manifiesto la importancia de las antípodas (*ἀντίποδας*), que evoca aquel sitio o entorno situado en el lugar opuesto. El término viene de la unión de la preposición *anti* (*ἀντί*) que significa de frente y pies (*ποδας* que viene de *πούς* pie), aquello que está enfrente de los pies en relación a lo cual nosotros (*ἡμῖν*) y yo (*ἐγώ*) nos situamos debajo (*κάτω*), y aquellas personas (*ἐκείνοις* forma plural dativa neutra de *ἐκεῖνος*, aquella persona o la persona allá) arriba (*ἄνω*). No hay que olvidar que también está el verbo *anó* (*ἄνω*) que significa realizar o llevar a cabo como un acto a finalizar o completar algo, hecho que indica que lo que está arriba tiene esa propiedad formativa. El texto es una alusión que hace referencia a los extremos que están situados a lo largo de una superficie lineal, los cuales están con quién está situado en medio y a su vez determinado por lo que está abajo y lo que está arriba. Es una muestra de la realidad que determina al yo (*ἐγώ*) tanto personal como colectivo en el nosotros (*ἡμῖν*) dentro de un contexto que recrea el cosmos. Se presenta de esta manera un breve modelo de las distintas direcciones que nos determinan a todos, donde cada una posee unas propiedades específicas y una naturaleza que nos acondiciona moldeándonos. Este estado de ser o existir (*εἶναι*) se da en medio de compartir algo de manera igualitaria o proporcionada (*ἰσόμοιρος*), de ahí tenemos aquello que está dado en partes iguales (*ισομοιρά*) fruto de la unión entre *iso* (*ίσο*) que es igual o derecho y *méros* (*το μέρος*) que es parte o porción, vocablo que proviene de la porción que a uno le corresponde (*ίσομοιρά*). En el cosmos cada uno recibe lo que le toca, de ahí que *μέρος* tiene relación con *moirazo* (*μοιράζω*) que es dividir o partir. No en vano al observar esa imagen que recrea el cosmos se conforman una serie de sectores entre los cuales se reparte la luz (*φάος*) y la oscuridad (*σκότος*). También se recuerda que *φῶς* no solo significa luz sino al hombre mismo, mientras que *σκότος* nos refiere a la oscuridad de la muerte y a la ignorancia. Igualmente, en la misma adjudicación de estas palabras se recrea la narrativa del mundo en el que vive el ser humano a fin que pueda ser tanto pensada como dialogada.

El cosmos está dividido entre lo que está arriba y lo que está debajo. Se tienen dos verbos para recrear la acción de dividir: *μοιράζω y χωρῐ́ζω*, (*jhōrízō*). El contexto de aquello que se divide está muy presente en toda la mitología griega, en especial, algo que se evoca en la diosa Némesis (*Νέμεσις*) dueña de esa justicia redistributiva que nos conduce a la acción de distribuir y dispensar (*νέμω, némō*), propia de la justicia impartida por el *nomós* o la ley (*νομός*). Este hecho alude a la misma creación del espacio, el lugar, la locación (*χώρος, χῶρος, khôros*) y del tiempo o *cronos* (*χρόνος*), de cuya unión surge el término moderno que evoca la espacio-temporalidad del *choróchronos*[176] (*χωρόχρονος*). No hay que olvidar que los números nacen de *cronos*, organizan y hacen posible la existencia del universo; por consiguiente, la noción del espacio-tiempo de la física moderna estaría contemplada de alguna manera en la temprana concepción de la creación del universo afirmada por Pitágoras. Por medio de esta acción, subyace a esa separación temprana y primigenia que divide lo que está arriba con lo que está debajo, el acto que es el comienzo de la existencia de los seres vivientes sujetos a la reproducción fruto de la unión de dos naturalezas contrarias. Se resalta que antípodas significa aquello opuesto (*αντί*) por los pies (*πούς*), una imagen alusiva a la divinidad misma que al extender sus pies crea la realidad al separar las naturalezas contrarias.

Lo que existe guarda una relación de oposición entre lo que está arriba (*ἄνω*) y lo que está abajo (*κάτω*), la realidad se crea y aparece como consecuencia directa de la existencia de estos contrarios. Es una evocación directa al modelo de los cuatro principios constitutivos a partir del cual surgen diversas interpretaciones que fundamentan distintos modelos acerca de la naturaleza. También es una recreación del Sol moviéndose a lo largo de la eclíptica, en cuya trayectoria vista desde la Tierra se crean los dos equinoccios y los dos solsticios. Algo que hay que tener en cuenta es el orden armónico que distribuye en igual proporcionalidad participativa (*ἰσόμοιρος*) bajo el orden impuesto por el cosmos. Ya en el significado del vocablo de cosmos (*κόσμος*) está comprendido que existe un orden en el universo que cobija a todos por igual, de él se desprenden las leyes que gobiernan a todos

[176] Aquí viene el tema del *continuum* espacio-temporal de cuatro dimensiones, es un espacio topológico que localmente se parece a un espacio euclidiano cuando está cerca de un punto. Se aprecia que cada punto de una variedad de n dimensiones tiene una vecindad que es homeomórfica en relación al espacio euclidiano de n dimensiones, en la cual se preserva la misma forma, siendo uno a una continua aún su inverso. El desarrollo de este tema se le debe a Hermann Minkowski, donde el intervalo espacio-temporal entre dos eventos cualquiera es independiente del marco inercial que los registra. En este contexto son importantes los nocionales matemáticos de intervalo y el concepto de un evento dentro de un marco de referencia, los cuales fueron muy útiles en el desarrollo de la teoría de la relatividad por Albert Einstein. Ver en*: The Classical Theory of Fields. Course of Theoretical Physics por L. D. Landau y E. M. Lifshitz (2002), (pág. 1-6).*

incluyendo a la humanidad. La vida y la esencia del hombre mismo (*φώς*) como mortal están concebidas alrededor de esa luz (*φάος*), lo que caracteriza su felicidad es poder ser un portador y propagador de la misma. Es esa dualidad de los contrarios entre la luz (en su forma ática como *φῶς*) y oscuridad (*σκότος*). Es alrededor del calor (*θέρμω*) que la vida se levanta y como en su ausencia tenemos el frío (*ψυχρός*) que también es un sinónimo de la ausencia de vida. Del calor proviene *θάλλω* (*thálo*) que es florecer o verdear, y evoca aquel estado de plenitud fruto de la actividad del ambiente cálido en el cual surgen los retoños (*θάλος*). En la existencia podemos apreciar la dinámica de interacción entre ambos principios, sin olvidar que el soplo que trae la vida al ser humano (*ψύχω*) proviene de esa respiración que indica no solo la presencia del alma; sino que la existencia es vista como el drama de la pérdida de calor, de la imposibilidad de retenerlo y que llevará a que en algún día el calor dador de vida abandone al cuerpo acarreando la muerte.

La lucha entre lo seco (*ξηρός*, *xērós*) y lo húmedo (*ὑγρός*), el dominio o señorío (*ἐπικράτεια*) del calor trae el verano (*θέρος*) que permite cosechar los campos, tal como el frío trae el invierno (*χειμών*) y las tempestades, lo seco trae la primavera (*ἔαρ*) que también significa sangre y hace alusión al humor que guarda similitud con esta estación. Está concepción holísta que busca entender el cuerpo humano tal como se comprende la naturaleza está implícita desde la antigüedad. Asimismo, se tiene que el frío (*ψυχρός*), cuya raíz proviene de *ψύχω* (*psū́khō*), es tanto el soplo como la respiración, y se nota cómo ella lleva en sí misma aquella señal que en algún momento traerá la muerte, ya que enfría al cuerpo y de alguna manera lo va secando. Del frío nos llega el invierno *χειμών* (*kheimṓn*) o *χεῖμα* (*kheîma*), términos que evocan a las tempestades propias de esta estación. En los contrarios se hace evidente su dinamismo (*επικρατώ, epikrató*), que establece un dominio que prevalece; no en vano es aquello que se mantiene (*κρατώ, krató*), lo que es fuerte (*κρατύς*, *kratús*) y que establece el gobierno (*κράτος, krátos*), en este caso de los elementos constituidos en las estaciones del año. La homeopatía se fundamenta en la concepción de los principios constitutivos como contrarios, que, al estar balanceados y dividirse por partes iguales, trae la salud (*υγεία*), hecho que se evidencia en las flores (*θάλλω*) que manifiestan el estado saludable de la primavera (*ἔαρ*). Se nota cómo el cuerpo humano obedece estas mismas reglas y principios que tanto gobiernan lo superior como lo inferior, tanto el macrocosmos como el microcosmos.

Aquello en lo que se comparte de manera igual (*ἰσομοιρέω*) es bello (*καλός*) y justo y está presente todo el año (*ἔτος*) siendo lo propiamente saludable (*ὑγιεινός*), tal como lo contrario terminará consumido por la enfermedad (*νόσος*). Lo que está más arriba (*ἀνώτατος*) está en perpetuo movimiento (*ἀεικίνητος*) tal como lo es la realidad del número, y evoca un estado complemente limpio y puro (*καθαρός*). Es el lugar de lo puro, lo saludable y sabio (*ὑγιής*), donde por todas partes (*πάντῃ*) en todo (*πᾶς*) se encuentra los seres (*αὐτός*) que son iguales consigo mismos. Aquellos que escapan a la muerte y son inmortales (*ἀθάνατος*) dado su origen divino (*θεῖος*). Tal contexto corresponde exactamente al lugar donde habitan los números (*ἀρῐθμός*) como aquellas realidades perennes que fundamentan la existencia de este lugar sagrado y atemporal. Cabe resaltar que los pitagóricos estudiaron las propiedades de cada uno de los números de la base decimal, y se le asocia al número entero cuatro la creación de la vida manifestada en las cuatro estaciones y los cuatro elementos, que se constituyen como el principio de un movimiento diversificador e instaurante de los cambios. La vida de un individuo se parece al día (*ἡμέρα*) que ostenta lozanía en la aurora (*ἠώς*) y en la tarde (*ἑσπέρα*) comienza a debilitarse (*φθινω*), una alusión directa al declive de la luz y del calor como principio dador de vida, y que por lo tanto trae la muerte o el fenecer del mismo día. Tal como el aire (*ἀήρ*) o viento que circunda la tierra y cuando está quieto es causante de enfermedad (*νόσος*). Una noción que no estaba del todo explícita en los comentarios que realizó Aristóteles sobre Pitágoras en su *Metafísica*[177] está en el concepto de (*ἀεικίνητος*) entendido como aquello que está en

[177] En su *Metafísica*, Aristóteles presenta los tres (*τρεῖς*) tipos de movimiento: movimiento o *kínēsis* (*κίνησις*) derivado del verbo *κινέω*, que es mover, cambiar, innovar, la destrucción (*φθορά*) que están en el origen (*γένεσις*) y por los cuales se viene a la existencia (*γίγνομαι*), que están en la dirección hacia abajo (*κατά*). Estos movimientos son contradictorios (*ἀντίφασις*); debido a que son fruto de la unión de la preposición contra, *antí* (*ἀντί*) y *phásis* (*φάσις*) que es apariencia. Existe una fuerza (*ἀνάγκη*) que los subyace (*ὑπόκειμαι*), los lleva del otro al otro, y los hace estar solos (*μόνος*) en su movimiento (*κίνησις*). Luego prosigue a establecer, en concordancia a las categorías (*κατηγορίαι*) − aquellas acusaciones donde se acusa (*κατηγορέω*) y se denuncia de manera pública. Este aspecto permite también indicar algo a fin de poderlo predicar y afirmarlo de manera inequívoca− las variantes que podemos tener a nivel del movimiento. Tres son en relación a la substancia (*οὐσία*) – vocablo que se deriva de *οὖσα*, y que corresponde al participio presente femenino de *εἰμί*, al que se le ha agregado el sufijo -*ία*, para la formación de sustantivos abstractos femeninos

perpetuo movimiento, vocablo relacionado con *aénaos* (*αέναος*) que es perpetuo o perpetuamente (*αενάως*), y con *aei* (*αεί*) que es para siempre y eternamente. La enorme importancia de este concepto radica en relación con un número perpetuo en el sentido de estar siempre en movimiento. Ello evoca la dimensión dinámica del número muy presente en Pitágoras y tristemente perdida hoy día. Donde el número es una instancia y principio móvil, un hecho apreciable en la armonía de las esferas que era una representación en movimiento de la realidad universal cósmica. Hoy día, el componente dinámico ha sido incorporado a través del cálculo diferencial, –sin embargo, no ha sido posible construir una teoría numérica que defina el movimiento a partir de la misma axiomatización del número y no como resultado de unos operadores externos–. Es preciso recapacitar cómo estos textos tan antiguos siguen aportando importantes puntos de vista, todavía no satisfechos por las teorías matemáticas modernas.

2.4.5. El calor como principio universal dador de vida fruto de la divinidad

Es importante señalar que, para Pitágoras, la vida se origina a partir del calor (*θέρμη*) y le da una connotación divina a este; tenía la sencilla pero a la vez profunda capacidad de apreciar y contemplar el mundo que lo rodeaba.

−, a la cualidad (*ποιότης*) y al lugar (*τόπος*). Aquellos que son fruto de destruir (*φθείρω*) algo: "Y *más, puesto que todo movimiento es un cambio, y los cambios son tres, como hemos dicho, y de estos los que se producen por generación y corrupción no son movimiento (estos son los que se producen por contradicción), es evidente que solo es movimiento el que va de un sujeto a otro sujeto"* [1068a]. Por consiguiente, si las categorías se dividen en substancia, cualidad, lugar, acción o pasión, tiene que haber tres clases de movimiento: de cualidad, de cantidad y de lugar. *Metafísica* de Aristóteles, Valentín García Yebra (1970), Gredos. [1] *And since every motion is a kind of change, and the three kinds of change are those which we have described, and of these those which relate to generation and destruction are not motions, and these are the changes between contradictories, the change from positive to positive must alone be motion*. *Now since the categories are distinguished as substance, quality, place, activity or passivity, relation and quantity, there must be three kinds of motion, in respect of quality, quantity and place*. [1068a], Aristotle. Aristotle in 23 Volumes, Vols.17, 18, translated by Hugh Tredennick. Cambridge, MA, Harvard University Press; London, William Heinemann Ltd. 1933, 1989 ([1*] ἐπεὶ δὲ πᾶσα κίνησις μεταβολή τις, μεταβολαὶ δὲ τρεῖς αἱ εἰρημέναι, τούτων δ' αἱ κατὰ γένεσιν καὶ φθορὰν οὐ κινήσεις, αὗται δ' εἰσὶν αἱ κατ' ἀντίφασιν, ἀνάγκη τὴν ἐξ ὑποκειμένου εἰς ὑποκείμενον κίνησιν εἶναι [5] μόνην. εἰ οὖν αἱ κατηγορίαι διῄρηνται οὐσίᾳ, ποιότητι, τόπῳ, τῷ ποιεῖν ἢ πάσχειν, τῷ πρός τι, τῷ ποσῷ, ἀνάγκη τρεῖς [10] εἶναι κινήσεις, ποιοῦ ποσοῦ τόπου*. [1068a], Aristotle. *Aristotle's Metaphysics*, ed. W.D. Ross. Oxford: Clarendon Press. 1924.

27. Que el sol y la luna y demás astros son dioses, puesto que en ellos reina el calor, que es causa de la vida. Que la luna es iluminada por el sol. Que los hombres tienen cognación con los dioses, porque el hombre participa del calor, y así Dios ejerce en nosotros su providencia. Que el hado es la causa de la administración de las cosas en común y en particular. Que los rayos del sol penetran por el éter frígido y por el denso, pues ellos al aire lo llaman éter frígido, y al mar húmedo, éter denso. Que estos rayos penetran aun hasta lo profundo, y con esto dan vida a todas las cosas.

(*[27] The sun, the moon, and the other stars are gods; for, in them, there is a preponderance of heat, and heat is the cause of life. The moon is illumined by the sun. Gods and men are akin, inasmuch as man partakes of heat ; therefore God takes thought for man. Fate is the cause of things being thus ordered both as a whole and separately. The sun's ray penetrates through the aether, whether cold or dense*--*the air they call cold aether, and the sea and moisture dense aether* --*and this ray descends even to the depths and for this reason quickens all things. [27] ἥλιόν τε καί σελήνην καί τούς ἄλλους ἀστέρας εἶναι θεούς: ἐπικρατεῖν γάρ τό θερμόν ἐν αὐτοῖς, ὅπερ ἐστί ζωῆς αἴτιον. τήν τε σελήνην λάμπεσθαι ὑφ' ἡλίου. καί ἀνθρώποις εἶναι πρός θεούς συγγένειαν, κατά τό μετέχειν ἄνθρωπον θερμοῦ: διό καί προνοεῖσθαι τόν θεόν ἡμῶν. είμαρμένην τε τῶν ὅλων καί κατά μέρος αἰτίαν εἶναι τῆς διοικήσεως. διήκειν τ' ἀπό τοῦ ἡλίου ἀκτῖνα διά τοῦ αἰθέρος τοῦ τε ψυχροῦ καί παχέος. καλοῦσι δέ τόν μέν ἀέρα ψυχρόν αἰθέρα, τήν δέ θάλασσαν καί τό ὑγρόν παχύν αἰθέρα. ταύτην δέ τήν ἀκτῖνα καί εἰς τά βένθη δύεσθαι καί διά τοῦτο ζωοποιεῖν πάντα*).

Algo que merece la atención es cómo las figuras esféricas situadas en los cielos y que, usualmente se las reconoce como estrellas o como planetas adquieren una significación divina (*ἀστέρας εἶναι θεούς*), en concordancia con su forma geométrica redonda, y permiten contemplar y estudiar las formas puras; además, cómo estas se constituyen en el cuerpo mismo de la divinidad. Está *helios* (*ἥλιος*) como el Sol, y es notable cómo algunos vocablos griegos poseen una variedad de significados inscritos dentro de una polisemia regida por diferentes usos literarios y retóricos, lo que les brinda una gran movilidad para expresarse y analizar la realidad. Sea el caso de helios (*ἥλιος*) que también significa el este, el día y la luz solar, hecho que lleva a apreciar cómo su trayectoria origina el día en la Tierra. Pero, también, esta palabra se refiere a *Helios*[178] (*Ἥλιος*) como aquel Dios hijo de *Hiperión* (*Ὑπερίων*) y de su media hermana *Theía* (*Θεία*), a su vez hermano de la Luna (*Selene, Σελήνη*) y *Eos* (*Ἠώς ο Ἕως*) el amanecer. *Helios* es un titán que conduce el carro que muestra el movimiento del Sol en el firmamento y, así, hace alusión a algo que es titánico (*τιτάνιος*), por lo grande y fuerte. La etimología de titán (*Τιτάν*) que parece provine de sol y día (*τίτο,* palabra prestada de la lengua Anatolia, idioma indoeuropeo del cual deriva el Hitita) o, también, se dice que su etimología proviene de *titaíno* (*τιταίνω*) que significa extender o alargar. A su vez, viene de *teíno* (*τείνω*) extender y llevar algo al límite, y de *tísis* (*τίσις*) que significa pago, retribución o recompensa, tal como Hesíodo trata de explicarlo; de *timí* (*τῑμή*) honor, valor y estima, derivadas de *tío* (*τίω*) que es pagar un honor a alguien. ¿A quién más se le debe de honrar y pagarle tributo sino al astro solar *Helios* (*Ἥλιος*) dador de la vida y de la luz?

Es importante destacar la escogencia de la esfera (*σφαῖρα*) como la representación de las divinidades y del cosmos, forma que conduce a la abstracción (de *ab-abs* lejos de y *trahō*, arrastrar; que en griego sería de o lejos de (*από*) y *τρέχω* que es correr o moverse rápido) de la forma pura más representativa de la geometría y a la construcción del número más importante de toda la aritmética, el arquetipo que reúne y plantea todos los problemas más inimaginables si se pretende construirlo a nivel axiomático. Es en el número pi π que representa la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Esta palabra se deriva del vocablo griego *periferia* (*περιφέρεια*) que es aquella línea que está alrededor de una circunferencia, se deriva de *periferes* (*περιφερής*) moverse alrededor, derivada de *perifeo* (*περιφέρω*) llevar o moverse alrededor. A su vez, provienen de la preposición *perí* (*περί*) alrededor que actúa como prefijo y del verbo *fero* (*φέρω*) llevar, traer, cargar como sufijo. Además de ser pi[179] π una constante fundamental que recorre todas las matemáticas, es un número irracional y se le adjudica a Pitágoras el descubrimiento de este conjunto

[178] Tema tratado en la Teogonía de Hesíodo (Hes.Th.371): *Theogony*, William Heinemann Ltd, Harvard University Press, Cambridge, 1914.
[179] El número pi π, es lo que se denomina un número trascendental; el cual puede ser un número real o complejo que no es algebraico al no ser la raíz de ningún polinomio en una ecuación con coeficientes racionales. Ver: Steve Mayer (2006), *The Transcendence of pi*, Mathematics Weblog, University of Warwick.

numérico; y está más documentado en relación con el problema del valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Es apreciable cómo, en los inicios de la fundamentación de la matemática en el pensamiento griego, se crean unas narrativas, leyendas, historias como mitos (*μῦθος*) de aquellos seres vivos que determinan la vida del hombre y lo que lo rodea como son las estrellas y los planetas. En el mito se le otorga una forma antropomórfica a tales cuerpos astronómicos que permite recrear algunas explicaciones del origen de la vida y del ser humano. Se aprecia, entonces, en los orígenes del mito una gran cercanía con la *episteme*. A su vez, de la observación y la abstracción de la forma de una estrella o planeta aparece la circunferencia y el círculo como formas geométricas. Es interesante resaltar, además, que se efectúa una aseveración que cuantifica de manera universal cuando se dice al inicio de esta cita: "*Que el Sol, la luna y los demás astros son dioses*". Tal proposición estaría muy cercana de establecer que la Tierra como planeta es también un dios y que posee una forma redonda como se la observa en todos los demás astros, y que, a su vez, se deriva una segunda proposición: "*puesto que en ellos reina el calor, que es causa de vida*", de la cual podemos aseverar que toda forma redonda es dadora y soportadora de la vida. Y que lo redondo es dador o receptor de luz y calor, tal como se deriva de lo que se dice: "Que la Luna es iluminada por el Sol". Este hecho lleva a plantear otra proposición: del calor se desprende la luz que son el origen y causa de la vida. Se aprecia cómo se va elaborando una teoría del conocimiento a partir de la atenta observación del mundo que nos rodea, y las conclusiones derivadas son muy cercanas con una teogonía (*Θεογονία*), como es la de Hesíodo (*Ἡσίοδος*) sobre el origen del cosmos y de los dioses. Obra que quizá debió de conocer el propio Pitágoras y que lo influyó de manera explícita dado que es anterior a él en casi dos siglos.

Es importante apreciar que tanto la matemática como la geometría tenían para Pitágoras la capacidad de interpretar la realidad real desde sus niveles más altos. En la geometría, tenemos la posibilidad de apreciar aquellas formas eternas e inmutables que contienen todas las perfecciones y propiedades posibles de ser aprehendidas de una manera concreta y simple. En la circunferencia y el círculo, se aprecia una perfecta y armoniosa simetría unida a una gran sencillez, tal como se lo evidencia tanto en su concepto como en su símbolo. Se puede afirmar que el número *pi* π ha sido uno de los grandes inspiradores para conocer la naturaleza de los distintos conjuntos numéricos, asimismo para estudiar y plantear que conjunto de operaciones se requieren para poderlo construir, siendo un gran motor para el desarrollo de la aritmética, el cálculo, el álgebra y la geometría entre otros. *Helios* (*ἥλιος*) representa no solo al Sol sino también, el día, el oriente y la luz solar, al igual que la Luna (*σελήνη*) representa también al mes, tiene relación con (*σέλας*) que también significa luz y brillar. Lo anterior es también un recordatorio de cómo los calendarios surgen del estudio de la relación del Sol con la Luna. Se nota que, en general, el Sol como la Luna hacen parte de los cuerpos celestiales que, con las estrellas (*ἀστήρ*), comparten las propiedades de la forma esférica y, además, son dioses, pues lo esférico es sinónimo de perfección. Cabe resaltar, igualmente, cómo en esta concepción la divinidad es visible y acompaña al ser humano a lo largo de su existencia, y establece un camino marcado y simbolizado por su travesía a lo largo del firmamento. En esta concepción, la divinidad que se nos revela y que se nos muestra de manera concreta, es susceptible, además, de ser aprehendida dentro de un saber superior como lo es la geometría, la aritmética y, por ende, las matemáticas. Pareciera que el cosmos adquiere un orden y forma concreta al aparecer los números, con lo cual estos vendrían a determinar a tales divinidades; una forma de expresar que aún la divinidad está sujeta a las perennes leyes señaladas tanto por la aritmética como por la geometría.

En esta forma, es evidente que hay una claridad en el orden que existe en el universo visible, el Sol ilumina a la Luna y los gobierna (*ἐπικρατέω*). Se advierte cómo la proposición *epi* (*ἐπι*) tiene una doble connotación: una, como aquello que está encima y, en ese sentido, funcionaría como un cuantificador y, la otra, es que también significa *entonces* o luego, y en ese sentido funcionaría como la conectiva binaria de la implicación. Es una manera elegante de presentar una oración que de alguna manera puede ser vista como una proposición cuantificable susceptible de ser ordenada en relación a una jerarquía. Es posible, entonces, considerar que se está planteando una temprana teoría de los tipos lógicos debido a que algunas proposiciones estarían por encima de otras. Las proposiciones derivadas de la actividad del Sol como clase estarían por encima de las demás proposiciones como las derivadas de la clase de la Luna. El verbo gobernar sobre (*ἐπικρατέω*), que es la unión entre *epi* que es arriba (*ἐπι*) con gobernar, conquistar o asir (*κρατέω*), palabra que proviene de *krátos* (*κράτος*) que significa poder, dominio y fuerza. Se indica ese comando superior que además se ejercita por medio de un elemento concreto que es el calor (*θέρμη*) o (*θερμός*) que indica lo que es caliente y listo. Es de resaltar cómo aquello que cuantifica sobre todo el universo y lo gobierna es el calor. Asimismo, es importante destacar en el comentario cómo la variable que cuantifica universalmente ha pasado a ser una variable ligada o descifrada como es el calor y que sigue cumpliendo su propiedad de establecer un orden superior sobre todo un universo o sistema estando, además, en relación con el calor mismo (*θερμόν ἐν αὐτοῖς*). La selección del calor también evoca una distinción que hoy día se tiene y que en aquellos remotos tiempos no existía; cuando la filosofía, las matemáticas y las ciencias eran una misma disciplina. La distinción adquiere una importancia mayor en la actualidad, dado que el calor vendría a constituirse en aquella noción fundamental sobre la que se puede construir lo que es propiamente la ciencia, al igual que el número es la noción fundamental sobre la que se edifican las matemáticas. En ese sentido, la noción de calor (*θέρμη*) no es aprehensible en las dimensiones de la matemática pura, y tiene que ser encontrada e identificada en el mundo sensible real y experimentable por medio de los sentidos. En cambio, el número (*ἀριθμός*), puede ser visto como una noción pura que va más allá de la experiencia sensible e independiente de la realidad exterior. Se tienen, así, dos nociones fundamentales: una, para hacer ciencia, y otra, para hacer matemáticas.

El ser (*αὐτός*), etimológicamente corresponde a lo mismo que, parafraseando al traductor, lo menciona como "*y así Dios ejerce en nosotros su providencia*". Es una manera de indicar que en ese mundo visible se ve sometido a la acción a la semblanza de quien (*ὅσπερ*), él (*ὅσ*) y la preposición *peri* (περί, *περ*), que indica ese ser que gobierna en torno suyo o alrededor de él mismo, evocando de alguna manera una acción circular de conducción o mando. Aquel que otorga la vida y permite que se esté vivo (*ζωή*), sea por la acción del ser o la divinidad, que proviene del verbo vivir (*ζῶ*) propio de las criaturas animales (*ζῷον*) dentro de las cuales está inscrita la humanidad siendo, además, la instancia que causa y es responsable (*αἴτιος*) por dicha existencia. A su vez, quienes reciben la vida de esa manera también mantienen una relación con dicho ser en cuanto le solicitan, le piden y le ruegan (*αἰτέω*) por ella; esperando su favor y beneplácito, siendo un camino de doble vía. Se advierte cómo está en el ser (*εἶναι*) del hombre (*ἄνθρωπος*) como en su actividad existencial de ser (*εἶναι*), situarse en la dirección (*πρός*), dado el parentesco (*συγγένεια*), la afinidad y similitud que mantiene con Dios (*θεός*). En la oración: "el ser del hombre está en orientarse hacia Dios, o el parentesco del hombre con Dios determina su condición existencial, o el hombre es fruto de la similitud que tiene con Dios" (*ἀνθρώποις εἶναι πρός θεούς συγγένειαν*). Esto permite advertir que se da una biyección entre Dios y el hombre, muy afin a que los atributos que encontramos en el uno los podemos encontrar en el otro, aunque de una manera limitada y no infinita como Él. De aquí se puede desprender la conclusión que la vida, tal como la conocemos, es fruto de unas esferas celestes; que las mismas están ordenadas; que están numeradas respecto con un orden a fin de reflejen un sistema perfecto, y poseen una forma geométrica bien definida como esferas: una referencia a la teoría de la armonía pitagórica de las esferas[180].

En el texto se afirma cómo el hombre está gobernado por una relación de afinidad y similitud con Dios (*θεούς συγγένειαν*), la cual se da por participar (*μετέχω*) el hombre (*ἄνθρωπος*) del calor (*θέρμη*) (*μετέχειν ἄνθρωπον θερμοῦ*), que es algo propio de su naturaleza divina. Es algo que la misma divinidad puede ver, prever, entender con anticipación (*προνοέω*), vocablo que tiene el prefijo pre, *pro* (προ) antes y el verbo *noéo* (*νοέω*) relacionado con el intelecto, mente, pensamiento o alma, el *νόος* (*nóos*) o *νοῦς* o *nous*. Además, dice que establece una compañía (*ἥμων*) que hace parte de uno (*ἐγώ*), tal como se aprecia en (*προνοεῖσθαι τόν θεόν ἡμῶν*). Todo esto es recibido en la proporción que a cada uno le corresponde (*μείρομαι*) en relación con el todo (*ὅλος*), y lo que está abajo (*κατά*) una porción (*μέρος*) que es responsable (*αἰτία*) que uno sea (*εἶναι*) capaz de gobernarse (*διοίκησις*). Asimismo, se nota cómo el autocontrol que uno ejerce sobre uno

[180] El tema de la armonía de las esferas es tratado por Paul Calter (2011) en su artículo *Pythagoras & Music of the Spheres*, donde manifiesta que la música, la aritmética, la geometría y la astronomía hacían parte del Quadrivium pitagórico. La música de las esferas inspiró la búsqueda de Johannes Kepler en su modelo de universo. Se resalta que las distancias entre los planetas están dadas en términos de unas proporciones producidas por los sonidos armónicos cuando una cuerda es pulsada. El sistema solar estaba constituido por diez esferas que se movían en círculos alrededor de un fuego central. Cada esfera producía un sonido que se propagaba en el ligero éter: las esferas más cercanas producían sonidos graves, mientras las esferas lejanas producían sonidos más agudos dado que se movían con más rápido. Todas combinadas producían una bella armonía conocida como la música de las esferas (pág. 9).

mismo, aquello que nos permite que estemos dotados de la potestad para orientar nuestra propia vida, proviene de la directa afinidad participativa con aquello que está arriba, siendo uno mismo una parte inseparable de tal realidad divina. El planteamiento se enriquece cuando consideramos que lo numérico no solo permite que el caos se ordene y se instaure el cosmos, sino que también evoca una naturaleza participativa que agrupa a todo lo que habita la realidad, las propiedades propias de los números están presentes en todo ente tanto en cuanto individual como parte de ese todo. A su vez, soy (*εἰμί*) con base en esa participación directa que le otorga a uno su propio gobierno, uno que está en armonía con el todo según se da también esa relación directa son el Sol. En medio se tiene al éter (*αἰθήρ*) que es un aire de naturaleza fría (*ψυχρός*), carente de vida y denso (*παχύς*), como si entre lo que otorga vida y que es un todo y las partes abordadas como los entes existiera algo que no es. Es propiamente en el mar (*θάλασσα*), en aquel líquido húmedo y salado (*ἅλς*) que la vida emerge por doquier con abundancia, es desde aquellas profundidades (*βένθος*) que se otorga la vida (*ζωοποιέω*) a todos. Una vez más, se establece una afinidad en la que la vida emerge bañada por los rayos del Sol que cruzan un espacio vacío que sería una especie de éter, penetra el océano en que también se tiene un éter y que al ser calentado permite que la vida se dé. Se da, entonces, esa relación entre el aire, el calor y el agua como la trilogía que instaura la vida.

2.4.6. Una ontología numérica construida a partir del tres que conecta con lo humano

Pitágoras propone una ontología fundamentada en la noción de alma (*ψυχή*) constituida por tres (*τρεῖς*) instancias: el *nous* (*νόος ο νοῦς*) está asociado a la inteligencia que permite que entendamos (*νόος ο νοῦς*), la *phren* (*φρήν*) que vendría a ser aquel diafragma que está situado en el pecho junto al corazón como sede de los sentimientos; y el thimo (*θυμός*) que está asociada a la respiración y a la sangre, lugar de las pasiones que buscan un reconocimiento. Hay que destacar la presencia del número (*ἀριθμός*) bajo una cardinalidad de tres (*τρεῖς*), lo que brindaría otras interpretaciones y conjeturas.

> *30. En tres partes divide el alma humana, a saber, en mente, en sabiduría, y en ira, y la ira se halla también en los otros animales, pero la sabiduría solo en el hombre. Dice que el principio del alma está desde el corazón hasta el cerebro y que la parte de ella sita en el*

corazón es la ira. Que la sabiduría y la mente están en el cerebro, y de ellas, dicen, manan los sentidos como derivaciones. Que la parte capaz de sabiduría es inmortal; las demás, mortales. Que el alma se nutre de la sangre, y las palabras son vientos del alma. Que ésta es invisible, como las palabras, porque también el éter es invisible.

(*[30] The soul of man, he says, is divided into three parts, intelligence, reason, and passion. Intelligence and passion are possessed by other animals as well, but reason by man alone. The seat of the soul extends from the heart to the brain; the part of it which is in the heart is passion, while the parts located in the brain are reason and intelligence. The senses are distillations from these. Reason is immortal, all else mortal. The soul draws nourishment from the blood; the faculties of the soul are winds, for they as well as the soul are invisible, just as the aether is invisible. [30] Τήν δ' ἀνθρώπου ψυχήν διαιρεῖσθαι τριχῇ, εἴς τε νοῦν καί φρένας καί θυμόν. νοῦν μέν οὖν καί θυμόν εἶναι καί ἐν τοῖς ἄλλοις ζῴοις, φρένας δέ μόνον ἐν ἀνθρώπῳ. εἶναι δέ τήν ἀρχήν τῆς ψυχῆς ἀπό καρδίας μέχρις ἐγκεφάλου: καί τό μέν ἐν τῇ καρδίᾳ μέρος αὐτῆς ὑπάρχειν θυμόν, φρένας δέ καί νοῦν τά ἐν τῷ ἐγκεφάλῳ: σταγόνας δ' εἶναι ἀπό τούτων τάς αἰσθήσεις. καί τό μέν φρόνιμον ἀθάνατον, τά δέ λοιπά θνητά. τρέφεσθαί τε τήν ψυχήν ἀπό τοῦ αἵματος: τούς δέ λόγους ψυχῆς ἀνέμους εἶναι. ἀόρατόν τ' εἶναι αὐτὴν καί τούς λόγους, ἐπεί καί ὁ αἰθὴρ ἀόρατος*).

Un tema que merece la pena comentar es, cómo, para Pitágoras, la existencia de los números tiene un referente real que va desde su misma concepción en el comienzo del cosmos y del tiempo mismo; tan pronto como el caos deja de existir aparece el orden y con él la vida tal como la entendemos y concebimos. El proceso de instauración del orden en la realidad, es decir el ordenamiento de la realidad aprehendida desde lo real se denomina el cosmos y viene dada por los números. En este proceso también se cuenta con variados órdenes y, de tal manera, que en la secuencia de los números cada uno establece su propio ordenamiento. Tenemos el número inicial que es el uno, que no es una abstracción sino una entidad real, es de naturaleza infinita y ordena el cosmos con base en la armonía y en toda una serie de presupuestos de naturaleza metafísica, ontológica, epistemológica y lógica. En ellos también se dan unos subordenamientos dependientes del primer orden impuesto por ese uno inaprehensible e infinito. A su vez, de ese número uno nace el dos que es aprehensible como la díada, que, a su vez, ordena toda la realidad en contrarios sujetos a las dualidades fundamentales que caracterizan la realidad de los entes que habitan el cosmos. Es de notar que las categorías propiamente dichas están inspiradas en el número dos, el cual también posee un estatuto existencial real que se reparte en variados subórdenes derivados del mismo y que dan lugar a diversos procesos existenciales concretos. En el tres, se halla la división del alma humana, mientras en el cuatro, están dados los procesos que generan la vida. Se tiene, entonces, dos dualidades enfrentadas entre sí, hecho que se aprecia en los principios constitutivos calor-frío y la humedad-sequedad. Estos están muy unidos a la explicación de la naturaleza de los elementos, teniendo en cuenta que existe una primicia en los mismos: una vez prima el calor, otra vez el aire, y otra el agua; tal camino conduce a la génesis de la vida la cual, a su vez, se deriva de una fundamentación previa que se encuentra en el alma.

Este numeral comienza afirmando que el alma se divide en tres partes: el hombre (*ἄνθρωπος*) posee un alma o psiqué (*ψυχή*) vocablo que también significa vida, aliento de vida, mente, espíritu, fantasma, entre otros. Del alma emana la vida; se manifiesta a través la respiración (*ψύχω*) que evidencia ese primer soplo que instaura la dinámica propia de la vida en esa lucha entre lo frío y lo caliente. También, al invocar la *physis* (*φύσις*) se está evocando algo que en consecuencia posee una pulsión o soplo (*ψύχω*), un movimiento de respiración que es la unión de los contrarios inhalación y exhalación, posibilitando que se de un crecimiento (*ψυχή*): la relación entre *φύσις y ψυχή* es propia de la existencia de los entes nacidos en especie y género. Es potestad de esta alma dividir o separar (*διαιρέω*), como aquella acción de separar distinguiendo cuáles partes son afines y cómo estas pueden constituirse en algo completo y entero. Sean estas tres vías o partes (*τριχῆ*): la mente (*νόος*), el corazón como sede de los sentimientos y del intelecto (*φρήν*) que, además, evoca a la voluntad, y el alma (*θυμός*). Lo curioso de estos tres términos es que coparticipan en gran medida de algunos significados en común con algunas funciones propias del espíritu, la vida, el pensamiento y los sentimientos. Es como que si los tres se constituyesen en un sistema trínico común, donde cada uno tiene que tener algo de los otros dos a fin que pueda darse alguna unidad y que las diferencias entre cada uno son muy sutiles, lo cual exige comprender muy de cerca cómo funcionan cada uno y cómo, reunidos conforman una misma instancia.

Este hecho que se evidencia en la oración que sigue: "*el ser de la arché que da la vida que viene del corazón así mismo del cerebro*" (*εἶναι δέ τήν ἀρχήν τῆς ψυχῆς ἀπό καρδίας μέχρις ἐγκεφάλου*), ilustra las tres instancias que soportan la vida (*ζῷον*), abordada y definida alrededor del ser humano, que es un ser viviente animal, y que son las primeras (*ἄρχω*) que están desde el mismo origen (*ἀρχή*) de su vida (*ψυχή*) fundamentadas en el corazón (*καρδία*): éste no es ajeno a ser también el centro del pensamiento en íntima conexión con el alma y los sentimientos, y está conectado con aquello que está dentro de la cabeza como lo es el cerebro (*ἐγκέφαλος,* de en *ἐν y* cabeza *κεφαλή*). En toda esta exposición los tres conceptos gravitan alrededor del ordenamiento impuesto por un número tres o tríada, los tres están muy conectados entre sí, son codependientes y generan toda una serie de conceptos derivados a fin de completar y complementar sus significados. Este hecho se reafirma al comentar que el corazón comparte y hace parte (*μέρος*) del ser (*αὐτός*); se podría definir al ser con base en la trinidad de estos conceptos, y cómo tal noción podría ser considerada como la envolvente que da unidad a la construcción del tres en cuanto sistema dotado de tres categorías distintas pero íntimamente unidas por sus fuertes lazos de copertenencia y codependencia. Siendo el ser el que toma la iniciativa que le permite ser el comienzo que fundamenta lo que establece un comienzo (*ὑπάρχω*), que está en existencia en cuanto vida palpitante llena de deseos por vivir.

Aquello que es percibido (*αἰσθάνομαι*) a través de los sentidos lo es también por los sentimientos y el intelecto. Por medio de esta adecuada integración de lo percibido, es notable, lograr un discernimiento adecuado. Es así como el alma (*ψυχή*) está abierta a todo tipo de contacto, no discriminando las sensaciones físicas sobre los sentimientos o aquello que es fruto de la labor de la palabra. La apertura hacia todo lo que acompaña y predica la condición de estar vivo, es también una característica de la psique muy unida al significado de aquello que está respirando y que se ve aprehendido o reflejado en la mente. Es conveniente apreciar que no se están descalificando unas instancias por otras; dentro de esta concepción el alma (*ψυχή*) se trata a todas por igual ya que hacen parte de la unidad que involucra la vida misma. Todo cuenta y es en medio de esa integración armónica que se concibe el mantenimiento de una gobernabilidad (*διοίκησις*) con uno mismo y las instancias que constituyen el alma (*ψυχή*). Este proceso de integración de los distintos componentes del alma es gradual, se asemeja a la lenta actividad de gotear (*σταγών– σταγόνα*) que se da cuando las sensaciones (*αἴσθησις*) comienzan a ser discernibles, posibilitando guiarnos adecuadamente en la manera de comportarnos a nivel ético. Se busca emular la actitud sensible, juiciosa, prudente y sabia (*φρόνιμος*) de aquellos que son inmortales (*ἀθάνατος*). Se espera que quede algún remanente (*λοιπός*) a los mortales (*θνητός*) que luego nos dejará (*λοιπάζω*), mientras el trayecto nos permitirá acercarnos más a esa sabiduría tan es escurridiza para los mortales. Se resalta de esta manera cómo los inmortales hacen un uso adecuado de la mente (*φρήν*), ya que al pensar (*φρονέω*) lo hacen de una manera sabia y prudente (*φρόνησις*). Se aprecia, cómo esa sabiduría tiene una influencia directa en la manera en como se vive. Se observa, además, cómo es nutrida (*τρέφω*) la sangre (*αἶμα*) por el alma (*ψυχή*), y se es (*εἶναι*) como el viento (*ἄνεμος*) del logos (*λόγος*). Es una alusión a la estrecha relación que existe entre la sangre y el alma, a cómo ambas realidades son interdependientes; a su vez, lo que hablamos se parece al viento o al soplo propio que caracteriza la vida misma representada en el alma. Lo invisible (*ἀόρατος*) nos habita en lo que decimos, pareciéndose a ese aire superior y puro como el mismo éter (*αἰθήρ*), alusión a que las palabras son invisibles pero al mismo tiempo son como un aire puro y sutil cuando somos prudentes y sabios.

En estos comentarios se establecen unas nociones de orden a nivel conceptual, las cuales se ven reflejadas en la conceptualización inicial de lo que son los números. En especial su presencia permite ordenar la realidad y poderla diferenciar como un cosmos o lugar susceptible de ser habitado y de albergar la vida. La noción del número uno como una instancia infinita posee la propiedad de erigirse como el gran conjunto universal. En este planteamiento pitagórico se evita la impredicatividad de la paradoja de Russell[181], Richard y otros, dado que ese uno que es a su vez una totalidad, no posee elementos, mantiene su unicidad que es la garantía para que el universo pueda ser ordenado a partir del caos primigenio del cual brotó. Los distintos niveles conceptuales se entremezclan, sea lo que es

[181] Las paradojas abarcan cierta impredicativida por abordar el tema de las totalidades, que en algún momento se denominan ilegítimas. Este tema está abordado por B. Russell y A. N. Whitehead (1927) en la introducción a la segunda edición de *Principia Mathematica*, y comentado como el principio del círculo vicioso. Hace referencia a aquellos objetos que pueden contener miembros que tan solo pueden ser definidos por medio de la colección como un todo. Se resalta que las proposiciones derivadas de tales consideraciones carecen por completo de sentido (pág. 37).

aritmético con lo que es geométrico, o lo metafísico con lo ontológico. Lo interesante es que previo a la creación del cosmos, tenemos una realidad habitada por una subjetividad variada con capacidad para actuar y tomar decisiones. Es decir, la nada como concepto vacío de todo sería algo imposible de darse dentro de esta concepción. Un tema importante es cómo la vida (*ψυχή*) posee una capacidad para crecer desarrollarse y sostenerse (*τρέφω*) con base en un proceso de incesante mejoramiento, una suerte de educarse a sí misma. Ya que la característica que identifica la esencia de los dioses es el calor, la vida busca optimizar y mejorar a cada instante las estrategias por medio de las cuales retiene el calor; siempre está el recordatorio que el frío (*ψῦχος*) la sigue y le recuerda cómo mejorar su participación de la naturaleza caliente de la divinidad. El origen de la vida humana proviene del calor contenido en el alma, tal como la vida de las demás criaturas se da como fruto de la participación del calor irradiado por el componente inmortal del alma cósmica. Se resalta, igualmente, cómo la concepción de número participa de una metafísica y una ontología, donde ambas están reunidas interactuando de manera conjunta, y cómo es a partir de tal dualidad que se construye una epistemología como una realidad sujeta a ordenamientos y a procesos operativos. La concepción pitagórica recrea un universo jerarquizado que favorece verse predicado y aprehendido por medio de la palabra, está habitado por criaturas de distintos géneros y especies. Es decir, la *episteme* depende de la dualidad de la díada que se hace presente en el mismo momento en que aparece la vida y los seres vivientes. Asimismo, se percata cómo en la tríada (*τριάς*) se revelan otras características más de carácter ontológico. Todo ello es una muestra de cómo Pitágoras estudió los números cardinales y cardinales de la base decimal desde una epistemología y una ontología. Hay que destacar, cómo los humanos participan de la inmortalidad que está reservada a los dioses al buscar mejorar su propia condición humana por medio de la frónesis (*Φρόνησις*).

En todo este planteamiento la noción del infinito es propia de la existencia del cosmos abordado como lo uno o el número uno o el cardinal uno. De alguna manera, la teoría del infinito de Georg Cantor la encontramos ya preesbozada en Pitágoras. Un tema de interés es que antes de que exista el orden impuesto por la existencia de los números, sinónimo de vida y transformación, en el caos previo a la creación no se tiene el concepto del *ápeiron* (*ἄπειρον*). Este hecho se observa al analizar el verbo *peireo* (*πείρω*) que significa atravesar o traspasar, algo que evoca el paso del caos primordial al cosmos ordenado, en el cual ya tenemos el infinito fruto de agregar la alfa privativa al citado verbo para tener el *ápeiron* (*ἄπειρον*) o lo ilimitado. Este se relaciona con *apeiros* (*ἄπειρος*) que significa ilimitado, infinito e inabarcable también como alguien inexperimentado o desconocedor. A su vez, se percibe cómo la realidad de la vida es instaurada por medio de ese uno infinito, que, al derivar la díada, crea la oportunidad para que el orden aparezca, ya que sin la existencia de los contrarios o de las partes no tendríamos algo que ordenar. Se aprecia que todo cuanto existe está en un proceso de continuo aprendizaje, que el infinito como concepto es una invitación abierta a conocer y a experimentar la vida. Una vez más, se destaca cómo en la concepción pitagórica el cardinal uno (no asumible como un entero negativo que sería una manera de recrearlo en base a la dualidad de los enteros como positivos y negativos) es único, ilimitado y, sobre todo, de aquí se desprende su más paradójica naturaleza en cuanto que no es enumerable. Para Pitágoras el infinito no es susceptible a una cardinalidad u ordinalidad, dado que ellas pueden desvirtuar el mismo concepto o noción de infinito.

El calor está presente en la sangre que sería la encargada de transmitir tal influjo proveniente del alma inmortal al cuerpo mortal, comentario que termina afirmando: el *logos* se asume como algo que se da en diversidad: en los (*τούς*) *logos* (*λόγος*) de la vida **(***ψυχή*) se mueve los vientos (*ἄνεμος*) del ser (*εἶναι*) o lo que es-soy o existe (*τούς δέ λόγους ψυχῆς ἀνέμους εἶναι*). La palabra *logos* posee una amplia riqueza de significados que están presentes en la génesis de la vida que de alguna manera se da de un yo soy unido a algo que es dicho. Lo invisible y no visto (*ἀόρατος*) proviene de unir la alfa privativa con la forma del participio pasado de (*ὁράω*), está en el ser que es el mismo e igual consigo mismo (*εἶναι αὐτὴν*) y que caracteriza a los logos dado que el éter también es invisible (*ἀόρατόν τ' εἶναι αὐτὴν καί τούς λόγους, ἐπεί καί ὁ αἰθήρ ἀόρατος*). Se hace alusión aquí a una concepción de que no existe espacio vacío, dado que está ocupado por el éter, que, cómo bien lo expone Pitágoras, es espeso y sirve de medio para la transmisión del calor y la luz, también guarda esa relación con el *logos* dado que ambos son invisibles. El vocablo éter (*αἰθήρ*) también evoca a ese aire superior o puro que contrasta con el aire (*ἀήρ*) ligero (*αέρας*) que está abajo y le da ese color al cielo. A su vez, el éter proviene de *aíto* (*αἴθω*) que significa tanto iluminar como quemar o ignición, con lo cual esa doble naturaleza de ser a la vez caliente y luminoso se ubica en un concepto que posee una alta jerarquía explicativa, susceptible de ser transformada en variadas proposiciones capaces de albergar una teoría acerca de la naturaleza. Se recuerda la naturaleza inmortal y cálida del alma, hecho que llevaría al calor como el principio primordial que gobierna al aire superior o éter en estrecha unidad con el agua sobre la cual desciende para traer la vida.

Luego, en el numeral (31) Diógenes Laercio presenta a un Pitágoras dado a brindar explicaciones muy unidas al mito: "*Que Mercurio*[182] *es el administrador de las almas, y por esto se llama conductor, portero,…*" (*τόν δ' Ἑρμῆν ταμίαν εἶναι τῶν ψυχῶν καί διά τοῦτο πομπαῖον λέγεσθαι…*). Se nos presenta a un Pitágoras muy cercano a los versos dorados (*Χρύσεα Ἔπη*), que es un conjunto de exhortaciones morales atribuidas a él, se les data en el siglo III a.C., y no se ha podido confirmar su existencia antes del siglo V a. C. Lo descatacable de este texto es que abre la posibilidad de combinar la ciencia con la filosofía y con la religión, además de otorgarle un estatuto epistemológico al mito. En ese sentido los antiguos no tenían una división clara de dónde comienza la ciencia y dónde las narrativas propias del mito. Se resalta que el mismo Pitágoras fundó una orden mística, cuyas costumbres estaban gobernadas por preceptos éticos y morales de observancia estricta. Así que, para él, es posible hacer coexistir distintos planteamientos de naturaleza epistemológica u ontológica en un mismo texto: filosofía, matemática, metafísica, física, medicina, religión, y otros. Algo propio de aquellos tiempos remotos donde las distintas disciplinas coexistían entre sí y sus argumentaciones se apoyaban entre sí.

2.4.7. La ontología y la epistemología de las matemáticas en Pitágoras

En Pitágoras se plantea una ontología a partir del número (*ἀριθμός*), el cual tiene esa capacidad de ordenar toda (*πᾶς*) la realidad. Es interesante ver cómo a nivel del esbozo de una teoría de conjuntos el factor decisivo está del paso del crónos (*κρόνος*) al kaíros

[182] En el texto original se lee Hermes (*Ἑρμῆς)*), que es propiamente el dios griego que es el emisario de los dioses y quien intercede entre ellos y los hombres; asimismo, se le asocia la tarea de transportar las almas, se le asocia la invención de la música y del fuego. Ver en: *The Homeric Hyms, trad. Andrew Lang (págs. 135,6).*

(*καῖρος*). Es en dicha transición que podría ser vista en términos de una función, f(*ἀριθμός*): (*κρόνος*) → (*καῖρος*); donde el número (*ἀριθμός*) es propiamente quien define el nocional conceptual de conjunto { }. Antes que la realidad sea ordenada por el número, se tiene una existencia carente de espacio-tiempo; una vez entra el número a ordenar 'lo existente', aquello que está antes de la alborada de los tiempos, aparece el universo (*οὐρανός*). En el origen (*ἀρχή*) está el número (*ἀριθμός*), que viene a definirse en ese intervalo (*διαλείπω*) que se da del crónos (*κρόνος*) al kaíros (*καῖρος*), siendo el elemento (*στοιχεῖον*) que fundamenta la vida como naturaleza (*φύσις*). Uno de los aportes más significativo de Pitágoras está en situar el uno (*εἶς*) antes del paso del crónos al kaíros, aunque no podría afirmarse de manera explícita que ese uno sea un número en el sentido tradicional del término. En ese sentido es posible identificar dos metaniveles de lo numérico, uno que es completo y consitente que está dado por ese uno (*εἶς*) que es inaprehensible e infinito (*ἄπειρος*). Es claro, que el infinito antes del comienzo de los tiempos rodea la dualidad finito-infinito propia de la existencia del universo como realidad. Se puede decir que el universo (*οὐρανός*) es un subconjunto de lo uno (*εἶς*): *οὐρανός* ⊂ *εἶς*. La noción del ente (*ὤν*) comienza a darse en ese universo ordenado (*αἰτέω*) y armonizado (*ἁρμόζω*) por el número (*ἀριθμός*), en ese sentido notamos en Pitágoras una tendencia a construir un saber que toma distancia del mito (*μῦθος*) como una instancia que busca explicar la existencia de la realidad. En este esquema pitagórico, los dioses y todo lo existente está sometido a los rigores determinados por el uno (*εἶς*) y los números que se desprenden del mismo, cuando se pasa de una existencia previa infinita sin tiempo ni espacio a una existencia gobernada por el tiempo y dotada de un espacio estructurados alrededor de las leyes que gobiernan a los números. Este hecho permiteafirmar que Pitágoras es uno de los primeros científicos que buscó explicar la existencia del universo (*οὐρανός*) en términos matemáticos siendo, además, el primero que propuso en consecuencia el primer método científico de tipo axiomático, en cuanto está fundamentado en unos primeros principios.

La matemátización de la realidad por parte de Pitágoras anticipa en dos mil años la primera simbolización en términos matemáticos de un evento natural por parte de Galileo Galilei. Pitágoras fue capaz de ver con claridad que el lenguaje de las ciencias debía de ser el de las matemáticas y que todo está estructurado conforme a las leyes que la gobiernan. En ese sentido, el uno (*εἷς*) se constituye a nivel ontológico en esa primera noción que se puede constituir como un axioma (*ἀξίωμα*): aquello que es pensado que se ajusta como un valioso requisito, que es requerido ser pensando y planteado antes que los demás, un primer principio del cual derivar toda una serie de explicaciones teorizables. Lo que es pensado como valioso que resuelve y sostiene (*ἀξιόω*) una disciplina, en concordancia con una forma de vivir filosófica tutelada por la matemática como ese arte de la buena enseñanza. El existir y ser (*εἰμί*) comienza a darse a partir de un universo organizado y ordenado por los números, en ese sentido comienza el ente (*ὤν*) a existir y a ser (*εἶναι*), derivándose toda una serie de términos y conceptos a partir de la conjugación del verbo ser, existir y suceder (*εἰμί*), se nota como el número (*ἀριθμός*) es (*ἔστιν*). Se establece (*τίθημι*) de esta manera la cosa (*πράγμα*) que contará y numerará (*ἀριθμέω*), que permitirá que ese hablar razonado (*διαλεγω*) se estructure alrededor de una explicaciones e interpretaciones de la realidad aprehendidas a nivel matemático.

El uno (*εἷς*) se sitúa antes que todo como lo primero (*πρότερος*), que se resuelve (*δοκέω*) en el dos (*δύο*), bajo la configuración de la díada como lo segundo (*δεύτερος*) que está en el origen (*ἀρχή*) mismo de la realidad como universo diferenciado, habitado por seres tanto divinos e inmortales como mortales. Este orden universal se imprime desde la díada numérica fundamental, que está dada por el número par (*άρτιο αριθμό*) y el número impar (*περιττός αριθμός*). Estos son la causa (*αἴτιος*) que establece la división limita (*ὁρίζω*) lo otro (*ἕτερος*), en concordancia a una realización o fin (*τέλειος*) que contiene (*περιλαμβάνω*) todo lo que existe. Es a partir de esta unidad fundamental que se constituye el todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*) que divide (*διακοσμέω*) y otorga lo que a cada quien le corresponde recibir (*μείρομαι*). Es reiterativa en las lecturas la presencia de un proceso reflexivo que se orienta a sí mismo (*αὐτός*), y que está establecido por el diez (*δεκάς*) representado en los diez principios duales fundamentales que aportan la armonía (*ἁρμονία*) necesaria para que la vida se sostenga, representada por ese aliento y respiración (*ψύχω*) fundamental.

Es notable el paso del nivel ontológico −representado en el uno (*εἷς*)− al nivel epistemológico −representado en el dos (*δύο*)−, como el paso de lo inahaprensible de ese primer infinito (*ἄπειρον*) propio del uno (*εἷς*) a la díada (*δυάς*) finito (*πέρας*) e infinito (*ἄπειρον*) del dos (*δύο*) : se tiene en cuenta que este último *áperion* es un segundo infinito contrastado con un primer infinito que lo antecede y que no está gobernado por una oposición de cantidades ni cualidades dobles. Es en este universo contruirdo por la dinámica propia de los números que se tienen las parejas de naturalezas contrarias sea el movimiento (*κίνησις*) frente a lo inmóvil (*ἀκίνητος*). Pitágoras observa (*θεωρέω*) que todo lo que tiene vida se da en pareja, siendo una característica esencial de todo lo que existe. El *eidos* (*εἶδος*), representado en el uno (*εἷς*), subyace y antecede al dos (*δύο*); es en este plano donde comienza a construirse esa epistemología fruto de lo que es colocado en orden y expresado (*λέγω*) por medio del número (*ἀριθμός*). En este contexto se presentan las parejas que van a definir a la aritmética como par (*ἄρτιον*) e impar (*περιττόν*), asimismo las que van a gobernar a la geometría como lo recto (*εὐθύ*) y lo curvo (*καμπύλον*); a partir de las cuales se contruirán la dualidad esencial de las figuras geométricas como el cuadrado (*τετράγωνον*) y lo oblongo (*ἑτερόμηκες*). Estas formas (*εἶδος*) van a constituirse en el receptáculo de las (*ἰδέας*) de aquello que es susceptible de ver (*εἴδω*), como una manera de acercarnos a la divinidad (*θεός*). Hay que recordar que Pitágoras ante todo fue un místico, alguien que logró combinar una vida profundamente devota con una marcada por la ciencia de las matemáticas; es en este contexto, que la filosofía se constituye en una forma de vida bien caracterizada.

Pitágoras, al igual que otros de sus precesores buscó recrear las ciencias puras como son la física, la química, la biología y por ende la medicina, a partir del modelo de los cuatro elementos fuego, agua, tierra y aire (*πῦρ, ὕδωρ, γῆν, ἀέρα*). En un contexto donde lo esférico (*σφαιρικός*) es lo que es perfecto, y de alguna manera la esfera (*σφαῖρα*) representa aquella forma divina que se aprecia en la forma de los astros y los planetas. El cosmos (*κόσμος*) es aquel lugar habitado por las esferas, de ahí proviene su famosa teoría de la armonía de las esferas, y cómo la geometría se constituye en aquel saber que es capaz de mostrar, indicar e interpretar (*σημαίνω*) el universo. No es de extrañar que es la mónada (*μονάδα*) el fundamento de todo lo que existe, y usualmente se la puede imaginar como algo esférico dada la unidad e integridad que posee esta figura. La propiedad que tiene (*ἔχω*) es estar sola (*μόνος*). Se tienen dos maneras de hacer ciencia a nivel de una episteme (*ἐπιστήμη*): la una en relación a la aritmética y la geometría; y, la otra, en relación a las relaciones que gobiernan los cuatro elementos, donde el fuego (*πῦρ*) es que gobierna a todos. Del fuego proviene la luz (*φῶς*) que nos ilumina y el calor que es el origen de la vida. Finalmente, se puede apreciar en Pitágoras una suerte de dos ontologías, una de carácter matemático que se fundamenta en la noción del uno (*εἶς*) primigenio infinito (*ἄπειρον*), y una ontología más cercana al hombre que se establece como: *En tres partes divide el alma humana* (*Τήν δ’ ἀνθρώπου ψυχήν διαιρεῖσθαι τριχῇ*); en la mente (*νόος*), la *phrḗn* (*φρήν*) sede de los sentimientos y el intelecto, y el alma *thimos* (*θυμός*). Es notable que la psiqué (*ψυχή*) posea esta triple naturaleza. De manera análoga, Pitágoras plantea una teosofía que se fundamenta en los cuerpos que habitan el cosmos: *Que el Sol, la luna y los demás astros son dioses* (*ἥλιόν τε καί σελήνην καί τούς ἄλλους ἀστέρας εἶναι θεούς*). Tal recreación proviene de considerar que el calor (*θέρμη*), es el principio por excelencia que trae la vida; y al Sol, *Helios* (*Ἥλιος*), es el que lo dispensa alrededor de la Tierra la tierra (*Γῆ*). Entre dicha esfera ardiente y nosotros se ubica el éter (*αἰθήρ*), considerado como un aire (*ἀήρ*) ligero (*αέρας*). Todos estos elementos tratados se constituyen en los *epístemai* (*ἐπίσταμαι*) que van a servir de soporte para enriquecer a las próximas generaciones de filósofos y matemáticos griegos que, como Euclides, logró integrar dichos saberes a nivel aritmético y geométrico en su gran obra *Los Elementos*. En este texto se establecen las leyes (*νόμος*) que gobiernan estos entes formales, interpretados desde sus signos (*σῆμα*) más básicos y que se muestran (*σημαίνω*) en el punto (*σημεῖον*) y el número (*ἀριθμός*) como fundamento de las matemáticas.

3. ANÁLISIS EXEGÉTICO-MATEMÁTICO DE UN TEXTO DE EUCLIDES ATRIBUIDO A PITÁGORAS

Uno de los temas fundamentales para la filosofía es el estudio de las nociones primitivas de las matemáticas, no obstante la primera gran dificultad está en definirlas. Tal hecho está consignado en la introducción a *The Princeton Companion to Mathematics*[183], en la cual se manifiesta que no se va a suministrar una definición de lo que es la matemática. Es algo que sorprende a la gran mayoría de las personas y aún a los practicantes de la misma les resulta arduo y complejo definirla. ¿A qué se debe esto? No hay una respuesta inmediata, pues, por lo general, la gran mayoría de los matemáticos está más ocupada en la búsqueda y solución de algunos problemas importantes propios de cada una de las disciplinas que la constituyen. De modo que algo tan simple y aparentemente sencillo, algo que parece una pregunta incauta e ingenua, que debería ser respondida en la educación primaria o secundaria, nunca ha sido resuelta y en muchos casos casi nunca planteada. Lo que primero se encuentra es la magia y el misterio de los números que utilizamos para contar, los enteros positivos; no en vano, el gran matemático Leopold Kronecker dijo: *Todos los números los creó el amado Dios, todo lo otro es trabajo del hombre* (*Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk*), comentario anotado por H. Weber y que realizó el propio Kronecker en *El Informe Anual de la Asociación de los Matemáticos Alemanes*[184]. Tales palabras hacen justicia en relación a la complejidad del origen de los números, tal fue su fascinación que durante gran parte de

[183] En la introducción a *The Princeton Companion of Mathematics*, en el numeral que tiene por título *What is mathematics about?* Se menciona que debería de existir una sección que trate sobre algunas definiciones matemáticas fundamentales (*Some Fundamental Mathematical Definitions*), la razón de ello estriba en que los autores prefieren abordarla a través de sus disciplinas más características como lo son: el álgebra, la geometría y el análisis. Luego se le sumarán la teoría de números, la geometría algebraica, la lógica, la combinatoria, las ciencias teóricas de la computación, la probabilidad y la física matemática. (Ob.cit. pág 1-7).

[184] Comentario anotado por Heinrich Martin Weber en su artículo *Kronecker* y que se dijo que tuvo alusión en tal reunión efectuada en Göttingen (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereiningung* 1892).

la segunda mitad del siglo XIX y comienzos del XX los más grandes matemáticos se dieron a la tarea por tratar de fundamentar la axiomatización de los números naturales o enteros positivos sin que tal empresa tuviera éxito. En esa época surgieron distintas corrientes: como la logicista, la intuicionista, la formalista y la predicativista; más tarde, entre la tercera y la cuarta década del siglo XX, surgió el estructuralismo y el nominalismo[185].

La reflexión del tema en cuestión: la definición de las matemáticas, asimismo, como la naturaleza de los números, no es algo para lo que se estés en condición de responder del todo. Sin embargo, parte de la respuesta será buscada en este capítulo. Para realizar esta exploración se ha escogido la obra *Los Elementos* (*Στοιχεῖα*) de Euclides (*Εὐκλείδης*), obra que ha ejercido la mayor influencia en moldear y darle forma a la matemática a lo largo de los siglos. Dada la enorme extensión de *Los Elementos*, tan solo se ha elegido analizar el capítulo 1 del libro primero, en el cual hay consignados 23 axiomas de variada extensión. La razón de ello está en que es uno de los pocos textos donde es posible encontrar unas definiciones formales de las nociones primitivas que constituyen a la matemática, abordadas en este caso a través de la geometría. Es de la opinión de muchos autores, que una gran parte de los teoremas y apartes de *Los Elementos*[186] no son de la autoría propia de Euclides, en especial los libros primero y segundo[187]; además, estos representan la formulación axiomática deductiva más antigua para el tratamiento de las matemáticas. Según el historiador en matemáticas Carl Benjamin Boyer[188], existen seis copias manuscritas de *Los Elementos* provenientes de los siglos X a XII. Inicialmente se obtuvo

[185] Una excelente aproximación al tema de la filosofía de las matemáticas puede encontrarse en el artículo de Leon Horsten: *Philosophy of Mathematics*, el cual nos ilustra tal período y lo documenta bien.
[186] Para la elaboración del presente capítulo se utilizará la traducción de Sir Thomas Little Heath: *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, bajo la traducción del filólogo e historiador danes Johan Ludwig Heiberg, quien trabajó sobre el original griego de la vitela de Constantinopla de *Los Elementos* de Euclides que están disponibles en la Biblioteca Digital Perseo (*Perseus Digital Library*) de la Universidad Tufts (*Tufts University, Medford, Massachusetts*), http://www.perseus.tufts.edu, permite acceder a los textos originales en griego de *Los Elementos*, además le brinda al investigador la oportunidad de consultar el significado y semántica de cada palabra desde su misma plataforma.
[187] Walter W. Rouse Ball (1850-1925) comenta en *A Short Account of the History of Mathematics* (pág. 44) que una gran parte de los primeros capítulos de *Los Elementos* de Euclides son de la autoría de Pitágoras. Este autor analizó y estudió de cerca la citada obra, identificando los distintos estilos de cada capítulo y los procesos deductivos involucrados en los mismos, algo que muy pocos han realizado con tanto juicio.
[188] Se puede disfrutar de una excelente exposición de Euclides en: *A History of Mathematics*, por Carl B. Boyer. Las anotaciones mencionadas se encuentran en la pág. 131 con amplios comentarios históricos de la obra.

una traducción del árabe que pasó al latín en el siglo XII; la copia vernacular en griego antiguo apareció en el siglo XVI. También fue uno de los primeros libros en beneficiarse de la invención de la imprenta, y la copia más antigua fue impresa en Venecia en 1482. Se calcula que han existido unas mil ediciones de *Los Elementos*, tan solo es superable en número de ediciones por *La Biblia*.

Una de las motivaciones adicionales hallada en la elaboración de esta investigación, es cómo existió una cultura filosófico-matemática muy anclada en el pensamiento griego, que muchos conceptos matemáticos al igual que hoy día fueron pensados a lo largo de muchas generaciones durante varios siglos. Se puede decir que se logró una madurez en la formulación a tal nivel que terminó en una axiomatización formal que ha gobernado y gobierna todavía a toda la matemática. El espíritu griego está todavía muy presente en la forma en que se construyen y demuestran los teoremas matemáticos. Está la manera en que se busca construir una teoría del número en términos de razones y proporciones, que se expone desde los libros V al X de *Los Elementos*. Y es posible encontrar la inspiración de la construcción de todos los conjuntos numéricos, asimismo, de las famosas cortaduras de Dedekind en dicho libro; el número es abordado en relación con unas proporciones lineales gobernadas por la mayoranza o la minoranza de sus expresiones. Dado que es de conocimiento general que Pitágoras y su escuela fueron los descubridores de los números irracionales[189], originados en la imposibilidad de medir la hipotenusa en términos de unos números enteros, este hecho está tratado en el libro X de *Los elementos* como un intento por clasificar los inconmensurables y, a su vez, expone el método exhaustivo que fue el precursor del cálculo integral. Se dice que fue el sofista Antifonte en el siglo V. a.C., el primero en tratar de determinar el área de un círculo inscibiendo en él un número mayor de triángulos cada vez más pequeños hasta colmar su área. Como se puede notar, existe un sinnúmero de importantes filósofos y matemáticos griegos que a lo largo de los siglos desarrollaron los conceptos que nos ocupan. Debido a que es harto complejo mencionarlos a todos, este estudio se centra en Pitágoras y en Euclides: el primero abordó la filosofía como una forma de vida e identificó las matemáticas como una disciplina y una ciencia. El

[189] La teoría de los inconmensurables fue un problema central en la matemática griega, descubierta por Pitágoras y luego trabajada y desarrollada por Eudoxo de Cnido (*Εὔδοξος ὁ Κνίδιος*) en el siglo IV a. C. Tema expuesto en *Mathematical Thought* de Morris Kline (pág.33).

segundo fue el que recopiló el trabajo de otros, desarrolló y mejoró en muchos casos sus formulaciones e introdujó las propias, dando origen al libro matemático más importante en toda la historia de las matemáticas a nivel mundial. Del primero no sobrevivió nada escrito de manera directa del tema y del segundo es el más completo que nos ha llegado a nuestros días proveniente de los matemáticos griegos.

El estudio de la obra matemática de Pitágoras no es de fácil curso; entre las tantas dificultades que se encuentran está la de no tener a disposición ningún texto directo del mismo, en parte debida a la naturaleza secreta de sus enseñanzas; en parte, a que su agremiación y colectividad fue perseguida y censurada por el tirano Polícrates de Samos, quien lo hizo huir a Croton para luego morir en Megaponto. Su secta fue proscrita y nunca más volvió a existir. No compete a este trabajo tocar tales asuntos, sino los relativos a las matemáticas. Se encuentran trabajos elaborados sobre los aportes de los Pitagóricos, tal como el excelente libro de Alberto Campos[190]. Sin embargo, el presente propósito está en realizar una exégesis y un análisis porminucioso de un texto original en griego clásico, hecho que obliga a buscar las fuentes primarias en diversos autores antiguos que hayan mencionado a los pitagóricos, tarea igualmente difícil dada la dificultad misma en encontrar tales textos. El interés prioritario está en profundizar algunos tópicos precisos muy delimitados y poderlos contrastar con algunas posiciones modernas. Ello ha implicado seleccionar algunos temas y dejar al lado otros; así que, el propósito de este capítulo es, en primer lugar, examinar más de cerca las nociones de punto, línea y superficie y, en segundo lugar, se abordarán otras nociones como la de ángulo, círculo y paralela.

La axiomatización de la aritmética moderna recae en gran parte en la relación que se establece entre los números con la denominada recta real, inspirada en la teoría de las proporciones sobre segmentos de recta de los griegos antiguos. Hay que destacar que la proporcionalidad hace parte del significado del logos (*λόγος*), tal como lo sugiere el Morris Kline[191], donde la aritmética se desarrolla alrededor de esta noción, que fue traducida al

[190] En la obra de Alberto Campos (2006): *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática, Volumen 1. Lógica y geometría griegas*, el capítulo 2 está dedicado a los pitagóricos y a sus diversos y prolíferos aportes.

[191] Morris Kline (1908-1992) fue un matemático estadounidense que escribió acerca de la historia, la filosofía y la enseñanza de las matemáticas, fue el autor de 17 obras donde buscó unir y relacionar estas disciplinas.

latín como *ratiō*: razón, explicación, cálculo, método. En griego se tiene el vocablo *ἄρρητος* para expresar lo que no tiene razón o proporción; también evoca lo indecible. Las magnitudes inconmensurables (*ἄλόγος*), tal como lo es la raíz cuadrada de dos (√2), dieron lugar al descubrimiento de los números irracionales por parte de Pitágoras. A esto se le suma que la explicación de la axiomatización moderna de la aritmética descanza en el aspecto cuantitativo o extensivo del número con base en la teoría de la magnitud. Además de sus propios aportes, los *Elementos de Euclides* es propiamente una recopilación realizada por el propio Euclides de una gran parte de la matemática griega anterior a él, tal como lo sugiere también Morris Kline[192]. A esto se le suma que el griego antiguo tuvo también su propia evolución y sus propios dialectos, aspectos que deberían de entrar si se realiza una exégesis adecuada. Se menciona este hecho, dado que al examinar algunos fragmentos del libro 1.1 de Euclides, algunas palabras provienen del griego de Homero, lo que dificulta precisar su exacto significado. No nos queda más que contentarse con una aproximación rigurosa pero limitada. El matemático e historiador Rouse Ball[193] manifestó, en relación con *Los Elementos* de Euclides, que las definiciones y los axiomas contienen muchas afirmaciones que no son tan obvias. Esto invita a resaltar que el estatuto de nociones primitivas a partir de las cuales se construye todo el andamiaje deductivo no es tan evidente como comúnmente se ha venido aceptando. Este hecho es significativo debido a que pocos autores lo cuestionan y lo dan por sentado.

3.1. Breve recorrido alrededor de las nociones primitivas fundantes de la geometría

Aproximarse al estudio y análisis de las figuras geométricas hace surge la inquietud acerca de la fundamentación de las mismas. Una de las nociones más importantes es la noción de cuerpo, entendida como un cuerpo geométrico: la figura geométrica por excelencia es el poliedro, vocablo que proviene de la unión entre *polús* (*πολύς*) y *hédrā*

---

[192] Cuando una magnitud no puede ser medida se convierte en en inexpresable e inaprehensible en términos del logos. De tal manera, que lo que cae dentro del logos debe de poder ajustarse a una medición expresable a nivel numérico, como lo sugiere Kline en su obra *Mathematical Thought* (pág 32).

[193] Walter. W Rouse Ball (1908), en *A Short Account of the History of Mathematics* (pág. 45).

(*ἕδρα*), que significa muchas bases o asientos. Es un sólido de tres dimensiones con muchas caras, en especial, los poliedros regulares o convexos, también conocidos como los sólidos pitagóricos o sólidos platónicos[194]. En ellos se aprecia una armonía a nivel de su simetría central, axial y especular, además de la posibilidad de incertar tres esferas alrededor del centro de simetría en cada uno de ellos. Es notable que el lado (*ἕδρα*) como noción primitiva proviene de la silla (*ἕδος*), donde uno se sienta (*ἕζομαι*). Kuego se tiene la noción de vecindad, entendida como aquel entorno donde convergen lados distintos, aquel lugar se denominará el vértice (*κορυφή*), vocablo que también significa cúspide, pico, fundamento, punto de apoyo, asamblea, posadillas, proviene de yelmo o cabeza (*κόρυς*). Así, el término indica algo que se eleva en punta, algo acabado o realizado (*κορυφόω*), y evoca también a aquel guerrero que puede llevar un casco (*κορυστής*), rasgo propio de un jefe o un corifeo (*κορυφαῖος*) que era un grupo de jóvenes que danzaban y bailan en el templo de Dionisos. Se tiene lo que sirve de asiento para descansar y sostenerse (*ἕδρα*), que unido a aquella cima como la parte más alta (*κορυφή*), nos guía y conduce (*κόρυς*). Surge entonces la pregunta: ¿Cuántos puntos o sitios de encuentro para elevarse se pueden dar? Este evento lleva a la posibilidad de construir una figura en la que la frontera se mantiene y contiene dentro de una superficie. Este evento conduce, al vez, a la más importante noción de todas las matemáticas, donde han de trabajar de manera conjunta la aritmética con la geometría a fin de poderla construir; se trata de la noción de circunferencia (*περιφέρεια*): aquella región o territorio que se constituye en la unidad administrativa básica de un Estado; aquella instancia desde la cual algo puede ser visible en todas sus partes (*περιφαίνομαι*), aquello que nos conduce al conocimiento perfecto (*περιφάνεια*), y que evoca todas las posibilidades en que podemos circundar, mirar y analizar una situación desde todas sus posibles facetas; un vocablo que proviene de (*ὑπερήφανος*) que significa, además, alguien orgulloso y arrogante. Esta palabra es la unión de la preposición sobre, encima, aquello que está encima más allá (*ὑπερ*) y algo que es excesivamente brillante (*ήφανος*). Alude también a Hefestos (*Ἥφαιστος*) el dios del fuego, la metalurgia y de los volcanes. Se está en frente de la figura

[194] Poliedro regular convexo conocido por la perfecta simetría entre sus caras, sinónimo de belleza. Son cinco con 4, 6, 8, 12 y 20 caras: "Es posible decir que los sólidos platónicos aparecieron desde el origen mismo de la vida", como está afirmado en *La inmortalidad de los sólidos platónicos*, artículo publicado por por I. Busjatkaya y M. Monastyrsky del The Isaac Newton Institute for Mathematicas Sciences, 2013.

misma del Sol, que está por encima de nosotros estableciendo la vida, gobernando el día y la noche, trayendo el calor que hace posible que podamos existir. El vocablo para circunferencia es periferia (*περιφέρεια*), y proviene del verbo *periféro* (*περιφέρω*) que es moverse y llevar algo alrededor. Está conformado por la preposición *perí* (*περί*), que indica algo circular y próximo pero, también, aquello que aporta una explicación acerca de algo y el verbo *féro* (*φέρω*), que indica llevar, cargar. Asimismo, está el adverbio *péra* (*πέρα*), que indica algo que está más allá, al otro lado, más allá de cualquier explicación lógica, lo que es propio del verbo (*περαίνω*) que indica algo cumplido, acabado, realizado y concluido. También lo que se mueve alrededor del ser humano de manera circular (*περιφερής*), es así como la forma circular nos relaciona con el Sol y su movimiento alrededor del firmamento que parece describir una circunferencia en el firmamento, que está encima, en la parte más elevada que se levanta por encima (*ὑπερέχω*): tal como el astro rey, el Sol, lo hace todos los días desde la misma alborada de los tiempos.

El estudio de la circunferencia (*περιφέρεια*) como la redondez armónicamente perfecta fue abordado en la teoría pitagórica de la armonía de las esferas[195], siendo uno de los problemas más complejos que la cultura griega tuvo que resolver. De la circunferencia se obtiene una de las constantes matemáticas más importantes que es *pi* (π), cuyo valor es: 3,1415926…Algo muy curioso en relación a este importante concepto, cuya complejidad es tan alta que agota todas las representaciones del mismo y que nunca dejará de ser estudiado de manera reiterada a lo largo de las eras, es la noción de grado. Esta noción reviste una enorme importancia, ya que en su obtención intervienen dos criterios de naturalezas contrarias: el primero consiste en derivar una constante matemática a partir de la relación con un evento real que acontece en el mundo donde vivimos y el segundo está relacionado con un criterio de perfección fundamentado en la proporción armónica que un ente conceptualizado debe de tener. El primer criterio deriva del período sideral en que tarda el planeta Tierra en completar una órbita alrededor del Sol, o también el período sinódico en que el Sol completa una órbita cuando es observado desde la Tierra. El segundo criterio viene asociado a asimilar tal movimiento a la figura geométrica de una circunferencia. Si se

[195] Este tema es recreado como un importante elemento en la visión que el hombre ha construido del universo, tal como lo comenta Arthur Koestler (1959) en la armonía de las esferas (pág 26) en *The Sleepwalkers, A History of Man´s Changing Vision of the Universe*, Arcana, London.

observa que los objetos que se mueven en el universo lo hacen de manera perfecta y armónica, se tiene que un año se asemeja a 360 días. Este número, por una parte, es divisible tanto a nivel de los números pares como de los números primos; en especial, los antiguos le otorgaban una gran importancia a las direcciones geográficas básicas que son cuatro. De manera análoga, los antiguos griegos consideraron la existencia de cuatro elementos, hecho que viene relacionado con cuatro grandes cambios que se dan fruto de este movimiento del Sol en el firmamento a partir del cual surgen los dos equinoccios y los dos solsticios. Esto hace que una circunferencia puede ser cortada y dividida en cuatro porciones, lo que facilita situar estos cuatro grandes eventos que gobiernan los cambios de las estaciones. De algún modo, una de las herramientas más importantes para que una civilización prospere es la creación de un calendario, en el cual los años están determinados por el movimiento del Sol, mientras los doce meses están señalados por los cambios de la luna. En ambos casos tales movimientos pueden ser recreados en una circunferencia, la cual brinda, además, la posibilidad de servir de mapa para situar las estrellas a nivel de un planisferio celeste.

Una circunferencia está constituida por 360 grados en concordancia a la aproximación de un año sideral de 360 días, número que permite el manejo de un sistema sexagesimal como en los antiguos babilonios y uno decimal como en los griegos. La noción de grado requiere para su construcción de un segundo elemento, que es la afirmación que una circunferencia tiene un centro desde el cual se pueden trazar 360 líneas a la periferia. Asimismo, se tiene la relación que guardan dos líneas entre sí, hecho que es conocido como un ángulo. Hasta el momento se tiene las siguientes nociones primitivas: la de circunferencia (*περιφέρεια*), la de grado, la de ángulo (*γωνία*), la de línea (*γράμμή*, que proviene del verbo *gráfo γράφω*). Están también las nociones de figura (*σχῆμα*), que también significa esquema, diagrama, plano, forma, estado, entre otras. Este vocablo proviene del verbo tener o *égo* (*ἔχω*) y el sufijo que se le agrega a los verbos para formar sustantivos neutros que denotan el resultado de una acción (-*μα*). Esta noción remite a otro vocablo de enorme importancia que es el de *morphé* (*μορφή*), que significa forma, apariencia y bosquejo; sin embargo, esta palabra tiene una enorme profundidad porque se refiere a la forma de las cosas o los entes. Toda figura involucra la noción de frontera (*ὅρος*) y de demarcación de unos linderos dentro de los cuales operan una reglas; invoca también una definición y una finalidad o fin o meta. La circunferencia (*περιφέρεια*) es una figura (*γραμμή*) que abraza o rodea (*περιέχω*) una superficie que tiene una extremidad o final (*πέρας*), fruto de una acción que atraviesa y recorre a lo largo (*πείρω*), más allá (*πέρα*) de manera opuesta (*πέραν*). La conceptualización de la circunferencia (*περιφέρεια*) es abordada por Euclides[196] (libro 1, renglón 15) como un círculo (*κύκλος*), vocablo que ya fue tratado antes por Pitágoras entre sus 10 principios duales a nivel de lo que es curvo (*καμπύλον*). Este hecho posee una profundidad mayor, debido a que la noción de curvo antecede a la noción de círculo. Se puede afirmar que un círculo es la unidad (*ἕν*) de una curva perfectamente armónica y proporcionada. Siempre, todo círculo (*κύκλος*) está situado sobre una superficie o plano (*ἐπίπεδος*), que se define por medio de las líneas (*γραμμή*) que abrazan (*περιέχω*) una circunferencia (*περιφέρεια*), y donde se tiene una marca, signo o punto (*σημεῖον*) que no (*οὐδείς*) tiene partes (*μέρος*). Es de resaltar cómo la noción de signo o *sêma* (*σῆμα*) es aquello que está situado en el centro de algo, como aquel fundamento que permite construir el significado de una palabra o vocablo. Este punto o marca (*σημεῖον*) se elabora a partir de dos períodos (*ἕνος*) que circundan por toda (*πᾶς*) la circunferencia (*περιφέρεια*) de manera igual (*ἴσος*) y balanceada (*ἰσάζω*). Algo a tener en le cuenta es que el concepto de circunferencia (*περιφέρεια*) es derivado del de círculo (*κύκλος*): es la envoltura que lo rodea: por tal razón, se le denomina periferia del círculo (*κύκλου περιφέρειαν*). La noción de circunferencia es derivada de la del círculo, es un concepto y una noción dependiente del mismo, donde la argumentación se debe de centrar en el círculo, respecto al cual la circunferencia es un evento importante aunque no lo antecede. La costumbre imperante hoy día, es presentar las distintas nociones geométricas o aritméticas sin ese rigor propio del pensamiento griego antiguo, donde se da un ordenamiento teórico estricto desde la misma mención y formulación de una noción o concepto.

---

[196] En este capítulo se estudia la obra de Euclides tomada del griego con base en la edición del filólogo e historiador danés Johan Ludvig Heiberg (1854-1928), llevada al inglés por el matemático y académico clásico Sir Thomas Little Heath (1861-1940). Las citas en español se toman de Euclides, *Elementos*, traducción de María Luisa Puertas Castaño, Editorial Gredos, 1991.

Recuérdese que el círculo se asemeja a la mónada (*μονάδα*), en cuanto cada una posee una unidad que la hace autosubsistente por estar ambas solas (*μόνος*) y ser únicas en su clase (*μονοειδής*), aquella desde la cual se fundamenta la existencia. Este vocablo es la unión de *mónos* (*μόνος*) y *eidés* (-*ειδής*), el uso de este sufijo es bien preciso y sirve para conectar algo relacionado con la naturaleza del adjetivo que lo antecede; a su vez, proviene del sustantivo eidos (*εἶδος*), que es la forma, apariencia, imagen y clase, en unión con el sufijo para adjetivos de la tercera declinación (-*ής*). La mónada es vista o contemplada (*εἴδω, εἴδομαι*) como un objeto de conocimiento que tan solo es aprehensible a nivel de una idea (*ἰδέα*). Este hecho pone en evidencia, que para los griegos antiguos, en especial, para Pitágoras, la realidad superior es inaprehensible de manera directa y se requiere de instancias mediadoras para hacerse una representación de la misma, ya sea por medio de las matemáticas o la filosofía. Lo que nos lleva a aseverar que el círculo es una representación de la mónada, mas no agota tal concepto que está situado en un nivel deductivo muy alto, en una suerte de metalenguaje que es capaz de recrear distintas teorías y modelos como satisfactores particulares de la misma. Estos modelos están situados en un nivel de lenguaje distinto, ya que en el nivel más alto es de alguna manera inaprehensible, impredicable y por consiguiente indecible e indecidible.

3.2. Elementos de Euclides, Libro 1.1.

El propósito central del presente numeral es reconstruir el proceso ontológico y epistemológico que subyace a la elaboración de algunas nociones primitivas fundamentales para la construcción de la geometría. Esto involucra la propuesta de una teoría cognoscitiva que, luego de recorrer variadas estaciones, logra finalmente realizarse al plasmarse en algunos axiomas que constituyen la base sobre la cual se construye gran parte de la matemática, en especial, de la aritmética, la geometría y el álgebra. El *corpus* pitagórico posibilitó el desarrollo del análisis, el cálculo, la topología y condujo al desarrollo mismo de las geometrías no euclidianas. Debido a la ausencia de textos matemáticos directos provenientes de los pitagóricos, el presente proyecto inicia abordando apartes del libro I de Euclides. Es de conocimiento general que gran parte de este texto fue escrito por el mismo

Pitágoras y su escuela, tal como lo afirma Richard Fitzpatrick (2014) en *The Euclid´s Elements of Geometry*: "La mayoría de los teoremas que aparecen en los elementos no fueron descubiertos por el mismo Euclides, pero fue el trabajo de matemáticos griegos previos tal como Pitágoras (y su escuela), Hipócrates de Quios, Teeteto de Atenas y Eudoxo de Cnido" pág. 4[197]. En ese sentido, Euclides fue un recopilador de una gran parte del conocimiento matemático griego, esto se observa en la forma en que están escritos los mismos *Elementos*. El proceso deductivo de esta magna obra muestra estilos distintos y diversos niveles de argumentación del discurso formal, hecho a que obedece a otras épocas y otros autores previos. El propósito principal de este capítulo es reconstruir los procesos epistemológicos de inspiración ontológica que recorren este libro 1, 1, que va del numeral 1 al 23. Para que podamos cumplir con tal meta, se buscará plantear una metodología que gravita alrededor del desarrollo conceptual que promueven las nociones primitivas, dada la complejidad que subyace a este proceso, se abordará de manera rigurosa una parte pequeña de *Los Elementos*. Estudiar toda la obra y las demás que la anteceden, sería una tarea monumental tan solo emprendible por un grupo de entusiastas académicos durante un tiempo muy largo. Para cumplir con las metas trazadas, este capítulo se divide en dos secciones: la primera que se va a dedicar a estudiar las nociones de punto, línea y plano (numerales: 3.2.1.1 a 3.2.7.3, situados entre las páginas 9 a 108). La segunda, que analizará la aparición de la noción de ángulo, círculo y circunferencia, paralelas (numerales: 3.2.8 a 3.2.23, se sitúa entre las páginas 110 a 174). En todos los casos se analizarán las derivaciones modernas de tales conceptos a nivel de algunas teorías matemáticas.

3.2.1. La noción del todo y la parte como fundamento de la geometría

Un interés esencial es poder determinar las primeras nociones primitivas como, también, los primeros conceptos y palabras de las cuales surgió la geometría. Ya que no queda ningún tipo de documento matemático escrito directamente por Pitágoras, los

[197] Es la opinión de Richard Fitzpatrick (2014), traductor al inglés de *The Euclid´s Elements of Geometry*, quien se apoyo en la traducción de *Los Elementos* de griego del texto de J. L. Heiberg de *Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est J. L. Heiberg, in aedibus B. G. Teubneri, 1883- 1885*. Quien manifiesta que parte del mérito del propio Euclides está en la forma en que ordenó estos teoremas, lo que favoreció su exposición lógica a partir de los cinco axiomas fundamentales y las demostraciones de los teoremas, asimismo suministró nuevas pruebas a las ya existentes, mostrando su gran ingenio y creatividad.

vocablos por medio de los cuales se explica su geometría son tomados de *Euclides* (*Ευκλείδης*). Este hecho está garantizado por el hecho de que él fue no solo un matemático sino un esmerado recopilador de toda una tradición anterior: sus *Elementos, Stoicheia* (*Στοιχεῖα*) son, en parte, la recolección de teoremas de otros matemáticos anteriores a él. Los análisis que se van a emprender concuerdan con el pensamiento pitagórico que nos ha llegado y en estricta concordancia con las conclusiones derivadas de las citas que otros autores realizaron del mismo. El tema que se está abordando presenta distintos niveles de formulación y se asemeja a la integración de variados modelos dotados de unas argumentaciones diferentes, que se reúnen y entrelazan a fin de satisfacer una teoría o disciplina.

Sea el caso, la noción de punto (*σημεῖον*) es definida como: *un punto es aquello que no posee parte* (*σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*. L.1, t.1, n. 1). El punto (*σημεῖον*) es un sustantivo neutro que posee toda una variedad de significados: es una marca o signo, es la señal para realizar algo, es un estandarte o bandera, es una tumba, es una figura o imagen, es un rasgo de nacimiento, es una prueba, es un síntoma, es la taquigrafía de unos símbolos, es una marca crítica, es un punto en el tiempo o un instante, es una unidad musical y es un punto matemático. Algo que merece la pena tener en cuenta es que el punto, *sēmeîon* (*σημεῖον*) deriva de *sêma* (*σῆμα*) que es una marca, un símbolo o un signo que indica algo proveniente de los dioses, es la señal para comenzar algo y es el signo que indica el lugar de una tumba; signoc que se ve, se interpreta, se muestra, para significar, conjeturar, explicar, contar y declarar (*σημαίνω*) algo. El vocablo 'punto' (*σημεῖον*): marca, señal o signo (*σῆμα*) es, a su vez, la variante particular más básica de un símbolo (*σύμβολον*). Su significado evoca un signo o señal previa por medio de la cual inferimos algo, una sentencia legal, un permiso de residencia, una promesa fruto de haber recibido un dinero anticipadamente. La etimología de 'símbolo', por su parte, muestra que proviene del verbo *sumbállo* (*συμβάλλω*), que es lanzar junto, echar, llevar en abundancia, reunir, juntar, siministrar, comparar, corresponder, evaluar, encontrar, explicar. El símbolo es el resultado de la reunión de un prefijo *sin* (*συν-*) que es con, junto con el verbo *bállo* (*βάλλω*); que es echar, lanzar, arrojar, colocar, disparar, derribar, entre otros tantos. El símbolo reúne varias instancias para ser lanzadas como una señal o marca fruto de la interpretación de los designios divinos.

En ese sentido, se puede decir que el punto (*σημεῖον*) posee una naturaleza activa que, por una parte, es una señal (*σῆμα*) proveniente de los dioses en la cual se instaura un comienzo y, por otra parte, tiene la potestad de arrastrar algo consigo, siendo capaz de arrojar algo. En las matemáticas modernas, le correspondería la noción de una función o transformación, de manera que el punto para los griegos es algo dinámico. Si se lo fuese a interpretar o a simbolizar hoy día, habría que darle la notación de f^{σ}: es una función f que transporta algo desde su origen o comienzo o dominio a la vecindad destino o codominio. Pero el vocablo que se utiliza para punto (*σημεῖον*), es una señal (*σῆμα*) que incorpora algo que se muestra, interpreta y significa (*σημαίνω*). En ese sentido, remite a la *sēmasíā* (*σημασία*) que significa recibir una señal u orden, y ese es el significado a nivel gramatical. El punto involucra, además, el ejercicio de una transformación que, a la vez, es la instancia desde la cual se ejerce una labor semántica. Sin embargo, el punto (*σημεῖον*) 'es' (*ἐστιν*, la tercera persona singular indicativo del verbo ser o existir *εἰμί*) lo (*οὗ*) que de ninguna manera (*οὐδείς*) tiene partes (*μέρος*); lo que no recibe parte (*μείρομαι*) alguna por parte del destino (*μοῖρα*). En ese sentido, es algo que está en el comienzo y bajo el cual no ha caído la generación, siendo algo básico y primario. El concepto de punto, al ser una parte de algo, cae bajo la problemática del todo (*πᾶς*) y la parte (*μέρος*), siendo el primero un concepto unitario singular, mientras el segundo es un concepto que involucra una pluralidad que está sujeta a un orden o armonía. De manera que la noción de círculo (*κύκλος*) es un todo (*πᾶς*), mientras las nociones de punto (*σημεῖον*) y periferia o circunferencia (*περιφέρεια*) son partes (*μέρος*) de la primera noción, que es la que ordena y asume una labor conceptual integradora en concordancia con que la idea (*ἰδέα*) o forma (*εἶδος*) del todo (*πᾶς*) que determina a la idea y a la forma de la parte (*μέρος*). La problemática del todo y la parte es uno de los ejes más importantes para Pitágoras, asimismo, para el pensamiento griego; esta es una de las estrategias fundamentales que organiza y ordena una teoría del conocimiento como una epistemología que se entrelaza con una ontología. La teoría del todo y la parte tiene una jerarquía cognoscitiva y ontológica muy alta: en Pitágoras, está a nivel de las matemáticas en el número (*ἀριθμός*) y, en la filosofía, está en la mónada (*μονάδα*). Lo anterior está en plena concordancia con que el acto de ver o contemplar (*εἴδω, εἴδομαι*) el todo, antecede y determina lo que es la parte, ya que ese todo determina las partes que le son propias.

Es notable cómo la primera proposición con la que comienza *Los Elementos* de Euclides: *un punto es aquello que no posee parte* (*A point is that which has no part*. *σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.* L.1, t.1, n. 1), nos está introduciendo al método lógico de deducción indirecto conocido como reducción al absurdo (*Reductio ad absurdum*), también conocido como (*argumentum ad absurdum*). Tal argumentación proviene de la sentencia que Aristóteles presenta en *Los Primeros Analíticos*[198] como (*εἰς ἀτοπον ἀπαγωγή*) o reducción a lo imposible. Esta sentencia proposicional comienza siendo introducida por la preposición *eís* (*εἰς, ἐς*), que indica algo que está dentro, entre, para y hacia lo cual se encamina algo. Este vocablo está muy cerca del que se usa para nombrar al número uno (*εἷς*). Esta proposición está gobernada por el modo acusativo, indica que la acción del verbo transitivo recae sobre un complemento directo. Luego está *átopon* (*ἀτοπον*) que es el neutro del adjetivo *átopos* (*ἄτοπος*) que significa algo inusual, fuera de lugar; a su vez, es la unión de la alfa privativa (*α*-) con el sustantivo *topos* (*τόπος*) que es lugar, asimismo tópico, posición y, además, señala una oportunidad o posibilidad. Con lo cual, el punto es aquello que está dentro y, asimismo, como fuera de lugar y, por consiguiente, carente de cualquier tipo de posibilidad para darse o tener existencia. Finalmente, tenemos el vocablo (*ἀπαγωγή*) que proviene del verbo (*ἀπάγω*) que es conducir a un lugar, es la unión de la preposición *apó* (*ἀπό*) que indica algo que se aleja de, o que proviene de o desde, con el verbo *ágo* (*ἄγω*) que es conducir, llevar consigo, llevar lejos. La sentencia aritotélica, finalmente, puede interpretarse como aquello que está dentro (*εἰς*), como lo uno (*εἷς*) o único que carece de lugar (*ἄτοπος*) y que nos conduce lejos, alejándonos aparte (*ἀπάγω*). Retornando a la proposición que interesa ahora, el punto es lo que carece de parte (*σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*); el punto (*σημεῖόν*) está definido e introducido de manera negativa (*οὐθέν*), vocablo que proviene del pronombre (*οὐδείς*) que indica nadie, nada, ninguno. Es la unión de la conjunción y adverbio (*οὐδέ*) que señala que ni aún (a su vez se descompone en el adverbio

---

[198] Aristóteles introduce en *Los Primeros Analíticos*, conjunto con su exposición sobre su teoría del silogismo presenta la reducción al imposible o reducción al absurdo (23,10-11).

οὐ que significa no con la partícula *δέ* que indica la conjunción y, que indica una acción seguida, en la cual no importa lo que se le agregue, nunca encontrará algo o alguien que cumpla con la condición) con el cardinal uno (*εἷς*). Con lo cual, el punto (*σημεῖόν*) es lo (*οὗ*) que no (*οὐδείς*) es (*ἐστιν, ἐστί*) o existe (*εἰμί*) o tiene parte o porción (*μέρος*), que no sigue la cadena del destino (*μοῖρα*) por antecederlo y ser previo a todo. El verbo *meíromai* (*μείρομαι*) del cual proviene la parte (*μέρος*), es aquel que indica la parte o porción que a cada uno le corresponde. Con lo cual, el punto (*σημεῖόν*) indica una acción que no se deja porcionar y que es la parte (*μέρος*) que no es parte de nada ni de nadie (*οὐδείς*), antecede cualquier tipo de asignación de repartición (*μοῖρα*).

Es de destacar cómo la primera proposición de *Los Elementos* (*Στοιχεῖα*) introduce el método de demostración indirecto o reducción al absurdo a través de la noción de punto (*σημεῖόν*), bajo la estrategia de la parte (*μέρος*) que no es parte de nada ni de nadie (*οὐδείς*). Hay que destacar que no se menciona al todo (*ὅλος, πᾶς*) en dicha formulación, y ello podría ser interpretado, como si se estuviera introduciendo la noción de una variable o de la incógnita, en cuanto ese punto (*σημεῖόν*) es una *x* desconocida[199] o por descubrir que indaga acerca de qué tipo o clase de universo (*ὅλος*) responde cada una, todas o la totalidad (*πᾶς*) de sus partes (*μέρος*). Esto es algo que sería indispensable averiguar. Además, es una metaproposición fundamental tan profunda, que sugiere la remisión a los tiempos de los grandes filósofos presocráticos, como el mismo Heráclito. Su estructura como un aforismo (*ἀφορίζειν*) es única, define aquello que marca una frontera (*ἀφορίζω*); que separa, ordena y distingue aquello que está aparte, alejándose (*ἀπο-*) lejos de (*ἀπό*) al dividirlo (*ὁρίζω*) como aquella frontera (*ὅρος*) que limita, define y termina. En ese sentido, el punto (*σημεῖόν*) viene sugerido desde la más remota antigüedad como la noción que se va a utilizar en la definición del límite de una función, concepto fundamental en la noción de continuidad y de las derivadas, lo cual permite unapermite aproximación a un punto en el que se tiene un valor definible como resultado de la convergencia de una sucesión. Es muy importante

[199] François Viète (1540-1603), precursor del álgebra, propuso la x como la incognita a despejar. Nombró lo desconocido y así, de lo conocido pasó a determinar lo desconocido, utilizó la convensión de recurrir a las consonantes para los valores conocidos y a las vocales para los desconocidos. No obstante, se le debe a Descartes el uso de la x, asimismo como de las otras letras al final del alfabeto para simbolizar lo desconocido. Ver: John Fraleigh (2003), *A First Course in Abstract Algebra* (7th Edition), pág. 198.

resaltar cómo estas nociones primitivas han definido los caminos por los cuales han transitado las matemáticas a lo largo de toda su historia, en especial, en el análisis real matemático.

3.2.1.1. La fundamentación del símbolo en un irreductible geométrico-aritmético

Cuando se aborda la etimología de punto (*σημεῖόν*), este proviene del sustantivo *sêma* (*σῆμα*) que, en una primera aproximación, significa: signo, señal o marca; tal hecho permite establecer esa relación tan íntima entre el discurso matemático con la discursiva narrativa de donde emerge el lenguaje ordinario. Propiamente, se está frente a dos lenguajes $\mathcal{L}$: donde el primero, de inspiración matemática, tiene que ver con la cosa en sí misma $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, y es un subcojunto del segundo, que corresponde al lenguaje ordinario $\mathcal{L}_{O}$, que utilizamos para hablar y expresarnos desde tiempos inmemoriales: $\mathcal{L}_{\mathcal{M}} \subset \mathcal{L}_{O}$. Pero lo más significativo es derivar la noción de punto de la signo. Se trata de crear un vínculo que opera como un puente entre ambos discursos desde la misma configuración de las nociones primitivas que soportan la fundamentación de ambos universos. A fin de evitar un círculo vicioso de nociones y conceptos que se mueven en una circularidad harto problemática, se establece que no hay nada antes que el punto (*σημεῖόν*) tal como no hay nada que anteceda al signo (*σῆμα*): tal situación es el comienzo del desarrollo de una teoría cognoscitiva o de una epistemología tanto de la matemática como de la lingüística. No obstante, se observa que en el pensamiento griego, sea de Pitágoras o de Euclides o de otros, todo lo dicho tiene un fundamento y no está expresado al azar. Es importante notar cómo el lenguaje que hablamos es el lugar a través del cual se comunican los dioses o la divinidad con el ser humano. En un comienzo, siempre es el verbo o el logos, hecho que se observa en que los signos (*σῆμα*) expresan las señales del cielo y de los dioses, señalan el comienzo de algo como también el final mismo (indican el lugar de una tumba). En ese sentido, el signo se asemeja a esa función f, donde tiene un dominio que está definido alrededor del comienzo de algo y un codominio que está definido como el destino final de un ente. Algo importante es que el punto (*σημεῖόν*) es la unión del signo (*σῆμα*) con el sufijo (-*ιον*) que se le agrega tanto a los sustantivos como a los adjetivos para indicar una pertenencia; en este caso, dicha membresía que subyace al punto es aquella señal de procedencia divina que instaura el comienzo de la geometría. No hay que olvidar que el mismo Pitágoras consideró a la geometría como una ciencia sagrada, hecho apreciable en su teoría de la armonía de las esferas. Con lo cual, las disciplinas matemáticas y las pertenecientes a la palabra tienen un mismo origen común. Adviértase, además, que el verbo *sēmaínō* (*σημαίνω*) significa señalar, indicar, apuntar; ordenar, mandar; marcar con una señal, sellar; conjeturar, interpretar; hablar y contar. En ese sentido, se puede apreciar su cercanía con la noción moderna de función f, que indica una transformación dinámica y que de alguna manera tiene una dirección: es lo que hoy día se llamaría un vector propio del cálculo vectorial, apreciable en la geometría algebraica como en el desarrollo de la física. Ese señalar (*σημαίνω*) se puede interpretar como una línea (*γραμμή*) que posee una dirección (→), o sea un vector. No es de extrañar que el primer ente geométrico fundamental que aparece en los *Elementos* de Euclides es el punto (*σημεῖόν*), y que el segundo es la línea (*γραμμή*). El tratamiento que se le está dando es dinámico (vectorial); hoy día se tiene una concepción de la geometría euclidiana como estática y que es contraria al pensamiento de los grandes matemáticos griegos, cuyos aportes están recopilados en *Los Elementos*. Tal situación también se presenta en la aritmética donde el número, *arithmós* (*ἀριθμός*), es dinámico. No hay que olvidar que Pitágoras hace derivar el origen del universo a partir del número uno (*εἶς*), como lo primero (*πρῶτος*) que existe y que, además, es infinito.

El punto (*σημεῖόν*) remite al signo, marca, señal (*σῆμα*) e indica aquel signo proveniente de los dioses. Se da entonces una relación con un territorio que es sagrado y está consagrado a la divinidad (*τέμενος*). De igual manera, el signo (*σῆμα*) es aquel ‘irreducible de lo que puede ser signado, marcado o simbolizado’, fruto de una acción que lo muestra, lo señala, lo significa y lo interpreta (*σημαίνω*). Este irreducible remite a los distintos lenguajes como vehículos e instrumentos mediante los cuales es posible conocer algo. En los distintos contextos en que han sido analizados estos vocablos relacionados con lo más básico, está presente ese inquirir acerca de lo que es lo mínimo: lo que es lo más pequeño en cuanto irreducible a una ulterior descomposición o reducción, y ello se erige como una de las problemáticas fundamentales que han acompañado esa indagación epistemológica y ontológica, asociable también a unas prácticas habidosas, artísticas, exactas o techné (*τέχνη*). Queda por anotar que una definición alternativa de la primera definición del libro primero acerca del punto podría ser: “el punto como la unidad metríca mínima e irreductible capaz de servir de fundamento para cualquier patrón de medida”. Esto reconfirma a la geometría (*γεωμετρία*) como la disciplina o *techne* dedicada a la medición de las distintas métricas asocidas a cualquier tipo de espacio o lugar (*τόπος*), lo cual remite acerca a las actuales topologías y sus problemáticas como la conexidad y la compacidad, relacionadas con la problemática de la expansión del punto para crear y sustentar un espacio o figura, así como la posibilidad de que tal expansión no esté rota o discontinua, lo cual, la aproxima a guardar su propiedad como métrica (-*μετρία*).

El punto como signo matemático tiene una gran versatilidad, basta apreciar en *Principia Mathematica*[200] de Whitehead y Russell cómo el punto es utilizado para establecer el rango o recorrido de una proposición, lo que se denomina en tal obra *the scope*[201]: alcance, extensión; plan, propósito, designio o fin. De manera que se puede tener proposiciones donde se utilizan diversas asociaciones de puntos, sean estos: el punto sencillo (.), los dos puntos (:), tres puntos (:.) y cuatro puntos (::). Se establece un orden en los puntos, al igual que el uso de los cuantificadores lógicos, sea el universal (∀) o el existencial (∃), la ubicación al comienzo izquierdo de la proposición indica su importancia y jerarquía, sea el caso en la siguiente expresión: ├ :. (p) :. (q) : q . ⊃ . p ∨ q donde el punto va unido al signo de aseveración ├, signo que fue planteado inicialmente por Gottlob Frege (1879) en su magna obra *Begriffsschrift*[202]. Este símbolo ├ indica la presencia de un juicio, donde la línea vertical indica la afirmación del contenido del juicio, entendido como aquel compromiso con lo que uno se está afirmando, y la línea horizontal expresa el significado del juicio en cuanto totalidad referida. En consecuencia, los puntos están unidos al planteamiento de una epistemología matemática, en cuanto fundamenta la disciplina

---

[200] El uso de los puntos está muy relacionado con la teoría de la denotación expresada en las palabras siempre verdadero (*always true*) y algunas veces verdadero (*sometimes true*), el punto se establece como aquella instancia que separa al cuantificador de la proposición. Pág XX introducción PM.

[201] El uso del alcance o *scope* va unido a determinar el límite asertivo de una proposición, hecho que está muy unido a la noción de verdad y la introducción de la barra de Sheffer, como el nuevo operador lógico que va a permitir instaurar la nueva noción primitiva de p│q, p incompatible con q.

[202] Según muchos entendidos es en Frege donde la lógica experimenta un avance real frente a la lógica aristotélica, en *Begriffsschift* está presente esa ganancia y los deseos de él de construir una lógica fundamentada en una teoría del conocimiento que parte desde la naturaleza misma de los juicios.

como noción primitiva y, de manera análoga, desde la lógica remite a una hermenéutica, en la cual el punto es la instancia que sirve para determinar cómo los demás símbolos lógicos se han de relacionar entre sí.

3.2.1.2. Lo irreducible como concepto fundante de las matemáticas, las ciencias y las artes

Algo que es de suma importancia en relación con el punto (*σημεῖόν*), es su capacidad para señalar (*σημαίνω*); este hecho remite a lo que se podría denominar en propiedad, un punto direccionado o un punto vectorizado; es decir, el punto (*σημεῖόν*) no es una instancia sola y aislada de la realidad sino todo lo contrario; participa y es la instancia primigenia a partir de la cual se instaura una dirección (*σημαίνω*) y, por ende, unos rumbos que van a gobernar y darle forma a dicho universo (*οὐρανός*). Tal 'punto direccionado' (*σημεῖόν*) es muy cercano al cálculo diferencial, donde se tiene un punto que posee una dirección y que se desplaza a lo largo de una curva que permite apreciar la modificación de su rumbo. En este contexto, el punto representa la derivada de la pendiente de la línea tangente a una curva. Es decir, un punto direccionado implica su movilidad. A su vez, el definir el punto como lo que no tiene parte, se acerca a la noción de la mónada pitagórica (*μονάς*) en tanto es una unidad única y sola (*μόνος*). Sin embargo, la diferencia está en que la noción de punto, es propuesta como:

La proposición irreducible ṗ, que es introducida y definida de manera negativa ├. ~ ṗ, tal que lo que la define es no ser parte (*μέρος*) de aquello que la complementa o pertenece. En ese sentido, es la no-parte (*α-μέρος*) que es (*ἀμερής*) no dividible o es indivisible. Se está, entonces, frente a algo que no se opone al todo, en relación a la problemática del todo y la parte; aunque la sugiere, no la requiere para fundamentar su propia existencia. Este hecho hace que propimente la membresía del punto esté en relación con la familia de puntos, caracterizada por el importante hecho que la noción de elemento es coequivalente con la de conjunto: es un elemento que es conjunto de sí mismo, es un conjuto que es subconjunto de sí mismo. Esta formulación es muy cercana a la famosa paradoja de Russell[203] $\{x|x \notin x\}$, sin embargo, el punto no posee una externalidad en cuanto algo con lo cual relacionarse al mismo nivel predicativo, por tal motivo, no es impredicable y puede considerarse como el fundamento irreductible de lo que existe, tanto medible (*μετρία*) como teorizable. Podemos afirmar que esta primera definición euclidiana o pitagórica introduce de manera simultánea un método inferencial directo e indirecto: directo en cuanto se puede llegar al punto recorriendo todos los caminos de una teoría o de una medición, en $\vdash . \dot{p} \rightarrow \dot{p}$; a su vez, presupone el método inferencial indirecto en cuanto involucra la negación de la proposición misma $\dot{p}$ que se busca demostrar $\sim \dot{p}$, se niega $\dot{p}$ o sea $\sim\dot{p}$ para llegar a $\dot{p}$, $\vdash . \sim\dot{p} \rightarrow \dot{p}$. En ese sentido, se puede decir que es la mínima expresión posible de darse en ambos métodos inferenciales y el mínimo argumento posible a demostrar; es decir, el punto (*σημεῖόν*) como la no parte (*α-μέρος*), está expresado como una sentencia del cálculo de predicados: $\sigma = \sim\mu_\sigma$, donde el predicado 'ser parte' es μ y el término es punto σ, y es introducido como un predicado negativo. Lo que conduce a las siguientes expresiones lógicas:

*3.1 $\vdash . \dot{p} \rightarrow \dot{p}$

*3.2 $\vdash . \sim\dot{p} \rightarrow \dot{p}$

*3.3 $\vdash . \sigma = \sim\mu_\sigma$

En ese sentido, tal proposición pertenece a una nueva familia de proposiciones, y no es propiamente una proposición atómica ni molecular. Más aún, se plantea un tema de predicatividad, en cuanto tal punto es único aunque puede existir en variados objetos y entes tanto reales como matemáticos. Debe resaltarse, una vez más, que Pitagóras consideraba que los números existían en la realidad y son los que la originan. En consecuencia, el punto no es solo un ente geométrico sino también uno matemático y, por ende, uno ontológico concreto. Independiente de que se quiera contactar este estadio

[203] La paradoja de Russell fue descubierta en 1901, en ella se cuestiona la teoría estándar de conjuntos de Cantor, ya había sido descubierta más no publicada por Ernst Zermelo. Expresada como: sea $R = \{x / x \notin x\}$ luego $R \in R \leftrightarrow R \notin R$, sus implicaciones en la matemática están amplicamente analizadas en la obra *One Hundred Years of Russell´s Paradox*, en la pág. 221 y 349 por Editado por N. Griffin (2004), Walter de Gruyter.

mínimo e irreducible, se debe reconocer que no es sobrepasable: el punto (*σημεῖόν*) es como una constante universal absoluta, tal como en la física actual lo es la velocidad de la luz, o el cero absoluto de las bajas temperaturas; constantes que no son franqueables en relación con algo ulterior más básico que las anteceda. Es notable que el punto conduzca a una metría (*μετρία*), sin embargo, su uso no se detiene ahí, y se extiende en todos los confines posibles del pensamiento y del conocimiento.

3.2.1.3. El punto como fundamento de toda métrica

El punto (*σημεῖόν*) se viene a constituir en aquella instancia fundante e inaprehensible; es el lugar desde el cual se establece el origen o lugar de partida de toda relación o función, en cuanto es capaz de servir de fundamento al primer elemento de toda pareja ordenada (a, b). Este hecho tiene un valor enorme, dado que plantea que el orden del primer elemento es de otro orden en relación al segundo, que será explicitado en la definición de línea (*γραμμή*). El orden de este primer elemento no es rebasable y, en ese sentido, representa un límite que es convergente de manera absoluta, en cuanto no existe nada anterior al mismo punto; en cuanto instancia constitutiva fundante de la realidad matemática, nada lo antecede debido a que es indivisible. En relación con una función, permite verla aproximada a fin de que tenga un valor en cuanto secuencia, determina a la métrica que permite la conceptualización y, por ende, la construcción de los números desde cualquier geometría; recrea una axiomatización geométrica del número y de los distintos conjuntos numéricos conocidos y por conocer. Este hecho tiene unas consecuencias mayores y explica la dificultad que tuvieron los griegos en conceptualizar al cero como número. Sin embargo, es posible asemejar al punto desde una perspectiva métrica con el número cero. El punto (*σημεῖόν*) es algo, es una parte (*μέρος*) indivisible (*ἀμερής*). Para los griegos, lo más indefinible es el punto: ‘es’ (*σημεῖόν ἐστιν*), simplemente. La nada es un concepto ajeno a su pensamiento, es decir, está afectado por la existencia; por tal motivo, es predicado por el verbo ser y existir (*εἰμί*). De igual manera, (*οὗ μέρος οὐθέν*), es lo (*οὗ*) que no es parte de nada ni nadie (*οὐδείς*). En ese sentido, se tiene una definición que se asemeja a una sucesión de negaciones vinculada a esa única instancia puntual: en cuanto se tiene la negación (*οὐ*) unida a una conjunción (*δέ*) en relación a aquello que es uno (*εἷς*) y que de alguna manera está dentro (*είς*), en relación a un acusativo con un verbo transitivo que permite el ejercicio de un complemento directo: el punto es lo que está dentro (*είς*) y es uno (*εἷς*).

Tal riqueza del idioma griego antiguo para abordar la negación de una oración o proposición es enorme; *oudeís* (*οὐδείς*) podría simbolizarse a nivel matemático como, aquella unión sucesiva de la conectiva lógica binaria de la conjunción, que teniendo por dominio al punto tiene como codominio o destino a la línea: $\bigcup_{\sigma}^{\gamma} \Lambda$, o sea $f(\wedge)\colon \bigcup \sigma \rightarrow \bigcup \gamma$. A su vez, esta definición está dada de manera negativa, pues no se define al punto por una propiedada construida de manera positiva. Debido a que tal procedimiento sería más complejo hacerlo, ya que toda definición positiva al igual que el método de demostración inferencial directo involucra que se debe poder plantear y exponer todos los argumentos que constituyen a la misma definición (*dēfīnītiō*). Un punto (*σημεῖόν*) vendría a ser el *definiendum* y demandaría exponer las características que lo definen o *differentiae* constituyentes del *definiens*. Al no disponer de los predicados que permiten revelar lo que es el punto, no queda otro recurso que anotar alguna característica que no tiene; es decir, recurrir al método de demostración indirecto o reducción al absurdo. Sin embargo, este método no obliga a que la predicación negativa que se proponga sea la única posible; se pueden agregar otros *praedicatum* de aquello que es decible acerca de un sujeto, en este caso del punto (*σημεῖόν*), en cuanto lo dicho y proclamado (*praedicō*) acerca de este, aquello dicho (*dicō*) ante (*prae-*) los demás. La noción de punto como el fundamento de toda métrica[204], hace que sea la pieza angular por medio de la cual se construye toda la topología (de tópos *τόπος*, lugar y logos, *λόγος*, *estudio*), que concierne al estudio del espacio y todas las propiedades que este posee. El punto se toma en cuenta en la construcción de los espacios métricos (M, d), los cuales están fundamentados en la noción de la distancia en una pareja ordenada de puntos $d(x, y) = |y - x|$. El caso más generalizado tiene que ver con la noción de un espacio euclidiano interpretado bajo las coordenadas cartesianas sobre rectas reales.

[204] La noción de métrica proviene del griego metrón *μέτρον*, que significa medida entendida también como norma o parámetro normativo. Es de entenderse: “que siendo Ω la estructura topológica en un conjunto X, (Ω, X) representa a un espacio topológico, cuyos elementos son puntos” pág 26, *Elementary Topology*, Viro.

3.2.1.4. La noción de punto en relación al conjunto vacío

Un tema fundamental tanto en la geometría como en la aritmética y, por ende, en todas las matemáticas, son las nociones y los conceptos fundacionales de estas disciplinas. Es la noción de punto (*σημεῖόν*) la base sobre la cual se construye toda la geometría y a partir de la cual se derivan las demás nociones primitivas. En la denominada teoría de conjuntos, cuyo fundador a mediados del siglo XIX fue Georg Cantor el conjunto, *Die Menge*[205], significa cantidad, vocablo que está en plena sincronía con el punto como fundamento de toda métrica (*μετρία*), que permite establecer mediciones. De manera que en la base de toda medición (*μέτρημα*), de lo que se está midiendo (*μετρέω*), está el punto (*σημεῖόν*). Este asunto se concecta con aquel problema general para todas las matemáticas, que está en disponer de un método general capaz de formalizar una teoría estándar capaz de demostrar los distintos teoremas y axiomas propios de la esta disciplina, arte y técnica. En ese contexto, se circunscribe la urgencia de un método que sirva de soporte a toda medida (*μέτρον*); la teoría de conjuntos se va a ocupar de suministrar tal base capaz de garantizar que todo cálculo o medición efectuado sea legítimo. El conjunto vacío usualmente se representa como { }. André Weil[206], del grupo Bourbaki, introdujo en 1939 la notación Ø; lo importante de su mención aquí, es resaltar que la cardinalidad del conjunto vacío es cero, teniendo como medida el cero. Con lo cual, existe una extrecha relación entre la noción de vacío y la del cero, debido a que representan el mismo concepto desde dos teorías distintas, la una en relación a la teoría de conjuntos y la otra en relación a la teoría de los números. En este sentido, la noción de punto representa el mismo concepto desde una teoría métrica,

---

[205] Tema expuesto por Georg Cantor (1895) en *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, donde el agregado o conjunto (*die Menge*) es entendido como cualquier colección que se constituye en un todo (*Zusammenfassung zu einer Ganzen*). Se simboliza al conjunto como M como una colección de objetos separados y definidos m de nuestra intuición o de nuestro pensamiento (pág. 85).

[206] El seudónimo de Bourbaki, se refiere al grupo de matemáticos franceses formado por André Weil en 1934, que ejerció una enorme influencia en el estudio de los fundamentos de las matemáticas, asimismo en campos como: la teoría de conjuntos, álgebra, topología y cálculo entre otros. Dicho grupo funcionó con el nombre de Asociación de colaboradores de Nicólas Bourbaki (*Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki*), tuvo una oficina en la Escuela Normal Superior de París (*École Normale Supérieure á Paris*). Pertenecieron al grupo: André Weil, Charles Ehresmann, Henry Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, más tarde se le unierón: Laurent Schwarz, Jean-Pierre Serre, Samuel Eilenberg y Alexander Grothendieck, entre otros. Su influencia es estudiada por el profesor emérito de la escuela de matemáticas, del Instituto de Altos Estudios de Princeton, Armand Borel en: *Twenty Five Years with Nicolas Bourbaki, 1949 – 1973*. AMS, March 1998.

aunque la estrategia que utiliza Euclides o Pitágoras es definir la piedra angular de la métrica que es el punto, desde la problemática del todo y la parte. La razón de ello puede gravitar en la necesidad de la noción de completitud que requiere toda métrica, como aquel parámetro confiable que nos permite la construcción de los entes matemáticos tanto a nivel interno como externo. El desplazamiento hacia dentro, hacia el punto, que no es susceptible de ulteriores divisiones, o moverse hacia fuera, en ambos casos, tal desplazamiento se puede dar en una línea en concordancia con la conveniencia de la función o transformación de la que uno ocupa, la cual está gobernada por la posición relativa de la pareja ordenada de puntos que la definen.

3.2.1.5. El punto como el número cero

De manera que el cero es el punto abordado como número y, a su vez, el conjunto vacío es el punto tomado y nombrado como aquel ente que es el universal que acompaña a todos. Es decir, siempre es posible presuponer la existencia del punto en cualquier planteamiento que se haga, bien sea en el momento en que se necesita efectuar una medición o establecer una métrica, se hace indispensable fijar un origen o punto de partida. A su vez, este es asimilable a una cardinalidad cero, y está vacía. En la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel el axioma del cero es planteado como: existe un conjunto tal que ningún conjunto es miembro de él: $\exists x \forall y \sim (y \in X)$[207]. Hay que advertir que la definición euclidiana de punto se hace negando una característica positiva (*οὗ μέρος οὐθέν*), en la que se niega de manera reiterativa el hecho que un ente tenga alguna parte de sí mismo. En la teoría estándar de conjuntos, el pronombre *oudeís* (*οὐδείς*) que significa nada, ninguno, cumple las funciones de un cuantificador existencial negado $\sim \exists$ de manera universal $\forall$.

Dentro de un contexto más amplio, el cero es un concepto difícil de definir y supremamente complejo. En propiedad, el cero no es un número en el sentido usual del término, en cuanto a que su cardinalidad y ordinalidad que es cero, no se presta a las sutilezas propias de los demás números, ni nos aporta una mejor comprensión de este

[207] La teoría de conjuntos más conocida es la de ZFC, que es la teoría Zermelo-Fraenkel más el axioma de escogencia o *choice axiom*. Hay otras teorías de conjuntos, como von Newmann-Bernays-Gödel y la de Tarski-Grothendieck, aspectos analizados por Tony Lian (2011) en *Fundamentals of Zermelo-Fraenkel Set Theory*, University of Chicago, pág. 1.

fantástico y misterioso número. Se puede afirmar que el cero está presente en cualquier expresión o cifra numérica; en las operaciones fundamentales del álgebra no se ve afectado tanto por la suma como por la resta: x + 0 = x, x – 0 = 0. Sin embargo, no sucede lo mismo con la multiplicación: x · 0 = 0, y la división de una expresión por cero no está definida: x/0 = nd. En especial, debido a que el 0 no posee un inverso multiplicativo: no existe un número real que multiplicado por 0 nos dé 1. A su vez 0/x = 0, para un x ≠ 0, no resuelve para nada el problema. Se afirma, en consecuencia, que todavía no se sabe a ciencia cierta, qué es el cero. No obstante, afirmar que el punto (*σημεῖόν*), es lo (*οὗ*) que carece por completo (*οὐδείς*) de parte (*μέρος*), acerca a algunas propiedades numéricas del mismo: en cuanto el cero no se tiene cantidad alguna o sea no tiene parte alguna que lo constituya. Pero tal afirmación esconde algo más de fondo, dado que la parte es parte (*μέρος*) por su relación y membresía con el todo (*ὅλος*), de lo contrario no sería posible hablar ni del uno ni del otro. De igual manera, el vocablo (*οὐδείς*) por medio del cual se define al cero (*σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*), involucra una negación (*οὐ*) capaz de conectar varios agregados por medio de la conjunción (*δέ*) de aquello que es uno (*εἷς*): lo que involucra que *oudeís* (*οὐδείς*), afirma que no existe un uno que cumpla con la condición. Lo que hace que el cero y/o el punto (*σημεῖόν*) en este contexto están mirándose y fundamentándose en relación al uno (*εἷς*), como aquellas propiedades contrarias al mismo; mas no se las está conceptualizando, dado que no se toma en cuenta al uno, sea por que no es posible o fácil hacerlo. Pareciera que el cero es, por decirlo así, lo contrario al uno: es lo que no es uno, más es un uno. Lo que implica a que el cero posee una integridad y completitud, tal como se dice, no es parte o no posee partes (*μέρος*). Es como que el cero evocara un estado donde existe una ausencia completa de partes, mientras el uno evoca un estado de presencia completa de las partes. Se aprecia al cero como que fuera el simétrico negativo del uno, y el uno fuera el simétrico positivo del cero. El cero es asimétrico negativo a la izquierda, aspecto evocado más en las distribuciones estadísticas, mientras que el uno posee una asimetría positiva a la derecha.

Lo que se afirma aquí, entre otras cosas, es que la completitud del cero es absoluta, a tal punto que es imposible dividirlo, partirlo o escidirlo. El cero es pleno y posee una unidad y unicidad consigo mismo: es como si contuviera en sí mismo aquello que le falta, que está ausente, que no es más que la completetitud del uno. Tal aspecto está en plena sincronía con el pensamiento griego, para el cual lo que no es, la nada, es sencillamente imposible que exista; aún en lo que parece no tener parte alguna que lo constituya, se ve habitado plenamente por lo que está completo en sí mismo. Con lo cual, el cero, más se asemejaría al *kenós* (*κενός*), aquello que está vacío, fruto de un verse vaciado (*κενόω*). Representa aquella vacuidad (*κενότης*), hecho que contrasta con el texto euclidiano-pitagórico, en cuanto la acción por medio de la cual se atraviesa aguijoneando el centro de un círculo es (*κεντέω*) a su vez el punto central del círculo (*κέντρον*) (Libro 1, 16). Esto nos revela a que el punto tiene una dirección, y por ende el cero mantiene una relación o está comunicado con su vecindad o posee una vecindad. De manera que la nada, considerada como aquello carente de cualquier tipo de cantidad, cualidad y relación, es un concepto inequívoco que no conduce a nada. El cero se asemeja a este punto que puede hacerse presente sucesivamente en las distintas figuras (*σχῆμα*), en este caso asociadas a unas métricas (*μετρία*) capaces de medir (*μετρέω*): un primer punto (*σημεῖόν*) o cero, es aquel que subsiste en el comienzo de la formulación; un segundo punto, *kentrón* (*κέντρον*), es aquel que surge en relación al círculo (*κύκλος*). De manera que se pueden constituir diversos ceros o instancias fundantes para una metría (*μετρία*), algo que anticipa y prefigura la teoría de los tipos lógicos de Bertrand Russell[208], la teoría matemática de categorías y los diversos metalenguajes formales. En ellos, un concepto como el cero, es recreado sucesivamente en la medida que se lo requiera, lo cual permite matizarlo y enriquecerlo a fin de que pueda ser garante de la fundamentación formal en la que está involucrado. La misma definición euclidiana de punto como aquello que carece de parte, ha conducido a una complejidad enorme en su misma formulación, hecho que es estudiado por Giangiacomo Gerla[209], quien manifiesta que el punto es la noción primitiva más importante

---

[208] La teoría de los Tipos Lógicos de Bertrand Russell, *Theory of Types*, AMS julio 1908, es una de las más importantes teorías desarrolladas en las matemáticas, permite tratar las proposiciones a nivel de un orden jerárquico dependiente de la fuerza de su cuantificación; asimismo, sus constituyentes pueden ser tratados a este nivel, lo que lleva a que podamos introducir un mismo concepto bajo unos órdenes conceptuales distintos. Esta teoría está presente en el desarrollo de Cálculo Lambda de Alonzo Church y ha incidido en el desarrollo de los lenguajes que se utilizan en la inteligencia artificial y en las ciencias de la computación.

[209] Tema tratado por Giangiacomo Gerda (1995), en *Las geometrías sin puntos* (*Pointless Geometries*, Ed. Buekenhout, Paris; donde se analiza el problema desde la geometría de Lobachevski y las tentativas por

en la fundamentación axiomática de la geometría. En las geometrías sin puntos la noción de región se constituye en el individual que viene a reemplazar este importante concepto; asimismo, remite al concepto de región en la geometría continua de von Neumann[210]. El concepto de región en estas topologías sin puntos conlleva enormes implicaciones teóricas a nivel matemático. En general, el concepto que está en el fondo de estas topologías es el de ‘sitio’, aunque no se lo defina y lo reconozca del todo. Se lo aborda más como un marco o estructura abstracta algebraica que nos lleva al concepto de retículo, como una pareja parcialmente ordenada con un supremo y un ínfimo.

3.2.1.6. El problema del todo y la parte viene a ser asumido en la teoría de conjuntos

Un tema presente desde el mismo inicio del presente análisis, es la problemática del todo y la parte (*ὅλος*, *μέρος*), mencionado en la primera definición de punto (*σημεῖόν*). Sin embargo, en la definición de punto se menciona únicamente a la parte (*μέρος*) y no al todo. Tal hecho puede obedecer a que podría llevar al complejo asunto del punto en relación con el todo, o como en un punto está representado y presente el todo, se es parte (*μέρος*) en relación a un todo (*ὅλος*). No obstante, tales vocablos representan unas generalizaciones universales comunes a todo ente (*ēns*, *ὤν*); en tal sentido, son predicables para todo y situables aún a nivel de un metalenguaje. Se puede afirmar que la parte presupone al todo y el todo presupone a la parte. Aunque, como es harto complejo definir cuántas y cuáles son

---

definir al punto como una noción lógica abstracta por parte de Alfred N. Whitehead, como también su tentativa de construir una geometría sin puntos. (pág. 1017).

[210] Este tema es tratado por Garrett Birkhoff (1958) en *Von Neumann and Lattice Theory*, donde se abordan las geometrías continuas y los anillos regulares. Se puede construir una geometría de dimensión proyectiva continua CG(F) sobre un anillo F de dimensión arbitraria: para cualquier n, los subespacios de 2n para espacios vectoriales sobre F para en $(2^n – 1)$ en una geometría de dimensión proyectiva PG $(F, 2^n – 1)$. En los mismos se preserva la dimensión normalizada $\delta[x] = (\delta[x] - \delta[0] / \delta[I]-\delta[0])$, donde I es todo el espacio. Ambos son espacios métricos bajo la función distancia $|x - y| = \delta[x \cup y] - \delta[x \cap y]$. Se tiene en cuenta que tanto la unión $\cup$ como la intersección $\cap$ son continuas en esta topología. El espacio está complementado por una retículo (lattice) que es irreducible y tiene por dimensión la función $\delta[x]$ que es continua entre $0 = \delta[0]$ y $1 = \delta[1]$ (pág. 50-51). Sin embargo, el problema del punto no se resuelve en este contexto, dado que se acude a conceptos como la métrica que involucra una distancia en un contexto donde el punto no posee dimensión y por consiguiente no acepta la noción de distancia. En este contexto, se ve la urgencia de ampliar la teoría matemática, en especial la geometría de manera operativa sin tocar el problema de los conceptos puros. Se podría afirmar, que la solución matemática del punto reclama unas herramientas matemáticas que todavía no han sido inventadas, en especial dado que la matemática actual adolece de una adecuada ontología y epistemología, asimismo no tenemos una hermenéutica y una fenomenología de las matemáticas asumidas en lenguaje matemático que le permita configurar sus teorías mejor a nivel conceptual y axiomático.

las partes (*τό μέρος*) de un todo (*ὁ ὅλος*) en cantidad y cualidad, no queda otro recurso que afirmar que el todo presupone e implica a la parte, y viceversa, se lo simboliza a un nivel semántico como *ὅλος* ⊣ ⊢ *μέρος*, y a un nivel sintáctico como *ὅλος* ⫤ ⊨ *μέρος.* O aún a nivel proposicional como: *ὅλος* ↔ *μέρος*. Pero tal situación, no dice nada de lo que está en medio; a su vez, el todo puede definirse de manera negativa como (*ὁ ὅλος ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*). Así, el todo es el que carece de parte, o sea su integridad es única e indivisa. En ese sentido, tanto el todo como la parte tienen algo de indiviso, cada uno mantiene y afirma su unicidad desde dos perspectivas distintas, sea como el máximo (*maximum*) y el mínimo (*minimum*) de una realidad modelada sea bajo una representación métrica, o una conjuntual, o una numérica u otra diferente.

El estudio del todo se aborda en relación a las totalidades particulares, donde todo ente puede ser asimilado a una totalidad singular; el tema se vuelve muy complejo, cuando se aborda la noción de totalidad como un universal absoluto, dado que se vuelve impredicable. Esta noción de totalidad individualizable, como una particularidad completa, ha posibilitado su simbolización dentro de la teoría conjuntos. Tal modelaje de todo ente, permite que sea asimilable a ser parte o a ser el propio conjunto, presenta cierta complejidad cuando sus miembros o partes buscan ser definidas no solo extensiva sino intensivamente, en cantidad y en cualidad. Se puede afirmar de manera inequívoca que la noción de parte (*μέρος*) representa en la teoría estándar de conjuntos a la noción de elemento, y la noción de totalidad (*ὅλος*) representa a la noción de conjunto. Teniendo en cuenta que el elemento es asimilable a la noción de punto (*σημεῖόν*), en especial, en relación a cualquier métrica (*μετρία*). Tal inspiración recoge la aprehensibidad del elemento y la inaprehensividad de la totalidad, el uno es simbolizable como un ente concreto (*ēns*), mientras el otro, el todo, no siempre es un ente; y, en muchos casos, representa una totalidad carente de una frontera y, por consiguiente, ajena a que pueda disfrutar de una unidad completa consigo misma. Tal hecho es evidente cuando se involucra la noción de infinito dentro de un conjunto y se afirma que tal conjunto está conformado por una infinitud de elementos. Esta afirmación rompe con la noción de unicidad del mismo todo, donde no es nada fácil aportar los argumentos para garantizar la integridad de las partes de ese todo, más cuando estas partes son tantas que es imposible establecer una predicación sobre las mismas, y del todo como aquella instancia que las reúne.

La membresía a una clase es asimilable a una totalidad o realidad constituida por unas partes, o a unos puntos no reducibles a unas partes más pequeñas. No obstante, en la definición de punto, no se menciona el todo, con lo cual, es un elemento donde su membresía se deja abierta, pudiendo satisfacer varias clases y no una sola. En ese sentido, es interpretable en distintos contextos muy variados pero todos cercanos entre si. Es de descatarse ese deseo, necesidad y búsqueda por una instancia que no sea susceptible de un ulterior afinamiento, que no permita partirla o dividirla en partes más pequeñas. Tal motivación subsiste aún hoy día. El problema del todo y la parte fue estudiado por Edmund Husserl, filósofo y matemático, alumno de Karl Weierstrass y Leopold Kronecker; Husserl obtuvo su doctorado en matemáticas con la disertación: *Contribuciones al cálculo de variaciones* (*Beiträge zur Variationsrechnung*), bajo la dirección de Leo Königsberger. En su obra acerca de la filosofía de la aritmética (*Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische untersuchungen*), Husserl estudia de cerca del problema del todo y la parte, el cual es finalmente analizado en detalle en su tercera Investigación Lógica "*Acerca de la teoría de los todos y la partes*"[211]. Comienza la mencionada investigación resaltando la diferencia entre objetos abstractos y concretos a fin de adentrarse en una teoría pura a priori de los objetos como ideas que pertenecen a la categoría de objetos: tal como el todo y la parte, el sujeto y la cualidad, el individuo y la especie, la relación y la colección. Se resalta así que existe una división entre objetos que tienen partes y aquellos que no las tienen, los primeros son llamados complejos y los segundos simples.

[211] Se puede apreciar el problema del todo y la parte en: *Investigation III, On the Theory of Wholes and Parts*, en *The Shorter Logical Invetigations* por Edmund Husserl, Routledge (pág. 163). Es bastante interesante el tratamiento que realiza Husserl acerca del problema del todo y la parte, debido a que fue matemático y mantuvo una estrecha comunicación con los matemáticos más famosos de la época. En la citada investigación analiza de cerca el trabajo del filósofo Carl Stumpf (1848-1936), quien elaboró una tesis doctoral acerca de *Los principios de las matemáticas* (*Über die Grundsätze der Mathematik*) bajo la dirección de Hermann Lotze. Se resalta el tratamiento lógico que le da al problema del todo y la parte, donde se enfatiza la necesidad de distinguir entre objetos dependientes e independientes, estos últimos se constituyen en contenidos que muestran una inseparabilidad en su formulación, como momentos constitutivos que no pueden ser rotos de un todo indiferenciado. Al final, el problema busca ser tratado en términos lógicos dentro de un cálculo de relaciones.

3.2.1.7. El punto como aproximación al infinito

El infinito es planteado por los griegos como *aperion* (*ἄπειρον*), como aquello que no (*ἀ*) tiene límites, algo que no es experimentable o juzgable (*πεῖρα*). De esta manera se tiene el *aperios* (*ἄπειρος*): lo ilimitado, lo infinito, inmenso, innumerable y lo inextrincable; asimismo, denota al ignorante, al inexperto y al desconocedor. Es importante notar cómo, de nuevo, en la definición de infinito se utiliza un camino indirecto, más cercano a la estrategia que se utiliza en la demostración lógica por reducción al absurdo, donde se niega la proposición que se quiere demostrar: en este caso se está negando (*ἀ*-) la prueba, el ensayo, la experiencia, el proyecto (*πεῖρα*), dado que no es nada fácil llegar a definirlo por la vía positiva, directa, donde se tiene claridad de los argumentos constitutivos del *definiendum* que le aportan el significado al *definiens*. Se percibe las dos clases de puntos hasta ahora expuestos: *sēmeîon* (*σημεῖόν*) y *kéntron* (*κέντρον*), que también significa aguijón, pincho o punta de lanza. El primero está relacionado con la marca o el signo, *sêma* (*σῆμα*); mientras el segundo nos remite a *kentéō* (*κεντέω*), aquello que es atravesado, pinchado, aguijoneado, clavado. El primero nos relaciona con la primera expresión o huella que aparece, fundamentalmente proveniente de los dioses; mientras el segundo, nos remite a que tan solo ese centro puede ser atravesado, fruto de una acción que lo hiere o pincha.

Es de destacar que en la teoría de conjuntos propuesta por Georg Cantor en los artículos: *Sobre el infinito, los puntos que se presentan en un intervalo lineal*[212] (1879) y en las *Contribuciones a la fundación de los números transfinitos*[213], Cantor utiliza al punto como una de las nociones primitivas fundamentales de la matemática para hablar del infinito, tanto a nivel aritmético como geométrico. En especial, hay que destacar, cómo se utiliza también el vocablo *die Menge*, que significa cantidad. De manera que el punto también viene a remitir a la cantidad básica, indivisa y completa, el uno (*εἶς*), como aquello

[212] En 1879 Cantor publica en los *Mathematische Annalen* Vol 16: *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, donde analiza el problema de la continuidad sobre los puntos tanto finitos como infinitos situados sobre una recta, tema que lo lleva a vincularlos con los números irracionales.

[213] En 1895 Cantor publica el libro: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, donde de manera magistral comienza a exponer su teoría de los números transfinitos, en especial, como el número transfinito $\aleph_0$ es el más pequeño de todos los conjuntos infinitos y corresponde a la cardinalidad infinita del conjunto de los números naturales. A su vez $\aleph_1$ corresponde a la cardinalidad de los números reales. Una manera de abordar la hipótesis del continuum, es que no existen números cardinales intermedios entre los dos aleph, $\aleph_0$ y $\aleph_1$.

que representa una totalidad (*ὅλος*) que está presente en el transfondo del pronombre *oudeís* (*οὐδείς*). No obstante, dado la dificultad de efectuar una predicación acerca de la totalidad, la estrategia de los antiguos es abordarla a través de una predicación acerca de la parte (*μέρος*). En especial, se destaca cómo el punto (*σημεῖόν*) es el fundamento de la metría (*μετρία*) o del arte de medir y, por ende, de contar. A su vez, la segunda aserción de punto (*κέντρον*), está relacionada con la noción de una figura (*σχῆμα*), propiamente el círculo (*κύκλος*). Hay una aproximación a él utilizando una línea (*γραμμή*), y la tarea que esta tiene es de poderlo atravesar (*κεντέω*). No se debe olvidar que este vocablo remite a lo que está vacío (*κενός*), a la vacuidad (*κενότης*) propia del centro: como aquel lugar que aunque existe, es muy difícil que pueda ser aprehendido y que posee un estatuto existencial distinto y aunque sepamos que está situado allí. El punto (*σημεῖόν, κέντρον*), al no tener parte alguna (*οὗ μέρος οὐθέν*), requiere que para aproximarse a su no-espacialidad hay que hacerlo por medio de la noción de vecindad. Así, se llega a afirmar que dentro de tal entorno está situado su centro. Propiamente, se dice que caemos (*προσπίτνω*) en la vecindad del centro, una manera de decir que nos aproximamos al mismo (*προσέρχομαι*): vocablo que reúne la proposición, hacia o en la dirección de, prós (*πρός*) y al verbo venir e ir (*ἔρχομαι*). Lo que evidencia que existe un cambio de estado en la espacialidad o topos (*τόπος*), que el espacio que rodea al centro o al punto, es distinto de aquello de todo aquello que lo circunda.

Destacamos cómo Euclides, Pitágoras, y el propio Cantor, mencionan que lo infinito (*ἄπειρον*) posee una característica afín al punto (*σημεῖόν*), que no posee parte (*μέρος*); a su vez, el punto (*κέντρον*) como centro del círculo (*κύκλος*), conlleva la acción de caer hacia él mismo (*προσπίτνω*) y debe de ser atravesado (*κεντέω*). La naturaleza indivisa del punto, como un uno (*εἷς*), que es una totalidad (*ὅλος*), ya está presente como fundamento de la metafísica de Pitágoras y como el origen de todo lo que existe. Este tema presenta toda una complejidad, dado que no existe métrica (*μετρία*) ni procedimiento capaz de medir (*μετρέω*) lo que es el infinito (*ἄπειρος*). De ahí también el uso de un procedimiento bastante problemático, que es introducir en lo uno (*εἷς*) y la unidad (*μονάς*) que está sola y es única (*μόνος*), un tipo de inserción que de alguna manera es artificial o contraria a la naturaleza del objeto que se está dividiendo o seccionando. Parece que la hipótesis matemática del continuo desde su mismo origen estuviera condenada a un fracaso por la manera en que es abordada, ya que involucra introducir una serie de unidades en medio de la unidad indivisa. Este hecho es realizado bajo la creación de los números reales. La famosa hipotésis del continuo proviene de Georg Cantor, quien afirmó: *No existe un conjunto cuya cardinalidad esté situada entre los números enteros y los reales*[214]. Esta hipótesis puede ser simbolizada como: $\aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0}$. El problema del continuo[215], es uno de los 23 problemas que David Hilbert presentó en el famoso Congreso Internacional de Matemáticas que tuvo lugar en París en 1900[216], y que influenciaron el desarrollo de las matemáticas durante el siglo XX. La problemática del continuo involucra introducir una métrica (*μετρία*) que no es viable, debido a que por definición, se está frente a algo que no es susceptible de ser medido (*μετρέω*) ni contado (*ἀριθμέω*) ni cortado o dividido (*τέμνω*).

3.2.1.8. El *topos* del punto presupone la noción de vecindad y límite de una función

Un tema que es de suma importancia se aprecia en la definición (libro 1,16), en la que se utiliza el verbo *prospítno* (*προσπίτνω*) que significa caer sobre o hacia el punto (*κέντρον*). Aquel que está situado en medio y en el centro del círculo (*κύκλος*), el que debe ser atravesado (*κεντέω*) por una línea (*γραμμή*) o varias líneas rectas (*εὐθύς*). De manera que existe un espacio (*τόπος*) dentro de los confines de toda figura (*σχῆμα*) que presenta una textura distinta a aquel que rodea al punto (*κέντρον*), que funge como aquel centro

---

[214] La hipótesis del continuo, *The Continuum Hypothesis*, es un artículo escrito por el profesor de lógica matemática de Harvard Peter Koellner, comienza analizando este problema que presenta una independencia frente a la teoría de conjuntos ZFC. Menciona cómo Gödel lo probó de manera exitosa para los cardinales, de igual manera Shelah (1978) demostró que $\aleph_\omega$ es un límite cardinal fuerte para que se cumpla $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$, que no la hace restringirse frente a ZFC.

[215] No obstante la hipótesis del continuo sigue presentando algunos inconvenientes, tal como el importante matemático Solomon Feferman (2011-2) lo recalca en su artículo: *Is the Continuum Hypothesis a Definite Mathematical Problem?* Parte del problema nos remite a la misma definición de punto en Euclides, que hace que sea muy difícil establecer una biyección entre un número $\aleph_0$ y la recta real. Este problema fue detectado por Gödel (1947). Aunque Feferman manifiesta que tal formulación es vaga, acude a un tratamiento lógico que no resuelve para nada el problema.

[216] Cabe destacar en el libro de J. Carlson, A. Jaffre, A. Wiles (2006): *The Milennium Prize Problems*, que hace alusión a los más grandes y todavía no resueltos problemas que quedan de Hilbert, la hipótesis de Riemann sobre la distribución de los ceros de la función zeta $\zeta =: \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$, es una serie absolutamente convergente sobre los complejos; donde todos los ceros no triviales deben estar en el intervalo $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$. Enrico Bombieri (2006), pág. 100-123 analiza cómo dicha hipótesis sigue siendo uno de los problemas abiertos más importantes de las matemáticas, en especial, debido a que trae grandes repercusiones a la distribución de los números primos. Se manifiesta que faltan los adecuados modelos algebraicos y geométricos para tratar el problema e incentivar que surjan nuevas ideas.

balanceado e igual (*ἰσάζω*) a todos los lados de una circunferencia (*περιφέρεια*). En ese sentido, uno de los más importantes usos de este centro es: se cae hacia él (*προσπίτνω*), ese desplome hacia lo que es lo vacío (*κενός*), hacia una vacuidad (*κενότης*) en la que se encamina uno hacia (*πρός*) dentro de una doble dirección de un ir y venir (*ἔρχομαι*). Se está frente a esa actividad en la que se adentra uno dentro de algo, ya sea para salir del mismo o para llegar, *prosérkhoma* (*προσέρχομαι*). Indudablemente, este contexto remite a la noción moderna de límite, a la que uno se aproxima por medio de la función n al propio límite L: $\lim_{x \to c} f(x) = L$; se podría afirmar que el verbo *prospítno* (*προσπίτνω*) equivale a esta función o transformación f(π) que hace que uno se vaya aproximando desde distintas distancias o metrías (*μετρία*) al punto (*σημεῖον*). Pareciera que el punto céntrico del círculo (*κέντρον*) guardara en su interior al mismo punto (*σημεῖον*), que no es otra instancia que el propio cero: aquel infinito (*ἄπειρος*) que no se puede experimentar, ilimitado e indiviso o sea el uno (*εἷς*) que en concordancia con Pitágoras es lo infinito (*ἄπειρον*), aquel que no (*ἀ*) tiene límite o final (*πέρας*). La misma noción de límite (lim) viene sugerida por el vocablo *péras* (*πέρας*), la función que cae hacia f(π) está situada dentro del intervalo (L – ε, L + ε)[217], a condición que se cumpla (f(π) – L) < ε. Esto hace que lo que se está aconteciendo dentro de ese umbral inexpugnable es en relación a cualquier valor x que pueda asumir la función f(x) equiparada aquí con f(π). Se tiene que ese centro (c) asimilable a ese (*κέντρον*) o centro (κ) para un valor delta δ los valores oscilan entre (c – δ, c) o (c, c + δ). En relación a nuestra nomenclatura la vecindad estaría dada por: (κ – δ, κ) o (κ, κ + δ), simpre que se cumple la condición 0 < |x − c| < δ, o en nuestros propios términos 0 < |π − κ| < δ, cumpliéndose la condición que x ≠ c, o que π ≠ κ, que nos muestra que la textura de la topología varía entre aquella propia de la vecindad (dinámica entre epsilón ε con delta δ) con el propio centro o punto (*κέντρον*) cuyo valor es cero[218].

---

[217] El uso de la epsilon-delta ε-δ fue introducido inicialmente por Augustin-Louis Cauchy en su curso de análisis, pero tan solo fue formalizada por Bernard Bolzano en 1817 y finalmente llevada a su forma actual por Karl Weierstrass, tal como lo comenta J. Grabiner en *Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus*.

[218] Uno de los más grandes retos que ha tenido la matemática desde tiempos inmemoriales ha sido la aproximación al cero, pareciera que fuera un lugar casi inaccesible y mítico. El cero está muy unido a la noción de infinito, tal como puede ser apreciado en las conclusiones a que llega Jerome Keisler en su texto *Quantifiers in Limits*, donde además de afirmar la necesidad de la proposición $\forall x \exists y \forall z\ [y \leq z \rightarrow x \leq F(z)]$, para que tenga sentido $\lim_{z \to \infty} F(z) = \infty$, expresión que nos muestra que la vecindad del cero no se alcanza.

En consecuencia, la noción moderna de límite ya está sugerida y de alguna manera manejada, aunque no sea a un nivel simbólico como el nuestro en el libro 1 de Euclides atribuido al propio Pitágoras. El cero que es el punto (*σημεῖον*, *κέντρον*), es una totalidad (*ὅλος*) carente (*οὐδείς*) de parte (*μέρος*), es aquella unidad (*μονάς*) única (*μόνος*) e indivisa fundamento de toda métrica (*μετρία*), sea geométrica o numérica en cuanto cardinalidad. Lo paradojal es que el fundamento de todo acto de medir (*μετρέω*) y cuantificar por cantidad o cualidad, es en sí mismo desconocido y inexperimentable (*ἄπειρος*): es lo uno (*εἷς*), lo que no tiene parte. Esto lleva a considerar que el uno (*εἷς*), en este contexto, posee cierta similitud o guarda un isomorfismo con el cero o el punto (*σημεῖόν*). En la aproximación a la noción primitiva de punto, como aquello que no tiene parte alguna, involucra la definición de un individual, tal como está sugerido por Russell en su teoría de las descripciones[219], donde manifiesta que se trata de una función descriptiva que debe cumplir tres condiciones a fin de ser aseverada. Lo que es nombrado de manera única no tiene parte y se constituye de esta manera en una noción primitiva inderivable. Es el fundamento sobre el cual se construye toda teoría, tal como sobre la noción de punto (*σημεῖον*) se levanta toda la geometría y la aritmética.

3.2.1.9. La equivalencia maximizal del uno con la equivalencia minimal del cero

Es indudable, como ha sido constatado, que el uno (*εἷς*) que es la instancia que ejemplifica y reúne en torno suyo la esencia (*οὐσία*) y la naturaleza (*φύσις*) de lo numérico, en especial, aquello que disfruta de una completitud y de una consistencia; es el único (*μόνος*) número (*ἀριθμός*) donde 'la parte equivale al todo', es decir (*μέρος*) ≡ (*ὅλος*). Se tiene por consiguiente una presencia (*παρουσία*) plena e integra, a tal punto que no le falta nada, ni necesita ser completado por nadie, que está completamente concluido y acabado en un estado de perfección incondicional. Es curioso que aquello que se basta a sí mismo de manera absoluta (*absolūtus*, participio del presente pasivo de *absolvō*: *ab* lejos de + *solvō*

[219] Este tema es ampliamente tratado en el capítulo XVI por Bertrand Russell en su obra *Introduction to Mathematical Philosophy* p. 134-144, donde analiza todas las exigencias lógicas cuando se trata de establecer una proposición acerca de un individual tomado como un símbolo simple, es decir al punto (*σημεῖόν*). Tal como Euclides afirma que el punto es lo que no tiene partes, Russell manifiesta que un símbolo es simple si no posee partes, lo cual lo diferencia de las descripciones que sí tienen partes.

disolverse o ser separado), sea lo que lo que Pitágoras denomina el infinito (*ἄπειρος*). Muy distinto a la actual concepción matemática, donde el infinito es concebido dentro de una cardinalidad y una ordinalidad inalcanzables, debido a que abordan el arquetipo (*ἀρχέτυπον*) de lo numérico como aquellas partes que nunca jamás se completarán. Este aspecto que está en concordancia con los modelos (*τύπος*) heredados e impuestos desde el origen (*ἀρχή*). Una paradoja que no tiene solución por ningún lado en que se la mire. Este uno (*εἷς*) es el fundamento de la actividad de contar o enumerar (*ἀριθμέω*), está relacionado con aquella acción que une y junta (*ἀρθμέω*). El número es lo unido (ἄ*ρθμιος*) como aquella articulación (*ἄρθρον*) capaz de articular (*ἄρθρόω*) lo que está en torno suyo. A su vez, el punto (*σημεῖόν*) se relaciona con el uno (*εἷς*) desde la perspectiva del todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*), como lo (*οὖ*) que carece (*οὐδείς: οὐδέ + εἷς*) de parte (*μέρος*). En ese sentido es una suerte de negar al uno-todo (*εἷς*, *ὅλος*): no (*οὐ*) del todo (*ὅλος*) es parte (*μέρος*) del uno (*εἷς*). El punto sirve de fundamento para medir (*μετρέω*) medidas (*μετρία*), es el arquetipo sobre el cual se fundamenta la medición de toda figura (*σχῆμα*). Su naturaleza hace que sea aquel lugar (*τόπος*) ausente de espacio[220], lo vacío (*κενός*) sobre el cual todo se precipita cayendo (*προσπίτνω*). Equivale a nuestro cero, aquel entorno sobre el cual se precipitan las asíntotas (*ἀσύμπτωτος*); aquello que no (*ἀ-*) cae (*σύμπίπτω*), son aquellas líneas (*γραμμή*) rectas (*εὐθύς*) que se acercan al cero sin nunca jamas tocarlo ni aún en el infinito (*σημεῖόν*). Nótese cómo el cero o el punto son fundamento del lugar (*τόπος*); además, según la concepción pitagórica donde se tiene un uno (*εἷς*) previo autosubsistente, completo, y un punto-cero autosubsistente como la negación del anterior (*σημεῖόν*), lo cual

[220] El espacio puede ser concebido como un espacio Hausdorff, es un espacio separado constituido de diferentes puntos con vecindades disyuntas. Tal como lo expresa Raz Kupferman en *Topological Vector Spaces*, donde se tiene un espacio topológico S, constituido por τ subconjuntos abiertos (S, τ), donde una vecindad abierta es definida como $N_x = \{U \in \tau / x \in \tau\}$. Para que sea un espacio un espacio Hausdorff se debe de cumplir que dos espacios topológicos distintos tengan vecindades diferentes: sean x, y dos puntos, $x \neq y$, tal que $\cup_x \in Nx$ como también la $\cup_y \in N_y$, se cumpla la condición $\cup_x \cap \cup_y = \emptyset$. La importancia de esta concepción radica en que todo el espacio termina siendo construido y sostenido por la unión de una inconmensurabilidad de puntos disjuntos entre sí. Hay que destacar que en la definición de espacio topológico (S, τ), es necesario que τ sea un subespacio dado que de no serlo, se caería en la impredicatividad de S como una totalidad ilegítima. A fin de evitarlo, se le agrega τ que debe de cumplir la condición de ser un subcojunto de S. Este tema fue tratado ampliamente en las paradojas que sacudieron los cimientos mismos de las matemáticas durante la segunda mitad del siglo XIX, época en la cual se buscó su fundamentación lógico-axiomática. Tema mencionado en la introducción de la segunda edición de *Principia Mathematica* de Whitehead & Russell, capítulo II, pág. 37. Este tema da lugar al llamado principio del círculo vicioso en que caen todos los razonamientos que se hagan.

refleja la generación que se da, fruto del surgimiento del cosmos (*οὐρανός*), como consecuencia de la acción de los números (*ἀριθμός*) concebidos como díadas (*δυάς*). En este contexto, lo nombrado se ve acompañado por algo que lo complementa como su pareja frente a la cual mantiene una relación de oposición (*ἀντιδιατίθεμαι*). La díada (*δυάς*), de la que surge el cardinal dos (*δύο*), lleva a recrear una nueva manera de construir los llamados números naturales o los números inductivos.

Existe, entonces, un doble fundamento en el uno (*εἷς*) y en el punto-cero (*σημεῖόν*) primarios; de ellos parte una dualidad fundamentada en la díada (*δυάς*), de la cual surge el cardinal dos (*δύο*). En este nuevo estadio se tiene que los números se generan en parejas, y que se tiene una oposición entre los positivos y los negativos que acompaña la existencia de la díada en el contexto de las parejas pitagóricas opuestas. En este segundo nivel se recrea la secuencia numérica: …., − 3, − 2, − 1, 0, 1, 2, 3,…, constituida por las parejas de números enteros: (− 0, 0), (−1, 1), (−2, 2), (−3, 3),…, (−n, n). Sin embargo, es conveniente tener en cuenta la base decimal, tal como Pitágoras plantea diez parejas básicas duales de cualidades opuestas entre sí[221]. Con todo, el número en el mundo actual es un concepto vacío, pero en la antigüedad estaba cargado de unas explicaciones que no solo tenían en cuenta la cantidad sino también la cualidad. En esta realidad surgida del número uno y del punto-cero, de lo que se cuenta (*ἀριθμέω*) y de lo que se mide (*μετρέω*), en concordancia con la aritmetica (*ἀριθμητική*) y la geometría (*γεωμετρία*) se fundamentó toda la matemática antigua. Se concibe allí en parejas de conceptos, sea el caso: tenemos números pares (*ἄρτιον*) e impares (*περιττόν*), a su vez, tenemos un segundo punto (*κέντρον*) frente al cual se opone la circunferencia (*περιφέρεια*), ambas nociones pertenecen al círculo (*κύκλος*), que las comprende y abarca. Estos conceptos pueden ser abordados y manipulados, en cambio los conceptos fundamentales que son completos no lo son. Este punto (*κέντρον*) debe de ser atravesado (*κεντέω*), aunque como lo hemos afirmado, no será alcanzado. Tal como se sugiere, se dice que se cae sobre él mismo (*προσπίτνω*) y, por definición, es del primer nivel que nunca será alcanzado o tocado (α + *πέρας*): lo que no es sin límite o final.

---

[221] Tal tema está introducido en la *Metafísica* de Aristóteles (986a 20). Puede decirse, que Pitágoras es el autor que inspiro que todo está constituido por parejas de cualidades opuestas. Lo que puede apreciarse en la construcción misma del conjunto de los números enteros: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{+} \cup \mathbb{Z}^{-}$; asimismo como en la noción de pareja ordena (x, y), que es una noción fundamental en la lógica clásica de naturaleza binaria.

Al emprender una axiomatización de los números enteros inspirada en Pitágoras, hay que dirigir nuestra atención en la equivalencia entre el uno (*εἷς*) y el punto-cero (*σημεῖόν*), que podría ser simbolizada así como el uno pitagórico es el mismo punto euclideo-pitagórico, *εἷς* ≡ *σημεῖόν*. Tal equivalencia revela que el número (*ἀριθμός*) pitagórico primigenio existía antes que el Kronos (*κρόνος*) se organizara en Kairos (*καιρός*), fruto de la acción del número primigenio que se diversifica de manera ordenada dando lugar a la existencia del cosmos o cielo (*οὐρανός*). Dentro de este contexto pitagórico, la existencia de los dioses y del hombre, se da una vez surge el universo. Lo que implica que todos estamos obligados a respetar las leyes propias que gobiernan la existencia universal. En esta forma, el uno primigenio pitagórico es un número completo, absoluto, infinito y consistente en sí mismo; y no hay necesidad de garantizar su existencia en relación ni frente a una base ni a una serie numérica. Sea el caso, la base decimal y la serie que comienza sea desde 1 o 0, como 0, 1, 2, 3,…, n; siendo n un número entero. Notemos de entrada un importante hecho, en la propuesta fundante tenemos que el cero no antecede al uno, sino que están dados de manera simultánea. Una tentativa para abordar este problema se ha dado a nivel de los conjuntos parcialmente ordenados, donde es posible relacionar parejas maximales y minimales[222]. Obviamente, tanto este 1 como este 0 son distintos al tradicional entero 1 y al 0. Por tal motivo, es conveniente simbolizarlos de una manera diferente como ḷ y Ọ, que reestructurados dentro del criterio de equivalencia (≡), serían: ḷ es la equivalencia maximal $\equiv_{max}$ y Ọ es la equivalencia minimal $\equiv_{min}$ del número. De manera conjunta, ambas nociones se podrían simbolizar dentro de una única expresión formal como: ḷ $_{max}\equiv_{min}$Ọ, el uno es el estado maximal y el punto-cero es el estado minimal del número primegenio pitagórico a partir del cual el cielo-cosmos (*οὐρανός*) se origina. Tal número será simbolizado como ᾷ, con lo cual, la anterior expresión queda finalmente como ᾷ = ḷ $_{max}\equiv_{min}$Ọ[223].

---

[222] Lo interesante es que en la formulación propuesta ḷ $_{max}\equiv_{min}$Ọ, se da una secuencia de 1s y de 0s que están relacionados entre sí o se juntan, en este caso en un tipo de equivalencia maximal y minimal. Este tema es tratado en los conjuntos parcialmente ordenados (A, R), se tiene una pareja parcialmente ordenada (x, y), en la cual un elemento maximal $x \in A$ se relaciona con un elemento minimal $y \in A$. Este tema puede ser consultado en el artículo *Maximal and Minimal Elements of Posets* por Yuh-Dauh Lynn.

[223] Este tipo de propuestas fueron consideradas por el matemático húngaro Dénes Kőnig, quien nació en tiempos del Imperio Astro-Hungaro (1867-1918). Publicó en alemán sus obras, siendo el primero que escribió

Lo inusitadamente importante de esta aseveración, no tomada en cuenta de manera completa por los grandes matemáticos contemporáneos, es que en la axiomatización de los números enteros se tendrían inicialmente dos niveles de fundamentación para la construcción de los números: un metanivel ᾆ del cual se desprende un segundo nivel cuya característica es ser dual (*δυάς*), y está constituido por parejas de naturalezas opuestas entre sí. Como ya ha sido anotado, los antiguos eran mentalmente más disciplinados que nosotros: pensaban, hablaban y escribían de manera coordinada, aguda y profunda. Además, estaban creando nuevas palabras que nunca antes habían sido pronunciadas. Esto les otorga una gran ventaja respecto a nosotros, ya que no estaban tan perdidos frente a lenguas previas: muchas veces hablamos y pensamos dentro de una maraña de procedencias etimológicas tan diversas y modificadas, que nos encontramos muy lejos de los momentos inaugurales de nuestra lengua. Tal hecho hace que la reflexión actual carezca de ciertas precisiones, y en muchos casos tenga que dar vueltas en un laberinto de confusiones. Tal enredo es honrado como una ventaja propia del intelectual o del individuo moderno, que mira a los antiguos desconociendo e ignorando su inusitado e inimaginable potencial intelectivo sensible, en gran medida muy superior al que se tiene hoy día. En este sentido, los diez números que constituyen la base decimal, se corresponden con los diez principios duales con los que Pitagóras fundamenta este número principio de todos los entes. Esto implica que son estos diez números duales los que organizan el cielo (*οὐρανός*) y representan el fundamento de la base decimal. Esta ha de ser entendida en un sentido aún más profundo, ya que es capaz de crear nuevos significados: es una base decimal dual que incorpora los números enteros, tanto los enteros positivos como los enteros negativos $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\times} \cup \mathbb{Z}^{-}$. Esta base decimal que se refleja en los diez principios duales pitagóricos permite que cada número del 1 al 10 tenga un valor diferente tanto a nivel de cantidad como de cualidad. Tal hecho ha sido ignorado hoy día en todas las axiomatizaciones

---

el primer libro de teoría de grafos. Mitsumo Wate (2011) en su libro *The work of Dénes Kőnig* trata este tipo de situaciones que Kőnig propusó en relación a la teoría de conjuntos y a la teoría de grafos: "Sea Π_1 y Π_2 una secuencia contable infinita de finitos de conjuntos de puntos disjuntos no vacízos. Dejemos que los puntos contenidos en estos conjuntos formen los vértices de un grafo. Si G tiene la propiedad que cada punto de Π_{n+1} (n= 1, 2,…) se junta con un punto Π_n (n= 1, 2,…) por cada punta de G, luego G tiene un único camino P_1P_2…, donde P_n (n = 1, 2,…) es un punto de Π_n" (pág. 290).

conocidas de los números inductivos o naturales ℕ, asimismo de los otros sistemas más elaborados como los números racionales ℚ, los reales ℝ, y los complejos ℂ.

La creación del cosmos (*οὐρανός*) es simbolizada por el número (*ἀριθμός*) ᾳ̃, como aquel paso de ese número indistinto y único (*μόνος*) en completa unidad (*μονάς*) consigo mismo. Aquella mónada originaria a partir de la cual se origina los números como serie decimal dual α̃, como aquellas diez parejas ordenadas opuestas (ᾴ, ᾲ) ordenadas como sigue: α̃ = { (ᾴ, ᾲ) | ($ᾴ_1$, $ᾲ_1$), ($ᾴ_2$, $ᾲ_2$), ($ᾴ_3$, $ᾲ_3$), ($ᾴ_4$, $ᾲ_4$), ($ᾴ_5$, $ᾲ_5$), ($ᾴ_6$, $ᾲ_6$), ($ᾴ_7$, $ᾲ_7$), ($ᾴ_8$, $ᾲ_8$), ($ᾴ_9$, $ᾲ_9$), ($ᾴ_{10}$, $ᾲ_{10}$)}, es la representación de la transformación *f*(ᾳ̃) = α̃, la cual puede ser recreada como la función *f*, que tiene por dominio al número mónada (*μόνος*) ᾳ̃ y por codominio el origen del cosmos (*οὐρανός*) como número dual (*δυάς*) de base diez (10), se simbolizaría como: ᾳ̃ = ḷ$_{max}$≡$_{min}$Ọ → α̃ = { (ᾴ, ᾲ) | ($ᾴ_1$, $ᾲ_1$), ($ᾴ_2$, $ᾲ_2$), ($ᾴ_3$, $ᾲ_3$), ($ᾴ_4$, $ᾲ_4$), ($ᾴ_5$, $ᾲ_5$), ($ᾴ_6$, $ᾲ_6$), ($ᾴ_7$, $ᾲ_7$), ($ᾴ_8$, $ᾲ_8$), ($ᾴ_9$, $ᾲ_9$), ($ᾴ_{10}$, $ᾲ_{10}$)}. De manera reducida: *f*(ᾳ̃) → α̃. En este contexto, el cero y los demás números se nos revelan como algo muy distinto a lo que hemos estado habituados: el uno infinito o punto-cero, aunque lo queramos vincular a la serie entera ℤ : (…, − n,…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3,…, n…), posee dos órdenes distintos a nivel de su cardinalidad y su ordinalidad, ya que el cero simbolizado aquí es en realidad ᾳ̃ y los demás números pertenecen a α̃: ℤ = ᾳ̃ ∪ α̃, o ℤ = ᾳ̃ ∪ ($^{-}$α̃ ∪ α̃$^{+}$). Donde el número con unidad (*μονάς*) absoluta o infinita (*ἄπειρος*) ᾳ̃ no es un número en el sentido que nosotros lo conocemos, dado que es lo no contable (*οὖ οὐδείς ἀριθμέω*) y lo no es metrizable (*οὖ οὐδείς μετρέω*). Mientras que en la serie numérica decimal dual α̃, si estamos frente a lo contable (*οὖ ἀριθμέω*) y lo metrizable (*οὖ μετρέω*). En este contexto, cada número de la base decimal, dual en naturaleza, posee unas propiedades y características únicas, las cuales los pitagóricos mantuvieron celosamente en secreto dado que son las puertas que abren al verdadero y legítimo conocimiento matemático. Hay que poner de manifiesto que esta noción del infinito pitagórico es, en realidad, dos infinitos: el que se tiene en el cronos (*κρόνος*) y el del Kairos (*καιρός*). Esta apreciación va más allá de lo considerado por Georg Cantor en su teoría acerca de los números transfinitos, que van desde ω que corresponde al infinito ordinal de los números naturales, que incluso incorpora al conjunto de los números cardinales naturales $\aleph_0$, que es el más pequeño de los infinitos en cardinalidad. Denominaremos al infinito pitagórico único (*μόνος*) en unidad (*μονάς*) consigo mismo, que está por encima de todo lo construido o planteado por Cantor[224] con la letra del alfabeto hebreo (sin) שׂ.

3.2.1.10. La noción de punto equivale a la del átomo

Se ha visto al punto (*σημεῖον*) como aquello que no tiene partes (*μέρος*), y se nota a este nivel la cercanía que guarda el punto (*σημεῖόν*) con el átomo (*ἄτομος*), como aquello que es indivisible, lo que no (*ἀ-*) puede ser cortado (*τέμνω*) en algo más pequeño. Estos planteamientos fueron desarrollados por Leucipo (*Λεύκιππος*) y su alumno Demócrito[225] (*Δημόκριτος*), quienes son posteriores al propio Pitágoras (*Πυθαγόρας*). Piénsese en cómo un irreductible geométrico como el punto, es llevado a ser la expresión de un concepto metafísico como lo es la mónada e, igualmente, es asociado a un concepto aritmético, como lo son el cero y el cardinal uno que enriquecerán la teoría física del átomo. Tal similitud de un mismo concepto, usado en variados campos diversos e intímamente conectados entre sí, refleja parte de la naturaleza del pensamiento griego e igualmente ilustra cómo dicha lengua funciona y se estructura a sí misma. Hay que destacar a la semántica (*σημαντικός*) como el estudio de los significados de una lengua, su raíz etimológica proviene de la del punto (*σημεῖόν*), o sea *sêma* (*σῆμα*); de esta manera, el pensamiento griego es propenso a

[224] Un tema que merece la pena resaltar, es cómo en los griegos, especialmente Pitágoras, se concibió dos tipos de infinito: el uno-infinito antes de la existencia del cosmos y la pareja finito-infinito después de la existencia del cosmos. Tal hecho plantea una cardinalidad y ordinalidad muy distintas a la que fue concebida por Georg Cantor del infinito construida a partir de la potencia de M (Menge), que es la palabra que designa al conjunto M = {m}. El número cardinal M lo concibe como: "nuestra activa facultad de pensamiento, que surge del agregado M cuando efectuamos una abstracción de la naturaleza de sus varios elementos m, y del orden en que estos están dados. Se denotará el resultado de este doble acto de abstracción, el número cardinal o la potencia de M por $\overline{\overline{M}}$" *Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, pág. 86. Mientras los números ordinales tan solo estarán representados por una sola línea encima de la M o sea $\overline{M}$, que representa el orden. Bajo estas nociones se buscará construir la base de la teoría de los números transfinitos, teniendo en aleph subcero $\aleph_0$ el menor de todos ellos. Es de resaltar cómo los grandes matemáticos anteriores a la segunda mitad del siglo XX, se preocuparon en construir una teoría del conocimiento a partir de los números; tendencia que hoy día ha desaparecido casi por completo. Lo interesante del planteamiento pitagórico del uno como un infinito anterior a los demás tipos de infinito, es que unifica todas las cualidades y mantiene una unidad consigo mismo: es consistente y completo, mientras el constituido por la la pareja finito-infinito que se opone a si misma, no lo es, motivo que lleva a afirmar que tal infinito es superior a todo y es único.

[225] La vida y obra de Demócrito de Abdera es narrada por Monte Ransome Johnson (2011) en *Democritus c. 460 BC, c. 370 BC.* Demócrito ofreció una concepción comprensiva de la naturaleza física del universo. Su teoría ética es bien conocida, en ella manifiesta que la sabiduría es el mayor bien para el hombre dado que le permite mantener una condición tranquila y estable. Vivió una larga vida, algunos dicen entre 90 a 109 años, díscipulo de Leucipo al que Aristóteles le da el crédito de ser el fundador de la teoría atómica, la cual mejoró y amplió Demócrito (pág. 343).

relacionar un mismo concepto en distintos niveles, dándole tratamientos distintos con una variedad de motivos explicativos.

En todos los casos mencionados, en relación al punto (*σημεῖόν*), a la mónada (*μονάς*) y al átomo (*ἄτομος*), uno se encuentras con aquello que es irreducible; que no es posible que esté constituido por unas partes (*μέρος*) más pequeñas y que, además, posee una integridad que no puede ser rota. En el caso del punto (*σημεῖόν*), la problemática gravita alrededor de la noción de parte (*μέρος*), la cual está relacionada con la actividad de recibir y distribuir (*μείρομαι*). No es propiamente una actividad donde se considere la problemática de la espacialidad, como a simple vista se puede pensar que la geometría tenga que ver en primer lugar con el tema del espacio *khôros* (*χῶρος*), sino más bien con la metría (*μετρία*) o la medición: aquello que se usa como medida (*μέτρον*), lo cual supone estar frente al requerimiento de un patrón de medida o de un sujeto sobre el cual recaiga la tarea de medir (*μετρέω*). De ahí que exista una notable búsqueda de aquel patrón de medida perfecto o la unidad de medida moderna conocida como el metro (*μέτρο*): aquella medida (*μέτρημα*) que permite establecer mediciones (*μέτρησις*), y estas están a nivel de la geometría que se centra en la medición de la tierra (*γῆ*), los terrenos y campos donde se cultiva, se tiene animales o se construye. Lo cual es muy diciente, es decir: la problemática inherente a la geometría sería más, el arte o la técnica propia del medir (*μετρέω*) algo por medio del instrumento más idóneo. El estudio de los entes geométricos se aborda como una consecuencia de tal requerimiento práctico, sean el triángulo o el rectángulo o los conceptos primitivos como el punto y la línea. Estos funcionan como los medios para lograr aquel fin deseado: poder garantizar unas mediciones (*μέτρησις, μετρία*) lo más adecuadas, perfectas, justas, posibles y confiables. Este hecho tiene unas profundas repercusiones ya que prevalece el arte de medir (*μετρητική*) sobre el objeto de nuestro saber. Desde esta perspectiva, el punto (*σημεῖόν*) es aquel ente, que es el 'irreducible medible' en relación con lo que puede ser sujeto de una medida. A su vez, la noción de parte (*μέρος*) tiene que ver con esa parte de un terreno que es adjudicada para el ejercicio de alguna labor o tarea. El todo (*ὁ ὅλος*) como noción, en este contexto, equivale a la totalidad (*ἡ ὅλη*) de aquel terreno, campo, espacio que es completo.

A su vez, se tiene el otro irreducible que recae sobre el átomo (*ἄτομος*), el cual es aquel irreducible de lo que no puede ser cortado o dividido más (*ἀ-τέμνω*)[226], aquello que es indivisible. En el vocablo átomo (*ἄτομος*) se halla la alfa privativa (*α*) unida con el (*τομός*), aquello que es cortante o afilado, lo que conduce a (*τόμος*) que es aquella parte cortada o porción o parte fruto de un corte, aquella parte amputada y separada, fruto de una escisión o golpe (*τομή*). Una de las acciones que acompaña a este 'irreducible de lo que puede ser dividido o separado', es la necesidad de un corte o de una operación (*τομάω*). El mismo verbo *témnō* (*τέμνω*) significa cortar, dividir, mutilar, atravesar, cortar para sí, matar, e inmolar.

3.2.1.11. El punto como la mónada primigenia

La mónada o la unidad (*μονάς*), es aquel irreducible más relacionado con la existencia de un ente (*ὄντος*), y se forma a partir del participio presente (*ὤν*) del verbo ser y existir (*εἰμί*), e indaga sobre la problemática de lo que le pertenece a cada uno como lo propio y suyo. A su vez, dada la pregunta por la existencia del universo (*οὐρανός*), surge aquello que pregunta por la unidad completa del mismo, lo que conduce a la mónada (*μονάδα*)[227] pitagórica. Se está frente a un 'irreducible existencial' o monás (*μονάς*)[228]. Aquello que está solo, que es único, singular y aislado (*μόνος*), le corresponde esa acción que busca dejarlo solo sin compañía, aislado y reducido a uno (*μονόω*). Los distintos

[226] Es bien conocido que Demócrito de Abdera (*Δημόκριτος*), fue el inspirador de la teoría atómica. En su completo ensayo acerca de este importante filósofo presocrático alumno de Leucipo, *Democritus on what is up to us*, en *Classical and Medieval Literature Criticism*, Monte Ransome Johnson (2012), manifiesta como Platón lo ignoró mientras que Aristóteles lo valoró. Johnson dice que no es fácil conseguir una información precisa del mismo dado que no queda ningún texto original de él, nació en Abdera la misma ciudad de Protágoras. Se dice que viajó a tantas partes como pudo, desde Egipto a la India, se dice que vivió una vida muy larga. Manifestó que: "los átomos se asemejan al alma, son pequeños y redondos, que penetran todo, están siempre en movimiento y son la causa del movimiento de los demás cuerpos" (pág. 267).

[227] La teoría de la mónada pitagórica está ampliamente ilustrada por Diógenes Laercio, quien en su libro VII-numeral veinticinco manifiesta: "*The principle of all things is the monad or unit*", el principio de todas las cosas es la mónada o la unidad. Se nota ese deseo de la búsqueda de aquel irreductible simple que fundamente la existencia asimismo como todo tipo de teoría formal de índole matemático.

[228] En la teoría de categorías; la mónada, la tríada, la construcción estándar y la construcción fundamental, representan lo mismo: es un endofuntor o sea un funtor que mapea una categoría hacia sí misma, junto a dos transformaciones naturales, las cuales permiten transformar a un funtor en otro preservando su estructura interna compuesta de morfismos. Este tema es tratado por Barr y Wells (1985) en *Toposes, Triples and Theories* (pág.83), que muestra cómo en las matemáticas modernas se sigue conservando el concepto fundamental de la mónada, como aquel topos soberano fundamento de todo y con plena unicidad consigo mismo.

conceptos fundamentales que inauguran el pensamiento especulativo griego se ven reflejados en las diversas áreas del saber y en sus diferentes planteamientos: tal como la geometría se funda en el punto, de igual manera es el reflejo de un pensamiento previo de mayor jerarquía, como lo es la noción de la mónada como origen del universo. La unidad indisoluble (*μονάς*) es el fundamento de la existencia de todo el cielo, de igual manera lo será como el fundamento de las metrías por medio de la noción del punto (*σημεῖόν*). Ambas nociones poseen una singularidad única, aunque se tenga una diferencia básica que estaría en que la mónada (*μοναδα*)[229], utiliza el camino de demostración directo o positivo, mientras el punto (*σημεῖόν*) utiliza el camino de demostración indirecto o negativo: el uno afirma que el punto de partida como *monás* (*μονάς*), en cuanto que se tiene que la parte y el todo son equivalentes en todo sentido *μέρος* ≡ *ὅλος*. Tal hecho puede ser abordado como una proposición atómica p, a partir de la cual se puede inferir toda una argumentación: tenemos, cómo la proposición p está constituida en sí misma por una equivalencia. Lo cual ampliaría la noción de proposición, en lo que podría denominarse 'una proposición equivalente' en la cual sus dos argumentos son confluyentes $p(\dot{x}) \equiv p(\ddot{x})$: auque a nivel sintáctico se tenga que $\vdash. \ \dot{x} = \ddot{x}$, a nivel semántico son distintos $\models. \dot{x} \neq \ddot{x}$. Se nota que la consecuencia sintáctica hace que se pueda aseverar la proposición como consistente, para ello se utiliza el trinquete o torniquete ($\vdash$) en $\vdash$. P. Se está, entonces, frente a un teorema, en el cual la pareja ordenada $(\dot{x}, \ddot{x})$ son equivalentes sintáctica pero no semánticamente. Ello tiene sentido, en cuanto en la expresión: $\models. \dot{x} \neq \ddot{x}$, no es aseverable en todo modelo, dado que tan solo se cumple en la mónada, cuando la parte es su propio todo.

3.2.1.12. El todo está contenido dentro del cero, que es el uno negado

Cuando se aborda al punto (*σημεῖον*) como lo (*οὗ*) que bajo ningún modo (*οὐδείς*) existe (*εἰμί*) como parte (*μέρος*), se precisa de una proposición que define al punto desde la negación de lo que no tiene, dado que si se aborda desde una definición positiva, se estaría

[229] También cabe mencionar *La monadología* de Gottfried Leibniz (1714), donde manifiesta al inicio: "*1. The Monad, of which we shall here speak, is nothing but a simple substance, which enters into compounds. By 'simple' is meant 'without parts'*. "La mónada, de la cual hablaremos aquí, es tan solo una sustancia simple, que entra en los compuestos". Se nota, una vez más, cómo la influencia de la filosofía pitagórica se hace sentir desde la antigüedad tanto en Euclides como en Leibniz, y aún hoy día inspira la teoría matemática de las categorías.

obligado a suministrar todos los argumentos o cierta completitud de los mismos. En cambio, en esta definición negativa de punto tan solo se ha escogido un predicado, que es ser parte de algo negándolo sin haber agregado otros predicados. Tal hecho es una característica de las demostraciones lógicas indirectas o reducción al absurdo (*Reductio ad absurdum*), en las cuales basta encontrar una inconsistencia caracterizada por algo afirmado y negado al mismo tiempo, la ley de la no contradicción está expuesta en *Principia Mathematica* como *3.24 ├. ~ (p. ~ p)[230]. Tal hecho, no exhibe todo lo que puede ser predicado (*praedicatum*) acerca de un ente (*ὄντος*), lo que está colocado delante, establecido y ordenado (*πρόκειμαι*) como predicado o *kategoreumenon* (*κατηγορουμενων*). No queda otro recurso que leer tal proposición en un sentido positivo, en el cual los predicados tendrían que tener cierta completitud y consistencia en cantidad y cualidad. Con lo cual, lo opuesto a la parte (*μέρος*) es el todo (*ὅλος*): la parte es lo que no (*οὐδέ*) es (*ἐστί*) uno (*εἶς*). Análogamente, se podría afirmar que el todo (*ὅλος*) es lo que es uno (*εἶς*). Aunque no se pueda tampoco explicitar los argumentos que constituyen y definen su predicación, tan solo Pitágoras aporta ese uno que es lo ilimitado o infinito (*ἄπειρος*). Sin embargo, se va a proponer una nueva interpretación influenciada por la teoría de conjuntos: no puede existir algo fuera del todo que sea uno. Si se diera de nuevo, se tendría algo que lo cobija y, aún de existir varios todos, estos estarían cobijados por el más grande de los predicados, que es el de la existencia (*εἰμί*).

Se puede aseverar que lo uno (*εἶς*) es lo que existe (*εἰμί*), que fuera del uno no existe nada ni la nada, dado que para existir la nada tendríamos que predicarla y afirmar que existe: "para todo 'lo' (*οὖ*) que existe", simbolizado como ∀ σ Є, la cual antecede a toda proposición de la naturaleza que sea, donde todo ente o 'lo' (*οὖ*) pertenece al uno (*εἶς*): ∀ σ ∈ *ῖ*, donde el uno es todo: *ῖ* ≡ *ὅ*. Con lo cual se estaría introduciendo la existencia (Є), como la característica fundamental de la teoría de conjuntos, que antecede a la membresía de un elemento frente a un conjunto. A su vez, tal existencia es distinta al predicado existencial

[230] *En Principia Mathematica* (1910), pág. 111 está expuesta esta ley de la no contradicción que, como ya se dijo, está implícita como la estructura de argumentación que soporta el axioma euclidiano que define al cero. Hay que destacar cómo se comienza abordando una negación de una parte que no es parte evitando plantear una aserveración que aluda al todo, esta se guarda bajo el uno que subyace en *oudeís* (*οὐδείς*), que es lo no-uno.

(∃), dado que en este contexto: todo (∀), existe (∃) y no existe (∄). En este contexto, todos existen (Є) de igual manera, tanto los que existen (∃) como los que no existen (∄). Este hecho tiene un gran valor, dado que en la teoría de conjuntos se tiene la impredicatividad del todo como uno. Este hecho está contemplado en la paradoja de Russell: R: = {x | x ∉ x}[231]. En este nuevo contexto, si se introduce la noción de existencia (Є) como la que determina y ordena a la noción de pertenencia (∈) de un elemento frente a un conjunto, se estaría obligado a introducir toda una axiomatización previa más exigente y coherente que la planteada en la teoría estándar de conjuntos. En especial, la noción de elemento (x) muchas veces se la considera como una variable libre que debe poder verse transformada en una variable ligada, queda antecedida por la noción del 'lo' (ϭ) en el sentido de '*lo que existe*' o '*algo de lo que existe*', sin que se quede comprometido desde el inicio a decir que se trata de un individual u otro ente (*ὄντος*). Esto da la libertad de poder especificar de qué se trata, lo cual aporta un campo de acción más amplio para la argumentación deductivo-intuitiva.

En especial, una de las nuevas propiedades que se tendrían, es que todo existe como especie y la membresía se da en relación a la especie (*εἶδος*) frente a la cual se establece la membresía de pertenencia: todos pertenecemos a una especie, a excepción de lo uno que es todo, que es el único ente (*ὄντος*) o lo (ϭ) que tan solo existe como un único e indiviso individual. El uno (*εἶς*) es el único que puede ser recibido de manera completa respecto a sí mismo y permanecer solo (*μονόω*), es la unidad (*μονάς*) que es única y singular (*μόνος*). Solamente el uno (*εἶς*) no existe como especie: *εἶς οὐδέ εἶδος.* Tal hecho reviste una importancia capital debido a que la formulación de la paradoja de Russell tendría que ver con este singular hecho, sin que se elimine la impredicatividad que todo lo que es uno representa una totalidad. Aquí se encuentra otro uso de la existencia en cuanto cuantificador, en cuanto complementa la naturaleza (*φύσις*) que es. Este hecho permite

---

[231] La paradoja de Russell evidencia la impredicatividad de toda afirmación que se realice sobre una totalidad, lo que nos lleva a la inhaprensividad de la misma. W. Lycann, en su artículo *What, exactly is a Paradox?* Alude que una paradoja se origina fruto del conjunto de premisas que la soportan, se menciona como el cálculo proposicional puede llevar a contradicciones. Sea el caso del *Modus Ponendo Ponens* (P→Q, P ├. Q), donde a partir de unas premisas aceptables se puede inferir una conclusión contradictoria. El autor menciona a O. Quine, para quien una paradoja es un argumento aparente exitoso que conduce a una proposición falsa o absurda.

afirmar que todo lo que existe proviene del uno (*εἷς*), aún las partes (*μέρος*) existen en relación al uno como totalidad (*ὅλος*). Esto permite integrar el desorden (*κρόνος*) previo a la existencia del universo y el orden (*καιρός*) del cosmos (*οὐρανός*) bajo un común predicado universal como es el de la existencia. A su vez, el criterio que define la pertenencia de todo ente (*ὄντος*) en la realidad es el de la existencia, que proviene del lo que es uno y a la vez es todo: *εἷς* ≡ *ὅλος*. Lo que permite afirmar que todo lo que existe, o sea todos los que existimos lo hacemos como especies (*εἶδος*) y estamos dentro del uno (*εἷς*): 'todo lo que existe está incluido dentro del uno' $\forall$ Є $\subset$ ἾΙ, que también da cabida para la proposición, que 'todo lo que existe pertenece al uno[232]': $\forall$ Є $\in$ ἾΙ. Este hecho obligaría a ampliar y modificar algunos importantes tópicos de la teoría estándar de conjuntos. A su vez, nada ni nadie está fuera del uno (*εἷς*), que es todo (*ὅλος*) lo que existe (*εἰμί*). Este hecho refuta la existencia de la nada, dado que aún ella requiere del predicado de la existencia para existir. Se asemeja en algo al cero que como ya se ha anotado, es el mismo uno tomado como el origen y fundamento de toda medida (*μετρία*): es decir, el cero y el uno se asemejan, guardan una relación que Russell denominaría aliorelativa y asimétrica[233].

La propiedad aliorelativa está emparentada con la asimetría; cabe destacar que siendo el cero y el uno dos facetas de una misma realidad, involucra una diversidad de un

---

[232] En este contexto, que no será abordado aquí, una especie (*εἶδος*) puede ser abordada como un uno (*εἷς*), de suerte que todos los seres que existimos en especie podemos vernos como una sumatoria de unos diferentes entre sí: $\sum_{i=x}^{y=z}$ ὅ$_i$ Donde al preguntar, cuál es el ente que existe en el universo por el que hemos de comenzar nuestra suma, se tendría que puede ser cualquiera. No hay que olvidar que todo lugar en el universo es centro del mismo. A su vez, el punto de llegada de tal sumatoria que pretende contar todos los entes que existen en el universo es indefinible, aunque se acerque al infinito no es el infinito mismo. Se ha escogido la letra ómicron con sus acentos *ὅ* en referencia al ente (*ὄντος*), donde todo ente existe en especie y en ese sentido representa al uno (*εἷς*) bajo un tipo de orden tan particular, que habría que ampliar la teoría de los tipos lógicos: $\sum_{i=x}^{y=z} \varepsilon_i$ la épsilon por (*εἷς*). Lo que simbolizado en términos más modernos en relación al símbolo del 1 vendría a ser: $\sum_{i=x}^{y=z} 1_i$ todos los que existimos, lo hacemos como especies únicas: 1_i + 1j, +…+1_n. Cada especie que habita el universo puede ser apreciada como un 1 diferente a las demás, en este sentido se está preservando el uno (*εἷς*) en cada ente y la unidad (*μονάς*) que lo subyace a todo nivel.

[233] Bertrand Russell (1919) en su libro *Introduction to Mathematical Philosophy* introduce en el capítulo IV referente a la definición de orden (pág 25-26) la noción de una relación aliorelativa (palabra tomada de Charles Peirce por Russell), o aquella que está contenida en o que implica diversidad, siempre y cuando ningún término tenga esta relación consigo mismo. En ese sentido, es una manera de plantear una variante de la relación reflexiva que nos encierra en una formulación que no siempre es productiva. Asimismo, menciona que una relación es asimétrica es la misma cosa que una relación cuyo cuadrado es aliorelativa. Introduce además la noción de una relación está conectada, cuando en una clase se tienen dos términos, donde uno debe siempre preceder al otro y el otro le debe de seguir. Este hecho lo utiliza para la construcción de una serie numérica que debe de cumplir tres propiedades a fin que pueda denominarse una relación serial: aliorelativa, asimétrica y transitiva.

concepto que actúa como una pareja ordenada diferenciada. Sin embargo, se puede extender el análisis un poco más todavía para afirmar que si se tiene asimismo una relación aliotransitiva, en cuanto aRb ∧ bRc → aRc, que se cumpliría después que se haya establecido que entre el 0 y el 1 al ser alirelativas entendidas en un sentido amplio, se las podría plantear como sigue: 0R1, teniendo en cuenta que $0 \equiv_{\aleph} 1$, el cero es equivalente al uno, bajo un tipo de equivalencia que es la inversión total de las propiedades del uno en relación al otro. A la manera de una reflexión simétrica tipo espejo, con el agravante adicional que cada plano es opuesto al otro en todo sentido: si es positivo en un lado es negativo en el otro, si algo es máximo en un lado en el otro es mínimo. Esto involucraría asociarle unas propiedades cualitativas tanto al 1 como al 0, lo que implicaría una axiomatización sujeta a un ordenamiento jerárquico tal como lo puede prever la teoría de los tipos lógicos de Russell como el planteamiento de Tarski para teorías, donde a partir de un modelo T: "Una teoría T_1 es una subteoría de una teoría T_2 si cada oración que es válida en T_1 es también válida en T_2, bajo las mismas condiciones T_2 es referida como una extensión de T_1"[234]. En este caso, la expresión 0R1 se transformaría en 0Ṝ1, una suerte de relación aliorelativa que sería también asimétrica, pero algo distinta a la planteada por B. Russell dado que involucra una asimetría espejo ordenada, jerarquizada en cantidad y cualidad, y no está aún especificada.

A su vez, de esta pareja inaugural prosige a construir el número dos bajo una suerte de propiedad transitiva, que tentativamente se ha denominado aliotransitiva: 0Ṝ1 que involucra la asimetría (Ṩ) 0Ṡ1 y 1Ṣ0 (siendo Ṡ la asimetría hacia la izquierda y Ṣ la asimetría a la derecha), se asemeja en algo a una propiedad transitiva, en cuanto la asimetría 0Ṩ1 abre la unidad de la pareja ordenada (0, 1) para que se pueda construir el número dos. Del dos en adelante se tendría una transitividad más en el sentido tradicional: 0Ṝ1 ∧ 1Ṟ2 → 2R3, teniendo en cuenta que Ṝ involucra una relación a la derecha Ṙ y una relación a la izquierda Ṛ, mientras Ṟ involucra una relación con Ṛ a la izquierda y a con R a

[234] Alfred Tarski (1953) en *Undecidable Theories* pág 9-11, comienza a estudiar las condiciones para la formalización estándar de las teorías, que lo llevará más tarde a determinar su indecidibilidad. Se aprecia como las distintas teorías T se derivan de dos axiomas de deducción: el uno que establece un conjunto A de oraciones de una teoría T, y $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ las oraciones de T, para que cualquier oración Ψ de una teoría T sea derivable de A basta que cumpla con la condición: $(\Phi_1,\ldots,\Phi_n) \rightarrow \Psi$, sea derivable de A y el otro que sea válida lógicamente.

la derecha en sentido ascendente. De manera que la relación tradicional transitiva $aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$, quedaría replanteada en esta nueva relación aliotransitiva inicialmente como: $a\bar{\underset{.}{R}}b \wedge b\underline{R}c \rightarrow aRc$. Sin embargo, no se debe olvidar que ese 'a' es doble o sea es una pareja ordenada que es asimétrica respecto a sí misma. Tal hecho es importante, dado que en la axiomatización de los números naturales o inductivos como bien los denomina Russell, no se ha contemplado el denominado retorno al cero: se avanza del 1 al 9 pero al llegar al 10 aparece de nuevo el cero, tal hecho esconde y guarda parte del secreto de la naturaleza del cero. Dado que la en la actual inducción de los números naturales o enteros positivos podría ser: 1+1+1+,…,+1. La introducción de los que se podría denominar descansos, donde se retorna al 0 para luego volver a recomenzar una nueva serie decimal diferenciada de la anterior a partir de un 1 de nueva jerarquía, sea el caso del 11, del 21, del 111, etc, con base en haber descansado y retornado a un 0 también jerarquizado bajo el 10, 20, 110, etc. Asimismo la introducción de la noción del infinito en esta serie numérica de los unos 1+1+1+,…,+1, es algo que no se puede inferir de la misma y es un artefugio no válido.

A su vez, el uno (*εἷς*) puede ser tomado como el patrón de medida o la unidad fundamental de toda medida, sea aritmética o geométrica, concepto que nos lleva al patrón aurico φ de medida. Todo está contenido en el cero[235], que a su vez es un uno sujeto a un tipo de negación lógica distinta a la tradicional ~. Es una negación que se ejercita sobre un único predicado propio de una proposición atómica, no susceptible de ser ampliado a proposiciones de tipo molecular: se trataría de una única metaproposición atómica de una jerarquía superior a todas y que las fundamenta a nivel de sus modelaciones teóricas, pero que no compromete su decibilidad y consistencia dado que está en un metalenguaje metamatemático susceptible de variadas modelaciones. De igual manera, la similitud del cero con el uno ya ha sido contemplada al afirmar que cualquier número elevado a la

---

[235] Peter Rowlands (2007) en su libro *Zero to Infinity* reconoce el valor del cero: Una idea fundamental, y solo una, tiene la necesaria simplicidad e intrínseca inexplicabilidad para ser el fundamento de todo. Esta es nada, el cero en términos matemáticos. (*One fundamental idea, and one only, has the necessary simplicity and intrinsic inexplicability to be the foundation for everything else. This is nothing, zero in mathematical terms. Preface pág, ix*). Prosigue Rowlands su exposición en la pág. 75 diciendo: nuestra dualidad fundamental ha sido representada en términos de conservación y no conservación, y que el efecto de aplicar ambos, es para mantener la totalidad del cero (*Our fundamental duality has been represented in terms of conservation and nonconservation, and that the effect of applying both is to maintain the zero totality*). Donde se evidencia cómo se necesita una noción primitiva fundamental que soporte toda la argumentación de la teoría física, y esta se encuentre en el cero, además, permite establecer un puente sólido de la matemática con la física.

potencia de zero es igual que uno[236]. El tema del cero ha generado mucho debate, al punto que muchos se preguntan, si realmente el cero es un número[237]. Este hecho se debe a que no todos en la comunidad académica clasifican al cero dentro del conjunto de los números naturales, que es el conjunto base a partir del cual se construyen los demás números.

3.2.1.13. La definición de punto, momento inaugural para la lógica

Dada la definición de punto: *punto es, lo que no tiene partes* (*σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.* L.1, t.1, n. 1), si es analizada más de cerca, se tiene un término que se va a constituir como la definición (*dēfīnītiō*) de lo que corresponde como punto (*σημεῖον*), y se lo puede simbolizar con la letra minúscula sigma (σ). El punto (que es neutro en griego) es (*εἰμί*) en cuanto posee una existencia; y se podría agregar que el predicado es tener partes (*μέρος*), que en este contexto es asumido por el verbo eimí (*εἰμί*), como existir, ser o suceder en partes (Σ). Si se lo simboliza como una proposición del cálculo de predicados sería: Σ_{μ}. Lo que conduciría a que la expresión sería: $\sigma = \Sigma_{\mu}$, donde 'punto' σ es el objeto de la definición o *dēfīnītiō*, el *definiendum* es 'punto' σ, y el *definiens* 'es existir o suceder en partes' Σ; punto es lo que existe como partes. Sin embargo, en este contexto se está asumiendo que *dēfīnītiō* = *definiendum* + *definiens*, en el cual la definición está compuesta por la unión entre el *definiendum* y el *definiens*, donde el operador es la suma y la conectiva binaria es la conjunción. La anterior expresión expresada dentro del cálculo de proposiciones sería: punto (*σημεῖον*) implica lo que está constituido por partes (*μέρος*), el punto implica a las partes (*σημεῖον → μέρος*), $P \rightarrow Q$. Pero aseverar que de P se sigue Q en la expresión $P \vdash Q$, equivaldría a decir: del punto se sigue la parte, es una afirmación demasiado comprometedora. Aunque si esta es reemplazada con una expresión afín como que el átomo es parte de todo, tendría más sentido; aunque, de nuevo, afirmar que del átomo implica la existencia de las partes del todo, podría sonar más pausible pero, de nuevo, es una afirmación comprometedora. En la expresión del cálculo proposicional, que

[236] Tal hecho está planteado por Jim Wilson (2013), en *Situation: numbers raised to the zero power*. Se ve que $x^0 = 1$.

[237] En su artículo sobre la ontología del zero (*The Zero Ontology*), Arthur Witherall (2011), manifiesta que: "la sustancia del mundo como un todo es idéntica a la nada, y la realidad es intepretada como la realización del cero. Este cero, no obstante, no necesita ser interpretado como un número" pág 1.

del punto se sigue la parte (*σημεῖον → μέρος*), se simbolizaría: $\sigma \rightarrow \mu$. Que en nuestro caso se trata de una definición por la vía negativa: $\sigma \rightarrow \sim \mu$, en cuanto a lo que no tiene parte alguna (*μέρος οὐθέν*). Tendríamos que la implicación asumiría el peso de ser la función *f* responsable de dicha transformación u operación, y en este caso estaría dada por el verbo existir, ser y suceder (*εἰμί*), que ha sido simbolizado por la letra sigma mayúscula Σ. Esta expresión podría escribirse como: $f(\Sigma_{\mu}) = \sigma$, la transformación que hace que exista la parte, conlleva la creación y acarrea la existencia del punto.

En lo anterior se nota que el existir (*εἰμί*) viene aplicado a la parte (*μέρος*), como si el operador tuviera una afinamiento necesario. Es como si dentro de una suma existiera otra suma que viene a concretar y a definir la operatividad de la primera. A su vez, se presenta una mayor complejidad, si se desea reemplazar el término por cualquier término parte μ como variable ligada a una x que involucre a una variable libre. No siempre sirve una única cuantificación, como para poder aseverar que se puede ir de 'μ' a 'x' en doble sentido, dado que puede suceder que se nos presentaría un problema de tipo lógico, y se haría necesario construir varias proposiciones con distinta cuantificación a fin de poder ir del punto a la parte: nótese que aquí la variable es doble $\sigma \mid \mu$, además, el punto es incompatible con la parte (usando la barra de Sheffer[238]). En caso de una modelación teórica en que se requiera asociarle un valor a las proposiciones σ, μ, estas se simbolizarían como $\sigma = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y a $\mu = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. De igual manera, si se quiere probar los teoremas de existencia, se tienen dos proposiciones primitivas que, siguiendo a *Principia Mathematica* en el capítulo *8 *La teoría de deducción para proposiciones que contienen variables aparentes*, se tendría las siguientes proposiciones primitivas: *8.1. $\vdash. (\exists x, y).\varphi a \mid (\varphi x \mid \varphi y)$, *8.11. $\vdash. (\exists x).\varphi x \mid (\varphi a \mid \varphi b)$. Es posibe extender nuestros razonamientos a fin de satisfacer una cuantificación universal, tomando las dos proposiciones iniciales σ, μ, estas se volverían: $(x).\sigma_x$, y de $(x).\ \sigma_x \supset \mu_x$ podemos inferir $(x).\mu_x$ utilizando el *modus ponendo ponens*. Lo interesante de la situación es apreciar cómo "el punto es incompatible con la parte" $\sigma \mid \mu$,

[238] Whitehead & Russell (1927) ilustran en la Introducción a la segunda edición de *Principia Mathematica*, pág xvi, las propiedades de la barra de Sheffer (*Sheffer stroke*) dentro del capítulo acerca de las proposiciones atómicas y moleculares: $p \mid q$ como una idea primitiva que se lee "p incompatible con q", la cual es verdad si los valores de verdad tanto de p como de son verdaderos o ambos falsos. También puede ser leída p implica no q. Sus propiedades son: $\sim p .=. p \mid p$ Df, $p \supset q .=. p \mid \sim p$ Df, $p \vee q .=. \sim p \mid \sim q$ Df, $p.q .=. \sim(p \mid q)$ Df.

podría ser otra lectura posible de este primer axioma de Euclides, "punto es lo que no tiene partes". El punto σ y la parte μ pueden ser tomadas como proposiciones atómicas, donde los predicados de cada una podrían ser sus verbos. En relación al punto, *sēmeîon* (*σημεῖον*) estaría el verbo *sēmaínō* (*σημαίνω*); y en relación a la parte, *méros* (*μέρος*) estaría el verbo *meíromai* (*μείρομαι*). Lo que conduciría a las siguientes proposiciones atómicas dentro del cálculo de predicados: Σ_σ y M_μ. A su vez, el axioma lícitamente traducido es: el punto es lo que no tiene parte de ninguna manera, dado que la negación *oudeís* (*οὐδείς*) se comporta como un cuantificador universal. Lo anterior lleva a la primera proposición molecular que bien podría simbolizarse dentro del cálculo de proposiciones como: $\Sigma_\sigma \rightarrow \sim M_\mu$, pero si se le agrega la cuantificación universal conduciría a: $(\forall\sigma, \mu)\ (\Sigma_\sigma \rightarrow \sim M_\mu)$; en este contexto, el punto σ como la parte μ están tomando el lugar de dos variables libres o lo que Russell denominaría variables aparentes, en caso que se las modele en una proposición concreta pasarían a ser variables reales.

Surge entonces el problema de la realidad que alberga al punto (*σημεῖον*), ya que es un ente concreto aunque no tenga parte (*μέρος*), debería de existir en un conjunto o lo que se podría denominar en un espacio métrico M; sin embargo, la función *f* que se le asocia en la topología tradional es la distancia *f*d, para convertirse en la pareja ordenada (M, d). Sin embargo, la función *f* en este contexto no es la distancia sino la parte, la cual no está todavía definida. Es más, aún podríamos decir que la parte (*μέρος*) está en relación al todo (*ὅλος*) que, además, como se establece al comienzo de la argumentación (*σημεῖόν ἐστιν*), es. O sea el punto existe (*εἰμί*) y es (*ἐστιν*), lo que puede ser interpretado como la noción primitiva[239] de aseveración (├) en *Principia Mathematica* (├). En este caso en que se está aseverando la existencia del punto, se simbolizaría como (├.σ). De igual manera, el axioma representado en la proposición $\Sigma_\sigma \rightarrow \sim M_\mu$, si se asevera como una proposición funcional, se tendría ├: Σ_σ μ. ⊃. ~ M_μ . Sin embargo, al considerar que la parte (*μέρος*) tan solo existe en relación al todo (*ὅλος*) que, además, en este axioma, lo que subyace es lo uno (*εἷς*). Pero la definición de axioma utilizada por Euclides resalta la negación de lo que no es uno

[239] En *Principia Mathematica* (1910) se mencionan seis ideas primitivas: la proposición elemental, las funciones de proposiciones elementales, la aseveración, la aseveración de una función proposicional, la negación y la disyunción. También se introduce la definición de implicación: *1·01. p ⊃ q .=. ~ p ∨ q Df, al igual que siete proposiciones primitivas (págs. 91-97).

(*οὐδείς*): *οὐδέ* (oudé, y no, no aún) + *εἷς* (heîs, uno). Con lo cual se está negando el cuantificador universal, la expresión ($\forall\sigma$, μ) ($\Sigma_\sigma \rightarrow \sim M_\mu$) se transformaría en el espacio topológico X constituido por puntos: $\sim (\forall\sigma \in X)\ M(\sigma) \equiv (\exists\sigma \in X) \sim M(\sigma)$. El problema que todavía no se ha resuelto, es que no tenemos la función distancia fd, sino la función ser parte de, representada en el verbo *meíromai* (*μείρομαι*) que ha sido simbolizada por la letra mi mayúscula M, cuya pareja ordenada sería (X, m), donde m simboliza la acción del verbo ser parte de, o recibir como porción (*μείρομαι*), que vendría a representar la acción de ese todo (*ὅλος*) cuya función f en sentido positivo, *fὅ* es otorgar y distribuir las partes (*μέρος*). Habría que definir ese nuevo conjunto representado por el espacio topológico X sujeto a la métrica "recibir su propia porción", y se podría tentativamente asumir que las partes de un todo (*ὅλος*) tienen relación con los predicados fundamentales o sea las categorías. Lo cual representaría una nueva teoría a desarrollar.

En relación a la noción de incompatibilidad definida por la barra de Sheffer, pareciera que la negación (*οὐδείς*) reúne en sí misma más de lo que estos operadores lógicos pueden ofrecer. Es de destacar, cómo el uso de la negación *oudeís* (*οὐδείς*), que significa ninguno o nada, está conformada por la conjución y el adverbio *oudé* (*οὐδέ*), que es "y no, pero no, ni aún, ni del todo, pero tampoco, ni siquiera, de ningún modo". A fin de enfatizar el hecho que estamos frente a la negación *ou* (*οὐ*), y a la partícula que representa una conjunción dé (*δέ*) conjunción 'y, pero', pero es tan fuerte esta negación que recae sobre la conjunción: y de ninguna manera, que podría ser representada como que ningún punto se salva de no ser parte de ese uno (*εἷς*). Al simbolizar bajo una cardinalidad la cadena de puntos (*σημεῖον*) representados por la letra minúscula sigma σ que no cumplen con la condición de ser parte de algo (*οὗ μέρος οὐθέν*), se tendría que: $\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3,\ldots, \sigma_n \equiv \wedge_{n\in X}\, \sigma(n) \equiv \forall_{n\in X}\, \sigma(n)$, que al agregársele la negación de no ser parte, la expresión quedaría: $\sim (\forall_{n\in X}\, \sigma(n),\ \sigma \in E)$, que también puede ser simbolizada como: $(\forall_{n\in X}\, \sigma(n)) \sim (\sigma \in E)$, o como $(\forall_{n\in X}\, \sigma(n))\ (\sigma \notin E)$. De igual manera, se podría modificar el cuantificador universal e introducir el cuantificador existencial negado, lo que llevaría a la expresión: $\sim (\exists_{n\in X}\, \sigma(n),\ \sigma \in E)$, en todos los casos n = 1,2,…,n. Hay que tener presente que la épsilon mayúscula E representa a ese uno (*εἷς*) que es negado. Donde se enfatiza la fuerza de una negación, que aún tiene un efecto reiterativo que se manifiesta en que la proposición es negada y, a su vez, las proposiciones derivadas de la misma también lo serían. Del mismo modo, se tiene el vocablo *eís* (*εἶς*) que representa al cardinal uno. En ese sentido *oudeís* (*οὐδείς*) significa que nadie, ningún individual o ente cumple con la condición. Si la proposición es ordenada en un tipo lógico, se sigue manifiestando su impredicatividad, en que no es posible transformar esta negación en algo positivo. Sea el caso, estamos frente a una definición o axioma que es una forma abreviada de una proposición que utiliza el método lógico indirecto o reducción al absurdo para fundamentarse: *punto es, lo que no tiene partes* (*σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.* L.1, t.1, n. 1). Incorporando la negación a lo planteado antes, tendríamos: de $P \vdash Q$ pasaríamos a $P \vdash \sim Q$, $P \rightarrow \sim Q$. Donde P representa al punto (*σημεῖον*) y $\sim Q$ representa 'no tener partes', leído de manera inicial sería: el punto es lo que no tiene partes. Sin embargo, la complejidad no queda ahí, dado que el punto en este contexto, presupone que es un existencial o elemento mínimo que está presente en todos. De ahí que, si se quiere aplicar el *modus ponendo ponens* en el antecedente de esta proposición, se encuentra que no es propiamente una proposición atómica, ni en relación a un cálculo de clases se corresponde con un elemento o un conjunto. Se estaría frente a un individual único que tiene la potestad de ser un universal absoluto, tanto en relación al elemento como al conjunto.

3.2.1.14. El punto como el fundamento de la métrica de un espacio topológico

Recuérdese que un espacio métrico se define a partir del conjunto M constituido por puntos y la función distancia d, como (M, d)[240], si satisface las siguientes condiciones:

i. $d(x, y) \geq 0; \forall x, y \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ = conjunto de los números reales) no negatividad.
ii. $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y; \forall x, y \in \mathbb{R}$ identidad de los indiscernibles.
iii. $d(x, y) = d(y, x); \forall x, y \in \mathbb{R}$, simetría.
iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y); \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, desigualdad triangular.

[240] Viro O, Ivanov A (2008), *General Topology*, encontramos las propiedades que debe de satisfacer un espacio métrico, sea $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ es una métrica o función distancia en X, (pág. 18).

Ha sido anotado en el aparte anterior, que la definición de punto *sēmeîon* (*σημεῖον*) en Euclides está en relación con la función "ser parte de, o recibir su propia porción" representada por el verbo *meíromai* (*μείρομαι*). Definamos el espacio topológico X, como aquel conjunto de puntos (*σημεῖον*), para lo cual escogeremos la letra sigma mayúscula Σ para simbolizar tal agregado de puntos, donde un punto ha sido simbolizado por la letra sigma minúscula σ. La métrica que en el caso usual se define como la función distancia f^{d}, la definiremos en nuestro caso como 'el recibir uno su propia porción o ser parte de', simbolizada por la letra griega mi minúscula μ. Con lo cual diremos que en vez de una métrica, vamos a utilizar los criterios desarrollados en la teoría de categorías, disciplina de una enorme belleza, desarrollada por Saunders MacLane y Samuel Eilenberg en 1945[241]. La razón para ello radica en la necesidad de tomar distancia de las especificidades de una teoría concreta matemático-filosófica y situarnos en un campo de metalenguaje o metamatemático, que nos otorga ciertas libertades para plantear el tema que nos ocupa que requiere de la introducción de criterios nuevos sujetos a nuevas normativas, que es más fácil plantearlos desde esta metarealidad. La razón de adentrarnos en una propuesta metamatemática es poderla plantear con cierta libertad y no estar obligados a sustentarla detalle a detalle, ya que para ello habría que definirla en términos matemáticos de manera estricta, lo que va más allá del propósito y alcance de la actual reflexión.

Tenemos, por consiguiente, que en vez de (M, d) vamos a tener (Σ, ~ μ), es decir, tenemos un espacio topológico representado por la letra griega sigma mayúscula Σ, el cual está constituido por puntos σ (*σημεῖον*) que tienen la propiedad de no tener parte. Tal propiedad está asumida por la letra griega mi minúscula μ que representa al verbo *meíromai* (*μείρομαι*), que significa recibir uno su propia parte o tener su propia parte. No obstante, la parte, *méros* (*μέρος*), está en relación al todo, *ólos* (*ὅλος*), tal como está indicado en *Los Elementos* (L1, t3, n8): *El todo es mayor que la parte* (*The whole is greater than the part, καί τό ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστιν*), donde se afirma que la parte (*μέρος*) guarda una

---

[241] Saunders MacLane y Samuel Eilenberg publicada en *American Journal of Mathematics* (1945-1) el artículo "*General Theory of Natural Equivalences*", que constituye el texto que da inicio a la teoría matemática de las categorías, que tiene como armazón (*framework*) la metamatemática, que concierne al estudio de las mismas matemáticas utilizando métodos matemáticos. Su origen se remonta algunas reflexiones contenidas en el *Begriffsschrift* de Gottlob Frege, a *Principia Mathematica* de Whitehead & Russell y a los trabajos para la fundamentación de las matemáticas de David Hilbert.

afiliación con el todo (*ὅλος*). Lo interesante de este axioma es el adjetivo en singular *mégas* (*μέγας*), que significa grande, espacioso, extenso; fuerte, poderoso, principal; pero sobre todo nos señala las características de un espacio largo en cuanto extenso, ancho en cuanto profundo, alto en cuanto elevado. Siendo su sustantivo (masculino) *mégethos* (*μέγεθος*), que es grandeza, tamaño, magnitud, poder, y todas las características del espacio magnificadas. Su verbo es *megalúno* (*μεγαλύνω*) que es engrandecer, acrecentar, robustecer, magnificar, exaltar. En ese sentido vamos a proponer en concordancia a la naturaleza misma de un espacio topológico, que este axioma de *Los Elementos* haga referencia a que el todo (*ὅλος*) se relaciona con la parte (*μέρος*) mediado por la noción de extensión en cuanto dimensión, que es más grande o sea la dimensionalidad del todo siempre va a sobrepasar a la dimensionalidad de la parte. Sea el caso la función f que relaciona en su dominio al todo (*ὅλος*) con la parte (*μέρος*) como codominio es *mégas* (*μέγας*) y/o su verbo *megalúno* (*μεγαλύνω*): f (*μεγαλύνω*): *ὅλος* → *μέρος*, del todo vamos a la parte mediado por la acción de lo que posee mayor dimensión en términos de magnitud. Lo que nos lleva a la expresión: $f(\theta)$: *ὅ*→ μ, escogeremos la letra griega theta θ tomada del sustantivo grandeza en extensión (*μέγεθος*), como la que simboliza la acción del operador que va del todo a la parte y de la parte al todo, que nos daría en un primer caso que es una función sobreyectiva. Aunque lo interesante en este caso, es que el todo (*ὅλος*) no puede ser definido, lo que hace que cuando el inverso de la función $f^{\theta-1}$ que va de la parte (*μέρος*) al todo (*ὅλος*) siempre va encontrar un elemento en el dominio que la defina bien. Sin embargo, no siempre va a suceder lo mismo del todo (*ὅλος*) hacia la parte (*μέρος*), donde esta función f^{θ} va a tener elementos en su dominio que no se van a encontrar en su codominio. Con lo cual, en estricto sentido no se podría aplicar la noción de función, pero se puede restringir el dominio de la función a lo que conozcamos y podamos definirla de manera correcta, o sea procurándonos un subconjunto (*ὅ** ⊂ *Ὄ*) que nos permita tenerla bien definida: $f^{\theta*}$: *ὅ**→ μ. Tal es la estrategia que se debe adoptar a fin de evitar que el todo (*ὅλος*) siempre superior a la parte nos lleve a una impredicatividad. Un espacio topológico es la pareja (*ὅ*, μ*) enn donde se tienen que cumplir las siguientes propiedades: ὅ* es un espacio, μ es una colección de subconjuntos o partes de ὅ*, tales que cumplen las siguientes condiciones: (i) La unión de cualquier colección de conjuntos o partes de μ sigue perteneciendo a μ, (ii) La intersección de cualquier colección o partes de μ sigue perteneciendo a μ, (iii) el conjunto vacío ∅, como también ὅ* pertenecen a μ – el todo pertenece a la parte al igual que el conjunto vacío ∅, que en este caso se asemeja al punto . Luego μ es una topología sobre ὅ*, que permite que: la pareja (ὅ*, μ) es un espacio topológico, los elementos de ὅ* son puntos (*σημεῖον*) sobre este espacio topológico, los elementos de μ son conjuntos abiertos sobre el espacio topológico (ὅ*, μ)[242].

El cálculo de relaciones llevaría a afirmar que la parte está relacionada con el todo pRt o sea (*μέρος* R *ὅλος*), que simbolizado nos da (*μ*R*ὅ*). Pero tal comentario guarda un tesoro adicional y es la palabra ‘mayor’, la cual conduce directamente a los números reales ℝ, que se les define como un campo, o sea una estructura fundamental algebráica que posee las operaciones aritméticas de la suma y la multiplicación, que está totalmente ordenado, y que posee una relación de orden dada por < : (ℝ, +, · , <). Esta relación de orden <, es lo que denominamos ‘el todo es mayor que la parte’ o sea (*μέρος* < *ὅλος*); *μ* < *ὅ*, *ὅ*> *μ*. Además, los números reales poseen el axioma del supremo, que hace que toda serie de reales esté acotada superiormente y tenga un supremo; esta propiedad es de naturaleza topológica y obedece al principio de completitud de Weierstrass, y al teorema Bolzano-Weierstrass donde cada secuencia acotada en los reales tiene una subsecuencia convergente. Así mismo, no hay brechas en términos de las denominadas cortaduras de Dedekind[243], que conduce a la noción de completitud de Dedekind. La otra es la completitud de Cauchy, que corresponde a la completez de un espacio métrico donde si se tiene una secuencia de Cachy en la cual los elementos se vuelven cada vez más cercanos a medida que la secuencia progresa y esto hace que tengan un límite y sea convergente.

Antes de seguir, es preciso analizar más de cerca el axioma de Euclides por medio del cual se afirma que el todo es mayor que la parte (*καί τό ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστιν*).

---

[242] Tomado de: *Elementary topology*; Viro, Ivanov y Netsvetaev (2008) han realizado los ajustes del caso reemplazando al espacio topológico X por ὅ*, y a los subconjuntos Ω por μ, que representan a las partes (*μέρος*) de ese todo (*ὅλος*), en lo que concierne a las propiedades i – iii de (X, Ω), (pág. 11).

[243] En su texto *Continuidad y números irracionales* (*Continuity and Irrational Numbers*), Richard Dedekind (1853) introduce las famosas cortaduras: “Donde todo número racional ‘a’ efectúa una separación del sistema R en dos clases tales que, todo numero a_1 de la primera clase A_1 es menor que todo número a_2 de la segunda clase A_2; el número ‘a’ es ya sea el mayor número de la clase A_1 o el menor número de la clase A_2. Si ahora cualquier separación del sistema R en dos clases A_1, A_2, está dada por tener esta sola propiedad característica, en que cada número de a_1 en A_1 es menor que cada número a_2 en A_2, luego por brevedad denominaremos tal separación una cortadura (*Schnitt*) y será designada por (A_1, A_2)”, (pág 12 ob.cit).

Se intentará construir algo distinto a la métrica tradicional (M, d), fundamentada en la noción de distancia entre dos puntos. El conjunto que nos ocupa en un sentido afirmativo está constituido por puntos (*σημεῖον*) que son las partes (*μέρος*) de ese todo (*ὅλος*); además, tenemos que el todo siempre es mayor que la parte, tal hecho permite aseverar que la noción de orden en mayoranza se tiene por medio del verbo *megalúno* (*μεγαλύνω*) que es utilizado directamente para darle forma a la relación de la parte con el todo pRt o (*μ*R*ὅ*). Hemos en este instante de nombrar el conjunto donde habitan los puntos como partes de un todo, el punto (*σημεῖον*) es lo que no es lo uno *εἶς*: *σημεῖον* ≡ ~ *εἶς*, simbolizaremos a lo uno como *ἶ*, con lo cual la expresión se transformada se vuelve: σ ≡ ~ *ἶ*. Notamos que en la equivalencia estamos colocando a ambos lados de la misma dos individuales, uno afirmado y el otro negado, tal hecho merece ser destacado, ya que puede ser considerado como una propiedad fundamental más si se da en relación a dos individuales. Estos son símbolos simples además de ser nociones primitivas son tomados como símbolos primarios[244]. Por consiguiente, el espacio topológico que nos ocupa será el uno, eís (*εἶς*). Lo que nos lleva a afirmar, que la pareja ordenada que constituye nuestro espacio topológico será (Ἶ, σ): donde se tiene que se respeta la categoría todo-parte, afirmando que ‘el todo es lo uno’, a su vez también se cumple la propiedad singular-plural, es decir, se le pueden asociar algunas propiedades duales, como las sugeridas por Pitágoras y mencionadas por Aristóteles en su *Metafísica*[245] y que pueden haber inspirado la teoría de las categorías de diversos autores.

Surge entonces la pregunta acerca de qué tipo de métrica u otra variante caracteriza el *modus operandi* de este espacio topológico; en vez de (M, d) se a proponer en su lugar aquello que caracteriza a lo uno (*εἶς*) que es unir o unificar, dado que es una mónada que posee la propiedad de la unidad (*μονάς*), además, la propiedad que la define es permanecer sola (*μονόω*) y en completa unidad consigo misma. Lo propio de lo uno (*εἶς*) es reunir, reunir para sí, tomar (*εἰσαγείρω*); además, está cercana a la proposición eís (*εἰς*), que es adentro y que está gobernada por el caso acusativo que conlleva un objeto directo y un verbo transitivo, lo que es conveniente para nuestra formulación. Adicionalmente, guarda

---

244 Este heho está inspirado en la teoría de las descripciones de Russell (1919), en *Introduction to Mathematical Philosophy*. Y en la necesidad de tener un irreducible tan necesario para fundamentar cualquier propuesta teórica, ya que siempre vamos a requerir de una noción no susceptible de ser reducida, (pág. 139).

245 *Metafísica* de Aristóteles (985a 20-26), se mencionan las diez parejas duales que caracterizan lo dual.

relación con el verbo *eimí* (*εἰμί*), que en su segunda conjugación en presente indicativo es tanto *εἶς* como *εἶ*, lo que da un peso adicional dado que es el verbo que gobierna la misma existencia: significa existir, suceder y ser. Es favorable el uso de los cuantificadores universal (∀) y existencial (∃), dado que de lo uno (*εἶς*) que es todo (*ὅλος*), *εἶς* ≡ *ὅλος*, se cuantifica tanto en lo universal como en lo existencial; además, se lo puede situar como una cuantificación que no se ve sobrepasada por ninguna otra; en ese sentido, se trata de una cuantificación que puede ser tomada como un *supremum*[246]. En consecuencia, lo uno (*εἶς*) puede ser considerado como el *Supremum*, muy en concordancia con *mégethos* (*μέγεθος*): que significa grandeza, poder, magnimidad, y que está presente en el artículo *mégas* (*μέγας*), mayor, mencionado cuando se dice que el todo es mayor que toda parte. Este hecho está presente como un axioma en *Los Elementos* '*el todo es mayor que la parte*', podría ser tomado como la primera definición formal del conjunto de los números reales ℝ. Con lo cual, la pareja que vamos a situar para definir la topología de (Ἶ, σ) que representa al todo (*ὅλος*) y a la parte (*μέρος*), como (*Ὄ, μ*), y que sea una propuesta diferente a (M, d).

La acción de unificar de lo uno (*εἶς*), que desde adentro (*εἰς*) reune (*εἰσαγείρω*), es muy cercano a introducir, importar, hacer venir, llevar a; incluir, admitir (*εἰσάγω*). Con lo cual, es potestad de lo uno (*εἶς*) reunir, llevar, tomar, que es la acción que padecería un punto (*σημεῖον*) en relación al todo (*ὅλος*) que le da su unidad y los reúne en torno suyo. Nos preguntamos, si se puede hablar de distancia en este contexto, aunque habría que definir una subteoría derivada de la anterior. La realidad, la clase, la colección, el agregado, en fin lo que se denomina conjunto, siguiendo a Cantor que lo nombró como cantidad o *Menge*, en griego tenemos el verbo *athroízo* (*αθροίζω*), que es: sumar, reunir, recoger, crecer, aumentar. Este verbo está relacionado con la cantidad y el tamaño (*ποσός*), asimismo con multitud *ókhlos* (*ὄχλος*), que de alguna manera es un sinónimo de conjunto. Por consiguiente, dado que todo se origina a partir del número (*ἀριθμός*), palabra que también significa cantidad, cuenta, numeración, denominaremos nuestro conjunto como aquel que proviene del número con la letra Ἀ, y a un elemento como *α*, que es un número. De manera, que tendríamos la métrica (Ἀ, α) en relación al número tomado como el

[246] La necesidad de tomar en cuenta la propiedad del supremo dentro de la cuantificación está sugerido en el texto de *Encoding Mathematics in First Order Logic* por Robert Constable (2003), pág. 3.

conjunto, en todos los sentidos posibles en que puede ser entendido, y la alfa minúscula α como representante del verbo *athroízo* (*αθροίζω*): todo lo que parte del conjunto en cuanto cantidad (*Menge*, *ποσός*), que involucra la multitud (*ὄχλος*), en este caso de los números y por ende la de los puntos (*σημεῖον*). Se estaría afirmando así que toda métrica (M, d) depende de la noción de conjunto y de la acción de contar propia del número: $(M, d) \subset (Ἀ, \alpha)$, siendo una subteoría de la teoría principal, que bien podría ser tomada tanto como una teoría o como una metateoría para afirmar: que toda teoría es un subconjunto de una metateoría, $t \subset M_t$[247].

3.2.1.15. La noción del punto apreciada como el conjunto vacío

Aunque quisiéramos identificar al punto (*σημεῖον*) con el conjunto vacío { }, el elemento vacío ∅, o aquel conjunto con un único elemento que es el elemento vacío {∅}, la argumentación va más allá del mismo[248]. Si afirmamos, que existe la parte (*μέρος*) y el todo (*ὅλος*), en cuanto que podamos aseverar: se existe como parte o como todo $Q \vee T$, no se cumple la proposición, dado que no es parte ni es una totalidad. Esto conlleva a que no se le pueda aplicar la teoría de clases, ya que no es un elemento al no tener la afiliación a una clase o conjunto. La membresía a una clase no la cumple ya que no satisface la condición inicial de ser miembro de la misma. Tenemos una instancia que rehúye verse afiliada a algo sobre la cual podamos predicar algo de ella o aplicar las distintas leyes de inferencia del cálculo proposicional, debido a que tampoco se le puede asociar a ser ni una proposición atómica y por ende no podrá ser molecular: rehúye verse conectada a las tradicionales conectivas binarias, y no se la puede vincular como parte de un par ordenado (a, b). Aquí se ingresa en otra sutileza en la noción de par ordenado, ya que sería más

[247] Steven E. Wallis (2010) en sus artículos: *Toward a Science of Metatheory*, *Emerging Perspectives of Metatheory and Theory*, y en *Toward a Science of Metatheory* (2010) menciona que las metateorías son un importante campo de estudio dado que da forma a las teorías e incrementan su comprensión y optimizan su aplicabilidad.

[248] La complejidad de la existencia del punto ha sido señalada en el artículo *The Point of the Empty Set* de Michael Barr (1972), en especial señala que en muchas ocasiones no es posible señalar la presencia del punto. La ausencia de una escisión en una categoría abeliana frente al mapeo de $\Phi \rightarrow X$, $X \neq \Phi$; donde el conjunto vacío viene de una manera diferente, como un subobjeto no trivial de un objeto terminal. Esto llevo a que Beck tuviera que introducir un funtor puro para reconocer el papel desempeñado por el conjunto vacío. Evidencia que cuando se quiere encontrar un punto no es posible, evidencia la homología del punto con el conjunto vacío, siendo en muchos casos imposible diferenciarlos dado que bien pueden ser idénticos.

legítimo hablar de dos puntos como pares ordenados (a, b), mas no es posible hablar del punto (*σημεῖον*) como un individual, que se definiría en virtud a otro elemento, es único y tal unicidad no es aprehensible en la noción de par ordenado. Ya que el punto no existe en relación a algo que no sea el mismo y aún esta misma condición puede que no la cumpla: del punto no se puede afirmar ni negar nada acerca de él (el punto es neutro en griego, *τό σημεῖον*). Esta es la razón por la cual, la negación (*οὐδείς*) está dada en relación a la parte (*μέρος*) y no en relación a negar al punto (*σημεῖον*) en sí mismo como ~ σ, sino más bien como ~μ. Algo parecido parece darse en relación al vacío ∅, sin embargo una de las diferencias; es que hablamos de conjunto vacío { }, de elemento vacío ∅, y de un conjunto con un solo elemento que es el elemento vacío {∅}. El problema del punto (*σημεῖον*) está que al no tener ningún tipo de dimensión, su papel es más como un instrumento epistemológico que ayuda a construir teorías matemáticas de distinta índole, más no existe el vacío como tal a nivel de una ontología matemática[249]. Parte de la gran dificultad en manipular y entender estas nociones primitivas a través de los axiomas que las definen, es la ausencia tanto de una epistemología como de una ontología matemática lo suficiente madura y sólida.

Aquí no se puede decir lo mismo del punto (*σημεῖον*), dado que no es predicable de manera directa sino se predica algo de él de manera indirecta, en consecuencia, es una predicación incompleta, dado que no es capaz de asir al sujeto sobre el cual se va a efectuar el acto predicativo. Y no se puede decir que el punto (*σημεῖον*) esté vacío (*κενός*), aunque se asemeje en algo al vacío, como ya se ha afirmado anteriormente, no es exactamente lo mismo (*σημεῖον* ≠ *κενός*). Aunque parezca algo increíble, el punto está investido de unas cualidades que no se dejan cuantificar a nivel de una cantidad o cardinalidad, cuando es abordado a nivel individual. En consecuencia, el punto (*σημεῖον*) es capaz de ordenar o de estar sometido a una ordinalidad, en cuanto antecede a todos: no existe un ente capaz de metrizar (*μετρία*) o medir (*μετρέω*) algo anterior a él. Sin embargo, el punto es lo que no es parte (*οὐ−μέρος*), es lo que no es uno (*οὐ−εἷς*), no se puede establecer ninguna cardinalidad

[249] La complejidad de las nociones primitivas en Euclides, ha llevado a que se les denomine en muchos casos unos objetos de ficción. Su papel debe ser más de servir de diagramas en un sistema de prueba pictórico, tal es la posición de Jody *Azzouni (2004) en su artículo Proof and Ontology in Euclidean Mathematics*, para quien los griegos se tomarón demasiado en serio estas definiciones debido a la interpretación que ellas ofrecen.

sobre el mismo. A su vez, aunque lo asemejemos al cero, tampoco la cumple dado que podemos decir que la cardinalidad del cero es cero más la cardinalidad del punto no es cero.

El punto es más que no lo no uno (*οὐ−εἷς*), es lo *oudeís* uno, lo que de ninguna manera y para nada puede ser uno (*οὐδείς*). Este hecho nos conduce a una cadena de sucesivas demostraciones indirectas que nunca alcanzarán a ser directas: una paradoja que la denominaremos *la paradoja de la imposibilidad de redimir la reducción al absurdo a través de sucesivos intentos por afinar los argumentos*, sea agregando o modificándolos. Al volver a examinar la primera definición de los elementos (*σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.* L.1, t.1, n. 1) nos encontramos, como lo sugerimos, en que se aborda la definición del punto (*σημεῖον*) de manera negativa, tal hecho plantea todo un problema. Ya se abordó una propuesta de la definición (*dēfīnītiō*) del punto (*σημεῖον*), simbolizado por la letra sigma minúscula σ: el *definiendum* es ser parte μ y el *definiens* es existir o verbo eimí (*εἰμί*), y se ha escogido la sigma mayúscula Σ. Sin embargo, tal definición es más apropiada para un método de demostración directo, donde el objeto de la definición que es el punto (*σημεῖον*), el cual es presupuestado como la proposición P que es tomada como el origen de la demostración. Se supone que todos los argumentos deben de ser llamados y que la suficiencia de los mismos ha de garantizar la demostración. De manera que, una definición bien realizada supone que está soportada en lo que está contenido y aseverado pueda ser probado de manera positiva: es decir, podemos realizar todo el recorrido hasta llegar al destino final, este hecho es recreado por la función $f(\Sigma_\mu) = \sigma$. Donde si tenemos como dominio de la función la noción de punto (*σημεῖον*) que representa nuestro *definiendum*, podemos llegar al codominio que en nuestro caso está recreado la noción de parte (*μέρος*), que representa al *definiens* y que puede ser comprobada por medio de una serie de pasos garantizados dentro de un proceso inferencial consistente y completo. Es decir, al expresar de manera sucinta: Del punto (*σημεῖον*) podemos llegar a la parte (*μέρος*), simbolizado como: $\sigma \rightarrow \mu$. Esa flecha representa la función *f* desencadenada por el verbo existir, ser y suceder (*εἰμί*), el cual recorre toda una serie de pasos, aquellos garantizados en propiedad por la demostración directa o condicional: para demostrar la parte μ introducimos a σ como punto de partida garantizado y cierto, como una proposición que se da como punto de partida. A su vez, debemos podernos devolver de μ hacia σ en sentido inverso: tenemos entonces una doble implicación $\sigma \leftrightarrow \mu$, una sobreyectividad en un sentido global se debería de cumplir en la demostración. Este paso puede ser recreado como una composición extendida de funciones, $f: \sigma \to \mu$, y $g: \mu \to \sigma$. Donde $(f \circ g)(\mu)$ es igual a $f(g(\mu))$, teniendo en cuenta, que en medio se tiene una cantidad precisa y completa de funciones intermedias: sea el caso $f(\sigma)$ o $g(\mu)$, vendría a ser $(f \circ h \circ i \circ j \circ, \ldots, \circ\, g)(\mu)$, partiendo de σ podemos llegar a μ por medio de una cadena de funciones conectadas, en las cuales el objeto del dominio o sea el punto se va transformando en el codominio o sea en la parte.

No obstante, el método aquí empleado no es el directo sino el indirecto o de reducción al absurdo, en este caso, no sería tan legítimo llamarlo reducción al absurdo, sino aquel en que se niega una parte del predicado del término a probar. Esa parte del predicado negado en la parte (*μέρος*), la cual es negada reiterativamente por medio de *oudeís* (*οὐδείς*). Sin embargo, lo complejo de este camino, es que la parte (*μέρος*) no representa la predicación completa del punto (*σημεῖον*), es decir: existen (*εἰμί*) otros predicados que son desconocidos y que de alguna manera permitirían completar la predicación acerca del punto (*σημεῖον*). La situación paradojal de este camino se está aquí afirmando algo, es que no es posible hacerlo. En este sentido, afirmar una axiomática completa y consistente de los entes (*ὄντος*) matemáticos no es posible, este axioma anticipa en más de dos mil años lo encontrado por Kurt Gödel[250]. No hay manera de poder dar una definición completa y consistente del punto (*σημεῖον*); aunque existan otros referentes (*referent*) conceptuales nunca se logrará anunciar (*refero*) el añorado *referendum*, que en nuestro caso es la parte o aquello que la completa. Aún podría suceder, que resulte otro *referendum* más primario que la parte, lo cual hace que no podamos estar ni seguros, que la parte representa el final de nuestro camino, podría tratarse de una noción intermedia y además incompleta dentro de todo el proceso inferencial que la función como transformación debe de recorrer. Este caso

---

[250] Una axiomatización completa y consistente de la matemática no es posible, tal hecho fue planteado por Kurt Gödel (1930) y está ilustrado en *Some Metamathematical Results on Completeness and Consistency*. Se puede afirmar, que en Gödel culmina parte de la problemática acerca de la fundamentación de las matemáticas, la orientada en buscar una axiomatización completa de los números naturales. Estos trabajos fueron iniciados por Frege, luego continuados por Hilbert, von Neumann, Ackermann y, en especial, el sistema axiomático Zermelo-Fraenkel. El texto con el cual comienza Gödel a exponer su trabajo es de *Principia Mathematica*, obra que adoptó en parte la notación de la aritmética de Peano, y que además se demostró que no es susceptible de ser axiomatizada; este hecho fue corroborado luego por Tarski entre otros tantos.

estaría recreado en ($f \circ$ h ∘ i (μ) ∘ j ∘,…., ∘ g) (χ), lo que nos lleva a que la travesía podría ser f: σ → μ, y g: μ → χ, donde se desconoce quién es χ. Es decir, nunca será posible descifrar dicha variable o lo que ella representa. Este hecho manifiesta, además, que nunca por medio de la parte (*μέρος*) podremos llegar al todo (*ὅλος*): es decir, que la totalidad es inaprehensible y siempre que hablemos de ella, nos conducirá a las denominadas totalidades ilegítimas o impredicatividades lógico formales propias de algunas famosas paradojas matemáticas[251]. De modo que el uno (*εἷς*) que está contenido en el corazón de la negación (*οὐδείς*), se sabe que existe pero nunca podemos afirmar lo que es, por tal motivo, se lo está negando aquí: *οὐδέ* + *εἷς*. De la unidad (*μονάς*) primigenia situada en el origen (*ἀρχή*) se conoce su existencia (*εἰμί*), más definir las características de tal ente (*ὄντος*) es imposible, es el lugar de lo ilimitado (*ἄπειρος*). Al final, toda metría (*μετρία*) posee un carácter sagrado, en cuanto al ser una señal (*σῆμα*) de los dioses, se oculta a sí misma. El medir (*μετρέω*) recurriendo al número (*ἀριθμός*) fruto del desenvolvimiento del uno (*εἷς*) primigenio, es algo que se realiza por medio del dos (*δύο*), la dualidad (*δυάς*) de la díada. La pareja es el camino a tomar, por tal motivo sigue la definición de línea, que es propiamente la que va a permitir una aritmetización (*ἀριθμέω*) del número. La búsqueda de esa actividad de aislarse (*μονόω*) de la unidad, es una tarea que siempre motivará el camino aquí emprendo: el encuentro con la mónada (*μοναδα*) original pitagórica.

3.2.1.16. El comienzo de una ontología matemática a partir de la noción del punto

Un tema esencial es el surgimiento del pensamiento especulativo, entendido como la imposibilidad de poder conocer de manera directa e indirecta el objeto por parte del sujeto pensante. Su distintivo fundamental es orientarse a ampliar los ámbitos teóricos y guiarse en el mundo fenoménico, lo cual lo hace muy útil y práctico contrariamente a lo que muchos pensarían del mismo. No siempre estas consideraciones se ven reflejadas en unos

[251] Las paradojas en las matemáticas han sido un tema muy controvertido en la mitad del siglo XIX, tal como lo muestra Mamolo Ami y Rina Zazkis (2008) en *Paradoxes a Window to Infinity*. Se escogen dos famosas paradojas como es la del Gran Hotel de Hilbert y la Adivinanza de la bola de ping-pong para que dos grupos de estudiantes las analicen: el primer grupo constituido por estudiantes de artes liberales y el segundo grupo formado por estudiantes de la maestría de educación en matemáticas. Se llega a la conclusión que los participantes perciben el infinito como un proceso que va en marcha, en vez de uno que se haya completado, no detectando las ideas que pueden entrar en conflicto.

procedimientos algoritmos detallados, que orienten el trasegar de la filosofía matemática[252]. El vocablo de guarismo proviene del gran matemático persa *al-Khwārizmī*, pero cuya etimología se remonta al número (*ἀριθμός*), y señala los caminos procedimentales que posibilitan establecer una correlación del desarrollo matemático con el mundo externo modelado. Pero en relación a lo que carece (*οὐδέ*) de partes (*μέρος*), o lo que está constituido por partes es contrario a lo uno (*οὐδείς*): lo que de ninguna manera es uno (*οὐδέ + εἷς*) es lo que está fragmentado y dividido en partes. De manera que el uso de verbo ser y existir (*εἰμί*) en la definición de punto (*σημεῖον*), nos presenta aquella instancia desde la cual se fundamenta la existencia (∈). Se nota cómo los distintos vocablos que hacen alusión a la misma existencia desde un aspecto ontológico: el participio presente *ṓn* (*ὤν*) del verbo (*εἰμί*) en unión con el vocablo logos (*λόγος*), indica aquella descripción o tratado acerca del ser que existe. El participio, es aquella forma impersonal que funciona como un adjetivo que califica al sustantivo sin perder toda su fuerza verbal, aquí tomado como un participio activo o presente cuya temporalidad no está limitada, creando la sensación de algo que se alarga de manera permanente en el espacio: el participio no está sujeto a la contingencia de otros tiempos verbales más dados a señalar el inicio de su acción y la finalización de la misma. Esta suerte de presente continuo en que se circunscribe el participio activo o presente, nos presenta aquello que es (*ἐστί*) en cuanto existe y es el fundamento de la misma existencia. El deseo de sustantivizar las formas verbales, como las participias de (*εἰμί*), nos conduce al ente (*ὄντος*). En ese deseo y necesidad de asociarle al uno (*εἷς*), aquello que es lo primero (*πρῶτος*), la presencia de un sujeto frente al cual la existencia le está sometida y se ordena en concordancia al mismo (*ὑποτάσσω*). Ese ser (*ὤν*) tiene la potestad de poner bajo si (*ὑπο-*) todo aquello que es capaz de ordenar, arreglar, emprender y asignar (*τάσσω*),

[252] La ontología matemática surgió en la búsqueda por la fundamentación de la matemática, en especial a través de la axiomatización de los números naturales. Haim Gaifman (2012) en su artículo: *On Ontology and Realism in Mathematics*, se orienta hacia un acercamiento ontológico realista que sigue el *Dictum* de Wittgentein: "El mundo es la totalidad de los hechos, no de las cosas" (*Tractatus Logico-Philosophicus*, 1.1). En ese sentido, Gaifman, se va a ocupar de los hechos objetivos o las denominadas verdades objetivas. Se efectúa una distinción entre una posición realista fuerte y una débil en relación a las proposiciones de primer orden y las de mayor orden dentro de la aritmética y la teoría de conjuntos. Gaifman reconocer que existen unas limitaciones ontológicas en relación a nuestras compentencias epistemológicas, atendiendo al hecho que el conocimiento matemático está certificado en pruebas, en teoremas numerables, lo que plantea un gran interrogante frente a la indecibilidad de muchos de sus resultados. Es de destacar que la visión que se plantea en el presente numeral, concierne al estatuto ontológico de los entes primigenios sobre los cuales se fundamenta la matemática, en este caso la noción de punto dentro de una geometría o de una topología.

como subyaciéndolo desde abajo, bajo y a lo largo (*ὑπό*). Sin que haya que entrar en consideraciones acerca del mismo a nivel del Ser, en cuanto aquello que permite venir a la existencia (*γίγνομαι*), aquel ente (*ὄντος*) fundamento del existir y ser (*εἰμί*), se dirá a nivel de las matemáticas que tal instancia estaría en concordancia con la piedra angular alrededor de la cual gravita la misma disciplina.

Notamos que en la noción de punto (*σημεῖον*), nos encontramos con la noción de aquello que una totalidad (*ὅλος*) carente por completo (*οὐδείς*) de partes (*μέρος*), estamos frente a una instancia que no posee una externalidad fuera de ella misma: es algo autocontenido en sí mismo, solo y único (*μέρος*), cuya unidad (*μονάς*) es completa. Muchas nociones se identifican con este estadio fundamental, como el átomo (*ἄτομος*), aquello que no (*ἀ*-) puede ser cortado o dividido (*τέμνω*). Es lo que es uno (*εἷς*) consigo y en sí mismo, origen (*ἀρχή*) de todo cuanto existe (*εἰμί*), asimismo fundamento de toda medida o metría (*μετρία*) e instaurándose como el eje del número (*ἀριθμός*). Es lo que siempre queda reducido a uno, que está aislado y solo (*μονόω*), siendo su característica fundamental su completez que le permite ser el fundamento del cielo y cosmos (*οὐρανός*)[253]. Se le asocia muchas veces la noción del vacío (*κενός*) y del conjunto vacío $\{\emptyset\}$, como también es el eje de lo que es lo infinito (*ἄπειρος*). Lo que sustenta y hace posible al uno, es el medir (*μετρέω*) y el contar (*ἀριθμέω*), y por ende es la instancia desde la cual se sostiene y modela una teoría matemática. A su vez, es el eje desde el cual se genera ese paso del cronos

[253] La noción de punto ha sido estudíada por Alfred N. Whitehead (1929) en su obra: *Process and Reality an Essay in Cosmology*, donde lo estudia en relación a las extensiones conectadas: “Un elemento geométrico es llamado un punto, cuando no existe un elemento geométrico que incida sobre él, está definición es comparable a la de Euclides. Se dice que un elemento geométrico a es incidente en un elemento geométrico b, cuando cada miembro de de b cubre a cada elemento de a, siendo a y b distintos. Se dice que se tiene una convergencia aguda” (pág. 299. Ob. Cit). La definición de punto que realiza Whitehead está en relación con la teoría de conjuntos dentro de un contexto lógico, donde punto es aquel elemento que no está sujeto a ningún tipo de incidencia por parte de otros, es decir no de ve afectado por las propiedades de los conjuntos. Whitehead utiliza el verbo *to cover*, que es cubrir, abrazar, abarcar, recorrer para referirse a la propiedad que se da entre los conjuntos a los cuales llama *abstractives sets*: un conjunto abstractivo es aquel cuya propiedad fundamental es cubrir a los miembros (*member*) de un elemento (*element*) geométrico. Es de destacar que subordine la noción de miembro a la de elemento, con lo cual el miembro sería una noción más primitiva que la de elemento, la noción de conjunto está en relación con un proceso de abstracción que lo califica y determina. En esta obra Whitehead trata muchos temas, en especial: realiza un esbozo propio de la historia de la filosofía, la relación del lenguaje con la experiencia, y los vínculos entre filosofía, ciencia y religión.

(*κρόνος*) al kairos (*καιρός*)[254], que es lo que permite la existencia del cosmos (*οὐρανός*) habitado por individuos pertenecientes a distintas especies (*εἶδος*). Desde el punto de vista aritmético se trata de la generación de los números y desde la perspectiva geométrica es el surgimiento de todas las formas puras fundamento de toda modelación métrica. Lo que hay que destacar de este hecho es que este plano puntual (*σημεῖον*) es infinito (*ἄπειρος*), uno (*εἷς*), único (*μονάς*), indiviso (*ἀτέμνω*); y es el eje de todo tipo de especulación, y no es agotable frente a los distintos acercamientos teóricos que se realicen de él. No es fácil contruir una teoría que tenga unas aplicaciones prácticas modelables de la misma. Es el entorno donde se construye y se elabora la ontología matemática, que por su naturaleza demande unos usos propios a nivel de lenguaje. Su lugar por excelencia es el metalenguaje, aquello que está por encima de todas las teorías y modelos, lo enigmático y por ende el lugar de las paradojas, aporías, antinomias y de los temas jamas resueltos. Como la paradoja del continuo entre los números prefigurada por Zenón de Elea[255] (*Ζήνων ο Ελεάτης*), discípulo de Parménides de Elea (*Παρμενίδης ὁ Ἐλεάτης*), contemporáneo de Pitágoras de Samos (*Πυθαγόρας ὁ Σάμιος*), la cual fue tomada y vuelta a plantear más de dos milenios y medio por el matemático alemán Georg Cantor, quien estudió de cerca a los números reales y sus propiedades, entre ellas la existencia de la hipótesis del continuo en relación con la cardinalidad del conjunto de los números reales, lo cual le permite estudiar los distintos tipos de infinito que se pueden encontrar en la teoría de números.

---

[254] Se aborda el *kairós* como la oportunidad que personifica un concepto estratégico en la retórica, la literatura, la estética y la ética; tal es la concepción presentada en su libro *Rhetoric and Kairos* por Phillip Sipiora (2002), donde aborda el *kairós* como el tiempo correcto en oposición al tiempo caótico de *cronos*. También posee otros significados relacionados con la simetría, la propiedad, la ocasión, la medida apropiada, la conveniencia, la proporción. El *kairós* es mencionado por primera vez en la *Ilíada* de Homero como un lugar vital en el cuerpo que merece una protección especial, esto le otorga un significado espacial. Hesíodo lo aborda como la medida justa en relación a la proporción. Asimismo, *kairós* denota aquella parte del tiempo que se sitúa entre un comienzo y un final. Nótese que la noción de *kairós* posee muchos significados; en este texto se ha resaltado la dinámica diálectica entre *cronos* en oposición a *kairños* como el fundamento que permite la creación del cosmos a partir del ordenamiento que traen los números impuesto por el *kairós*.

[255] Las paradojas de Zenón de Elea: son Aquiles y la tortuga, la de la flecha, la del estadio, entre otras han sido el origen para el desarrollo de las secuencias, las series infinitas y las integrales impropias. Un corredor nunca alcanzará su destino en una carrera dado que él debe de cubrir la mitad de la distancia antes que cubra la totalidad de la misma. Sea T el tiempo, se tiene $T + T/2 + T/4 + \ldots + T/2^n + \ldots = 2T$, debería de ser verda en algún sentido. Este tema está expuesto en por Tom Apostol (1966) *Calculus*, vol. 1. Pág. 374-5.

3.2.2. La fundamentación matemática a partir de la contrastación de la dualidad

Se recalca que es harto difícil decir o aseverar algo de lo uno (*εἶς*), que sea estrictamente útil dado que en sí mismo, es lo que está solo, aislado y separado como único (*οἶος*), lo uno en sí mismo es la unidad (*μονάς*) inexpresable. El uno (*εἶς*) para Pitágoras es lo ilimitado y carente de fronteras (*ἄπειρος*), siendo propiamente un campo muy fructífero a nivel de una reflexión metafísica y una ontológica. La construcción de un modelo con pretenciones prácticas, menos especulativo y más decible-decidible dentro de una teoría filosófico-matemática comienza con la dualidad propiamente del dos (δύο). Lo que está en segundo (*δεύτερος*) lugar es lo que permite definir y construir un sitio o lugar *topos* (*τόπος*). Dado que el topos de lo uno (*εἶς*) está en todo lugar y en ningún lugar al mismo tiempo. Lo que está después de la unidad del uno en el dos (*δύο*) involucra un salto cuantitativo y cualitativo enorme, es tan grande que permite construir algo más palpable y trabajable dentro de un planteamiento científico-matemático de la índole que este sea. El universo y todo lo que existe está en virtud de las dinámicas contrastantes de que es lo segundo (*δεύτερος*), aquello que está antecedido por el inaprehensible primero (*πρῶτος*).

Ahora bien, también se tiene la segunda definición de Euclides-Pitágoras, que dice: *una línea es una longitud sin anchura* (*A line is breadthless length*; *γραμμή δέ μῆκος ἀπλατές*; l 1, t 1, l 2). En esta proposición se introduce otra de las nociones primitivas más importantes de la geometría, que es la de la línea (*γραμμή*), la cual va acompañada de las nociones de longitud o largo (*μῆκος*) y de la anchura (*πλάτος*). Nótese que el espacio es concebido desde los entes geométricos que lo soportan y hacen posible, dejando de ser una noción vacía ya que el espacio está geometrizado en todo el sentido del término. La línea (*γραμμή*) viene a ser definida por un conjunto de nociones que son pertenecientes a otro modelo o teoría, en cuanto une algo afirmativo que es la longitud (*μῆκος*) con lo la negación de la anchura (*ἀ + πλάτος*); mientras el punto (*σημεῖον*) está vinculado a la dinámica explicativa del todo (*πᾶς*) y la parte (*μέρος*), que es uno de los problemas más complejos que han ocupado la atención de tantos pensadores a lo largo de los siglos. La línea (*γραμμή*) emerge del punto (*σημεῖον*), como una manifestación que se fundamenta en una noción de orden, la cual está dada por la pareja longitud-anchura (*μῆκος*)-(*πλάτος*). Lo que caracteriza este tipo de formulaciones sigue siendo la presencia de un elemento de negación manifestado por la alfa privativa. A su vez, tenemos dos predicados que están asumiendo la definición de línea (*γραμμή*), como los son la largura (*μῆκος*) y la ausencia de anchura (*ἀ* + *πλάτος*). En el caso del punto (*σημεῖον*) solo se tenía un predicado que es la parte (*μέρος*) y un todo (*ὅλος*) que la acompaña pero que no está dicho. Hay que resaltar que la definibilidad ha mejorado sustancialmente ya que es posible imaginar a la línea en su largura, aunque el que no tenga anchura nos trae otro dilema paradojal. Pero, se está en la antesala de una pareja o de la presencia del dos (*δύο*), la unidad (*μονάς*) ha evolucionado hacia la pareja o lo dual (*δυάς*). Una en la cual uno de sus elementos está afirmado y el otro negado: (*μ, ~π*), es como si la evolución hacia la plena definición de pareja (a, b) tuviera que pasar por este estadio intermedio. Obviamente que existen unas razones para ello, nada de lo escrito por los antiguos griegos es casual, todo tiene una razón de ser y un propósito muy claro.

3.2.2.1. La noción de una pareja ordenada, un elemento afirmado y el otro negado

Una de los conceptos más importantes en las matemáticas es el de la pareja, y como es característico en esta disciplina, debe estar ordenada. Gran parte de ello deriva en que la lógica tradicional se fundamenta en las conectivas binarias y la dualidad es el comienzo de la diferenciación conceptual y permite definirla con alguna precisión. El planteamiento comienza introduciendo dos nociones contrarias, largo (*μῆκος*) y sin-ancho (*ἀ* + *πλάτος*). Si preguntamos por el orden, se diría que primero habría que aseverar lo largo dado que es un concepto predicable y luego habría que introducir lo contrario a aseverar como la impugnación de lo ancho (*πλάτος*). Es de resaltar que la elaboración de una proposición denominable como epistemológica, se fundamenta en la tensión conceptual entre dos nociones: la noción de largo y la de carencia de anchura. Pareciera que la imposibilidad misma se diera cita en esta proposición, donde lo posible y lo imposible parecen coexistir, generando todo un espacio (*τόπος*) de diálogo de naturaleza dialéctica (*διαλεκτική*). Aquel diálogo o conversación (*λόγος*) que busca hablar acerca de algo de manera ordenada (*λέγω*) atravesando (*διά*) un tema, que de alguna manera requiere y reclama un gran arreglo, cuenta, y habilidad narrativa como lo son estas nociones propias de la matemática.

Se tiene, pues, una pareja que viene a definir la esencia o la sustancialidad de un concepto o noción; se dirá que se trata de la definición de línea, en la cual también se tiene el *definiendum* y el *definiens*: donde según este contexto, la línea (*γραμμή*) es el *definiendum* y lo largo (*μῆκος*) sin anchura (*ἀπλάτος*) es el *definiens*. Sin embargo, se quiere resaltar el hecho de una definición constituida por dos instancias que se oponen entre sí: largo es frente a lo ancho, aquello donde se establece la diferencia (*differentiae*). Aquello que permite diferenciar algo (*differō*): aquello que está aparte, en dos, el reverso (*dis*) con llevar, soportar, sostener (*ferō*); vocablo que proviene del griego, aquello que es dos veces (*δίς*) llevado encima, transportado de un lado al otro (*φέρω*). Así que la diferencia (*differentia*) se está construyendo y elaborando a apartir de la noción de dualidad o de una pareja en la cual cada constituyente es el opuesto del otro. No obstante, en la anterior definición de línea, lo largo (*μῆκος*) se opone no solo a algo que es diferente u opuesto como lo es lo ancho (*πλάτος*), sino que además introduce un elemento de mayor complejidad al afirmar que lo largo realmente se está oponiendo a lo no ancho (*ἀ* + *πλάτος*). No solo se tiene la diferencia sino que, además, una de ellas es aprehensible y la otra no lo es, lo no ancho (*ἀ* + *πλάτος*) es algo que evoca una propiedad como la anchura (*πλάτος*) pero sin que esté presente dado que es negada (*ἀ*-) por la alfa privativa: lo que no posee anchura es como si fuera algo que no acontence en la realidad. De lo anterior surgen las siguientes parejas que acompañan y amplian tal dualidad: determinado-indeterminado, definible-indefinible, posible-imposible. No es cualquier pareja es una pareja que además de relacionar dos propiedades o cualidad distintas, ambas poseen un nivel de realidad distinta, en cuanto la una es viable de darse en la realidad mientras que la otra es inviable aunque se daría siempre y cuando no estuviera negada: en vez de largo con ancho (*μῆκος* + *πλάτος*), que es dualidad (*δίς*) tradicional cuyos ambos predicados son comprensibles, tenemos en cambio lo largo con lo no-ancho (*μῆκος* + *ἀ*- *πλάτος*). Dado que toda línea dibujada o concebida a lo menos tiene algo de ancho, si el ancho es ausente por completo, lo largo no puede darse y termina desplomándose en un punto (*σημεῖον*). Con lo cual se cumple con la condición de pertenencia a una cadena inferencial, donde los demás conceptos y definiciones van surgiendo de la primera proposición (la de punto) al agregar nuevos predicados que modifican el objeto inicial transformándolo: del punto se va a la línea a través de una función predicativa que agrega nuevas características modificando el sujeto de la oración o el término de la proposición. Lo dicho acerca del sujeto o predicado (*praedicātum*), el supino de *praedicō*, que proviene de la unión entre el prefijo *prae-* como lo que está antes o enfrente y *dīcō* que es declarar aquello que se muestra, se representa, se da a conocer y se explica (*δείκνυμι*).

El diálogo se ve fomentado por la dinámica entre dos predicados distintos que, además de guardar una relación de oposición, tienen una más que es que uno se mueve entre lo factible verificable y el otro entre lo infactible e inverificable. En general, una pareja ordenada[256] se concibe como (a, b), donde tanto a como b tan solo deben cumplir con la membresía de un elemento frente a un conjunto que, en general es el mismo o puede ser distinto siempre y cuando esté especificado de manera adecuada. En este caso presente, en lo tocante a la concepción pitagórico-euclídea sería (a, − b); sin embargo, si se indaga por qué clase de afiliación se tiene, habría que decir que no es en relación con ningún conjunto numérico conocido ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), sino entre las nociones primitivas fundamentales de la matemática: a los diez principios constitutivos alrededor de los cuales se organiza y ordena la realidad como cosmos. Esta variación nos sitúa en un contexto donde los individuos, las relaciones, las proposiciones y las clases son de distinto tipo. Es decir, no siempre ambos miembros de la pareja (a, b) pertenecen al mismo tipo, con lo cual la cuantificación puede variar; a su vez la membresía también, sea que el elemento ‘a’ pertenece a un conjunto A y ‘b’ pertenece a un conjunto B, cada uno dotado de una jerarquía distinta. Se anota que lo expresable, afirmable o aseverable acerca de cada elemento varía, esto se debe a que el

[256] La noción de pareja ordenada es de suma importancia, hay que destacar la definición de Norbert Wiener (1914) que dio en su artículo: *A simplification of the logic of relations*, profundamente influenciado por *Principia Mathematica*, elabora una definición de una pareja ordena como dos elementos en términos de sus operaciones de clase, lo cual involucraba reducir la teoría de relaciones a la de clases. Wiener introduce la asimetría entre dos elementos de una pareja ordenada por medio del uso del conjunto vacío. Esto es una consecuencia del axioma de reducibilidad: *12·1. $\vdash: (\exists f): \varphi x .\equiv_x. f!x$ Pp, es esencial para el tratamiento de la identidad, las descripciones, las clases y las relaciones. Mientras, *12·11. $\vdash: (\exists f): \varphi(x, y) .\equiv_{x, y}. f!(x, y)$, es básico solamente para la teoría de relaciones. *12·11., es utilizada en la teoría general de clases *20·701 $\vdash: (\exists g): f\ \{\hat{z}\,(\varphi!z), x\} .\equiv_{\varphi, x}. g!\{\hat{z}(\varphi!z), x\}$, *20·702 $\vdash: (\exists g): f\ \{x, \hat{z}\,(\varphi!z)\} .\equiv_{\varphi, x}. g!\{x, \hat{z}(\varphi!z)\}$, *20·703 $\vdash: (\exists g): f\ \{\hat{z}\,(\varphi!z), \hat{z}(\psi!\hat{z})\} .\equiv_{\varphi, \psi}. g!\{\hat{z}(\varphi!z), \hat{z}(\psi!z)\}$. Y en la teoría general de relaciones se toman: *21·7. $\vdash: (\exists g): fR .\equiv_{R,x}. g!R$; *21·701. $\vdash: (\exists g): f(R, x) .\equiv_{R,x}. g!(R, x)$; *21·702. $\vdash: (\exists g): f(x, R) .\equiv_{R,x}. g!(R, x)$; *21·703. $\vdash: (\exists g): f(R, S) .\equiv_{R,S}. g!(R, S)$. Todo esto, más otras manipulaciones condujo a la noción de parejada ordenada de Wiener: (a, b): = {{{a}, Ø}, {{b}}}, el uso de {{b}} permite la aplicación de la teoría de los tipos lógicos de Russell.

alcance de la cuantificación que pesa sobre cada elemento es distinto en concordancia con la teoría a la cual la pareja ordenada en cuestión se refiere. Así que, la expresión (a, − b) no es totalmente exacta, en cuanto en este contexto todo existe y se organiza en parejas, a su vez la relación que se da entre a y b es de oposición, donde ambos individuales poseen y comparten una misma naturaleza, la cual es analizable descomponiéndola en sus dos instancias constitutivas esenciales. Lo largo (*μῆκος*) tan solo es aprehensible y entendible por medio de lo ancho (*πλάτος*), pero en este contexto lo esencial a lo largo se ve soportado en la argumentación bajo su ausencia como lo carente de anchura (*ἀ* + *πλάτος*). Se advierte que la definición en este contexto se da tanto a nivel cuantitativo, donde ambas predicaciones están íntimamente entrelazadas; lo cuantitativo está ordenado dentro de una cardinalidad, donde lo uno (*εἶς*) está asumido en el primer (*πρῶτος*) elemento de la pareja (*δυάς*), mientras que la cardinalidad del dos (*δύο*) representada en el segundo (*δεύτερος*) elemento de la pareja ordenada, su ausencia recuerda al punto (*σημεῖον*); se nota que la negación (*οὐδείς*) ha evolucionado y se ha transformado en la alfa privativa α−. Lo que podría ser simbolizado como: *οὐδείς* → *α*−.

En la generación del segundo elemento (*στοιχεῖον*) fundamental de la geometría, la línea (*γραμμή*), surge a partir de la transformación del punto (*σημεῖον*), en el cual el primer elemento del par ordenado (a, −b) que más se simbolizará como: (a, ⌐ b) para indicar que no se trata de un negación sino más bien de la ausencia tanto de una cualidad como de una cantidad, aunque esté implícita tanto su cardinalidad como su ordinalidad. En el primer elemento del par ordenado (a, ⌐ b) tenemos la presencia de lo uno (*εἶς*) como lo primero (*πρῶτος*), fruto de la evolución de lo que de ninguna manera es parte (*οὐδείς* + *μέρος*): el uno (*εἶς*) surge en relación a la pareja o lo dual (*δυάς*) como consecuencia de la ausencia del mismo uno que está presupuestado en el punto (*σημεῖον*), que aunque es algo denominable o señalable e identificable como un uno que no lo es. Nótese que este uno ha evolucionado en la línea (*γραμμή*), se constituye por no estar aislado sino estar acompañado por otro elemento en pareja. Por tal motivo, la noción de elemento (*στοιχεῖον*) involucra la existencia de lo otro con quien compararse y con quien mirarse u ordenarse, no en vano el elemento (*στοιχεῖον*) proviene de (*στοῖχος*), que es una secuencia de objetos en una fila: evoca también una fila de soldados y una línea en un poema o verso e igualmente también significa columa. No obstante, este vocablo está relacionado con (*στόχος*) que es el pilar de una columna, asimismo un objetivo, una meta y una conjetura; y con (*στείχω*) que es caminar y marchar en orden en línea. Se nota así cómo un elemento (*στοιχεῖον*) es aquel capaz de golpear o herir o dar en el blanco (*στοχαστικός*), lo cual recrea la relación de enfrentamiento complementario en toda pareja ordenada, donde cada elemento persigue un objetivo y a su vez entra en un diálogo dialéctico con el que lo acompaña. Es de resaltar que el significado del uno se construye por el otro: lo largo (*μῆκος*) es gracias a lo ancho (*πλάτος*), la ausencia de lo ancho (*ἀ* + *πλάτος*) en una línea (*γραμμή*) está en plena concordancia con la evolución de lo que no es uno (*οὐδείς*) en el punto (*σημεῖον*) a lo que es uno (*εἷς*) en la línea (*γραμμή*). En la cual se ve que lo uno cardinal (*εἷς*) que define al primer punto sobre el cual se construye una línea ha evolucionado en la largura (*μῆκος*), mientras la cardinalidad del dos (*δύο*) que está presente en lo ancho y está ausente (*ἀ* + *πλάτος*). Esto nos conduce a la pareja (a_p, b_a) – en este contexto, el subíndice p del primer término evoca la presencia y la a en el segundo concierne a la ausencia. Esto permitiría definir una nueva clase de pareja en base a la presencia y/o ausencia de su predicación − donde el primer elemento está presente mientras el segundo está sugerido pero está ausente, guarda una relación activa que afecta al primer elemento al no brindarle un punto de apoyo: lo no ancho (*ἀ* + *πλάτος*) no apoya a lo largo (*μῆκος*), lo deja solo teniendo que definir su marcha y andar (*στείχω*) con base en sí mismo, al asumir lo uno (*εἷς*) del punto (*σημεῖον*) como una sucesión o serie sucesiva de los mismos puntos como constituyentes primarios de una línea (*γραμμή*).

En la concepción tomada de *Principia Mathematica* e implementada por Norbert Wiener, no está la definición de pareja ni la de relación binaria sino como definición vinculable a la extensión de una función proposicional de dos variables. Es claro que la proposición aquí empleada es: *una línea es una longitud sin anchura*, siendo su función proposicional aquello que permite que se tenga una línea al aplicar los dos predicados como funciones predicativas, en relación a lo largo (*μῆκος*) y a la la ausencia de anchura (*ἀ* + *πλάτος*). Hay que destacar que Russell se ocupa de las proposiciones elementales, como aquellas que no contienen una variable aparente o sea, en términos modernos que la variable esté ligada y no libre, siendo los términos de tales proposiciones individuales. En este caso, tendríamos dos individuales, lo largo (*μῆκος*) y la anchura (*πλάτος*), denotando por $\varphi!(\hat{y}, \hat{z})$ una función elemental cuyos argumentos son individuales, en nuestro caso $\hat{y}$ representa lo largo y $\hat{z}$ lo ancho. Lo que llevaría a que $*12 \cdot 11.\ \vdash : (\exists f) : \varphi(x, y) \,.\!\equiv_{x,\, y}.\ f!(x, y)$, se transforme en: $\vdash : (\exists f) : \varphi\,(\mu, \sim\pi) \,.\!\equiv_{\mu,\, \sim\pi}.\ f!\,(\mu, \sim\pi)$. En este caso, tenemos la existencia de una función que toma una pareja, que es equivalente a una función elemental de dos variables no aparentes, la una afirmada y la otra negada. Este tópico es tratado en lo concerniente al axioma de reducción y a la teoría de los tipos lógicos. Hay que abordar luego la membresía de (μ, π) a una clase, dada por: $*20 \cdot 701\ \vdash : (\exists g) : f\ \{\hat{\mu}\,(\varphi!\mu), \pi\} \,.\!\equiv_{\varphi,\, \pi}.\ g!\{\hat{\mu}\,(\varphi!\mu), \pi\}$, y $*20 \cdot 702\ \vdash : (\exists g) : f\ \{\pi, \hat{\mu}\,(\varphi!\mu)\} \,.\!\equiv_{\varphi,\, \pi}.\ g!\{\pi, \hat{\mu}(\varphi!\mu)\}$; en este caso estamos frente a una función donde se establece un orden en relación a una pareja ordenada frente a dos clases, se está considerando una funciones intensionales, que finalmente llegan a: $*20 \cdot 703\ \vdash : (\exists g) : f\ \{\hat{\mu}\,(\varphi!\mu), \hat{\mu}(\psi!\hat{\mu}\,)\} \,.\!\equiv_{\varphi,\, \psi}.\ g!\{\hat{\mu}\,(\varphi!\mu), \hat{\mu}\,(\psi!\mu)\}$, donde tenemos dos funciones f, g, constituida por dos argumentos como pareja ordenada de dos funciones predicativas o matriz del individual μ, siendo además una idea primitiva.

Entonces, la noción de línea (*γραμμή*) viene a ser definida en términos de una relación binaria a nivel de una pareja ordenada, con lo cual la clase inicial es la de las líneas dentro de la cual existen dos subclases, la de la largura y la de la anchura. De modo que la pareja ordenada $\{\hat{\mu}\,(\varphi!\mu), \pi\}$ hace referencia a las dos clases $\{\mu\}$ y $\{\pi\}$ es un subconjunto de la clase $\{\gamma\}$: $\{\mu\} \cup \{\pi\} \subset \{\gamma\}$. Con lo cual, las dos funciones f, g están antecedidas por una función Ƒ que posee una jerarquía de tipo mayor, lo cual le permite cuantificar dentro de un orden superior. Esto conduce a que en relación a la clase $\{\gamma\}$, esta a su vez podría ser una subclase de una clase básica $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n\}$, en la cual se pueden construir otras líneas bajo criterios distintos, tales como las que se pueden dar en las geometrías no euclidianas, donde los criterios de distancia y rectitud-ortogonalidad pueden variar. En nuestro caso $\{\gamma_1\}$ vendría a ser aquella subclase constituida por líneas definidas en función de la largura y la anchura propias de la definición euclidiana. Sin embargo, un tema básico es que la definición de punto (*σημεῖον*) y línea (*γραμμή*) en Euclides, que acude a una noción de pareja ordenada donde la fuerza definitoria recae en el primer elemento de la pareja (*δυάς*), sea la noción de parte (*μέρος*) y largo (*μῆκος*); mientras el segundo elemento de la pareja es negado, en el caso del punto lo que no es uno de ninguna manera (*οὐδείς*) y en el caso de la línea lo que no es ancho (*ἀπλάτος*). Sin embargo, para negar algo hemos de tenerlo afirmado con anterioridad lo que vamos a negar: el todo (*ὅλος*) o lo uno (*εἷς*) y lo ancho (*πλάτος*). Esta negación del segundo par ordenado en estos dos axiomas de Euclides, se la podría considerar como la sugerencia del conjunto vacío Ø en las mismas, que en términos del contexto equivaldría a la presencia del cero. En ese sentido, la noción de pareja ordenada nos relaciona con el pareja fundamental a partir de la cual se construyen todos los números el (0, 1), que en nuestro caso es mencionada como el (1,0). La parte (*μέρος*) y el cero tomado como un uno (*εἷς*) ausente o negado (*οὐδείς*) en relación al axioma del punto (*σημεῖον*) $\Sigma_{(\mu,\sim\varepsilon)}$, asimismo lo largo (*μῆκος*) junto a la negación del predicado de lo ancho (*πλάτος*) en (*απλάτος*) en relación al axioma de la línea (*γραμμή*): $\Gamma_{(\mu,\sim\pi)}$.

3.2.2.2. En la línea se prefigura la conformación de una epistemología matemática

Tal que del punto (*σημεῖον*) no se puede casi decir nada excepto un tipo de especulación de naturaleza ontológica, en la línea (*γραμμή*) lo decible y afirmable es del todo distinto. En primer lugar, debido a que en relación a la línea (*γραμμή*), tenemos en principio, no una ontología sino una epismología, la cual permite recrear procedimientos precisos y algoritmos dentro de una serie ordenada de pasos a fin de resolver un problema o probar un teorema, o sustentar una demostración matemática. No en vano, la algoritmia proviene del vocablo griego del cual deriva el número (*ἀριθμός*), que recoge la evolución del latín medioeval de *algorismus*, vocablo que es una transliteración arabizada del nombre del gran matemático persa *Al-Khwārizmī o Al-Juarismi*[257]. Es de destacar cómo a partir de una primera definición como lo es la del punto (*σημεῖον*) desde la cual se instala una ontología no susceptible a ningún tipo de procedimiento algorítmico, pasamos a la línea (*γραμμή*) que ya posibilita instaurar una epistemología capaz de poder plantear unos

[257] *Abu Abdallah Muḥammad ibn Mūsā al-Jwārizmī* (*Abu Yāffar*), conocido como Al-Juarismi (780-850) fue un matemático persa de la época de Oro del Islam perteneciente a la Casa de la Sabiduría de Bagdat, fue el autor del famoso libro: *Compendio de cálculo por integración y comparación* (*The Algebra of Mohammed Beb Musa*, editor y traductor Frederic Rosen) escrito entre el 813 al 833 d.C. donde introduce las operaciones algebraicas y una teoría de los números. Con Al-Juarismi se introduce el cero como número, tal notación la trajó a Europa Leonardo de Pisa (1170-1250), conocido Fibonacci quien a comienzos del 1200 publicó su libro *Liber Abaci* o libro de los cálculos en 1203 tal como lo comenta R. Grimm (1973) en *The Autobiography of Leonardo Pisano*. En el artículo se nota como el padre de Fibonacci mantenía un comercio con los países árabes del norte de Africa, lo que le permitió al joven Leonardo conocer la aritmética que ellos manejaban en sus transacciones comerciales, beneficiándose más al manejar los decimales que los europeos no conocían.

procedimientos susceptibles de verificación y realizables dentro de una disciplina que se constituye como una ciencia o un saber practicable. Ambas proposiciones pueden ser consideradas como 'metaproposiciones' de las matemáticas, es decir, capaces de recrear diversas teorías o modelos teóricos sin que se agote la formulación inicial de las mismas. Tal conclusión es una invitación a plantear una epistemología de las matemáticas, que desde su inicio debe buscar definir con precisión sus términos propios, recreando un lenguaje objeto que permita hablar de los entes matemáticos en términos de entes u objetos epistemológicos.

Esto remite a que cada miembro de una pareja ordenada debe poder ser definido como una proposición. Tal hecho remikte al tema de una epistemología donde forzosamente existe un ordenamiento jerárquico entre aquellas proposiciones que son básicas y fundamentan una teoría, en este caso geométrico-aritmética, como son estos postulados pitagórico-euclídeos, que al constituirse en axiomas están por encima de las proposiciones tradicionales. La epistemología abordada desde una matemática involucra la posibilidad de conocer algo de manera real y concreta, en cuanto se puede construir una teoría confiable capaz de satisfacer nuestros requerimientos. Mario Bunge[258] analiza cómo en *Principia Mathematica* el símbolo de igualdad no permite la simetría, tal como se utiliza $=_{df}$ es un metasímbolo, donde el lado izquierdo indica es 'función de' viene determinado por el lado derecho. Siendo una diferencia metalingüística y metodológica más no una semántica, donde la diferencia está en relación al estatus y a la función desempeñada. Uno de los temas ya tratados concierne a la definición (*dēfīnītiō*) de línea (*γραμμή*), donde el sujeto se constituye como el *definiendum* y lo largo (*μῆκος*) asimismo como lo carente de anchura (*ἀπλάτος*) serían el *definiens*. Así, una de las características del *definiens* es la presencia de la diferencia (*differentiae*), que en nuestro caso está dada por una pareja ordenada (a, b), siendo algunas de sus propiedades las siguientes:

[258] Mario Bunge (1974) en su libro *Treatise on Basic Philosophy, Semantics II: Interpretation and Truth*, manifiesta que las ventajas de utilizar el símbolo de la igualdad como metasímbolo son: "i. Facilita la identidad del significado, el sentido y la referencia, ii. Cada definición de la forma ┌ p $=_{df}$ q┐, con p, q proposiciones, se cumple siempre que: ┌p sí y solo si q┐, ┌para todo x p_x sii q_x┐. iii. Cada fórmula correctamente definida involucra una igualdad definicional que la hace una verdad necesaria, iv. Estas igualdades definitorias pertenecen al lenguaje objeto del sistema conceptual en juego, haciendo que ya no sea símbolo metalingüístico sino un símbolo metateórico, v. En las pruebas de la independencia conceptual es más fácil verificar estas identidades que las equivalencias dado que las simplifica". Pág. 175.

i. Se tiene una pareja ordenada que es la base de la diferencia (*differentiae*), aquel entorno que estructura lo definible (*dēfīniō*) en base a los límites propios que ambos conceptos o nociones traen. No hay que perder de vista que al definir (*dēfīniō*), estamos estableciendo (*dē-*) unos límites (*fīniō*) que nos brinda la oportunidad de explicar y entender mejor los entes propios de nuestro saber. Es apreciable en este contexto, cómo lo largo (*μῆκος*) delimita permitiendo explicar lo ancho (*πλάτος*), que está sujeto a una especificidad de orden deductivo-inferencial, lo ancho se presenta pero está ausente como lo que carece de anchura (*ἀπλάτος*). La diferenciación (*differentiae*) que es una de las características del *definiens*, está constituida por dos términos enfrentados y opuestos de manera completa y complementaria: la presencia irrestricta de lo largo y la ausencia completa de lo ancho. Tal hecho, lo hemos de tomar en cuenta, como una de las propuestas básicas de una definición predicativa fundamental sobre la cual se van a construir y a definir los demás entes matemáticos.

ii. A lo largo del texto se han utilizado de manera un poco arbitraria los términos de noción y concepto, surge entonces la pregunta: ¿Cuándo se debe utilizar el uno o el otro? El vocablo concepto (*conceptus*) proviene del latín, de la unión del prefijo (*con-*) que nos relaciona con la preposición con (*cum*), que indica la completez y la perfección de un acto que ha logrado reunir varios objetos en un solo ente; asimismo el verbo (*capio*) que es capturar, asir o tomar. Con lo cual, un concepto entendido en este sentido, es haber logrado tomar aquellos aspectos que conllevan el entendimiento y la comprensión completa de un ente. En cambio, el vocablo noción (*notio*) indica algo que ha logrado ser reconocido, fruto de una experiencia atenta que lo ha examinado de manera cuidadosa hasta hacerlo familiar. Este vocablo proviene de (*nōtus*): conocido, reconocido, experimentado, entendido, familiarizado y famoso, es el participio perfecto pasivo del verbo conocer, reconocer y estar familiarizado con (*nōscō*).

iii. De lo anterior se puede inferir: un concepto (*conceptus*) es aquello que acompaña a un ente completándolo y una noción (*notio*) es lo conocido bajo la mediación de la experiencia. Con lo cual, se puede decir en relación a estas dos proposiciones euclideo-pitagóricas, que no se adecúan completamente a que sean un concepto o una noción, sin embargo, los análisis y consideraciones derivados de las mismas, sí se adecúan a transformarse en conceptos y nociones.

iv. Si estas dos primeras proposiciones, las de punto (*σημεῖον*) y línea (*γραμμή*) las tomamos por axiomas (*ἀξίωμα*[259]), este posee variadas aserciones:

- Lo pensado que se ajusta y favorece la toma de una decisión o decreto. Un requisito o una petición.
- Lo pensado como valioso, relacionado con la reputación, rango y posición. Las cosas valiosas y concretas que ameritan dignidad.
- Lo que todo discípulo debe de conocer con anterioridad.
- En la ciencia lo afirmado como la base de una demostración, un principio autoevidente.

Nótese que no siempre lo afirmado es autoevidente; son tan profundos los contenidos de tales proposiciones que están muy lejos de evidentes por sí mismas. No obstante, también el vocablo de axioma (*ἀξίωμα*) refiere a la dignidad, la consideración, la pretensión y la resolución, lo cual tampoco nos aporta mayor claridad, sino que los axiomas son proposiciones muy valiosas. Ello remite a lo que es valioso, que va bien ya que tiene peso (*ἄξιος*) fruto de esa actividad que piensa lo que es merecedor ya que resuelve e indica el camino correcto frente a lo que hay que hacer (*ἀξιόω*) ya que nos conduce y guía (*ἄγω*). Se podría denominar a estas dos proposiciones euclideo-pitagóricas unos axiomas (*ἀξίωμα*) por ser extremadamente valiosas (*ἄξιος*), que son una guía por el camino correcto (*ἄγω*). Sin embargo, su profundidad es tal que nos lleva a pensar de manera reiterativa su contenido. Este hecho hace que aunque estén aparentemente al alcance de todos, hay que trabajarlas a fondo a fin de poder traer a la luz su mensaje.

v. Las reflexiones previas revelan lo siguiente: el origen de ciertos vocablos que van a constituirse como los primitivos e inderivables, que serán el fundamento de la geometría y por ende de las matemáticas presentan cierta evolución. Podrían ser denominarlos axiomas; no obstante, debido a que su decibilidad y decidibilidad es tan compleja, es una invitación a constituirse como metaproposiciones de la matemática. La razón estriba a que lo aseverable

---

[259] Tomado de *ἀξίωμα:* Henry George Liddell. Robert Scott. *A Greek-English Lexicon* revised and augmented throughout by Sir Henry S. Jones with the assistance of R. McKenzie. Oxford, Clarendon Press. 1940.

por ellos es tan amplio, que puede dar lugar a variadas teorías y modelaciones, no siendo agotados por ninguna de ellas. A su vez, el transegar de tales axiomas da lugar a una amalgama de entes epistemológicos, sean algunos de estos: las nociones (*notio*) y los conceptos (*conceptus*). De igual manera, la génesis del idioma que hablamos nos invita a considerar algunos vocablos derivados del latín cuyos usos son bien precisos, como concierne a la definición (*dēfīniō*) y a sus constituyentes como lo son el *definiendum* y el *definiens*[260]. Otra pareja connotativa igualmente importante es: *referēns* y *referéndum*, provenientes del verbo *referō*; *re-* de nuevo y atrás; y *ferō* traer, restaurar, retornar, anunciar. Se resalta, que todos estos vocablos permiten la elaboración de una epistemología, en nuestro caso matemática.

vi. En este análisis (*ἀνάλυσις*) se ha abordado la disolución o restauración de un todo en sus partes como la solución de un problema, lo que está sobre y a lo largo (*ἀνά*) a fin de ser liberado o disuelto (*λύω*). Es notable cómo se da un juego en nuestra reflexión en castellano entre sus orígenes provenientes tanto del griego como del latín. Tal hecho no ha de pasar desapercibido, y se afirmará, una vez más que toda proposición que tenga aspiraciones de constituirse como base de una teoría debería ser formulada en griego, a su vez lo es instrumental y necesario debería de ser escrito en latín. Esto es una invitación a conocer dos lenguas muy diferentes: la griega es un lengua muy transcendental, profunda, ricamente matizada, capaz de sostener múltiples niveles literarios y poéticos; mientras el latín es una lengua altamente operativa, práctica y concreta que ordena todo lo que lo rodea.

3.2.2.3. La pareja ordenada como fundamento de toda sinonimia y antonimia

Es importante señalar cómo la noción de pareja ordenada se plantea desde dos conjuntos; uno que podríamos calificar como el de las sinonimias y el otro el de las antonimias. A su vez, se tiene una función biyectiva donde para toda palabra o noción antónima le corresponde una única palabra o noción sinonímica, sea el caso: $\forall$ a $\in$ A: $\exists!$ s

[260] Los diversos usos de *dēfīniō*, *definiendum*, *definiens*, pueden ser consultados en *Definitions*: *Uses and Varieties*, por Guy Longworth (2006); donde comenta como*: "La definición es el producto de la actividad de explicar a una audiencia el significado de una expresión, una definición es el producto de tal actividad: el entendimiento de las partes de una oración (definiens) pueden revelar el entendimiento del resto (definiendum) por parte de la audiencia. Entender es la actividad de explicar el significado de una expresión (definiens) que puede posibilitarnos comprender el significado de la definición (definiendum)"*, pág 409.

$\in$ S / f(s) = a, que en nuestro caso, tomando μ (*μῆκος*) y *ἀπ* (*ἀ* + *πλάτος*) y reemplazando nos daría: $\forall$ *ἀπ* $\in$ *A:* $\exists\,!$ μ $\in$ *S* / $f\,(\mu)$ = *ἀπ*. Es decir, S representa el conjunto de las sinonimias y A es el conjunto de las antonimias, a su vez μ representa lo largo como sinónimo y *ἀπ* lo sin-ancho como antónimo. Se podría ir más lejos al afirmar: que cada geometría plantea lo largo, lo ancho y otras nociones de manera diferente. En consecuencia, puede existir un conjunto *M* que representa la clase de largos que pueden construirse y *Π* el conjunto que representa la clase de los anchos. Lo interesante de esta situación, sería buscar construir la noción de pareja ordenada a partir de una biyección, la cual se da del conjunto de salida o dominio donde la predicación es completa, a un conjunto de llegada o codominio que es abordado como una clase, aquella que asume una existencia carente de la suficiente predicación. En nuestro caso, lo carente de anchura (*ἀ* + *πλάτος*) tal como se lo comenta arriba: $f\,(\mu)$ = *ἀπ*, donde a la función f(μ) le corresponde un único elemento con carencia de propiedad, es decir una noción de vacío $\varnothing$ diferenciado: vaciedad de anchura podría interpretarse como la ausencia de anchura (*ἀ* + *πλάτος*). Nótese que lo vacío no tiene relación con la nada, puede decirse que hay vacío de hombres o de prosperidad u otro predicado. En este sentido, podemos predicar acerca de una propiedad que existe pero que está ausente. Este hecho posee una importancia enorme por sus repercusiones lógicas.

3.2.2.4. El planteamiento del método dialéctico en la definición de línea

La segunda definición euclideo-pitagórica: *una línea es una longitud sin anchura* (*A line is breadthless length*. *γραμμή δέ μῆκος ἀπλατές,* L.1, d.2) nos introduce dos instancias nuevas, la una es la presentación de un ente geométrico dotado de una metría (*μετρία*) concreta denominada línea (*γραμμή*) y, por otra parte, la noción de pareja o lo dual (*δυάς*), que está ordenada (*τάσσω*) en relación a una oposición en cantidad (*πόσος*) y cualidad (*ποιότης*). Se trata del *quantitas* y del *qualitas*, vocablos procedentes del *quantus* y del *qualis,* adjetivos interrogativos que indagan acerca de la cantidad en cuanto monto y de la cualidad en cuanto condición. El *quam* y el *quālis*. Nótese que la cantidad (*πόσος*) está asumida bajo la condición del dos (*δύο*) presente en aquello que está en segundo lugar (*δεύτερος*) después del punto (*σημεῖον*). En la línea (*γραμμή*) sus dos propiedades o cualidades (*ποιότης*) le son inherentes: la largura o lo largo (*μῆκος*) y lo ancho (*πλάτος*); sin embargo, son presentadas e introducidas dentro de un orden (*τάξις*) opuesto (*ἀντίθεσις*). Este aspecto se aprecia al unir algo afirmativo como lo largo (*μῆκος*) con algo negativo como lo que es lo no ancho (*ἀ* + *πλάτος*). Estamos frente a algo planteado, propuesto y ordenado (*τίθημι*), donde lo uno (*εἶς*) está siendo asumido como un ente (*ὄντος*) geométrico en lo que es la línea (*γραμμή*). Así, se está preservando su cardinalidad como cantidad (*πόσος*); también, este ente (*ὄντος*) derivado de lo que es lo uno (*εἶς*), ha sufrido un cambio de naturaleza y de clase (*ποῖος*). Su naturaleza única (*οἶος*) se sigue conservando bajo una evolución conceptual que ha colocado a la línea (*γραμμή*) como lo segundo (*δεύτερος*) en el orden (*τάξις*) deductivo inferencial en relación a la tesis (*θεσις*) planteada en relación a lo que es el punto. Se tiene una separación o fragmentación de la unidad (*μονάς*) inicial del punto (*σημεῖον*): el todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*) están ahora representados en un ente (*ὄντος*) que está constituido en base a una dualidad (*δύο*), cuya naturaleza es ser opuesta (*oppositiō*) en cuanto está en contra (*ἀντί*) de una posición, lugar o arreglo (*θέσις*). Una vez más, se muestra la riqueza de la lengua griega en aquello que ha sido establecido u ordenado (*τίθημι*), y en la capacidad de agregar unos sufijos como (-*σις*) que ayudan a formar sustantivos abstractos o sustantivos de acción o resultado o proceso.

Es más, se aprecia la presencia de una reflexión de naturaleza dialéctica (*διαλεκτική*) en aquello que se dice y ordena (*λέγω*) al pasar a través de algo y a lo largo del mismo (*διά*): es la presencia de un discurso que busca incentivar una discusión (*διαλεκτος*) bien hablada y tratada (*λεκτικός*) acerca de un tema, en este caso de índole aritmético-geométrica. La misma definición de punto (*σημεῖον*) ha sido definida con base en el uso de dos nociones, una positiva y otra negativa: la positiva es la parte (*μέρος*) y, la negativa, es lo que de ninguna manera es uno (*οὐδείς*). Está claro el uso de dos nociones o ejes de reflexión: uno aprehensible al cual se puede llegar por medio de un tipo de reflexión directa y el otro no es aprehensible e invita a un uso de una reflexión indirecta más orientada a lo que es la denominada reducción al absurdo (*Reductio ad absurdum*). En este caso del punto (*σημεῖον*), que es definido por dos nociones opuestas entre sí, *μέρος*/ *οὐδέ* + *εἶς*, cada una requiere un tipo de habla (*λέγω*) diferente. A su vez, en la noción de línea (*γραμμή*), también se tiene la misma pareja positiva-método directo y negativa-método indirecto, representada en lo largo y lo no-ancho, (*μῆκος*)/ (*ἀ* + *πλάτος*). Existe una concatenación en la manera en que se está efectuando el proceso reflexivo de índole deductivo-inferencial: el punto (*σημεῖον*) es utilizado de manera tácita aunque no esté mencionado en la definición de la línea (*γραμμή*). Adviértase cómo una de las dos nociones es definible o fácilmente explicable, sea la parte (*μέρος*) o lo largo (*μῆκος*), mientras lo que no es de ninguna manera uno (*οὐδείς*) y lo que no posee anchura (*ἀπλάτος*), representa de entrada un reto para el pensamiento ya que parece involucrar una contradicción intrínseca casi insolubre. Es como si el primer componente afirmativo representará la tesis (*θεσις*) y el segundo la antítesis (*ἀντίθεσις*), que aparentemente están articuladas en una suerte de síntesis (*σύνθεσις*) que es el ente (*ὅντος*) mismo, objeto de la definición o del acto nombrativo, en este caso del punto (*σημεῖον*) y de la línea (*γραμμή*). En ambos casos, la síntesis (*σύνθεσις*) es introducida al inicio y no al final, algo más que obedece a una presentación que busca exponer un tema, se ve que tanto en el punto como en la línea, se busca que ambos nociones sean capaces de unir de manera conjunta (*σύν*) aquello que está colocado o planteado (*τίθημι*) como objeto de la presente reflexión (*συντίθημι*).

Karl Popper[261] estudió el método dialéctico como una variante del método del ensayo y el error empleado por el pensamiento humano, especialmente, en filosofía. Sostuvo que la tríada tesis, antítesis y síntesis ha de ser estudíada en relación con Hegel, quien buscó en ella comprender el comportamiento y el desarrollo de la mente humana. La expresión dialéctica ha de ser entendida como ‘el arte de la argumentación’ dentro de un uso que se remonta a Platón. Sin embargo, Popper nos advierte de los peligros propios de lo que él denomina ‘la vaguedad de la diálectica’ y, para evitarlo, se centra en estudiar las leyes del cálculo proposicional. Insiste en que de la verdad de las premisas no debe seguirse una conclusión falsa y menciona cómo Hegel estaba interesado en revelar cómo aprehende el mundo la mente. No obstante, llega a la conclusión de que no se debe abusar del método dialéctico en la construcción del edificio filosófico (*philosophical system-building*), hay

[261] Karl Popper (1963) en su libro *Conjectures and Refutations*, estudia la evolución de la diálectica desde los griegos como aquel arte argumentativo, pasando por Hegel que busca concretarlo dentro de una lógica dialéctica fundamentada en la filosofía de la identidad, para terminar en Marx y su materialismo diálectico (págs. 312-335).

que guardar cierta independencia frente al mismo, y aconseja hay que estudiar de cerca los demás métodos críticos que utiliza la ciencia en su construcción.

3.2.2.5. El punto es el que fundamenta las metrías de todos los entes geométricos

El surgimiento de la línea (*γραμμή*) se sigue como una consecuencia de la del punto (*σημεῖον*), se puede decir que estamos frente a una función f que ordena (*τίθημι*), en ese sentido f(*τίθημι*): que del (*σημεῖον*) se va a la línea (*γραμμή*), $f(\tau)$: $\sigma \rightarrow \gamma$. Este hecho trae algo insospechado, que tenemos variadas posibilidades para imaginar y construir lo que entendemos por línea. En la actualidad no existe la limitación a tan solo una geometría plana sino que se podría dar el paso a una variedad de geometrías no euclidianas: ya que el paso del punto a la línea se puede realizar de variadas maneras, sin estar obligadosa a un único tipo de interpretación. Esto se debe a que estamos frente a dos nociones primitivas, que se pueden erigir como metanociones como meta-axiomas susceptibles de inspirar variadas modelaciones teóricas. Es conveniente apreciar la metría en relación con la línea, en este caso, bajo la variante del radio de una bola en cuyo centro tenemos un punto. Tal hecho se da en un espacio topológico métrico (X, ρ), donde se tiene un punto que pertenece al mismo y alrededor del cual se tiene un radio expresable como un número real positivo. Hay que recordar que asociarle a una recta unos números es algo que viene desde los griegos, aunque fundamentar su construcción una línea o la denominada recta real es algo moderno y es propio del álgebra abstracta. Es importante asociarle una vecindad a un punto, en este caso, dada por una bola, lo cual es de una gran belleza y enormes consecuencias epistemológicas a nivel matemático. Es así que si tenemos los puntos $\alpha, x \in X$, con r como radio, $r \in \mathbb{R}$, se pueden dar las siguientes situaciones[262]: i. Una bola abierta $B_r(\alpha) = \{x \in X / \rho(\alpha, x) < r\}$, en la cual tenemos que los puntos que están en la frontera no pertenecen a ella., ii. una bola cerrada, $D_r(\alpha) = \{x \in X / \rho(\alpha, x) \leq r\}$, donde todos los puntos están contenidos dentro la frontera − este razonamiento entra a desempeñar un importante papel en el tratamiento de la noción de límite − en este caso, se tendría una

[262] Tema tratado en *Elementary Topology* por Viro, Netsvetaev y Kharlamov, en el capítulo de los espacios métricos (X, ρ), que además dan lugar a la existencia de un subespacio $A \subset X$, cuando existe una restricción a la métrica de ρ en $A \times A$ como $(A, \rho|_{A \times A})$, pág. 19.

clausura Ē, que vista como un subconjunto $E \subset X$: $\bar{E} = E \cup E'$, donde E' representa a los puntos de acumulación que están cerca sin pertenecer a E; tal hecho lo podemos ilustrar en el intervalo (0, 1), donde los puntos de acumulación están en el intervalo cerrado [0, 1]., iii. Un disco o esfera definido como $S_r(\alpha) = \{x \in X / \rho(\alpha, x) = r\}$, donde el disco $D_1(0)$ y la esfera $S_1(0)$ en $\mathbb{R}^n$ tienen una métrica euclidiana son denotadas como D^n y S^{n-1}, se llaman la unidad n-disco y la esfera (n − 1).

Lo que significa que el paso del punto a la línea involucra un orden, tal como lo acabamos de apreciar en relación con el radio de una bola en topología. También, tal situación está sugerida del paso del *cronos* (*κρόνος*) al *kairós* (*καιρός*), lo cual se realiza por medio del número (*ἀριθμός*); en el caso anterior por medio del conjunto de los números reales ℝ. Sin embargo, en la génesis (*ἀρχή*) misma de este proceso se tiene el acompañamiento de un par operativo y de dos géneros de operaciones distintas, aquellas propias de la aritmética y la geometría; con lo cual, la actividad contable (*ἀριθμέω*) se ve acompañada de la actividad metrizante (*μετρέω*). El uno (*εἶς*) indiviso (*ἀτέμνω*) del punto (*σημεῖον*) se ve transformado en el dos (*δύο*) propio de la línea (*γραμμή*), dentro de un ordenamiento epistemológico donde lo primero (*πρῶτος*) es el punto y lo segundo (*δεύτερος*) es la línea (*γραμμή*): de manera que esta función es doble, que tiene dos dominios y dos codominios, y a su vez están cruzadas o conectadas. Este tópico introduce el conocimiento propio de la epistemología matemática, disciplina en la que se da la aprehensividad de un saber susceptible a una axiomatización lógico-formal, que se ve modelada a nivel simbólico-abtracto; este hecho, involucra una readecuación y renombramiento de los conceptos propios de tal saber. Sea el caso el punto (*σημεῖον*), único (*μόνος*) e infinito (*ἄπειρος*), que sería aquel primer punto (*πρῶτος σημεῖον*) propio del plano ontológico matemático. Pero el punto del cual surge la línea (*δεύτερος σημεῖον*) es distinto al anterior, es propio de la epistemología matemática, y permite ser pensado o conceptualizado dentro de una variedad o diversidad de puntos (*εἶδος σημεῖον*), todos susceptibles de albergar múltiples modelos e interpretaciones acerca de los mismos. Este segundo punto viene a constituirse alrededor de un uno cardinal (*cardinālis*), vocablo que proviene de *cardo* (*cardō*) como aquella bisagra que conecta, como un punto de giro crítico y crucial que determina un momento o una acción: vocablo que proviene de *krádē* (*κράδη*) que es un pescante, dispositivo capaz de izar o arriar, de ahí su significado de oscilar, balancear y su forma como una vara o rama. Este segundo uno (*δεύτερος εἷς*) es el denominado cardinal uno (*ūnus cardinālis*), que es propiamente el número que está presente en la conceptualización de la línea (*γραμμή*). Cuando se va a darle un nombre (*ὄνομα*) y, en consecuencia, numerarlo (*ἀριθμέω*) como lo que es uno solo (*οἶος*), se presentan dos situaciones: una en que se dan dos (*δύο*) expresiones que caracterizan la predicación de la línea (*γραμμή*): lo largo (*μῆκος*) y lo ancho (*πλάτος*); pero, de manera análoga, tenemos dos predicados de un mismo evento que conducirían a lo que es lo uno y su contrario lo afirmado y lo negado.

3.2.2.6. Propuesta para la elaboración de una epistemología matemática axiomática

Esta investigación estima necesario identificar la naturaleza epistemológica de estas oraciones o proposiciones planteadas en los *Elementos* (*Στοιχεῖα*) de Euclides (*Ευκλείδης*), en especial, las que se dan al comienzo del libro primero, las que se denominarán axiomas (*ἀξίωμα*). Es menester establecer algunos criterios para identificar los distintos usos y vocablos que elabora en ellos, como es el de la definición. La razón estriba en que no se puede seguir avanzando el texto sin que de manera simultánea se emprenda la elaboración de una epistemología que se ocupe de la reflexión de los entes abstractos allí tratados. Se entiende que un axioma (*ἀξίωμα*) satisface las siguientes propiedades dentro de los usos etimológicos tradicionales:

i. Aquello que es pensado con el propósito para adecuarse y ajustarse a algo según un planteamiento, se dan variadas correspondencias con lo que se ha convenido, esto involucra un proceso de: igualar, encajar y proveer algo que es apto a satisfacer algunas condiciones o requerimientos.
ii. Aquello que es pensado como: valioso, importante, excelente y apreciable, que vale la pena por su valor. Esto está unido a algo que otorga dignidad, honor y valía. Esto hace que le subyace un ejercicio de la voluntad motivado por unos deseos dignos.
iii. Aquello que el alumno debe de conocer con anterioridad a fin que su proceso de aprendizaje pueda ser bien conducido y llevado a buen término.

iv. Un principio autoevidente que define el significado de las palabras, lo que conlleva a que se sitúa cerca de las categorías, en cuanto fundante de una estrategia cognoscitiva, y por ende, al desarrollo de un planteamiento aprehensible como una teoría o una disciplina[263].

Se asumirá que las anteriores condiciones son independientes entre sí y se necesitan mutuamente dado que conforman una unidad argumentativa. Es decir, todo argumento (*argūmentum*) es considerado como una posición evidente capaz de constituirse como una evidencia conducente en relación a una prueba y por ende soportante de una tesis. Esta se relaciona con aquello que puede ser probado o demostrado, que es capaz de mostrarse a fin de aclarar y declarar (*arguō*) aquello que es el instrumento, el medio y el resultado de algo (-*mentum*). Algo frente a lo cual no es posible abstraerse al ser herederos de una tradición greco-latina es que, sin sin proponérselo, siempre se están utilizando vocablos latinos, y esto es un hecho a asumir. No en vano, cuando se piensa y se habla los expresamos, basta recordar que en matemáticas se dice el argumento de una función. Retomando entonces la estrategia en lo concerniente a las cuatro propiedades que todo axioma (*ἀξίωμα*) posee, se las nombrará e identificará como sigue:

A la primera, se la denominará *igualación por propósitos* (α_1); a la segunda, *la valía de un pensamiento consistente* (α_2); a la tercera, *lo cognocible con anterioridad como aprendizaje* (α_3) y, a la cuarta, *el principio significante autoevidente* (α_4). Una vez más, de la primera se podría derivar la existencia de dos oraciones o proposiciones distintas que pueden significar lo mismo, hecho que permite introducir el signo de igualdad entre dos declaraciones aseverativas: es decir, la presencia de una estructura lógico-matemática. De la segunda se puede derivar el problema de la decidibilidad en cuanto su consistencia veritativa, que no ha de acarrear una contradicción semántico-sintáctica; asimismo, ha de aportar su completez semántico-sintáctica que permita definir una verdad para toda una teoría. La tercera conduce al problema del aprendizaje (*μάθημα*), de cómo algo puede ser enseñado y aprehendido (*μανθάνω*); el problema de la construcción del conocimiento como *episteme* (*ἐπιστήμη*), sus variantes como *techné* (*τέχνη*) u otras; en especial, la relación entre

[263] Estas distintas aserciones del vocablo de axioma (*ἀξίωμα*) son tomados del: *Dictionary Greek-English, Liddell & Scott*. (1940)

el matemático (*μαθηματικός*) y el aprendiz o discípulo (*μαθητής*). La cuarta conduce a que estos axiomas (*ἀξίωμα*) puedan constituirse como principios (*prīncipium*) evidentes. En este sentido, se nota que se constituyen como el origen o *arkhḗ* (*ἀρχή*) de aquello que es lo primero (*πρῶτος*), con lo que se comienza (*ἄρχω*) y que está situado en el origen de la vida o la naturaleza (*φύσις*). Este cuarto tópico tiene que ver con la creación de vocablos precisos que se puedan constituirse en los predicados o categorías fundamentales de un saber y que eviten el problema de la circularidad de sus términos.

Un tema que surge en este texto es la utilización de vocablos griegos y latinos de manera simultánea y las consecuencias que ello acarrería. Puede decirse que es una invitación a establecer una propuesta sobre la naturaleza y personalidad de ambas lenguas; si se toman los dos vocablos *arkhé* (*ἀρχή*) y *principium* (*prīncipium*), se nota que el espíritu del idioma griego tiende hacia una trascendencia de índole especulativo-contemplativa; mientras que el latín es más práctico, está más dado a clasificar, ordenar y definir unas prácticas concretas señalables e identificables por ende intervenibles. Este hecho hace que el idioma español sea el heredero de ambas lenguas, donde el griego antecede al latín consolidándolo e enriqueciéndolo a todo nivel.

3.2.2.7. La inspiración del algebra lineal surge en esta construcción de línea

La línea (*γραμμή*) está vinculada con una problemática de carácter práctico operativo; se ve en este manejo la inspiración que motiva la construcción de un álgebra lineal de tipo vectorial, donde los *explicandum* son propiamente los distintos vectores que vendrían a constituir una línea. Siguiendo esta inspiración, surge una ecuación lineal y un sistema de ecuaciones lineales fundamentado alrededor de la noción de pareja ordenada, que se aprecia en como se da una unión entre unas constantes y unas variables, bajo la expresión: $a_1x_1 + a_2x_2,+\dots + a_nx_n = b$. Donde a_1, a_2,.., b son las constantes y x_1, x_2,..., son las variables. Cuando un sistema de ecuaciones lineales tiene una solución está se da a nivel de un punto, cuando tiene muchas soluciones tenemos tanto una línea como un plano[264]. Se

[264] Es de destacar el libro *Elementary Linear Algebra* de Howard Anton y Chris Rorres (2010), publicado por la prestante casa editorial John Wiley & Sons, esta obra tiene nada menos que 1276 páginas. La hace un tratado muy adecuado para la enseñanza de esta bella y elegante disciplina. En el capítulo 1.1 se aprecian estas explicaciones con detalle y ampliamente ilustradas con generosos ejemplos.

tiene que una variable es una cantidad que puede cambiar y no posee un valor fijo, mientras que una constante es un símbolo que tiene un valor numérico fijo y, por consiguiente, no se modifica. Puede ser cualquier objeto matemático que es definido formalmente y susceptible a ser definido como un conjunto, tal como Georg Cantor lo demostró. Como constantes se tienen los números 0 y 1, π, e, √2, entre otros. La notación moderna para la variable comenzó con el matemático francés François Viète en el siglo XVI y la que se utiliza hoy día se la debemos a René Descartes, quien extendió el uso de las letras x, y, z para las variables o lo que no se conoce; y las letras a, b, c para las constantes o aquello que es conocido. De esta manera comienza a darse una dinámica entre lo conocido y lo no conocido que debe guardar una relación muy especial donde un sistema tiene solución si el número de variables o lo desconocido es proporcional al número de ecuaciones, si son más variables que ecuaciones se dice que está sobredeterminado y si tiene menos variables que ecuaciones está subdeterminado. Es curioso que para conocer y poder decir o aseverar algo se requiere el concurso de mínimo de dos instancias. Lo que vuelve y nos remonta a Pitágoras en cuanto la realidad comienza con la díada representada en diez principios dobles[265]. Tal como lo sugiere Pitágoras, el número es el principio de todas las cosas, se ve en la dualidad entre constante-variable, entre conocido-desconocido, aquella díada expresada en la proporcionalidad de la expresión o ecuación que nos permite develar por medio de lo que se conoce lo que no se conoce. Es de destacar el trabajo del polímata Hermann Grassmann como fundador del álgebra lineal, para él este era el método que permitió a las ciencias adquirir una unidad, asimismo afirmaba que la matemática ha de ser apreciada como el saber filósofico que aporta el método utilizado en las ciencias[266].

Donde si se toma un vector, lo largo (*μῆκος*) es lo que cuenta al igual que lo que es no ancho (*ἀ + πλάτος*). En este planteamiento se está asumiendo una oposición doble, no

[265] Este hecho está ampliamente documentando en la *Metafísica* de Aristóteles, donde el propio Aristóteles expone el pensamiento pitagórico, libro 1-5 numeral 986α-1: los pitagóricos manifiestaron que los números son los elementos y el principio de todas las cosas (986α, [1] *τά τῶν ἀριθμῶν στοιχεῖα τῶν ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλαβον εἶναι*), luego de ello viene la exposición de los diez principios a partir del numeral 986α-20.

[266] Hermann Grassmann (1844) en su libro: *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (*The Theory of Linear Extension, a New Branch of Mathematics*) introduce la fundamentación del álgebra lineal, a la que considera una rama de las matemáticas capaz de tratar con leyes puramente abstractas, similares a las que utiliza la geometría para delimitar el espacio. Esto lo llevo a darse cuenta, que había llegado al dominio de una nueva ciencia, en la cual la propia geometría es tan solo una aplicación especial de la misma (pág. 12 del prólogo o Vorrede).

solo en cuanto lo largo se opone a lo ancho en cuanto direcciones contrarias, sino al ser las dos nociones complementarias que se necesitan mutuamente: tenemos que se está afirmando lo largo (*μῆκος*) junto a negar lo ancho (*πλάτος*). Tal hecho introduce otra suerte de estrategia de análisis, como si lo largo fuera una tesis (*θέσις*) de algo que está colocado y situado (*τίθημι*) como indicando algo que tiene una posición, un lugar desde el cual se ordena y se establece algo que se está afirmando con lo que es una superficie. Mientras la negación de la anchura correspondiera a una antítesis (*ἀντίθεσις*), que es la unión de la preposición *anti* (*ἀντί*) con tesis (*θέσις*) como la posición contraria u opuesta, donde la noción de línea fuera una suerte de combinación, arreglo, reunión y composición (*σύνθεσις*) entre la tesis (*θέσις*) y la antítesis (*ἀντίθεσις*). El verbo asociado a la síntesis es *suntíthēmi* (*συντίθημι*), que significa: juntar, añadir, sumar, reunir; poner en orden, ordenar, organizar; comparar, conjeturar, juzgar; escuchar, observar, oír; percibir, convenir, acordar. Algo que está muy en concordancia con la operación aritmética de la suma, que es el fundamento de todas las demás operaciones asimismo como de la composición de funciones ($f o g$): donde la longitud (*μῆκος*) es función de f(*μῆκος*) mientras la anchura es función de g(*πλάτος*). Lo importante es unir o componer dos nociones que poseen naturalezas contrarias. Pareciera que la línea (*γραμμή*) es la unión de lo que es con lo que no-es: es la misma imposibilidad de algo, que solo se resuelve parcialmente a través de una variedad de síntesis (*σύνθεσις*). Esta perspectiva podría ser la causa que motivó el surgimiento de las geometrías no euclidianas, ya que desde su génesis, la noción de línea abre la oportunidad para situar otra variante de planteamientos que la pueden modificar. Además, la manera en que se relacionan estos conceptos y nociones matemáticas, es propio de la dinámica de la retórica, anclada en las profundidades del pensamiento griego tan dado a argumentar y hablar (*εἴρω*) en público (*ῥητορικός*), propio del orador, del político, del juez o del retórico (*ῥήτωρ*). No hay que olvidar que el verbo *eíro* (*εἴρω*) posee dos significados: uno, está relacionado con el hablar, decir o contar y, el otro, con el atar, unir, asegurar. Este verbo está muy cercano con la definición de línea (*γραμμή*) y a la dinámica de un pensar discursivo retórico, que anima las charlas sobre estos temas tan especulativos (*speculātus*), participio pasado de *speculor*: aquel que mira, observa, examina, explora y espía; proviene del sustantivo *specula*, que es aquella torre para mirar y la misma acción de observar con atención.

Vocablo que se origina del verbo *speciō*, que es ver, observar, mirar; corresponde al verbo griego *sképtomai* (*σκέπτομαι*): mirar, examinar, considerar, pensar, estimar.

Hay que anotar que el descubrimiento del álgebra lineal por parte de Hermann Grassmann a mediados del siglo XIX, permite resolver un viejo problema que viene desde Pitágoras[267], consiste en cómo relacionar los números con la geometría. Ello llevó a la creación de la teoría de campo y a la del álgebra lineal. Esto solo fue posible gracias al concepto moderno de número real que se le debe a Simon Stevin[268] desarrollado en su *Arithmetic* obra escrita en 1594, manifestó que la matemática es el conocimiento de lo que es certero. Los grandes logros de Grassmann también son destacados por Cesare Burali-Forti[269], quien cometa que es reconocido por muchos que Grassmann logró tratar toda la geometría de posición sin tener que asociarle un concepto métrico. Manifesta la nueva dirección de la geometría analítica proyectiva, un método que permite exitosamente unir la cuestión métrica con la geométrica. Su obra *La enseñanza de la expansión lineal* (*Die Lineale Ausdehnungslehre*), sintetiza las teorías conocidas de la mecánica y la geometría, como también el método proyectivo. Burali-Forti afirma que el punto, la línea y el plano son entidades proyectivas, que pueden tomar formas geométricas como también las propias de un sistema lineal, siendo capaces de resolver problemas métricos. Esto es debido a que la entidad proyectiva substituye las formas geométricas que se identifican con ella. Una vez más, es notable cómo los conceptos geométricos fundamentales vuelven a ser tratados desde una perspectiva nueva, dando lugar a la aparición de otras disciplinas y variantes de las mismas; ellas representan una nueva decibilidad de las nociones primitivas que se presentan en *Los Elementos*, sin que esto quiera decir que se esté agotando su forma

[267] En su artículo: *Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra*, Fearnley-Sander Desmond (1979) expone con detalle cómo Grassmann llegó a sus descubrimientos, consideró a la geometría como una matemática aplicada, que se puede utilizar con los objetos que están en el espacio y en el mundo físico.

[268] En su artículo Karin Katz y Mikhail Katz (2012) *A Burgessian Critique of Nominalistic Tendencies in Contemporary Mathematics and its Historiography*, manifiestan que el matemático e historiador Bartel Leendert van der Waerden afirmó que el sistema de los números reales se le debe a Simon Stevin, quien lo logró hacia el año 1600 y demoró dos siglos en que fuera asimilado. Popularizó las fracciones decimales y en un documento de 1594 presentó la expansión decimal para la raíz de cualquier polinomio, el mismo algoritmo lo encontramos más tarde en Cauchy, quien lo utilizó en la prueba del teorema del valor medio (pág. 19).

[269] Cesare Burali-Forti (1896) en su artículo: *The Grasmann Method in Projective Geometry*, destaca cómo Grassmann logró un enorme avance para las matemáticas, dado que el álgebra lineal puede ser vista como un nuevo método geométrico proyectivo capaz de resolver múltiples problemas geométricos y métricos (pág. 2).

axiomática inicial, la cual ha sido capaz de inspirar nuevas teorías a lo largo de tantos siglos.

3.2.3. Los puntos limitan la línea

La tercera defición de Euclides del libro 1.1, dice: *los extremos de una línea son puntos* (*the extremities of a line are points*. *γραμμῆς δέ πέρατα σημεῖα*). Aparece de nuevo la noción de línea (*γραμμή*), aquella marca que prefigura un bosquejo que atraviesa un curso. Ya la misma noción de línea (*γραμμή*) acarrea toda una serie de manifestaciones diversas: cortar algo en pedazos, dibujar, pintar, escribir y enjuiciar (*γράφω*). Aquí se reconoce una de las acciones más complejas de la cual emergió la gramática, aquello que está escrito, dibujado o trazado (*γράμμα*). Tal es su complejidad que ha sido reconocido a lo largo de los siglos como el lugar propio del erudito, en cuanto aquel hábil en la escritura (*γραμματικός*); se está frente aquel que conoce los secretos del arte de la gramática como técnica (*γραμματική τέχνη*). En ese sentido, quien traza o delinea o bosqueja una línea (*γραμμή*) con competencia es un letrado, ya que "la línea presupone la existencia de la escritura". Esto implica que no es un trazo meramente caprichoso ausente de sentido o significado, sino el significado de línea (*γραμμή*) incluye aquel que la considera como una metáfora (*μεταφορά*) de la vida: lo que transfiere y aplica para cambiar y alterar un curso (*μεταφέρω*), no en vano proviene de la preposición *meta* (*μετά*) que indica un cambio de posición, algo situado entre, en medio, algo en común, algo que llega y que está en búsqueda de; asimismo del verbo *phéro* (*φέρω*), que significa llevar, acarrear, traer. En ese sentido la línea (*γραμμή*) en su origen conlleva algo que va tener algo situado en medio, asimismo como algo común que la atraviesa, sin embargo, el cambio involucrado en transportar algo ya está implícito en su propia naturaleza. Es decir, cuando se traza (*γράφω*) una línea (*γραμμή*) está presente todo el lenguaje (*γραμματική*), tanto a nivel de los sentidos más relacionados con la enseñanza de la literatura como a nivel de los sentidos animados propios de la gramática, la erudición y el alfabeto.

Ahora bien, lo que acompaña a la línea (*γραμμή*) es la misma problemática concerniente a su propio final, meta y extremidad (*πέρας*)[270]; se trata de perforar o atravesar algo en su recorrido a lo largo de algo (*πείρω*). Siempre que estamos trazando una línea nos estamos fijando en la meta a la que apunta su final y propósito que involucra una acción reiterativa de estar corriendo o recorriendo su propio trayecto. Por tal motivo, está sugerido que todo final o extremidad (*πέρας*) señala un pasaje, una abertura, un estrecho, un puente y los medios que hay que tener para arribar a un final. Se está frente al *poros* (*πόρος*), aquello que permite pasar a través de algo, atravesar (*περάω*) lo que está más allá (*πέρα*), en el otro lado como aquello que se nos opone (*πέραν*). Una vez más la línea (*γραμμή*) señala una meta (*πέρας*) que se plantea como un *poros* (*πόρος*) en cuanto un pasaje que señala el final de una jornada. Pareciera que la misma línea es una instancia pasajera y de tránsito en ese andar constante que atraviesa algo para llegar a un destino, que no es más que el comienzo de algo nuevo. Y se revela ese umbral al cual llega la línea (*γραμμή*) al final de su recorrido (*πέρας*), que es nada menos que el mismo signo (*σημεῖον*), aquella marca, signo y símbolo, que se levanta como un escudo y bandera. Además, indica aquel signo dejado por los dioses y la señal que indica el comienzo para realizar algo, la *sêma* (*σῆμα*): marca, signo y símbolo. También, hay dos vocablos para signo (*σημεῖον*)[271] y (*σῆμα*), el primero más relacionado con esa acción de atravesar algo a fin de llegar a una meta y, el segundo, más dado a señalar, mostrar, indicar, concluir, conjeturar y declarar (*σημαίνω*). El primero es más operativo y el segundo está cargado de toda una labor reflexiva concluyente capaz de llevar un argumento y poderlo explicar e interpretar.

Para simbolizar el actual axioma en el cálculo de predicados, se tendría: $\Gamma_{(\sigma', \tilde{\sigma})}$, donde σ’ y $\tilde{\sigma}$ representan aquella pareja (σ’, $\tilde{\sigma}$) de puntos. Surge entonces la pregunta,

---

[270] Un tema que merece toda la atención es cómo este texto se está anticipando más de dos milenios a la definición topológica de punto límite, sea $A \subset X$ un espacio topológico, sea x un punto límite que no necesariamente pertenece a A. Se dice que x es un punto límite si cada vecindad de x puede ser aproximada por algún punto en A. Se dice también que la vecindad de x con respecto a A es disyunta. Se dice que cada punto límite es un punto adherente. A su vez se dice que A es un conjunto cerrado si y solo si contiene todos sus puntos límite. Tema tratado en *Elementary Topology* Viro, Ivanov, Netsvetaev, Kharlamov (2008), donde se puede afirmar en ese orden de ideas, que se está definiendo una línea en cuanto sus extremos contienen sus puntos límite, una definición muy profunda que se presta a abordar la topología de una línea. Esta forma de definir y tratar una línea sería la base para definir la topología de la conocida recta real. (pág. 33-34).

[271] Es de destacar que la noción de espacio topológico X se funda en la noción de punto (*σημεῖον*) junto a sus vecindades, es de esta manera que esta noción primitiva permite la construcción de la línea (*γραμμή*).

¿Qué orden tiene? Tal hecho remite a un tema que ha sido tratado a lo largo del texto, concierne a la rectitud y a la justicia (*εὐθύτης*), habuendo ya planteado que aún el punto (*σημεῖον*) tiene una dirección. Este hecho está presente en la noción tanto de relación como de función, donde tiene que ser cuidada la condición recta (*εὐθύς*) de la línea (*γραμμή*): entre los puntos que la constituye se da un tipo de relación entre ellos y se ven atravesados por una función enderezante *f* (*εὐθύνω*): σ' → σ˜. Reconociendo que una línea (*γραμμή*) puede ser considerada como una sucesión de puntos (*σημεῖον*): (σ_k), surge entonces la pregunta de si es finita o infinita. Este hecho podría ser apreciado si se toma un segmento de línea y se sitúa en uno de los extremos al 0 y en el otro extremo al 1[272]. Tendríamos un intervalo abierto (0, 1) constituido por una infinidad de puntos contenidos dentro del intervalo cerrado X = [0, 1]: al unir (0, 1) ∪ [0, 1], tendríamos dicha clausura o cerradura que permite definir y cerrar la línea como ente geométrico-topológico. Da la impresión que esta definición axiomática de Euclides, estos puntos límite (*πέρατα σημεῖα*) están dentro del intervalo abierto A = (0, 1); sin embargo, existe un punto σ' que pertenece a X, σ ∈ X, es un punto de acumulación de A, si la vecindad (*neighbourhood*) de σ, N(σ), contiene otro punto σ''∈ A, donde σ' ≠ σ''.

Se puede concluir que la línea (*γραμμή*) involucra una doble actividad simbólica o un doble uso del símbolo (*σύμβολον*): por una parte, como aquella marca como final (*πέρας*) que atraviesa (*πείρω*) algo que está situado más allá (*πέρα*) y, por la otra, como aquel signo doble, una marca que sintetiza un mensaje (*σημεῖον*) y como una marca (*σῆμα*) que indica un proceso cognoscitivo altamente representativo y cargado de una riqueza interpretativa (*σημαίνω*). No en vano, el símbolo hala de manera conjunta a fin que algo pueda ser comparado y de esta manera pueda llegar a una conclusión (*συμβάλλω*), algo que va junto (*σύν*) a lo que es tirado a fin de ser colocado y situado (*βάλλω*). La existencia de la misma línea (*γραμμή*) involucra un proceso completo de simbolización donde interviene el lenguaje; es más, aún evoca aquello que la misma palabra no puede asir, está en el límite (*πέρας*) de lo posible que se nos muestra (*ἐπιφάνεια*) y lo imposible que no se nos revela:

[272] Tema tratado en *Elementary Topology* Viro, Netsvetaev (2008) capítulo 1.2, topología sobre un conjunto.

aquella sombra sea para refugiarnos del Sol sea el espíritu de alguien muerto[273] (*σκιά*). Una vez más, la línea (*γραμμή*) parece llevar en sí misma una contradicción, ya que no posee ancho (*ἀπλατής*) e igualmente no tiene un final o límite (*πέρας*) hacia lo largo. Tal situación acarrea un comportamiento paradojal (*παράδοξος*), contrario a las expectativas e increíble, algo más allá (*παρά*) de toda expectativa, opinión, juicio o creencia (*δόξα*). Esta paradoja (*παράδοξα*) involucra una contradicción lógica de variada naturaleza, la cual no debe de ser vista como algo inapropiado que es mejor evitar, sino todo lo contrario como algo necesario: sitúa esta definición euclidiana en un nivel de lenguaje distinto, lo que da lugar a variadas lecturas e interpretaciones de la proposición en cuestión, asimismo la problemática acerca de la completitud de una formulación. Se puede afirmar que pretender que un planteamiento, proposición o axioma sea totalmente completo, conduce a una contradicción, la cual ya fue notada por el matemático austriaco Kurt Gödel[274] a comienzos de 1930. Tal hecho tuvo su origen en la paradoja de Russell acerca del conjunto de todos los conjuntos, que motivó a la impredicatividad de una totalidad y a la búsqueda de soluciones en la teoría de los tipos lógicos de Russell y, posteriormente a la teoría de modelos de Alfred Tarski[275]. Es claro que la noción de número uno de Pitágoras es significativamente impredicativa, tal como algunos de los axiomas de Euclides también lo son a un nivel mucho menor, lo cual hace que en ambos se encuentren estos usos metaformales tan necesarios en la formalización de las teorías y los modelos para todas las ciencias, tanto las exactas como las del espíritu y las sociales.

Al afirmar de manera análoga, que una las extremidades de una línea son puntos, se ha de tenr muy presente que el punto fue definido como aquello que no posee partes; sin embargo, la dinámica del punto está en relación al todo y la parte, lo que puede sugerir que existen distintas totalidades constituidas por diversos números de partes. Tal hecho es una invitación directa a las geometrías no euclidianas, donde se pueden construir y recrear

[273] Esta etimología está sugerida en Liddell & Scott (1940) *A Greek–English Lexicon*, Oxford: Clarendon Press. Aquella sombra que es el doble de uno mismo; la reflexión e imagen; la sombra de un muerto, un fantasma; la sombra de un árbol como medio para protegernos del calor del Sol; silueta, perfil.

[274] Ver Kurt Gödel (1930) en *Some Metamathematical Results on Completeness and Consistency*, texto desarrollado a partir de los análisis realizados sobre *Principia Mathematica* junto con la adición de los axiomas de Peano.

[275] Ver Tarski Alfred (1953) en *Undecidable Theories*, que es un intento por evitar la indecibilidad de un sistema axiomático, el cual se logra delimitando las teorías por medio de conjuntos y subconjuntos: $T_1 \subset T_2$.

figuras geométricas que desafían la imaginación. Algo que hay que tener muy presente, es que en ningún lugar se dijo que una línea tiene dos extremos o que las extremidades tengan que ser dos, ni se dijo que una línea tiene que ser recta, con lo cual podría ser una curva. Toda formulación a este nivel, debe de contener todos los elementos sobre los cuales se va a edificar una teoría, en este caso una geometría. Sin embargo, pareciera que al ser la geometría (*γεωμετρία*) una metría (-*μετρία*), hecho no le resta valor a los postulados, sino que conduce a que lo que le falta como formulación teórica y que debe de ser completado en la técnica o *techné* (*τέχνη*). De igual manera, algo que es de enorme valor es que toda metría es una medida (*μέτρον*), que involucra por una parte el medir (*μετρέω*) que es un arte (*μετρητική*): que a su vez requiere del número o lo presupone; y, por la otra, involucra la noción de medida (*μέτρημα*). Esto lleva a los diversos patrones de medida, en este caso, a las unidades de medida propias de la geometría o metría de la tierra (*γῆ*): aquello que sirve para medir los terrenos pero también efectuar mediciones de la tierra, de la que todo nace, crece y fructifica. En esta forma, se constata que desde la misma geometría se puede construir un número o unidad de medida apropiado para ella, que posee ciertas propiedades más complejas del número construido desde una aritmética, como lo son aquellas propias del número áureo, y que conducen a otros usos diferentes a los de contar o sumar. Asimismo, toda metría (*μετρία*) lleva a diseñar distintas unidades de medición (*μέτρησις*) que definen la medida (*μέτρημα*), tan necesarias para todas las artes, las ciencias y el comercio.

Es sabido que existe una distancia entre la formulación axiomática tal como aparece en el texto y la representación de la misma en un modelo, hecho evidente tanto en Pitágoras como en Euclides. Sin embargo, en el primero, la distancia es aún mayor en relación con los textos que nos han llegado. La definición pitagórica del número uno como infinito es mucho más compleja que la definición euclidiana de punto, como aquello que no posee partes. En ambos casos, se afronta un metalenguaje o metateoría que se sitúa en un nivel de lenguaje distinto del ordinario, y que tiene entre sus propiedades la posibilidad de cuantificar de manera universal sobre el ente también abordado como un universal. Tal hecho permite que, a partir de un planteamiento elaborado en metalenguaje, se tenga la posibilidad de recrear varias teorías o modelaciones situadas en un nivel de cuantificación inferior al mismo; asimismo, este posibilita diversos niveles de abstracción, jerarquización y ordenación de una teoría, de unos modelos y de unas técnicas. Sea el caso, al apreciar que los axiomas euclidianos que se han analizado, estos podrían ser interpretados y analizados en concordancia con la propuesta de Tarski, donde el axioma tres que define los puntos límite de una línea, podría ser tratado como una extensión del axioma dos que define a la línea. Además, tales axiomas comparten cierta indecibilidad al no poderse establecer de lleno una correspondencia uno a uno entre las nociones propias de cada uno. Es tanta la riqueza de estos axiomas euclidianos fundantes de la geometría, que podrían constituirse cada uno como una subteoría dentro de otras bajo una complejidad que no siempre permite establecer la consistencia y la extensión de las unas respecto a las otras.

3.2.3.1. La línea y el punto unidos bajo la noción de límite

Amerita, igualmente, la atención que, tanto el punto (*σημεῖον*) como la línea (*γραμμή*), están relacionados y conectados bajo el criterio de límite (*πέρας*). Este vocablo posee varias aserciones: sea límite, meta, frontera y extremidad, lo cual es sinónimo de completetitud; un lado (*πέρα*) que va más allá de los propios límites que han tenido que ser atravesados y cruzados (*περάω*), mientras el otro (*πέραν*) puede ser apreciado como aquel encuentro con lo opuesto, con la misma extremidad como límite (*πέρας*), que manifiesta y establece un cambio de estado: que no se presenta a lo largo de la línea (*γραμμή*) sino en sus extremos o límites (*πέρας*). Esto indica que la misma línea guarda una naturaleza contraria contituida por lo que la atraviesa a lo largo (*μῆκος*) en relación con sus extremos o límites (*πέρας*); ambos aspectos a su vez están constituidos por dos parejas opuestas, lo largo (*μῆκος*) sin ancho (*απλάτος*) para la línea (*γραμμή*); y la parte (*μέρος*) que de ninguna manera es una (*οὐδείς*) para el punto (*σημεῖον*). Hay un juego de conceptos duales que se acompañan, se complementan y, a su vez, establecen una oposición interna intrínseca a su misma naturaleza. El concepto de límite es fundamental en las matemáticas, comienza como se ha visto con el gran problema que plantea aproximarse a lo que es lo más pequeño, lo que no es sujeto de una derivación y diferenciación ulterior, lo que lo hace ser un concepto dinámico propio del cálculo diferencial. La derivada puede ser vista como el límite del cociente de dos números reales, se origina a partir de la medición del cambio en cantidad de la variable dependiente que representa el valor de una función (y) respecto a la variable independiente x en la expresión $f(x) = y$. La derivada de f respecto de x, donde la derivada está representada por la pendiente m en cada punto del grafo. El caso más simple se da en una función lineal, que es un polinominio de grado uno o cero, que cuando tiene una sola variable se simboliza $f(x) = mx + b = y$, donde $m = \Delta x/\Delta y$ representa el cambio de x con respecto al cambio de y. Se representa como una recta de una dimensión, que viene a ser un hiperplano o sea un punto que corta a la línea. La generalización de una función lineal es $f(x_1, x_2,\ldots, x_k) = (a_1x_1+ a_2x_2+,\ldots+a_kx_k) + b$; a, b son constantes o sea números reales. Hasta ahora se tiene la representación de unos puntos (*σημεῖον*) que cortan una línea (*γραμμή*); ahora, se va a apreciar cómo se relacionan con la noción de límite, que en nuestro caso está sugerida directamente por *péras* (*πέρας*): fin, término, extremo, frontera, linde[276]. Recuérdese cómo este tercer axioma de Euclides: *los extremos de una línea son puntos* (*γραμμῆς δέ πέρατα σημεῖα*), contiene los conceptos que nos ocupan: punto, línea y límite.

Parece que la misma línea (*γραμμή*) está unida en su génesis a la actividad de atravesar algo a lo largo, a transpasar y perforar algo recorriéndolo (*πείρω*), la línea (*γραμμή*) posee una naturaleza activa tal como lo sugiere el verbo *gráphō* (*γράφω*)[277], aquel propio del escribir, el bosquejar, el arañar o el pintar. La línea involucra una constante transformación, que para nada es estática sino muy dinámica, algo que hoy día se ha perdido y no se tiene muy en cuenta, quizá con excepción de J. Derrida (1930-2004) y la prioridad que este le da a la escritura sobre la oralidad[278]. Cuando esa naturaleza cambiante

[276] Significados encontrados en: *Diccionario bilingüe Manual Griego clásico-Español*, Editorial Vox, (1967).
[277] Es de destacar cómo la parte fundacional de las matemáticas en tiempos de los griegos como disciplina axiomatizable en Occidente utiliza las raíces etimológicas con las que se construyen sus inderivables, sea el caso como la línea *gráphō* (*γράφω*) tiene por verbo *gráphō* (*γράφω*): la llamada teoría matemática de grafos comienza con Leonard Euler en 1736 con el problema: ¿Cómo cruzar una sola vez los siete puentes de la ciudad de Köningsberg? Tomó 200 años antes que apareciera el primer libro escrito sobre la teoría de grafos por parte de König (1936) *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Tal como lo comenta Tero Tarju (2007) en su texto *Lecture Notes on Graph Theory*.

[278]¿Acaso sería un modo aludir a la oralidad de la escritura poética? Meschonnic (que también es poeta) distingue lo oral de lo hablado, y afirma que la literatura es el lugar donde la escritura es eminentemente oral. Ahora bien, la escritura filosófica y literaria de Derrida (a veces poética) no escapa a esta descripción, podríamos aventurar (evocando a Celan) que leer a Derrida oblida a 'oirse adentro, con la boca' porque el pensador escribe 'masticando (…) con dientes la escritura'. Ver: Jacques Derrida, *Pasiones Institucionales II*, Esther Cohen Editora, Universidad Autónoma de México, México, 2007.

y móvil deja de existir aparece el punto (*σημεῖον*), como aquel umbral de lo imposible a ser franqueado, que ya deja de tener existencia en la realidad. Una vez más, se ve cómo el punto nos remite al cero y es un concepto vinculado con aquello que no siempre se logra atravesar. Recuérdese, una vez más, la definición de una derivada: $f'(x) = \lim_{h \to 0} f(x + h) - f(x) / h$, cuando existe el límite se dice que f es diferenciable en x. Estos conceptos fueron desarrollados por Golfried Leibniz, simbolizado como: $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) - f(x) /\Delta x$, que muestra el incremento infinitesimal de y cuando se tiene un incremento infinitesimal de x, simbolizado como: $dy/dx = f'(x)$. Si tomamos $dx = \Delta x$, $dy = f'(x)\, dx$, se puede ver que la integral puede ser expresada como la suma infinita de muchas cantidades infinitesimales, tal como se aprecia: $\int f(x)\, dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Sigma_i f(x_i)\, \Delta x$, donde tanto el símbolo $\int$ representa la suma a partir del vocablo latino *summa*, siendo el símbolo de la letra s alargada. Una vez más, lo que está en el límite de algo plantea toda una serie de problemáticas, dado que acercarse al mismo no es tan fácil y no siempre se logra hacerlo. A su vez, la vecindad de un punto es un concepto fundamental para la construcción, el desarrollo y la evolución de las matemáticas. Lo anterior tiene como condición de la existencia de un intervalo alrededor del punto (*σημεῖον*): cualquier intervalo abierto que contenga un punto p en medio es llamado una vecindad de p, simbolizado como N(p). Esto nos lleva a la definición del límite de una función: $\lim_{x \to p} f(x) = A$. Se lee, a medida que la función de x se aproxima a A, $f(x) \to A$, tenemos que x se aproxima a p, se tiene $x \to p$. Esto significa que para todo intervalo $N_1(A)$ existe otro intervalo $N_2(p)$, tal que se cumple que $f(x) \in N_1(A)$ siempre y cuando $x \in N_2(p)$; además, se tiene en cuenta que x es distinto a p, $x \neq p$[279]. De manera que se podría agregar que, si se reduce este axioma, se puede asemejar a un segmento de línea en cuyos extremos tenemos dos intervalos abiertos (−), en los cuales tenemos unos puntos límite o adherentes *πέρατα σημεῖα*. Esto daría lugar al planteamiento de la vecindad de los mismos y, además, a cómo una función f busca acercarse a los mismos a fin de poder ser definida. Esto lo hace recorriendo (*πείρω*) el intervalo como se sugirere en la misma simbología de la flecha → que simboliza a la línea (*γραμμή*), la cual debe de ser atravesada a fin que dichos puntos (*σημεῖον*) puedan ser alcanzados. Este heecho es recreado al plantear el límite (*πέρας*) de una función: lim $f(x)$

[279] Temas consultados en *Calculus* de Tom Apostol (1967): capítulo 3, funciones continuas pág.126.

→ p. Morris Kline resalta en su libro *El Pensamiento Matemático*[280], la importancia y la extrema complejidad del concepto de punto, línea y plano, y se podría decir que aún en Euclides no son unos conceptos completa y satisfactoriamente definidos. Sin embargo, el mismo Kline anota, que el otorgamiento de significados específicos a tales conceptos puede ser contrario a su propia naturaleza, por cuanto se requiere que tengan un desarrollo matemático independiente debido a su misma indefinibilidad.

3.2.4. La línea recta definida en torno al isomorfismo de sus puntos

La cuarta definición dice: *Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella* (*a straight line is a line which lies evenly with the points on itself. εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*). La noción de lo derecho figura entre las diez nociones dobles (unida a la de curvo, *καμπύλον*) fundamentales en Pitágoras. Aquí, junto al sustantivo de línea (*γραμμή*) se le agrega el adjetivo de recto (*εὐθύς*), hecho que lleva a que la generalización del significado disminuya y aumente en su particularidad al especificar que se trata de una línea recta. Lo recto (*εὐθύς*) también significa derecho y honrado, lo que nos lleva a la rectitud y la justicia (*εὐθύτης*); que unido a la noción de línea (*γραμμή*), da aquella línea arquetípica, capaz de enderezar y conducir por el buen camino (*εὐθύνω*), lo que facilita el buen gobierno propio del investigador o juez o revisor de cuentas (*εὔθυνος*). Esta es una alusión directa que se aprecia en la base de la fundamentación bajo la escogencia de la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή ἐστιν*), que es (*ἐστιν*) y, en ese sentido, posee un estatuto existencial muy alto, ya que de ella se derivan las demás; es la que nos da el gobierno, la que conduce la argumentación sirviendo de interlocutor frente a las demás proposiciones derivadas de ella. Aquella línea recta, la cual (*ἥτις, ὅστις*) − que es la unión del pronombre relativo (*ὅς*) y el pronombre indefinido (*τις*) – es la que permite afirmar que cualquier línea puede aspirar a adquirir esa rectitud previo cumplimiento de algunas condiciones: algo relacionado con este tipo de

[280] Morris Kline (1972) menciona que el único libro que ha ejercido una influencia fundamental a lo largo de los siglos ha sido *Los Elementos* de Euclides, siendo el primero que presentó un cuerpo organizado de axiomas, con definiciones bien estructuradas, una concatenación de los teoremas y sus demostraciones. En cuanto a las nociones primitivas de: punto, línea y plano, manifiesta que no poseen un significado matemático preciso, este hecho está en plena concordancia con la naturaleza misma de la matemática, que se ha de construir sobre estos términos indefinidos. Tema tratado en *Mathematical Thought*, (pág. 87).

línea recta, es que es una meta (*πέρας*) a lograr, pareciera que la misma meta o lo que está en el extremo o extremidad evoca al signo en cuanto punto (*σημεῖον*) que, como se sabe, es lugar de indefinición, topos (*τόπος*) que, de alguna manera, es inaprehensible y cuyo acercamiento a tan excelso e inalcanzable lugar (*τόπος*) debe de hacerse y buscarse de manera reiterativa. Este aspecto remite a lo que es propio de la conducción y la guía (*εὐθύνω*), tanto como una aproximación como llevar algo a dicho umbral donde lo derecho o recto (*εὐθύς*) emerge. Dicho entorno obliga a que todos los argumentos de un planteamiento tengan que ser revisados y constatados; por tal motivo, es propio de quien es recto (*εὐθύς*) que toda rendición de cuentas como también todo proceso esté bien conducido. Tal como un juez examina y lleva un juicio (*εὐθύνα*), lo recto (*εὐθύς*) no siempre es alcanzado y se tiene que perseverar para lograrlo. No en vano el vocablo para recto (*εὐθύς*) y, en especial, aquella línea o trazo (*γραμμή*), debe de poder ser conducida, guiada y supervisada en su camino para volverse recta (*εὐθεῖα γραμμή*). Este proceso comienza con (*εὐ*), del cual proviene lo bueno en todos los sentidos, lo justo y recto, lo favorable y rico: abundante (*εὖ*) y de (*ἐΰς*); que es bueno, noble y bravo.

En su texto sobre los *Fundamentos de la Geometría*[281], David Hilbert introduce lo que él denomina los tres sistemas de cosas: Las cosas que componen el primer sistema los denominará puntos y los denotará por las letras mayúsculas del alfabeto latino (A, B, C,..), las cosas que componen el segundo sistema las denominará líneas rectas y las denotará por medio de las letras minúsculas latinas (a, b, c,..) y las cosas que constituyen el tercer sistema las denominará planos y serán denotadas por las letras minúsculas del alfabeto griego (α, β, γ,..). A los puntos los denominará los elementos de la geometría línea, a los puntos y a las líneas rectas los denominará los elementos de la geometría plana. Y a los puntos, las líneas rectas y los planos los denominará los elementos de la geometría del espacio. Luego, proseguirá a introducir los axiomas de conexión, del orden, de las paralelas, de la congruencia y de la continuidad. Este notable matemático no se detiene

[281] En su libro *The Foundations of Geometry* (*Die Grundlangen der Geometrie*), David Hilbert (1894) busca fundamentación de la geometría desde los tiempos antiguos a los modernos. No en vano, la matemática se inspiró en la axiomatización de la geometría desde la época de Euclides. Hay que anotar que Hilbert no se detiene a darle una definición a lo que es punto, línea recta y plano (pág. 2 Ob. cit). Ya se anotó que tales conceptos son extremadamente complejos y pueden requerir un tratamiento distinto a la manera en que los teoremas son tratados y demostrados.

frente a un problema que es supremamente complejo como lo es dar una definición o axiomatizar las nociones primitivas o los denominados inderivables de la geometría. La razón de ello, como se ha sugerido en varios apartes del presente texto, radica en que tal definibilidad y axiomaticidad habría que llevarla a cabo en un metalenguaje. Se ha sugerido que estos axiomas de Euclides deberían ser tratados como metaxiomas, lo cual no obliga a que tengan que responder y satisfacer todas las exigencias que sobre ellos se les quiere hacer por parte de la parte operativa de carácter demostrativo.

La diferencia entre los lenguajes naturales y los formalizados está en que estos últimos no tienen la universalidad de los primeros; tal tema es tratado por Alfred Tarski[282]en relación con el concepto de verdad en los lenguajes formalizados. La verdad en estos lenguajes descansa en los signos que forman las estructuras de las expresiones en estos lenguajes. Se reconoce su carácter deductivo pues se tiene, en primer lugar, una lista o una descripción estructural dada en oraciones que son denominadas axiomas o declaraciones primitivas regidas por las reglas de inferencia que permiten transformar estas oraciones en otras. Esto hace necesario distinguir entre el lenguaje acerca del cual se habla y del lenguaje dentro del cual se escribe; el primero pertenece al lenguaje natural y, el segundo, a un lenguaje formal que denominará metalenguaje. Las descripciones y las definiciones de estos complicados conceptos, en especial, de aquellos conectados con la construcción de una teoría deductiva se darán en una metateoría. Una vez más, se nota desde cierta perspectiva, la ruptura o escisión que existe entre el lenguaje ordinario y el formal. En parte, se explica la dificultad de situar en un mismo nivel de discurso los conceptos primitivos, que son tema de una reflexión filosófica capaz de desmenuzar lo teórico de lo práctico y, de esta manera, situar los linderos propios de lo técnico y lo operativo en relación al conocimiento que se trasciende a sí mismo.

---

[282] Alfred Tarski (1956) trata diversos temas en *Logic, Semantics, Metamathematics*, obra que recoje documentos que van desde 1923 a 1939. En el capítulo VIII concerniente *El concepto de verdad en los lenguajes formalizados*, (pág 152), se plantea la definición de verdad, la cual debe de ser resuelta en referencia a un lenguaje dado, más concretamente como una definición correcta material y formalmente adecuada del término oración de verdad. Alude que este tema es más parte de la filosofía y es harto complejo. Sin embargo, él se va a orientar tratarlo en relación a los lenguajes formalizados, donde es posible construir diversos métodos para dar una correcta definición de verdad a partir de cada uno de ellos (pág. 168).

En aquello que es lo recto (*εὐθύς*) está implícito de alguna manera una cuantificación universal, no solo por ser un umbral que sirve de norma para todos sino, además, por estar esta oración acompañada del vocablo cualquier(a) (*τις*), el cual (*ἐκ*, *ἐξ*) es equivalente o lo que es igual (*ἴσος*): la preposición desde (*ἐκ*, *ἐξ*) es la instancia o instrumento que conduce a la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). La anterior aseveración presupone un dominio o lugar de salida y un codominio o lugar de llegada, es un puente y un camino de gran actividad que hace que algo sea verificado de manera constante a fin que pueda lograr llegar a ser recto y pueda mantenerse en tal estadio. Siendo una de las características del mismo que es (*ἐστιν*) y que tiene la potestad de hacer igual (*ἰσόω*) lo que se le avecine, estableciendo las mismas proporciones o equivalencias a todo lo que caiga bajo su supervisión o mando. Esto conduce a que todo isomorfismo posee la misma y equivalente (*ἴσος*) forma (*μορφή*), y es de alguna manera afín a algo que es recto; este hecho hace que lo recto (*εὐθύς*) tenga la potestad de distribuir, asignar, otorgar en todas las direcciones las mismas prebendas o garantías, aspecto que lo convierte en norma y patrón. Desde donde se lo mire o considere, lo recto (*εὐθύς*) asigna a las distintas partes (*μοῖρα*) de un topos (*τόπος*) las mismas o equivalentes (*ἴσος*) formas (*μορφή*): este hecho hace que lo que esté situado en las distintas direcciones, norte, sur, arriba, abajo, etc., tenga entre sí una estructura isomórfica propia de las ventajas que otorga lo que es recto, como patrón normativo. Desde lo recto (*εὐθύς*) se otorgan los mismos derechos y condiciones a los (*τοῖς, ὁ*) que están situados sobre y cerca (*ἐφ', ἐπί*) por ella (*ἑ, οὗ*) misma (*αὐτός*) en *heautoû* (*ἑαυτοῦ*): donde lo recto (*εὐθύς*) es (*ἑ, οὗ*) en sí y por sí mismo (*αὐτός*), siendo capaz de marcar y simbolizar algo como el signo y el punto (*σημεῖον*). Es de destacar cómo en estas formas (*μορφή*) rectas (*εὐθύς*) se está preservando una condición de igualdad o semejanza (*ἴσος*), el denominado isomorfismo[283]: sea un espacio métrico X, se tiene X (a, b) como una

---

[283] Este tema es tratado por Francis William *Lawvere (1973) en su artículo: Metric Spaces, Generalized Logic and Closed Categories.* Se menciona la métrica Hausdorf sobre subconjuntos de un posible espacio en su forma simétrica, que conduce a una inclusión de orden parcial. Al aplicar el funtor monoidal estándar representado por la unidad 0 de V al poset cerrado cartesiano V_0 de valores de verdad (pág. 2). En este sentido, este único elemento se puede asemejar a un punto. Se destaca cómo los puntos preservan una estructura isomórfica a lo largo de una línea recta, en ese sentido se puede apreciar la estructura algebraica que se le puede asociar a un punto como un conjunto punto, donde X es el conjunto y x_0 es un elemento de X o conjunto punto (X, x_0). Se puede ver cómo se preserva el mapa entre estos dos conjunto punto, donde la relación entre dos puntos se define por la función f: X → Y, $f(x_0) = y_0$, o sea f: (X, x_0) → (Y, y_0).

cantidad real no negativa de la distancia de X, definida de un punto ‘a’ a un punto ‘b. Bajo la relación más grande que, se tiene: X (a, b) + X (b, c) ≥ X (a, c), 0 ≥ X (a, a). Se denotará X (a, b) el conjunto abstracto X de morfismos del objeto a hacia el objeto b. La ley de composición y de especificación del morfismo de identidad para X está dado en el mapeo de: X (a, b) × X (b, c) → X (a, c); 1 → X (a, a). Se tiene, así, un isomorfismo entre los puntos que están ordenados bajo la mayoranza (≥), situación que se da en una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) entre otras. Un tema que merece la atención es cuando las vecindades de los puntos están separadas y su intersección sea vacía: $N_{\sigma'} \cap N_{\tilde{\sigma}} = \emptyset$. Tal hecho conduce al denominado Espacio Hausdorff que invlucra la existencia de un límite único, donde los puntos σ_k de una secuencia en X convergen en un punto σ.

3.2.4.1. Lo recto como norma que asigna las mismas características a su vecindad

Lo recto tiene la potestad de valerse por sí mismo y de erigirse como una instancia que es reflexiva y se autorrelaciona consigo misma; de ahí, su gran solidez. Debido a que es un automorfismo, es permitido aseverar que toda línea recta sea simétrica consigo misma, siendo capaz de mapear un objeto respecto a ella y preservar toda su estructura. El comentario final encierra toda una serie de sorpresas, dado que al comienzo de este axioma se introduce la noción de la línea recta como lo que es (*εὐθεῖα γραμμή ἐστιν*) y, en ese sentido, es lo sumo, lo supremo y lo bueno (*εὖ, ἐΰς*). Tal afirmación está situada en un nivel de discurso distinto de la oración que le sigue, donde se resalta cómo la línea recta es aquella capaz de transmitir una forma igual (*ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ’*) en razón a que posee una estructura isomórfica susceptible de afectar a todo lo que se sirva de ella. El beneficio de todo esto se aprecia al final, donde se resalta que toda línea recta es isomórfica y se tiene así el gran regalo que está dado en aquella marca, signo o símbolo, *sēmeîon* (*σημεῖον*), que permite recoger todos los beneficios de las dos oraciones previas: lo que está ahí colocado para dividir, cortar y establecer particiones sobre la línea recta, es el mismo símbolo o marca (*σῆμα*). El nivel simbólico es equiparado con el punto (*σημεῖον*); el símbolo en cuanto marca o señal de algo es un punto, el cual representa una parte (*μέρος*) que se basta a sí misma, debido a que no requiere de nada exterior a él mismo para completarse. El acercarse a la línea recta por medio de puntos iguales entre sí o puntos sometidos a una estructura isomórfica, tan solo es aprehensible simbólicamente: el punto como signo y símbolo es lo que está situado (*κεῖμαι*) a fin de que pueda ser partido o cortado (*κείρω*). Esta alusión presenta a la línea recta como una sucesión de puntos que la parten o la cortan (*ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*). La línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) se expresa como una serie de puntos capaces de simbolizar y de marcar (*σημεῖον*), se indicar algo que se parte o hiende (*κέω, κείω*) como consecuencia de yacer ahí, colocado, puesto y situado (*κεῖμαι*) en un estado de total reposo. Es, por tal motivo, un vocablo al cual se le asocia también el significado de quien yace muerto.

En este comentario, como en otros que se han realizado, se concibe la línea como algo que está dotado de un movimiento, más propiamente, cuando se afirma que puede ser construida como una función f (*σημεῖον*) de un punto que recorre un espacio: cada punto $\sigma_k t^k$ sobre la línea puede ser apreciado como un punto k en un tiempo t, lo que da una serie de puntos distintos en tiempos diferentes que llegan a constituirse como una línea. Debido a que la realidad no es estática sino dinámica, es menester analizar nuestros objetos geométricos, el punto y la línea en movimiento. Tal hecho es posible en la geometría diferencial, en la que se encuentran las coordenadas normales en un punto σ que se dan respecto a una variedad diferenciable. Esto es una consecuencia del espacio euclidiano, en especial una línea y un círculo pueden ser concebidos como una variedad de dimensión 1, concepto que es propio de los espacios lineales muy útiles para el cálculo. Hay una estructura que se diferencia localmente cuando las vecindades de un punto se comportan como una línea recta. En este caso se tiene un homeomorfismo sobre un espacio lineal que cumple una función f uno a uno y sobre, f es continua y el inverso f^{-1}es continuo, se preserva las propiedades de un espacio topológico bajo un mapeo abierto. Tal hecho es posible debido a que se tiene una conexión afin simétrica sobre una variedad suave, la cual conecta las tangentes haciéndolas diferenciables en un espacio vectorial. En este caso, se tiene el denominado espacio Hausdorff, segundo contable: es una base B_γ en un espacio topológico X bajo una topología T_γ, que puede ser apreciada como la reunión de una colección de conjuntos abiertos, en este caso de puntos que pueden ser representados como: $\{\sigma i\}_{i=1}^{\infty}$, el cual también es llamado un atlas homeomórfico o una carta, dado que tenemos un sistema de coordenadas en relación a la vecindad de un punto σ: un mapa que es un subconjunto de un espacio tangencial en un punto σ. Ello obedece a la geometría de Riemann[284] que permite apreciar el desplazamiento de un punto de un lugar inicial a uno final, teniendo en cuenta la distancia y la dirección en que se está mapeando el movimiento a lo largo de una línea recta. Este aspecto recrea la línea recta como constituida por un conjunto de puntos con vecindades abiertas que permiten conectarse entre sí, de manera parecida a una línea que puede ser generada por el recorrido de un punto entre un origen y una llegada. Se aprecia así la inusitada importancia de la definición de los inderivables o las nociones primitivas: punto, línea y superficie que son definitivas para el desarrollo de todas las áreas de las matemáticas.

3.2.4.2. Como el punto tiene la potestad de cortar a la línea

Puesto que lo recto (*εὐθύς*) tiene esa potestad de establecer una partición (*κείω*), asimismo, significa aquel estado de reposo de quien está durmiendo: lo recto evoca aquel lugar de paz y concordia, de armonía y tranquilidad pero, al mismo tiempo, corta, poda, roe, tala (*κείρω*), al establecer su normativa. Es lo que yace como situado (*κεῖμαι*) y, en ese sentido, es el fundamento del lugar (*τόπος*); es aquella instancia capaz de establecer una partición o división de las instancias o direcciones constitutivas de un lugar. Algo que merece la pena tener en cuenta, es cómo este vocablo (*κεῖμαι*) se refiere a aquello que yace ahí y allá, al pronombre demostrativo (*ἐκεῖνος*) que además señala lo que está más allá del hablante y que procede del pasado. Aquel lugar, allá, en ese tiempo (*ἐκεῖ*) que está tan próximo al vacío (adj sing nom. *κεῖνος*, de *κενός*): lo que es común a todos y que está presupuestado en el lugar mismo. El punto (*σημεῖον*) es al mismo tiempo un signo, una señal y un símbolo, que parece diluirse en el vacío (*κενός*): es aquella parte (*μέρος*) que no ha logrado consolidarse a sí misma en cuanto referida a un todo (*πᾶς*) y, por consiguiente,

---

[284] Este tema puede ser amenamente entendido y estudiado en la excelente obra: *The Concept of a Riemann Surface*, escrita por el destacado matemático Hermann Weyl (1913), pág. 32-34. Ahí se estudian las vecindades de un punto como conjuntos abiertos sobre dos variedades en un sistema de coordenadas (x, y) sobre una superficie F. La cual es definida como un mapa topológico S con un origen 0 = (0, 0) desde un punto p_0 a un punto p* en (x*, y*). Se aprecia el mapa topológico que se da entre (x, y) → (x*, y*). La superficie de Riemann puede ser expresada en términos de la vecindad de un punto p_0 como la serie: $f(t) = A_0 + A_1t + A_2t^2 + \ldots$ Esta superficie suave tiene una rotación en cada punto dada por un sistema local de coordenadas: "El poder del cálculo diferencial está en que linealiza todos los problemas al retroceder a lo infinitesimalmente pequeño, pero este proceso solo puede ser utilizado sobre variedades suaves." (pág 44).

vacía en ella misma. Pareciera que el punto fuera algo en vano, carente de frutos, exhausto, vacío y destituido; por tal motivo, tan solo es aprehensible a nivel simbólico como un símbolo abstracto, que existe en relación a las teorías que ayuda a construir. El punto-signo (*σημεῖον*) está más dado a ser un metasímbolo amorfo, que es capaz de adoptar la forma que le sea necesaria en concordancia con la teoría que ha de servir, en este caso, en la fundamentación de una geometría. La importancia de esta oración es la introducción del punto o signo-símbolo (*σημεῖον*) como aquello que tanto corta la línea recta como también la constituye (*εὐθεῖα γραμμή*). Este hecho hace que el punto preserve su estructura simétrica a lo largo de la línea, en especial, cuando ella es asumida como una sucesión de puntos, donde el punto es isomórfico respecto a sí mismo dentro de esta sucesión.

Algo importante es la noción de dirección, la cual es preservada por el punto pero solo cuando está en relación a aquello que es recto (*εὐθύς*), bueno y correcto (*εὖ*, *ἐΰς*). Surge entonces la pregunta: ¿Si dicha sucesión de puntos vendrían a constituirse como aquel todo (*πᾶς*) frente a las partes (*μέρος*) que la componen se supone sean puntos? Una sucesión de puntos puede ser simbolizada como una secuencia indexada de puntos: $\{\sigma_n\} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n\}$ que pueden ser representados en una línea recta. Aquí el razonamiento da un salto frente a la argumentación que un punto no posee parte alguna; entonces ¿cómo se ha de relacionar con los demás puntos? La respuesta sería por medio de una línea propiamente recta. También se puede tener una serie de puntos: $\Gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma i = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 +, \ldots, + \sigma_n$, donde lo nuevo es la presencia del operador de la suma que une y comunica a estos puntos indexados en este caso por números reales. Un tema apasionante es la serie considerada como una sucesión infinita, tema tratado por primera vez por el filósofo presocrático Zenón de Elea[285] (*Ζήνων ὁ Ἐλεάτης*) en sus famosas paradojas que fueron preservadas en la *Física* de Aristóteles o *Lecciones sobre la naturaleza* (*Φυσική ἀκρόασις*)[286]. Está también la paradoja de Aquiles y la tortuga que hoy se puede intepretar

[285] Existe un amplio artículo documentado de las paradojas de Zenón escrito por Nick Huggett (2010), *Zeno´s Paradoxes*; el autor las divide en tres grupos: paradojas de la pluralidad (tres), paradojas del movimiento (cuatro) y paradojas del lugar (dos), pág. 1.

[286] Existe un documento de un valor inigualable, y es *La Física* (*Φυσική ἀκρόασις*) de Aristóteles, en el libro VI: División del movimiento en partes cuantitativas, comienza tocando el tema de cómo el continuo no está compuesto de indivisibles y, también, realiza un análisis de cómo el punto se puede mover en unas

como una serie geométrica convergente: 10 + 1+ 1/10 + 1/100 + 1/1000 +… = $\sum_{n=0}^{\infty} 10$ $(1/10^n)$ = 11,111… Se tiene la paradoja de la dicotomía se simbolizaría como: $\Sigma_{n=1}^{\infty}$ $1/2^n$ = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 +… Es de destacarse la profundidad y la sutileza de este gran filósofo griego.

La vectorización del punto no está limitada a una sola dimensión, esto hace que el punto (*σημεῖον*) puede ser denso en sí mismo, en cuanto es capaz de generar múltiples direcciones aprehensibles en un espacio vectorial V. La noción de vector, se insiste, representa ese paso intermedio del punto (*σημεῖον*) a la línea (*γραμμή*) incorporando una longitud (*μῆκος*) y una dirección (*dīrēctiō*) e incorpora, asimisma la noción de escalar que es de alguna manera una aritmetización de una línea en términos del conjunto de los números reales. Se resalta cómo lo que es directo (*dīrēctus*) tiene que ver con lo recto (*εὐθύς*), evocando también a la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), la que permite gobernar, guiar, conducir (*dīrigō*). Es decir, conducir y guiar *árkhō* (*ἄρχω*) a la línea (*γραμμή*) desde su origen (*ἀρχή*) representado en el punto (*σημεῖον*). Es notable, además, que los números reales se construyen y se representan, en general, en la denominada recta real. En ella se aprecian los puntos que cortan a la línea en segmentos de línea de variada extensión, la cual es una de las representaciones más tradicionales para simbolizar al conjunto de los números reales[287].

3.2.4.3. La noción de serie construida como una sucesión de puntos

Un tema esencial es cómo el punto (*σημεῖον*) es capaz de preservar su estructura, aspecto que posibilita la existencia de la línea (*γραμμή*). Esto hace que de la reunión de muchos puntos podamos construir una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). Pero, además, la línea en sí misma requiere preservar una dirección, hecho posible gracias a que el punto es abordado

---

sucesiones. En *Physique D'Aristote*, traducción de J. Barthélemy Saint-Hilaire (1862), libre VI, tome II, chapitre 1, §1-5).

[287] Se tiene una elegante construcción del conjunto de los números reales en: *Principles of Mathematical Analysis* de Walter Rudin (1964), donde se estudian sus propiedades: sea S un conjunto ordenado; x, y $\in$ S, se dice que existe un orden que es la relación <, se cumple los siguientes casos: x < y, x = y, y < x. Si E $\subset$ S, existe un $\beta \in$ S, tal que x $\leq \beta$, para todo x $\in$ E, se dice que E está acotado superiormente y que β es la cota superior; el mismo procedimiento se sigue frente a la cota inferior, y recibe el nombre de *supremum* e *infimum* tales cotas (pág. 8). En el apéndice está la construcción de los reales utilizando las cortaduras de Dedekind (p. 17).

como aquella parte (*μέρος*) incompleta en relación con un todo (*ὅλος*), el cual es propiamente la instancia que está encargada de señalar una dirección. Lo que constituye la completitud del punto (*σημεῖον*) como parte (*μέρος*) está dada por lo recto (*εὐθύς*), que en sí mismo es completo por su propiedad de enderezar (*εὐθύνω*), es decir, de preservar y comunicar su estructura que, de alguna manera, lo transciende, tal como la justicia y la rectitud (*εὐθύτης*) lo están. El punto (*σημεῖον*) como parte (*μέρος*) incompleta (*οὐδείς*) es capaz de identificar aquel uno (*εἷς*) que de manera reiterativa le falta (*οὐδέ*); se ha de comprender que "el todo es mayor que la suma de las partes" (*καί τό ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστιν*. *Los elementos* l1, t3, n8.), ya que el todo tiene la potestad de imponerse a las partes por estar completo. De manera que el punto (*σημεῖον*) preserva la estructura y la dirección entendidas como aquel vector que señala un norte o aquello que es recto (*εὐθύς*). Tal hecho permite que dos puntos puedan comunicarse o sean capaces de establecer una relación que en este caso se da sobre un intervalo abierto: el punto hay que abordarlo como un intervalo abierto que permite que en su vecindad pueda ser aproximarda por otros puntos. Sin embargo, el punto tiene la potestad de partir o cortar (*κείρω*), este hecho reviste una importancia mayor dado que no podemos aseverar que un punto esté seguido por otro punto debido a siempre entre dos puntos pueden existir incontables puntos. En este axioma se anuncia el problema del continuo matemático planteado desde la geometría y no desde la aritmética. La preservación de la estructura por parte del punto (*σημεῖον*) se da en relación con su posibilidad de establecer igualdades o equivalencias (*ἴσος*) con otros puntos lo que permite preservar una forma (*μορφή*), siendo la forma más excelsa la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) que preserva la forma recta (*εὐθύς*) que, como se verá más adelante, será el componente esencial que ayude a fundamentar la construcción de las distintas funciones trigonométricas a partir del triángulo rectángulo isósceles.

Los conceptos de punto y del cero están íntimamente relacionados; el primero representa un acercamiento geométrico-topológico mientras el segundo busca abordar el tema desde una perspectiva numérica. Este tema fue estudiado por Felix Hausdorff quien lo analizó a nivel topológico en lo que se conoce como la dimensión Hausdorff. Esta busca medir el tamaño de un conjunto de números en relación con un espacio teniendo en cuenta que la distancia entre ellos está dada por unos puntos. En dicho contexto el cero se interpreta en relación con el conjunto vacío que tiene una dimensión menos uno (– 1). Si tomamos a X como un espacio métrico y si tenemos un subconjunto S de X ($S \subset X$), tal que existe un $\delta \in [0, \infty)$, el contenido dimensional d de Hausdorff para S está dado por: C_H^d (S): = $\{\Sigma r_i^d\}$, existe un cubrimiento de S por medio de bolas de radios arbitrarimente pequeñas $r_i > 0$. Se tiene que C_H^d (S) es el *infimum* para $\delta \geq 0$, existe una colección de bolas indexada {B (xi, ri): $i \in I$} cubriendo a S tal que $\Sigma_{i \in I} r_i^d < \delta$. En este caso, se dice que el *infimum* del conjunto vacío es infinito: inf Ø = ∞. La dimensión de Hausdorff está dada por $\dim_H(X)$: = inf $\{\delta \geq 0$: C_H^d (X) = 0}, donde se aprecia que un punto Hausdorff tiene dimensión cero. Se tiene que la medida dimensional d de Hausdorff: μ_δ (X) = 0 si $\delta > \dim_H(X)$, a su vez si: μ_δ (X) = ∞ siempre que $\delta < \dim_H(X)$[288]. Se aprecia cómo Hausdorff da una definición topológica del cero, el recurso que usa es un espacio métrico X donde previamente ha situado un subconjunto S, hecho que se da debido que no hacerlo conllevaría la impredicatividad del planteamiento dado que X se convertiría en una totalidad ilegítima X. Acto seguido siempre el punto ha sido imaginado y planteado en topología en relación con las bolas como aquel cubrimiento que se da en torno a un punto, el cual posee un radio y una frontera. Se nota cómo se puede situar una infinidad de bolas, no obstante, nunca el radio r_i^d debe de ser menor que 0. Se aprecia que el cero se presenta cuando el delta δ escogido es mayor que la dimensión Hausdorff y es infinito si el delta es menor que la dimensión de Hausdorff.

Retornando al tema de la preservación de una dirección por parte del punto (*σημεῖον*) en torno a lo que es recto (*εὐθύς*), esta viene acompañada del poder de comunicar esta propiedad a otros puntos independientemente de que exista una vecindad inmediata entre los mismos. Tal es la enorme capacidad de la preservación isomórfica por parte del punto de una forma, en especial de la recta, que es capaz, en medio del vacío (*κενός*), de poderlo saltar o crear un puente donde, de antemano, podrían existir otros puntos. Se puede, entonces, afirmar que el punto (*σημεῖον*) es susceptible de ser cortado (*κείρω*), lo cual está en concordancia con que es una parte que no es completa de ninguna manera ni está

[288] En el artículo: *Hausdorff Dimension, its Properties and its Surprises*, Dierk Schleicher (2007) afirma que la dimensión Hausdorff es el concepto correcto para describir las propiedades de un conjunto métrico X, sea d que representa las distintas coordenadas reales $X = \mathbb{R}^d$, para cada número d en $\mathbb{R}_0^+$, se define la medida de la dimensión d de Hausdorff $\mu_\delta(X)$ (pág. 509).

constituida por otras partes. Tal formulación parte de considerar al punto (*σημειόω*) como una parte (*μέρος*) que de ninguna manera es una (*οὐδείς*), lo que también indica que lo uno (*εἷς*) al ser completo (*ὅλος*) en sí mismo es la instancia que fundamenta la noción de lo recto (*εὐθύς*). El punto es isomorfico en relación con otros puntos (*ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ'*); este hecho hace que pueda darse una estructura que preserva las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva entre los distintos puntos que va a formar una línea (*γραμμή*) pero, nótese que se trata de una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) la que está cobijada bajo esta característica. La definición previa de línea en cuyos límites se tienen unos puntos (*γραμμῆς δέ πέρατα σημεῖα*) es incompleta; específicamente, sin la propiedad de la preservación estructural de lo recto, la línea no es línea. Nótese que los puntos (*σημειόω*) que se ven comprometidos a formar una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή ἐστιν*), que es (*ἐστιν*) la que posee el estatuto de existencia; los puntos adquieren una completitud relativa o se constituyen en un todo (*ὅλος*) en virtud a la rectitud (*εὐθύτης*) que todos como puntos están preservando, la cual los subyace (*κεῖμαι*) posibilitando tal equivalencia (*ἴσος*) entre todos.

La sucesión (*ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ'*) de puntos (*σημειόω*) viene a constituirse como una serie de puntos en vez de números; el criterio permanece y va a ser el pilar que va permitir imaginar la construcción de los números a partir de una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) que es cortada (*κείρω*) de manera reiterativa hasta la saciedad. Tal figura ya está recreada en este axioma, de cómo se puede tener una especie de regla o línea que puede ser señalada o cortada, de tal manera que es posible situar en ella los puntos que señalan el corte algunos números. La línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) que define los números reales $\mathbb{R}$ o la denominada recta real, es exactamente este tipo de línea que se está estudiando aquí. La formulación actual va más allá de la misma al evocar una línea que es continua o densa, en la cual siempre se puede situar otros puntos en medio de dos puntos. La noción de serie tiene una importancia aún mayor, dado que se va a constituir en el imaginario que va a recrear las series numéricas. A partir de tal uso se tendrá la problemática noción de un infinito (∞) numérico que, para los griegos, era una noción incomprensible e inexistente del todo. Hay que tener en la cuenta que, en medio de una serie de puntos conectados entre sí, con base en el imperativo de constituirse como línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), lo recto (*εὐθύς*) en sí mismo evoca un estado de completitud o una totalidad (*ὅλος*) en la cual los puntos (*σημειόω*) como partes (*μέρος*) se completan. Este hecho evoca de modo directo al uno (*εἷς*) que hace posible que se dé tal rectitud (*εὐθύτης*) igual (*ἴσος*) para todos (*ὅλος*) los puntos (*σημειόω*) de una línea (*γραμμή*) recta (*εὐθεῖα γραμμή*). Lo uno (*εἷς*) es, al final, la instancia que permite convocar una totalidad (*ὅλος*); es completo y perfecto (*εὐθύς*), dado que es capaz de cuantificar un tipo de predicación para todos (*ὅλος*) sin distinción alguna (*εὐθύτης*). Es precisamente lo recto (*εὐθύς*) lo que conecta a todos los puntos entre sí a fin de formar una línea recta; en ese sentido, el criterio de lo recto (*εὐθύς*) vendría a asimilarse al operador aritmético de la suma (+) que permite que los distintos números de una serie aritmética se puedan dar o existir como tales. En este contexto se está preservando la individualidad y la integridad de cada punto tal como la del operador de la suma (+), de igual (*ἴσος*) manera lo que hace lo recto (*εὐθύς*) como el criterio fundamental que permite que exista el ente geométrico conocido y nombrado como la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*); es decir, en toda formulación matemática existe un criterio rector que se ocupa de amarrar la formulación como axioma y proposición. En este caso, lo recto (*εὐθύς*) puede ser visto como aquella función f(*εὐθύνω*) que rectifica de manera constante para que cada punto que esté en la línea siga estando y perteneciendo a la misma línea (*γραμμή*): $f(\varepsilon\grave{\upsilon}\theta\acute{\upsilon}\nu\omega_{\sigma\eta\mu\varepsilon\tilde{\iota}o\nu\text{-}\alpha}) = \sigma\eta\mu\varepsilon\tilde{\iota}o\nu_{\beta}$, donde la función que rectifica y endereza cada punto $f(\varepsilon\grave{\upsilon}\theta\acute{\upsilon}\nu\omega_{\sigma\eta\mu\varepsilon\tilde{\iota}o\nu})$, es la que permite que se tenga una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) entre dos puntos α y β. De igual manera, se puede realizar una composición de funciones gof como: $g(\varepsilon\grave{\upsilon}\theta\acute{\upsilon}\nu\omega_{\sigma\eta\mu\varepsilon\tilde{\iota}o\nu\text{-}\alpha})$ o $f(\varepsilon\grave{\upsilon}\theta\acute{\upsilon}\nu\omega_{\sigma\eta\mu\varepsilon\tilde{\iota}o\nu\text{-}\alpha})$, que permite unir de manera recta y correcta tres puntos α, β, γ. Y, así sucesivamente, otros incontables puntos, dado que se presupone la existencia de un ‘*continuo de puntos*’; donde entre dos puntos pueden situarse otros puntos más, tantos como se sea capaces de construir.

3.2.4.4. La noción de compacidad en la métrica de una línea recta

En la formulación: *Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella* (*εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ’ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*), es posible anotar que, la condición de ser recto (*εὐθύς*) es propiamente la que hace que la línea (*γραμμή*) exista o sea (*ἐστιν, ἐστί; εἰμί*). Es decir, la línea (*γραμμή*) es o existe (*εἰμί*) en la medida de su rectitud (*εὐθύτης*); esto se debe a que existe una función f que verifica de manera constante a la línea (*γραμμή*) para que sea recta, rectificando y enderezándola cuando es necesario. Esta función *f* (*εὐθύνω*) hace que cada vez que se tenga un punto (*σημεῖον*), se establece una relación entre este punto nuevo con los anteriores que ya han sido verificados a fin que todos sigan permaneciendo en la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή ἐστιν*) y no que pierdan su condición de rectitud (*εὐθύτης*), sea que tiendan a curvarse o desfigurar a la misma línea recta. *f* (*εὐθύνω*): (*σημεῖον-α*) → (*σημεῖον-β*); donde el primer punto pertenece a una línea recta (*σημεῖον-α*) ∈ (*εὐθεῖα γραμμή*), mientras el segundo (*σημεῖον-β*) tan solo llega a pertenecer a la misma línea recta una vez se verifique que se cumple con la condición de rectitud (*εὐθύτης*). Esto se logra al aplicar la función *f* (*εὐθύνω*) que constata que realmente el punto está en la línea recta, lo cual es posible dado que el punto (*σημεῖον*) en sí mismo tiene una dirección o indica una por medio de un vector que le es intrínseco. De modo que es ese vector intrínseco a cada punto que permite recepcionar a la función misma y a su transformación, que ordena y acomoda la dirección vectorial de ese nuevo punto que se le va a agregar a los ya existentes a la línea recta. Tal situación tan solo es posible: primero, en relación con la definición de línea si existe una compacidad entre los puntos que constituyen la línea recta; segundo, que cada punto posee una dirección que le permite colocarse en la línea recta junto a los demás puntos.

Nótese cómo Euclides define la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) en torno a los puntos (*σημεῖον*) iguales (*ἴσος*) que yacen en ella. Este tipo de preguntas ha motivado el desarrollo de la topología, en especial, alrededor del concepto de compacto: una línea está bien definida cuando contiene los puntos situados en su frontera o sea que está acotada y cerrada. Este tema hace alusión a la compacidad que está expresada en el teorema Heine-Borel, el cual manifiesta que si se tiene un subconjunto S del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, se cumple que está cerrado o sea contiene sus puntos límite y, en consecuencia, está acotado. A su vez, es un espacio compacto si cualquier cubrimiento[289] abierto de S tiene una subcubrimiento finito. Lo que lleva a que toda secuencia infinita de puntos tiende a volverse cercana a algún punto; es decir, existe una subsecuencia infinita que converge al

[289] Un cubrimiento C es una colección V_α de subconjuntos de X, $C = \{V_\alpha \ / \ \alpha \in A\}$, es un cubrimiento si la unión de los elementos de la colección V_α contiene a X como subconjunto: $X \subseteq \bigcup_{\alpha \epsilon A} V_\alpha$ es un cubrimiento abierto para V_α si cada V_α es abierto. Sea el caso (0,1) es un cubrimiento abierto de [0, 1]. Tema tratado por Thomas Vogel (2012), en *Heine-Borel Theorem*, (pág 62).

mismo punto. Hemos de recordar que el concepto de compacto deriva de los trabajos de Peter Lejeune Dirichlet, quien afirmó que toda función continua en un intervalo cerrado es uniformemente continua. Tal hecho fue posible ya que él utilizó para su prueba la existencia de un subcubrimiento finito de una cobertura abierta en un intervalo cerrado. Esto se origina en los trabajos de Dirichlet que siguió de Fourier en su memoria de 1837: "Si para toda x corresponde a un único finito y, nombrado de tal manera que, cuando ese x corra continuamente a lo largo del intervalo desde a hacia b, tendremos y = f(x); de igual manera varía poco a poco, luego el 'y' es llamado una función continua. Aunque no es necesario que 'y' dependa en todo este intervalo de x en concordancia con la misma ley. Uno necesita pensar aún en la dependencia expresable en términos de las operaciones matemáticas"[290]. Este concepto se utiliza también en las llamadas funciones continuas, donde una secuencia de puntos acotados tiene una subsecuencia que corre acercándose a otro punto denominado el punto límite.

La propiedad definida en torno a la rectitud (*εὐθύνω*) que preserva la forma de la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) está constituida por puntos (*σημεῖον*) acotados, donde todos conservan la misma distancia fija entre sí, está cerrada o delimitada, esto la hace ser compacta en esta formulación. Esto está sugerido por varios elementos: la presencia de una cuantificación universal alrededor de estos (*ὅς*) cualesquiera (*τις*) puntos (*σημείοις,* forma plural neutra dativa), que marca, señala, ordena y sella (*σημαίνω*) desde (*ἐκ*, *ἐξ*) lo que es igual o equivalente (*ἴσος*) a los (*τοῖς,* forma dativa plural de *ὁ*) puntos (*σημεῖον*) que yacen y están situados (*κεῖμαι*) sobre (*ἐφ', ἐπί*) la misma (*ἑαυτοῦ*) línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). La misma mención de que la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) tiene la potestad de igualar y hacer igual (*ἰσόω*) a los puntos (*σημείοις*), es fruto de la acción transformadora de igualar (*ἰσόω*) y marcar con una señal (*σημειόω*) tanto a la línea (*γραμμή*) como al punto (*σημεῖον*). Tal como el punto (*σημεῖον*) no tiene de ninguna manera (*οὐδείς*) partes (*μέρος*), que una línea no posee anchura (*γραμμή ἀπλατές*), y al isomorfismo (*ἴσος*) que preserva la forma (*μορφή*)

[290] Esta es una cita de Dirichlet realizada sobre Fourier y mencionada por Jürgen Elstrodt (2007) en su artículo: *The Life and Work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859).* Hecho que se origina en los trabajos de Fourier sobre *La Theorie analytique de la chaleur* (1822), donde consideró que cualquier curva que no esté conectada puede ser representada por una serie trigonométrica, esto le llevó a formular una noción general de función (pág. 19).

entre los puntos fundamentado en la función que recorre la línea *f* (*εὐθύνω*), enderezándola y haciendo que sus puntos yacen en igualdad de condiciones a nivel de la distancia que los separa. Esto sugiere que existen incontables puntos en una línea y que, además, no existe un vacío o discontinuidad entre los mismos, lo que se traduce en que existe una sucesión de puntos que es compacta ya que contiene una subsucesión que es convergente y por consiguiente finita. Lo interesante es sugerir que la compacidad se la puede construir primero sobre una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), propiedad que heredará luego la superficie (*ἐπιφάνεια*), que está a su vez constituida por líneas en este caso rectas. En especial, el punto (*σημαίνω*) posee la propiedad de ser un recubrimiento abierto, esto está sugerido de alguna manera en que el punto (*σημεῖον*) es aquel ente que no tiene parte alguna (*οὐδείς μέρος*). Lo anterior es igualmente posible si cada punto es disjunto en relación al anterior o al posterior. Esta propiedad es la que permite que se dé una compacidad entre los distintos puntos en una línea recta.

La preservación de la forma por parte de la acción enderezante (*εὐθύνω*) de una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) ha sido considerada una función *f*(*εὐθύνω*) continua sobre todo el espacio topológico de la recta real. Esto evoca al isomorfismo, vocablo que proviene de la unión entre isos (*ἴσος*) y morphé (*μορφή*), y hace referencia a aquellos entes matemáticos que tienen igual forma. El isomorfismo tomado como un homomorfismo es aquella estructura algebraica que tiene la misma forma −*homos* (*ὁμός*) y *morphé* (*μορφή*)− en los grupos, anillos, campos, espacios vectoriales, retículos, entre otros. En este caso, la referencia es a los puntos (*σημεῖον*), en especial, al conjunto punto (*pointed set*) o base del punto (*base point*), es una pareja ordenada (X, x_0), donde X es un conjunto y x_0 es un elemento llamado punto base o base puntual[291], $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Lo inmensamente interesante de este tema, radica en estos puntos base que pueden ser apreciados como una curva cerrada, donde el punto inicial y el punto final coinciden. Un punto base es un espacio topológico, donde $p \in X$, es un lazo o sea una aplicación continua sobre un mapa,

[291] Este tema está muy bien tratado en el artículo de Grégory Berhuy (2010): *An Introduction to Galois Cohomology and Its Applications,* es de resaltar en el mismo el teorema del lema descendente de Galois: sea F un funtor, sea G un funtor de grupo evaluado que actúa sobre F, $a \in F(k)$. Asumamos que F y G satisfacen la condición descendente de Galois, aquella que permite pegar o ligar, en este caso puntos. Luego para cada extensión de Galois Ω / k tenemos una biyección de unos conjuntos base de puntos. Desde que la clase [a] corresponde a la clase de cociclos triviales (pág. 25).

tal que tenemos L: $[0, 1] \rightarrow X$, donde $L(0) = p$; $L(1) = p$. Este hecho acontece dentro de un cociclo $\Gamma \curvearrowright X$, que es una acción sobre un grupo Γ sobre un conjunto X donde Λ es el grupo, tenemos que un cociclo para la acción sobre Λ es un mapa $\alpha: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Lambda$, tal que la pareja ordenada $\alpha\,(\gamma_1\gamma_2, \alpha) = \alpha\,(\gamma_1, \gamma_2 x)\, \alpha(\gamma_2, x)$ para todo $\gamma_1\gamma_2 \in \Gamma,\ x \in X$[292]. Recuérdese que el punto como conjunto es una estructura algebraica simple, donde la clase de todos los conjuntos de puntos con la clase de todos los mapas de una base forman una categoría, esta categoría es el conjunto unitario o sea aquel que tiene un solo elemento, o conjunto *singleton* ({a}, a) es un objeto inicial y final, es el denominado objeto cero. Una vez más, se tiene la noción de pareja ordenada vinculada a un objeto cero; es decir, se tiene una convergencia de todos los morfismos de unos conjuntos punto hacia este *singleton* que luego los aplica hacia un objeto algebraico cero. Una vez más, el punto (*σημεῖον*) se sitúa como ese objeto que permite todo tipo de manipulaciones, que conecta a todos permitiendo todo tipo de operaciones como pareja ordenada ({σ}, σ), simbolizada e interpretada en un intervalo abierto. De igual manera, confluye hacia una noción de número cero, como un conjunto con un solo elemento {0} que se puede apareciar como una categoría cero, donde los momentos inicial y lo final se encuentran.

Debe destacarse que en los *Elementos* (*Στοιχεῖα*) existen dos nociones de punto: el punto definido como aquello que no tiene parte alguna (*σημεῖον ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*), es un punto más propicio a ser interpretado como aquella parte (*μέρος*) que habita en un intervalo abierto. Este hecho le permite afirmar, aquello que de ninguna manera (*οὐθδείς*) es parte (*μέρος*), en caso en que se la aborde a nivel de su cardinalidad o cantidad, no puede tener un límite ni aún por lo pequeña que pueda ser. Igualmente, puede dar lugar a que la noción de parte se desdibuje en relación a su tamaño que no puede ser establecido, este último hecho está en plena sincronía con la definición. Si es tomada en ese sentido, esta primera noción de punto (*σημεῖον*) es afin a verse intepretada como un elemento dentro de un intervalo abierto: (*σ*), y en ese sentido, si se asume en las demás definiciones que el

[292] Tema tratado por Jesee Peterson (2014) en su artículo *Cocycles*, que hace parte de la cohomología, que es término general para una secuencia en grupos abelianos o grupos conmutativos, es decir aquellos donde el orden de los elementos no afecta las operaciones. Este orden está definido en un complejo de cadenas, que es una forma algebraica para representar los ciclos y las fronteras en espacios topológicos de varias dimensiones. (cap. 1.3).

punto es un *topos* abierto, en ese sentido no es compacto ni tampoco la línea (*γραμμή*) ni la superficie (*ἐπιφάνεια*). En este contexto, el punto se comporta como un *topos* abierto situado en una línea que no sería compacto. Pero si se tiene en la cuenta aquello contemplado en la tercera definición en relación a la línea (*γραμμῆς δέ πέρατα σημεῖα*), se dirá que el vocablo *péras* (*πέρας*) posee e involucra direcciones opuestas (*πέρατος*), y muestra el sentido en que el punto (*σημεῖον*) debe de ser abordado como un elemento dentro de un intervalo cerrado [*σ*]. Esto se encuentra muy cerca a su naturaleza de cortar (*κείρω*) una línea (*γραμμή*), en este contexto, se abordaría al punto como un topos cerrado y compacto. Hay que notar que en lo que se conoce hoy día como un espacio euclidíano, se tiene una clase de espacio que es infinito y por tal naturaleza no es compacto. Sin embargo, para los griegos, incluidos Pitágoras y Euclides, la noción de infinito como hoy se la concibe, sería algo inaprehensible e incomprensible. Primero el infinito (*ἄπειρος*) es lo uno (*εἷς*) y es todo (*ὅλος*), de alguna manera indiviso (*ἀμέρής*) y carente de partes (*α-μέρος*), se cumpliría la propiedad de que una sola parte *εἷς* ≡ es todo *ὅλος*. A su vez, ese infinito (*ἄπειρος*) es lo primero (*πρῶτος*) y está en la génesis u origen (*ἄρχω*) de todo cuanto existe. En cambio, en la actualida, el infinito (*ἄπειρος*) es lo que no es todo, es incompleto y no es uno. Donde su cardinalidad es indecible e indecidible, y no existe un número que aprehenda la cardinalidad del infinito, lo cual es completamente diferente para los griegos.

El infinito, en el contexto actual, es algo que puede partirse (*περάω*), lo cual hace que su cardinalidad nos lleva a una infinita diferenciación de lo numérico, entendido como cifra. Aquí se da un entendimiento del número muy distinto a lo contemplado por los griegos, donde los números poseían unas propiedades cualitativas que los hacían diferentes entre sí. La noción de cifra alude al principal uso actual del número como un agregado diferenciado de números carente de significado, aún este vocablo perdió su contacto con su origen etimológico; la cifra alude no solo al numeral y un carácter numérico, sino también remite a *safar* (صِفْر) que es el cero, a lo vacío y a la nada, vocablo que proviene del árabe *safira* (صَفِرَ) que es estar vacío. En especial, la noción del cero se acerca mucho a la del punto (*σημεῖον*), lo que vendría a sugerir que el origen de los números está en el punto y/o en el cero, lo que está en plena armonía con el texto que se está analizando. El infinito (*ἄπειρος*) griego posee una concepción muy distinta a la que maneja en la actualidad; es aquello que es igual (*ἴσος*) consigo mismo; al ser uno (*εἷς*), tiene esa posibilidad de incidir sobre todo lo que lo rodea, en cuanto lo unifica y lo subyace igualándolo (*ἰσόω*); es aquella forma (*μορφή*) inmodificable. No se ha de olvidar que la línea (*γραμμή*) es definida inicialmente sin su condición de ser recta (*εὐθύς*), tal hecho involucra que es otro predicado que se le agrega, aquel que rectifica constantemente su propia condición de rectitud (*εὐθύνω*). Parece que diera la impresión que la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) es ajena a verse cortada (*α-κείρω*) por su propia condición, en cuanto lo que es recto (*εὐθύς*) es lo que guía (*εὐθύνω*): es lo que es bueno en todos los sentidos (*εὖ*) y en ese sentido no puede ser dividido, dado que denotaría imperfección y una inadecuada conducción o guía.

3.2.4.5. La concepción de línea ayudó a recrear la noción del límite de una función

La construcción de la línea presenta dos facetas: una como la línea normal y, otra, como la línea recta. La construcción e imaginación del número como aparece entre los libros V a X de *Los elementos* de Euclides ha influido en la manera en que los representamos y fundamentamos, en especial, los números reales en la denominada recta real. Comenzando con la noción de línea (*γραμμή*), en las nociones de lo largo (*μῆκος*) y lo no ancho (*απλάτος*). En esta definición (*γραμμή δέ μῆκος ἀπλατές*) se suministran dos predicados, lo que es lo largo y lo que es lo no-ancho. Luego, se tiene una línea (*γραμμή*) que se ve predicada acerca que sus extemos (*πέρατος*); se tiene unos unos 'puntos extremos' (*σημεῖον* + *πέρας*) según (*γραμμῆς δέ πέρατα σημεῖα*). Tal hecho que había pasado desapercibido, es de gran importancia. Hoy día, en el desarrollo de la noción del límite de una función, se utiliza la recta real para ilustrar las nociones de *supremum* e *infimum* asociadas a unos puntos extremos. Lo que sirve también para determinar si un número es igual o mayor/menor que otro(s). En especial, al afirmar que los límites o extremos (*πέρας*) de una recta (*γραμμή*) son puntos (*σημεῖον*), se considera que estas dos extremidades (*πέρατος*), a una le correspondería ser el *infinum* y, a la otra, el *supremum*. Hoy día se habla del número en relación con una secuencia o sucesión de números; sea el caso de la sucesión de los números naturales, como a: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, donde un número n le sigue otro a_n. Es decir, los números se construyen como unos conjuntos ordenados en sucesiones finitas o infinitas: {0,1, 2, 3, 4, 5,…} representados sobre una línea; según la posición relativa o absoluta de algunos números en relación a los demás se derivan las anteriores nociones de *supremum* e *infimum*. En el anterior ejemplo el 0 es el *infimum* y todo lo que esté por encima de 0 es cota superior del mismo. Si consideramos que la secuencia va hasta 5, este sería el *supremum* del conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5}. A su vez, podemos insertar variados intervalos en esta recta cortada en cinco puntos, si escogemos el intervalo comprendido entre los números 2, 3 y 4, podemos representarlo como: (2, 3, 4), [2, 3, 4], [2, 3, 4) y (2, 3, 4]. Es de un valor significativo considerar que si una serie numérica incluye o no al primer y último término, este hecho está recreado en esta definición, donde se afirma que los límites o extremos (*πέρας*) de una línea (*γραμμή*) son puntos (*σημεῖον*), estos estarían representados en los números 2 y 4. Entonces, si el punto que representa al número incluye al intervalo como cerrado [2], el intervalo está abierto si no lo incluye (2).

El problema del límite de una función fue un tema que le interesó mucho a Zenón de Elea en relación con las preguntas acerca de lo que hoy día se conoce como el infinito y la continuidad. Hubo que esperar más de dos milenios para que el tema fuera de nuevo tratado por Joseph Louis de Langrage en el siglo XVIII, en lo que se conoce como el método de Langrage para quien, las funciones continuas pueden ser expresadas en términos del teorema de Taylor como unas series infinitas. Langrage consideró que las series pueden continuarse, no en dirección al infinito sino hacia un pequeño punto lo suficientemente pequeño; esta estrategia fue empleada por Arquímedes para evaluar el área debajo de una curva. Este trabajo fue continuado por Bernhard Bolzano a comienzos el siglo XIX, en que la definición de una función continua no tuviera relación con la intuición con la que se construye el espacio. Él buscó que la idea de continuidad se resolviera en el concepto del límite de una función: si tenemos $f(x)$ continua en un intervalo para cualquier valor de x, la diferencia en ese intervalo entre $f(x + \Delta x) - f(x)$ cada vez se vuelve más pequeña, menor para cualquier cantidad de Δx lo suficientemente pequeña independiente que esta sea positiva o negativa. Bolzano definió la derivada, aquella que mide el cambio de una cantidad determinado por otra cantidad: la relación entre la variable dependiente que representa el valor de la función frente al valor de la variable libre o independiente como: $F'(x) = F(x + \Delta x) - F(x) / \Delta x$, siempre y cuando se cumpla que $F(x)$ sea continua en el intervalo, se tiene que dicha cantidad se aproxima indefinidamente cada vez más cerca a medida que Δx se aproxima a cero independiente que el valor sea positivo o negativo[293]. Hay que destacar la noción del operador de la suma y el de la conectiva binaria de la conjunción como aquellas instancias que subyacen a la formulación en el sentido en que pegan o unen los distintos puntos que representan a los números. Recuérdese que la noción de la línea curva se deriva de la línea recta, y cómo al aproximarnos a un límite en la recta real se debe de cumplir que no existan vacíos, sino que la recta sea continua permitiendo que la función esté bien definida en todo el intervalo tanto de integración a fin de que pueda alcanzar su límite.

Como se ha visto, la noción de línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) está situada (*κεῖμαι*) como una sucesión de puntos iguales (*ἑαυτῆς σημείοις*) equivalentes (*ἴσος*) entre sí, sugiriendo que existe una propiedad reflexiva entre los mismos. Este hecho está dado por el vocablo (*ἑαυτοῦ*) conformado por los pronombres reflexivos (*οὗ*) en acusativο (*ἕ*) y *αὐτός* (*ἑ* + *αὐτός*). Este último deriva de *aû* (*αὖ*) que es de nuevo y tón (*τόν*), que es el artículo definido 'el' en acusativo masculino singular de (*ὁ*). Esta definición es: *εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*; en ella se resalta, además, que estos puntos están o subyacen (*κεῖμαι*) sobre *ἐπί* la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). Por consiguiente, la condición de ser una línea recta es la que permite ese isomorfismo entre los distintos puntos que le son semejantes; cabe entonces la pregunta acerca de ¿qué tipo de métrica permite construir este tipo de línea? Nótese que la línea está contenida por sus puntos extremos y está acotada por los mismos (*γραμμῆς δέ πέρατα σημεῖα*) y la hace ser compacta. A su vez, la línea recta, al estar constituida por puntos, la hace estar conectada cada punto está junto al otro y no existe un vacío entre ellos, pudiendo la línea ser considerada como una sola pieza.

---

[293] Este tema está magistral y amenamente expuesto en la obra de Carl B. Boyer (1968): *The History of the Calculus and its Conceptual Development* . La idea fue consolidada por Augustin Louis Cauchy a comienzos del siglo XIX: sea $y = f(x)$ donde la derivada está dada por $f'(x) = \Delta y/\Delta x = \lim_{h \to 0} f(x + h) - f(x) / h$. Se tiene en cuenta que f sea continua en el intervalo x_0 a X, él encontró la suma característica de los productos $S_n = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (x - x_{n-1}) f(x_{n-1})$, donde el valor absoluto de $| x_{i+1} - x_i|$ decrece indefinidamente, luego el valor de S_n alcanzará cierto límite, el cual será llamado la integral definida $\int$, que no debe de ser interpretada como una suma sino como un límite de una suma $F(x) = \int_{xo}^{x} f(x)dx$ como su derivada. Este tema fue después formalizado por Heinrich Heine, quien afirmó: que el límite L de una función $f(x)$ tenemos que para $cx = x_0$ dado cualquier número pequeño ε podemos encontrar otro número δ tal que para todos los valores de x diferentes de x_0 por menos de δ, el valor de $f(x)$ será diferente del L por menos que ε. Esta fundamentación fue esencial para el desarrollo del cálculo. (pág. 267-287).

3.2.5. Cómo la línea crea su propia vecindad en la superficie

El axioma de la línea (*γραμμή*) dice: *una línea es una longitud sin anchura* (*γραμμή δέ μῆκος ἀπλατές*; l 1, t 1, l 2); se nota cierta incompletetitud en su formulación ($\Gamma_{\mu,\ \sim\pi}$), dado que existe un predicado que no se tiene aunque se menciona, dado que de lo no ancho (*απλατύς*) no puede predicarse nada. En ese sentido, la superficie viene a representar una ganancia dado que la formulación adquiere la completez que se espera, en cuanto existan los dos términos que constituyen la pareja ordenada de un predicado: $P_{(a,\ b)}$. La completez predicativa de la superficie respecto a la línea representa una ganancia: $\Gamma_{\mu,\ \sim\pi} \rightarrow$ ᾿$E_{\mu,\ \pi}$. Es de resaltar cómo la afirmación de la existencia de la anchura (*πλατύς*) lleva a que se transforme y se modifique el sujeto sobre el que recae la actividad predicativa: $P_{(a,\ \sim b)} \rightarrow Q_{(a,\ b)}$. En ese sentido, la línea (*γραμμή*) adquiere su completitud y decibilidad en la superficie (*ἐπιφάνεια*). Asimismo, el punto representa la presencia de una predicación negada doblemente: lo que no tiene parte de ninguna manera frente a lo uno: $\Sigma_{\sim\mu\acute{\varepsilon},\ \sim\varepsilon}$ o sea la pareja ordenada doblemente negada $R_{(\sim a,\ \sim b)}$. La transformación de las predicaciones en los axiomas 1, 2 y 5 de Euclides se aprecia en las siguientes expresiones del cálculo de predicados como: $\Sigma_{\sim\mu\acute{\varepsilon},\ \sim\varepsilon} \rightarrow \Gamma_{\mu,\ \sim\pi} \rightarrow$ ᾿$E_{\mu,\ \pi}$, si los abordados como predicados de parejas ordenadas serían: $R_{(\sim a,\ \sim b)} \rightarrow P_{(a,\ \sim b)} \rightarrow Q_{(a,\ b)}$. Sin embargo, no hay que perder de vista que la anterior expresión, en realidad son dos y muy diferentes entre sí: $[R_{(\sim\tilde{a},\ \sim\underline{b})}] \rightarrow [P_{(a,\ \sim b)} \rightarrow Q_{(a,\ b)}]$, la primera hace referencia a un estatuto ontológico matemático y la segunda a un estatuto epistemológico matemático. Esto hace que la noción de pareja ordenada sea muy distinta en ambas expresiones formales: la pareja (~ã, ~b̲) es completamente distinta a las parejas (a, ~b) y (a, b). La pareja ordenada ontológica se mueve en un metalenguaje cuyas teorías no están obligadas a los rigores de una teoría científica concreta, mientras la pareja ordenada epistemológica permite procedimientos lógicos, algebraicos, topológicos, entre otros tantos, todos susceptibles de albergar métodos, teoremas, axiomas y procesos deductivo-inferenciales concretos: es decir, se pueden calcular y expresar en ecuaciones con operadores, constantes y variables.

El axioma que define a la superficie dice: *Una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura* (*A surface is that which has length and breadth only*. *ἐπιφάνεια δέ ἐστιν,* *ὃ μῆκος καί πλάτος μόνον ἔχει.* L.5, t.1, n.5). Tenemos que *epipháneia* (*ἐπιφάνεια*) significa apariencia, aquella manifestación en cuanto algo viene a la luz, también significa la parte visible o superficie. Es algo que se hace visible (*ἐπιφανής*), que se nos aparece y que es evidente y brillante por su característica de traer la luz, fruto de ese mostrarse y aparecer (*ἐπιφαίνω*). Este vocablo proviene de la unión de la preposición *epí* (*ἐπί*) sobre y *phaínō* (*φαίνω*) brillar, dar a luz, encender, descubrir y aparecer. Señala que la superficie es aquello que lo se nos muestra, brillando y, en ese sentido, tan solo puede ser conocida o develada por la acción de la luz (*φάος*). Esta es una alusión a que las formas (*εἶδος*) las conocemos inicialmente por que se hacen visibles (*ἐπιφαντος*), y como nuestro saber inmediato recae en la inmediatez de aquello que se nos muestra, lo más cercano es ese contorno o tejido o piel o superficie de algo. Adviértase cómo en los axiomas 1, 2 y 5 de Euclides del libro 1.1 se tiene la presencia de dos términos, hecho que se sigue conservando en las matemáticas de hoy día, donde una superficie es concebida como un ente matemático dotado de dos dimensiones: en topología hablamos de una variedad de dos dimensiones; en geometría diferencial tenemos una variedad diferenciable de dos dimensiones; en álgebra abstracta existe una variedad de dos dimensiones. Siempre que se habla de una superficie (*ἐπιφάνεια*) se hace referencia a la tenencia de dos términos o variables que se dan en del contexto de una lógica binaria.

Esa superficie o *inmediatez brillante es* (*ἐστιν*) su (*ὅς*) largo (*μῆκος*), que también considera su altura; es aquel trayecto o distancia, algo que se puede alargar, prolongar o extender (*μηκύνω*); y, también (*καί*), es su anchura (*πλάτος*), algo que se puede ensanchar (*πλατύνω*) a fin de abrirse y extenderse. Esa superficie tiene y mantiene (*ἔχω*) lo que se alarga o eleva (*μηκύνω*) como lo que se ensancha (*πλατύνω*), lo hace por sí misma, de manera sola, aislada, viéndose reducida a una sola (*μόνος*). Es decir, en este contexto formal un predicado es decible si lo hace en relación con una pareja ordenada (a, b). Hemos de recordar que la lógica clásica se fundamenta en relaciones binarias: se dice de 'a' dado que existe 'b', ambos son referentes el uno del otro y viceversa, posibilitando la mutua decibilidad aseverativa. En ese sentido, se tiene una unidad (*μονάς*) que en este caso es geométrica ya que posee una largura y una anchura. La noción de superficie (*ἐπιφάνεια*) posee otros significados vinculados con ser aquel entorno que proyecta la luz, siendo algo que la transporta y proyecta, tal como la mónada (*μονάδα*) lo que es. Aunque la una habita en un espacio afecto a los sentidos físicos, mientras la otra no, el juego entre la apariencia aprehensible por medio de los sentidos y lo real no aprehensible por los sentidos físicos. Sin embargo, el cosmos es creado a partir del número (*ἀριθμός*), en especial a partir del cardinal uno (*εἶς*): que es lo que está primero como número ordinal (*πρῶτος*), hecho que guarda similitud con la mónada (*μονάδα*) que es una unidad indivisa y completa[294]. Esto hace que el concepto de número anteceda al elemento fundante de la geometría que es el punto (*σημεῖον*). El punto guarda similitud con la mónada en cuanto ninguno de los dos posee partes (*μέρος*) debido a que ambos poseen una completitud en cuanto son un todo (*πᾶς*) sin parte alguna que los constituya. Sin embargo, la diferencia estaría a que si existe una sola y única mónada (*μονάδα*) que fundamenta el universo, no existe un solo punto (*σημεῖον*) sino incontables puntos. A nivel conceptual, este punto remite a la relación que habría con la forma (*εἶδος*) que se puede apreciar de distintas maneras, tal como el verbo *oráo* (*ὁράω*) lo permite: mirar a los ojos; que si le agregamos *εἰς* (acusativo) nos da mirar algo en alguien. Es de destacar que la preposición (*εἰς*) significa dentro, sea tan cercana a la grafía del número cardinal uno (*εἶς*), tan solo los diferencia un acento y tal situación no es casual, debido a que en el idioma griego antiguo nada es por azar, todo obedece a un propósito y a unas intenciones bien claras. También *oráo* (*ὁράω*) significa ser capaz de ver, como aquel mirar de una manera específica: ver, contemplar, observar, encontrar y entender, son parte de sus significados. A su vez, la forma como *eídos* (*εἶδος*) está relacionada con el verbo *oída* (*οἶδα*) que significa conocer, estar enterado de, ser hábil, conocer cómo hacer algo; además, significa una cualidad propia del corazón de cada uno y está relacionado con el verbo *eídomai* (*εἴδομαι*), que significa: ver, percibir, observar, experimentar, encontrar, examinar, investigar, parecer.

Estas consideraciones conducen a que la forma esté sujeta a una tensión fruto de la dinámica de dos verbos muy cercanos pero algo distintos: *oráo* (*ὁράω*) y oída (*οἶδα*), el uno

---

[294] Barry Sandywell (1996) comenta en su libro: *The Construction of Philosophical Discourse*: C. 600-450 B.C., Logological Investigations, Volume Three: “La generación de las series numéricas se les debe a los pitagóricos, en otras palabras, la generación de los objetos de la geometría y también de la cosmogonía. Debido a que las cosas son equivalentes a los números, la primera unidad, en generar las series numéricas, genera también el universo físico. Desde esta perspectiva la mónada o el ‘Uno’ fue identificado realmente con el origen divino de la realidad”, (pág. 205).

más orientado a esa capacidad de ver que se va refinando hasta niveles muy sutiles y el otro más relacionado con un conocer que se adentra en lo que es su objeto de conocimiento por medio de unas habilidades experimentales prácticas. Es de resaltar que también dentro de la grafía de (*οἶδα*), esta posee una inflexión altamente variable en cuanto puede asumir las funciones de presente, perfecto y pluscuamperfecto del verbo *eído* (*εἴδω*): cuyo tiempo presente no se conoce y solamente es encontrado en *eídon* (*εἶδον*, primera persona del singular y tercera del plural del aoristo indicativo activo de *εἴδομαι*) el aoristo principal de ver (*ὁράω*) y conocer (*οἶδα*)[295]. Por tanto, se puede afirmar que tanto la forma como (*εἶδος*) y la idea (*ἰδέα*) tienen un origen común, de modo que la captación de la forma o de la idea de algo tal como sucede en la aritmética y en la geometría, involucra un ver que no es pasivo sino muy activo y que es capaz de emprender acciones prácticas que involucran una *techné* (*τέχνη*): tal como es la destreza de poder manipular las operaciones aritméticas e igualmente poder construir figuras geométricas. La superficie (*ἐπιφάνεια*) es algo que se ve, se conoce, se experimenta y se investiga, pero la mónada (*μονάδα*) no es susceptible a tales procedimientos. Es través de la aritmética y la geometría que se puede llegar a conocerla mediante las aproximaciones y modelaciones que dichas disciplinas ofrecen. El comparar la superficie con la mónada proviene de la fundamentación geométrica de la primera y la aritmética de la segunda.

La noción de superficie está bellamente tratada en las superficies de Riemann, en especial, en las variedades de dos dimensiones expuestas por Hermann Weyl (1913)[296]: "Se resaltó al final de §2, que nuestra intuición nos permite asir una forma analítica que ha sido ampliada, si uno puede representar la forma de cada elemento por un punto sobre una superficie F en el espacio, de tal manera que los puntos representativos cubran simplemente a F, de tal manera que cada cadena analítica de elementos de la forma se vuelva continua sobre F" (pág. 16); donde una forma analítica es aquel conjunto G de los elementos de una función con dos propiedades: los elementos de dos funciones de G pueden conectarse por medio de una cadena analítica a todos los elementos que pertenezcan a G, y es imposible

[295] Comentarios tomados del diccionario: *Henry Liddell, Robert Scott, A Greek-English Dictionary* (1940). Es de gran riqueza este diccionario, dado que comenta en que otros textos griegos se está utilizando el vocablo. Es interesate comentar que *οἶδα* también significa 'ver con los ojos de la mente' (I *see with the mind's eye*).
[296] Temas expuestos en el bello y ameno libro: *The Concept of a Riemann Surface*, por Hermann Weyl (1913).

extender G al agregarle más elementos de una función de manera que el conjunto extendido todavía mantenga la propiedad anterior. Las superficies de Riemann se utilizan en análisis complejo en las funciones analíticas sobre series de potencias convergentes, que se expresan como series de Taylor que son funciones continuas e infinitamente diferenciables en todos los órdenes de su dominio. Se pueden representar como una variedad topológica compleja X sobre un atlas de cartas hacia un disco abierto de una unidad, que satisface la función holomorfa $f\colon X \to \mathbb{C}$. Amerita resaltar cómo la noción de superficie (*ἐπιφάνεια*) se ha visto enriquecida por la relación que se puede dar con los números, en este caso con el conjunto de los complejos ($\mathbb{C}$). Este tema ya estaba de alguna manera mencionado en relación con la noción de la mónada (*μονάδα*), como la representación de aquel número uno (*εἶς*). Se establece de esta manera una relación entre la geometría y la aritmética, entre un disco con un punto central que de alguna manera es la representación geométrica de la mónada y el número (*ἀριθμός*) que involucra un nivel de abstracción distinto muy vinculado a servir de mediador para la representación dinámica de la realidad. Se nota cómo la misma noción de la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) es tomada en la construcción de un número complejo, que de alguna manera se inspira en la hipotenusa que se da entre los ejes real e imaginario: es aquel punto (*σημεῖον*) $z = a + bi$. De igual manera, las variedades complejas de las superficies de Riemann[297] pueden deformar el plano o la superfie (*ἐπιφάνεια*) compleja, dando lugar a esferas, toros de revolución u hojas pegadas entre sí. En el fondo, están los mismos conceptos fundamentales: aquella superficie que puede ser intervenida y modificada con base en unas sumas o series de Taylor, que surgen del problema de la transformación de un objeto al estar moviendose en el espacio, apreciable por medio de sus derivadas, concepto ya presente en Zenón de Elea.

[297] Recuérdese las series de potencias como: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \ldots$, que pueden ser expresadas como series de Taylor: $f(a) + f'(a)/1!\,(x - a) + f''(a)/2!\,(x - a)^2 + f'''(a)/3!\,(x - a)^3 + \ldots$, que es la suma $\sum_{n=0}^{\infty} f^n(a)/n!\,(x - a)^n$. Igualmente, que el mapa de transición permite comparar dos cartas de un atlas: sean $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) dos cartas sobre una variedad X, tal que $U_\alpha \cap U_\beta$ no es vacía, el mapa de transición τ está dado por $\tau_{\alpha,\beta} = \varphi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta)$, es un mapa definido por $\tau_{\alpha,\beta} = \varphi_{\beta} \circ \varphi^{-1}_{\alpha}$, al ser ambas φ_α y φ_β homomórficas, el mapa de transición $\tau_{\alpha,\beta}$ también lo es. A esto se le suma la posibilidad de las superficiees de Riemann de deformar diversas superficies dentro del plano complejo. Temas tratados en *Basic Complex Analysis* por Jerrold E. Marsden y Michael J. Hoffman (1999), (págs. 60, 184, 203, 365, 398).

3.2.5.1. La superficie definida en torno al nomos entre la longitud y la anchura

El postulado quinto L.1.1 dice: *una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura* (*ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καί πλάτος μόνον ἔχει*). Se está frente al tema de aquello que es (*ἐστιν*); lo que se manifiesta a nivel de una instancia singular señalable aquí en este presente indicativo activo; se trata del verbo *eimí* (*εἰμί*) que nos introduce aquello que existe, sucede y viene a la existencia, propiamente el verbo ser: ¿Qué viene a la existencia? No es otra cosa que aquello que viene a la luz (*φαίνω*), que aparece a fin de mostrarse y revelarse. El mismo génesis (*γένεσις*), evocando a Pitágoras, se da a partir del número (*ἀριθμός*) uno (*εἷς*), como lo que está primero (*πρῶτος*): es la instancia a partir de la cual se nace y se viene a la existencia (*γίγνομαι*). No se olvide que la existencia (*ὕπαρξις*) se revela en aquello que es brillante, fruto de algo que es traído a la luz (*φῶς*) a fin de que brille y, en ese sentido se despliega y se muestra (*φαίνω*); y qué más que si proviene de algo que está encima (*ἐπί*), sobre la piel (*δέρμα*) de lo que existe (*ὑπάρχω*). Ahora se está frente a la superficie (*ἐπιφάνεια*), aquella apariencia dentro de la cual se viene a la luz (*φάος*); no en vano también significa aquellos sacrificios que se realizan para celebrar la manifestación de la propia divinidad. Aquello con lo que comienza la existencia (*ὕπαρξις*) es la misma superficie que reflejando la luz (*φάος*) se convierte en esa apariencia en la que se halla lo visible y a la vez destacado y glorioso (*ἐπιφανής*); el inicio de la existencia (*ὑπάρχω*) se da a través de la superficie o apariencia luminosa (*ἐπιφάνεια*), ese estado que comienza a manifestarse como lo primero a fin de gobernar (*ἄρχω*) lo que está situado debajo (*ὑπό*) bajo la regla del número (*ἀριθμός*) uno (*εἷς*), como lo primero (*πρῶτος*) que es (*εἰμί*). De esta manera, la apariencia se revela brillante (*ἐπιφάνεια*) en la superficie y, así, es susceptible de albergar una verdad (*ἀλήθεια*): aquello que es verdadero, real, genuino y honesto (*ἀληθής*), dado que no (*ἀ-*) está oculto (*ἀληθής*). La superficie, en este caso, la geométrica, es la receptora de un conocimiento (*ἐπιστήμη*) debido a que no oculta (*λανθάνω*) nada, hace que uno no olvide aquello que escapa a la atención. La superficie (*ἐπιφάνεια*) de las figuras geométricas proyecta la luz (*φάος*) de lo que es verdadero (*ἀληθής*), aquello donde se muestra y descubre (*φαίνω*) las formas (*εἶδος*) en apariencia visibles, dado que pueden ser vistas, examinadas, investigadas y observadas (*εἴδομαι*). Esa apariencia luminosa y reveladora (*ἐπιφανής*) posee esa terminación propia de aquello que se nos muestra y conecta con la naturaleza de las cosas (-*ειδής*, -*φανής*), propia de lo que es visto (*εἴδω*) como apariencia (*φάσις*) de lo que se muestra para hacerse visible (*φαντάζω*). Así se revela lo que procede de arriba (*ὑπέρ*) que proviene de algo que está sobre (*ἐπί*) nosotros a fin de brillar (*φαίνω*) en la superficie (*ἐπιφάνεια*) de lo geométrico.

De esta manera, la superficie (*ἐπιφάνεια*) está en la construcción de las formas (*εἶδος*) y, en consecuencia (*δέ*), es la que 'es' (*ἐστιν*). Sobre esta (*ἐπί*) se trae la luz (*φαίνω*) que sustenta el existir (*εἰμί*) mismo (*ἐπιφάνεια δέ ἐστιν*) de la existencia (*ὕπαρξις*): lo que desde debajo (*ὑπο*-) comienza siendo lo primero (*ἄρχω*), las formas geométricas sobre las cuales se apoya la realidad y a su vez la posibilita. Lo suyo (*ὅ*) es lo largo (*μῆκος*), una de las instancias constituyentes del lugar o topos (*τόπος*). En ese sentido, la superficie (*ἐπιφάνεια*) parece alargarse, extenderse y prolongarse (*μακύνω*) a partir de la instancia constitutiva inicial o sea del punto (*σημεῖον*), aquella marca (*σῆμα*) con la que todo comienza y que es una señal de la actividad de los dioses, aquello que nos permite construir nuestro lenguaje por medio de signos (*σημασία*). Sin embargo, existe una lógica distinta en el punto (*σημεῖον*) como marca, aquello que no es parte (*μέρος*) de un todo (*πᾶς*), aquella parte que a su vez es un todo: la parte ≡ es una totalidad (*μέρος* ≡ *πᾶς*); tal hecho conduce a una situación paradojal. Mientras la lógica de la superficie (*ἐπιφάνεια*) gravita en la dinámica de lo largo (*μῆκος*) y lo ancho (*πλάτος*), en una suerte de dinámica parecida al producto vectorial cruz ($a \times b$), aquella operación binaria de dos vectores en un plano tridimiensional. No en vano se puede entender la línea (*γραμμή*) como un vector[298]; una línea que posee una magnitud o largo y una dirección. En la geometría euclidiana un vector $\overrightarrow{AB}$ está representado como un segmento de línea con una flecha que indica la conección entre el punto inicial y el final. Esto nos lleva a plantear que el álgebra lineal ya estaba de alguna manera presupuestada y puede ser derivada a partir de estas fundamentaciones

[298] La norma de un vector es una función que asigna una cantidad estrictamente positiva a lo largo en un espacio vectorial V sobre los números reales ℝ. Es una función $|\cdot| = V \rightarrow \mathbb{R}$, es una norma si V cumple las siguientes condiciones para todo $v, w \in V$, $k \in \mathbb{R}$: i. Positividad: $|v| > 0$, si $v \neq 0$, $|0| = 0$, ii. Homogeneidad positiva: $|kv| = |k|\ |v|$, iii. Subaditividad (desigualdad triangular): $|v + w| < |v| + |w|$. La distancia en un espacio normal es $(V, |\cdot|)$, está definida por $d\ (v, w) = |v - w|$. Tema tratado en: *A course in Metric Geometry*, Burago & Ivanov (2008). El planteamiento euclidiano, nótese, considera cantidades positivas y, de alguna manera, la noción de línea que está presente en una superficie posee una dirección.

primitivas donde, además, la perpendicularidad ($a \perp b$) viene a ser introducida a través de la noción de línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*): $\|a \times b\| = 0$, mientras una superficie estaría dada por $\|a \times b\| = \|a\| \|b\|$, donde $a \times b = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$[299]. Un espacio tridimensional bien entendido, dado que lo largo (*μῆκος*) también se le asimila a lo alto (*μῆκος*), que unido a lo ancho (*πλάτος*) permite recrear una superficie tanto plana como dotada de volumen; de algún modo, la noción de superficie (*ἐπιφάνεια*) presupone ambos usos. De manera que la superficie (*ἐπιφάνεια*) se fundamenta dentro de una tercera modelación antecediéndole la línea (*γραμμή*) y el punto (*σημεῖον*), donde cada una tiene sus propios postulados y su propio sistema de fundamentación formal. Se pueden modelar las unas respecto a las otras con independencia, aunque todas se puedan combinar e integrar de manera conjunta.

Puesto que lo largo (*μῆκος*) está unido a lo ancho (*πλάτος*) bajo la conectiva de la conjunción (*καί*), esto pide asumir ambas nociones de manera simultánea en relación con la superficie (*ἐπιφάνεια*); y hecho que hace el lugar o topos (*τόπος*) que se vaya a construir se de como fruto de la doble actividad entre ambas: entre un alargar y prolongar (*μακύνω*) y un anchar o ensanchar (*πλατύνω*); este último vocablo, además, significa un abrir y extender, pues, no existe una superficie si no se cumple con la condición de que se alarga-levanta si y solo si se ensancha, propiedad formal que podría ser simbolizada como: largo ↔ ancho (*μῆκος* ↔ *πλάτος*). Esta característica está bellamente sugerida en la palabra *mónos* (*μόνος*) que es algo solo, único y solitario: algo que proviene de dos o tres instancias, dado que lo largo también se le asocia algunas veces a lo alto, se vean reducidas a una (*μονόω*) la cual debe de mantenida, sostenida, contenida y tenida (*ἔχω*), de manera que *se tiene solo lo suyo en lo largo y ancho* (*ὃ μῆκος καί πλάτος μόνον ἔχει*). Por lo tanto, se da una unión indisoluble entre ambas instancias, necesarias para sostener la viabilidad de la superficie (*ἐπιφάνεια*) como una forma (*εἶδος*) única o un *monoeidés* (*μονοειδής*), donde a lo único (*μόνος*) le está asociada una forma (*-ειδής*) reindivicando esa unidad de ambos como una mónada (*μονάδα*).

[299] Se tiene que la suma de dos parejas ordenadas de puntos (a, b) y (c, d) son los puntos finales de los vector u, v, luego (a + c, b + d) será el punto final de u + v. Su representación se asemeja a un paralelogramo. El espacio se construye a partir de estos vectores, tal como a partir de las líneas rectas se construye la superficie eucilidiana. Tema tratado en *Linear Algebra*, cap. II, por Seymour Lipschutz (1991).

3.2.5.2. La métrica en la noción de superficie

El *nómos* (*νόμος*) establece la ley en concordancia con la costumbre interpretada en aquello que brilla (*φαίνω*), y en ese sentido es traído a la luz para irrumpir en la existencia: la ley (*νόμος*) proviene de la luz (*φάος*) que es la que otorga la existencia. El punto (*σημεῖον*) que luego da lugar al nacimiento de la línea (*γραμμή*) adquiere finalmente una estabilidad en la superficie, la cual es el escenario donde las anteriores nociones primitivas tienen la posibilidad de mostrarse (*φαίνω*) en cuanto se hacen visibles. La superficie (*ἐπιφάνεια*) tiene una connotación sagrada dado que en ella los dioses se manifiestan así como los dignatarios reales. La preposición utilizada es *epí* (*ἐπί*) que indica un estado de estar sobre algo e indica una cercanía asimismo como una contenencia. Se puede aseverar que el operador matemático de la pertenencía ($\in$) está representado en la preposición *epí* (*ἐπί*). A su vez, la membresía de un elemento frente a un conjunto estaría representada en la superficie (*ἐπιφάνεια*) que se constituye en la primera instancia conjuntual. Es en este espacio (*τόπος*) donde adquieren una visibilidad y una existencia contingente con otros entes geométricos tanto el punto (*σημεῖον*) como la línea (*γραμμή*). Aquí se afirma y se establece que a través de esta formulación se está anticipando la teoría de conjuntos, y que la noción de conjunto se equipara con la de superficie (*ἐπιφάνεια*). El operador ($\in$) que establece la membresía de un elemento frente a un conjunto corresponde a la preposición *epí* (*ἐπί*), que significa algo que está sobre, cerca, con, dentro y luego. Lo interesante es que la superficie es aquella realidad que permite cobijar a variados entes, en este caso geométrico-matemáticos. En especial, lo que aporta este caso, es que la noción de superficie (*ἐπιφάνεια*) permite construir una métrica, hecho dado como una consecuencia de lo largo *mêkos* (*μῆκος*) y lo ancho *plátos* (*πλάτος*).

Se ha visto a lo largo de estos axiomas la presencia de una pareja de conceptos bajo las cuales se define las propiedades del ente geométrico: la superficie (*ἐπιφάνεια*) como aquello que tiene lo largo (*μῆκος*) y lo ancho (*πλάτος*) $Ἐ_{μπ}$. En este nuevo contexto, aparece un nuevo operador si observamos la oración (*ὃ μῆκος καί πλάτος μόνον ἔχει*), y está dado por el verbo (*μονόω*) que es reducir a uno. Esta reducción puede ser equiparada con la acción que posibilita toda métrica, sea X un conjunto arbitrario y d la función llamada distancia d: $X \times X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, es una métrica sobre X; $\forall$ x, y, z $\in$ X. Se satisfacen las siguientes condiciones: i. Positividad d (x, x) > 0, x ≠ y, d (x, x) = 0, ii. Simetría d (x, y) = d (y, x), iii. Desigualdad triangular: d (x, y) ≤ d (x, y) + d (y, z). En este caso, se tienen los puntos (*σημεῖον*) que ya están presentes definiendo la métrica como la distancia entre ellos. Un espacio métrico es un conjunto con una métrica sobre él que, en este caso, es la superficie (*ἐπιφάνεια*). A su vez, un espacio métrico es la pareja (X, d), donde d es una métrica sobre él. Una vez más, es perceptible el juego de la noción de pareja ordenada ahora en un nuevo contexto, X se asemeja a la superficie (*ἐπιφάνεια*) y d representa en este contexto una línea (*γραμμή*) en cuyos extremos se tienen dos puntos, en concordancia con el axioma tres de Euclides. A su vez, los elementos de X se llaman puntos del espacio métrico y siguen el mismo razonamiento euclidiano de que la superficie está constituida por puntos. La distancia entre dos puntos se simboliza d(x, y) y será denotada como |xy|[300]. Un aporte derivado de la noción de superficie (*ἐπιφάνεια*) es la noción de mapa: sean X, Y dos espacios métricos, un mapa está definido por f: X → Y, el cual preserva la distancia si $|f(x) f(y)| = |xy|$, para todo punto x, y $\in$ X. La mencionada reducción (*μονόω*) que permite la superficie (*ἐπιφάνεια*) está muy presente en la noción de un mapa y establece una de las relaciones fundamentales que se darán entre dos superficies o dos espacios métricos X, Y. Por su parte, el verbo *ékhō* (*ἔχω*) significa tener, poseer y contener y es uno de los verbos que vendría a simbolizar la actividad del operador matemático de la pertenencia $\in$ y lo que le da unidad (*μονόω*) al agregado o conjunto, que Georg Cantor denominó *Die Menge*, vocablo que significa cantidad como multitud, el cual está muy en concordancia con la aproximaxión extensiva con la que se está definiendo esta teoría. La preservación de la distancia en los espacios métricos es aquella transformación que se denomina isometría, es una relación de equivalencia que permite compartir todas las propiedades expresadas en términos de distancias.

Cabe anotar que en la noción tradicional de conjunto, los elementos parecen situarse sobre un espacio que no está presupuestado y garantizado a nivel formal, de manera que

[300] Ver en: *A course in Metric Geometry* publicado por American Mathematical Society (AMS), Providece, Rhode Island; sus autores son Dmitri y Yuri Burago, y Sergei Ivanov (2001), ilustra amenamente este tema, ganando profundidad rápidamente a través de explicaciones claras con alto contenido pedagógico.

tomar en cuenta que existe una superficie (*ἐπιφάνεια*) que pueda contener a los distintos entes geométricos, como el punto (*σημεῖον*) y la línea (*γραμμή*) es supremamente positivo y útil. Considérese que a la teoría estándar de conjuntos[301] se le puede asociar una métrica y, de esta manera, en la composición de funciones se tendrían dos funciones: una función que alarga (*μῆκύνω*) en composición con una función que ancha (*πλατύνω*) gof. Es decir, la composición entre lo que alarga (*μῆκύνω*) y lo que ancha (*πλατύνω*) es la que viene a constituir a la superficie (*ἐπιφάνεια*) como tal: f(*ἐπιφάνεια*) = (*μῆκύνω*) o (*πλατύνω*), f(*ἐ*) = μ o π. Todo elemento que habite una superficie al menos está constituido por un punto (*σημεῖον*), este hecho tendría que ver con la presencia al menos del conjunto vacío $\varnothing$ al cual se le asemeja el punto. Sin embargo, la definición de punto L 1.1 es distinta a nivel conceptual en relación al tratamiento que se le da al concepto de punto en las demás definiciones: el primer punto sin ningún otro referente que él mismo, es un ente inaprehensible. Mientras tanto, habría que ver si en los demás puntos existe un orden debido a que en su construcción y formulación teórica estos puntos estarían en segundo o tercer lugar dentro de un ordenamiento de tipo lógico. Podría acontecer que los demás puntos están en segundo lugar en cuanto tan solo los antecede el primer punto generatriz de todo ese espacio (*τόπος*). Se tiene el punto (*σημεῖον*) dado en la primera definición y, luego, se tiene la línea (*γραμμή*) que es formulada en las definiciones segunda, tercera y cuarta. Viene ahora la superficie (*ἐπιφάνεια*) formulada en la quinta definición, y en estos complementarios contextos habría tres puntos (*σημεῖον*) distintos: el punto solo, los puntos de la línea y los puntos de la superficie. Aunque se los simbolice de igual manera, todos son a nivel conceptual distintos, de manera que los puntos que están situados en una superficie (*ἐπιφάνεια*) pertenecen a una jerarquía proposicional diferente. Se ha de tener claro que la noción de elemento, aquel ente capaz de habitar un espacio (*τόπος*), tiene una relación con

---

[301] Este tema fundamental es tratado por John von Neumann (1925) en: *Axiomatization of Set Theory*, donde se podría afirmr que la operación [x, y] corresponde a aquel procedimiento que se encuentra en todas las matemáticas de la formación de una función f, que debe de ser distinguida de sus valores f(x)! y del argumento x del valor f(x). Von Neumann propone reemplazar esta última notación f(x) por [f, x] para indicar que x es una variable, aunque en la expresión [x, y] se está en presencia de dos variables a las que se les va a aplicar el axioma de extensionalidad (*Bestunntheutsaxiom*), que va a permitir establecer la similitud o equivalencia entre dos conjuntos, en este caso entre dos espacios métricos X, Y. (*From Frege to Gödel*, Jean van Heijenoort Editor, Harvard University Press, 1971, pág. 397).

aquel punto a nivel de un tipo lógico[302] situado en un tercer nivel de orden, propio del punto que habita en una superficie. Tan solo ese punto, denominado *punto gamma* (*σημεῖον-γ*) tendría la facultad de poder ser considerado al mismo tiempo un punto y un elemento. Los demás no pueden asumir tal papel, dado que el espacio o lugar (*τόπος*) como tal tan solo viene a la existencia con la superficie (*ἐπιφάνεια*); se puede decir entonces que el punto (*σημεῖον*) y la línea (*γραμμή*), al ser tomados de manera aislada,, representan un estadio de un pre-espacio: todavía no pueden soportar un espacio o, lo que es igual, no tienen una métrica en estricto sentido. Tan solo lo ancho (*πλάτος*) existe en la superficie (*ἐπιφάνεια*), la línea sola existe como lo carente de anchura (*απλάτος*), a su vez estaría situada en un pre-espacio en cuanto no tiene una dimensión completa debido a que tal línea no se puede afirmar en estricto sentido que pertenece a un espacio bidimensional; para que tal cosa pudiera suceder, las dos nociones de largo y ancho tendrían que estar definidas de manera positiva, como que ambas existen simultáneamente.

Lo interesante de este tercer punto *punto gamma* (*σημεῖον-γ*) es que al mismo tiempo es un punto y un elemento, y se le puede asociar una métrica que es una función que se define como una distancia o sea una función distancia f_{d}: X × X → [0, ∞). Teniendo en cuenta en este contexto que la noción de largo (*μῆκος*) y ancho (*πλάτος*) posibilita que se de tal espacio cartesiano X × X, donde se tendría al menos dos puntos que pueden definir una línea, en este caso recta, como una pareja ordenada (σ_α , σ_β). En este contexto, surge un espacio topológico que permite construir cualquier tipo de ente geométrico. Nótese como el intervalo está cerrado en cero y abierto en infinito, lo primero es concordante con la primera definición, en la cual no existe nada anterior a la existencia del mismo punto. El que el intervalo esté abierto en infinito, es algo que no está presupuestado de manera directa, aunque esté sugerido en la cuarta definición en la cual pueden existir incontables puntos entre dos puntos: es decir, una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) es compacta en relación con los puntos que la constituyen. Un tema que amerita especial atención, es cómo lo largo

---

[302] Este tema está ampliamente tratado en: *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types* por Bertrand Russell (1908), teoría que se originó como una respuesta a la impredicatividad de las denominadas totalidades ilegítimas. La teoría de los tipos lógicos busca lograr una decibilidad o completes delimitando el tipo lógico de las proposiciones, el cual se fundamenta en los niveles de cuantificación y la estratificación de los entes formales en los distintos sustratos de una teoría estándar de conjuntos.

(*μῆκος*) y lo ancho (*πλάτος*) se unifican constituyéndose como un mismo y único (*μόνος*) ente, en donde también su acción está unificada bajo la actividad del verbo tener, sostener, contener (*ἔχω*). Tan sencillo hecho tiene unas consecuencias igualmente importantes, tal como se afirma que de la cuarta definición se sigue que una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) es compacta en relación con los puntos que la constituyen, en la quinta definición se sigue que la superficie (*ἐπιφάνεια*) es compacta: contiene sus puntos límites dentro de un intervalo cerrado y está acotada. Nótese que lo ancho y lo largo se vuelven uno solo (*μόνος*); es decir, están reducidos a uno (*μονόω*). Este hecho le otorga una unicidad a dicho espacio, dado que siempre se puede situar cuantos puntos se quiera a fin de que estos converjan.

3.2.6. La ley proviene de aquello que brilla sobre la dimensionalidad

Este nuevo enunciado dice: *Los extremos de una superficie son líneas* (*The extremities of a surface are lines, ἐπιφανείας δέ πέρατα γραμμαί*). Se está frente a la superficie (*ἐπιφάνεια*), aquella apariencia (*φάσις*) que trae y convoca a la luz (*φάος*) para que algo pueda ser conocido, desocultado y revelado, como consecuencia de la venida (*φαίνω*) a la existencia. En una primera instancia, esta se manifiesta como algo visible, que se presenta de manera abierta a fin de ser conocida y reconocida (*φανερός*). En ese sentido, toda superficie (*ἐπιφάνεια*) es un sitio (*τόπος*) brillante (*φάω*) y en consecuencia veritativo[303], más si hace visible lo que se muestra (*φαντάζω*) en esta forma pura geométrica (*ἐπιφάνεια*), que sirve de fundamento y sostén a las demás formas geométricas: hace brillante y entendible lo que está sobre (*ἐπί*) su superficie. Pero, también alude a aquel plano superior que está por encima de nosotros, a las manifestaciones de los dioses que se nos muestran en esta *epipháneia* (*ἐπιφάνεια*), dando a entender que se trata de una superficie no aparente, sino verdadera y legítima en la que su falsedad queda eliminada debido a la geometricidad que la fundamenta. Por otra parte, una superficie surge de los nocionales geométricos puros, esto hace que se esté por encima de las apariencias en cuanto

---

[303] Se puede apreciar cómo la noción de luminosidad viene asociada a un despertar interior y a una liberación, aspecto tratado en '*La Alegoría de la Caverna*' en *La República* de Platón (514a-515e), a su vez el Sol como una representación del Bien (508c-509a). Asimismo, en la etimología de superficie (*ἐπιφάνεια*), la presencia de la luz (*φάος*) sobre (*ἐπί*) aquello que brilla (*φαίνω*) posibilita que las cosas se hagan visibles (*ἐπιφαίνω*). La luz es un sentido amplio es sinónimo de la presencia de la legitimidad de la razón.

al mundo captado y construido por medio de los sentidos inmediatos. Además, las formas aritmético-geométricas trascienden al tiempo, al *khrónos* (*χρόνος*) donde se halla el *aiṓnios* (*αἰώνιος*), como lo que sostiene la existencia durante toda su duración, y vocablo que nos remite a la fuerza vital que está presente en lo eterno, al *aiwṓn* (*αἰϝών*) cuya forma adverbial *aeí* (*ἀεί*) evoca aquello que está siempre presente. De esta manera, las formas geométricas habitan en un plano superior y son las mensajeras que transmiten y revelan el conocimiento superior propio de los dioses[304]. Esto que se muestra y revela sobre un entorno brillante (*ἐπιφάνεια*), y, en consecuencia, por el otro lado (*δέ*), es la frontera más alta: aquel límite ilimitado e infinito, sin fin y circular (*ἄπειρον*), donde las metas y los propósitos convergen realizándose como fin (*πέρας*). Es aquel lugar o *tópos* (*τόπος*) donde se cumple, se realiza y finaliza (*περαίνω*) aquello que está más allá y del otro lado (*πέρα*). Se está frente a lo que está situado al otro lado (*περαῖος*), en el lado opuesto (*πέρατος*), y para llegar al mismo se han de atravesar (*περάω*) y penetrar sus confines más alejados (*περάτη*): "lo que está situado en el confín más alejado (*πέρατος*) de una superficie (*ἐπιφάνεια*) es la línea (*γραμμή*)". Tal axioma se nos asemeja a una metaproposición, bastante paradójica y en extremo compleja. Es curioso cómo después de cruzar algo (*περαιόω*), de atravesar este *tópos* (*τόπος*) tan brillante y luminoso (*ἐπιφάνεια*), se encuentra que su límite final (*πέρας*) es una línea (*γραμμή*): la superficie (*ἐπιφάνεια*) como algo dotado de longitud (*μῆκος*) y anchura (*πλάτος*) termina regresando sobre su mismo límite. Es decir, vuelve a ser una línea (*γραμμή*), una longitud que no tiene anchura (*γραμμή δέ μῆκος ἀπλατές*). Los opuestos se anulan dado que lo largo (*μῆκος*) sigue siendo, pero lo ancho (*πλάτος*) deja de serlo (*ἀπλατής*). Se podría decir, que se trata de una propiedad asimétrica: lo largo (*μῆκος*) tiene en frente (*πέραν*) a lo ancho (*πλάτος*), equivaldría a ser simétrica (aRb, bRa), pero cuando lo largo (*μῆκος*) tiene en frente (*πέραν*) a lo que no es ancho (*ἀπλατής*) sería algo asimétrico (aRb, a$\underline{\text{R}}$b). Esta propiedad es muy apreciada en las altas matemáticas y está muy presente en las geometrías no euclidianas.

[304] En '*El Simil de la línea*' en *La República* de Platón (509d-511e) se presenta el conocimiento matemático como la dianoia (*διάνοια*), en ella se encuentran los entes geométricos como la línea a los que se accede por el entendimiento o noesis (*νόησις*), tan fundamental para acceder al conocimiento de las ideas como el estadio más alto que corresponde al último segmento de la línea: "un objeto iluminado por la verdad y el ser" (508d).

La superficie (*ἐπιφάνεια*) termina indefiniéndose a sí misma cuando logra su propio límite (*πέρας*) −algo que parece anunciar con mucha anticipación al cálculo infinitesimal, donde se estudian: los límites, las derivadas, las integrales y las series infinitas– para luego, volver a ser una línea: es como si la superficie (*ἐπιφάνεια*) fuera una función cuyo dominio está en la línea (*γραμμή*)[305] −que puede ser representada y concebida como un segmento− y cuyo recorrido final en su codominio retornará a la misma línea (*γραμμή*), $f^{\textbf{ἐπιφάνεια}}$**:** *γραμμή* → *γραμμή*, $f^{\text{ἐ}}$: γ → γ. Esto llevaría a que la superficie (*ἐπιφάνεια*) es reflexiva respecto de sí misma: γRγ. De igual manera, la fundamentación no estaría dada en la superficie (*ἐπιφάνεια*) sino en la línea (*γραμμή*) y eso conduce a otro tipo de lectura, lo fundamental es el signo (*γράμμα*) en cuanto signo escrito o dibujado, aquello que es escrito o bosquejado (*γράφω*). De alguna manera, la línea (*γραμμή*) parece comenzar en el signo escrito (*γράμμα*) como dibujo que termina transformándose en letra: aquella pintura, dibujo, escritura, escrito e inscripción (*γραφή*); que es arañada, garabateada, escrita, dibujada, registrada (*γράφω*) sobre una superficie (*ἐπιφάνεια*): un texto o escrito (*γραφή*) que es un signo (*γράμμα*) propio de quienes saben leer y escribir, los que conocen muy bien la lengua o los eruditos (*γραμματικός*), y los escribanos (*γραμματεύς*). En el límite (*πέρας*) de una superficie (*ἐπιφάνεια*) se encuentra la línea (*γραμμή*), cuyo signo (*γράμμα*) es la misma palabra (*λόγος*). Se observa allí ese brillar (*φαίνω*) que parece estar situado arriba de nosotros (*ἐπί*), trayendo esa luz (*φάος*) que permite comprender todo desde lo innombrable como aquel límite (*πέρας*) indecible e indecidible.

3.2.7. La relación de equivalencia se origina en la dinámica de la superficie

Este axioma que sigue aborda la superficie (*ἐπιφάνειά*) como un isomorfismo entre las líneas rectas (*εὐθεῖα γραμμή*) que sirven de soporte para definir la equivalencia entre

[305] Se hace notar que una línea es asimilable a una estructura larga, como una clase de intervalos por medio de los cuales podemos medir su largo, como un número no negativo. Tenemos los trayectos para los mapas como intervalos, sea un trayecto γ en un espacio topológico X un mapa continuo γ: I → X, definido sobre un intervalo I ⊂ ℝ. Entendemos por un intervalo cualquier subconjunto conectado a la recta, el intervalo puede ser abierto o cerrado, finito o infinito, y aún un único punto puede ser considerado como un intervalo. A su vez, el intervalo puede ser tratado como un mapa y, en ese sentido, podemos hablar de su imagen, sus restricciones, y otras consideraciones. Tema tratado en el capítulo II, Espacios de longitud (*Lenght Spaces*), en: *A Course in Metric Geometry* Burago & Ivanov (2001), American Mathematical Society, Rhode Island.

ellas mismas como líneas (*γραμμή*): *Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella* (*A plane surface is a surface which lies evenly with the straight lines on itself. ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται*). Se tiene en frente, ahora, la noción de lo llano (*πέδον*) que evoca la tierra sobre la cual nos paramos y nos asentamos; campo y región (*πέδον*), propio de lo llano y la llanura (*πεδιάς*); vocablos que provienen de los pies (*πούς*) y por extensión de la pierna, evoca aquella unidad de medida que consistía en la distancia entre dos pisadas largas[306]. Lo llano (*πεδινός*) hace referencia a aquel *tópos* (*τόπος*) fundamental sobre el que se construye y edifica, y en ese sentido pareciera tratarse de un concepto previo y anterior al de superficie (*ἐπιφάνεια*). Sin embargo, los metaniveles propios de esta formulación se hacen evidentes: se tiene cómo la superficie puede ser plana (*πεδιάς*) asimismo como curva (*καμπή*), en este sentido se califica determinando el tipo espacio que se puede tener. La noción de lo plano y lo curvo anteceden como predicamentos a los que recibe una superficie a fin de definirse a sí misma. Hay que destacar la tendencia inicial, la que busca fundamentar la superficie (*ἐπιφάνεια*) en la línea (*γραμμή*), especialmente la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), dado que evoca lo que es bueno y noble (*ἐΰς*) de aquello que es enderezado. Lo derecho es apropiado para gobernar, verificar las cuentas o llevar a juicio (*εὐθύνω*), mientras lo curvo (*καμπή*) se le puede asociar a algo torcido, viciado y malo (*κακός*). Aunque es notable que en la génesis de la curva (*καμπή*) está el círculo (*κύκλος*), pese a que existía la preferencia de derivar el círculo a partir de la línea (*γραμμή*), tal como se verá en el numeral 15. Por lo pronto, se debe comprender que a la superficie (*ἐπιφάνεια*) le anteceden diversos predicados que precisan la tipicidad de jerarquía de la misma: es más afín considerar que los rayos del Sol (*ἥλιος*), del dios Helios (*Ἥλιος*), son rectas (*εὐθύς*), al igual que los rayos (*ἀστραπή*) de Zeus (*Ζεύς*) evocan lo que es recto y derecho. La superficie (*ἐπιφάνεια*) busca ser abordada como aquello sobre (*ἐπί*) lo cual brilla (*φαίνω*) propiamente la línea (*γραμμή*); la línea define a la superficie, tanto en lo largo (*μῆκος*) como lo ancho (*πλάτος*), que terminan siendo de nuevo reducidas a líneas. De esta manera, la línea (*γραμμή*) se constituye en una noción primitiva a partir de la cual se define la superficie (*ἐπιφάνεια*),

[306] La unidad de medida de los griegos era el pie (*πούς*), equivalía a 16 dedos (*δάκτυλοι*), a 1/600 de un estadio (*στάδια*). También se la utilizó en el mundo bizantino, no obstante varió a lo largo del tiempo y en las distintas regiones de Grecia y el mundo helénico. *Dictionary Greek-English*, Liddell & Scott.

como aquello que se muestra (*φαντάζω*), lo que brilla (*φαίνω*) y es propio de la luz (*φάος*), aquello que hace visible (*ἐπιφανής*) lo que existe (*εἰμί*) y aquello que es (*ἐστιν*).

En topología se tiene las variedades que son espacios que se asemejan a los euclidianos en cuanto están definidos por la proximidad a un punto, lo que extiende la formulación a espacios con n dimensiones, todos definibles en términos de la vecindad que se puede construir alrededor de sus puntos. Ello arroja un homeomorfismo que es una función continua entre espacios topológicos. Se ve que en las variedades de dos dimensiones que se asemejan a la superficie (*ἐπιφάνεια*) euclidea en cuanto definida por lo largo (*μῆκος*) y lo ancho (*πλάτος*), se tienen las siguientes dos condiciones adicionales como lo anota Hermann Weyl (1913)[307] en *The Concept of a Riemann Surface*: "La primera es que la variedad F en sí misma es el dominio, en otras palabras, ha de ser considerada como una sola pieza. El segundo postulado (axioma de contabilidad) es más profundo: si con cada punto p le está asociada una vecindad U(p), luego una secuencia contable de puntos p_1, p_2,…, puede ser escogida de manera que las vecindades asociadas U(p_1), U(p_2),…, cubran F completamente. Para variedades de dos dimensiones que satisfacen ambas condiciones, usamos en general en término más corto de superficie. La superficie es compacta si, por la segunda condición, el término 'secuencia contable' puede ser reemplazado como un 'conjunto finito'. En la literatura más antigua es costumbre llamar a las superficies compactas superficies cerradas" (págs. 23-24). Se aprecia el papel desempeñado por los puntos como la noción más primitiva de la geometría y la topología sobre la cual se construye la línea y la superficie, siempre que hablaremos de vecindad lo haremos en relación a un punto.

Luego de la breve introducción acerca de una superficie (*ἐπιφάνεια*) predicada y definida alrededor de lo que es plano (*πεδιάς*) como *definiendum*, se encuentra aquella instancia que es propiamente el *definiens*, que comienza a ser introducida como aquella

---

[307] Este ameno tema tratado en la obra: *The Concept of a Riemann Surface* por Hermann Weyl (1913), también se utiliza la palabra abierto en cuanto es una superficie no compacta o no cerrada. Se dice, que un subdominio G en una variedad F de dos dimensiones es en él mismo también una variedad de dos dimensiones, si G tiene una vecindad alrededor de un punto, cualquier vecindad de dicho punto en G es una vecindad de un punto en F, el cual está contenido en G (año, pág 24). La noción de vecindad se extiende por toda la teoría de conjuntos, este tipo de reflexión anticipa los planteamientos de la teoría de Tarski (1953) en cuanto a la relación de una teoría con una subteoría: T_2 es una extensión de T_1 y T_1 es una subteoría de T_2, si cada frase que es válida en T_1 es también válida en T_2. Tema tratado en *Undecidable Theories* (pág. 11).

(*ὅστις*, unión del pronombre relativo *ὅς*, cualquiera y del pronombre indefinido *τις*, alguno) que proviene de (*ἐκ, ἐξ*; preposición que indica la procedencia de algo) la superficie (*ἐπιφάνεια*) que posee la notable propiedad matemática del isomorfismo, el cual aborda desde la igualdad lo que es igual (*ἴσος*) en cuanto posee esa propiedad de hacer igual (*ἰσόω*) aquello (*ταῖς, ὁ*) que está sobre (*ἐπί*) ella misma (*ἑαυτοῦ*). La unión del pronombre reflexivo (*ἑ, οὗ*) y el adjetivo (*αὐτός*) mismo, para dar aquello que en él o ella en sí mismo es igual: ¿Qué es aquello que es igual consigo mismo? Eso que posee esa propiedad de igualdad (*ἴσος*), de algo que es equivalente y similar a sí mismo (*αὐτός*), lo que es lo común y parecido (*ὁμός*) a él, ella o lo (*οὗ*), no es otra que la rectitud (*εὐθεῖα*) propia de lo que es recto (*εὐθύς*), lo que es característico de la línea (*γραμμή*), en especial de la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). La línea recta asume en sí misma las características de lo que es directo y simple, y posee esa propiedad de propagarse hacia delante de manera inmediata e igual. Aquello que está situado (*κεῖμαι*), que descansa y se sitúa en el lugar, se lo define por su misma cualidad de yacer ahí de manera permanente y continua. Se está frente a la forma (*εἴδω*) de lo que permite situar y ubicar (*κεῖμαι*), algo que yace y se halla en un estado de calma inerte y establecida. Algo que se ha almacenado (*κεῖμαι*) y conservado como algo preciso y valioso (*κειμήλιον*): lo que es colocado para dormir, que yace adormecido y calmado, que se acuesta a fin de dormir aún el sueño de la muerte (*κοιμάω*). Ese yacer (*κεῖμαι*) propio de la superficie (*ἐπιφάνεια*) que mantiene y conserva su misma (*ἴσος*) forma (*εἴδω*), en especial, si es recta (*εὐθύς*), como si se tratase de una serie o sucesión de líneas (*γραμμή*) iguales (*ἴσος*) en ellas mismas (*αὐτός*), una cualidad de lo que es similar e igual (*ὁμός*). El proceso reflexivo que subyace (*αὐτός*) sugiere que (*γραμμή*) R (*γραμμή*) (γRγ), propio de algo que es llano (*πέδον*) tal como la superficie (*ἐπιφάνεια*) de una llanura (*πεδιάς*), que puede ser recorrida a pie (*πούς*) sobre el suelo plano (*ἐπίπεδος*) e igual a la misma.

3.2.7.1. La superficie da lugar para la elaboración de la noción de función

Las consideraciones anteriores sugiere que una superficie (*ἐπιφάνεια*) es barrida por una sucesión de líneas (*γραμμή*); la actividad por medio de la cual se efectúa y se completa ese proceso está dada por la dinámica que se da entre lo igual *isos* (*ἴσος*), mediado por lo que está sobre *epí* (*ἐπί*) hasta lo que es lo mismo *autos* (*αὐτός*), tanto *isos* (*ἴσος*) como *autos* (*αὐτός*) son sinónimos y evocan aquello que es consigo mismo equivalente e igual. Se trata ahora de una relación reflexiva aRa que, además, de ser considerada como una función es sobreyectiva, es decir, a cada elemento del dominio le corresponde un solo y único elemento del codominio, hecho que permite, además, que se de una relación inversa R^i en una función con características similares. Donde cada 'a' le corresponde una línea (*γραμμή*), la cual está relacionada con la línea que le sigue; sin embargo, ya se había dicho en la definición 2, que una línea tan solo posee largo (*μῆκος*) más no posee anchura (*ἀπλατής*). Tal hecho lleva a plantear que entre dos líneas pueden existir incontables líneas, es una manera afín de recrear una construcción geométrica de los reales (*R*). Sin embargo, el modelo derivado es aún más complejo, ya que se tendría que cada línea (*γραμμή*) tan solo puede ser concebida como un intervalo abierto dentro de una sucesión de intervalos abiertos que representan a las demás líneas: $\{\gamma_n\}_{n \in ἐ}$, la cual puede ser apreciada como aquella función f: línea → plano, $f: \gamma \to$ ἐ. Esa función f es una función isomórfica, en la que de una línea (*γραμμή*) se va a otra línea;y se tiene en la cuenta que se está preservando la estructura de las mismas. A su vez, hay dos conjuntos Ἐ, Ἐ*, tal que se tiene la función $f^{ἴσος}$ o simplemente $f^{ἴ}$: Ἐ → Ἐ*. Entonces, se puede decir que existe un orden total entre dos conjuntos ordenados, el primero será el dominio que corresponde a la noción de superficie (*ἐπιφάνεια*), tal como es considerada en la definición 5 (Una superficie tan solo tiene largo y ancho). Mientras el codominio esta representado en la segunda superficie Ἐ*, tal como está definida en la definiciones 6 y 7 (*Los extremos de una superficie son líneas y una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella*). Lo interesante es que, en la definición 7, se introduce la noción de superficie plana (*ἐπίπεδος ἐπιφάνειά*), lo cual hace que la superficie de dominio Ἐ no sea totalmente equivalente a la de codominio Ἐ*; en especial, se puede decir que Ἐ* es un subconjunto de Ἐ: Ἐ ⊂ Ἐ*. Se tienen dos conjuntos ordenados Ἐ, Ἐ*; (Ἐ, ≤) y (Ἐ*, ≤'), donde $\gamma_1, \gamma_2 \in$ Ἐ, tal que si $\gamma_1 \leq \gamma_2$ si y solo si $f^{ἴ}(\gamma_1) \leq' f^{ἴ}(\gamma_2)$.

Hay que resaltar que la función $f^{ἴ}$ convierte una línea que habita en una superficie ($\gamma \in$ Ἐ) en una línea que habita en una superficie plana Ἐ*, la cual está definida alrededor de la noción de rectitud (*εὐθεῖα*) o lo recto (*εὐθύς*). La noción de lo recto está relacionada con la noción de punto (*σημεῖον*) y esta a su vez viene definida por la relación del punto como parte (*μέρος*) en relación a un todo (*πᾶς*) $f^{\mu/\pi}$. Este sería el primer nivel proposicional; luego, se tendría el segundo nivel proposicional que estaría representado por ser el punto (*σημεῖον*) parte de una línea (*γραμμή*), que es simbolizado como la función $f^{\sigma/\gamma}$. Se puede apreciar cómo en el primer nivel proposicional está la fundamentación que considera al todo como la noción englobante por excelencia; tal hecho está dado por la relación del punto como parte de una línea. Pero, está también un tercer nivel proposicional que se vendría a situar en una teoría de tipos lógicos[308], la parte vendría a ser la línea (*γραμμή*) y el todo sería la superficie (*ἐπιφάνεια*). Tan importante consideración se la puede simbolizar a nivel proposicional como $f^{\gamma/ἐ}$. Finalmente, es posible plantear un cuarto nivel proposicional, en el cual tendríamos que la parte está representada por una superficie (*ἐπιφάνεια*) larga (*μῆκος*) y ancha (*πλάτος*), mientras que el todo está representado por una superficie plana (*ἐπίπεδος ἐπιφάνειά*) caracterizada por la presencia de líneas rectas (*γραμμῆς εὐθείαις*), siendo su representación funcional $f^{\gamma/ἴ}$. Tales funciones que pueden ser compuestas hacen que la función principal que las define, la función isomórfica $f^{ἴ}$, requiera una fundamentación más sólida. Debido a que se tiene que respetar un orden o *táxis* (*τάξις*) cuya acción de ordenar y arreglar (*τάσσω*), habrá de tener en cuenta varios aspectos, siendo el principal que deberá de recoger las cuatro formulaciones funcionales previas de jerarquía inferior ($f^{\mu/\pi}$, $f^{\sigma/\gamma}$, $f^{\gamma/ἐ}$, $f^{\gamma/ἴ}$). En todos los casos se muestra que la función isomórfica posee un orden y jerarquía superior a las cuatro mencionadas, en cuanto la propiedad isomórfica es la que está por encima de todas como el criterio geométrico o métrico superior. Se puede

---

308 En su artículo: *Sets, Types and Categories* por John Bell (2012), se nos recuerda cómo la teoría de los tipos lógicos ha establecido una relación muy cercana con la teoría de conjuntos y con la teoría de categorías. Bell acude a la obra de Bertrand Russell (1903): *The Principles of Mathematics*, en el numeral §489 se está recapitulando la teoría de las clases: “Una clase puede ser identificada con (α) el predicado, (β) con el concepto-clase, (γ) el concepto de clase, (δ) el rango de Frege, (ε) la conjunción numérica de los términos de la clase, (ζ) el todo compuesto por los términos de la clase” (pág 515). Menciona Russell que las tres primeras no permiten determinar una clase aún cuando sus términos estén dados, la (δ) su dominio está en los términos lo que la lleva a autocontradecirse, la (ε) es incuestionable, pero no es una sola entidad, la (ζ) no puede existir como un solo término tal como la (δ) no puede ser identificada con la clase en concordancia al argumento de Frege. Es esta última (ζ), la que nos conduce a la famosa paradoja de Russell. Bell sigue anotando, que Russell planteaba la necesidad de distinguir entre los términos, las clases, las clases de las clases, *ad infinitum*. Estas colecciones son disyuntas, recordemos que para aseverar $x \in u$, la colección de x debe de pertenecer a un grado inferior a la de u, esto da lugar al surgimiento de la teoría de los tipos lógicos (p. 2,3).

recrear tal situación a nivel de una composición de funciones como sigue: ($f^{\gamma/\text{ἴ}}$ *o* ($f^{\gamma/\text{ἐ}}$ *o* ($f^{\gamma/\text{ἐ}}$ *o* $f^{\mu/\pi}$))); se tendría aquí un sistema estructurado alrededor de una jerarquía de tipo de orden 4. Hay que notar que la función principal $f^{\text{ἴ}}$ es aquella transformación que es capaz de transformar y operar a nivel isomórfico, y está definida en relación con una superficie (*ἐπιφάνεια*) conformada por las líneas (*γραμμή*), y que es capaz de transformarlas en líneas rectas (*γραμμῆς εὐθείαις*). A su vez, se ha de tener muy presente que las líneas del dominio (*γραμμή*) están definidas por puntos (*σημεῖον*) cuya propiedad es ser puntos extremos (*πέρατα σημεῖα*). Así, la condición de límite (*πέρας*) es parte de la frontera última que guarda, además, una relación de oposición (*πέρατος*) entre los dos puntos situados en lugares extremos de una línea (*γραμμή*). Es importante señalar que pueden existir una variedad de criterios en relación con la función principal de jerarquía superior $f^{\text{ἴ}}$, la cual toma el criterio de isomorfismo presente en la definición 7, el cual se aprecia en la dinámica que se da entre *isos* (*ἴσος*) a *autos* (*αὐτός*); además, de manera explícita recoge la propiedad reflexiva y la noción de equivalencia (≡). Es muy notable cómo el texto puede dar lugar a variadas interpretaciones susceptibles de ser recreadas a través de varios modelos respaldados por varias teorías. Es así como B. Russell menciona que una clase es un objeto determinado únicamente por una función proposicional, y esto está en plena concordancia con lo afirmado, donde el punto (*σημεῖον*), la línea (*γραμμή*) y la superficie (*ἐπιφάνεια*), cada una pertenece a una clase y la función *f* como concepto se aplica sobre los miembros de cada una de estas clases. En ese sentido, la clase da lugar al surgimiento de la noción de función, que también se vería afectada por un ordenamiento de tipo[309].

[309] Este tema está ilustrado en el apéndice B de *Principles of Mathematics* de Russell (1903), donde manifiesta que cada función proposicional φ(x) además de su rango de verdad, tiene un rango de significancia: un rango dentro del cual la x debe situarse en φ(x) que es una proposición, verdadera o falsa. Este es el primer tópico en una teoría de tipos, el segundo es el rango de significancia que da forma a los tipos: "si x pertenece al rango de significancia de φ(x), luego existe una clase de objetos, el tipo de x, todos los cuales deben de pertenecer al rango de significancia de φ(x), aunque φ pueda variar, y el rango de significancia siempre será de un tipo singular o una suma de muchos tipos" (pág. 523). Donde un individual representa el tipo más pequeño posible, un objeto como lo puede ser un punto en el espacio.

3.2.7.2. La superficie es un campo que como topos construye un límite

Cabe decir que la superficie (*ἐπιφάνεια*) puede ser considerada como un campo, como una estructura algebraica que permite la adición y la multiplicación de líneas (*γραμμή*) que cumplen con las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de la multiplicación respecto a la adición; asimismo, la superficie puede ser considerada como un espacio vectorial. Así, en el dominio propio de una superficie, se tiene una función previa $f^{\sigma/\gamma}$, f: $\sigma \rightarrow \gamma$ que está definida por la relación del punto (*σημεῖον*) con la línea (*γραμμή*) $f\sigma/\gamma$ (en esta grafía simbólica $f\sigma/\gamma$, se podría plantear que la función / podría interpretarse como si σ es incompatible con γ. Recordando el concepto de incompatibilidad evocado en la barra de Sheffer) en la cual se debe de verificar la condición que a cada línea (*γραμμή*) le corresponde unos puntos (*σημεῖον*) extremos (*πέρας*) que además son opuestos entre sí (*πέρατος*). Sin embargo, en ningún lugar se dice que tengan que ser dos puntos, obviamente tenemos una noción de par ordenado de puntos {{{σ},∅}, {{σ'}}}, cuya definición se le debe a Norbert Wiener[310]. Lo importante es que permite recrear los pares ordenados para cada uno de los niveles conceptuales mencionados dentro de una teoría de tipos lógicos, la cual se estructura a partir de diversas relaciones binarias, sean algunas de ellas: la de la parte y el todo, el punto y la línea, la línea y la superficie, y la superficie y la superficie plana normada alrededor de la línea recta. Como ya ha sido mencionado, tanto las definiciones de Euclides como las de Pitágoras se pueden asemejar a metadefiniciones concebidas como metaproposiciones de un lenguaje objeto, que estaría por encima de una teoría de los tipos lógicos. Siendo estas metaproposiciones predicables que no están limitadas por las modelaciones que se hagan de ellas. Ello permite la construcción de variados modelos y teorías tanto consistentes como completas, dado que al estar limitadas por el orden de tipo no presentarían una impredicatividad. En la cuarta función $f^{\gamma}/^{ἴ}$ debe verificarse, ya que una vez completada exitosamente la función previa$f^{\sigma/\gamma}$, que parte de

---

[310] Wiener Norbert (1914) en: *A Simplification in the Logic of Relations*, plantea la noción de pareja ordenada como una consecuencia de lo planteado en Principia Mathematica. Wiener nota cómo en la función proposicional φ(x, y), son del mismo tipo la x como la y, lo que le permite llegar a la siguiente definición: x^y^(x, y) = α^{(∃ x, y) . φ(x, y) . α = ι'(ι'ι'x ∪ ι'Λ) ∪ ι'ι'y} Df, ι'x puede ser definida directamente como la clase y^(y = x). Donde Λ representa a la clase nula, V a la clase universal *24·02 Λ = −V Df., ι'x es la clase cuyo único miembro es x, significa la clase de los objetos que son idénticos con x (pág 225).

unas líneas habita en una superficie (*ἐπιφάνεια*) dotada de un largo (*μῆκος*) y un ancho (*πλάτος*). La superficie puede ser transformada por la operación de la rectitud (*εὐθεῖα*) para que sean líneas rectas (*γραμμῆς εὐθείαις*) las que determinen la normatividad de la misma. Sin embargo, tal transformación presenta un inconveniente dado que la línea (*γραμμή*) tiene largo (*μῆκος*) más no ancho (*ἀπλατής*). Y esto vuelve a situar el problema de la construcción euclidiana de un plano que se asemeja a una recreación geométrica de los números reales, no obstante, es aún más compleja, debido a que al no tener ancho (*ἀπλατής*) se estarían considerando unas pseudo-líneas (*ψευδής-γραμμή*) que se asemejan a intervalos abiertos (*γ*), donde no existe un número entero entre las mismas, dado que tal número obligaría a poderlo construir dentro de un intervalo cerrado [γ], lo cual no es posible dado la línea es un ancho sin un largo (*γραμμή δέ μῆκος ἀπλατές*) tal como está planteado en la segunda definición de los *Elementos* de Euclides.

Es posible notar cómo la formulación posee distintos niveles, este tema es especialmente necesario en la lógica, fue planteado por Bertrand Russell en su teoría de los tipos lógicos: $f^{\mu/\pi}$ el primer nivel está dado por la relación del punto como parte (*μέρος*) de un todo (*πᾶς*); el segundo nivel estaría dado por la relación del punto (*σημεῖον*) con la línea (*γραμμή*) $f^{\sigma/\gamma}$; el tercer nivel estaría dado por la relación de la línea (*γραμμή*) con la superficie (*ἐπιφάνεια*); y habría un cuarto nivel que estaría dado por la relación de las líneas (*γραμμή*) con las líneas rectas (*γραμμῆς εὐθείαις*) $f^{\gamma/ΐ}$. Algo que hay que tener muy presente es la necesidad de que existan entornos bien definidos que a nivel de la teoría aritmética estarían dados por los números enteros, los cuales al ser geometrizados estarían representados por intervalos cerrados. Este hecho reviste una importancia capital debido a que al considerar Euclides en la definición 2: "*que una línea es un largo sin ancho*", este hecho hace que al recrear la serie de líneas (*γραμμή*) que deben de completar una superficie (*ἐπιφάνεια*), no es posible hacerlo dado que no existiría separación entre línea y línea. Es más, aún, se podría afirmar que existe una infinitud (*ἄπειρος*) de líneas entre dos líneas, dado que no existe una frontera (*πέρας*) clara entre cada una con la que le antecede o le sigue. Esto lleva a que existe cierta impredicatividad en la definición 2 de Euclides[311], ya que no es posible construir una superficie tal como la conocemos utilizando tales líneas. Es igual a construir una serie numérica con números enteros, lo que permite decir que entre dos números enteros existe una infinitud de números, no obstante, los enteros funcionan como intervalos cerrados y los números que están en medio se construyen a partir de intervalos abiertos. Es necesario tener una definición clara que la daría un largo (*μῆκος*) con un ancho (*πλάτος*), estas nociones pueden ser aritmetizadas o geometrizadas como intervalos cerrados, y sobre estos intervalos podemos levantar los intervalos abiertos o sea nociones como sin anchura (*ἀπλατής*).

3.2.7.3. La definibilidad axiomática euclidiana utiliza argumentos opuestos

Un tema importante ser considerado es la manera como Euclides estructura sus definiciones, pues, si se las abordara como proposiciones se diría que las deja muy abiertas, lo cual las hace susceptibles de albergar una variedad muy amplia de formalizaciones, en especial, a nivel de su cuantificación. A lo largo de las definiciones, desde la de punto, línea, superficie, hay una metodología bien particular; en el caso de la definición de línea: *una línea es una longitud sin anchura* (*γραμμή δέ μῆκος ἀπλατές*), esta puede ser considerada comouna proposición constituida por dos partes; la primera gravita en la noción de largo (*μῆκος*) que de alguna manera es algo muy concreto, aprehensible, definible, manipulable a nivel simbólico y, en consecuencia, capaz de verse realizada dentro de un arte o técnica (una *techné*, *τέχνη*); mientras la segunda, que es lo carente de anchura (*ἀπλατής*), no es aprehensible, no es definible en términos simbólicos y, en consecuencia, no existe un procedimiento propio del arte, no hay técnica (*μή-τέχνη*) capaz de realizar algo donde existe una contradicción irreconciliable. Esta es una aseveración que no es capaz de plasmarse como una proposición (*ψήφισμα*) aceptable e interpretable para una gran mayoría. La estrategia que posee esta definición (*dēfīnītiō*) es que el *definiendum* (*dēfīniendum*), en este caso, es una línea (*γραμμή*), mientras en el *definiens* (*dēfīniēns*), es

[311] Como ya se mencionó, Morris Kline (1972) en *Mathematical Thought*, plantea los variados vacíos y falta de cierto rigor del modelo euclidiano, algo que se evidenció durante gran parte del siglo XIX, época muy dedicada a buscar la fundamentación de las matemáticas por parte de algunos grandes matemáticos (pág. 87).

una longitud sin anchura (*δέ μῆκος ἀπλατές*). Así que en el *definiens* existen dos elementos: uno definible (*dēfīniō*) y otro indefinible (*indēfīnītus*). El primero que es lo largo (*μῆκος*) es susceptible de ser definido (*definitus*), especificado, delimitado, clasificado y capaz de establecerse una regla sobre el mismo; mientras el segundo (*ἀπλατής*) no es definible, es incapaz de albergar cualquier tipo de límite, indefinido, imposible de clasificar y renuente de aceptar cualquier tipo de norma o regla sobre el mismo (*indēfīnītus*). Es más, el uso del latín introduce otro espíritu en el texto porque es una lengua más dada a precisar y no a dejar algo indefinido. Este hecho explica que muchos vocablos matemáticos provengan de la misma, ya que se dejan definir e interpretar en un texto sin tanta complejidad como lo son los vocablos provenientes del griego.

Esta estrategia está presente en el pensamiento de Pitágoras que define al número (*ἀριθμός*) cardinal uno 1 (*εἷς*), como aquello que está primero (*πρῶτος*) que todo (*πᾶς*) como infinito (*ἄπειρον*). En un primer acercamiento el número (*ἀριθμός*) representa la definición (*dēfīnītiō*), el *definiendum* es el cardinal uno (*εἷς*) y el *definiens* es que es infinito (*ἄπειρον*), no siendo posible definirlo[312]. Se trata, una vez más, de esa estrategia de situar dentro de una definición o proposición dos instancias: la una es aprehensible y susceptible de ser abordada; mientras la otra no es susceptible de ser definida, es inabordable y representa un reto para el pensamiento. Igualmente, el discurso presenta varios niveles de fundamentación, al decir que el número es el principio (*ἀριθμόν νομίζοντες ἀρχήν*) y que el número procede del uno como también el cielo entero, según queda dicho todo es número (*τόν δ’ ἀριθμόν ἐκ τοῦ ἑνός, ἀριθμούς δέ, καθάπερ εἴρηται, τόν ὅλον οὐρανόν*, 986α 18-21). Este comentario, tomado de la *Metafísica* de Aristóteles en referencia a Pitágoras, habla del cielo (*οὐρανός*) constituido por números (*ἀριθμούς*) que proceden del uno (*ἕνος*, *εἷς*). En Pitágoras como en Euclides se puede identificar un razonamiento que está situado a distintos niveles epistemológico-ontológicos, donde cuando se tiene algo aparentemente

---

[312] Bertrand Russell (1903) en *The Principles of Mathematics*, manifiesta que una definición debe de estar respaldada por una función proposicional, en la que se debe de dar una equivalencia entre lo que implica y lo que está implicado por (p. 15). A su vez, en toda definición matemática existe una relación fija hacia un término fijo, donde el término debe de estar definido por un concepto, cuya denotación no debe de ser ambigua (p. 27). Es importante que toda definición no esté apoyada en el análisis de una idea y los constituyentes de la misma, pero se debe buscar su definibilidad lógica (pp. 111-2). Para esto se la debe poder discernir entre lo definible de los indefinibles (p. 429). En general, una definición debe estar apoyada en una función proposicional que la debe precisar y satisfacer de manera clara (p. 497).

definible, se le agrega otro predicado que tiende a hacerlo no ser definible: cuando se escribe la serie decimal de los números (de 1 a 10) aparentemente es definible, pero cuando se dice que todo el cielo es números, tal situación cae en un nivel de inaprehensibidad e indefinibilidad. Este hecho es perceptible en las mismas definiciones de Euclides: cuando dice que: *un punto es lo que no tiene partes* (*σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*), se tiene que aparentemente un punto (*σημεῖόν*) puede ser definido, se lo puese dibujar en una hoja de papel pero, al mismo tiempo, se tiene tenemos en la definición la problemática del todo (*πᾶς*) y la parte (*μέρος*), la cual no es tan fácil de definir, ni de tratar y menos de ser aprehendida o entendida de manera satisfactoria.

3.2.8. El ángulo como aquel lugar que ata y reúne lo diferente a fin de conciliarlo

Aquí se encuentraun a formulación que procura aquel eslabón o bisagra que permite que dos argumentos de naturaleza diferente puedan encontrar y recrear un objetivo común, complementándose dentro de una jerarquía en algo perdida hoy día, en cuanto se da un orden estricto que hace que uno de los planos determine y guíe al otro: *Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.* (*A plane angle is the inclination to one another of two lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line. ἐπίπεδος δέ γωνία ἐστίν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καί μή ἐπ' εὐθείας κειμένων πρός ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις*). Se tiene la noción de aquello que subyace sobre la tierra, aquel recorrido que se da sobre una superficie (*ἐπί*), barriéndola por completo. Indica esa situación que busca apoyarse sobre algo que le aporta la firmeza, como un entorno de referencia múltiple que se extiende a lo largo de toda una superficie (*ἐπιφάνειά*), haciendo que existan una pluralidad inagotable de puntos (*σημεῖόν*) de referencia. La legitimidad formal presenta toda una variedad de matices, lo veritativo posee muchas lecturas y todas certeras según el entorno de apertura relativo del observador o del actuante. Sobre esta llanura (*πεδίας*), este suelo llano (*πέδον*) que determina una región o distrito, se tiene un ángulo (*γωνία*): aquella esquina, lugar secreto, piedra angular sobre la cual se edificaba una construcción. Esto muestra que se da una importante decisión en el hecho mismo de situar un ángulo (*γωνιάζω*), aquello que es (*ἐστί*) en cuanto demarcador y punto de apoyo de existencia (*εἰμί*). Aquel entorno llano (*πεδίον*), donde (*ᾗ*) en verdad en la medida de lo más posible (*ᾗ*) él (ella *ἥ*, dado que el ángulo en griego es un sustantivo femenino) en relación a esto por lo cual (*ὅς*) en sí mismo (*ἕ*, *οὗ*) dentro, sobre y a lo largo (*ἐν*) de este llano sobre (*ἐπί*) el que descansa (*ἐπίπεδος*): está trabado, atado y ligado (*πεδάω*). Esta es una clara referencia a que todo ángulo (*γωνία*) tiene la potestad de encadenar, detener y forzar (*πεδάω*) lo que está sobre (*ἐπιπεδάω*). Se afronta así eso que traba, que es un lazo y grillo dado para sujetar e inmovilizar (*πέδη*) algo propio de la naturaleza del ángulo (*γωνία*). Se tienen dos (*δύο*) líneas (*γραμμῶν*) que atan (*ἅπτω*) y que permiten unir y agarrar, a fin de ser capaces de aprehender aquello que nos viene y que hemos alcanzado (*ἅπτω*).

El ángulo (*γωνία*)[313], entonces, tiene esa potestad de convocar y reunir, de permitir que uno tome parte en aquello que lo liga a uno consigo mismo, en especial de manera doble (*δίς*) de nuevo o doblemente, mostrando esa labor de reincidencia o reflexividad propio del mismo. Dee esa manera el ángulo (*γωνία*) se sitúa dentro de la cardinalidad del dos (*δύο*) como lo que está en segundo (*δεύτερος*) lugar; está antecedido por la primacía del uno que está dentro o adentro (*εἰς*), en el uno (*εἷς*) como lo primero (*πρῶτος*); el punto (*γραμμή*) como lo que es uno, que se manifiesta solamente una vez y a tiempo (*ἅπαξ*). Es así, como el ángulo (*γωνία*) se presenta como aquello que sujeta y ata para apoderarse y adueñarse (*ἅπτω*) de algo en dos direcciones: del uno hacia el otro, recíproca y mutuamente (*ἀλλήλων*), donde se viene a definir a lo otro, lo que lo acompaña como lo diferente (*ἄλλος*). Una alusión clara a que una de las líneas (*γραμμή*) es la que descansa sobre (*ἐπί*) el suelo (*πεδίας*), sobre esa llanura plana (*πέδον*) propia de la superficie (*ἐπιφάνειά*) como lo primero (*πρῶτος*), mientras la segunda (*δεύτερος*) línea (*γραμμή*) representa lo otro y lo

---

[313] El ángulo está muy unido a la noción de los grados de una circunferencia, la cual se concibió con base en la duración de un año solar, que es aproximadamente 360 días. Un grado (º) es la medida de un angulo plano cuya plena rotación nos da 360º, se define también como 1º = π/180. Un grado también equivale a 60 minutos de arco, y 60 segundos de arco por un minuto de arco. Lo que llevó a que en la antigüedad el calendario persa tenía 360 días, lo que lo hacía muy próximo al sistema numérico sexagesimal. Esto evoca un concepto que está vinculado a la observación y al movimiento tanto de rotación como de translacción de la Tierra alrededor del Sol. Erastóstenes (*Ἐρατοσθένης*) fue un astrónomo y matemático (276-194 a.C) griego que calculó el radio de la Tierra, la distancia de la Tierra a la Luna, la distancia de la Tierra al Sol. Tal como se aprecia en el artículo: *Erastosthenes too big Earth & too tiny Universe*, ed. Dennis Duke (2005). Igualmente, Aristarco de Samos (*Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος*) (310-230 a.C) afirmó que la Tierra gira alrededor del Sol, lo que es conocido como el sistema heliocéntrico.

diverso o diferente (*ἄλλος*), y está sujetada (*ἅπτω*) al punto (*σημεῖόν*) que les aporta unidad y solidez a las dos líneas que constituyen un ángulo.

En consecuencia, esta segunda (*δεύτερος*) línea (*γραμμή*) que (*καί*) no (*μή*) está sobre (*ἐπί*) lo que es recto (*εὐθύς*), debido a que lo que es propio de la rectitud (*εὐθείας*) está más dado en la superficie (*ἐπιφάνειά*), aquello que brilla y permite traer la luz (*φαίνω*) sobre (*ἐπί*) algo llano y plano (*ἐπίπεδος*). Lo anterior es una invitación a que el ángulo (*γωνία*) sea mirado y considerado desde la amplitud de lo que es llano (*πεδίον*), como lo que permite atar y ligar (*πεδάω*) y, en consecuencia, trabar y asegurar (*ἅπτω*) a fin que algo pueda encenderse y en consecuencia ser percibido (*ἅπτω*). De esa manera, lo recto (*εὐθύς*) está situado y yace (*κεῖμαι*) de manera reposada y se asienta sobre la superficie (*ἐπιφάνειά*), en especial, sobre (*ἐπί*) esa línea (*γραμμή*) primera (*πρῶτος*) que es el punto de apoyo principal para definir la existencia (*εἰμί*) del ángulo (*γωνία*). Este ángulo (*γωνία*) recto (*εὐθύς*) es lo que reposa como dormido (*κοιμάω*), como aquella compañera (*ἄκοιτις*) que está junto (*α−*, *alpha copulativum*) a esa cama de matrimonio (*κοίτη*). Ello alude a esa estrecha unión entre las dos líneas (*γραμμή*) de un ángulo (*γωνία*), en especial, a la línea recta (*εὐθύς*) que determina la dirección (*πρός*) sobre la cual se establece la relación y sobre la cual se efectúa la predicación, que permite situar (*κεῖμαι*) aquello que está en medio y en oposición, o sea la otra (*ἄλλος*) línea (*γραμμή*) definiéndola. Esta se levanta sobre aquello que está sobre lo que es plano (*ἐπίπεδος*) permitiendo la construcción del ángulo (*γωνία*). Es dentro de esta doble acción, del uno sobre el otro de manera recíproca (*ἀλλήλων*), que ellas (*τῶν*), estas líneas (*γραμμή*), las cuales están unidas, ligadas e inclinadas (*κλίσις*), descansan al estar situadas en un lugar apropiado para acostarse. La acción que vincula a estas dos líneas (*γραμμῶν*) es la acción de la segunda línea por estar inclinada, apoyada y declinada sobre la primera línea, que es propiamente la que yace sobre (*ἐπί*) esa superficie (*ἐπιφάνειά*) plana (*πεδίον*): lugar (*τόπος*) o *tópos* que ata, liga y encadena (*πεδάω*), siendo lo recto (*εὐθύς*) lo que yace situado en reposo (*κεῖμαι*) como acostado (*κοιμάω*). Esa inclinación (*κλίσις*) está en relación con la línea recta que yace sobre la superficie, que establece la dirección y la norma que gobierna a las dos. Además, se define que las dos líneas no (*οὐ*) pueden de manera simultánea y mutua (*ἀλλήλων*) yacer (*κεῖμαι*) sobre la misma línea (*γραμμή*) recta (*εὐθύς*). Se encuentra así que lo recto involucra una unidad en la formulación y una unicidad de criterio frente a la superficie y al punto.

3.2.9. El ángulo recto como la normativa que reúne y concilia diversos argumentos

En este axioma se está en presencia de una estrategia argumentativa que posibilita reunir variados argumentos de diversa índole en uno solo que los cobije y represente, y esto permite aportar una normativa común que los pueda guiar y conducir. Además, esto les da la oportunidad de construir sus propias reglamentaciones formales, como nociones derivadas de una noción principal que está muy conectada con la cadena deductiva principal que conduce y construye al axioma, vinculándolo dentro de toda la teoría que se está planteando y proponiendo: *Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.* (*And when the lines containing the angle are straight, the angle is called rectilineal. ὅταν δέ αἱ περιέχουσαι τήν γωνίαν γραμμαί εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία*). Obsérvese cómo esta sentencia comienza con una conjunción que se utiliza en relación a una fuerza condicional vinculada a un evento que va a ocurrir (*ὅταν*). En especial, viene la señalización del aspecto temporal que indaga el cuándo (*ὅτε*), frente a una potencialidad o condicionalidad (*ἄν*) que (*ὅς*) es la suya también (*τε*), en cuanto (*δέ*) ellas (αἱ), estas líneas (*γραμμή*), abarcan envolviendo y abrazando (*περιέχω*) aquello que las rodea (*περί*), en cuanto a lo que tienen, poseen, contienen y mantienen (*ἔχω*). Aquel objeto directo, las dos (*δύο*) líneas (*γραμμῶν*), que acusa como el objeto directo que recibe la acción (*ἔχω*): ella (*τήν*, *ἡ*), dado que en griego el ángulo (*γωνία*) es un sustantivo femenino, tal esquina (*γωνία*) que tiene la facultad de situarse como ángulo (*γωνιάζω*) en medio (*ἐπί*) de estas líneas (*γραμμή*) rectas (*εὐθύς*)[314]. Estas se hallan situadas sobre el suelo (*πέδον*), sobre este llano piso (*ἐπίπεδος*) que viene a constituirse como la superficie (*ἐπιφάνειά*), que

[314] En este numeral Euclides está introduciendo el ángulo recto, que es de enorme importancia debido a que es el fundamento de las funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Tal como se aprecia en el capítulo 3 de *Trigonometry* por Robert Moyer y Frank Ayers (2009) que versa sobre las funciones trigonométricas. Lo que sorprende en esta formulación, es que guarda relación con la siguiente donde se introduce el concepto de ortogonalidad. Se podría pensar que el propósito de este axioma es meramente nominativo; no obstante, hemos interpredo la etimología que lo subyace a fin de enriquecer la noción de rectitud (*εὐθύτης*) como fundamento de toda geometría.

las va a albergar y sobre (*ἐπί*) la cual y alrededor de la misma (*περί*) han existido y acontecido (*ὦσιν, εἰμί*).

En medio de esa conducción derecha (*εὐθύνω*) que remite a lo recto (*εὐθύς*), se trata de un conducirse lleno de buen ánimo y tranquilidad de espíritu (*εὐθυμία*), que nos guía a la rectitud y a la justicia (*εὐθύτης*) fruto de lo que es bueno y favorable en todos los sentidos (*εὖ*). Tal hecho está plasmado en aquello que es dibujado y escrito (*γράμμα*), aquella figura recta (*εὐθύγραμμος*) en la cual está escrita y dibujada (*γράφω*) las condiciones mismas que delinean lo recto (*εὐθύς*) como un dibujo (*γραφή*), y que puede ser considerado todo un texto, un escrito, una pintura y documento que está inscrito de manera recta (*εὐθύωρον*): como lo que es debe ser (*εἰμί*) y tener (*ἔχω*) en cuanto aquello digno de ser sostenido, mantenido y guardado. Esta condición de lo recto (*εὐθύς*), de esa rectitud (*εὐθεῖα*), es lo que es llamado, convocado e invocado (*καλέω*) en el (la, *ἡ*) ángulo (*γωνία*). Lo recto (*εὐθύς*) evocado en ese ángulo, esquina y piedra angular (*γωνία*) es lo que viene a constituirse como la norma que ejemplifica las mejores y más altas propiedades que definen a una superficie (*ἐπιφάνειά*). Se convierte de esta manera el ángulo recto líneal (*γωνίαν γραμμαί εὐθεῖαι*) como aquel elemento compuesto primigenio sobre el que se puede construir un conocimiento de tipo geométrico-aritmético, debido a su posibilidad de servir de parámetro, de ley y norma frente a la vecindad que define aportándole su forma más elaborada. Todo lo que se construya a partir del mismo es confiable y digno de fe, por su capacidad para enderezar, enmendar, conducir, examinar y verificar (*εὐθύνω*). Algo que es muy apropiado frente a aquello que está sobre (*ἐπί*) una superficie (*ἐπιφάνειά*) de manera brillante (*φαίνω*), siendo capaz de causar y traer la luz (*φάος*) permitiendo construir la apariencia (*φάσις*) de las formas (*ειδής, εἶδος*) geométricas. Posibilita mostrar y dar a conocer (*φράζω*) aquello que nos remite a nuestra mente, al asiento de nuestras emociones y pensamiento (*φρήν*).

3.2.10. Desde lo recto se construye la geometría como disciplina concreta

En este numeral se presenta lo recto como la noción pivote que permite la construcción de los entes geométricos aprehensibles con denominación de origen: triángulo, rectángulo, etc., conectando los niveles conceptuales más abstractos fundamentados en las nociones primitivas como la de línea. El nivel matematizable ha sido abordado como aquella techné (*τέχνη*) geométrica de carácter práctico operativo, interpretable y expresable en proposiciones formales que pueden dar lugar a ser escritas como ecuaciones geométrico-algebraicas. La adecuada escogencia por parte del autor, Euclides y otros, de los verbos y demás elementos gramaticales, posibilita la creación de oraciones dotadas de una gran riqueza de significados. Sea el caso del verbo *hístemi* (*ἵστημι*): erigir, parar, colocar, levantar, erigir, establecer, poner de pie, suscitar, ordenar, organizar; el cual fue escogido para acompañar la formulación de lo recto (*εὐθύς*): *εὐθεῖαν σταθεῖσα* (la forma sustantivada femenina singular en acusativo de *εὐθύς* unida a un aoristo pasado singular femenino de *ἵστημι*), siendo una de las virtudes de este verbo su posibilidad de recepcionar una gran variedad de proposiciones incorporándolas como prefijos. Lo cual favorece a que la formulación inicial pueda ser expresada de variadas maneras, enriqueciéndola al crear nuevos significados y matizar la axiomatización inicial, aspecto que puede invitar a recrear la misma geometría ampliándola y transformándola: *Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.* (*When a straight line set up on a straight line makes the adjacent angles equal to one another, each of the equal angles is right, and the straight line standing on the other is called a perpendicular to that on which it stands. ὅταν δέ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τάς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστί, καί ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἥν ἐφέστηκεν*).

Esta sentencia abre y expande todo el campo aseverativo donde va a establecerse, siempre y cuando (*ὅταν*) una suerte de forma conjuntiva reafirme su naturaleza de unir las palabras en oraciones y clausuras, permite diversas maneras de relacionarse y correlacionarse entre sí. Este tópico debería ser aprovechado por las matemáticas donde, en general, el uso de la conectivas binarias se podría ver enriquecido por el lenguaje ordinario, en especial, por el griego antiguo. Es propio de la riqueza de la lengua griega mostrar una riqueza estructural semántico-sintáctica realmente notoria. Este vocablo (*ὅταν*) deriva del adverbio (*ὅτε*), que significa cuando; un cuando que permite una actividad variada; y la partícula condicional (*ἄν*) que expresa la condicionalidad y la potencialidad de un evento, en este caso el geométrico. A su vez, el adverbio cuando (*ὅτε*), forma la unión del pronombre (*ὅς*) en su forma masculina y la conjunción (*τε*) que significa ‘y’ como ‘también’. De modo que la sentencia anuncia toda una amalgama de proposiciones ordenadas y jerarquizadas que están en la misma génesis de las formas (*εἶδος*), como un ramillete que se despliega en frente de uno. En consecuencia, se puede apreciar cómo una sola palabra ya sugiere que es posible derivar toda una secuencia ordenada de proposiciones[315] que están en frente de ella: una secuencia jerarquizada de conjunciones y pronombres. La apertura de ese ‘cuando’ (*ὅταν*) es recepcionada a su vez por la partícula (*δέ*), que posee una polisemia de significados entre ellos: pero, más, por otro lado, en cambio, sino, sin embargo; y, también, asimismo, entonces, pues, luego. Se podría afirmar en cierta medida que tal situación se asemeja a la naturaleza dinámica de la conectiva binaria de la implicación: cuyo papel es encausar la dirección de una sentencia y, asimismo, servir de puente para que ella transite a través de esta. Toda esta presentación en la que se introduce (*ὅταν* + *δέ*), anuncia que existe una gran variedad de oraciones de diverso orden para interpretar y aprehender la forma (*εἶδος*) misma de la substantivación de lo recto (*εὐθύς*) como rectitud (*εὐθεῖα*); lo recto (*εὐθύς*) puede adoptar variadas formas, y de una forma recta pueden derivarse otras.

Lo característico de la forma de lo recto (*εὐθύς*) es que está sobre (*ἐπί*) la superficie (*ἐπιφάνειά*); esta afirmación tan sencilla posee una inusitada profundidad, en cuanto la manera moderna en que se mira lo recto está descontextualizada frente al hecho que yace acostada o sobre algo llano (*πεδίον*). La instancia fundacional que construye lo recto (*εὐθύς*) como algo acostado que yace tendido sobre una superficie plana, y no como algo erecto ajeno a la misma superficie como si no necesitara de la misma. Se percibe cómo de esta manera las formulaciones modernas han perdido su conexión fundacional, lo que hace que al investigar la génesis (*γένεσις*) de las nociones primitivas inscritas en estos axiomas, se pueda ser capaz de aportar nuevas soluciones a las preguntas y requerimientos modernos,

[315] Este uso se aprecia en el uso del cuantificador universal $\forall$, sea p(x) una función proposicional sobre un conjunto A: $(\forall x \in A)p(x)$, también se puede simbolizar como $\forall_x\ p(x)$, $\forall x,\ p(x)$. De igual manera simbolizamos el cuantificador existencial como: $(\exists x \in A)p(x)$, $\exists_x\ p(x)$, $\exists x p(x)$. Se tiene el uso de la conjunción $\wedge$ dentro de una cadena inferencial: $\wedge_{a \in A}\ p(a) \equiv \forall_{a \in A}\ p(a)$ y la conectiva binaria de la disyunción $\vee_{a \in A}\ p(a) \equiv \exists_{a \in A}\ p(a)$. Tema tratado en: *Set Theory and Related Topics* por Seymour Lipschutz (chapter 15, pág 208-211). Si se tienen funciones proposicionales con más de una variable, sea los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y una función proposicional de n variables sobre $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ es una expresión denotada por $p(x_1, \ldots, x_n)$, es verdadera o falsa para toda n-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

los cuales muestran una gran sencillez frente a un origen muy amalgamado a nivel conceptual que se ha perdido. En muchos casos, los entes matemáticos modernos se han vuelto tan abstractos que su inteligibilidad es demasiado ardua ya que no es clara la procedencia que los vio nacer.

Lo recto (*εὐθύς*) está situado sobre (*ἐπί*) lo plano (*πεδίον*) que es la superficie (*ἐπιφάνειά*)[316]; esta, a su vez, vuelve a generar e invita a que se dé un proceso reflexivo, en cuento lo plano tiende a volcarse o a incidir sobre él mismo: lo plano se vuelca sobre lo plano, a su vez lo plano (*πεδίον*) contiene lo recto (*εὐθύς*). Lo cual hace que lo recto se vuelque sobre lo recto (*εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν*); tal hecho vendría a ser una proposición derivada o dependiente de la primera, que bien podría ser: lo que está situado sobre el suelo se vuelca sobre lo plano (*ἐπίπεδος ἐπί πεδίον*). Luego está el verbo *hístemi* (*ἵστημι*) que posee una amalgama de significados y la virtud de poder recepcionar muchos prefijos, en especial, toda una variedad de preposiciones como *pará* (*παρά*), *ek* (*ἐκ*), *epí* (*ἐπί*), *avá* (*ἀνά*) presentes en los verbos – *παρίστημι, ἐξίστημι, ἐφίστημι, ἀνίστημι,* entre otros – para citar algunos. Una de las características del griego antiguo es la tenencia de variados vocablos para designar una misma preposición, sea el caso la preposición 'sobre' puede ser escrita como *epí* o *avá* y la preposición 'de' puede ser *ek* o *παρά*. Esto muestra que este verbo *hístemi* (*ἵστημι*), que significa parar, poner, colocar, poner de pie, alzar, levantar, establecer, erigir son acciones propias de aquella predicación que se puede hacer de lo recto (*εὐθύς*) y las cuales están contendidas en la rectitud (*εὐθεῖα*): aquella conducción derecha (*εὐθύνω*) propia de la rectitud en cuanto la norma justa que la califica (*εὐθύτης*). Ya se anotó que existe una idea como noción y modelo (*ἰδέα*) de la forma (*εἶδος*) que debe seguir lo recto en cuanto recto (*εὐθύς*), hecho que permite recrear diversas modelaciones de una misma oración. Ya se ha afirmado que estas postulaciones de Euclides se asemejan a

[316] El fundamento de toda superficie se plantea desde esta concepción euclideana, como aquel conjunto de puntos en un espacio bidimensional, donde cada punto de una superficie puede ser aproximado por el plano tangente a la superficie a dicho punto. A partir de tal concepción clásica se concibe el espacio topológico X tipo Hausdorff con una vecindad abierta que permite un homeomorfismo φ, dando lugar a la pareja (X, φ) llamada carta local de coordenadas de un punto. Así que, todo espacio métrico es Hausdorff, por el denominado axioma de Hausdorff: cualesquier punto disyunto $x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists\, U_x, V_y$: $U_x \cap V_y = \emptyset$. Ver *Elementary Topology*, Virov, Ivanov (2008, pág. 81).

metaproposiciones de un metalenguaje susceptibles de recrear diversos modelos dado que pueden ser interpretadas y en consecuencia leídas de diversas maneras.

Frente a la gran capacidad de recepcionar variadas preposiciones por parte del verbo *hístemi* (*ἵστημι*), que es el verbo que califica la actividad propia de lo que rodea lo recto (*εὐθύς*), dirigido a toda una pluralidad (*τάς*, pronombre femenino acusativo plural de *ὁ*) ordenada (*ἐφεξῆς*) de ángulos (*γωνίας*) situados entre dos o más líneas (*γραμμῶν*), ya que para existir un ángulo (*γωνία*) mínimo debe de existir dos (*δύο*) líneas a lo sumo. La noción de orden viene sugerida por el vocablo (*ἐφεξῆς*), que indica una secuencia de una línea tras otra en línea recta, también se asemeja a (*ἑξῆς*) que significa en serie y en orden, uno en seguida o a continuación del otro. Este vocablo *éphexis* (*ἐφεξῆς*) está relacionado con el verbo (*ἐπέχω*), que es la unión de la preposición sobre, *epí* (*ἐπί*), y el verbo tener, *ékho* (*ἔχω*), todo lo encaminado a enfatizar aquello que se dirige hacia, se encamina, recorre, sigue, se pega, verifica (*ἐπέχω*): las líneas rectas que se unen para formar ángulos, tienen esa propiedad de dirigirse hacia un destino o poseer una dirección, que es mantenida y sostenida sobre y a lo largo de una superficie. Ese hecho está recreado en el sustantivo (*ἔφεξις*) que evoca esa acción de lanzar o lanzamiento que está contenida en la dirección que mantiene y asumen las líneas (*γραμμή*) rectas (*εὐθύς*) que constituyen un ángulo (*γωνία*), constituidas y establecidas sobre lo plano (*πεδίον*) y llano de una superficie (*ἐπιφάνειά*) y, a su vez, su naturaleza de mantener cerrado (*ἐπώχατο*) lo que está en medio de las líneas o del ángulo que se forma. En ello se está afirmando aquella tendencia de los ángulos formados por líneas rectas de permanecer, de servir de pilar o soporte; de establecer y determinar una posición, condición y estado (*στάσις*), como aquella piedra recta o pilar o columna que determina y establece una frontera (*στήλη*): el ángulo formado por líneas rectas se convierte de esta manera en la columna, el pilar y el soporte (*στῦλος*) fundacional de la geometría.

3.2.10.1. Lo recto se fundamenta en la rectitud que el ente geométrico aprehende

Una vez es colocado (*ἵστημι*) ese pilar (*στῦλος*) recto (*εὐθύς*) como una línea (*γραμμή*) que sostiene (*ἔχω*) aquello que está sobre (*ἐπί*), ordena (*ἐφεξῆς*) las líneas (*γραμμή*) en relación al ángulo (*γωνία*) que las dirige (*ἐπέχω*), en especial, hacia aquello que las hace (*ποιέω*) iguales (*ἴσος*) entre sí (*ἀλλήλων*). Se ve que aquello que permite establecer una equivalencia (*ἴσος*) está fundamentado en aquella propiedad de lo recto (*εὐθύς*) como ángulo (*γωνία*), que lo hace igual y balanceado (*ἰσάζω*). Se aprecia así cómo la cualidad de ser recto (*εὐθύς*) –refleja aquella rectitud (*εὐθεῖα*) que posibilita conocer y a la vez ser diestros en saber (*οἶδα*) cómo poder situar una línea (*γραμμή*) junto a la otra de manera similar (*ἀλλοῖος*)– en concordancia con el ángulo (*γωνία*) que se desea formar. El isomorfismo que se en la línea (*γραμμή*) normada como recta (*εὐθύς*), es la instancia que permite situar un ángulo (*γωνιάζω*) en cuanto recto (*εὐθύς*)[317]. El predicado de lo recto (*εὐθεῖα*) como ángulo (*γωνία*) determina al término línea (*γραμμή*), permitiendo establecer una igualdad o equivalencia entre dos predicados cuando estos poseen las mismas características. Este recurso lleva a construir una variedad de equivalencias, debido a que la predicación acerca de lo que es recto (*εὐθύς*) está abierta a una jerarquía que puede volverse más compleja cuando se agrega la condición de ángulo (*γωνία*) a la rectitud entre dos líneas (*γραμμή*). Se puede tener variados modelos para abordar tal problemática, en concordancia a que existen líneas que podrían ser más rectas que otras (posibilitando la creación de otras geometrías), más si están normadas alrededor de un ángulo siempre será recto. Esto es fácil de ver y percibir (*εἴδομαι*), lo que remite a la propiedad que hace que algo sea lo mismo (*αὐτός*) con algo distinto u otro (*ἄλλος*). Este hecho ha derivado hoy día en la norma de un vector en cuanto establece que la longitud (*μῆκος*) del mismo prevalece sobre lo ancho (*πλατύς*). Este asunto está mencionado en la segunda definición de Euclides, donde *la línea es un largo sin anchura* (*ἀπλατής*); se vislumbra así cómo él anticipó muchas de las propiedades que se dan hoy día en el álgebra lineal. Al final, el peso de la argumentación recae sobre cómo hacer (*ποιέω*) que lo uno con lo otro (*ἀλλήλων*) sean equivalentes (*ἴσος*) entre sí, y en especial, en averiguar la naturaleza que posibilita tal hecho (*ποῖος*).

[317] Cabe destacar cómo en la norma o el largo de un vector tan solo se toma en consideración lo largo, en concordancia con la definición euclidiana de línea. La norma se simboliza $\|u\| = \sqrt{}u \cdot u = \sqrt{}u_1{}^2 + u_2{}^2 + \ldots + u_n{}^2$, teniendo en cuenta que $u \cdot u \geq 0$, $u \neq 0$, $\|0\| = 0$. Se representa como una línea que apunta a un punto p(a, b), donde cada cateto le corresponde un largo $|u| = \sqrt{}a^2 + b^2$. Se tiene en cuenta que $u \cdot u$ es el producto punto o producto escalar o producto interno, sea $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, entonces $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$. Se dice que los vectores son ortogonales o perpendiculares si su producto punto es cero: $v \cdot v = 0$. Tema amenamente expuesto en *Linear Algebra* de Seymour Lipschutz (1991, págs.43-44).

La cita prosigue mencionando lo que es recto (*ὀρθός*), vocablo que tiene varias aserciones, entre ellas: lo que está derecho de pie, lo que es real y verdadero, justo y sincero, correcto y exacto. En ese sentido, el ángulo (*γωνία*) recto (*εὐθύς*) es aquella instancia que permite levantar, construir, rectificar, enderezar y volver verdadero (*ὀρθόω*) lo que está afectado por el mismo. Se aprecia la importancia de procurar una instancia normativa desde la cual se pueda afectar lo que la rodea y, además, transformarla en una ley autoerigida; tal es la naturaleza del ángulo recto que de alguna manera pareciera que le estuviera asociada una función rectificadora f (*ὀρθόω*): que lo que le llega lo transforma en un ángulo recto, que es el epítome (*ἐπιτομή*) de la perfección geométrica. No en vano, epítome proviene de *epitémno* (*ἐπιτέμνω*) que significa cortar sobre una superficie, unión de la preposición sobre, *epí* (*ἐπί*) y *témno* (*τέμνω*) cortar. Algo que está muy en concordancia con las actividades que acontecen y suceden sobre la superficie (*ἐπιφάνειά*), que como se ha visto es la base sobre la cual se construyen y elaboran las ideas (*ἰδέας*) y las formas (*εἶδος*) geométricas. La condición de ser recto (*ὀρθόω*) involucra una operación binaria entre las dos líneas (*γραμμή*) que vienen a constituirse como un ángulo (*γωνία*), en este caso un ángulo recto (*γωνίαν γραμμαί εὐθεῖαι*); tal situación puede verse como una transformación donde f es el operador que endereza (*ὀρθόω*), f(*ὀ*): $\gamma \times \gamma \rightarrow \gamma^{\varepsilon}$. Endereza cada una de las dos (*ἑκάτερος*) de uno y otro lado (*ἑκάτερωθεν*), no obstante existe un orden, dado que existe una línea principal que está ya ordenada a lo largo de la superficie (*ἐπιφάνειά*), la cual es la instancia que determina la norma sobre la que se va a levantar el ángulo recto – obedece a una lógica algo distinta a la nuestra, donde la importancia actual la tiene más lo que se erige que la base sobre la que descansa –.

Recuérdese que un ángulo (*γωνία*) recto (*εὐθύς*) está formado por las (*τῶν, ὁ*) líneas (*γραμμή*) y cada una de las dos (*ἑκάτερος*) es (*ἐστί*) similar (*ἴσος*) entre sí; tal ángulo recto tiene la propiedad de hacer similar o equivalente (*ἰσάζω*) a ambas líneas en relación al ángulo (*γωνία*) que está situando (*γωνιάζω*). No se debe olvidar que la actividad de levantar (*ὀρθόω*) es propia de aquello que es derecho (*ὀρθός*). Este es un concepto que está muy en concordancia con la noción pitagórica en la que el número uno es infinito; se trata de la norma uniforme o suprema que se da en funciones acotadas en los reales $\mathbb{R}$ y en los complejos $\mathbb{C}$ definidas sobre un espacio métrico X. Donde la norma uniforme está dada por

$||f|| = ||f||_{\infty,\ X} = \sup\ \{|f|: x \in X\}$, es la norma suprema.[318] Se entiende que existe una secuencia de funciones continuas y acotadas $\{f_n\}$, con dominio en X que es compacto. Tales funciones convergen a f con respecto a la métrica $\mathbb{C}$ (X) si y solo si $f_n \rightarrow f$ converge uniformemente en X, luego f es continuo en X. Sea x un vector tal que $x = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$, luego la norma $||x||_\infty = \max (|x_1|,\ldots, |x_n|) = 1$.

3.2.10.2. La transformación de lo recto como el cateto de una figura geométrica

La delicadeza de la reflexión filosófica orientada hacia la geometría (*γεωμετρία*) adquiere un éxtasis bastante significativo, cuando lo recto (*εὐθύς*), como una variante de lo que es la justa rectitud (*εὐθύτης*) aspira a una ejemplificación concreta dentro de la disciplina y el arte (*τέχνη*) conocido como geometría. Este hecho tan especial hace ver cómo los griegos tenían vocablos propios para cada uno de los niveles de conceptualización propios del desarrollo de una teoría: lo recto (*εὐθύς*), es un vocablo que tiene la propiedad de recorrer los distintos niveles de una formulación geométrica y tiene un uso bastante explícito a nivel de lo que se podría denominar como especulativo. Antes de plantear la existencia de los entes geométricos tanto simples como compuestos, los griegos aquí representados por el propio Euclides, abordaban su disciplina o ciencia desde lo conceptual (*ἰδέα*) como aquellas formas (*εἶδος*) primigenias fundamentales desde las cuales construían su teoría: el punto (*σημεῖόν*), la línea (*γραμμή*), la superficie (*ἐπιφάνειά*), para citar algunas. Estas representan un nivel de discurso fundamental muy abstracto y es el lugar donde se las trata como conceptos (*ἰδέα*, *εἶδος*) propios del discurso especulativo. No obstante, estos entes geométricos primigenios simples evolucionan hacia los entes conocidos como las figuras geométricas compuestas, como triángulos o rectángulos u otros, en los cuales se aprecia que se da un acto nominativo nuevo en que lo recto (*εὐθύς*) se transforma en 'lo recto como cateto' (*κάθετος*). Lo recto se constituye en una noción primitiva que subyace a

---

[318] Se recuerda que los subconjuntos cerrados de $\mathbb{C}$ (X) son llamados cerrados uniformemente, la clausura de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ (X) se llama la clausura uniforme. Tenemos igualmente que el $\lim_{p \to \infty} ||f|| = ||f||_\infty$, donde $||f||_p = (\int_D |f|p\ du)^{1/p}$, D es el dominio de f, la integral contabiliza las sumas si D es un conjunto de puntos discretos o aislados. La función binaria $d(f, g) = ||f - g||_\infty$ es una métrica sobre un espacio X para todas las funciones acotadas, se tiene que una secuencia $\{f_n\}$, con n=1, 2, …converge uniformemente hacia f si y solo si $\lim_{n \to \infty} ||f_n - f|| = 0$. Tema tratado en *Principles of Mathematical Analysis* por Walter Rudin (1964, pág. 150).

las mismas figuras compuestas, las recorre en su devenir cuando estas se transforman en otras. Lo que posibilita apreciar cómo los conceptos nocionales fundamentales siguen estando presentes y son tratados a lo largo de todo el desarrollo de la disciplina como saber formal. Sin embargo, la presencia del vocablo cateto (*κάθετος*) involucra que se está frente a un nuevo nivel del discurso geométrico, aquel donde se va a ir construyendo las figuras compuestas propias de la geometría. Esto permitirá unos usos bien precisos que se expresan en aquellas proposiciones nocionales fundamentales, como aquella que dice: que la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180° grados. Con lo cual, la geometría asimismo como la aritmética y, por ende, las matemáticas, poseen varios niveles de discurso, uno fundamental que nos ha llevado hoy día a abordar la geometría por medio de la topología, que permite estudiar de cerca las propiedades de los entes y las nociones fundamentales más cercano a una filosofía de las matemáticas; y, otro más operativo, afín al interprete habidoso, aquel plasmado en un lenguaje propio de la disciplina, que permite construir y expandir tal arte como ciencia simbólico-formal.

En consecuencia (*καί*), donde (*ᾗ*) este, el cual (*ὅς*) está situado sobre (*ἐφίστημι*) lo que es recto (*εὐθύς*): aquello que está colocado (*ἵστημι*) sobre (*ἐπί*) lo que es recto (*εὐθεῖα*), es el cateto (*κάθετος*), –tal noción de orden se ha perdido hoy día donde se toma como cualquiera de los lados menores de un triángulo rectángulo. En concordancia, el cateto (*κάθετος*) quiere decir lo que es perpendicular y vertical; se refiere también a que es ortogonal, vocablo que proviene del latín (*orthogonalis*) y al ángulo recto como (*orthogonius*). Sin embargo, tal condición de perpendicularidad del cateto alude a aquello que está sentado, que permanece inmóvil, que se ha establecido y está situado (*κάθημαι*); también evoca aquella condición de estar parado frente a un tribunal o a una asamblea. Igualmente, evoca a sentar, convocar, reunir, establecer, apostar y residir (*κάθίζω*); con lo cual el cateto (*κάθετος*), es algo que genera estabilidad, permanencia, en cuanto tiene la facultad de establecer y residenciar aquello que toma. Prosigue, así se ha llamado (*καλέω*) aquello que existe (*εἰμί*) sobre (*ἐπί*) aquello (*ὅς*) que está situado (*ἐφίστημι*); cabe destacar cómo se repite al final la preposición sobre (*ἐπί*), sola y acompañada con el verbo (*ἐφίστημι*), que es la unión de sobre (*ἐπί*) y colocado (*ἵστημι*). Aquí es apreciable una doble aserción de la condición de ortogonalidad o la propiedad de perpendicularidad propia del cateto (*κάθετος*), la que involucra una doble incidencia de algo que está sobre (*ἐπί*) una superficie (*ἐπιφάνειά*) plana (*πεδίον*), levantada (*ὀρθόω*) de manera mutua (*ἑκάτερος*)[319]. De esta manera, la condición de perpendicularidad, es la propiedad de situar en relación a la superficie unas líneas rectas cuyo ángulo permite construir la perpendicular como un cateto, siendo una norma y un parámetro que define a la figura o a las formas geométricas que se van a derivar del mismo, como construcciones dependientes o derivadas a partir de tal criterio.

3.2.11. La noción de lo recto se diversifica cuando se matiza como pareja ordenada

El aporte del presente axioma está muy vinculado al anterior y permite resaltar cómo el ángulo (*γωνία*) posee su propio vocablo acerca de lo que es recto (*ὀρθός*), tal como para el cateto (*κάθετος*) lo recto es (*εὐθύς*). Sin embargo, el cateto representa un avance mayor a nivel geométrico en relación con las figuras o entes compuestos, ya que es la rectitud como perpendicularidad: 'la rectitud del cateto' (*εὐθεῖα κάθετος*) que viene a coexistir con 'la rectitud del ángulo' (*γωνία ὀρθῆς*). Es fundamental tener en cuenta que la noción de cateto (*κάθετος*) se da frente a la existencia de dos líneas rectas (*ὀρθή ἑκατέρα*) unidas por dos ángulos iguales (*ἴσων γωνιῶν*). De manera que la noción de cateto (*κάθετος*) acude a aquella rectitud (*ὀρθότης*) que se da en relación a su unión conceptual con el ángulo (*γωνία*) en especial con el recto (*εὐθεῖα γωνία*). Se tiene en este nivel la destacada mención de la noción de pareja ordenada: tal como el cateto (*κάθετος*) es a lo recto (*ὀρθός*), lo son los ángulos iguales (*ἴσος γωνία*) a lo recto (*εὐθείας*)[320]. De esta manera, la noción de línea

[319] Es importante que esta situación conduzca a la noción de función f, donde el cateto (*κάθετος*) es el resultado de una reincidencia verificante y veritativa de una serie de propiedades que se han de cumplir antes que pueda ser llamado de tal forma: f (*κάθίζω*): *κάθετος* → *κάθετος*; f(ķ): κ → κ. Se puede apreciar en *Introduction to Mathematical Philosophy* de Bertrand Russell (1919), cómo la oración *cada uno de los ángulos iguales es recto* (*ὀρθή ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστί*) puede ser considerada una función proposicional en cuanto la variable es libre o aparente; a su vez, el vocablo cada uno permite la introducción del cuantificador universal: (x).φx, donde se dice 'para todo x siempre φx es verdadero'. Esta proposición es la unión de dos: *ὀρθή ἑκατέρα* y *ἴσων γωνιῶν*, se tienen dos verbos que asumen el papel de función: levantar (*ὀρθόω*) y estar situando (*γωνιάζω*), de modo que la expresión se transformaría en: para todo ángulo el lado levantado es recto implica que está situado en ángulos iguales, φx implica ψx es siempre verdadero (p.88-93).

[320] En esta oración se puede apreciar un avance a nivel de la estructura subyacente a la formulación formal, la cual antes se abordaba al ente geométrico a nivel individual, en cambio para la existencia del cateto se tiene que dar la presencia del dos, en cuanto son dos ángulos iguales (de 90° cada uno) situados a ambos lados lo que permite levantar la perpendicularidad que viene a definir al cateto en este contexto inicial. Tal propiedad

(*γραμμή*) ha evolucionado hacia la línea recta recta (*εὐθεῖα γραμμή*) y luego hacia la ortogonalidad del cateto y, al mismo tiempo, se han transformado y ampliado sus significados como aquel ángulo recto (*γωνίαν γραμμαί εὐθεῖαι*) propio de las figuras geométricas. No hay que olvidar que se está construyendo una teoría geométrica que se fundamenta en la noción de pareja como (*ἑκατέρος*). Este hecho permitirá definir las funciones trigonométricas en el futuro alrededor del triángulo rectángulo, cuya ampliada formulación conceptual dará lugar al famoso teorema de Pitágoras. Nótese que una de las más importantes parejas trigométricas es el seno, que es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa. Véanse las variantes que se dan alrededor del ángulo recto cuando este se rompe para volverse más grande: *un ángulo obtuso es el mayor que un recto* (*An obtuse angle is an angle greater than a right angle. ἀμβλεῖα γωνία ἐστίν ἡ μείζων ὀρθῆς*).

El romper la perfecta simetría del ángulo recto conduce a un comentario que, de entrada, aborda una situación irregular: se está frente a aquello que está embotado, débil, flaco y flojo (*ἀμβλύς*), que va a ser el nombre con que se conoce a lo que es obtuso, en especial al ángulo obtuso (*ἀμβλεῖα γωνία*). Esto recrea aquella situación que estando arriba y sobre (*ἄμ = ἀνά*) busca liberarse y redimirse de una pérdida (*λύσις*). Se trata de un ángulo (*γωνία*), aquella esquina y piedra angular que permite subir, y que es de fácil acceso (*ἄμβατος*). Tiene la ventaja que se deja ver, dirige nuestra vista a fin de orientarnos para estar enterados (*βλέπω*). Tal ángulo y esquina angular (*γωνία*) es (*ἐστί*) y existe (*εἰμί*) de tal manera (*ἡ*), que ella (*ἥ*) es más grande (*μεγάλη*) que aquello que es recto (*ὀρθός*). Se está frente a la noción de un ángulo (*γωνία*) obtuso o embotado o débil, y tal hecho parece indicar que se ha apartado del ángulo (*γωνία*) recto (*ὀρθός*). El estar arriba (*ἄμ = ἀνά*) permite desatarnos, liberarnos y redimirnos (*λύω*), es más viable cuando se es derecho, seguro y próspero (*ὀρθός*). El situar un ángulo (*γωνιάζω*) que prevalece sobre el criterio de estar encima o sobre (*ἄμ = ἀνὰ*). Tal ángulo obtuso (*ἀμβλεῖα γωνία*) remite a lo que es grande (*μέγας*), comentario alusivo a la grandeza, tamaño, estatura, dimensión, importancia

---

de los ángulos iguales situados a ambos lados de una perpendicualar es llamada hoy día congruencia entre ángulos y lados, propiedad que se aprecia en especial en el triángulo equilátero: en el segmento de recta $\overline{AC}$ puede ser dividido en dos subsegmentos $\overline{AF}$ y $\overline{FC}$ tal que F representa aquel punto sobre el cual se levanta aquel segmento de línea que representa al cateto $\overline{FB}$ perpendicular a $\overline{AF} \perp \overline{FC}$, donde B es el punto que delimita al segmento de línea perpendicular. Ver *Geometry* por Bannett Rich (2009, p. 34).

y fuerza (*μέγεθος*), de un ángulo que es más grande que el ángulo recto. Existe un interesante juego de palabras en la construcción semántica de este axioma que se asemeja a una definición, entre los vocablos situados al comienzo y al final de la formulación; al inicio está la palabra que alude al ángulo obtuso como aquello que embota (*ἀμβλύς*) y, al final, está la palabra que hace referencia al estar frente a un ángulo que es más grande (*μέγας*) que uno recto. Si se interpreta la citada oración en el lenguaje ordinario, se podría afirmar: aunque sea más grande no obstante es tonto. Lo que engrandece (*μεγαλύνω*) es más propio del ángulo recto, que es el que sirve de fundamento a todas las más importantes teorías geométricas. Lo recto, derecho y vertical (*ὄρθιος*) nos invita siempre a levantarnos a fin de prosperar (*ὀρθοω*) en relación con aquello que está arriba. Lo que es derecho es sinónimo de verdadero (*ὀρθότης*), y permite tomar y asir (*λαμβάνω*) lo que está arriba (*ἀνά*). Tomar en nuestras propias manos lo que está arriba (*ἀναλαμβάνω*) en corcodancia con una dimensión superior que nos rige: un nuevo nivel argumentativo regentado por una teoría superior.

3.2.12. Los entes geométricos poseen un movimiento que tiene como eje al ángulo

Se está en presencia de aquel ángulo que habita dentro de un ángulo recto; al ser menor, está subordinado al mismo, y da la impresión que entre más pequeño sea un ángulo mayor rapidez posee y que, entre más grande sea el ángulo, más lento será. El menor tamaño de un ángulo agudo (*ὀξεῖα γωνία*) es cuando los catetos terminan siendo iguales y transformándose en una línea recta, que por ende está constituida por puntos. Lo que podría sugerir que la dinámica que mueve todo proviene de lo más pequeño, del nivel atómico del punto. Este axioma revela el movimiento que subyace a los ángulos; no son instancias inamovibles sino representaciones dinámicas arquetípicas de la realidad: *un ángulo agudo es el menor que un recto* (*An acute angle is an angle less than a right angle. ὀξεῖα δέ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς*). Así, se encuentran los calificativos de un ángulo agudo que son: ser penetrante, picante, puntiagudo, cortante (*ὀξύς*), algo propio de quienes son listos, inteligentes, rápidos, agudos (*ὀξεῖα*); completamente diferente en relación al pesado y lerdo ángulo obtuso (*ἀμβλεῖα γωνία*). La noción de un ángulo (*γωνία*) agudo (*ὀξύς*), aquel que se caracteriza por su agudeza, intensidad, fuerza, acidez y penetración (*ὀξύτης*), es algo propio de quienes son rápidos, listos y agudos. También es una evocación de aquel acento agudo gramatical, como también a la voz aguda y sonora (*ὀξύτονος*); asimismo, es sinónimo de alguien rápido, fuerte y agudo (*ὀξέα*), alguien capaz de aguzar, amargar, exasperar y provocar (*ὀξύνω*). La propiedad de este ángulo agudo (*ὀξεῖα γωνία*) es entonces (*δέ*) la de situar donde (*ᾗ*) él (*ὁ, ἡ*) en lo suyo (*ὅς,* ἥ) tiene la propiedad de hacerse más pequeño en cuanto disminuirse y empequeñerse (*ἐλάσσων*). Este hecho representa a un grado comparativo de aquello que es pequeño, menos e insignificante (*ἐλαχύς*), lo que es pequeño y corto, micro (*μικρός*), como también breve y poco, *brakhús* (*βραχύς*). Tal situación de hacerse pequeño o aminorarse (*ἐλάσσων*) involucra una acción: una puesta en movimiento que conduce e impulsa sea un evento, un carro, un arma, un caballo, un barco o cualquier otro tipo de objeto por medio del cual nos estemos desplazando (*ἐλαύνω*). Sin embargo, la conducción puede producir un maltrato al golpear, atormentar u oprimir al llevárselo por delante (*ἐλαστρέω*), algo que todo conductor o auriga (*ἐλατήρ*) puede hacer. Esa acción de menoscabación y empequecimiento (*ἐλάσσων*) va encaminada hacia aquello más pequeño (*ἐλαχύς*), tal como el ángulo agudo (*ὀξεῖα γωνία*) es más pequeño (*μικρός*) que un ángulo recto (*ὀρθῆς γωνία*). Una vez más lo que es agudo, listo y penetrante (*ὀξύς*) debe someterse frente a la normatividad de lo que es más que es lo que es recto, derecho, correcto y seguro (*ὀρθός*), cuya norma está por encima (*ἀνά*) en un camino ascendente que se puede escalar y es accesible en relación con lo que permanece recto (*ὀρθός*). Se tiene así la condición de perpendicularidad[321] propia de aquello que está situado (*ἐφίστημι*) sobre (*ἐπί*) una superficie (*ἐπιφάνειά*) plana (*πεδίον*) brindando estabilidad (*ἵστημι*).

3.2.13. El límite como frontera que divide y transforma cuando es atravesado

Ahora estamos frente a un axioma fundamental en el estudio de las matemáticas, que es la noción de límite, en especial del límite de una función. Siempre, a lo largo de los siglos, tanto filósofos como matemáticos se han preguntado acerca de aquellas fronteras que traen cambios profundos, que permiten definir los linderos que son la base sobre la cual

[321] Esta condición de perpendicularidad ⊥ sobre una superficie anuncia el axioma de las paralelas, tenemos dos rectas que son perpendiculares entre sí sobre una superficie: las líneas son paralelas si ellas son perpendicualares a la misma línea, $l_1 \parallel l_2$ si son perpendiculares ⊥ a l_3, en *Geometry* por B. Rich (2009, p. 50).

se van a construir la fundamentación de variadas teorías de distinta índole: *un límite es aquello que es extremo de algo* (*A boundary is that which is an extremity of anything. ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας*). Estamos frente a aquella frontera (*ὅρος*), aquel límite muchas veces señalado con un mojón a fin de indicar una barrera, la cual es (*ἐστί*) en cuanto existe (*εἰμί*). También nos relaciona con aquella regla, término, fin y meta a la cual nos dirigimos, siendo algo que indica una acción o un movimiento constante y que de alguna manera espera completarse. La noción de frontera o límite nos relaciona con aquello que está situado para dividir (*ὁρίζω*), separar, delimitar, señalar una huella como un lindero que ordena y determina a fin de definir algo. La noción de límite va unida a la noción de frontera, algo que no se puede traspasar, que restringe y de alguna manera divide aquello que está antes y lo que está después, o que ha alcanzado aquel umbral: que supone, trae y produce unas condiciones nuevas, alterando y modificando lo que está en él mismo. Una vez más, se señala al sujeto que está padeciendo está situación de límite (*ὅρος*): el (*ὁ*) cual, el siguiente, este (*ὅς*) le es propio o le pertenece (forma genitiva) a quien, aquello, aquellos de la clase (*τίς*). Se resalta su papel, tanto como pronombre y adjetivo interrogativo, que indaga acerca: ¿De qué clase? ¿De qué naturaleza? ¿Cuáles? (*ποῖος*). El carácter interrogativo lo puede cumplir cualquiera o cualquier cosa de manera precisa (*τις*), esto otorga un amplio campo para maniobrar asimismo como para situar la viabilidad y variabilidad de aquello que está situado en ese umbral dan determinante frente a todo cambio de estado. Una vez más, ese ente animado o inanimado es (*ἐστί*) y existe (*εἰμί*) como un límite, un final y una frontera (*πέρας*): que penetra y atraviesa (*πείρω*), siendo capaz de pasar a través de algo y cruzarlo conservando una dirección derecha y recta (*περάω*). Es aquello que está al otro lado, como opuesto y en contra (*πέραν*), situado en aquel lado propio del allá, en la región que está en frente (*περαῖος*). La propia noción de límite[322] o frontera (*πέρας*) involucra aquella acción que transporta, cruza y pasa

[322] Tenemos la noción de límite de una función: $\lim_{x \to a} f(x) = A$ si y solo si, para cualquier número positivo ε aunque pequeño, existe un número positivo δ, tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica que $|f(x) - A| < \varepsilon$. Hemos de señalar que existen límite por la derecha y por la izquierda, y que no se implican y son independientes entre si: $\lim_{x \to a^-} f(x) = A$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = A$. A su vez, el límite puede conducirnos al infinito: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, tanto por la derecha $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ o por la izquierda $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$. También hablamos del límite de una secuencia, en este caso convergente, $\lim_{n \to +\infty} 1/n = 0$, en el caso divergente $\lim_{n \to +\infty} \langle 2n \rangle \neq L$, $L \in$

atravesando (*περαίοω*) hasta que logra llegar a su fin, a su término, a su lindero o frontera (*πέρας*). Existe un propósito que debe de ser cumplido, realizado, concluido, llevado a término (*περαίνω*) mientras se logra atravesar (*περάω*) este paso, este trayecto o tránsito (*πέρασις*) que está en el lado opuesto (*πέρατος*), no obstante cumple con la condición que puede ser atravesado (*περατός*).

Notamos el uso tanto al comienzo como al final de dos vocablos que significan frontera o límite, el primero es *óros* (*ὅρος*) y el segundo es *péras* (*πέρας*), el uno más relacionado con el verbo *horízo* (*ὁρίζω*) que es dividir, separar, delimitar; y el segundo está vinculado al verbo *peíro* (*πείρω*) que es atravesar, perforar, recorrer a lo largo. Es como si ocurriera, que el ente que se propone encaminarse o dirigirse hacia una frontera o límite (*ὅρος*, *πέρας*) estuviera sujeto a padecer una doble acción: una de dividirse o separarse frente a un estado previo y la otra de ser capaz de recorrer ese estado nuevo que está en frente. Se da en todos los casos un estado de oposición entre ambos estadios, los dos afirman una naturaleza existencial clara (ἐστί, *εἰμί*). Aunque el segundo estado debe de ser capaz de transportar (*περαίνω*) aquello que lleva consigo, mientras el primer estado tan solo debe dejar algo o separarse de un estado previo, en ese sentido está dejando algo para asumir un nuevo estado existencial. No obstante, la traducción comúnmente asumida es: *Un límite o frontera es aquello que es extremo de algo*. Pareciera que al primer vocablo se le asocia más el significado de límite o frontera (*ὅρος*), mientras al segundo se le vincula más con una extremidad o extremo (*πέρας*). Sin embargo, no es satisfactoria tal traducción, ya que deja de lado la dinámica interna que se está dando: el que existe (*εἰμί*) un ente (*ὤν*) que padece la acción sobre la que se está predicando. Aquello que aspira situarse o desplazarse hacia una frontera experimenta una división y separación interna-externa, que debe de ser superada en cuanto se la ha de atravesar y cruzar hasta estar al otro lado: aquel lado que está enfrente y del lado opuesto (*πέρατος*), se entiende que es una situación momentánea o un tránsito (*πέρασις*) y no una situación permanente (*μένω*).

𝔑. Ver *Calculus*, Frank Ayres y E. Mendelson (1999 p. 61, 386). En todos los casos, el límite es una noción transformadora, que cambia y modifica, de manera estable cuando converge o inestable cuando no lo logra.

Pareciera que esta situación evocara aquella máxima de Heráclito (*Ἡράκλειτος*): *todo cambia y nada permanece igual* (*πάντα χωρεῖ καί οὐδέν μένει*)[323]. De alguna manera, el sentido de la traducción de esta proposición de Euclides debería ser: toda frontera o límite divide y puede ser atravesada por cualquiera. Notamos que el pronombre indefinido (*τις*) se asemeja a una variable libre que goza de una cuantificación universal, dado que puede ser cualquier o cualquiera, sea individuo o cosa. En este sentido, es una metaproposición del lenguaje universal que tiene validez no solo para la geometría sino para todo saber o disciplina. En todos los casos la frontera o el límite es un tránsito, en este sentido, indica movimiento y cambio. Lo que nos vuelve a llevar a otra máxima de Heráclito, ambas son mencionadas por Platón (*Πλάτων*) en el *Crátilo* (*Κρατυλος*) (402α): *Tú no puedes sumergirte dos veces en el mismo río* (*δίς ἐς τόν αὐτόν ποταμόν οὐκ ἂν ἐμβαίης*). Existe una afinidad en el pensamiento entre Pitágoras y Heráclito pues ambos vivieron en la misma época; así que muchas de las sentencias propuestas por ellos funcionan como metaproposiciones válidas para cualquier tipo de saber o disciplina. Debe resaltarse la doble actividad del límite o la frontera como *óros* (*ὅρος*) que es dividir (*ὁρίζω*) y la misma frontera o límite como *péras* (*πέρας*) que se atraviesa (*πείρω*); toda frontera o límite involucra una doble actividad que se da en dos direcciones opuestas y complementarias, involucra una separación o dejar de ser o existir en un estado para pasar a otro que debe de ser cruzado por completo. Se entiende que el lograr cruzarlo por completo conducirá a que se será alguien o algo muy distinto a lo que se era antes. Hay que tener presente la naturaleza profundamente cambiante de toda frontera o límite (*ὅρος*, *πέρας*): un lugar carente de permanencia, de estabilidad y sujeto de manera constante a la acción de fuerzas nuevas, cuyas consecuencias son en gran parte impronosticables.

3.2.14. La noción de límite es lo que define la topología de una figura

Este axioma es una invitación para entrever dos manejos epistemológicos distintos; ambos parten del mismo principio simbólico hermenéutico que está representando en el

[323] Esta sentencia de Heráclito está mencionada en el diálogo del *Cratilo* (401d), como hemos de darnos cuenta, gran parte de la problemática fundadora de las matemáticas se origina en estas sentencias. En la sentencia recopilada por Platón de Heráclito (402α) podemos encontrar la noción del límite de una función e indirectamente el problema del continuo matemático. Ver *Cratylus* de Platón, traduc. David Sedley (2003).

signo (*σῆμα*). El uno es más tendiente a ser más abstracto y está relacionado con la noción de punto (*σημεῖον*) y el otro está ligado a la noción de límite en la figura (*σχῆμα*). Esta doble dinámica se da entre lo que no tiene frontera que es el punto y lo que sí la tiene que es la figura. En ella se aprecia una actividad dialéctica entre dos conceptos fundamentales, que pueden ser entendidos como nociones primitivas de la matemática y, aunque estén conectados a una cadena deductivo inferencial explícita y rigurosa, obedecen a acciones distintas: *una figura es lo contenido por uno o varios límites* (*A figure is that which is contained by any boundary or boundaries. σχῆμά ἐστι τό ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον*). Una vez más, se exhibe la complejidad del idioma griego antiguo, una lengua dotada de una superioridad mucho mayor que las lenguas modernas derivadas en parte de la misma. Es sabido que el punto *sēmeîon* (*σημεῖον*) significa una marca, un signo, un símbolo, una imagen y un signo propio de los dioses y le corresponde el verbo *semaíno* (*σημαίνω*) que es: mostrar, señalar, pronosticar, aparecer, significar, interpretar, explicar. A su vez, el punto, *sēmeîon* (*σημεῖον*), está relacionado con *sêma* (*σῆμα*) que corresponde también a: una marca, un signo, un símbolo, una figura, una imagen, una bandera, o un signo de los dioses. Mientras que el vocablo utilizado para figura es *skhêma* (*σχῆμα*) que también significa: forma, apariencia, dignidad, moda, manera, naturaleza, esquema, plan, diagrama, le corresponde el verbo *ékhō* (*ἔχω*) que es tener, poseer, mantener, chequear, conocer. Un sinónimo de *sêma* (*σχῆμα*) es *morphḗ* (*μορφή*), que es forma, apariencia, contorno, boceto. Se podría argumentar que las palabras utilizadas para punto (*σημεῖον*) y figura (*σχῆμα*) comparten unos significados comunes, como que ambas fueran: una marca, un signo, un símbolo y una imagen. Su diferencia más tendría que ver, en que a la primera le corresponde el punto (*σημεῖον*, *σημαίνω*) tendría un carácter interpretativo explicativo que busca mostrar algo a fin de concluir en algo. Mientras la segunda que corresponde a la figura (*σχῆμα*, *ἔχω*) tiene un carácter de algo que se muestra de tal manera que puede ser conocido, tenido y apropiado, es de alguna manera algo más práctico y operativo. Tenemos cómo en la misma figura (*σχῆμα*): la imagen, el signo y el símbolo estarían constituidas a su vez por otras imágenes, signos y símbolos, abordados como puntos (*σημεῖον*)[324].

[324] Es de amplio conocimiento en topología, que todo espacio topológico X está constituido por puntos y que toda figura está formada por puntos. Tal hecho es una condición para que una función de un espacio

Existe una dinámica que va de una imagen abordada como un símbolo (*σημεῖον*) capaz de ser interpretado (*σημαίνω*) a la imagen (*σχῆμα*) capaz de invitarnos tenerla como algo entendido: tal hecho puede ser recreado a nivel de una función f, la cual puede ser tomada como la función *sêma* (*σῆμα*) cuyo dominio está inicialmente dado en el punto y cuyo codominio está dado en la figura. Sea el caso: tenemos, $f(\sigma\tilde{\eta}\mu\alpha)$: $\sigma\eta\mu\varepsilon\tilde{\iota}o\nu \rightarrow \sigma\chi\tilde{\eta}\mu\alpha$. Se destaca que la función o la transformación que opera es la de un signo interpretativo pasando a un signo comprendido. Es decir, se ha efectuado un proceso cognoscitivo a nivel de los propios símbolos, y esto indica que el nivel argumentativo proposicional de *sēmeîon* (*σημεῖον*) y de *skhêma* (*σχῆμα*) no son los mismos: se tienen dos epistemologías distintas, cada una con sus propios argumentos y nociones fundamentales. Tal hecho es una invitación a asumir una teoría de los tipos lógicos desarrollada en colaboración de la teoría de modelos de Tarski. De manera suscinta, en el punto *sēmeîon* (*σημεῖον*) se identifica algo que no tiene partes, y esto no impide afirmar que existen incontables entes en los que algo puede ser parte de ese algo abordado como una totalidad particular. El universal de todos los entes que no tiene parte alguna es un concepto aún más elaborado, representa un nivel de abstracción mayor que la noción de punto (*σημεῖον*). Igualmente, el universal que es el todo o la parte completa de todos, la totalidad de todas las totalidades es una noción más abstracta que la de la figura (*σχῆμα*). Tales universales pueden albergar alguna impredicatividad, es decir, serían indecibles e indecidibles. Se nota que el nivel de simbolización de ambos es distinto, dado que existe un salto conceptual o de forma: donde la primera teoría relacionada con el punto es menos elaborada que la segunda teoría relacionada con la figura. Un tema que se percibe en el fondo son las dinámicas entre el griego y el latín que obedecen a unas cosmovisiones distintas: la primera demasiado

---

topológico hacia otro sea continua, f: X $\rightarrow$ Y, más cuando f: $\Re \rightarrow \Re$ es continua. La existencia de los epsilons y deltas supone la recta real y X, Y estén constituidos por unas colecciones de subconjuntos U llamados conjuntos abiertos: $U \subset X, Y$. De igual manera, un espacio topológico debe de cumplir las siguientes condiciones: U es cerrado en las uniones arbitrarias, si $(\cup_i)_{i \in I}$ es una colección de conjuntos abiertos de igual manera lo será $(\cup_i)_{i \in I}U_i$; si U es cerrado bajo un número finito de intersecciones, $U_1,\ldots, U_k$ son conjuntos abiertos, también lo será $U_1\cap\ldots\cap U_k$. Asimismo, también se cumple que el conjunto vacío $\varnothing$ y los conjuntos X, Y son ambos abiertos. Ver *The Princeton Companion to Mathematics*, Timothy Gowers Editor (2008, págs. 301-302).

trascendental y la segunda demasiado práctica. Impronta que está presente en el español o castellano, que es utilizada para redactar estas líneas y de esta manera podernos expresar.

3.2.14.1. El uso del pronombre indefinido cualquiera como cuantificador universal

Nos encontramos con una figura (*σχῆμα*) que se tiene a sí misma, que se posee y se conoce (*ἔχω*), la cual (*τό*, *ὁ*) es y existe (*ἐστί, εἰμί*) bajo y a lo largo (*ὑπό*) de cualquier cosa (*τις*) como (*ἤ*) retribución (*τίσις*) de la frontera (*ὅρος*) que la rodea (*περιέχω*). Así que, una figura es una forma (*σχῆμα*) que se tiene y entiende (*ἔχω*), lo que conlleva a que se la puede intervenir bajo cierto grado (*ὑπό*) por cualquiera (*τις*) de manera segura (*ἤ*), como consecuencia de lo realizado como compensación (*τίνω*) de las condiciones que todo límite impone (*ὅρος*)[325]. Existe una tasación o pago de un precio (*τίνω*) que se efectúa entre la figura o forma (*σχῆμα*) con aquella superficie (*ἐπιφάνεια*) que está debajo (*ὑπό*), que de alguna manera la sostiene, la guarda y la mantiene (*ἔχω*). Se tiene una construcción comparativa que se da con seguridad (*ἤ*) sin importar qué clase (*τις*) de figura (*σχῆμα*) se tenga (*ἔχω*), lo cual hace que esta proposición afecte a todas las figuras (*σχῆμα*) o formas (*μορφή*) que puedan situarse sobre la superficie (*ἐπιφάνεια*) que las sostiene. Para ello se establece una correspondencia, hecho presente en los verbos *tíno* (*τίνω*) y *tío* (*τίω*) que significan pagar un precio y rendir honor a una persona. El uso del pronombre cualquiera y cualquier cosa (*τις*), aún aquel que indague y pregunte por qué clase (*τίς*), muestra que se está en presencia de un cuantificador universal que asevera de manera veritativa que se cumplen dos condiciones:

La primera está signada (*σημαίνω*) por el hecho de que toda figura (*σχῆμα*) y, en general, toda forma (*μορφή*) tiene algo debajo (*ὑπό*), no es más que la superficie (*ἐπιφάνεια*)

---

[325] Existe un tópico muy importante que es la Teoría de las categorías, notamos en un sentido amplio que la noción de línea (*γραμμή*) adquiere un nivel de mayor abstracción que le lleva a retornar a su prístino origen como un signo (*σῆμα*) o una figura (*σχῆμα*). Este hecho se advierte en el manejo conceptual que se le da a la noción de funtor, que se simboliza como una flecha → asociable a ser un signo (*σῆμα*) y una figura (*σχῆμα*) por C_1, y la superficie (*ἐπιφάνεια*) la podemos identificar a una colección de objetos C_0. Sea C una categoría dada por una colección de objetos C_0 y una colección de flechas C_1 las cuales tienen la siguiente estructura: cada flecha tiene un dominio $X = \mathrm{dom}(f)$ y un codominio $Y = \mathrm{cod}(f)$, dado en $f: X \to Y$. Dadas dos flechas f, g tales que cod (f) = dom (g), la composición de ambas se escribe gf se define por $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g)$: $X \to_f Y \to_g Z \vdash X \to_{gf} Z$. La composición es asociativa: $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$, $h(gf) = (hg)f$. Para cada objeto X existe una flecha de identidad $id_x: X \to X$, satisface $id_x\, g = g$ para todo $g: Y \to Z$, asimismo $f id_x = f$ para todo $f: X \to Y$. Tema tratado en *Basic Category Theory* por Jaap van Oosten (2002).

que como concepto antecede a la noción o al concepto de figura. Como se anotó (def.5), una superficie está constituida por líneas (*γραμμή*) cuyos límites (*πέρας*) son puntos (*σημεῖον*). De manera que, si se divide (*ὁρίζω*) una línea (*γραμμή*) en muchas líneas se va a encontrar con que una línea está constituida por puntos (*σημεῖον*), que al no tener parte (*οὗ μέρος οὐθέν*) se presupone que una línea está constituida por una continuidad infinita de puntos. Lo cual presenta las dos nociones primitivas fundamentales de la geometría: la de punto (*σημεῖον*) y línea (*γραμμή*); estas vienen a constituir a la superficie (*ἐπιφάνεια*) que es el fruto de la unión e interacción de las nociones de largo (*μῆκος*) y ancho (*πλατύς*), que se pueden considerar como el resultado de un operador que recorre toda superficie tanto a lo largo como a lo ancho.

La segunda condición está dada por la relación que dicha figura (*σχῆμα*) mantiene con la frontera (*ὅρος*), el límite (*ὅρος*) que la rodea (*περιέχω*), a tal nivel que la tiene, la posee y la sostiene (*ἔχω*) a su alrededor (*περί*). De modo que el límite se convierte en una suerte de envolvente que la amarra y le aporta la estabilidad que la misma figura requiere. Es de notar cómo Euclides ya está planteando la noción de límite que viene a definir al cálculo diferencial[326]. Además, parece algo paradojal, que un límite (*ὅρος*) que de alguna manera tiene la facultad de dividir, delimitar, separar y ordenar (*ὁρίζω*), sea el que le permita a la misma figura (*σχῆμα*) sostenerse y tenerse (*ἔχω*) a sí misma entre estos linderos, que en todos los casos causan y generan cambio. La frontera se sitúa como aquello que tiene y conoce (*ἔχω*) lo que la rodea, pero es también aquel límite o frontera (*πέρας*) que es lo que está opuesto o en frente (*πέρατος*) creando una división con lo que está en el interior de la misma figura. En esta definición está presente la noción de vecindad que viene a acompañar la noción del límite de una función: $\lim_{x \to p} f(x) = A$, $f(x) \to A$ en la

[326] Las cantidades dx, dy se llaman diferenciales dy/dx, son consideradas como desaparecidamente (*vanishingly small*) pequeñas o infinitesimales, estos término pueden parecer vagos y místicos, ellos sirven para guiar a los matemáticos de aquellos días en la solución de problemas muy díficiles y en descubrir nuevos e importantes resultados. Es muy útil para estudiar el movimiento y los cambios de los objetos en el espacio y en el tiempo. Si x es una variable independiente, luego dx es una segunda variable, y puede ser cualquier número real, la cantidad dx se llama la diferencial de x. Si y es una función diferenciable de x, luego dy es la diferencial de y, que se define por la ecuación: $dy = f'(x)\,dx$. La derivada $f'(x)$ es el valor límite de la razón $\Delta y/\Delta x$, que simboliza los cambios en y versus los cambios en x; donde la y simboliza la variable dependiente, la x simboliza la variable independiente o libre. La diferencial representa el cambio en $f(x) = y$ con respecto al cambio en la variable independiente. $\Delta y/\Delta x = f'(x) + \varepsilon$, donde ε representa esta diferencia que tiende a ser cero en la medida que $\Delta x \to 0$, y siempre que $\Delta x \neq 0$. Tema expuesto en: *Analytic Geometry and the Calculus*, A.W. Goodman (1969, pág. 164-5).

medida que $x \to p$, significa que para cada vecindad $N_1(A)$ tenemos una vecindad $N_2(p)$, tal que $f(x) \in N_1(A)$ siempre y cuando $x \in N_2(p)$, $x \neq p$[327]. La vecindad es todo lo que está dentro de los linderos de una figura sin tener en cuenta el contorno de la misma, que vendría a ser el propio límite de la misma figura.

Además, esta proposición euclidiana le aportaría otros matices a la noción de límite, como aquel donde interviene la noción de forma o figura, dado que también el límite puede ser aproximado desde varios lugares. A medida que nos aproximamos al límite (*ὅρος*) nos encontramos con aquello que rodea por todas partes (*περιέχω*) a la figura (*σχῆμα*) sosteniéndola (*ἔχω*) a su derredor (*περί*). Es notable cómo en estas consideraciones euclídeanas, se prefigura un esbozo de la teoría de conjuntos planteada por Georg Cantor más de dos mil años después, la cual está sugerida en este planteamiento. Además de afirmar que una figura es aquella forma que está contenida dentro de unos límites, es una metaproposición de alta jerarquía, capaz de satisfacer distintas teorías y variados modelos derivables de la misma. Aquí se está planteando una hermenéutica de la matemática abordada desde la geometría, donde la noción de símbolo (*σύμβολον*) −como aquello que permite poner (*βάλλω*) algo junto (*σιν*), se corresponde con las nociones de signo o punto *semeion* (*σημεῖον*) y de signo (*σῆμα*)− vendría a tener variados tratamientos ajustables a cada una de las proposiciones que se planteen. Asimismo, se tiene una jerarquía en cada uno de los signos o símbolos en relación a las teorías a las que pertenezca, la cual está delimitada por unas teorías superiores o inferiores, en concordancia con la teoría de modelos desarrollada por Alfred Tarski y Bertrand Russell en su teoría de los tipos lógicos.

3.2.15. La línea tiene la potestad de rodear cualquier tipo de forma geométrica

El presente axioma remite al círculo (*κύκλος*), que es una figura (*σχῆμα*) y en ese sentido puede adoptar cualquier forma; en especial, se resalta que es la línea (*γραμμή*) la que se encarga de rodear su periferia (*περιφέρεια*). Nótese que en *Los Elementos* (*Στοιχεῖα*) de Euclides no se aporta una argumentación que fundamente las propiedades de la

[327] Esta definición se complementa con la definición de continuidad de una función en un punto: una función f se dice continua en un punto p si: (a) f está definida en p, (b) $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$. La podemos formular en términos de sus vecindades: $f(x) \in N_1[f(p)]$ siempre y cuando $x \in N_2(p)$. Tema explicado de una manera muy clara en el reconocido texto *Calculus* de Tom Apostol (1967, pág. 127-130).

circunferencia. Con lo cual, el salto conceptual del punto a la línea está más argumentado, no obstante no acontece lo mismo en cuanto al paso de la línea al círculo: tal hecho representa un vacío en relación con la teoría que se está desarrollando, que oculta el origen de una de las figuras emblemáticas arquetípicas por su belleza y suma perfección, como lo son el círculo y la circunferencia. Este hecho muestra que la constante matemática de pi π, la denominada constante de Arquímedes[328] no está mencionada en *Los Elementos*, de estarlo, se la la debería situar entre los axiomas 14 y 15; esto se debe a que Euclides fue anterior a Arquímedes. Se resalta en este aparte cómo el círculo se deriva de la superficie o apariencia visible *epipháneia* (*ἐπιφάνεια*), que está sobre el suelo o sea es plana (*πεδίον*) y ya sabemos que lo plano está densamente habitado por líneas. El texto tiene sentido cuando afirma que es una línea la que termina rodeando al círculo, es decir, aportándole su forma o sustentándola: *un círculo es una figura plana comprendida por una línea tal que todas las rectas caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.* (*A circle is a plane figure contained by one line such that all the straight lines falling upon it from one point among those lying within the figure are equal to one another; κύκλος ἐστί σχῆμα ἐπίπεδον ὑπό μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρός ἣν ἀφ' ἑνός σημείου τῶν ἐντός τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρός τήν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*).

Estamos frente al círculo (*κύκλος*), aquel anillo o cualquier objeto circular que involucra un movimiento en derredor, que también significa una esfera o un globo. Este círculo es (*ἐστί*) y existe (*εἰμί*) como una figura (*σχῆμα*), está en el suelo plano (*ἐπίπεδος*) sobre (*ὑπό*) una (*μιᾶς*) línea (*γραμμή*) que la rodea (*περιέχω*), la cual (*ἥ*) es llamada (*καλέω*) una circunferencia (*περιφέρεια*). Aquí se presenta una mención muy importante, pues hay que recordar que el vocablo de línea (*γραμμή*) también significa un resumen, una línea alrededor de un curso, un contorno y una frontera; y está relacionada con *gráphō* (*γράφω*) que es: arañar, rayar, grabar; pintar, dibujar; escribir y redactar; tal hecho conduce a que la noción de línea en este contexto no está reservada exclusivamente a que tenga que ser recta

[328] A pi π se le conoce como la constante de Arquímedes, quien fue uno de los primeros en calcularla a partir de ir circunscribiendo polígonos en un cuadrado, comenzando por 6, 12, 24, 48, 96. Lo que le permitió llegar a la expresión 3 10/71 < π < 3 1/7. La notación moderna como π fue introducida en 1737 por William Jones y fue popularizada por Leonhard Euler. Tema tratado en: *The Life of pi* por Jonathan M. Borwein (2011).

(*εὐθύς*). Sino que puede ser curva tal como el contorno de algo no siempre es recto, sino que posee toda una variedad de líneas que varían en cuanto a su curvatura. A su vez, *graphḗ* (*γραφή*) es un dibujo, una escritura o una inscripción: las cuales poseen una diversidad de trazos muy distintos entre sí. Se resalta que es una línea (*γραμμή*) la que rodea o circunda (*περιέχω*) la periferia (*περιφέρεια*) o circunferencia. Con lo cual, la línea (*γραμμή*) tomada como vocablo aislado puede significar recto o curvo o quebrado u otra posible forma: tan solo cuando se especifica que es una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), queda confinada y restringida a que sea derecha y no curva. No obstante, lo recto (*εὐθύς*) posee un rango de significancia mayor en cuanto señala un patrón normativo que trasciende un único uso, e invita a pensar que puede existir una línea recta en una geometría no-euclidiana, que para el sentido común no sería recta.

3.2.15.1. La noción de la vecindad es concebida como el rodeamiento del círculo

Se está frente a aquella acción capaz de encerrar en una forma al círculo haciéndolo girar (*κυκλόω*) y creando un envolvimiento (*κύκλωσις*) que posee esa capacidad de transportar, colocar en torno y mover en círculo dando vueltas (*κυκλέω*) a una forma o figura (*σχῆμα*). Tal proceso aparenta ser un esquema o plan (*σχῆμα*), el cual se tiene (*ἔχω*) para representar y formar (*σχηματίζω*) un diagrama. La misma oración da a entender en un sentido amplio, que todo aquello que se deje encerrar y envolver (*κυκλόω*) evoca al círculo (*κύκλος*). Este hecho lleva a ampliar y generalizar la noción de círculo, en especial, en relación al plano complejo donde tenemos un círculo como un conjunto de z puntos con un centro en c y un radio r, el cual tiene la ecuación $|z - c| = r$, en su forma paramétrica esta expresión se puede escribir como $z = re^{it} + c$. Lo importante está en que la ecuación generalizada es: $pz\bar{z} + gz + \overline{gz} = q$, donde $p, q \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{C}$, se llama un círculo generalizado, que puede ser un círculo verdadero o una línea[329]. Este concepto es muy utilizado en la geometría inversa, debido a que las líneas rectas (*εὐθεῖα γραμμή*) y los círculos (*κύκλος*) tienen propiedades muy similares y son tratados de manera conjunta. Lo

[329] Este tema puede ser consultado en el artículo: *Geometry of Generalized Complex Numbers* por Anthony A. Harkin (2004).

que explica desde esta perspectiva es una de las razones que pudo motivar a Euclides de abordar la presentación en este axioma del círculo de manera conjunta a la línea recta.

Este axioma puede tener varios niveles de lectura; la interpretación analizada al comienzo del numeral es la que posee el nivel de generalización más alto como una metaproposición. No obstante, la acción es vinculada sobre aquello que está sobre el suelo o a nivel del suelo (*ἐπίπεδος*), es decir sobre (*ἐπί*) el suelo (*πεδίον*): aquello que es llano, plano y abierto sugiere una acción de cultivo que se recorre a pie (*πούς*). Tal acción que es acarreada en círculos, busca rodear y cercar (*κυκλέω*), se desarrolla a lo largo (*ὑπό*) de una (*εἷς*) línea que señala un contorno (*γραμμή*), susceptible de ser delineado, bosquejado y escrito (*γράφω*) una sola vez (*ἅπαξ*), como la primera (*πρώτη*) línea capaz de abrazar y rodear (*περιέχω*) aquel territorio periférico (*περιφέρεια*). El poder rodear algo de cerca (*περί*) transportando y llevando encima (*φέρω*) esa línea (*γραμμή*) que se ha convertido en una esfera o globo (*σφαῖρα*), es algo que se puede hacer a distancia trayéndola consigo (*φέρω*). Este hecho es contado para ser celebrado (*κλέω*) dado que es algo que se tiene (*ἔχω*) a lo largo de toda esta acción. Aquí la noción de círculo (*κύκλος*) se toma como algo plano (*πεδίον*). Sin embargo, ha de ser entendido en cuanto está situado sobre (*ἐπί*) el suelo (*πεδίον*). Este suelo (*ἐπίπεδος*) es la propia figura (*σχῆμα*) que está situada (*κεῖμαι*) sobre (*ἐπί*) la superficie (*ἐπιφάνεια*) que es una (*εἷς*).

3.2.15.2. El círculo es denso y cerrado respecto a los otros círculos que están dentro

El texto prosigue afirmando que estando lejos como resultado de lo anterior (*πρός*) esta (*ἥν, ἥ*) circunferencia (*περιφέρεια*) se aleja (*ἀπό*) del primer (*ἕνος*) punto (*σημεῖον*), aquel (*τῶν, τό*) que está en el interior (*ἐντός*) de aquella (*τοῦ, ὁ*) figura (*σχῆμα*) que yace situada (*κεῖμαι*). Toda (*πᾶςα*) la figura (*σχῆμα*), ella (*αἱ, ἡ*) cae sobre (*προσπίτνω*) esta línea recta (*εὐθύς*) en la dirección de (*πρός*) ella (*τήν, ἡ*); cualquier (*τις*) círculo (*κύκλος*) que esté situado (*κεῖμαι*) en la dirección de la circunferencia (*περιφέρεια*) es igual (*ἴσος*) o se hace igual (*ἰσάζω*) a los otros (*ἀλλήλαις*) que vayan o vengan (*εἶμι*) hacia adentro (*εἴσειμι*). Estamos en presencia de un círculo (*κύκλος*) que puede ser apreciado como una sucesión de círculos concéntricos que están dentro (*ἐντός*): estos círculos se corresponden con el punto (*σημεῖον*) que está en todo el centro, el cual es centro (*σημεῖον*) de todos estos círculos (*κύκλος*)[330]. Estos a su vez se relacionan de manera directa (*εὐθύς*) con la circunferencia (*περιφέρεια*) que los rodea. Las distintas líneas (*γραμμή*) se corresponden entre sí las unas con las otras (*ἀλλήλων*). Se está frente al isomorfismo que se da entre los distintos círculos que siendo concéntricos entre sí guardan una similitud o equivalencia (*ἴσος*) mutua. También está aquella rectitud (*εὐθεῖα*) que permite volver un círculo (*κύκλος*) similar o igual (*ἰσάζω*) a los que están dentro. Tal comentario es una clara sugerencia de la existencia de una totalidad (*πᾶς*) de círculos que completan todo el espacio interno, vertiéndose y cubriéndolo (*πάσσω*) todo por completo. En tal situación se reconoce una dirección que se sigue (*προσπίτνω*), fruto de conservar y seguir esa dirección (*πρός*) sobre la cual caen y se precipitan (*πίτνω*) las distintas líneas (*γραμμή*): tan maravilloso comentario ya anuncia el álgebra lineal y tal hecho puede ser interpretado como aquel vector que conserva la dirección, aquella buena (*εὖ*) y recta (*εὐθύς*) en todos (*πᾶς*) los sentidos. Así, las distintas líneas vienen a cubrir todo ese espacio que yace (*κεῖμαι*) ahí en una acción que va (*εἶμι*) igualando (*ἰσάζω*), puede ser cualquier (*τις*) línea (*γραμμή*) que se tienda dentro (*ἐντείνω*) de estas figuras (*σχῆμα*). Esto permite que se dé una unidad y unión (*ἑνότης*) entre estos distintos símbolos o signos (*σῆμα*), los cuales señalan y marcan (*σημειόω*) aquellas señales del cielo (*σῆμα*): nos indica y nos permite interpretar (*σημαίνω*) aquello que está dentro (*ἐντός*), que se vierte cubriéndonos (*πάσσω*) y permitiendo que seamos iguales (*ἴσος*) al centro (*σημειόω*) que está adentro, el cual puede ser adquirido (*πάομαι*) y hacia el cual habremos amablemente de ir (*εἶμι*). Todo este proceso es dinámico y altamente significativo, dado que prefigura la noción de la derivada de una función. Se anticipa el

[330] Es posible inferir del texto de Euclides unas sucesiones de círculos concéntricos entre sí, tema que está tratado en: *Complex Numbers and Geometry* por Liang-shin Hahn (1994). Tenemos el plano z complejo donde podemos situar un lápiz que atraviesa los distintos círculos pasando por cada uno de los puntos del plano z extendido. Si tenemos dos círculos C_1 y C_2 que no se intersectan, podemos mapear este par de círculos por medio de la transformación de Möbius hacia un par de círculos concéntricos que tienen su origen en el plano w que será su centro. Este círculo es ortogonal al par de círculos concéntricos si y solo si tenemos una línea que pasa a través del centro de estos círculos concéntricos. En consecuencia, la imagen de este lápiz de círculos conjugados C_1, C_2 debe ser el conjunto de todos los círculos pasando a través del origen y el punto hacia el infinito en el plano w (p. 142). A su vez, estos puntos son simétricos cada uno con respecto al círculo. Este hecho confirma que podemos tener una sucesión al infinito de círculos concéntricos entre sí, los cuales comparten un mismo centro que es un punto a través del cual pasa una línea que conecta y atraviesa todos los círculos. Se hace necesario que se dé un isomorfismo simétrico más conocido como un automorfismo gráfico, el cual se mapea a si mismo preservando la conectividad con el centro puntual.

isomorfismo, las mismas y equivalentes (*ἴσος*) formas (*μορφή*) que se tienen (*ἔχω*) en cualquiera (*τις*) de los signos (*σῆμα*) que acompañan a las matemáticas.

3.2.16. El punto como elemento fundante definible en una teoría

Es de destacar la magistral manera en que los griegos iban construyendo su edificio argumentativo matemático a partir de una noción muy intrincada como es la de punto (*σημεῖον*), el cual es el ente irreducible por excelencia que expresa la compleja problemática del todo (*ὅλος*) con la parte (*μέρος*): *El punto se llama el "centro" del círculo* (*and the point is called the centre of the circle. κέντρον δέ τοῦ κύκλου τό σημεῖον καλεῖται.*) Una vez realizado esto, la argumentación va ampliándose y ganando complejidad, lo cual hace que esa noción vuelve a resurgir en la forma perfecta del círculo (*κύκλος*) y la circunferencia (*περιφέρεια*). No obstante, lo hace como un punto dinámico (*κέντρον*) que es capaz de definir y sustentar todo el topos (*τόπος*) que se da tanto en la superficie como en el interior del círculo-circunferencia. De manera que se podría afirmar que el punto como *sēmeîon* (*σημεῖον*) se encuentra situado en una teoría distinta al punto como *kéntron* (*κέντρον*), que es el centro del círculo y la circunferencia. Cada una de esas teorías posee su propia axiomatización, donde la primera de ellas la que fundamenta al punto (*σημεῖον*) como la noción fundante es de naturaleza metateórica, permea a todas las teorías y a los entes que se construyen a partir de la misma. En ese orden de ideas, la teoría que fundamenta la axiomatización del punto (*σημεῖον*) es una metateoría $\mathfrak{T}_1$ que antecede a todas las demás, en especial a la teoría que fundamenta al punto como (*κέντρον*) situada como una teoría T_n tal que $1 > n$; en especial tanto la cardinalidad como la ordinalidad del $1 \in \mathfrak{T}$, es distinta a la cardinalidad y ordinalidad de los índices de las demás teorías T. De alguna manera se tiene que $T_k \subset \mathfrak{T}$: toda teoría es un subconjunto de la metateoría fundamental[331].

Se está ante la noción de *kéntron* (*κέντρον*), usualmente asociada a aquello que posee una punta afilada, tal como es el aguijón de una abeja o un pincho, lo que sirve para

[331] Este tema está bien expuesto en *Undecidable Theories* por Alfred Tarski (1953), en el numeral dedicado a la formalización estándar de las teorías introduce dos teoremas de deducción fundamentados en la propiedad lógica del *modus ponendo ponens*, para luego derivar otros diez teoremas más relacionados con la decidibilidad de las teorías y las subteorías (págs. 5 a 30).

aguijonear, picar, espolear, picar o clavar un objeto punzante (*κεντέω*). Algo interesante en este nuevo sustantivo *kéntron* (*κέντρον*) es que es la unión del verbo *kentéo* (*κεντέω*) con el sufijo *-tron* (*-τρον*) que sirve para formar sustantivos instrumentales: el caso instrumental es aquel que indica que el sustantivo es el instrumento o el medio por el cual el sujeto logra completar una acción, la cual puede ser tanto hacia un objeto físico como hacia una noción abstracta. La noción de aguijón (*κέντρον*) también se le asocia el centro de una circunferencia (*περιφέρεια*), involucra una actividad dinámica en la cual de alguna manera el aguijón es llevado o transportado desde alguna distancia (*φέρω*) alrededor (*περί*) de este círculo (*κύκλος*) hasta el centro: el punto (*σημεῖον*) es también un signo (*σῆμα*) que realiza algunas señales (*σημειόω*) para que ese aguijón o punta de lanza (*κέντρον*) pueda dar en el blanco o se situé en el centro. Existe de esta manera una función f dinámica entre el punto (*σημεῖον*) y aquel aguijón (*κέντρον*) que habrá de convertirse en el centro de un círculo (*περιφέρεια*). Está acción de acarrear o transportar (*φέρω*) algo alrededor (*περί*) ya está sugerida en las dos raíces que constituyen la circunferencia (*περιφέρεια*), en consecuencia, denominaremos al verbo *féro* (*φέρω*) el operador que efectúa esa tarea, sea el caso f(*φέρω/περί*): (*κέντρον*) → (*σημεῖον*), $f(\varphi): \kappa \rightarrow \sigma$, que permite que se dé un isomorfismo donde el punto (*σημεῖον*) termina asimilando a ese aguijón (*κέντρον*) que va circundando (*περίφέρω*) al círculo (*κύκλος*) hasta guiarlo y conducirlo a ese centro. Es notable que esta función debe ser sobreyectiva, en donde se debe tener que $f^{-1}(\varphi): \sigma \rightarrow \kappa$, además ha de presentar una exclusividad tanto en el codominio que a medida que se aproxima al mismo se tiene que $\kappa \equiv \sigma$. Incluso surge la problemática, si es continua o discontinua. En consecuencia, esta función $f(\varphi)$ es capaz de reconocer la equidistancia de todos los lugares de una circunferencia (*περιφέρεια*), necesarios para que se de la colinealidad puntual entre el centro dinámico punzante (*κέντρον*) y el centro[332] (*σημεῖον*) como formulación trascendental fundante de todos los entes y funciones geométricas. Esto nos lleva a que la

[332] Esta propiedad se la reconoce comúnmente como colinealidad, significa que los distintos puntos situados a lo largo de una línea están conectados entre si dado que yacen en la misma línea. A su vez una colinealidad es una transformación del plano en una transformación colineal: puntos transformados en puntos, líneas transformadas en líneas, lápices en lápices, cuadrados en cuadrados, etc., la colineación transforma cada formal dimensional en una proyectiva. Tratado en: *Introduction to Geometry*, H.S. Coxeber (1969, pág. 247).

noción del centro de un círculo (*κέντρον*) sea una noción dinámica[333]. Es más, aún se puede ir más lejos afirmando que siempre se da una verificación o constatación dinámica cada vez que alguien se sitúa en el centro de un círculo, y se recuerda que se deben dar unas verificaciones reiterativas.

3.2.16.1. La densidad de los círculos concéntricos representa un límite frente al centro

La noción de ese centro (*κέντρον*) puntual (*σημεῖον*) está dada en relación con la noción de círculo (*κύκλος*) y no en relación con la noción de circunferencia (*περιφέρεια*); propiamente, habría que decir que la circunferencia es la envolvente de esa frontera (*ὅρος*) que divide y ordena (*ὁρίζω*) aquello que está dentro respecto de aquello que está afuera. Sin embargo, también se puede decir que el punto (*σημεῖον*) como centro de un círculo (*κέντρον*) representa de igual manera una frontera (*ὅρος*) sea a nivel interior o céntrico. El círculo (*κύκλος*) posee esa propiedad de girar (*κυκλόω*) que, de alguna manera, tiene una envolvente (*κύκλωσις*) que es la circunferencia (*περιφέρεια*). Estas son nociones dinámicas y no estáticas, lo cual hace ver que en las matemáticas griegas las nociones propias del cálculo integral y diferencial estaban estrechamente vinculadas[334]. Se está efectuando una lectura que interpreta (*σημαίνω*) las señales (*σῆμα*) que provienen de ese punto (*σημεῖον*), que busca acercarse a ese lugar equidistante o centro de un círculo (*κέντρον*) – aspecto que está dado por la función sobreyectiva $f(\varphi)$: $\kappa \rightarrow \sigma$, cuyo recíproco es $f^{-1}(\varphi)$: $\sigma \rightarrow \kappa$ − : se da una constante verificación hasta que las condiciones se cumplan y el punto logre ser el centro del círculo. Parece que se tuviera una serie no de números sino de círculos

[333] Esta noción de un centro dinámico es el que se tiene en el centro de una variedad tomado como un punto de equilibrio de un sistema dinámico. A su vez un punto de equilibrio es una sustitución constante en una ecuación diferencial. Sea $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ un punto de equilibrio para una ecuación diferencial $dx/dt = f(t, x)$ siempre que $f(t, \tilde{x}) = 0$. Similarmente un punto $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, es un punto de equilibrio o punto fijo para una relación de recurrencia $x_{k+1} = f(k, x_k)$ si $f(k, \tilde{x}) = \tilde{x}$ para $k = 0, 1, 2,\ldots$ Hemos de anotar que una relación de recurrencia es un mapeo polinomial de grado 2 o un mapeo logístico $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, donde r es una constante, dado un término inicial x_0 cada término que le sigue está determinado por esta relación. Esta noción de punto de equilibrio es muy utilizada en el análisis no lineal de sistemas dinámicos de ecuaciones. Este tema remite a las soluciones de equilibrio también conocidas como los puntos críticos, expuesto en: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Boyce y Di Prima (2001, pág. 460).

[334] Basta mencionar el teorema fundamental del cálculo: sea f una función integrable en [a, x] para todo x en [a, b]. Sea c tal que $a \leq c \leq b$, se define una nueva función A: $A(x) = \int_c^x f(t)dt$ si $a \leq x \leq b$. Luego la derivada A'(x) existe en cada punto x del intervalo abierto (a, b) donde f es continua, y en consecuencia para tal x tenemos: $A'(x) = f(x)$. Ver en *Calculus*, de Tom Apostol (1967, pág. 202).

concéntricos que gravitan alrededor de ese centro y que buscan aproximarse al mismo. Además, es de entenderse que tal proposición no especifica que el círculo de alguna manera sea para nosotros una figura (*σχῆμα*) tridimensional: la noción de pi (π) que evoca una de las constantes más importantes de las matemáticas está dada en dos dimensiones, este hecho no está mencionado en esta proposición euclidiana. Y esto lleva a afirmar que la misma se puede interpretar en variados modelos, y no está sujeta a una sola interpretación o lectura. Hay aquí una invitación a indagar en la construcción de la noción de pi (π) a nivel multidimensional. A su vez, tal oración sugiere que el algoritmo de utilizar un cuadrado para medir el valor de una circunferencia (π) no es el procedimiento aquí sugerido, sino más bien el poder rodearla envolviéndola (*κυκλόω*) y teniendo en cuenta la equivalencia entre el punto (*σημεῖον*) con ese centro (*κέντρον*): (*σημεῖον*) ≡ (*κέντρον*), hecho que nos invita a imaginar y construir otro algoritmo distinto al tradicional. Este hecho representa una función cuyo límite es alcanzado a través de una actividad más geométrica que aritmética.

El llegar a tal centro (*κέντρον*) involucra una acción de aguijonearlo o de clavar (*κεντέω*) ese aguijón (*κέντρον*), que de alguna manera lo va a atravesar o a cortar (*τέμνω*), propio de esa acción que corta (*ἐπιτέμνω*) la superficie (*ἐπιφάνεια*)[335] sobre la cual están situadas todas las figuras (*σχῆμα*), en especial la del círculo (*κύκλος*). Al afirmar que ese centro (*κέντρον*) está dado para cualquier (*τοῦ, τις*) círculo (*κύκλος*) de él, o aquel o este (*τό, ὁ*) punto (*σημεῖον*), indica que se da una unicidad o es un punto único y de alguna manera guarda relación con la anterior proposición, que contempla la existencia de múltiples círculos concéntricos que comparten un mismo punto central. Hallar ese lugar requiere de todo un algoritmo que indica los pasos que se han de seguir a fin que pueda aguijonearse (*κεντρόω*) ese punto (*σημειόω*) que está en el centro: el mismo verbo *kuklóō* (*κυκλόω*) tiene

[335] La noción de superficie (*ἐπιφάνεια*) está contemplada en la topología, los griegos consideraban que tanto los objetos físicos como las estrellas y los planetas navegaban en el éter: el éter se asemeja a una superficie sobre la cual descansan y se soportan las figuras (*σχῆμα*) o los entes geométricos, lo que hace que no se les ubica en el vacío. Esta noción de superficie equivale al conjunto X, el cual está habitado por una colección de subconjuntos Ω, que satisfacen la unión e intersección como elementos de Ω. Se dice que Ω es una estructura topológica en X, y que la pareja (X, Ω) es un espacio topológico. Una estructura topológica es capaz de recubrir toda la estructura, siempre y cuando tengamos una colección Σ de conjuntos abiertos que es una base, bajo la condición de que cada conjunto abierto no esté vacío y que sea una unión de conjuntos en Σ. Un ejemplo de una base son todos los intervalos de la recta real. La superficie topológica es una variedad en dos dimensiones. Ver *Elementary topology*, Viro, Ivanov (2008, págs. 11, 16).

entre sus significados el de formar un círculo, en ese sentido pareciera que el proceso de girar o rodear (*κυκλόω*) se diera alrededor de ese centro (*κέντρον*), como que él mismo fuera el causante de la existencia del círculo (*κύκλος*). Esto haría que el procurarse un círculo también involucra una serie de operaciones o transformaciones, no es algo que sea dado de manera gratuita sino que debe ser elaborado, tal es lo llamado, demandado y requerido (*καλέω*) para que un círculo sea reconocido por ese nombre –este hecho, que reclama el otorgamiento de un nombre, es uno de los significados de *kaléo* (*καλέω*)−. Esto le aporta más fuerza al argumento afirmado y aseverado en esta proposición, que bien puede ser elevada a una metaproposición de un lenguaje formal capaz de satisfacer distintos modelos y teorías.

3.2.17. La norma arquetípica como patrón de medida representada en el diámetro

El diámetro (*διάμετρος*) se presenta como una noción primitiva de una jerarquía nueva, lo cual permite ver que también las nociones o conceptos están sujetos a un ordenamiento de tipo. Un tema esencial es la utilización del diámetro como norma para definir una gran variedad de patrones de medida: los que dividen una línea, una superficie, o el mismo tiempo del año y de los días. Es una noción fundamental que proviene de la línea (*γραμμή*), es decir: todo diámetro es una línea, *διάμετρος* ≡ *γραμμή*, pero también como una línea acotada por la envolvente del círculo (*κύκλος*) o circunferencia (*ἐπιφάνεια*). Este axioma dice: *Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitado en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales* (*A diameter of the circle is any straight line drawn through the centre and terminated in both directions by the circumference of the circle, and such a straight line also bisects the circle. διάμετρος δέ τοῦ κύκλου ἐστίν εὐθεῖά τις διά τοῦ κέντρου ἡγμένη καί περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τά μέρη ὑπό τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καί δίχα τέμνει τόν κύκλον*). La noción de diámetro (*διάμετρος*), vocablo que plantea un problema harto complicado; esta palabra es la unión de la preposición *diá* (*διά*) y el sustantivo *métron* (*μέτρον*). Δ*iá* (*διά*) alude a lo que está en medio, aquello que se ve atravesado a lo largo de, durante y en razón a; mientras *métron* (*μέτρον*) posee variados significados, entre ellos aquel que es usado para medir como instrumento, a su vez evoca la medida y la regla que se aplica, también se refiere a la dimensión en cuanto largo, ancho y alto; asimismo a la cantidad y al peso de algo. Uno de los problemas más importantes de cualquier civilización es el tema de la medida y los patrones de medida, en ellos se encuentra el diseño de los primeros calendarios y el desarrollo del arte para medir como técnica (*μετρητική*). La arquitectura, la agricultura, el comercio, la geometría, la aritmética, las ciencias, las artes y otras variadas disciplinas, dependen de la construcción y la elaboración de sofisticas técnicas de medición y sus respectivos instrumentos para llevarlas a cabo.

Un primer tópico que se encuentra, es cómo *diá* (*διά*) de diámetro (*διάμετρος*) está relacionado con *dís* (*δίς*) que es doble, y con duo (*δύο*) que es el número cardinal dos. Este hecho conlleva el complejo problema de la unidad como *henosis* (*ἕνωσις*), que conduce a la unidad (*μονάς*), aquello que está solo y es único (*μόνος*): lo que es uno (*εἶς*), como lo que está primero (*πρῶτος*) y que se ha dado antes (*πρό*) una sola vez (*ἅπαξ*). En este sentido, lo que se ha dado antes en este contexto, es el círculo (*κύκλος*) y de alguna manera se sirven los pitagóricos del círculo para representar la mónada. Se tiene cómo medir algo en porciones, dividir a medida, así como racionar está dado por el verbo *diametréo* (*διαμετρέω*), que nos evoca el mismo origen de los números a partir de la unidad (*μονάς*) del uno (*εἶς*) en la díada (*δυάς*); todos estos términos están en la génesis del diámetro en este caso del círculo. La exactitud del diámetro está en poder ser doblemente dividido (*δισσός*), es aquello que es (*δεύτερος*), lo que es segundo y que está después, señalándose de esta manera un proceso de orden y una secuencia o serie ordenada. Se espera que cada mitad de ese diámetro sea isomorfo con respecto a la otra mitad, para lo cual nos hemos de procurar aquel arte para medir (*μέτρον*), que involucra poder calcular algo a fin de poder ser recorrido y atravesado (*μετρέω*): a su vez el vocablo diámetro (*διάμετρος*) nos refiere a algo que es medido y está marcado con medida (*διάμετρητός*), algo que va de parte a parte (*διαμπάξ*) y de un extremo al otro (*διαμπερές*). Este hecho plantea que todo un recorrido tiene un origen y un fin, un dominio y un codominio a nivel de una función aritmético-geométrica.

3.2.17.1. El recorrido del círculo por medio de una línea que posee un acotamiento

A partir de este numeral se plantea el problema relacionado con la medida (*μέτρησις*), el cual cae a nivel geométrico en este contexto con lo que es recto (*εὐθύς*); propiamente, esta línea (*γραμμή*) guarda una dirección recta, hacia delante y directa (*εὐθεῖα*). Este diámetro[336] (*διάμετρος*) es (*ἐστί*) y existe (*εἰμί*) por la posibilidad que el círculo (*κύκλος*) pueda ser atravesado y recorrido (*περάω*) por una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). La grafía del artículo singular genitivo (*τοῦ*, *ὁ*) también corresponde al pronombre interrogativo *tís* (*τίς*): ¿Quién? ¿Qué? ¿Cuál?, y el pronombre indefinido *tis* (*τις*): alguno, algo, cualquiera, cada uno, uno y otro, revisten una especial importancia, dado que suge la pregunta: ¿Por cuál lugar vamos a atravesar o a cruzar un círculo? La respuesta está dada por este pronombre indefinido (*τις*), y que indica que por cualquier lugar del círculo se lo puede cruzar: no importa el lugar por el cual se lo quiere atravesar, debido a que todos los lugares son válidos para trazar esta línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). También la noción de círculo (*κύκλος*) es dinámica, hecho presente en que siempre se está rodeando algo y yendo en círculo (*κυκλόω*). De manera que cuando se va a atravesar con una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) un círculo se lo hace girar (*κυκλόω*) y rodar (*κυλίνδω*). No se ha de perder de vista que lo que es recto (*εὐθύς*) involucra una función en cuanto que ha de ser capaz de enderezar, corregir, enmendar, conducir, dirigir y guiar derecho o rectamente (*εὐθύνω*): es decir, existe una serie de principios y reglas capaces de verificar si algo es recto o no. Es tan notoria la importancia de esta acción, como ya se ha anotado, que este vocablo está presente en la justicia como rectitud (*εὐθύτης*), el investigador, juez y revisor de cuentas (*εὔθυνος*): todos descienden de lo que es bueno en todos los sentidos, justo, exacto, favorable y feliz (εὖ).

Cualquiera (*τις*) de estas líneas rectas o derechas (*εὐθύς*) están situadas a lo largo (*διά*) de su (*τοῦ*) centro (*κέντρον*) atravesándolo (*κεντέω*) de una manera guiada (*ἄγω*) y (*καί*) limitándolo (*περατόω*) sobre (*ἐπί*) cada uno de los dos extremos (*ἑκάτερος*) de la (*τά*)

[336] Hoy día el diámetro tiene la misma simbolización que el conjunto vacío $\varnothing$: d = 2r, d = d/2. El diámetro de un subconjunto de un espacio métrico es la menor cota superior del conjunto de todas las distancias entre las parejas de puntos en el subconjunto. El diámetro de un subconjunto A es: $\sup \{d(x, y) / x, y \in A\}$. el subconjunto A de un espacio métrico (X, ρ) está acotado si existe un número $d > 0$, tal que $\rho(x, y) < d$ para todo $x, y \in A$, la cota inferior más grande para d es el diam(A). *Elementary Topology*, Viro, (2008, p.21).

parte (*μέρος*) que viene a lo largo por debajo (*ὑπό*) de la (*τῆς*) circunferencia (*περιφέρεια*) del (*τοῦ*) círculo (*κύκλος*). Se plantea un uso de una proposición que está aseverando de manera universal los distintos componentes de la misma; además, introduce una variedad de matices en la manera en que efectúa este tipo de generalización, sea el caso: se hace uso del pronombre indefinido (*τις*) para afirmar que tenemos en medio (*διά*) unas líneas rectas (*εὐθεῖα γραμμή*) que tienen la propiedad de constituirse en una unidad de medida completa (*διάμετρος*) en relación al círculo (*κύκλος*). Se anuncia, además, la introducción de la medición por medio de la díada (*διαμετρέω*), el comienzo de una técnica que permite medir[337] (*μετρέω*) y establecer de esta manera el concepto de medida (*μέτρον*), tan necesario para la existencia de una disciplina formal, en este caso de arte o técnica (*τέχνη*) de la geometría (*γεωμετρία*): la medida de aquello que está sobre (*ἐπί*) la tierra (*γῆ*). Este hecho es de una enorme importancia, ya que ya anuncia que se van a establecer unas leyes o postulados nuevos que tienen la posibilidad de ser medidos.

Se puede afirmar que existen dos clases de definiciones: unas que no aspiran a una medición y que están por encima de todos los modelos concretos en un nivel de generalización muy alto, las llamadas metaproposiciones o metadefiniciones e identificadas con varias de las definiciones presentadas en *Los Elementos* (*Στοιχεῖα*). Por otra parte, existe una teoría sujeta a unas modelaciones que aspiran medir algo de manera precisa, esto involucra que su postulación está acondicionada y amarrada a la posibilidad de procurarse una representación concreta, la cual además aspira ser medible; se anuncia así la existencia de una proposición como ecuación. Es decir, una fórmula dotada de un consenso universal fundamentado en la medida (*μέτρον*). Estamos frente a dos niveles del lenguaje muy distintos: un metalenguaje universal no aprehensible por fórmulas, propuesto y planteado como un lenguaje fundante como es el griego antiguo, el cual no está sujeto a la transformación que han sufrido los idiomas modernos hablados hoy día como el español o el inglés. Al ser escritos estos textos en griego antiguo, no se ha contemplado la evolución del griego antiguo. Es de conocimiento generalizado que el griego antiguo surgió de la

---

[337] Recuérdese hoy que la noción de medida es fundamental en la topología, sea el caso se define una métrica como una función $\rho: X \times X \to \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$, es una métrica o función distancia sobre X. *Elementary Topology*, Viro, Ivanov (2008, pág. 18).

fusión de varios dialectos y del griego homérico. Se plantea un idioma indoeuropeo que se dice fue anterior a todos los presentes desde el griego antiguo a las lenguas modernas, sin embargo del cual no existe ni un solo texto concreto que nos posibilite la elaboración de unas proposiciones que aspiran situarse como metaproposiciones. Es conveniente hacerlo en griego antiguo, tal como se las encuentra en *Los Elementos* dado que están situadas en un nivel fundacional del lenguaje, en especial de uno dotado de una complejidad y completitud superior al que se habla hoy día. A su vez, se puede plantear un segundo paso, que consiste en pasar de una metaproposición a una proposición, este tránsito involucra la modelación de una teoría donde estas proposiciones son susceptibles de volverse ecuaciones medibles en relación a unos cálculos concretos.

3.2.17.2. La inconmensurabilidad de las rectas que han de atravesar el centro de un círculo

Aquí se percibe cómo se plantea la posibilidad de la existencia de una pluralidad inconmensurable de líneas rectas (*εὐθεῖα γραμμή*), que están situadas en medio las unas de las otras (*διά*), dado que como se ha visto en la definición 2, una línea no tiene ancho (*γραμμή δέ μῆκος ἀπλατές*). Este hecho acarrea la existencia de incontables o infinitas líneas que están situadas entre sí, atravesando y aguijoneando (*κεντέω*) el centro (*κέντρον*) de un círculo (*κύκλος*), el cual posee una envolvente (*περιφέρεια*) que funge como límite (*πέρας*) situada a su derredor (*ἐπί*). Algo que una vez más merece la pena destacar, es la capacidad de tales líneas rectas (*εὐθεῖα γραμμή*) de guiarse y conducirse a sí mismas (*ἄγω*), algo que es fundamental en el álgebra lineal. Este hecho que está contenido en la noción de un vector[338], el cual es simbolizado hoy día como: u = ai + bj + ck, son precisamente los vectores i, j y k que comunican la ortogonalidad tan mentada en la definición 10 (*εὐθεῖα*

---

[338] El vector expresa unas magnitudes y está dotado de una dirección que está representada por los números reales llamados escalares, su simbolización está dada por flechas que se orientan en relación a un punto 0. En el espacio tridimensional tenemos el producto cruz entre dos vectores linealmente independientes, es decir que ninguno de los dos es una combinación lineal del otro, tal vector es perpendicular a ambos, en consecuencia normal al plano que los contiene: i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1), cada uno denota el vector unidad en cada una de las tres direcciones que permiten definir un espacio tridimensional. Cualquier vector u = (a, b, c) en R^3 puede ser expresado como: u = (a, b, c) = ai + bj + ck. Podemos sumar y multiplicar vectores, si $u = a_1i + a_2j + a_3k$ y $v = b_1i + b_2j + b_3k$, luego $u + v = (a_1 + b_1)\, i + (a_2 + b_2)\, j + (a_3 + b_3)\, k$; $u \cdot v = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$; $u \times v = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$. Tema tratado en: *Linear Algebra*, por Seymour Lipschutz (1991, p. 49).

κάθετος), que además es la instancia que otorga la dirección a la línea, lo cual es básico en la física para establecer las ecuaciones de movimiento de un objeto. Es propio del aguijonear o atravesar picando algo (*κεντρόω*), hacerlo en este contexto en relación a un centro, propiamente el centro de un círculo (*κέντρον*); y, en este contexto, la noción de circunferencia (*περιφέρεια*) es un concepto dependiente del de círculo (*κύκλος*) que lleva a considerar la pareja círculo-circunferencia (*κύκλος-περιφέρεια*) de manera inseparable. La figura (*σχῆμα*) determinante que define la construcción y la resolución de toda la teoría involucrada aquí, es el círculo (*κυκλόω*) y no la circunferencia (*περιφέρεια*). Esta es una noción dependiente y en consecuencia puede sufrir unas variaciones en la manera en que la queramos y necesitemos construir y plantear. Tal hecho es de vital importancia, si se desea recrear otra clase de geometrías. Es curioso asociarle a una línea (*γραμμή*) la propiedad que sea puntiaguda (*κέντρον*) al igual que un vector, con lo cual no todas las líneas son puntiagudas. En la definición de línea no se le asocia la propiedad de tener punta o de ser como un aguijón o la punta de una lanza (*κέντρον*), tal hecho tan solo se da en la definición 16 y lo hace en relación al círculo (*κύκλος*). Por consiguiente, no todas las líneas son iguales, son de distintas clases y las que son propias del círculo, son líneas puntiagudas (*γραμμή κέντρου*). Además, tienen otra propiedad: están limitadas por la circunferencia (*περιφέρεια*) y esto está dicho en que son líneas (*γραμμή διάμετρος*) completas limitadas, que tienen la propiedad de atravesar (*κεντρόω*) todo el círculo (*κύκλος*) y, sobre todo, de pasar y atravesar su centro (*κέντρον*); en ese sentido, poseen una dirección dado que son capaces de guiarse o conducirse (*ἄγω*). Estos predicados asociados a la noción de línea (*γραμμή*) tan solo se dieron luego que se planteara la noción de figura (*σχῆμα*) en la definición 14. Esa posibilidad de irle agregando predicados a una noción fundamental como lo es la de la línea (*γραμμή*) permite enriquecer una teoría, más cuando se crea un ente nuevo como es la figura (*σχῆμα*), que bien podría estar constituida de líneas, ya que esta es una noción más primitiva que la noción de figura.

Se da, entonces, una relación de complementación, en la que ambas nociones se necesitan, aquella perteneciente al centro (*κέντρον*) y aquella propia de la circunferencia o periferia (*περιφέρεια*). Ambas nociones son altamente dinámicas, la una está caracterizada por la acción de pinchar y atravesar (*κεντρόω*); mientras que la otra se la identifica por la propiedad de transportar algo alrededor (*περιφέρω*), esta acción involucra asimismo abrazar al círculo rodeándolo de manera rítmica (*περιέχω*). Se nota cómo el punto (*σημεῖόν*) pasa a ser un centro equidistante (*κυκλόω*), tan solo cuando está en relación a una figura (*σχῆμα*) redonda (*σφαιρικός*), una tal que es la suma perfección de lo que es redondo, el llamado círculo (*κύκλος*). Ese centro (*κέντρον*) debe de ser atravesado, hecho bastante particular si en tiempos modernos se tiene en la cuenta la existencia de un agujero negro: muchas veces se dice que hay que atravesarlo para emerger en otro lugar del universo. No se dice que hay que circundar ese centro sino que lo que se circunda (*κυλίνδω*) es el círculo (*κύκλος*), ya que el punto (*σημεῖόν*) en virtud de la definición 1 no tiene partes (*σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*). Esto hace que sea inaprehensible, como que no posee una dimensionalidad, al no tener ancho, ni largo ni alto. Se percibe que posee una vecindad que lo rodea y es donde habita (sin embargo, pareciera que el punto en sí mismo está fuera de la realidad), siendo nuestra única posibilidad cruzarlo y atravesarlo (*κεντέω*), siempre y cuando se lo pueda aprehender en relación a un círculo (*κύκλος*) como su puntualidad central. Se nota que la definición moderna de límite en cuanto 'la vecindad de un punto'[339] es una noción que se origina en estos antiguos tiempos. Los otros dos criterios que se le asocian al punto son la relación de isomorfismo que se da entre varios puntos (*εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*) definición 4, y cómo los límites de una línea son puntos (*γραμμῆς δέ πέρατα σημεῖα*) definición 3.

3.2.17.3. La noción de compacidad isomórfica entre los puntos de una línea

El isomorfismo entre los puntos, es decir la igualdad (*ἴσος*) en la forma (*μορφή*) de todo punto respecto a los demás, acarrea conceptos como el de la puntualidad que involucra la simultaneidad: la copuntualidad involucra que varios eventos se den de manera simultánea en varios lugares equi-distantes entre sí. Esto hace que todo lo relacionado con un punto (*σημεῖόν*) involucra las nociones de completitud y la de equivalencia o igualdad.

[339] Si X es un espacio topológico, p es un punto en X, una vecindad de p es un subconjunto V de X, que incluye un conjunto abierto U que contiene a p: $p \in U \subseteq X$. Es equivalente a decir que $p \in X$ dado que está al interior de V. De aquí se desprende el teorema: un subconjunto de un espacio métrico es abierto si y solo si contiene además del punto x, alguna vecindad de x. Un punto x es un espacio métrico, está aislado si el conjunto {x} tan solo consiste del x y está abierto. Es necesario que la vecindad de un punto sea abierta de lo contrario, se estarían incluyendo los puntos límites. *Set Theory and Metric Spaces*, I. Kaplansky (1972, p.73).

Este hecho conlleva que el punto (*σημεῖόν*) como centro (*κέντρον*) de un círculo (*κύκλος*) tiene esa propiedad que para cada línea de las incontables que lo pueden atravesar (*κεντρόω*) de manera completa (*διάμετρος*) todas sean iguales entre sí. Todas estas líneas derechas (*εὐθεῖα γραμμή*) tienen el mismo punto central (*κέντρον*), el cual está situado en el centro del círculo, y cuya vecindad o envolvente es la circunferencia (*περιφέρεια*), la cual establece y define los límites mismos del círculo. Se podría afirmar que cada línea (*γραμμή*) de las incontables que atraviesan el centro de un círculo (*κέντρον*) posee su propio punto (*σημεῖόν*), lo que llevaría a afirmar que en ese centro habitan incontables puntos que son isomórficos entre sí y, en consecuencia, iguales. Es como sí el punto tuviera la propiedad de igualarse o volverse equivalente a otro punto, pudiendo ser apreciado como la intersección infinita (*ἄπειρον*) por carecer de límite o ser ilimitada e indefinible, y circular de lo que es lo uno (*εἷς*): $\cap_{\text{εἷς}}^{\text{ἄπειρον}}$; $\cap_{\varepsilon}^{\text{ἄ}}$. Es decir, en el centro de un círculo (*κέντρον*) hay infinitos puntos (*ἄπειρος κέντρον*) todos copuntuales entre sí, se asemejan a que son un solo punto, mientras en realidad son infinitos e incontables puntos.

Es de destacar la cantidad de vocablos y la inusitada riqueza del griego antiguo, capaz de componer y formar incontables nuevas palabras, sea el caso en relación a que un círculo (*κύκλος*) siempre está girando (*κυκλόω*) y dando vueltas (*κεντέω*). Existe una relación muy cercana con la preposición *épi* (*ἐπί*) que significa alrededor en referencia al movimiento circular que ella describe, y perí (*περί*), sea el caso en: estar alrededor (*περιΐστημι*) y en brillar alrededor (*περιλάμπω*), para citar algunas de las tantas combinaciones posibles. Sea el caso, en relación a circundar (*κυκλόθεν*) o rodear algo (*πέριξ*), o mirar alrededor e investigar (*περιβλέπομαι*), indican la riqueza de matices en relación al círculo (*κύκλος*) y a la circunferencia (*περιφέρεια*). Todos estos verbos, adjetivos y adverbios señalan la existencia de un movimiento, mostrando que la geometría (*γεωμετρία*) que la subyace es un arte o técnica (*τέχνη*) dinámica y no estática como se la ha venido concibiendo, en especial la denominada geometría plana. Se observa, que la geometría euclidiana –que de alguna manera es también una recopilación del trabajo de otros tantos geómetras y matemáticos previos– presupone las llamadas geometrías no euclidianas. En especial, en relación a la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), donde lo recto (*εὐθύς*) se deriva del vocablo bueno (*εὖ*), el cual indica que: no se está amarrados o limitados a que lo recto (*εὐθύς*) tenga una sola y única representación simbólica posible. Tal como el punto (*σημεῖόν*) desciende de *sêma* (*σῆμα*) que significa: signo, marca y símbolo. Lo recto (*εὐθύς*) remite a varias simbolizaciones o representaciones, su raíz es recto, derecho y bueno (*εὖ*), cuya forma poética conlleva algo que es noble y bueno (*ἐΰς*). También es apreciable una transcendencia hacia aquellas formas o imágenes (*εἶδος*) dentro de las cuales cabrían las figuras (*σχῆμα*) geométricas. Ese *eidos* está presente en aquellas figuras y en las diversas representaciones (*εἴδωλον*) que se puede hacer de las mismas, con lo cual lo recto (*εὐθύς*) puede aspirar a varias representaciones. Por otra parte, existen unas representaciones que poseen una jerarquía superior, siendo el criterio de lo bueno (*εὖ*), aquello que está por encima de todos, y ello permite parafrasear al propio Pitágoras: que los números (*ἀριθμός*) están en la génesis del cosmos, que el número uno (*εἷς*) está representado en la mónada como unidad (*μονάς*) algunas de sus propiedades pueden ser representas por el círculo (*κύκλος*). Existe, en esta forma, una jerarquía en los mismos vocablos griegos, todo un proceso contemplativo de lo que es lo bueno[340] (*εὖ*) en cuanto rectitud (*εὐθύτης*); así se tiene la posibilidad de construir otro tipo de líneas rectas, tantas cuanto distintos modelos geométricos no euclidianos sean permitidos. La rectitud de una línea recta permite no estar limitados a una sola representación tanto teórica como simbólica de la misma.

Esta recta que atraviesa el círculo (*κυκλόω*) lo hace a través de su centro (*κέντρον*) y es la que se conoce como diámetro (*διάμετρος*). Para que tal situación se pueda dar, esta línea ha de ser recta (*εὐθεῖα γραμμή*), además, debe tener la propiedad de dividir (*διαμερίζω*) aquello que está a ambos y en medio (*διά*) del centro. Tal hecho permite

[340] Lo bueno (*εὖ*) y lo noble (*ἐΰς*) como rectitud (*εὐθύτης*) es algo que está muy anclado en la cultura griega antigua, basta referirnos a Platón en *La República*: *pues me has oído decir muchas veces que él más sublime objeto de conocimiento es la idea del bien, que es la que, asociada a la justicia y a las demás virtudes, las hace útiles y beneficiosas (ἐπεί ὅτι γε ἡ τοῦ ἀγαθοῦ ἰδέα μέγιστον μάθημα, πολλάκις ἀκήκοας, ᾗ δή καί δίκαια καί τἆλλα προσχρησάμενα χρήσιμα καί ὠφέλιμα γίγνεται. For you have often heard that the greatest thing to learn is the idea of good by reference to which just things and all the rest become useful and beneficial. 505a*). Nótese que se utiliza la palabra *agathos* (*ἀγαθός*) para significar en este contexto lo bueno, provechoso y útil, frente a la idea o forma o apariencia (*ἰδέα*), con el superlativo de lo es grande (*μέγας*) o sea lo más grande (*μέγιστον*), de lo que se ha aprendido (*μάθημα*) – vocablo del que deriva la matemática –, es el ser recto, observante de las costumbres correctas y justas (*δίκαιος*), de lo que es la justicia o la *dikaiosúnē* (*δικαιοσύνη*). En ese sentido, la matemática, que proviene de lección o conocimiento aprendido (*μάθημα*), es uno de los saberes que más ejemplifica lo que se aprende (*μανθάνω*) y, en consecuencia, busca orientarse hacia el bien o lo justo. En ese sentido los objetos geométrico-aritméticos se subordinan a aquello emanado del bien, que en este contexto está asumido por el vocablo *agathos* en cuanto hacer el bien (*ἀγαθόω*).

distribuir y repartir (*μερίζω*) las dos (*δύο*) partes (*μέρος*) en que se va a dividir el círculo. Se puede afirmar que cada una de estas partes fruto de esta división o separación (*μερισμός*) es igual (*ἴσος*) a la otra, ya que parte de la propiedad del diámetro (*διάμετρος*) es dividir de manera igual (*ἰσάζω*) ambas partes (*μέρίς*) en dos porciones idénticas. Existe, así, un isomorfismo entre las distintas partes de un círculo, que no solo se manifiesta al dividirlo en dos partes sino en todas las que se quiera. Se puede seguir dividiendo (*μερίζω*) el círculo (*κυκλόω*) de manera ilimitada dado que toda línea fruto de la definición 2 posee largo más no ancho (*γραμμή δέ μῆκος ἀπλατές*). Tal hecho es posible debido a que estas líneas (*γραμμή*) están limitadas por ser interiores a la circunferencia (*περιφέρεια*) y por ser rectas (*εὐθύς*). Se prosigue manifestando que cualquiera (*ὅστις*) de estas líneas o diámetros (*διάμετρος*) están en consecuencia (*καί*) divididos y separados (*διχάζω*) de manera doble (*δίς*) en dos partes diferentes y opuestas (*δίχα*). El cual (*ὅς*) este diámetro (*διάμετρος*) puede ser cualquiera (*τις*) de las que sean posibles dividir (*διχάζω*) de entre este contexto. La acción que se evoca para realizar esta tarea es la de cortar a lo largo (*τέμνω*), vocablo que también significa asolar, desbastar y destruir. Esta es una referencia a la unidad completa del círculo (*κυκλόω*) y a la propiedad de circundar o rodear (*κεντέω*) lo que está debajo (*ὑπό*) de su periferia o circunferencia (*περιφέρεια*). Tal procedimiento se puede realizar todas las veces que se quiera (*ἑκάτερος*), lo que permite desarrollar esas habilidades y destrezas propias de esta técnica y arte (*τέχνη*) de la medida (*μέτρον*). Es de destacar en Pitágoras la génesis y el origen (*γένεσις*) de los números (*ἀριθμός*) está en la división (*διχάζω*) primigenia del primer (*πρῶτος*) círculo (*κύκλος*) –en que estaba representada la unidad (*μονάς*) primordial, la primera mónada– en dos mitades (*διχας*) con propiedades opuestas o diferentes (*δίχα*): el medir (*μετρέω*) está unido a un proceso de cortar y cercenar (*τέμνω*).

3.2.18. La reproducción del patrón de medida proviene de la bisección del círculo

En esta proposición se está introduciendo el procedimiento que permite cortar y dividir una unidad fundamental, lo que involucra el inicio de los procedimientos algorítmicos que permiten la creación de los distintos patrones de medida, los cuales deberán ser reflejados en métodos claros al abordar una demostración matemática: *un* *semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo* (*A semicircle is the figure contained by the diameter and the circumference cut off by it. And the centre of the semicircle is the same as that of the circle. ἡμικύκλιον δέ ἐστι τό περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καί τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δέ τοῦ ἡμικυκλίου τό αὐτό, ὃ καί τοῦ κύκλου ἐστίν*). Antes de adentrarse en analizar esta definición, hay que recordar que la noción de díada se introduce en relación a una figura (*σχῆμα*), en relación a un círculo (*κύκλος*) que es cortado (*τέμνω*) en dos (*δίς*). Se ha visto que la noción de punto está presente en varias formulaciones: una en relación al problema del todo y la parte, otra en relación a la línea (*γραμμή*) y, finalmente, como el centro (*κέντρον*) de un círculo (*κύκλος*). En todos estos manejos, está al frente un universo dinámico en donde los diversos conceptos y nociones son presentados en un contexto lleno de movimiento y no estático. Recuérdese que en Pitágoras de la mónada original surge en la díada que se asemeja a un círculo, que está sola y posee una unidad consigo mismo.

La noción de medir (*μετρέω*) emerge en estrecha unión con la figura (*σχῆμα*), en este caso redonda, la cual se ve medíada por un diámetro (*διάμετρος*) que atraviesa al círculo dividiéndolo en dos mitades iguales (*ἴσος*): donde la misma forma (*μορφή*) se repite en cada una de ellas. Esta línea (*γραμμή*) es una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), la que cumple una condición de rectitud y en ello de perfección de lo bueno y excelso (*εὖ*). No se trata de hacer mediciones (*μέτρον*) en algo abstracto, sino va mediado por un objeto sobre el cual recae tal procedimiento. Por eso, antes de medir (*μετρέω*) algo, se ha de escoger aquella figura (*σχῆμα*) perfecta, completa y consumada (*τέλος*), la cual no es ninguna otra que el mismo círculo (*κύκλος*), algo que es el símbolo de lo que es lleno y pleno (*πίμπλημι*), siendo además una de las máximas representaciones de lo uno (*εἷς*). Una vez hecho esto surge la pregunta que indaga: ¿Cómo se ha de crear una medida[341] que pueda incrementarse

[341] El concepto de medida es fundamental en las matemáticas, en especial en el análisis real, es de así como tenemos la función de medida más conocida como la medida Lebesgue, sea R^p un espacio euclidiano constituido por intervalos cuyos elementos son puntos $x = (x_1,\dots, x_p)$, tales $a_i \leq x_i \leq b_i$, con $i = 1,\dots, p$. La posibilidad que se tenga $a_i = b_i$ no es considerada, debido a que aún el conjunto vacío se incluye entre los intervalos. Si A es la unión de un número finito de intervalos, A es un conjunto elemental si I es un intervalo, definimos $m(I) = \prod_{i=1}^{p}(b_i - a_i)$, es un procedimiento sistemático para asignar un número a cada intervalo, que tomado como subconjunto busca ser interpretado a partir de su tamaño. Una medida es una generalización de

o multiplicarse (*πληθύνω*), disminuirse o dividirse (*διχάζω*), y que además sirva de patrón o unidad (*ἑνότης*)? Tal condición la cumple una línea que además de pasar por el centro (*κέντρον*) del círculo (*κύκλος*), lo atraviesa de extremo a extremo teniendo como límite la frontera misma del círculo que es la circunferencia (*περιφέρεια*). La ventaja de este tratamiento está en que se puede trazar tal línea desde cualquier lado del círculo y en todas las circunstancias se cumple la misma equivalencia, y se nota que el círculo resta rotando (*κυκλόω*) de manera que todas las incontables líneas que se pueden trazar y representar dentro de una proposición con una variable libre. A su vez, el valor de una línea concreta que se escoja como patrón de medida se vuelve una variable ligada, vinculable a la fórmula que permite ilustrar este algoritmo de medición. De modo que tal formulación puede aspirar a verse tratada como una función proposicional cuantificada universalmente sobre la cual se puede derivar una función que permite replicar la misma medida una y otra vez: tal como el milímetro, el centímetro, el metro, etc., cumpliendo la condición de ser exactamente igual (*ἴσος*) cada escogencia con las otras.

3.2.18.1. La reproducción de un procedimiento matemático se da a partir del círculo

Tenemos en este contexto el problema de la mitad o lo es medio (*ἡμι*), lo que está en medio, por mitad o la mitad (*ἥμισυς*) del círculo (*κύκλος*), aquel globo o esfera que está en movimiento circular. La mitad de ese círculo (*ἡμικύκλιος*) asimismo (*δέ*) que es (*ἐστι*) y existe (*εἰμί*), como él (*τό*) que abraza rodeando (*περιέχω*) la figura (*σχῆμα*) desde abajo (*ὑπό*) y también al (*τῆς*) diámetro (*διάμετρος*) inclusive (*καί*) al (*τῆς*) que toma de lejos (*ἀπολαμβάνω*) bajo y a lo largo (*ὑπό*) de la misma (*αὐτῆς*) circunferencia (*περιφέρεια*). La noción de la mitad o lo que está en medio (*ἡμι*) nos ha permitido derivar dos objetos o dos mitades, en este caso dos medioscírculos (*ἡμικύκλιος*) que constituidos en un solo objeto que circunda (*περιέχω*) está figura (*σχῆμα*): es el círculo (*κύκλος*) que está dividido en dos mitades (*ἡμικύκλιος*) por el diámetro (*διάμετρος*). Tenemos cómo en virtud de este movimiento circular que los rodea (*περί*) teniéndolos y conteniéndolos (*ἔχω*), se nos

---

los conceptos de línea, área y volumen. Ver en *Principles of Mathematical Analysis*, Rudin (1964, 302-3). En ese sentido, el diámetro se asemeja a un intervalo exacto, que puede ser reproducido en una línea recta una vez seleccionado el tamaño que tendrá el primero de ellos como patrón de medida.

manifiesta que estamos en presencia de una figura (*σχῆμα*) que posee largo, ancho y alto, es decir, es tridimensional. Algo que hay que tener en cuenta es que, si cortamos este círculo (*κύκλος*) en dos mitades (*ἡμι*), el diámetro (*διάμετρος*) es el único que posee esa unidad (*εἷς*) completa y fundamental, en que no existe otra línea (*γραμμή*) que pase por su centro (*κέντρον*) y que divida en partes iguales un círculo. Esto nos lleva a que el diámetro solo sería uno y a medida que va disminuyendo, las demás líneas que se pueden ir trazando hasta que termine en un punto (*σημεῖόν*), que es horizontal al plano del vértice o punto central del círculo (*κέντρον*). La noción del diámetro (*διάμετρος*) de un círculo[342] (*κύκλος*) abordado en dos mitades (*ἡμικύκλιος*) presupone que va disminuyendo hasta volverse de nuevo un punto (*σημεῖόν*): tendríamos de esta manera dos puntos situados en el plano horizontal, uno a la derecha y otro a la izquierda para cada una de las dos mitades. A su vez existiría un tercer punto (*σημεῖόν*) único en su género, significado que ya está presente en la etimología de figura (*σχῆμα*), que por sus singulares características corresponde a aquel punto único que es el centro de un círculo (*κέντρον*). Notamos cómo la puntualidad del punto del círculo (*κέντρον*) se ha dividido en dos (*ἡμι*), en la cual tenemos una serie de puntos que se desplazan en un plano (*ἐπιφάνεια*), en cuya horizontal podríamos construir una línea (*γραμμή*): esta estaría habitada por incontables puntos (*σημεῖόν*), que a su vez son el reflejo de incontables líneas (*γραμμή*) que cortan a tal superficie exactamente en el lugar medio o son medias (*ἡμι*) aunque de inferior longitud (*μῆκος*) que la línea del diámetro (*διάμετρος*) central que es una sola y única.

De manera que la noción de medida (*μέτρον*) cambia, permitiendo que la unidad (*εἷς*) inicial que es patrón de medida esté representado en el diámetro (*διάμετρος*). A su vez, se nota cómo este proceso de medir (*μετρέω*) se está efectuando bajo la tutoría de la preposición (*διά*), que no solo gobierna aquello que está en medio sino a lo largo a nivel de una extensión. De esta manera el diámetro (*διάμετρος*) contiene en sí mismo las demás

[342] Un círculo puede ser apreciado como una curva simple cerrada que divide al plano o a la superficie en dos regiones, una interior y otra exterior. También puede ser usada para servir de frontera a una figura, se le conoce también como un disco. Y puede ser definida en términos de una elipse cuyos dos focos coinciden y donde su excentricidad es cero. Notamos que el diámetro de un círculo es $\pi = 3.141592654\ldots$ A su vez la longitud de una circunferencia C en relación a su largo, su diámetro d y su radio r está dada por: $C = 2\pi r = \pi d$. Su área que descubierta por Arquímedes es $A = \frac{1}{2}\, Cr = \frac{1}{2}\,(2\pi r)\,(r) = \pi r^2$, que expresada en términos de su diámetro es: $A = \pi d^2/4$. Ver *Geometry*, por Barnett Rich y Christopher Thomas (2009, págs. 93, 184).

subdivisiones del mismo, siendo capaz de medirlas (*διαμετρέω*) siempre y cuando estas sean construidas a partir de un círculo (*κύκλος*), que ha sido dividido en dos mitades (*ἡμικύκλιος*) iguales. Es de destacar cómo tal situación se da sobre una superficie (*ἐπιφάνεια*), noción que fue introducida en la definición 5 y cómo esta soporta desde abajo (*ὑπό*) a esta figura (*σχῆμα*) que ha sido cortada en dos. Es importante señalar, cómo para los griegos tanto las estrellas y planetas que habitan el cosmos como las figuras geométricas se apoyan en algo, los primeros en el éter y los segundos en la superficie (*ἐπιφάνεια*). Lo que apoya a las figuras (*σχῆμα*) desde abajo (*ὑπό*) está situado sobre una horizontal o un suelo, pero al mismo tiempo el uso de la preposición *epí* (*ἐπί*) indica algo que está sobre. El uso de la preposición *perí* (*περί*) indica que la figura (*σχῆμα*) en cuestión, este círculo (*κύκλος*) dividido en dos mitades (*ἡμικύκλιος*) está siendo abrazado en todas las direcciones. Este hecho está señalado por el prefijo *perí* (*περί*) en el verbo (*περιέχω*), que unida al verbo *ékho* (*ἔχω*) señala algo que se tiene, se contiene y agarra. Aquí podemos ya encontrar los antecedentes a la teoría de conjuntos de Cantor[343]. A su vez la preposición alrededor (*περί*) señala una proximidad o vecindad inmediata y cercana, este hecho se ve potencializado por el verbo (*ἀπολαμβάνω*) que indica que tal acción señalada por la preposición (*ἀπό*) es capaz de llevarse a cabo y realizarse a distancia. Lo cual es tomar algo a distancia, agarrarlo y no soltarlo sin importar lo lejos que se esté, una alusión directa de cómo el éter (*αἰθήρ*) es capaz de incidir a distancia. Es de notar, cómo esto que rodea, toma, agarra (*λαμβάνω*) lo hace desde abajo y a lo largo (*ὑπό*), permitiendo que la misma figura (*σχῆμα*) u objeto se encuentre consigo mismo o se autofundamente. Tal hecho está sugerido por el pronombre (*αὐτός*) que pone de manifiesto cómo la circunferencia (*περιφέρεια*) de alguna manera también amarra, aportándole solidez y estabilidad al círculo (*κύκλος*). Se nota la importancia una vez más del límite (*πέρας*), como aquella frontera que le da estabilidad a lo

[343] Es fundamental esta noción de agarrar, contener, asir, una de cuyas primeras inspiraciones está en el punto que se sitúa en el centro de un círculo. No obstante, le correspondió a Georg Cantor concretarla. Motivado por el problema de la continuidad de una función $f(x)$ en base a los resultados de Heine, en especial el poderla tratar como unas series que convergan uniformemente, llevó a Cantor a nombrar ‘aquellos conjuntos de puntos de primera especie’. Lo cual terminó plasmándose en la famosa teoría de conjuntos y de los números transfinitos. Sus primeros documentos sobre conjuntos lineales infinitos lo condujo al problema de los símbolos infinitos y la necesidad de distinguirlos entre los distintos conjuntos. Notamos cómo a partir de la enorme complejidad de simbolizar algo inconmensurable surge un procedimiento sencillo que simplifica el problema por medio de la teoría de los conjuntos, vocablo se deriva de los resultados en los cálculos sobre magnitudes numéricas. Ver Georg Cantor en: *The Princeton Companion to Mathematics* (*2008,* pág. 778).

que está en su interior. De nuevo, en ese proceso reflexivo (*αὐτός*) nos encontramos con aquello que vuelve a (*αὖ*) señalar aquel ente preciso (*τόν*) que posee la misma forma (*μορφή*), en consecuencia (*ἀπό*) le permite contener en su interior tantos otros círculos (*κύκλος*) como semicírculos (*ἡμικύκλιος*). Que están apoyados desde abajo y bajo ellos (*ὑπό*) por ese centro (*κέντρον*) que es puntual (*σημεῖόν*), y que logra aportarle estabilidad a todo lo que esté dentro del mismo (*ὅ καί τοῦ κύκλου ἐστίν*).

3.2.19. La geometría euclidiana define la figura a partir de las líneas rectas

En este axioma podemos apreciar cómo las figuras (*σχῆμα*) geométricas, en especial, las figuras rectilíneas (*σχήματα εὐθύγραμμά*) son aquellas formas (*εἶδος*) abstractas puras que definen la normatividad de todo ente geométrico y aritmético: delineando, bosquejando, escribiendo y dibujando (*γράφω*) la ley que corrige y endereza (*εὐθύνω*) hacia lo que es lo más bueno y mejor (*εὖ*) que está en la forma recta (*εὐθύς*). Las líneas rectas se convierten en aquella envolvente que define la topología de una figura geométrica construyendo su espacio y definiendo sus leyes: *Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por 3, cuadriláteras las comprendidas por 4, multiláteras las comprendidas por más de 4 rectas* (*Rectilineal figures are those which are contained by straight lines, trilateral figures being those contained by three, quadrilateral those contained by four, and multilateral those contained by more than four straight lines. σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τά ὑπό εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μέν τάὑπό τριῶν, τετράπλε υρα δέ τά ὑπό τεσσάρων, πολύπλευρα δέ τά ὑπό πλειόνων ἤ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα*). Estas formas y figuras (*σχῆμα*) sirven para conducirse y establecen el estado o la constitución que gobierna, la cual tiene esa capacidad de síntesis representada en la habilidad de constituirse como un esquema, diagrama o plan que revela la naturaleza de aquello que se nos muestra. Este sustantivo neutro proviene del importante verbo *ékhō* (*ἔχω*) que es tener, poseer, contener, mantener algo que se tiene con las manos y en ese sentido se está sujetando, lo cual le permite a uno estar con el control de algo; y del sufijo –*ma* (-*μα*) que se le agrega a los verbos parar formar sustantivos neutros que denotan el resultado de una acción en cuanto una instancia particular de la misma o de su objeto.

Estas figuras (*σχήματα*) rectilineales involucran una acción concreta que permite tener posesión y control sobre algo, tal hecho nos lleva a representar, arreglar y formar para sí (*σχηματίζω*) un plan o diagrama que sirve de ley o constitución. Esta forma de gobierno está encaminada a aquello que es recto, derecho, honrado (*εὐθύς*), en especial a aquellas figuras rectilíneas (*εὐθύγραμμος*) que encarnan aquella rectitud y justicia (*εὐθύτης*). Tales líneas (*γραμμή*) indican de por sí un curso que involucra una frontera en la cual podemos apreciar un punto de comienzo y uno de llegada. Estas líneas (*γραμμή*) tienen la propiedad de tener una suerte de función f asociada a las mismas, que es esta función de enderezar, en cuanto corregir, enmendar, conducir y guiar de manera derecha o recta; algo propio de todo gobierno y de toda verificación (*εὐθύνω*): f(*εὐθύνω*), f(ε). No es cualquier tipo de función, sino aquella que además involucra un salto de tipo lógico, en cuanto al tomar (*ἔχω*) una línea (*γραμμή*) se la está sometiendo a un proceso de rectificación y enderezamiento (*εὐθύνω*), que además está guiado hacia aquello que es bueno y recto en todos los sentidos (*εὖ*). Tal formulación al ser examinada en detalle se erige como una metaproposición, donde la noción o concepto de lo bueno o recto (*εὖ*) está en un nivel de predicación muy superior a las meras representaciones que se hagan del mismo. De manera que lo recto en todos los sentidos (*εὖ*) puede ser visto como una teoría T_n no acotable por las demás teorías y sus modelos que siempre estarán por debajo, en especial, sin agotar la riqueza que la formulación inicial plantea.

3.2.19.1. La rectitud de una línea permite variadas lecturas de las figuras geométricas

La rectitud (*εὐθύτης*) no está limitada a la mera apariencia de una línea (*γραμμή*) recta (*εὐθύς*), tal como en las geometrías no-euclidianas la noción de rectitud puede variar, al igual que puede guiar al ser humano en su vida como un patrón normativo va cambiando y adaptándose a las circunstancias debido a que las trasciende. Tal hecho sugiere que el mismo hecho de la escritura (*γραφή*) es algo con posibilidades de irse transformando, cambiando y evolucionando fruto de ese arañar que es propio del escribir o pintar (*γράφω*), que es un testimonio directo del existir y del ser (*εἰμί*) que afecta a todos y a cualquiera (*τις*), en este caso a las figuras (*σχῆμα*), aquellas que están debajo (*ὑπό*) como soportando, sosteniendo y rodeando (*περιέχω*), aquello que se tiene (*ἔχω*) como lo que nos rodea y nos circunda dada su proximidad (*περί*). De esta forma, estas figuras rectilíneales[344] (*εὐθύγραμμος*) se vienen a constituir como unas instancias predicativas fundamentales de la propia geometría, en aquellas categorías que van a definir la normatividad y la ley propia de esta disciplina. En consecuencia, una figura lineal (*εὐθύγραμμος*) es aquella que está rodeada y está cerca de otras líneas (*γραμμή*) rectas (*εὐθύς*) que la abrazan, conteniéndola y agarrándola (*περιέχω*). En ello se manifiesta su naturaleza de convertir y transformar lo que está dentro de sus linderos en algo afín a su propia naturaleza: lo que está dentro de lo que es recto (*εὐθύτης*) tiende a adoptar su misma forma (*μορφή*) independiente del tipo u orden de jerarquía en que esté, siempre toda figura (*σχῆμα*) adopta tal apariencia y condición interna.

Se tiene (*τετράπλευρα δέ τά ὑπό τεσσάρων,*) cómo el predicado de la clausura principal vuelve a hacerse presente, en cuanto a las figuras constituidas por líneas rectas (*σχήματα εὐθύγραμμά*), que en el actual contexto adquiere un nuevo predicado que amplía su significado. En este contexto, la anterior clausura estaba cuantificada para un número no cuantificado de líneas rectas, la clausura asevera aquello concerniente a tres (*τρεῖς*) y esta aseveración cuantifica sobre la cantidad tres que, a su vez, introduce una modificación en la cualidad, mientras en la clausura principal que antecede se está frente a un conglomerado de líneas rectas que rodean, contienen y sostienen (*περιέχω*) una figura (*σχῆμα*), cuya propiedad esencial es la rectitud (*εὐθύς*) en torno a aquello que es bueno en todos los sentidos (*εὖ*): unas líneas rectas que bajo cualquier tipo de modelo o de teoría siguen conservando y manteniendo su cualidad de ser rectas (*εὐθύς*). Es claro que las líneas (*γραμμή*) cuando cumplen la condición de ser rectas (*εὐθύς*), permiten construir y definir cualquier tipo de figura (*σχῆμα*) en este caso geométrica. La segunda clausura enfrenta a una función que organiza estas líneas, siendo muy consistente que tan solo una figura (*σχῆμα*) fruto de una organización que estructura unas líneas se da a partir del tres: la

[344] Es de resaltar el llamado espacio euclidiano, que se trabaja en dos, tres y más dimensiones. Asimismo, se utiliza en la construcción de los números racionales $\mathbb{Q} = \{p/q \,/\, p,\ q \in \mathbb{Z}\ \}$, en el desarrollo del álgebra y el análisis matemático que llevó a los espacios euclidianos a utilizar las coordenadas cartesianas y de esta manera surge la geometría analítica. Sea X un espacio vectorial, tenemos una forma bilinear en X que es un mapa $F: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, el cual es lineal para ambos argumentos. Una forma bilinear F es simétrica si $F(x, y) = F(y, x)$, asimismo una forma bilinear F puede ser recubierta por su forma asociada cuadrática $Q(x) = Q_F(x) = F(x, x)$; es decir, por medio de la fórmula $4F(x, y) = Q(x + y) - Q(x - y)$. Ver Espacios euclidianos en: *A Course in Metric Geometry*, Burago, Ivanov (2008, pág. 5).

primera figura (*σχῆμα*) que puede ser construida y en consecuencia argumentada propiamente requiere de tres (*τρεῖς*) líneas (*γραμμή*). Es decir, la organización de un universo, en este caso, el de las figuras geométricas se da a partir de poder situar tres veces algo (*τρίς*). Nótese que la dualidad, es muy mentada en Pitágoras como el estado primigenio del cosmos, de aquellas categorías que se agrupan dos veces (*δίς*) que son una manifestación del dos (*δύο*), de aquello que está en segundo lugar (*δεύτερος*); sin embargo, en este segundo estadio los entes u objetos no están sometidos al rigor de una limitación en su número, ya se nota que se habla de muchas líneas más no se dice cuántas. Este hecho se repite en la siguiente clausura, en cuanto no se está estableciendo y, en consecuencia, limitando el número de figuras que pueden surgir a partir de la asociación de tres líneas. Aquello que está en tercer lugar (*τρίτος*) es el nacimiento de la primera figura (*σχῆμα*) geométrica formal propiamente dicha constituida por tres (*τρεῖς*) líneas (*γραμμή*) con posibilidades de organizarse de variadas maneras entre sí. Es notable que la pluralidad de líneas[345] de la sentencia anterior está amarrada o ligada por la acción del verbo *periekho* (*περιέχω*), que es la reunión de la preposición (*περί*) y el verbo (*ἔχω*): es decir algo que esta sostenido alrededor de un centro (*σημεῖόν*), ya que esta preposición involucra un algo que gravita alrededor de una vecindad próxima, aquella que tiene la potestad de ligar o amarrar.

3.2.19.2. El establecimiento de proposiciones con clausura delimita los argumentos

Algo que amerita la atención es la introducción en esta clausura de la noción de lado (*πλευρά*), vocablo que también significa costilla, muy en concordancia con unas líneas que se sitúan las unas seguidas de las otras, aquel lado de una figura (*σχῆμα*) que involucra una dimensionalidad, que le posibilita verse tratada como un cuerpo o una estructura. Por

---

[345] Hay que reconocer que una estructura euclidiana está dada por las distancias entre sus puntos y los ángulos que forman las líneas o los vectores, es lo que hace al conjunto de puntos un espacio euclidiano. Un espacio euclidiano finito V posee una base ortogonal. Sea dim V = n, y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base, es decir alrededor de los puntos podemos situar unas bolas abiertas que vienen a definir la topología del mismo. Cada vecto $x \in V$ se representa de una manera única como una combinación lineal $\Sigma x_i e_i$ para un vector $x_i \in \mathbb{R}$. Debido a que se puede conocer el producto escalar $(x \cdot y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$). Esto conduce a que cada espacio euclidiano de n dimensiones es isomórfico a $\mathbb{R}^n$, significa que tenemos un isomorfismo lineal $f: \mathbb{R}^n \to V$, de tal manera que $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. En especial estos espacios son isométricos, es decir preservan algunas propiedades como lo largo, existen cuatro tipos de isometrías: translaciones, rotaciones, reflexiones y deslizamientos. En: *A Course in Metric Geometry*, Burago (2001, p. 6)

consiguiente, es posible aseverar que una figura se constituye cuando tiene tres lados (*τρίπλευρος*), tres lados que permiten emprender una travesía y en consecuencia este objeto puede ser surcado o navegado (*πλέω*): es en verdad y consecuencia (*μέν*), que estas líneas, las cuales (*τά*) están debajo o bajo (*ὑπό*) de lo que es tercero (*τρίτος*). No es de extrañar que vuelve a aparecer la preposición *hupó* (*ὑπό*), que indica algo que está debajo y que presupone un movimiento que se efectúa a lo largo de algo que está abajo a manera de soporte de lo que está arriba. Este hecho vuelve a remitir a la noción de superficie (*ἐπιφάνεια*), como aquello que se muestra y, en consecuencia, se hace visible por traer la luz (*φαίνω*) a fin que pueda ser visto (*ἐπιφαίνω*), dado que está sobre (*ἐπί*) aquella superficie (*ἐπιφάνεια*), en concordancia con la definición 5. Todo se soporta a partir de aquello sobre (*ἐπί*) lo cual está colocado y esto hace que existe algo debajo (*ὑπό*) que soporta la figura (*σχῆμα*) y es la misma superficie (*ἐπιφάνεια*). Este vocablo remite a algo que es revelado y dado a la existencia por la luz, y también alude a aquellos sacrificios que se hacen en virtud de la divinidad, por la cual se experimenta y se siente un temor (*τρέω*) que lleva a que uno tiemble (*τρέμω*). Estas palabras están en estrecha relación con la raíz del cardinal tres (*τρεῖς*), tal como el emitir un chirrido y el conquistar (*τρίζω*) son cercanos a la etimología del ordinal tercero (*τρίτος*). En consecuencia, el tres es un número que involucra una correría y una huida (*τρέω*), en la cual se emite un sonido agudo que tiene la potestad de vencer y conquistar (*τρίζω*): aspectos que destacan el inicio de un movimiento diversificado animado por la lucha de contrarios que le antecede en la dualidad del cardinal dos. Tal hecho viene apoyado en algo que lo subyace por debajo (*ὑπό*) rodea (*ἐπί*), abraza y contiene (*περιέχω*). Este notable hecho lleva a plantear que la teoría de conjuntos, en especial, el operador matemático de pertenencia ($\in$), asimismo como la noción de membresía de un elemento frente a una clase, es algo que se instaura a partir de lo que acontece tres veces (*τρίς*): la tricidad fundamentada en la línea es la instancia establece de lo que tiene forma como figura (*σχῆμα*), aunque un círculo es un caso excepcional dado que una recta doblada.

Luego el texto prosigue: *cuadriláteras las comprendidas por cuatro lados* (*τετράπλευρα δέ τά ὑπό τεσσάρων*), lo abordado como aquello que posee cuatro (*τετράς*) lados (*πλευρά*), *tetrapleuros* (*τετράπλευρος*); por otro lado (*δέ*) involucra aquello (*τά*) que está debajo o bajo (*ὑπό*) el cardinal cuatro (*τέσσαρες*). Tal oración se comprende si entendemos que existe una superficie (*ἐπιφάνεια*) sobre (*ἐπί*) la que está situada esta figura (*σχῆμα*) constituida de cuatro líneas (*γραμμή*) rectas (*εὐθύς*). Siempre hemos de recordar, en especial, que la noción de lo recto (*εὐθύς*) involucra un acto contemplativo, donde estamos evocando aquella instancia buena en todos los sentidos (*εὖ*): un proceso de universalización donde existe una instancia que cuantifica sobre todo lo que está debajo de ella, determinándolo y acondicionándolo. Lo interesante de la noción de cuatro (*τετράς*) es que posee un tipo de lectura muy cercano a algunos eventos reales que acontecen en el mundo que nos rodea y donde vivimos: decimos *tétartos méros* (*τέταρτος μέρος*)[346] para mencionar una parte, un componente y una región que está divida en cuatro. Sea el caso, las cuatro regiones cardinales o los cuatro elementos. El vocablo *méros* (*μέρος*) alude a la porción que se comparte asimismo al destino y lo heredado, proviene del verbo *meíromai* (*μείρομαι*) que es recibir uno su propia porción. Tenemos luego *tetárte heméra* (*τετάρτη ἡμέρα*), que evoca el cuarto día: donde *heméra* (*ἡμέρα*) significa día, como también un tiempo en la vida con una duración y unas características particulares, tiempo de día y un particular día. También en *tetárte moira* (*τετάρτη μοῖρα*), estamos frente a una cuarta parte, una unidad de medida para líquidos. El vocablo *moira* (*μοῖρα*) nos evoca una parte, porción, destino, y lo que es correcto. En fin con el número cuatro (*τέσσαρες*) nos encontramos con un numeral que establece una relación muy cercana con las categorías propias de la realidad exterior que nos gobierna, asimismo, con las unidades de pesos y medidas propias del espacio-tiempo. Lo que nos presagia y anticipa, que el cálculo surge cuando hemos logrado construir un ordenamiento en base al cuarto (*τέταρτος*), donde los distintos conceptos y nociones derivadas se ven antecedidas por otros principios previos que soportan la elaboración de la realidad geometrizable a partir de la cuaternidad. Este hecho está ilustrado en la *Tetraktys* (*τετρακτύς*)[347] que gobierna el movimiento de los planetas y la música, cuyo prefijo *tetra* evoca al cuatro, a *téttares* (*τέτταρες*), a aquello que

[346] Etimologías tomadas de: Liddell & Scott (1940) *A Greek–English Lexicon*, Oxford: Clarendon Press.
[347] La tetraktys (*τετρακτύς*) es un arreglo triangular de diez puntos, se comienza con una base de cuatro puntos hasta terminar en un solo punto, en su contenido está el trabajo secreto de los pitagóricos, al movimiento de los planetas y a la música. Un solo punto es la mónada, dos puntos la díada, tres puntos la armonía y cuatro puntos el cosmos. Ver *Eduard Zeller, Outlines of the History of Greek Philosophy (1886, p.36).*

se da cuatro veces (*τετράκις*). En este caso también se evoca que existe algo debajo (*ὑπό*) sobre (*ἐπί*) lo cual se apoya, este hecho da a entender que la misma superficie (*ἐπιφάνεια*) se modifica a sí misma, variando su adecuación según el tipo de figura (*σχῆμα*) que va a soportar y a legitimar. En consecuencia, la geometrización es diferente para las figuras de tres lados que para las de cuatro lados (*πλευρά*), ambas son susceptibles de ser calculadas en fórmulas y poder albergar diferentes teorías de tipo geométrico aritmético.

3.2.19.3. La inducción geométrica euclidiana involucra cinco elementos iguales

Finalmente, se tiene: *multilineales las comprendidas por más de cuatro rectas* (*πολύπλευρα δέ τά ὑπό πλειόνωνἤ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα*). Aquí se menciona el adjetivo *polús* (*πολύς*) que significa mucho o una gran cantidad, sea para señalar una multitud, un espacio grande, un tiempo prolongado y tardío, o algo que es completo y fuerte. Se utiliza la forma sustantivada *pollá* (*πολλά*) para indicar una gran cantidad, algo que es muy valioso y algo que está a una gran distancia. Esta cantidad (*πολύς*) de lados, de costados (*πλευρά*) conduce (*πολύπλευρος*) al caso que sigue. Después del cuatro (*τέτταρες*) se introduce la operación de inducción sobre las demás figuras (*σχῆμα*) geométrico-aritméticas. Este hecho tiene profundas consecuencias, ya que en la inducción matemática se parte en general del uno y luego que se ha demostrado que se cumple para ese ente en particular, se cumple para (n + 1). Un tema supremamente complejo está dado con la existencia del cero, cuyo estatuto numérico todavía no es muy claro y la necesidad de presuponer también la existencia del cardinal uno, se simbolizaría como: $\forall$ P [[[(P(0) $\wedge$ $\forall$ (k $\in$ N) . [P(k) $\rightarrow$ P(k + 1)]] $\rightarrow$ $\forall$(n $\in$ N). P(n)]. Este es un tema todavía no resuelto, más cuando se tiene que esta demostración por extensión o cantidad recurre a dos nociones cualitativas diferentes como son las del cero y del uno. Lo importante en esta consideración euclidiana es que antes de efectuar una inducción[348] sobre todos o muchas (*πολύς*) de las

[348] La inducción matemática es muy útil para fundamentar la construcción de los números naturales o enteros positivos. Sea S un conjunto de enteros positivos el cual tiene dos propiedades: (a) El número 1 está en el conjunto S, (b) Si un entero k está en S, luego también estará k + 1. En consecuencia cada entero positivo estará en el conjunto S. Tenemos como una consecuencia de las pruebas por inducción el principio del buen orden: cada conjunto no vacío de enteros positivos contiene un número que es el menor. Existe un método de prueba que utiliza la inducción: sea A(n) una aseveración que involucra un entero n. Podemos concluir que si A(n) es verdad para cada $n \geq n_1$, debemos seguir los siguientes pasos: (a) Provar que A (n_1) es verdad, (b) Sea

figuras (*σχῆμα*) se debe alcanzar la especificación sobre el que tiene cuatro lados (*τετράπλευρος*) antes de extender la secuencia a muchos. Nótese que en la demostración moderna de inducción ésta se extiende a infinito, los griegos conscientes de la complejidad de este concepto infinito o sin fronteras (*ἄπειρος*), utilizan en cambio la noción de muchos (*πολύς*): a su vez esta demostración o planteamiento utiliza tanto recursos extensivos como intensivos, es decir por cantidad y cualidad. Este aspecto ha sido hoy día olvidado debido a la complejidad que plantea y la necesidad de una epistemología de las matemáticas más concreta. De esta manera (*δέ*) comprende (*περιέχω*), que aquellos (*τά*) bajo (*ὑπό*) más (*πλείων*) de (*ἤ*) cuatro (*τέτταρες*) líneas (*γραμμή*) rectas (*εὐθεῖα*). En esta última parte se manifiesta, que todo lo que esté por encima de cuatro (*τέτταρες*) lados (*πλευρά*) rectos (*εὐθεῖα*), se ven contenidos y comprendidos (*περιέχω*) en esta formulación acerca de las figuras (*σχήματα*) constituidas por líneas rectas (*εὐθύγραμμα*). Es curioso cómo los antiguos se dieron cuenta que cuando una figura (*σχῆμα*) posee más de cuatro lados rectos, las propiedades se siguen cumpliendo en todo lo concerniente (*ἐπί*) a lo que ellas tienen (*ἔχω*). No importa si se está frente a figuras con demasiados (*πλεῖστος*) lados, lo importante es poder crearlas (*ποιέω*) y definir sus múltiples significados (*πλειονάζω*). Siempre se cumplirá dicha ley (*νόμος*) tal como lo dicta la costumbre y la experiencia, que nos la mostrará cuando así se lo requiera. En esta oración se ve el cumplimiento que sigue toda ley matemática, que verifica los casos particulares indispensables antes de pasar a la universalización de un axioma (*ἀξίωμα*), en cuanto es aquello que se piensa y sostiene que es valioso (*ἀξιόω*) dado que posee el mismo peso o se adecuada en su valor (*ἄξιος*): que puede ser medido, pesado, tazado, dibujado e inferido.

3.2.20. La individualización de los entes geométricos lleva a la aparición del cálculo

Aquí se tiene una suerte de axioma-definición que busca establecer el acto nombrativo para los primeros entes geométricos individualizados; este significativo paso permite recrear la teoría debido a que comienzan a aparecer unas categorías secundarias que están más relacionadas con la interioridad del ente geométrico mismo y aquello que

---

k un entero arbitrario fijo $\geq n_1$. Asuma que A (k) es verdad y pruebe que A (k +1) es también verdad. Ver *Calculus*, vol. 1. Apostol (1967, p. 34).

posibilita su pronta identificación. Asimismo, se recrea la teoría geométrica, lo cual va a llevar a que se establecan las condiciones iniciales sobre las cuales se va a definir y a estructurar una teoría geométrico-aritmética concreta con posibilidades de ser calculada, este hecho va a hacer que surjan las geometrías analítica y algebraica, enriqueciendo el análisis matemático y otros campos de este arte y disciplina: *Entre las figuras triláteras, el triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, triángulo isósceles la que tiene dos lados iguales, y el triángulo escaleno la que tiene los tres lados desiguales* (*Rectilineal figures are those which are contained by straight lines, trilateral figures being those contained by three, quadrilateral those contained by four, and multilateral those contained by more than four straight lines. τῶν δέ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μέν τρίγωνόν ἐστι τό τάς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελές δέ τό τάς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνόν δέ τό τάς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς*). La actual postulación realiza un nuevo giro en relación a la anterior, la cual cerró aquel capítulo concerniente a la fundamentación necesaria para la generación de figuras (*σχῆμα*) construidas a partir de líneas rectas. La nueva problemática da un salto en cuanto aparecen las figuras categorizadas, aquellas figuras que adquieren una forma definida plenamente identificable y que surgen dentro de una tercera etapa teórica precedida por dos etapas previas: la primera etapa es muy compleja dado que evoca al punto (*σημεῖόν*) y su definición alrededor de la dinámica del todo con la parte; la segunda, está constituida por aquel conglomerado de nociones que van a permitir servir de elementos constitutivos a los entes propiamente geométricos, y la tercera nos presenta los entes geométricos que se pueden construir a partir de las nociones primitivas elaboradas en la segunda etapa.

El ente geométrico fundamental construido a partir de la línea (*γραμμή*), y que responde a un modelo de perfección está dado en el triángulo (*τρίγωνόν*) equilatero[349] (*ἰσόπλευρος*); además, se puede circunscribir un círculo en estos triángulos. Hay que recordar que en el círculo la problemática del todo y la parte nos ha de conducir a la

---

[349] Un Triángulo equilátero se dice que es equiangular, de esta manera Δ ABC, donde cada uno es un lado, nos lleva a: $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$, luego $\angle$ A $\cong$ $\angle$ B $\cong$ $\angle$ C, apreciamos que todos los lados interpretados como un segmento de recta son iguales entre sí, son congruentes, al igual que sus ángulos donde cada uno mide 60º. A su vez el área de un triángulo equilátero es: $A = \frac{1}{4} s^2\sqrt{3}$, donde s representa un lado o side. Ver *Geometry* por Barnett Rich y Christopher Thomas (2009, págs. 9-10, 39-40, 303).

perfección: ya que es la única figura donde el todo mantiene una complementaridad con la parte. A su vez, el centro de un círculo como su periferia son nociones que surgen de apreciar la vecindad de la misma figura a nivel interno y externo: la internalidad del círculo (*κύκλος*) es el centro (*κέντρον*) y la externalidad del mismo es la circunferencia o periferia (*ἐπιφάνεια*). Ambas nociones nos conducen a problemas epistemológicos bastante complejos, ambos relacionados con la noción de límite: aquel umbral donde se establece un cambio cuantitativo y cualitativo que ha de ser interpretado a nivel de las nociones primitivas que se utilizan en su análisis.

Se tienen los (*τῶν*) que en cambio (*δέ*) de aquellas figuras (*σχῆμα*) que tienen tres lados (*τρίπλευρος*) iguales (*ἰσόπλευρος*); y se está en presencia del isomorfismo a nivel del lado (*πλευρά*) en cantidad de tres (*τρεῖς*), el cual ha recibido el nombre de triángulo equilátero (*ἰσόπλευρον τρίγωνόν*). En consecuencia (*μέν*), es un triángulo (*τρίγωνον*) que es (*ἐστί*) aquel (*τό*) que (*τάς*) tiene (*ἔχον*) tres (*τρεῖς*) lados (*πλευρά*) iguales (*ἴσας*). Nótese la estrategia teórica que busca construir figuras en las que las nociones primitivas puedan utilizarse como fundamento en su constitución geométrica; en este caso, el lado (*πλευρά*) debe cumplir con la igualdad (*ἴσος*) entre sus semejantes. Sin embargo, las relaciones que se desprenden de esta equivalencia en el triángulo equilátero son muchas y muy variadas[350]. Se trata de un proceso reflexivo de la misma noción de lado (*πλευρά*), que tan solo puede derivar en una figura (*σχῆμα*) dentro de una tercera (*τρίτος*) fase deductiva: tan solo es posible construir figuras por líneas (*γραμμά*) a partir de la cardinalidad del tres (*τρεῖς*) y en la ordinalidad de un tercer (*τρίτος*) paso, el cual está caracterizado por aquella propiedad que permite que algo sea igual a otro (s) o sea el isomorfismo. Se tiene así la condición de ser igual a otro en tamaño, fuerza o largo (*ἴσος*), e involucra aquella propiedad matemática conocida como reflexividad[351], y que está relacionada con el pronombre (*αὐτός*), conformado por la raíz *aû* (*αὖ*) de nuevo, atrás y el artículo *tón* (*τόν*) él o ello: aquello que

---

[350] Basta citar la conocida desigualdad propuesta por Tran Nan Dung: sea p cualquier punto en el plano de un triángulo equilátero ABC, en el cual se dan las distancias p, q, r, hacia los lados del triángulo y distancias x, y, z, hacia los vértices, entonces su cumple la siguiente desigualdad: $4(p^2 + q^2 + r^2) \geq x^2 + y^2 + z^2$. Ver *Crux Mathematicorum*, Léo Sauvé editor (2007) pág. 178.

[351] Sea R una relación reflexiva R = (A, A, P(x, y)) en un conjunto A, sea R un subconjunto de A × A. Luego R es una relación reflexiva si para cada $a \in A$, se tiene $(a, a) \in R$. Es decir, R es reflexiva si cada elemento de A está relacionado consigo mismo. Ver *Set Theory and Related Topics*, S. Lipschutz (1964, p. 84).

retorna a sí mismo, el ser como el lugar de una conciencia reflexiva que permite experimentar los pensamientos, las emociones y las sensaciones. Eso que es igual (*ἴσος*) en sí mismo (*αὐτός*), es aquello que es lo común y lo mismo (*ὁμός*); los entes geométricos conocidos como figuras (*σχῆμα*) involucran en su construcción una variedad de etapas epistemológicas simétricas y asimétricas, en las que tenemos un isomorfismo entre conceptos afines, como la simetría que se da en el caso de lados de igual longitud; tal como es el caso del triángulo equilátero y el caso asimétrico del triángulo escaleno (*σκαληνόν τρίγωνον*).

Con respecto a las figuras (*τρίγωνος*) triangulares, definidas por tener tres esquinas o ángulos (*γωνία*), el concepto de ángulo se presenta aquella esquina donde confluyen dos o más líneas y se vendría a definir la noción de una figura triangular como el triángulo (*τρίγωνον*). Es importante señalar aquel proceso de hacer algo igual con algo afín (*ἰσάζω*), una actividad que involucra balancear y proporcionar instancias distintas representadas por unos elementos, en este caso geométricos. Estos parecen alejarse (*τρέω*) de ese centro (*κέντρον*) puntual (*σημεῖόν*), aspecto que hace que sea natural inscribir toda figura (*σχῆμα*) dentro de un círculo (*κύκλος*), lo que vendría a constituirse en un procedimiento universal geométrico. Esto es lo que tenemos (*ἔχω*) en relación a los lados (*πλευρά*) que representa unas líneas (*γραμμά*) que se han constituido como una figura (*σχῆμα*). En estos casos la línea (*γραμμή*) ha adquirido una nueva caracterización al ser nombrada como un lado (*πλευρά*) que, además, tan solo es posible si cumple la condición de ser (*εἰμί*) recto (*εὐθεῖα*). Esto es lo que podemos conocer, estar enterados y poseer una destreza (*οἶδα*) en un proceso reiterativo que ha sido realizado tres veces (*τρίς*), con las tres (*τρεῖς*) estrategias epistemológicas ya mencionadas.

3.2.20.1. El criterio de la igualdad individualizada fundamenta una teoría aplicable

El desarrollo este axioma lleva a introducir aquel algoritmo que relaciona las distintas partes de un ente individualizado geométrico, procedimiento que permitirá que la teorización individual sea la que busque generalizar o universalizar, y esto se obtendrá ap partir de la comparación entre varios de los entes individuales a fin que ellos sean los más representativos de todos los de su especie: el *triángulo isósceles es el que tiene dos lados* *iguales* (*ἰσοσκελές δέ τό τάς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς,*). Se está ahora frente a aquello que crea una igualdad (*ἰσότης*), especialment, de condición y derechos encaminada hacia una equidad. El denominado triángulo (*τρίγωνον*) isósceles[352] (*ἰσοσκελής*) es aquel que está constituido por lados (*πλευρά*) iguales; en especial, se habla de dos lados iguales. El vocablo relacionado con isósceles está constituido por el adjetivo *ísos* (*ἴσος*) que involucra una equivalencia que se puede extender a cualquier aspecto: tamaño, número, fuerza, valor, etc. Es la igualdad entre dos instancias que se pueden dividir en dos partes iguales con similitud de forma, hecho que evoca la relación binaria de equivalencia tan fundamental en la construcción de las ecuaciones matemáticas. Propiamente, el término isósceles (*ἰσοσκελής*) refiere aquello que tiene piernas o patas iguales, ya que *skélos* (*σκέλος*) significa pierna, pie o pata, y alude a que el triángulo isósceles se asemeja a las dos piernas abiertas de un ser humano. Este vocablo hace hincapié en aquello que puede ser dividido en dos partes, que además contiene dos partes y tiene dos lados. Nótese cómo la unidad (*μόνας*) ya está presente como un concepto que antecede a la dualidad de dos (*δύο*) lados (*πλευράς*). No en vano es lo que está segundo (*δεύτερος*), debido a que está antecedido por lo que es uno (*εἷς*) o primero (*πρῶτος*) que es la mónada, que en nuestro caso es aquello que no tiene parte o sea el punto (*σημεῖόν*).

Este triángulo isósceles remite a aquello que es lo mismo (*ἡ ἴσοη*), en relación a la misma parte que igual grado permite una igualdad de derechos, como lo justo y lo equitativo. Le subyace aquel procedimiento que posibilita igualar o hacer igual (*ἰσόω*), que es lo que se establece en lo que sigue en la formulación: este triángulo isósceles (*ἰσοσκελής*), en consecuencia (δέ), el (*τό*) que tiene (*ἔχω*) dos (*δύο*) lados (*πλευράς*) iguales (*ἴσας*). Es la noción de lado (*πλευράς*) la instancia que permite hacer igual, igualar y balancear (*ἰσάζω*) este triángulo (*τρίγωνον*) como figura (*σχῆμα*) para apreciarlo como un ente geométrico fundamental. Esto es lo que se conocemos (*οἶδα*), en cuanto podemos estar enterados y dotados de la destreza para llevar a cabo, cuando en esta formulación subyace este verbo que evoca al arte o técnica (*τέχνη*) con la que los antiguos griegos concebían a la

[352] En el triángulo isósceles se caracteriza por tener dos lados que son congruentes, los ángulos opuestos a estos lados son congruentes, al igual que los ángulos de la base son congruentes: un triángulo ABC si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, luego $\angle$ A $\cong$ $\angle$ C. el área de un triángulo isósceles se obtiene usando el teorema de Pitágoras, sea: b la base, h la altura, y a los lados, se tien: $(b/2)^2 + h^2 = a^2$. Ver *Geometry*, Rich & Thomas (2009, p. 39, 141, 256).

geometría. Es un arte que permite ver, percibir, experimentar e investigar (*εἴδομαι*) aquellas formas (*εἶδος*), en especial, dado que uno se ubica frente a aquello que está solo, que es único y singular (*μόνος*) en relación al lado (*πλευράς*). En esta forma se invita a examinar la singularidad y el carácter único de la noción de lado (*πλευράς*) y, en el mismo análisis que se está haciendo, no hay que perder de vista los conceptos o aquellas nociones fundamentales categoriales que constituyen a las figuras geométricas. Esto es una invitación a que la misma formulación debe de sostenerse a sí misma desde aquello que debe de estar solo (*μονάζω*), cada uno de los elementos fundantes de una teoría deben bastarse a sí mismos y disfrutar de la competencia de ser capaces de permanecer (*μονή*). En cuanto puedan también ser reducidos a uno y a ser capaces de asumir su aislamiento o ausencia de compañía (*μονόω*), es algo que reindivica su carácter estable, duradero, firme y constante (*μόνιμος*). Detrás de esta oración se muestra la estructura argumentativa que debe de tener cada elemento o concepto que constituye tanto a un axioma como a una teoría. Tal naturaleza de poder permanecer solo, defendiendo su forma única, de manera simple y uniforme (*μονοειδής*), es algo que debemos de verificar, chequear, y ser capaces de sostener y acarrear (*ἔχω*) en relación a la relación binaria de los dos (*δύο*) lados (*πλευράς*) en un triángulo (*τρίγωνον*) isósceles (*ἰσοσκελής*). Una vez más, se nota la estrategia de fundamentar una figura (*σχῆμα*) a partir de las partes (*μέρος*) que la constituyen como un todo (*πᾶς*).

3.2.20.2. Las propiedades se dan por contrastación de lo que es igual con lo desigual

El poder comparar los distintos elementos constitutivos de un ente geométrico nos lleva a individualizarlo, estableciendo las similitudes que identifican a sus partes constitutivas, así como la ausencia de algunas o de todas: *el triángulo escaleno la que tiene los tres lados desiguales* (*σκαληνόν δέ τό τάς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς*). Se aborda ahora el triángulo (*τρίγωνον*) escaleno (*σκαληνός*), aquel que no tiene lados iguales; el opuesto o antónimo del isósceles (*ἰσοσκελής*). En su significado, el primero está relacionado con los números pares y el segundo con los impares. En el fondo hay una estrategia en cuanto se aborda primero aquello que convoca la unidad y la proporción, y luego lo que es desigual y desproporcionado. El escaleno (*σκαληνός*) en cambio (*δέ*) el cual (*τό*) tiene (*ἔχω*) los (*τάς*) tres (*τρεῖς*) lados (*πλευράς*) desiguales (*ἄνισον*), afronta la problemática de cómo igualar (*ἀνισόω*) un ente geométrico a través de una de sus partes nocionales, representada en este caso en el lado (*πλευράς*); esto posibilita establecer el algoritmo que nos lleve a poderlo comparar con los demás lados, cuya característica esencial es que todos son desiguales. Cabe resaltar que la exposición comienza abordando un orden en el temario: lo uno (*εἶς*) en relación con lo que está solo (*μόνος*), luego el dos (*δύο*) en relación con la comparación de los dos lados iguales de un triángulo isósceles; luego, el tres (*τρεῖς*) en relación con la desigualdad (*ἀνισότης*) total de los tres lados de un triángulo escaleno[353]. El tres (*τρεῖς*) está presente como una noción tanto al comienzo como al final de esta formulación, y es el resultado de evocar al triángulo (*τρίγωνον*) y algunas nociones muchas de ellas agrupadas en tres con la misma característica ¿Cómo se presenta, entonces, el ente de manera aislada? Esto implica desentrañar las instancias constitutivas que permitan comparar algo a nivel de un isomorfismo, lo que fortalece la decibilidad acerca del mismo y la indecibilidad que viene asociada a la desigualdad (*ἀνισότης*); aquella instancia donde se da un rompimiento con cualquier tipo se simetría o propiedad de ser lo mismo o equivalente (*ἴσος*) entre los elementos primarios constituyentes de una figura (*σχῆμα*). Recuérdese que la desigualdad del triángulo escaleno (*σκαληνός*) guarda relación con aquello que cojea (*σκάζω*), una alusión directa al rompimiento simétrico que lo caracteriza y que lo aleja de la belleza y la perfección que sí posee el triángulo equilátero (*ἰσόπλευρον τρίγωνόν*): este párrafo uniéndolo al anterior podría ser visto como el camino de lo bello balanceado a lo feo desbalanceado.

3.2.21. La relación de orden definida en torno al ángulo recto tipifica a los triángulos

La nueva formulación equidista entre asemejarse a un axioma de características definitorias recreadas a partir del ángulo, sea este menor, mayor o igual a un ángulo recto (*ὀρθογώνιον*) lo que va a permitir clasificar los posibles triángulos (*τρίγωνόν*) que se pueda plantear y construir. *Entre las figuras triláteras, triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso, acutángulo la que tiene los tres*

[353] Un triángulo escaleno es aquel que no tiene lados congruentes, siendo el triángulo ABC escaleno, se tiene $a \neq b \neq c$, el área de un triángulo escaleno es: $A = ab\,\mathrm{sen}(c)/2$, $A = bh/2$. *Geometry*, Rich, (2009, p.9, 303).

lados agudos (*Further, of trilateral figures, a right-angled triangle is that which has a right angle, an obtuse-angled triangle that which has an obtuse angle, and an acuteangled triangle that which has its three angles acute. ἔτι δέ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μέν τρίγωνόν ἐστι τό ἔχον ὀρθήν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δέ τό ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δέ τό τάς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας*). Esta formulación comienza extendiendo el alcance de lo que está en relación con los triángulos (*τρίγωνον*), y, además de todo esto (*ἔτι*), sin embargo, (*δέ*) los (*τῶν*) que tienen tres lados (*τριπλεύρων*); aquellas figuras (*σχῆμα*) triláteras (*τρίπλευρος*) triangulares (*ὀρθογώνιον*), las constituidas por unos ángulos (*γωνία*) derechos (*ὀρθός*). De manera implícita se está hablando de los triángulos[354] (*τρίγωνον*), lo que evoca los tres (*τρεῖς*) lados (*πλευράς*) cada uno dotado de unas características propias, en orden u ordinalidad. Aunque no se esté mencionado de manera implícita en el texto, los antiguos griegos tenían una preocupación por la naturaleza propia de cada lado (*πλευράς*), en su aspecto cuantitativo y cualitativo lo que permitía diferenciarlos entre sí. Aquí está la noción de derecho, seguro, exacto, verdadero y justo (*ὀρθός*); es el lado (*πλευρά*) recto (*εὐθύς*) perpendicular (*ὀρθός*) a una superficie (*ἐπιφάνεια*) el que permite la construcción del ángulo recto (*ὀρθήν γωνίαν*). La normatividad de las leyes y propiedades que van a gobernar gran parte de las figuras geométricas se construyen a partir del ángulo recto[355] (*ὀρθογώνιον*) que, abordado desde el triángulo (*τρίγωνόν*), posibilita aseverar la existencia de un solo ángulo recto, que conjuntamente con la relación que se construye entre los tres lados (*τρίπλευρος*) determina la especifidad del triángulo en cuestión: tres ángulos relacionados con tres lados (*τρίγωνος R τρίπλευρος*). Estamos evocando aquella línea (*γραμμά*) que cumple la condición de ser recta (*εὐθύς*), de ahí que el vocablo *orthós* (*ὀρθός*) involucra la existencia de mínimo dos líneas (*γραμμά*) que guardan una relación de perpendicularidad (*ὀρθότης*) entre sí a partir de la cual se determina el orden que va constituir la singularidad del ente geométrico, en este caso de un triángulo (*τρίγωνον*) como una figura (*σχῆμα*).

---

[354] Una de las instancias que sirven para diferenciar los triángulos entre sí está dada por la desigualdad triangular: sea la suma de dos lados de un triángulo es mayor que el largo de un tercer lado: BC + CA > AB, AB >BC – AC. *Geometry*, Rich & Thomas (2009, pág. 225).

[355] En un triángulo recto, el cuadrado del largo de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los largos de los lados: $c^2 = a^2 + b^2$, esta ecuación es el teorema de Pitágoras. *Geometry*, Rich, (2009, p. 138).

Se destaca aquel ángulo que, además de ser recto (*εὐθύς*), es derecho (*ὀρθός*); la noción de recto (*εὐθύς*) le antecede a la noción de derecho (*ὀρθός*) y esto se debe a que el concepto-noción de línea (*γραμμά*) existe con anterioridad al concepto-noción de figura (*σχῆμα*). Se recuerda que el concepto de línea (*γραμμά*) está sometida a sus propios límites, manifiestos en los puntos (*σημεῖόν*) extremos que yacen tendidos (*κεῖμαι*) y cortados (*κείρω*), y que dan lugar a la existencia de la superficie (*ἐπιφάνεια*). La noción de perpendicularidad (*ὀρθός*) en el triángulo (*τρίγωνόν*) presupone una diferenciación de cada uno de sus tres (*τρεῖς*) lados (*πλευράς*). En especial, se menciona aquel que ocupa la jerarquía ordinal superior, el tercero (*τρίτος*), cuya característica particular es que da lugar el famoso triángulo rectángulo cuya denominación de origen es idéntica a la del ángulo recto (*ὀρθογώνιον*), el cual es el fundamento de todas las relaciones trigonométricas[356] tan notables como el seno, el coseno, la tangente, la contagente, la secante y la cosecante. Es claro que la noción de un orden en estos lados (*πλευράς*) que se repite tres veces (*τρίς*), es necesaria para poder conceptualizar el famoso teorema del triángulo pitagórico. Este ángulo recto o rectangular propio del triángulo rectángulo (*ὀρθογώνιον*), en verdad (*μέν*) posee tres ángulos o tres esquinas (*τρίγωνος*), y evoca las categorías constituyentes que definen al concepto de triángulo (*τρίγωνον*); aquellos tres (*τρεῖς*) ángulos (*γωνία*) que en el caso presente, si uno de ellos es recto (*ὀρθογώνιον*), permite establecer una normativa para los otros dos, lo que es el fundamento de toda la geometría como disciplina y arte simétrico de lo bello y exacto. El triángulo (*τρίγωνον*) es (*ἐστί*) el (*τό*) que verifica, lleva, tiene y posee (*ἔχω*) el ángulo (*γωνία*) derecho (*ὀρθός*): el ángulo recto (*ὀρθήν γωνίαν*) presupone el trabajo previo del concepto de recto (*εὐθύς*) en relación a una línea (*γραμμά*).

El ángulo recto presupone que está constituido por líneas rectas, las cuales se han levantado gracias a la acción de un punto (*σημεῖόν*), que se constiyen como la frontera final (*πέρας*) de dos (*δύο*) límites (*πέρας*) situados en direcciones opuestas (*πέρατος*), que se encuentran acotando ambas líneas y de esta manera definiendo la perpendicularidad (*ὀρθότης*) que define al famoso ángulo recto de 90° grados. La tercera definición euclidiana

[356] Sea θ un ángulo en una posición estándar y sea P(x, y) un punto distinto del origen al final del lado donde termina el ángulo. Se dan seis funciones trigonométricas de θ definidas en términos de sus coordenadas x, y, y de la distancia de P al origen por r: sen θ= y/r, cos θ = x/r, tan θ = y/x, cot θ = x/y, sec θ = r/x, csc θ = r/y. Ver *Trigonometry*, Moyer & Ayers (2009, pág. 12).

unida a la cuarta que involucra la noción de recto (*εὐθύς*) e igual (*ἴσος*), es lo que conduce a que se afirme que una línea está constituida por puntos: solamente los puntos que son iguales entre sí a condición que estén situados de manera recta pueden constituir una línea. De las líneas se deriva la noción de superficie y de esta surge la noción de ángulo (*γωνία*) a partir de la cual construimos la noción de perpendicularidad[357], como el cateto (*κάθετος*) que yace tendido (*κεῖμαι*) de manera recta (*εὐθύς*), de donde la figura (*σχῆμα*) de la cual el triángulo (*τρίγωνον*) es una de ellas, surge de una actividad de movimiento en torno (*περιέχω*) sobre (*ἐπί*) lo que está bajo y a lo largo (*ὑπό*) de la superficie (*ἐπιφάνεια*), aquello que brilla y es llevado a la luz (*φαίνω*). Con lo cual, las figuras geométricas son el resulado de una génesis (*γένεσις*) surgida de la luz (*φῶς*) que las revela y descubre.

Siguiendo con la introducción de aquel ángulo (*γωνία*) que es obtuso[358] (*ἀμβλύς*), el obtusángulo (*ἀμβλυγώνιος*) que por otro lado (*δέ*) él (*τό*) que tiene (*ἔχω*) un ángulo obtuso (*ἀμβλεῖαν γωνίαν*): *obtusángulo el que tiene un ángulo obtuso* (*ἀμβλυγώνιον δέ τό ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν,*) El vocablo *amblús* (*ἀμβλύς*) hace alusión a alguien embotado, débil, flaco y sin vigor; algo con borde; que ha sido debilitado, embotado, calmado y desanimado (*ἀμβλύνω*). Tal nombre puede provenir de un ángulo (*γωνία*) que ha perdido su condición de recto en cuanto derecho (*ὀρθός*), en cuanto es recto (*εὐθύς*) pero no es derecho (*ὀρθός*): entendiendo que lo que no es derecho no es justo, genuino, exacto y seguro, lo cual conlleva que ha perdido su condición propia que le da una mayor firmeza y solidez. Finalmente, *el acutángulo es el que tiene los tres lados agudos* (*ὀξυγώνιον δέ τό τάς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας*). Se está en frente al ángulo agudo o acutángulo (*ὀξυγώνιοs*); es aquel (*τό*) el (la, *τάς, art sing fem gen de ὁ*) ángulo (*gonía;* ángulo es sustantivo femenino en griego) que tiene (*ἔχω*) tres (*τρεῖς*) ángulos (*γωνία*) agudos (*ὀξύς*). Dado que carece de un ángulo derecho (*ὀρθογώνιον*), todos los ángulos son puntiagudos o en forma apuntada. El vocablo de agudo (*ὀξύς*) también evoca que es brillante, rápido, listo, deslumbrante, y su forma sustantivada es: (*ὀξύτης*) el que indica agudeza, intensidad, alteza, acidez. Está es

[357] La importancia de la ortogonalidad se aprecia en el teorema de Duplin: en tres sistemas ortogonales de superficie, las líneas de curvatura de cualquiera de uno de ellos en el sistema son las intersecciones con las superficies de los otros dos sistemas. *Introduction to Geometry*, Coxeter, (1967, p. 361).

[358] El ángulo obtuso es un ángulo cuya medida es más de 90º y menor de 180º. Lo anterior lleva al principio que dice: un triángulo no puede tener más que un solo ángulo obtuso, si en el triángulo ABC, tenemos que $\angle$ C es obtuso, luego $\angle$ A y $\angle$ B no pueden ser obtusos. *Geometry*, Rich & Thomas (2009, págs. 6, 61).

una consideración fruto de tres (*τρεῖς*) ángulos (*γωνία*) que son distintos y en consecuencia requieren una mayor destreza en su formulación teórica a fin de averiguar los grados que cada uno tiene. La única referencia es que uno de los tres ángulos es obtuso (*ἀμβλεῖαν γωνίαν*). A su vez, está el triángulo (*τρίγωνον*) acutángulo (*ὀξυγώνιον*), aquel que posee los tres (*τρεῖς*) ángulos (*γωνία*) agudos (*ὀξύς*): la noción del ángulo agudo (*ὀξύςῖαν γωνίαν*) lleva a un tipo de especificidad en que los tres ángulos son menores que un ángulo recto. Para poder medir un obtusángulo (*ἀμβλυγώνιος*) hay que conocer los teoremas de seno y del coseno, que es un resultado derivado del teorema de Pitágoras.

3.2.22. Se nombran las figuras al haberse establecido sus similitudes y diferencias

En esta formulación se efectúa un recorrido donde se organizan los constituyentes de una figura geométrica, y se realiza un listado de lo que tiene cada una y de sus propiedades. Se comienza con las figuras con cuatro lados y se indaga que características tienen en común con otras figuras y en que se diferencian: *De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y los lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y trapecios las demás figuras cuadriláteras* (*Of quadrilateral figures, a square is that which is both equilateral and right-angled; an oblong that which is right-angled but not equilateral; a rhombus that which is equilateral but not right-angled; and a rhomboid that which has its opposite sides and angles equal to one another but is neither equilateral nor right-angled. And let quadrilaterals other than these be called trapezia. τῶν δέ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν,* ὅ *ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καί ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ,* ὅ *ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ,* ὅ *ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδές δέ τό τάς ἀπεναντίον πλευράς τε καί γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον,* ὅ *οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον: τά δέ παρά ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω*). Tenemos los (*τῶν*) también (*δέ*) cuadriláteros[359] (*τετραπλεύρων*) que son (*ἐστιν*)

---

[359] Un polígono es una figura cerrada plana acotada por segmentos de línea recta como lados, un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. De igual manera, un triángulo es un polígono que tiene tres lados. La

figuras (*σχημάτων*) verdaderamente (*μέν*) con cuatro ángulos (*τετράγωνον*). Ahora el planteamiento se encamina a las figuras con cuatro (*τέσσαρες*) lados (*πλευράς*) que existen (*εἰμί*) como una figura (*σχῆμα*) que tiene cuatro (*τέτταρες*) ángulos (*γωνία*). Se da un isomorfismo entre el lado (*πλευρά*) con el ángulo (*γωνία*) pues, de alguna manera, toda figura (*σχῆμα*) involucra una composición y reunión de varios elementos (*στοιχεῖον*). Que la presencia de un elemento sea el lado o el ángulo, involucra la existencia de un principio contitutivo primario o primero y una regla elemental simple. La figura (*σχῆμα*) convoca varios elementos (*στοιχεῖον*) que, a su vez, indican el ejercicio de varias reglas que tienden a organizar u ordenar a la figura en cuestión, en este caso un cuadrilátero (*τετράπλευρος*), que puede ser definido ya sea en términos de sus lados (*πλευράς*) y/o en términos de sus ángulos (*γωνία*). En este caso, la definición (*dēfīnītiō*) sigue la iniciativa de este vocablo latino, lengua propensa a clasificar algo en relación a una regla que permita establecer una frontera que limite su significado (*dēfīniō*). El latín es una lengua instrumentista que busca beneficiarse de manera directa de la realidad que la rodea, ordena para intervenir y dominar su entorno: construye y administra con orden. Por lo tanto, hay que apoyarse en estas nociones limitadas y terminadas (*dēfīnītus*), sea el caso en relación a una figura (*σχῆμα*), en este caso ordenada bajo una jerarquía cuarta (*τέταρτος*) o por lo menos tiene que ser superior a tres (*τρεῖς*), que es la condición mínima para que exista (*εἰμί*) una figura como un ente geométrico. La tercera (*τρίτος*) figura (*σχῆμα*) en este caso es el triángulo[360] (*τρίγωνον*) e involucra la existencia de unos principios constitutivos (*στοιχεῖον*) que actúan de manera ordenada a fin de que pueda sostenerse como un ente geométrico o figura (*σχῆμα*) dotado de una serie de reglas e instancias diferenciadas, unos lados (*πλευρά*) y unos ángulos (*γωνία*) que son capaces de constituirse como una teoría susceptible de ser modelada.

Al efectuar una retropectiva de los axiomas tratados es posible apreciar que comenzaron con la problemática del primer estado geométrico existencial del todo y la

---

suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual a: $(n-2)180^{\circ}$, en especial la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^{\circ}$. *Geometry*, Rich (2009, p. 9, 65).

[360] Hay que tener presente que los ángulos de un triángulo pueden ser desglosados y colocados sobre una línea recta, y esto lleva a demostrar que la suma de los ángulos internos de un triángulo: $a^{\circ} + b^{\circ} + c^{\circ} = 180^{\circ}$. Si dos de los ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, lo ángulos que quedan son congruentes. La medida de cada ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de sus dos ángulos interiores no adyacentes. La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360º. Tema tratado en: Los principios para medir y sumar ángulos, *Geometry*, Rich (2009, p. 59-60).

parte, y luego del segundo estado que está gobernado por el concepto de línea (*γραμμά*) a la cual se le asocia los conceptos de ancho (*πλατός*) y largo (*μῆκος*), el uno afirmado y el otro negado (*ἀπλατής*). Luego de una serie de tratamientos donde se busca delimitar (*πέρας*) las nociones anteriores surge el concepto de superficie (*ἐπιφάνεια*) el cual, tras la introducción de otros conceptos como lo que está sobre el suelo (*ἐπίπεδος*) de manera recta (*εὐθύς*) da lugar a la noción de un ángulo (*γωνία*) que es derecho (*ὀρθός*). No obstante, antes de la aparición del triángulo se definen las figuras a partir del círculo (*κύκλος*) y del retorno de la primera noción primitiva de punto (*σημεῖόν*) como centro de un círculo (*κέντρον*) dotado de una periferia o circunferencia (*περιφερείας*): este primer concepto ya está definido y existe en relación con una pareja ordenada de conceptos (*κέντρον, περιφερείας*). En una gran mayoría de los axiomas se da un juego entre dos entes y/o dos conceptos, esto nos conduce a la noción de pareja ordenada. Esta surge de la reincidencia de un primer principio constitutivo en unión con un concepto que lo envuelve y establece la noción de pertenencia ($\in$) y membresía de un elemento frente a la clase o conjunto a la que pertenece: la (a, b) fundamento de toda la lógica clásica, que es de naturaleza binaria: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ de Kuratowski; $(a, b) = \{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}$ de Hausdorff y $(a, b) = \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$ de Wiener[361]. En la noción de pareja ordenada[362] como (*κέντρον, περιφερείας*), se anticipa la futura teoría de conjuntos de Georg Cantor. En ese sentido, se puede decir que todas las figuras (*σχῆμα*) construidas por líneas (*γραμμά*) sean triángulos (*τρίγωνον*), cuadrados (*τετράγωνον*) u otras, siempre su génesis (*γένεσις*) está dada por estar insertas dentro de un círculo (*κύκλος*). En todo esto es apreciable cómo los planteamientos geométricos se corresponden con la cosmovisión propia de tal cultura, donde todo está ordenado y nada está suelto al azar. Estos elementos (*στοιχεῖον*), vocablo que se origina de *stoîkhos* (*στοῖχος*) que es la línea o la fila, además del sufijo *–eîon* (*-εῖον*) que ayuda a formar sustantivos como instrumentos de acción como también adjetivos bajo la terminación *–eîos* (*-εῖος*).

[361] Tema encontrado en: A Simplification of the Logic of Relations, por Norbert Wiener, (1914, p. 224).

[362] Una pareja ordenada consiste en dos elementos a, b, en el cual uno está designado como el primer elemento y el otro como el segundo elemento. Una pareja ordenada se denota por (a, b), se dice que dos parejas ordenadas (a, b) y (c, d) son iguales si a = c, b= d. Su notación se parece a la de un intervalo abierto, no obstante podemos definir una pareja ordenada como: $(a, b) \equiv \{\{a\}, \{a, b\}\}$, esto nos lleva a que la propiedad fundamental de un par de parejas ordenadas es: $(a, b) = (c, d) \rightarrow (a = c) \wedge (b = d)$. Ver en: *Set Theory and Related Topics*, Lipschutz (1964, pág. 66).

Retomando la noción de definición (*dēfīnītiō*) de las figuras (*σχῆμα*), las nociones de lado (*πλευρά*) y ángulo (*γωνία*) se constituyen como los *differentiae* del *dēfīniēns* que delimitan el *dēfīniendum* de figura (*σχῆμα*).

3.2.22.1. El triángulo isósceles y el cuadrado son figuras con lados y ángulos iguales

Luego se declara que: *rectángulo la que es rectangular pero no equilátera* (*ὅ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καί ὀρθογώνιον,*), donde esta (*ὅς*) figura (*σχημάτων*) con lados iguales (*ἰσόπλευρος*) es (*ἐστί*) la (*τέ*) además (*καί*) rectangular (*ὀρθογώνιον*), aquella que posee el ángulo (*γωνία*) derecho o recto (*ὀρθός*). Se resalta auquí la noción de recto (*εὐθύς*) dada en relación a la línea (*γραμμά*) que habita una superficie (*ἐπιφάνεια*); en este contexto aparece un nuevo vocablo para señalar la noción de recto (*ὀρθός*) en relación con un ángulo (*γωνία*). En ese sentido se nota la precisión de la lengua griega, donde según las necesidades teóricas se crean nuevas palabras, esto es el resultado de un proceso reflexivo conceptual concatenado. De esta forma, en el cuadrado[363] (*τετράγωνον*) todos los ángulos y lados son iguales (*ἴσος*), propiedad que tan solo tiene el triángulo equilátero (*ἰσόπλευρον τρίγωνόν*). Recuérdese de paso al famoso triángulo equilátero (*ἰσόπλευρον τρίγωνόν*), donde se puede apreciar que sus tres ángulos son iguales y están constituidos bajo la cardinalidad del tres (*τρεῖς*), aportando un isomorfismo equitativo o igualitativo (*ἴσος*), que permite definir una figura perfectamente simétrica y en consecuencia un arquetipo de la belleza geométrica. El isomorfismo está dado en tres (*τρεῖς*) lados (*πλευράς*) iguales (*ἴσος*), situación que permite preguntar acerca de los ángulos (*γωνία*) que existen (*εἰμί*) que

[363] A partir de Euclides se dice: que un rectángulo es un paralelogramo equiangular, que un rombo es un paralelogramo equilateral y que un cuadrado es un paralelogramo equilateral y equiangular, con lo cual un cuadrado es al mismo tiempo un rectángulo y un rombo. Ver en: *Geometry*, Rich & Thomas (2009, pág. 82). Un tema que ha sido de gran interés a lo largo de la historia es la denominada inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto a los lados, que equivale también al problema de la hipotenusa con relación a los catetos. Este tema fue estudiado por Pitágoras y condujo al descubrimiento de los números irracionales, todavía es un problema no resuelto del todo si se considera que la teoría en la que se basa la construcción de los números enteros es muy distinta a la teoría de los números irracionales, la cual está lejos de disfrutar de una axiomatización que la fundamente. El tema de la inconmensurabilidad entre dos teoría científicas fue tratado por Thomas Kuhn (1962) en *The Structure of Scientific Revolutions* y Paul Feyerabend (1975) en *Against Method*, y conduce al tema presentado por Karl Popper (1959) en *The Logic of Scientific Discovery* en cuanto a la necesidad de que toda teoría científica pueda ser falseada. Es fundamental para la consolidación del método científico el tema de la falsación empírica, tema relacionado con el problema de la demarcación de lo que puede denominarse científico y no científico. Temas tratados por Carlos Rojas Osorio (2001) en: *Invitación a la filosofía de la ciencia* (Capítulos VI a VIII, pág. 85 a 140).

vendrían a ser asimismo iguales entre sí. A partir de tal hecho se define una de las propiedades más importantes de la geometría euclidiana, que consiste en afirmar que la suma de los tres ángulos internos de un triángulo es de 180° grados.

El actual planteamiento ha alcanzado el cuarto estado cuantitativo de diferencia cualitativa con el cuadrado, pasa luego a extender la serie dentro de un proceso regulado de inducción de estas figuras (*σχῆμα*). De esta manera, con lados de otra longitud (*ἑτερόμηκες*) también (*δέ*) en consecuencia se obtiene lo mismo. Se está en presencia de lo otro (*ἕτερος*), que señala algo distinto y diferente. Este vocablo proviene de la unión entre el cardinal uno (*εἷς*) y el sufijo (*-τερος*) que se utiliza en adjetivos para exprear una noción de contraste con un antónimo asimismo en formas comparativas. De manera que aunque se esté frente a otra (*ἑτέρα*) figura (*σχῆμα*), siempre lo otro se presenta a nivel de un (*εἷς*) ente concreto particular comparado con otro también concreto. Aquello que caracteriza al otro (*ἕτερος*) está dado a nivel de su longitud (*μῆκος*), entendida como esa unidad de medida espacio-temporal de magnitud en general líneal. Con lo cual, la manera de acercarse a las distintas figuras (*σχῆμα*) en este contexto geométrico es a través de su longitud (*μῆκος*). Una vez más se vuelve a encontrar una noción que aparece al comienzo a fin de definir la línea (*γραμμά*) la cual, como se anotó en el numeral segundo, define en este caso la línea (*γραμμά*) a partir de la unión de dos propiedades contrarias u opuestas de manera concertada y común. Pareciera que la definición de un término, introducido inicialmente como una noción (*notio*), se realiza nombrándolo en relación a una dualidad de propiedades que posee, donde la una es afirmativa (*μῆκος*) y la otra es negativa (*ἀπλατής*).

Se ha reiterado a lo largo del texto el vocablo de origen latino noción (*notio*), que tiene que ver con algo conocido y reconocido en lo que nos hemos familiarizado (*nōscō*), proviene del participio pasivo presente (*nōtus*) que manifiesta algo conocido, experimentado, aprendido, entendido, familiar, habitual. Hasta el momento, estas nociones obedecen a tales significados, caracterizadas por estar en relación a una teoría donde se fundamentan como unas nociones primitivas por cuanto se está frente a una etimología fundacional, se dice en muchos casos que provienen de raíces indoeuropeas, pero no se tienen documentos concretos de tal idioma. En segundo lugar, no han sido tratadas en general como conceptos, dado que involucran un proceso de fundamentación donde se subordinarían a una completitud semántica consistente, que todavía no ha sido abordada aquí. Se sabe que 'concepto' proviene del latín *conceptus*, que indica un pensamiento que se recibió o atrapó, algo adoptado y concebido que ha logrado ser contenido o mantenido, un propósito o algo concebido. Es el participio perfecto pasivo del verbo *concipiō*[364] que indica algo recibido, atrapado, contenido, asido o concebido; es el resultado de la unión entre el prefijo *con*- que indica reunir varioas instancias a fin de buscar una completitud y el verbo *capio* que indica capturar, asir, tomar y entender. De manera que la noción (*notio*) involucra algo frente con lo que se está familiarizado más no se está obligado a remontar una cadena deductiva-intuitiva; en cambio, en el concepto (*conceptus*) hay que explicar la razón de ser o argumentar la existencia de tales entes, aspecto que todavía no se ha emprendido aquí. El éxito de algunos vocablos latinos obedece a que el latín es una lengua más aprehensible que el griego y los distintos vocablos o palabras poseen un exceso de significados no siempre aprehensibles por la misma palabra: unos significados no siempre decibles o decidibles.

3.2.22.2. Cómo del triángulo isósceles se pasa al rombo; similitudes y diferencias

Retomando el texto: *rectángulo la que es rectangular pero no equilátera* (*ὅ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ*), se encuentra con los (*ὅ*) que también el rectángulo (*ὀρθογώνιον*) cumple de igual manera (*μέν*) con la propiedad de tener otros lados (*πλευρά*), en este caso que abrigan unos ángulos (*γωνία*) rectos (*ὀρθός*). Es de apreciar la propiedad o facultad de toda figura (*σχῆμα*) de poder levantar, construir, reconstruir y rectificar (*ὀρθόω*) los distintos elementos que la constituyen. En especial, se valora la posición de verticalidad, que involucra que algo esté derecho, lo que brinda exactitud, regularidad y veracidad (*ὀρθότης*). Sin embargo (*δέ*), tal proposición o aseveración no (*οὐκ, οὐ*) se cumple en relación al equilátero[365] (*ἰσόπλευρος*), donde lo recto (*ὀρθός*) no existe en relación a las

---

[364] Ver en: Charlton T. Lewis and Charles Short (1879) *A Latin Dictionary*, Clarendon Press, Oxford.

[365] Existe un teorema que combina las nociones de los triángulos equilátero e isósceles y es el teorema de Morley: si tenemos tres puntos de intersección de un trisector adyacente a los ángulos de cualquier triángulo se forma un triángulo equilátero. Es decir, cualquier triángulo ABC conduce a un triángulo equilátero PQR, cuando los ángulos del primer se trisectan con los ángulos del segundo. Esto da lugar a que aparezca tres triángulos isósceles que satisfacen las siguientes condiciones, los ángulos de la base satisfacen la ecuación: α

figuras equiláteras, tenemos unos lados (*πλευρά*) inclinados al igual que los de un triángulo. Parece dar la impresión que el triángulo (*τρίγωνον*) fuera una figura (*σχῆμα*) que es definida a partir de sus ángulos (*γωνία*) y no a patir de sus lados (*πλευρά*) como si lo sería el rectángulo (*ὀρθογώνιον*), lo común a ambos es que la noción de línea (*γραμμά*) los antecede bajo un ordenamiento de cardinalidad del tres (*τρεῖς*) ángulos (*γωνία*) para el triángulo y cuatro (*τέσσερα*) lados (*πλευρά*) para el rectángulo: en ambos casos se tiene la línea (*γραμμά*) como el elemento primario que los constituye y hace posible.

También se considera al rombo: *rombo la que es equilátera pero no rectangular* (*ῥόμβος δέ*, ὅ *ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ,*). El rombo (*ῥόμβος*) el cual (*ὅ*) es en verdad (*μέν*) un equilátero (*ἰσόπλευρος*), sin embargo (δέ) no (*οὐκ, οὐ*) es un rectángulo (*ὀρθογώνιον*). Se nota que el rombo (*ῥόμβος*) a nivel de su figura (*σχῆμα*) no posee una línea (*γραμμά*) recta (*εὐθύς*) que indique la presencia de un ángulo (*γωνία*) recto y derecho (*ὀρθός*). El tema viene a sugerir de manera muy directa que se está abordando la figura (*σχῆμα*) a nivel de una externalidad y no se está analizando la figura a nivel de su internalidad, lo que permitiría construir dos líneas, una vertical y otra horizontal. Este hecho tan solo ha sido tratado hasta ahora en la definición 17, donde se va a construir la noción de diámetro (*διάμετρος*) de un círculo (*κύκλος*), procedimiento que involucra atravesar aguijoneando (*κεντρόω*) esta esfera que da vueltas o gira (*κυκλόω*). En general, la construcción de una teoría geométrica parte de las externalidades que la caracterizan a nivel de su forma externa o contorno; aspecto que hace que ciertas apreciaciones y conclusiones que se infieren bajo este abordaje difieren en gran parte de las que se puede conjeturar a nivel interno. Es de resaltar cómo al análisis externo de una figura (*σχῆμα*) le viene asociado su comportamiento dinámico, que en el caso del rombo (*ῥόμβος*) es *rhémbō* (*ῥέμβω*); ese dar vueltas en círculo, moverse alrededor, en muchos casos de una manera no estable o actuar al azar. Este hecho tan sencillo evidencia que la geometría surge a partir de la observación de la naturaleza, sea el caso del círculo (*κύκλος*) como una forma que se ve en el Sol, o en la Luna u otros planetas conocidos en la época. De manera que el acercamiento a la geometría es dinámico y no estático; los cuerpos geométricos son

+ $\beta + \gamma = 120^{\circ}$, y satisfacen la desigualdad: $\alpha < 60^{\circ}$, $\beta < 60^{\circ}$, $\gamma < 60^{\circ}$. Ver en: *Introduction to Geometry* por Coxeter (1967, pág. 24).

concebidos de manera dinámica a nivel de su externalidad o forma externa, que a partiendo de su figura (*σχῆμα*) se le otorga el nombre con el cual van a ser conocidos.

3.2.22.3. En el romboide subyace un movimiento que delinea una métrica

Luego, la formulación es extendida: *romboide la que tiene los ángulos y los lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular* (*ῥομβοειδές δέ τό τάς ἀπεναντίον πλευράς τε καί γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον,*). Los romboides (*ῥομβοειδής*) aquellos rombos[366] (*ῥόμβος*) de diversas formas (*εἶδος*), aspecto contemplado en el sufijo (-*ειδής*) que evoca aquel proceso donde se perciben aquellas formas puras de índole geométrico. Una vez más hemos de recordar que la aprehensión de los entes geométricos se efectuó como una figura (*σχῆμα*) dinámica, hecho atestiguado en el verbo *rhémbō* (*ῥέμβω*) que es girar en círculos. De alguna manera, la representación gráfica del mismo ente geométrico, en este caso de un rombo (*ῥόμβος*), límita la forma (*εἶδος*) del mismo, más en este caso que al hablarse de romboides (*ῥομβοειδής*) se está frente a toda una variedad de rombos diferentes. Dado que el representarlos como un dibujo, lo vuelve rígido y estático, es útil estudiar sus relaciones formales entre sí, lo que límita la imagen o representación dinámica del mismo que no es susceptible de ser dibujada o representada. Pero (*δέ*) en el rombo (*τό*) están en oposición (*ἀπεναντίον*) sus lados (*πλευράς*) a sus ángulos (*γωνίας*) los unos con los otros (*ἀλλήλων*), este hecho solo es posible dado que conservan (*ἔχον*) la misma (*ἴσας*) relación el lado con el ángulo. Se está frente a lo que está enfrente, en contra, por estar delante (*ἀπέναντι*), este criterio de oposición (*ἐναντιότης*) está dirigido hacia los lados (*πλευράς*) que están enfrentados por estar puestos en frente (*ἐναντιόομαι*). Además se realiza un enfásis con una conjunción inicial de tipo conectivo (*τε*), la cual es enfatizada con una segunda conjunción más fuerte y reincidente (*καί*) para mencionar que los ángulos (*γωνίας*) también poseen esta propiedad de oposición (*ἐναντιωσις*), la cual lleva a que los ángulos estén situados (*γωνιάζω*) en relación a aquello que los hace iguales (*ἰσάζω*). Es de resaltar que el isomorfismo (*ἴσος + μορφή*) que se da entre el lado (*πλευρά*) y el ángulo

[366] En el rombo: (a) Se da que todos sus lados son congruentes, (b) las diagonales de un rombo son bisectores perpendiculares entre si, (c) las diagonales de un rombo bisectan los ángulos del vértice, (d) las diagonales de un rombo forman cuatro triángulos congruentes. *Geometry*, Rich & Thomas (2009, pág. 82-83).

(*γωνία*) es lo que hace que sea igual o equivalente (*ἴσος*), debido a que se conoce y se está enterado (*οἶδα*) que existe una forma (*εἶδος*) que es vista y percibida (*εἴδομαι*) entre los unos con los otros (*ἀλλήλαις*). Es fundamental apreciar cómo la diferencia (*ἀλλοῖος*) involucra una relación binaria de tipo simétrico entre dos entes distintos, el lado (*πλευρά*) con el ángulo (*γωνία*), los cuales permiten establecer una equivalencia fundada en una similitud congruente y justa (*ἴσος*), dado que en el fondo participan de la misma idea (*ἰδέα*) debido a que ambas formas se requieren entre sí. La una en la otra (*ἀλλήλων*) en donde lo otro en cuanto diferente (*ἄλλος*) involucra una equivalencia (*ἴσος*) que tiene su fundamento en aquella oposición (*ἐναντίωμα*) que permite hacerlos iguales dado el balance que los une (*ἰσάζω*).

Se enfatiza cómo esto es algo que se conoce en cuanto existe un procedimiento (*οἶδα*) para llevarlo a cabo, chequeándolo y manteniéndolo (*ἔχον*, *ἔχω*). En resumidas cuentas, esto dice que no puede existir un lado (*πλευρά*) sin un ángulo (*γωνία*); ambas ideas (*ἰδέα*) poseen una forma (*εἶδος*) similar (*ἴσος*) que las obliga a sostenerse (*ἔχω*) la una con la otra (*ἀλλήλων*). Además, se resalta que la oposición (*ἐναντιότης*) involucra una igualdad, similitud o equivalencia (*ἰσότης*). Esto indica que existe un procedimiento o algoritmo que permite calcular un lado (*πλευρά*) en función de su ángulo (*γωνία*), pudiendo cada uno ser función (f) del otro (*ἀλλήλων*): (*πλευρά*) f (*γωνία*), f(*πλευρά*) = *γωνία*; y viceversa f(*γωνία*) = *πλευρά*. Se puede calcular un lado a partir de su ángulo, asimismo, se puede calcular un lado a partir de su ángulo. Tal hecho se verá limitado por la noción de figura (*σχῆμα*), la cual requiere mínimo de tres (*τρεῖς*) entes afines para constituirse como tal: tres lados corresponden a tres ángulos, tal hecho permite delimitar la longitud de los lados (*πλευράς*) y de los ángulos (*γωνίας*). Los distintos procedimientos utilizados en buscar hacerlos iguales (*ἰσόω*) recrea todos los posibles tipos de lados y ángulos que pueden darse: sea en los triángulos (*τρίγωνόν*), cuadrados (*τετράγωνον*) y rectángulos (*ὀρθογώνιον*). La búsqueda de esas similitudes entre ángulos (*γωνίας*) y lados (*πλευράς*) en las figuras (*σχῆμας*) geométricas, en aquellas medidas (*μέτρον*) inspiradas en la medición (*μετρία*) sobre los terrenos (*γῆ*) conduce a las bien conocidas métricas propias de la topología sobre un espacio métrico: aquella generalización matemática sobre cualquier tipo de espacio o lugar (*τόπος*) decible y calculable (*λόγος*), la cual se efectúa sobre parejas ordenadas de un conjunto. Es de notar que los llamados sólidos platónicos[367] o propiamente los sólidos pitagóricos son aquellos polígonos regulares convexos en número de cinco, representan esa búsqueda hacia la perfección de las formas puras en estricta unión con la naturaleza de los cuatro elementos de la antigüedad griega y el quinto que los engloba a todos. Los sólidos pitagóricos se fundamentan en encontrar aquellas figuras (*σχῆμας*) que mantienen un isomorfismo entre sus ángulos (*γωνίας*), lados (*πλευράς*) y otras identidades geométricas como los vértices, aristas, radios; asimismo, la posibilidad que estén conformados por triángulos, cuadrados o pentágonos.

3.2.22.4. La cuantificación universal geométrica para universalizar el análisis

La cita de este extenso axioma prosigue: *pero no es equilátera ni rectangular* (*ὅ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον:*). Se manifiesta aquí que ni el rombo (*ῥόμβος*) ni el romboide (*ῥομβοειδής*) es (*ἐστιν*) equilátero, o sea aquel que posee lados iguales (*ἰσόπλευρος*), ni tampoco es un rectángulo (*ὀρθογώνιον*). En tan sencilla oración se nota la introducción de una suerte de proposición cuantificada de manera universal, lo valioso de está formulación es poder cuantificar algo de manera universal por medio de un amplio uso reiterativo de la negación: una cuantificación universal negativa (~∀), que no parte de negar la existencia de algo (~∃) sino de afirmar la negación: aquí se halla esa propiedad del cálculo proposicional donde una doble negación es una afirmación: $\vdash . \sim \sim p \equiv p$. Por lo tanto, los griegos tenían una gran riqueza de instancias para negar algo, en el caso que nos ocupa tenemos (*οὔτε*), que es un adverbio donde se tiene una acción reiterativa de la negación, conocido como los negativos dobles: y no, por un lado no y por el otro tampoco, se estás en presencia del uso de la conjunción y (*τε*) y del adverbio (*οὐ*) que señala la negación como no. Es curioso cómo en la definición de la inducción matemática se recurre a la conjunción 'y' para señalar la continuación de algo, como si este no estuviera potencializado en toda una serie o secuencia de términos o entes geométricos. Tal hecho

[367] En un sólido platónico tenemos un polígono convexo [n], donde n es un entero que puede describir una región finita de un plano encerrado por un número finito de líneas, tal que su interior descansa enteramente sobre un lado de cada línea. Análogamente, un poliedro convexo es una región del espacio rodeada de un número finito de planos, cada plano es cortado por el otro plano es un polígono, que llamamos la cara y los lados comunes de dos caras nos dan un borde. Los más familiares son las pirámides y los prismas. Ver en *Introduction to Geometry*, Coxeter (1967, pág. 148).

también está potencializado aún más cuando se une con la también conjunción ‘y’ (*οὔτε* con *καί*), de esta manera se utilizan otros vocablos para negar como (*μή*) y la posibilidad de unirlos a una conjunción como (*τε, δέ*) en (*μήτε, μηδέ*). La noción que algo se puede negar de manera sucesiva o una negación en sucesión, como una suma de negaciones es un recurso de enorme valor y abre un camino para establecer una definición de manera negativa. Es de esta manera que ni las formas equiláteras (*ἰσόπλευρος*) ni las rectangulares (*ὀρθογώνιον*) poseen una igualdad (*ἴσος*) sea en sus lados (*πλευράς*) o entre sus ángulos (*γωνίας*) pueden girar (*ῥέμβω*) como lo hacen los rombos (*ῥόμβος*). La problemática que está en el fondo en esta proposición es el concepto de ortogonalidad (*orthogonalis*) aquel propio de la naturaleza recta, correcta, justa, segura, exacta (*ὀρθός*) que posee todo ángulo recto (*ὀρθογώνιον*), tal propiedad se ha extendido a los triángulos rectos que son el fundamento de las funciones trigonométricas y por ende del famoso teorema de Pitágoras.

Finalmente, se va a considerar la conclusión de ese axioma: *y trapecios las demás figuras cuadriláteras* (*τά δέ παρά ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω*). Se tien cómo estos los cuales (*τά*) sin embargo (*δέ*) en razón que (*παρά*) estos (*ταῦτα*) son llamados (*καλείσθω*) los trapézia (*τραπέζια*) con cuatro lados (*τετράπλευρα*). Esta formulación acude a las formas plurales de aquellos que tienen cuatro (*τετράς*) lados (*πλευράς*), conscientes de estudiar las formulaciones a medida que se van dando dentro de una cardinalidad (*τέσσαρες*) y una ordinalidad (*τέταρτος*), en la medida que se efectúa una conceptualización de naturaleza teórica se comienza formulando unas nociones primitivas, sean estas: la de lado (*πλευρά*), la de ángulo (*γωνία*), la de recto (*ὀρθός*), que ha sufrido una transformación desde la noción de línea (*γραμμή*) recta (*εὐθύς*), pasando a su relación con la superficie (*ἐπιφάνεια*) y la luego con la perpendicularidad (*κάθετος*). De esta manera, a medida que va variando el componente cuantitativo va variando el cualitativo, una misma noción primitiva va en muchos casos asumiendo y adoptando nuevos nombres. Siendo el mismo concepto que va ganando complejidad cuando se establece un orden entre sus nociones primitivas, en especial, debido a que están sujetas a satifacer entes geométricos o figuras (*σχῆμα*) dotadas de un menor o mayor número (*ἀριθμός*) de elementos primitivos. Una vez más el número (*πλευράς*) se sitúa como el criterio dominante que interviene en la creación de estos trapecios[368] (*τραπέζια*) de cuatro lados (*τετράςπλευρος*); al variar el número (*ἀριθμός*) de elementos (*στοιχεῖον*) en una figura (*σχῆμα*), como aquel elemento que señala un principio innaugural y una regla formal de carácter deductivo inferencial, da lugar a que aparezcan diversas formas geométricas, que van desde una línea (*γραμμή*) a una superficie (*ἐπιφάνεια*) y, finalmente, a la propia figura (*σχῆμα*) noción que reclama el concepto de frontera (*ὅρος*), la cual es una evolución de la noción de un límite (*πέρας*) que bien se puede o no atravesar (*περάω*). Se resalta cómo todas nociones y los conceptos que las motivan se originan en el diario vivir, sin olvidar que el trapecio (*τραπέζια*) está inspirado en las pequeñas mesas (*τραπέζιον*), aquella mesa (*τράπεζα*) que posee unas patas o pies (*πέζα*), vocablo que proviene de pie o pierna (*πούς*); así también se hacía llamar aquella unidad de medida griega antigua conocida como un pie. Se resalta cómo el verbo que se utiliza es llamar (*καλέω*), a fin de resaltar a través de la conjugación de formas pasadas como la tercera persona del presente imperativo singular (*καλείσθω*), ese mandato recibido del pasado, cuando se daba el nombre a las cosas (*χρῆμα*) y a los elementos (*στοιχεῖον*) en cuanto estos eran llamados (*καλέω*) a cumplir la satisfacción de algunas necesidades, como lo es la expresión de la misma palabra. No hay que olvidar que el rombo (*ῥόμβος*) da lugar a la familia de los romboides (*ῥομβοειδής*), vocablo que contiene el sufijo (-*ειδής*) que está en relación a la forma, idea, imagen, o representación (*εἶδος*) que es evocada dado que es la que se ve, se reconoce y se observa (*εἴδω*). Esto lo lleva a uno a estar consciente, a percibir (*εἴδομαι*) aquello que es visto y que se aparece a fin de ser conocido (*οἶδα*). El trapecio (*τραπέζια, τραπέζιον*) nos rememora una pequeña mesa, la mesa (*τράπεζα*) que nos anticipa el concepto de paralela[369] (*παράλληλος*) tan importante para el desarrollo de las geometrías tanto euclidianas como no euclidianas.

[368] El trapecio satisface los siguientes principios: los ángulos de la base de un trapecio isósceles son congruentes: el trapecio ABCD cumple que si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, luego $\angle$ A $\cong$ $\angle$ D. Si los ángulos de la base de un trapecio son congruentes, el trapecio es isósceles: si $\angle$ A $\cong$ $\angle$ D, entonces se cumple $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. El área de un trapecio equivale al producto del largo de sus bases por la altura y la mediana: A = ½ h(b + b'), teniendo que A = hm, donde m es la mediana, m = ½ (b + b'). En Geometry, Rich & Thomas (2009, p.77 y 148).

[369] Sus Principios son: (a) A través de un solo punto que no está sobre la línea se puede trazar tan solo una paralela a dicha línea. (b) Una línea es paralela si un par de sus ángulos internos son congruentes, (ob.cit. 49).

3.2.23. La noción de paralela marca el inicio de la transformación de la geometría

La introducción de la paralela como dos líneas que marchan la una junto a la otra, inserta una complejidad nunca antes vista en el análisis de las figuras geométricas, ya que tal situación es demandable en cada una de las amplias consideraciones que han permitido la construcción de todo esta modelación métrica: *Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongado indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos* (*Parallel straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction. παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καί ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τά μέρη ἐπί μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις*). Se está frente a las paralelas (*παράλληλος*) aquello que está al lado marchando lado a lado, junto el uno al otro a lo largo de todo un espacio y tiempo. En este instante ya anunciado en el parágrafo anterior, se introduce la noción de una línea (*γραμμή*) que tiene la potestad de desplazarse junto a otra línea a su lado, junto, cerca, durante (*παρά*). Este mismo vocablo se ha inspirado en aquellos sitios costeros, representa la costa y la ribera (*παράλιος*), aquella línea o franja que se desplaza a lo largo de dos linderos de naturaleza muy distinta, agua y tierra unidos por esta zona, que es propensa a cambios, a una sucesión de movimientos alternativos (*παραλλαγή*) que se dan de manera variada e irregular (*παραλλάξ*). Esto remite a que el verbo que representa a las paralelas es de naturaleza dinámica; como bien se anotó, los griegos no concebían la geometría como una disciplina rígida o estática, sino los mismos entes geométricos; las figuras (*σχῆμα*) representan estadíos de movimiento: *paralásso* (*παράλλάσσω*) tiene que ver con el cambiar de sitio, el mudar, el trastocar fruto de alterar un paso que transita a lo largo de una superficie. Tal desplazamiento no es siempre pacífico, motivo por el cual en la misma significación está contenido algo que puede arrastrar originando una desviación, un apartarse y un diferir. Tal es el estadio de la costa tanto frente al mar o a un río, siempre sujeto a cambios inesperados que muchas veces causan destrucción y modifican profundamente el entorno. Esta situación se da dentro de un movimiento alternativo (*παράλλαξις*) que muchas veces es inesperado e imprevisto (*παράλογος*), representa las sorpresas y los desengaños de un error en el cálculo, un engaño como consecuencia de un razonamiento falso o del error de un cálculo (*παραλογίζομαι*). Es como si los antiguos griegos presintieran, que al haber sido cuestionado el postulado de las paralelas fuera a dar origen a las geometrías no euclidianas previstas por Carl Gauss[370] en 1813, aunque sus planteamientos fueron desarrollados de manera independiente por los matemáticos János Bolyai y Nicolai Lobachevski alrededor de 1830 en sus tratados de geometría hiperbólica. Todos los tres demostraron que el axioma de las paralelas no puede ser probado sobre la base de los otros nueve axiomas y que este nuevo axioma involucraría la necesidad de fundar una nueva geometría.

El mismo vocablo de la paralelas (*παράλληλος*) reúne la preposición *pará* (*παρά*) que posee usos en los casos dativo, acusativo y genitivo, evoca algo que está al lado a nivel espacio-temporal, tal noción involucra una cercanía que dará lugar al concepto de vecindad que será una pieza clave en el desarrollo del cálculo y en la defición de la noción del límite de un función. También se tiene el verbo (*ἀλλάσσω*) que es cambiar, transformar, dejar para cambiar para sí, tomar y dar a cambio; separarse o desprenderse. ¿Qué evoca la complejidad de la misma etimología de las paralelas? Indica dos naturalezas contrarias que están unidas: una preposición que acompaña al lado (*παρά*) y una conjunción (*ἀλλά*) que es pero, y, sin embargo, como algo que está unido a pesar y a lo largo; motivo por el cual la noción de cambio y tráfico (*ἀλλαγή*) en otro sitio (*ἀλλαχῆ*) o de otro sitio (*ἀλλαχόθεν*), ilustra muy bien aquello que está en otra parte, aquí y allá (*ἄλλαῃ*) que, finalmente, invita a hablar o explicar algo de manera figurada o alegóricamente (*ἀλληγορέω*). Es decir, el tratamiento acerca de las paralelas ya es una invitación al uso de otras formas literarias en las que esta indagación harto problemática tenga que apoyarse.

Por tal motivo se dice al comienzo de este numeral: *son rectas paralelas* (*παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι*) y, en este contexto, el verbo utilizado (*εἰσιν*) es una forma verbal supletista, que recrea de manera adecuada la complejidad de la introducción del

---

[370] Carl Friedrich Gauβ, el llamado 'principe de las matemáticas', a los 18 años inventó el método de los mínimos cuadrados y a los 19 mostró que se puede construir un polígono regular de 17 lados, y los 24 publicó *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) un trabajo en geometría diferencial. Entre sus trabajos no publicados están las funciones elípticas y la geometría no-euclidiana. El crédito del descubrimiento de las geometrías no-euclidianas se le dio al ruso Nikolai Lobatchevsky y al húngaro János Bolyai, el primero publicó: *Sobre los fundamentos de la Geometría* (1829-30) y *Nuevos fundamentos de la Geometría con una teoría completa de las paralelas* (1835-37). Bolyai, publicó: *Ensayos sobre los elementos de las matemáticas para jóvenes estudiosos* (1832-33). *Mathematical Thought*, Morris Kline (1972, págs. 870-874).

planteamiento de las paralelas: por una parte, está relacionada con el verbo *eisérkhomai* (*εἰσέρχομαι*) que es entrar, invadir, venir a la corte; es fruto de la unión de la unión de la preposición dentro *eis* (*εἰς*) con el verbo *érkhomai* (*ἔρχομαι*) que es entrar y debería de ir. Asimismo, hay otras dos formas supletinas que se relacionan con el verbo venir e ir *eîmi* (*εἶμι*) y con el verbo ser, existir, vivir, suceder, *eimí* (*εἰμί*). Estas tres formas gramaticales brindan el supletismo o flexión heteróclita que recrea muy bien la naturaleza de las paralelas en torno a lo que es recto (*εὐθύς*) cuando se ve transitado a lo largo de manera paralela o adyacente: algo que estamos invitados a ir y venir (*ἔρχομαι*), vino y fue (*ἦλθον*) como para indicar que es algo que se mueve a lo largo de toda la secuencia temporal, no estando limitado o confinado a un tiempo o espacio específico. Este hecho anticipado en los antiguos griegos se ve reflejado en la teoría de la relatividad que fue posible gracias al desarrollo de las geometrías no euclidianas; en concreto, aquellas que se originan del cuestionamiento acerca de la validez del teorema de las paralelas que se está tratando aquí. Ya se había mencionado lo complejo que es hablar de lo que es lo recto (*εὐθεῖα*), las paralelas (*παράλληλος*) nos muestran otra forma categorial para la existencia de la línea (*γραμμή*), en este caso la recta (*εὐθύς*). Lo curioso que se verá en los siglos que siguen es que si en lugar de una recta se coloca una forma hiperbólica o elíptica se altera también en gran medida el planteamiento que se presenta en el quinto postulado de Euclides. De por sí lo recto (*εὐθύς*) está relacionado con la rectitud en cuanto justicia (*εὐθύτης*), involucra aquella actividad de enderezar, corregir, enmedar, dirigir, guiar, examinar y verificar las cuentas como también llevar a juicio (*εὐθύνω*). Esto se realiza cuando alguien tiene al lado un parámetro que le sirve de guía, no siendo una tarea fácil poderse desplazar a lo largo de lo que es lo recto, debido a que no es tan sencillo imitar la justicia y comportarse según la norma de manera ilimitada a lo largo de una secuencia espacio-temporal. Lo recto (*εὐθύς*) al ser analizado nos plantea toda suerte de dificultades y retos, razón por la cual este vocablo está relacionado con (*εὔθυνος*) quien es un investigador o juez, alguien que revisa las cuentas y con la rendición de cuentas (*εὐθύνα*) de un magistrado, como consecuencia de cuestionar por que alguien está dejando su cargo o que está sometido a una malversación que debe de ser castigada.

3.2.23.1. El paradojal epistemológico a nivel axiomático en las paralelas

Continúa la introducción que define las paralelas[371] (*παράλληλος*): *las que estando en el mismo plano* (*αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι*). Siendo (*οὖσαι*) cualesquiera (*αἵτινες*) entre (*ἐν*) ellas (*τῷ*) mismas (*αὐτῷ*) sobre la superficie (*ἐπιπέδῳ*). La actual oración exhibe la condición existencial (*εἰμί*) de las paralelas (*παράλληλος*), y esto se hace a través del uso del participio plural femenino (*οὖσαι*), forma adjetivada verbal no personal donde se resalta la naturaleza misma del objeto que nos ocupa. Esa condición que parece alargarse en el tiempo como situado en un presente permanente, manifiesta que cualquier cosa (*ὅστις*), las cuales (*ὅς*) alguna de ellas (*τις*) sean (*εἰμί, οὖσαι*), sugiere un tipo de cuantificación universal manifiesta a través del pronombre indefinido (*τις*), que indica que no importa qué tipo de paralelas (*παράλληλος*) sean, siempre se va a cumplir una condición que las define como tales. De alguna manera, el uso del pronombre indefinido (*τις*) es un acierto, dado que deja entrever que pueden existir diversas familias o tipos de paralelas, hecho que se verá afirmado en las geometrías no euclidianas con las paralelas de la geometría hiperbólica o la elíptica, que contorsionan y doblan el espacio, aspecto que se analiza en la teoría de la relatividad donde se manifiesta que el espacio es curvo en función de la masa de un cuerpo que lo dobla. Tal aspecto está presente en la noción que sigue que tiene que ver con el espacio propio donde habitan las paralelas (*παράλληλος*). Estas están siendo introducidas por la preposición *én* (ἐν), la cual cobija una locación espacial donde se está sobre, dentro y cerca; asimismo, una locación temporal en la cual se está dentro, cerca y durante un tiempo. Esta forma declinada (*ἐν*) también es propia de la preposición *eís* (*εἰς*), que indica algo dentro tal como un elemento está dentro de un conjunto frente al cual manifiesta una membresía.

Este hecho indica que lo llano que está sobre una superficie (*ἐπίπεδος*): sobre, cerca, dentro, hacia, con, antes y después (*ἐπί*) de lo llano (*πεδίον*), aquella llanura o tierra

[371] Se ha denominado geometría absoluta a la geometría no-euclidiana, tema planteado en la sencilla oración: dos líneas son paralelas si casi se encuentran. Tal hecho lleva a afirmar respecto a las siguientes líneas: si p_1 es paralela a q_1 y q_1 es paralela a r_1, entoces p_1 es paralela frente a r_1. Si un rayo r_1 está situado entre dos rayos paralelos, es también paralelo a ambos. Cuando se considera que dos líneas paralelas se van a encontrar en el infinito, su ángulo de intersección debe de ser considerado como igual a cero. Aspecto explicado e ilustrado en detalle en: *Introduction to Geometry*, Coxeter (1967, pág. 265-267).

cultivada que es un distrito de una población. SE señala algo que se desplaza sobre o que puede estar dentro de una superficie (*ἐπιφάνεια*) que es llana y donde se vive o habita (*πεδινός*); se trata de ese suelo llano, campo y región (*πέδον*) que traba, ata, liga, encadena, detiene, aparta, forza (*πεδάω*). Es importante notar que ha existido un cultivo previo, en cuanto la superficie (*ἐπιφάνεια*) ha sido adecuada, limpiada y preparada para ser trabajada; hecho que indica como un lazo que nos traba, unos grillos que nos sujetan e inmovilizan (*πέδη*). Las paralelas[372] (*παράλληλος*), en consecuencia, involucran una traba que liga y detiene tanto a nivel del espacio como del tiempo, este aspecto está considerado en la preposición (*ἐν*). A su vez las paralelas tienen que ver con el verbo *epípasso* (*ἐπιπάσσω*) que indica una actividad de extender o esparcir encima, hecho notorio dado que se considera a las paralelas como unas líneas (*γραμμή*) que marchan la una al lado de la otra de manera algo ininterrumpida. Aspecto que se nota en toda tierra cultivada, que tiende a irse ampliando a fin de extender la cosecha y de esta manera está sobre (*ἐπί*) esa llanura (*πεδιάς*) que nos ata (*πεδάω*), tal como se puede ver en el verbo *epípedao* (*ἐπίπεδάω*). Esta naturaleza de las paralelas deja ver la evolución de los entes que habitan una superficie (*ἐπιφάνεια*) que a medida que ganan complejidad, traerán también profundos cambios a la geometría debido a que los conceptos están reunidos de manera conjunta y simultánea en un planteamiento teórico. Algo a destacar es la presencia del pronombre (*αὐτός*), que indica esa acción reflexiva que apunta a que ese mismo ente geométrico esté relacionado consigo mismo; es una característica propia de las paralelas (*παράλληλος*) en cuanto a esa naturaleza que busca extenderse sobre una superficie a partir de un movimiento autosostenible que liga y encadena (*ἐπίπεδάω*).

[372] Las geometrías no euclidianas se derivan de haber cuestionado el quinto postulado de Euclides acerca de las paralelas, en el caso de la geometría hiperbólica fue la utilizada por Albert Einstein y Hermann Minkowski para entender el comportamiento físico del espacio y del tiempo. Clásicamente el espacio y el tiempo eran consideradas cantidades independientes, donde un evento tenía coordenadas $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ donde la coordenada x_{n+1} representa el tiempo. Y la métrica que se utilizaba era la euclidiana con una norma positiva $x^2_1 +\ldots+ x^2_{n+1}$. La teoría de la relatividad cambió todo esto, en el modelo de espacio-tiempo de Minkowski, la geometría está también dada por $\mathbb{R}^{n+1}$ pero la norma es indefinida $x^2_1 +\ldots+ x^2_n - x^2_{n+1}$ que define la distancia.El cono de luz está definido como el conjunto de puntos con norma 0. La fórmula para una esfera n-dimensional en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ está dada por: $S^n - \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: x \cdot x = 1\}$. La fórmula para una esfera n-dimensional en un espacio hiperbóleo está dada por: $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}: x * x = -1\}$, donde $*$ indica el producto punto hiperbólico con valores -1 de radio $i - \sqrt{-}\ 1$. Ver *Hyperbolic Geometry*, Cannon, Floyd (1997, pag. 59-64). Se resalta que el haber cuestionado un axioma tan importante haya traido tantos cambios, se imaginan cuantos cambios vendrían si las nociones primitivas de punto, línea y superficie se modifican.

Luego el texto prosigue: *y siendo prolongado indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos* (*καί ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τά μέρη ἐπί μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις*). La sentencia continúa manifestando con la conjunción 'y' en consecuencia (*καί*) aquello lanzado (*ἐκβαλλόμεναι*) dentro (*εἰς*) de lo que no tiene límites (*ἄπειρον*) sobre (*ἐφ'*) cada uno de los dos (*ἑκάτερα*) cuyas (*τά*) partes (*μέρη*) también (*ἐπί*) ninguna de las dos (*μηδέτερα*) caen (*συμπίπτουσιν*) entre sí (*ἀλλήλαις*). La actual clausura que está siendo introducida por la preposición 'y' (*καί*) complementa a la anterior, en ella se está aportando una definición (*dēfīnītiō*), que al establecer unos límites permite explicar el objeto de nuestro estudio (*dēfīniō*), lo que se entiende por las paralelas (*παράλληλος*). Lo primero que se encuentra es el verbo *ekbállō* (*ἐκβάλλω*), que sugiere que las paralelas caen precipitándose dentro (*εἰς*) de lo infinito (*ἄπειρος*)[373]. Es de resaltar que antes en los númerales 3 y 6 se introdujo este mismo vocablo de lo que no tiene (*ἀ-*) límite, fin o extremidad (*πέρας*), lo cual se hizo en relación con la noción de línea (*γραμμή*), y no es de extrañar que las paralelas (*παράλληλος*) están constituidas por dos (*δύο*) líneas (*γραμμή*) que se requieren mutuamente entre sí. Una vez más, urge plantear la noción de par ordenado o dupla a nivel de la geometría en la conceptualización de la paralela, igualmente, esa necesidad de estar la una en relación a la otra de manera mutua y reciproca (*ἀλλήλων*); en tal reciprocidad es fundamental en la noción de función f, donde está la relación binaria entre un dominio y un codominio. Es algo que se encuentra en la misma etimología de la paralela (*παράλληλος*), cuyo prefijo conduce a la preposición *pará* (*παρά*) que conlleva soportar una explicación del por qué del origen de algo que está al lado como lo otro que es diferente (*ἄλλος*). Es de notar que la noción de lo infinito (*ἄπειρος*) requiere la unión de dos naturalezas contrarias; tal hecho se aprecia en la definición de línea (Libro 1, 2) y en la yuxtaposición de dos conceptos como lo son los de línea (*γραμμή*) y superficie (*ἐπιφανεία*) (libro 1, 6), y la noción de pareja en la cual una posee un atributo que la otra no tiene y viceversa. Tal hecho viene resaltado porque la preposición epí (*ἐπί*) significa estar sobre algo vecino y próximo, y es la encargada de unir y relacionar estas dos naturalezas manifiestas 'en cada una de las dos' (*ἑκάτερος*) que comparten esa porción o parte (*μέρος*).

[373] Se acaba de mencionar que dos paralelas desplazadas al infinito y su ángulo de intersección es cero. Lo que vuelve a convocar las nociones fundamentales de punto, línea y plano o superficie.

La ausencia de un orden u ordinalidad en cada una de las dos líneas sugiere un mismo todo que es parcionado y en la cual cada línea recibe su propia parte o porción (*μείρομαι*). De alguna manera, ambas líneas son al mismo tiempo las primeras (*πρῶτος*) y las segundas (*δεύτερος*); no existe un orden para determinar cuál de ellas va primero y cuál va en segundo lugar. Este hecho permite cuantificar para ambas de manera simultánea en cada una de las dos (*ἑκάτερος*), que está relacionado con el pronombre cada (*ἕκαστος*) que es sinónimo de la cuantificación universal: para cada una de las dos, para todas las dos, desde la gran distancia (*ἑκάς*) de alguna (*τις*) de ellas. De esta manera, este vocablo (*ἑκάτερος*) remite a algo que se presenta dos veces (*ἑκατεράκις*), con lo cual se está hablando de una cuantificación universal binaria, más apropiada también con el desarrollo del cosmos pitagórico a partir de la díada, aunque le subyace el uno (*εἷς*) como la primera (*πρῶτος*) cuantificación universal válida para todo indiferente de las partes (*μέρος*) que lo constituyan.

Las paralelas (*παράλληλος*) remiten al tema del infinito (*ἄπειρος*) que parece erigirse como aquel destino y fin (*πέρας*) necesario que nos atraviesa penetrándonos (*πείρω*), conduciéndonos rectamente a lo largo (*περάω*) más allá (*πέρα*), al otro lado (*πέραν*). Sin embargo, se podría decir en relación con lo ilimitado (*ἄπειρος*), como aquello que está más allá de todo recorrido que no puede ser recorrido (*απείρω*) y que está más allá de los linderos (*απέραν*) de lo conocido. Es notable la realidad paradojal de la geometría pues, comenzando en el punto (*σημεῖον*) que no tiene parte (*οὖ μέρος*) se solucionará finalmente en el dilema de las paralelas[374] (*παράλληλος*), donde tanto el comienzo como el final se encontrarán y se resolverán de manera mutua y recíproca. No en vano las paralelas tienen esa facultad de sacarnos y lanzarnos fuera (*ἐκβάλλω*). Se hace hincapié en aquello que proviene de algo que está más allá y el cual nos sigue como destinación (*ἐκ*) de aquello que fue lanzado, colocado, que se dejo caer (*βάλλω*) dentro (*εἰς*) de la propia existencia (*εἰμί*) hacia la cual vamos o venimos (*εἶμι*). Se está frente a lo que no requiere de ningún tipo de

[374] En una alta dimensión H^n la cual se coloca al lado de $\mathbb{R}^{n+1}$ como un hiperboloide, si p: $(-\infty, \infty) \rightarrow H^n$, de nuevo se describe un trayecto suave, definido por la ecuación: $p(t) * p'(t) = 0$. Al tomar un trayento en cualquier dirección a lo largo del punto p(t), vemos un vector tangente a H^n en p(t). El vector es hiperbólicamente ortogonal a su producto punto con respecto a $*$ es cero. Ver: *Hyperbolic Geometry*, Cannon, Floyd, Kenyon, Parry (1997, pág. 67).

juicio o experiencia (*ἄπειρος*), que es sin fin e ilimitado (*ἄπειρος*). Pareciera que el fin (*πέρας*) y el propósito de aquello que está más allá (*πέρα*) de estos mismos conceptos y nociones primitivas estuviera en resolver el dilema de las paralelas, que pueden caer conjuntamente (*συμπίτνω*) la una junto a la otra (*ἀλλήλων*). Es una actividad que se da con el otro (*ἄλλος*), en cuanto es diferente y de otra clase (*ἀλλοῖος*), y manifiesta el hecho de estar frente a dos líneas (*γραμμή*) que no son iguales y, por ello, invita a establecer un orden sobre las mismas. Aunque sea algo igual que se está oponiendo consigo mismo, en común y conjunto (*σύν*) acuerdo se deja caer y precipitar (*πίπτω*) en las profundidades de lo insondable (*ἄπειρον*), donde ninguna de las dos (*μηδέτερος*) cae (*πίπτω*) sin la otra (*σύν*). El encuentro con lo insondable carente de cualquier tipo de frontera o límite se realiza en pareja o emparejado, tal hecho recuerda que antes de la existencia del cosmos era el uno (*εἷς*), que no requiere de ningún tipo de acompañamiento excepto de él mismo.

4. Los postulados, las nociones primitivas y la teoría numérica de Euclides

La teoría aritmética de Euclides está constituida por tres estrategias diferentes: la primera es tratada en el libro 1.2 de *Los Elementos*[375] y tiene que ver con la problemática del todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*), y la mitad (*ἥμισυς*) fruto de doblar (*διπλασιάζω*) lo que es uno mismo (*αὐτός*). Este abordaje está destinado a preparar la estructura sobre la que se construirá la ecuación como expresión formal, la cual descansa alrededor de la noción de lo que es igual (*ἴσος*): cómo compensamos, si se agrega (*προστίθημι*) o se quita (*ἀφαιρέω*) algo de una expresión. Surge entonces la pregunta: ¿Cómo completar (*ὁλάω*) tal expresión? Para lo cual hay que igualar (*ἰσάζω*) expresiones distintas hasta que a ambos lados de la mismas tengamos una misma forma (*ἴσος*), lo que da origen a la igualdad (*ἰσότης*).

La segunda estrategia está tratada en el libro 1.3 de *Los Elementos*, y gravita en la fundamentación de la línea (*γραμμή*) como el lugar donde se va a representar el número (*ἀριθμός*) en una geometrización de la aritmética. Este hecho aporta la noción de intervalo (*διάστημα*), así como la condición de que la línea sea recta (*εὐθύς*). Sin la propiedad presente en una línea recta (*εὐθεῖαν γραμμήν*), no se puede construir tal estrategia para conducir (*ἄγω*) al número (*ἀριθμός*) en la línea (*γραμμή*). En este contexto se halla la noción de superficie (*ἐπιφάνεια*) y su fundamento en la noción de punto (*σημεῖον*). El tema que el punto sea constante, ininterrumpido, continuo (*συνεχές*), conduce en un primer instante al tema del infinito (*ἄπειρον*). Este se vuelve a presentar en relación con la existencia de dos (*δύο*) líneas (*γραμμή*) rectas (*εὐθεῖας*), y frente al tema de las paralelas que

---

[375] En el presente capítulo se utilizan el texto en español de: Euclides, *Elementos*, traducción María Luisa Puertas Castaños, Editorial Gredos, Madrid, 1991; el texto en inglés de: Euclid, *The Thirteen Books of Euclid´s Elements of Geometry*, Johan Ludvig Heiberg, English translation by Sir Thomas Little Heath, Cambridge 1908, y el texto en griego de: Euclid, *Euclidis Elementa*, Greek Text, J. L. Heiberg. Leipzig. Teubner. 1883-1888.

nos arroja (*ἐκβάλλω*) a lo carente de límite (*ἄπειρος*). En todo este contexto, se plantea la noción de ángulo (*γωνία*), de lo recto en relación a un ángulo (*ὀρθός*) y la noción de punto (*κέντρον*) en relación al círculo (*κύκλος*).

La tercera estrategia numérica contenida en el libro 7.1 de *Los Elementos*, hace referencia a la unidad (*μονάς*) como fundamento del número (*ἀριθμός*), y se la aborda como aquel número que tiene la potestad de estar solo (*μονάζω*). A partir de la unidad se construyen los demás números como multitud (*πλῆθος*), teniendo al uno (*εἷς*) como la base sobre la que se construye toda la argumentación. Existe en este contexto la preocupación de lo numérico en relación a lo pequeño (*ἐλαχύς*) y a lo lo grande (*μέγας*), y es abordado dentro del contexto del todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*). La preocupación y la urgencia más importante del número (*ἀριθμός*) está en medir y distribuir (*καταμετρέω*) con base en la noción de múltiplo (*πληθύνω*). Este tema remite al concepto de muchos (*πολλαπλάσιος*) y, en concordancia, a lo que se multiplica y se hace múltiple (*πληθύνω*). Acto seguido se presenta la distinción más importante de los números, manifestada en lo que es el número par (*ἄρτιος ἀριθμός*) y el número impar (*περισσός ἀριθμός*), la cual también sirve para introducir la operación de dividir (*διχάζω*) y, asimismo, la de medir (*μετρέω*). Vienen luego los números primos (*πρῶτοι ἀριθμοί*) y los números compuestos (*σύνθετος ἀριθμός*) como fundamento del dos (*δύο*). La multiplicación (*πολλαπλασιασμός*), como una suma (*πρόσθεσις*); el dos (*δύο*) también como soporte del número plano (*ἐπίπεδος ἀριθμός*) y el tres (*τρεῖς*) como fundamento del número sólido (*στερεός ἀριθμός*). Luego está el número cuadrado (*τετράγωνος ἀριθμός*) como dos (*δύο*) números iguales (*ἴσων ἀριθμῶν*) rodeados (*περιεχόμενος*) y el cubo (*κύβος*) abordado como ese número que es multiplicado tres (*τρεῖς*) veces por sí mismo y asume el proceso de solidificar (*στερεόω*). Es importante la introducción de la noción matemática de serie, que anticipa todo el trabajo frente a la noción de límite, la cual es presentada en la serie par (*ἀρτιάκις*) y en la serie de números impares (*περισσάκις*). Se tiene el número perfecto (*τέλειος ἀριθμός*) como aquel donde se ha resuelto el problema del todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*) en relación con el tema de la la proporción (*ἀνάλογος*), y el haber cumplido (*τέλλω*) con aquella unidad (*μονάς*) que subyace en el uno (*εἷς*) como fundamento del número (*ἀριθμός*).

4.1. Orígenes de la teoría numérica desarrollada en Los Elementos

El prestante historiador y matemático Morris Kline manifiesta que la educación recibida por Euclides la pudo haber recibido en la Academia del Platón, aspecto comentado por el filósofo neoplatónico Proclo el Sucesor (*Πρόκλος ὁ Διάδοχος*)[376]. Menciona que la estrategia de Euclides de proponer cinco postulados y cinco nociones primitivas o axiomas, se debe a una distinción ya presente en Aristóteles en cuanto estos axiomas o nociones son verdades aplicables a todas las ciencias, mientras los postulados tan solo se utilizan en la geometría. Proclo menciona que todas las matemáticas son hipotéticas, esto es, se deducen a partir de unos presupuestos, independientemente de que estos últimos sean verdaderos o no. Se presume que Euclides aceptó los puntos de vista de Aristóteles acerca de la verdad de los presupuestos, si bien, en la subsecuente historia de las matemáticas, tanto los postulados como las nociones o axiomas primitivos son aceptados como verdades incuestionables, por lo menos hasta el advenimiento de la geometría no euclidiana. En primer lugar se abordará los axiomas y, luego, los postulados, para terminar en la teoría numérica del libro VII.

La teoría aritmética de Euclides busca abordar el número bajo una variedad de definiciones y estrategias, siendo la primera la importante noción del todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*). Aquí se afronta una totalidad que está constituida por unos individuales, llamados unidades, siendo uno de los primeros requerimientos que los mantiene unidos a tales numerandos, lo cual lleva a la operación de la suma, como la operación esencial que pega

[376] Ver en Morris Kline (1972): *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, donde además se menciona que el trabajo de Euclides es la organización de una serie de descubrimientos separados de los griegos. En especial, *Los Elementos* es en particular una historia de las matemáticas del período clásico, se nota la influencia de Platón y del trabajo de los teoremas del matemático, astronómo y filósofo Eudoxo de Cnido (*Εὔδοξος ὁ Κνίδιος*), en especial, en la escogencia de los axiomas, el arreglo de los teoremas y las pruebas, se las debe a él. No existen manuscritos escritos por el mismo Euclides, dado que su material fue reconstruido por muchas recensiones, comentarios y anotaciones de otros escritores. Todas las ediciones en inglés y latín se originan de los manuscritos originales del griego. El más antiguo data del siglo IV d.C. y se le atribuye a Teón de Alejandría (*Θέων ὁ Ἀλεξανδρεύ*), quien fue el último director de la segunda biblioteca de Alejandría y padre de la famosa matemática Hipatia (*Ὑπατία*). Este manuscrito fue encontrado por François Peyrard en el siglo XVII en la Biblioteca Vaticana, era una copia del siglo X de la de Teón. También se cuenta con una traducción al árabe de documentos griegos ya no existentes y que han sido usados para la reconstrucción completa del original griego, esta versión fue revisada en la misma época por Adrien Legendre (págs. 56, 57).

las distintas partes y las constituye en un todo. La multiplicación es una suma, en la que dos factores que son números definen la relación producto, como una repetición de sumas. Sin embargo, el concepto más importante después de la suma está dado por la operación de la división, en ella se da una relación del todo con la parte o de la parte con el todo: todo/parte, parte/todo. En general, se define la división inicialmente bajo los enteros, de ahí que un número racional está dado por la división entre dos enteros: $\mathbb{Q} = \{x, y \in \mathbb{Z} / x/y \in \mathbb{Q}\}$. En la división tradicional el todo se sitúa en la parte superior del numerador y las partes en el denominador: tenemos una totalidad de 20 manzanas que las vamos a dividir en 4 partes iguales, esta expresión nos da 20/4 = 5. Podemos constituir cinco grupos cada uno con cuatro manzanas: El todo/parte, *ὅλος*/ *μέρος* {20/5 / (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}), (a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}), (a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}), (a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}). Podemos analizar, que al final el resultado nos ha dado cinco grupos de cuatro elementos cada uno, donde el todo (*ὅλος*) está constituido por veinte elementos, pero se puede decir que las partes (*μέρος*) de ese todo podrían ser cinco, cada una constituida de cuatro elementos. En ese sentido, se observa que entre el todo y la parte se puede pensar una diversidad de situaciones que contemplan otras posibles divisiones: cada una de las cinco partes está constituida por un elemento que vale 1/5, lo que lleva a que cada una vale 1 y las cinco unidas valen 5; pero, a su vez, tenemos 20 elementos. En cuanto a la situación de la parte en relación al todo: parte/todo, *μέρος* / *ὅλος*, tenemos 4/20 = 1/5, en este caso tenemos, que 4 maneras de clasificar los 20 elementos: {(b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}), (b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, b_{25}), (b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{34}, b_{35}), (b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{44}, b_{45}), (b_{51}, b_{52}, b_{53}, b_{54}, b_{55})}. Existen 4 criterios que se hacen presentes en 20 elementos, lo que conlleva a que se den 4 grupos de 5 elementos cada uno. Aquí se está predicando 4 diferencias en 20 argumentos, lo que nos lleva a proponer en este sentido que el predicado simpre estará situado en el lugar del numerador y el argumento en el lugar del denominador. La estructura inicial $f(x) = y$, en la que se tiene: la función predicativa (argumento) = valor. En el caso de la división se pasaría a: la función predicativa del todo/argumento de la parte = término, en este caso se está explicitando los términos en sus características argumentativas. El segundo caso se da cuando: función predicativa de la parte/argumento del todo = clase, en este caso se está explicitando las clases con sus propiedades argumentativas. Si se en la cuenta la base numérica decimal, tanto numerador como denominador están gobernados por 10 números, con lo cual las partes esenciales de un número serán siempre 10: cada parte tendrá un valor de 1/10. Esta es la relación del todo con la parte, el todo (10) y la parte (1/10), mientras la parte (1/10) y el todo (10).

Se va a analizar la teoría de los números de Euclides, la cual consta de dos partes o estrategias que se apoyan, construyen y definen de manera mutua. Se pueden identificar dos grandes dimensiones que se plantean para tratar lo numérico: la primera tiene que ver con la naturaleza del número que será su dimensión ontológica y, la segunda, tiene que ver con la operatividad o *techné* del mismo, que será su dimensión epistemológica. La primera se fundamenta en la problemática del todo y la parte y, la segunda, se fundamenta en la teoría de las proporciones. A continuación se comenzará abordando el problema del todo y la parte.

4.2. Los axiomas o nociones primitivas de Los Elementos

Se dice que Euclides propone cinco nociones o axiomas primitivos, no obstante, cuando se aborda el texto original en griego, se nota que existen cuatro axiomas que no están traducidos ni mencionados tanto en las ediciones en español e inglés. Sea el caso, los numerales identificados con un asterisco (*) al final: 1.4, 1.5, 1.6 y 1.9. Se ha brindado una traducción libre propia. Lo dicho lleva a pensar que estas 'nociones comunes', como las llama Morris Kline[377], no son propiamente tan comunes. A este respecto, hay que citar a Alfred Tarski[378], quien aborda estos nocionales como unas variables extralógicas capaces de explicar cualquier modelo propio de las ciencias: son los criterios de definibilidad y derivabilidad los que fundamentan la mutua independencia de estos conceptos. En ese

[377] Morris Kline (1972), en *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, dedica todo el capítulo 4 (págs. 56 a 88) a analizar los *Los Elementos* de Euclides. Como bien se ha anotado, es el texto matemático más importante de todos los tiempos que nos ha llegado.

[378] Alfred Tarski (1953) en *Logic, Semantics, Metamathematics*, propone en el capítulo X: *Some Methodological Investigations on the Defininability of Concepts*, y se tiene que estos conceptos se abordan como constantes extralógicas y son expresadas en oraciones de la forma: (x): x = a.≡.ϕ (x; b', b'',…). Donde 'a' es una constante extralógica, ϕ (x; b', b'',…) es una función sentencial constituida por los términos b', b'',.. que contiene a la x como la única variable libre o real. El término 'a' busca ser definido por medio de b', b'',…, $\in$ B $\subset$ X, donde X que es el conjunto de todas las oraciones. Se destaca cómo Tarski aborda la fundamentación de una teoría científica en las oraciones que la constituyen y no en las proposiciones. Una oración puede ser estudíada en sus constituyentes primarios, mientras que una proposición p, q, r,… no lo puede ser. Esto representa un gran avance en la lógica, que la amplia y la perfecciona (págs. 298-299).

sentido, podemos construir la definibilidad de los conceptos partiendo de un sistema deductivo x_1 que contiene tan solo un término; debido a que es incompleto, se hace necesario introducir un segundo término en el sistema x_2, y así sucesicamente se puede ir completando los términos primitivos hasta que el sistema axiomático sea completo. Se tiene en cuenta que cada uno de estos términos es independiente de los demás, no derivable y no definible, sino tan solo por el sistema que lo introduce y define. Al leer los axiomas mencionados, se puede identificar los siguientes conceptos primitivos o epistemes, que en nuestro caso se asocian en grupos distintos: la cosa o elemento (*στοιχεῖον*) en relación a las nociones del todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*). Las conectivas binarias o constantes lógicas de: la igualdad (*ἰσοτης*), lo recíproco (*ἀλλήλων*) y la conjunción (*καί*). Asimismo, las operaciones de sumar (*προστίθημι*) y restar (*ἀφαιρέω*). Los procedimientos de igualar (*ἰσάζω*) lo desigual (*ἄνισα*) a fin de obtener lo igual (*ἴσος*), despejar (*καταλείπω*), desdoblar (*διπλασιάζω*), coincidir (*ἐφαρμόζω*) y envolver (*περιέχω*). Otros conceptos nocionales importantes son: el dos (*δύο*), la mitad (*ἡμίση*), lo recto (*εὐθύς*), el sitio o lugar (*χωρίον*) y la pareja (*δυάς*). El individual de la línea (*γραμμή*). La relación más grande que (*μέγας*) y la reflexiva (*αὐτός*). Todas estas nociones gravitan alrededor de la especificación del todo (*ὅλος*) con la parte (*μέρος*) y, en especial, cómo hacer que las partes sean iguales (*ἴσος*) entre sí. Se comprende que el manejo de la noción de la parte en relación con el todo se hace en el contexto de una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), donde cada porción de línea es igual a las demás. La manera de abordar esta problemática del todo como una línea completa, en relación con las partes como porciones de dicha recta, pertenece a un planteamiento extensional o fundamentado en magnitudes o cantidades. Muy diferente al planteamiento intensional o fundamentado en lo cualitativo, modelación que todavía no ha podido ser sustentada a nivel formal.

4.2.1. La ontología del número a partir del todo y la parte

Se comenzará abordando del libro 1, tipo 3: la introducción de la problemática del todo y la parte a partir de la igualdad entre las cosas. En algunas ediciones denominan a estos contenidos las nociones comunes.

1.1 *Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí (Things which are equal to the same thing are also equal to one another. τά τῷ αὐτῷ ἴσα καί ἀλλήλοις ἐστίν ἴσα*).

El texto comienza con (*τά; τό, τίς*), esto, aquello, ello; lo (*τῷ*, forma dativa singular y neutra del artículo y pronombre *ὁ*) que cualquiera cosa o cierta cosa (*τις*); en ella y por ella misma (*αὐτῷ*) es igual, equivalente, similar, afín (*ἴσα*); verdadera y adicional (*καί*); la una con la otra, mutua y recíprocamente (*ἀλλήλοις*); es, existe y sucede (*ἐστίν*, *εἰμί*) de manera igual (*ἴσα*). Los usos de una forma dativa de complemento indirecto y forma verbal no transitiva, indican que la aprehensividad del objeto mismo se hace de manera indirecta a través de la acción verbal que parece salir de ella misma para luego retornar. Esto indica que el verbo que gobierna la existencia misma y su acontecer (*εἰμί*) señala un ente en tercera persona (*ἐστίν*), el cual es precisado como este (*τά, τῷ*), que puede ser cualquiera (*τίς, τις*). Esto indica una manera de indefinir y generalizar la oración bajo la presencia de una cuantificación universal que está actuando. El tema se centra alrededor de lo que es igual (*ἴσος*) o que hace que las cosas sean iguales y estén balanceadas (*ἰσάζω*), de algo consigo mismo (*αὐτός*), tema que es reincidente 'mutuamente el uno con lo otro' bajo el uso del adjetivo plural (*ἀλλήλων*). Se trata de plantear que el isomorfismo se fundamenta en la propiedad reflexiva, una tal que el objeto y el sujeto parecen ser lo mismo o se los trata como lo mismo[379]. Es de resaltar que en el texto no aparece el vocablo cosa, por lo que la fuerza recae en el artículo neutro 'lo' en su forma plural 'los'. La palabra para elemento, *stoikheîon* (*στοιχεῖον*), es una palabra que se utiliza para indicar una unidad, una parte, dentro de un orden dado en una fila o secuencia o serie (*στοῖχος*). No obstante, la forma plural (los) parece identificar aquella forma común o singular (lo), en la cual la diversidad se encuentra consigo misma haciendo que todos seamos o existamos como iguales. Es decir, lo mismo transita en la diferencia y en la pluralidad, conecta y une a todo consigo mismo y con el otro: lo otro y lo mismo se anulan en este tipo de equivalencia que fundamenta este clase de isomorfismo, que vendría a estar comprendido en lo que nos hace

[379] Este tipo de estrategias de buscar que el sujeto coincida con el objeto la vemos tratada por Gottlob Frege en su *Begriffsschrift*, al inicio del numeral §3, es una estrategia que utiliza el citado autor para fundamentar la representación de los juicios sobre los cuales se va a construir la lógica formal y por ende la matemática.

a todos iguales, o lo igual en todos. Sin que importe aquello en lo que somos iguales sea dado en singular o plural, manifiesta un estado de unidad, igualdad e equivalencia, que será el fundamento para poder comparar los distintos entes formales y sus partes entre sí. Esta proposición: *τά τῷ αὐτῷ ἴσα καί ἀλλήλοις ἐστίν ἴσα*, podría ser vista como dos proposiciones atómicas[380] debido a la presencia de la conectiva binaria de la conjunción en medio, lo que lleva a que dicha expresión sea una proposición molecular: *τά τῷ αὐτῷ ἴσα*, ∧ (*καί*), *ἀλλήλοις ἐστίν ἴσα*, $p_1^a \wedge p_1^b$. Además, hay que resaltar la presencia de (*ἴσος*) la forma adjetivada como aquella instancia común que conecta ambas expresiones: *ἴσος* ($p_1^a \wedge p_1^b$); asimismo, el verbo ser y existir (*εἰμί*) que, al ser conjugado en la tercera persona presente del singular (*ἐστίν*), manifiesta que se trata de una sola expresión o proposición, y no varias como a simple vista se podría pensar o considerar en lo que sigue.

> 1.2 *Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales (If equals be added to equals, the wholes are equal. καί ἐάν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τά ὅλα ἐστίν ἴσα*).

El razonamiento que sigue está dentro de la cadena deductiva inferencial, y este hecho está dado por la presencia de la conectiva binaria de la conjunción ‘y’ (*καί*); luego se tiene la forma condicional *eán* (*ἐάν*), que es la unión de un si condicional (*εἰ*) con la partícula subjuntiva propia de un mandato: *án* (*ἄν*) que resalta la potencialidad y condicionalidad expresada para permitir que alguien realice algo (*ἐάω*); lo que va a permitir (*ἐάω*) llevar a cabo, es hacer igual o igualar (*ἴσοις*) algo con algo, aspecto reindivicado por la presencia doble de (*ἴσος*): *ἴσοις ἴσα*, el primer *isos* puede ser visto más como un verbo

---

[380] La distinción entre proposición atómica y molecular se encuentra en el prefacio de la segunda edición de *Principia Mathematica* de Russell & Whitehead, donde subyace una interesante comparación entre la noción de proposición atómica y la noción de punto en Euclides: *Las proposiciones atómicas pueden ser definidas negativamente como proposiciones que no contienen partes que sean proposiciones* (*Atomic propositions may be defined negatively as propositions containing no parts that are propositions, ob. cit. pág, xv*). A su vez las proposiciones atómicas son definidas de manera positiva en referencia a la tenencia de un predicado: R_1 (x), R_2 (x, y), R_3 (x, y, z), R_4 (x, y, z, w), significan que tiene una relación unitaria, dual, tríadica, etc., en intensión; se resalta que es una pregunta empírica. Con lo cual, se busca emular a Euclides en la consecución de los irreductibles aritmético-geométricos, y las estrategias de fundamentación subsiguientes derivadas de los mismos: la anterior noción de proposición atómica se asemeja a la noción de punto, como aquella base sobre la cual se van a construir y a definir las nociones primitivas, en especial en este prólogo. Además, se subraya, que en PM una de las definiciones de proposición atómica se hace por la vía negativa al igual que la noción de punto en Euclides: *un punto es lo que no tiene partes* (*Los Elementos*, 1-1.1).

(*ἰσόω*) y el segundo como un adjetivo. Si bien, se contempla la doble acción de dos verbos: *ἰσόω* e *ἰσάζω*, pudiéndose representar como aquella función que va de lo igual a lo igual, $f(i)$: *ἰσόω* → *ἰσάζω*. Tal hecho viene afirmado por la subsiguiente presencia del verbo (*προστίθημι*) en tercera persona aoristo pasado como *προστεθῇ*: este verbo es la unión de la preposición *prós* (*πρός*) que significa al lado de, cerca de, hacia; y del verbo *títhemi* (*τίθημι*) que es colocar, situar, establecer, dentro de un orden que asume y afirma algo que se hace. Luego está el artículo plural (*τά*) que señala todo (*ὅλα*), lo que está completo en todas sus partes, lo que puede completar algo (*ὁλάω*) es y existe (*ἐστίν*, *εἰμί*) como lo que es igual (*ἴσα*). Se está frente a una situación donde la sugerencia de agregar algo proviene del uso de la conectiva de la conjunción (y, $\wedge$: *καί*), como también de la doble acción de sumarle o agregarle a lo que es igual algo igual ($f(i)$: *ἰσόω* → *ἰσάζω*, expresable como: $f(i)$: $i \rightarrow i'$). Por consiguiente, si (*ἐάν*) a lo que es igual (*ἴσος*) se le agrega algo igual (*ἴσος*); se entiende que involucra tomar dicho ente en su totalidad (*ὅλος*), más visto como una unidad (*αὐτός*) autoreferida que es asumida como lo mismo (*ἴσος*) y que se busca igualar (*ἰσόω*, *ἰσάζω*). Hay que advertir que en esta proposición euclidiana se da una restricción al proceso de igualación o equivalencia que se presenta aquí: no se está igualando la parte con otra parte, sino el todo considerado como una parte indivisa. Con lo cual, no existe el planteamiento teórico o el algoritmo fundacional que plantee desde el inicio el proceso de igualar las partes debido que habría que definirlas, lo cual es un tema todavía inconcluso ya que no se dice en ningún lugar cuáles son las partes concretas que constituyen a una totalidad o aquellas partes comunes que vendrían a constituir cualquier tipo o clase de totalidad que se tenga.

1.3 *Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales* (*If equals be subtracted from equals, the remainders are equal. καί ἐάν ἀπό ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τά καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα*).

En este contexto, aparece la siguiente proposición: y (*καί*) si (*ἐάν*) desde (*ἀπό*) lo que iguala (*ἴσων*) en lo que es lo mismo (*ἴσα*) se quitará (*ἀφαιρεθῇ* es la tercera persona singular del aoristo subjuntivo de *ἀφαιρέω*), lo (*τά*) que se deja atrás (*καταλιμπάνω*) es (*ἐστίν*) igual (*ἴσος*). La oración manifiesta una continuidad en las condiciones que están unidas a las dos proposiciones anteriores, como si se tratará de: $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \rightarrow q$. El mismo antecedente repartido en tres oraciones unidas con la conectiva binaria de la conjunción, que van a tener como consecuente algo común a las tres. La presencia de la conectiva de la implicación está evidenciada en la conjunción condicional (*ἐάν*), que presupone que estamos en presencia de dos proposiciones con dos argumentos: el primero afirma que si se cumple la condición (*ἐάν = εἰ + ἄν*) de apartar fuera (*ἀπο-*) tomando y asegurando (*αἱρέω*) lo que es lo mismo (*ἴσος*) o lo que tiene las funciones de hacer o transformar lo mismo en lo mismo (*ἰσόω, ἰσάζω*), entonces se tendrá como consecuencia que se dejará (*λείπω*) atrás (*κατά*) lo (*τά*) que es (*ἐστίν*) lo mismo (*ἴσος*). Se está frente a la mismidad en cuanto igualdad (*ἰσότης*). Y lo interesante de la actual oración es la presencia reiterada de la preposición *apó* (*ἀπό*) que indica una acción de retirar, alejar, apartar como consecuencia de algo. En el primer caso, se está apartando y retirando (*ἀπό*) aquello que tiene la facultad de transformar algo en igual o hacer igual algo con otra cosa (*ἰσόω, ἰσάζω*); en el segundo caso, se está dejando atrás, retirando, despojando y privando (*ἀφαιρέω*) lo que es lo igual (*ἴσος*). En este último caso, el verbo *aphairéō* (*ἀφαιρέω*) puede descomponerse en la preposición (*ἀπό*) en este caso como sufijo (*ἀπο-*) y en el verbo hairéō (*αἱρέω*) que involucra una actividad muy demarcada, en cuanto se retira algo tomándolo y asegurándolo para que no se escape.

Este doble juego entre: [*ἀπό* + *ἰσόω* *versus* *ἴσος* + (*ἀπο-αἱρέω*)], enseña que la acción misma de substraer, quitar, eliminar, apartar, alejar algo se efectúa de manera doble: por una parte, tenemos una función $f(ἰ)$ que selecciona todo lo que tiene la posibilidad de igualar (*ἰσόω, ἰσάζω*) y se la retira. Es decir, se substrae aquello que tiene la potestad de multiplicar lo que es lo mismo. Acto seguido, en la segunda expresión, se reune lo que es lo mismo $\cup_{ἰ}$: $ἰ_1 + ἰ_2 + ἰ_3 + \ldots + ἰ_n$, y se lo lleva a otro lugar. Aquí se halla otra función, aquella que recoge apartando y alejando $f(ἀ)$; se tiene un orden. Lo que se hace primero es seleccionar aquello que puede comprometer nuestra empresa neutralizándolo, que es tomar todo lo que puede generar igualdad. Luego, en segundo lugar, se lo retira una vez ha sido ya apartado y es llevado bien lejos. Este hecho está reivindicado por la presencia doble de la proposición (*ἀπό*) y, también, por la doble acción frente a lo que es lo igual (*ἴσος*). La segunda clausura trae el mismo verbo (*καταλιμπάνω*, en su forma presente participio singular femenino *καταλειπόμενά*) que también se puede escribir como (*καταλείπω*) y contiene una reincidencia de la misma acción, dado que se puede descomponer en la preposición (*κατά*) que como sufijo (*κατα*) indica algo que queda atrás, que baja, que está abajo, inclinado y en pendiente; y el verbo (*λείπω*) que indica dejar, liberarse, partir, desaparecer, faltar. Con lo cual es algo que hay que asegurarse en dejar atrás, caracterizado por ser aquello (*τά*) que es (*ἐστίν*, del verbo ser y existir *εἰμί*) lo mismo (*ἴσα*, *ἴσος*). Lo que se está afirmando es, cómo al quitar lo que es lo mismo, lo que permanece guarda una reciprocidad con lo que se dejó por fuera. Una vez más, eso que quedó por fuera no ha desaparecido de la expresión, simplemente, está ausente y en otro lugar. Esto ha de ser tenido en la cuenta dado que en algún momento aparecerá.

En el texto original en griego existen tres proposiciones adicionales que no están traducidas ni en la versión en inglés ni en el texto en español. Por lo que se buscará abordarlas a fin de desentrañar su contenido y significado. Sean estas las siguientes:

> 1.4 *Y si igualamos lo que es desigual, el todo se igualará** (*καί ἐάν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τά ὅλα ἐστίν ἄνισα*).

Esta proposición dice: y (*καί*) si (*ἐάν*) lo desigual (*ἀνίσοις*) es colocado al lado (*προστεθῇ*) de lo que es igual (*ἴσα*), el (*τά, ὁ*) todo (*ὅλα*) es (*ἐστίν*) desigual (*ἄνισα*) y se iguala (*ἀνισάζω*). En este caso, se tiene que lo que es desigual (*ἄνίσος*) está siendo igualado (*ἀνισάζω*) por (*ἰσόω*, *ἰσάζω*) lo que lo hace igual (*ἴσος*). Lo que (*τά*) lleva a que exista (*ἐστίν*, *εἰμί*) un todo (*ὅλος*) desigual (*ἄνίσος*) pero que al final terminará definiendo su propia condición bajo un estado común de balance y se igualará (*ἀνισάζω*). En la misma etimología[381], se sugiere que lo que es desigual (*ἀνίσος*) guarda una estrecha relación con igualar (*ἀνισάζω*). De una u otra manera, igualar se puede escribir en griego de tres maneras diferentes (*ἰσόω*, *ἰσάζω*, *ἀνισόω, ἀνισάζω*): las dos primeras (*ἰσόω*, *ἰσάζω*) se iguala lo que es lo mismo o lo igual (*ἴσος*), mientras en la tercera y cuarta (*ἀνισάζω*, *ἀνισόω*) se iguala lo que es desigual (*ἄνίσος*). En la primera parte de la proposición, se está igualando lo que es desigual, dicha acción es llevada a cabo por el verbo *prostíthēmi* (*προστίθημι*), que es la unión entre la preposición *prós* (*πρός*) y el verbo *títhēmi* (*τίθημι*),

[381] Tema sugerido por: Liddell & Scott (1940) *A Greek–English Lexicon.*

que indica que al lado (*πρός*) estamos colocando y ordenando (*τίθημι*). Es decir, solo se puede igualar (*ἰσόω*) lo que es desigual (*ἄνίσος*), siempre y cuando se lo sitúe en otro lugar que está al lado (*προστίθημι*). Esto es comprensible ya que el todo (*ὅλος*) entra en un proceso de definición, que parte de lo desigual (*ἄνίσος*) para luego irse completando a fin de ser igual (*ἴσος*). La utilidad de esta proposición está en sugerir que podemos ‘reparar’ lo que es desigual (*ἄνίσος*) haciéndolo igual (*ἴσος*), de manera que el todo (*ὅλος*) quede igual (*ἴσος*) en todas sus partes, porciones o componentes (*μέρος*). Hecho que manifiesta de manera reiterada, que cuando se está aseverando una proposición acerca de la totalidad o del todo (*ὅλος*), no queda más que igualar (*ἀνισάζω*) lo que es desigual (*ἄνίσος*) a fin que todas las partes (*μέρος*) queden en el mismo nivel de predicación como iguales (*ἴσος*) entre si. Del todo no podemos afirmar algo, si sus partes no están reunidas bajo una misma condición de igualdad (*ἰσοτης*): lo que conlleva a que de la desigualdad (*ἀνισότης*) no puede decirse ni afirmarse nada.

*1.5 Y en los elementos existe aquel que en él mismo se dobla el uno en el otro** (*καί τά τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν*).

La presente proposición manifiesta: Y (*καί*) los (*τά*) que alguno (*τοῦ, τις*) en él mismo (*αὐτοῦ*) se desdoble (*διπλάσια*) de manera igual (*ἴσα*) él uno en el otro (*ἀλλήλοις*) es (*ἐστίν*). La actual proposición se suma a las características de las anteriores por la presencia de la conectiva binaria de la conjunción (y, ∧), la cual está señalando un grupo (forma plural del artículo neutro *τά*) donde existe (*εἰμί*) alguno (artículo neutro genitivo *τοῦ*) que puede ser cualquiera o uno en concreto (pronombre indefinido *τις*, que al declinarse es *τοῦ*), que en él mismo (*αὐτός*) en sí mismo justo aquí (*αὐτοῦ*), es (*ἐστίν*) doble (*διπλάσιος*); así, se está frente a un objeto o elemento que tiene la potestad de doblar o de tener un doble valor (*διπλασιάζω*). Lo que es doble (*διπλόος, διπλοῦς*), duplicado, doblado; mutuo y recíproco, ambiguo y equívoco. Es la presencia del dos (*δύο*), que señala algo que está en segundo lugar (*δεύτερος*), involucrando una acción que se puede descomponer en dos momentos. La sentencia continúa afirmando y retomando lo dicho: en medio de varios elementos se va a escoger aquel que se pueda doblar a sí mismo justo aquí, el cual tiene esa propiedad de igualar (*ἰσόω, ἰσάζω*) lo uno con lo otro (*ἀλλήλων*) o se dobla mutua y recíprocamente. Se podría argumentar que se ha de buscar, escoger e identificar, entre los elementos u objetos, aquel que en él mismo se pueda doblar o aumentar en tamaño dos veces, o que posee un doblez (*διπλόος*) en cuanto puede doblar[382] (*διπλόω*) o llegar a ser doble (*διπλασιόομαι*). Esta alusión podría referirse a la necesidad de tener las parejas o díadas (*δυάς*) que, además de establecer la relación con el número dos (*δύο*) se refiere a lo que es doble. Basta recordar cómo Pitágoras, comentado por Aristóteles[383], propuso diez principios dobles constitutivos derivados del número como principio y materia de todos los entes. En ese sentido, hay que identificar aquellos elementos que pueden darse en pareja o en los cuales se manifieste la posibilidad de albergar su opuesto o contrario (*ἀντίθετος*), aquello que va en contra o es opuesto (*ἀντί*) de aquello que está situado (*θετός*, forma adjetivada del verbo situar, colocar, hacer: *títhēmi*, *τίθημι*). En todo este contexto se sugiere que hay que buscar e identificar aquellos elementos que tienen la potestad de doblarse o poder ser tomados como parejas, (donde el uno manifiesta una propiedad afirmativa y el otro su oposición), lo cual es muy útil para plantear los principios y las categorías constituyentes de todo sistema tanto filosófico como matemático y, por ende, aritmético o geométrico.

1.6 *Y en los elementos existe aquel que en él mismo es la mitad el uno en el otro** (*καί τά τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν*).

En esta proposición se puede apreciar, en primer lugar, que es una continuación de la anterior, o sea, es un contenido que depende de un predicado o función previa: Φ(A, B, C, D,…)[384], donde la conectiva es la conjución (∧): Φ (A ∧ B ∧ C ∧ D ∧ …). La actual proposición manifiesta: Y (*καί*) los (*τά*) aquel (*τοῦ*, *τις*) en él mismo (*αὐτοῦ*) que es (*ἐστίν*) la mitad (*ἡμίση*) de lo mismo (*ἴσα*) son recíprocos (*ἀλλήλοις*). Se está así frente a una

---

[382] En el álgebra sobre los círculos, la noción de la mitad (*ἡμίση*) está relacionada con la mitad del intervalo abierto $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que es fruto de doblar (*διπλασιάζω*) algo por la mitad. Tal estrategia se vio en la división del círculo por la mitad a fin de obtener el diámetro (*Los Elementos*, L.1,1. 15-17). Donde $\theta \in \mathbb{R}$, también como el intervalo semiabierto $[0, 2\pi)$, denotado por $\mathbb{R}_{2\pi}$ y útil para el manejo de los ángulos $\theta_1 + \theta_2 \geq 2\pi$. En este contexto, se tiene la adición modulo 2π sobre $\mathbb{R}_{2\pi}$ que será denotada como $+_{2\pi}$. Se pueden construir distintas operaciones que satisfagan relaciones isomórficas entre sus elementos y una correspondencia uno a uno dentro de un contexto binario. Se destaca cómo la noción de hallar la mitad permite construir todas las distintas propiedades que se dan al interior del círculo y vincularlas a los distintos conjuntos numéricos. Ver J. Fraleigh (2003), en *A First Course in Abstract Algebra* (p. 17 y 18).

[383] Tema expuesto en la *Metafísica* de Aristóteles (986 a-20, en el libro 1, 5).

[384] Lo que nos recuerda a Gottlob Frege en su Begriffsschrift §2, 10, donde Φ representa la función y A, B, C, D, son los argumentos. Habrá que identificar el elemento común sobre el cual se predican estos contenidos.

pluralidad manifestada por el artículo plural neutro acusativo (*τά*), en la que hemos de identificar aquel (artículo singular neutro genitivo *τοῦ*, que lo mismo *αὐτός* bajo la forma adjetivada genitiva *αὐτοῦ*, que está siendo afectada por la acción sustantivada del aquel elemento que aunque no mencionado, es el propósito central de la actual proposición) cuya mitad (*ἥμισυς*) es (*ἐστίν*) la misma (*ἴσος*) en las dos direcciones en que dicha acción se realiza (*ἀλλήλων*). Se tiene el propósito de identificar entre muchos (*τά*) aquello (*τοῦ*) que es algo o cierta cosa (*τις*), justo aquí (*αὐτοῦ*) en lo mismo (*αὐτός*: pronombre reflexivo que está constituido por el adverbio *αὖ*, que señala algo que se da de nuevo, y el artículo masculino acusativo *τόν,* el.) es (*ἐστίν*) la mitad (*ἥμισυς*) en los dos sentidos en que la tomemos (*ἀλλήλων*). Se puede identificar el proceso de selección entre una pluralidad de aquellas instancias singulares que tienen la potestad de que cuando son divididas por la mitad (*ἥμισυς*), tienen la posibilidad de mantener o conservar su forma o sea son homomorfas y preservan su estructura. Esto hace que sigan siendo las mismas (*ἴσος*), dado que cuando una mitad (*τά ἡμίσεα*) es doblada (*διπλόω*) ha sido igualada (*ἰσάζω*) conservando las mismas (*ἴσος*) características en las dos direcciones (*ἀλλήλων*). En este contexto, se habla de cómo se puede partir o dividir algo por mitades (*τά ἡμίσεα*); a su vez, esa nueva mitad se puede volver a partir o doblar (*διπλόω*). Se observa que en todos los casos se siguen conservando las mismas propiedades que hacen que aquello que es la mitad de la mitad sea la misma (*ἴσος*) de la cual se deriva en ambos sentidos, y tanto la una como la otra (*ἀλλήλων*) reproducen ese isomorfismo que está presente en el elemento que fue partido.

> 1.7 *Y de cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí* (*Things which coincide with one another are equal to one another. καί τά ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν*).

En esta proposición se ven las consecuencias de las anteriores, en especial, el resultado de la acción de la última (1.6): Y (*καί*) de los (*τά*) cuales (*τίς*) se hayan ajustado (*ἐφαρμόζοντα*) sobre (*ἐπί*) el uno en el otro (*ἄλληλα*) son (*ἐστίν*, *εἰμί*) iguales (*ἴσα*) entre sí (*ἀλλήλοις*). Está la presencia del caso acusativo con complemento directo, que indica que aquello que se ajusta (*ἐφαρμόζω*) se acomoda de manera tal que ambos van a quedar integrados de manera recíproca (*ἀλλήλων*) como si fueran iguales (*ἴσος*). Así, la acción es doble en ambos sentidos, hecho reindivicado por *ἄλληλα* ← f → *ἀλλήλοις* (*ἀλλήλων* −f(*ἴσος*) − *ἀλλήλων*), donde la función que pega o hace que ambos coincidan es la de igualar (*ἰσάζω*): $f(i)$: ἀ → ἀ, es igualando (*ἰσάζω*) el uno con el otro (*ἀλλήλων*) que se logra que coincidan y se ajusten (*ἐφαρμόζω*) mutuamente. En este contexto, se trata de una pluralidad de cosas que son duales: una pluralidad doble, que bien puede ser múltiple y diferenciada. Se sigue sosteniendo la idea que las cosas se relacionan en pareja (*δυάς*) a manera de doblez (*διπλόος*), hecho manifestado en el numeral (1.5) que involucra doblar (*διπλόω*) y por ende al dos (*δύο*) que está presente en la raíz de lo que es doble. Y tal situación de identificación mutua (*ἐφαρμόζω*) es un estado único o singular; se tiene una unicidad o unidad (*ἑνότης*, vocablo derivado de lo uno *εἷς*, *ἑνός*) completa bajo tal igualdad (*ἴσος*); este aspecto está manifestado por la conjugación del verbo ser y existir (*εἰμί*) en tercera persona del singular presente indicativo (*ἐστίν*) en la citada proposición.

1.8 *Y el todo es mayor que la parte* (*The whole is greater than the part. καί τό ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστιν*).

Estamos frente a uno de los postulados, axiomas o proposiciones más importantes de todos los tiempos. Se ve que está insertada dentro de una secuencia de nueve proposiciones, es dentro de este contexto donde habremos de desentrañar su sentido completo. Tenemos en este contexto lo siguiente: Y (*καί*) el (*τό*, es neutro, lo) todo (*ὅλον*) es (*ἐστίν*) lo o aquel (*τοῦ, τις*) más grande (*μεῖζον*) que la parte (*μέρους*)[385]. Una vez más estamos frente a una proposición que adquiere sentido y lo complementa en virtud de las anteriores, hecho dado por la presencia de la conjunción (y). Luego se tiene el señalamiento que el todo es algo neutro, lo todo (*τό ὅλον*), ese todo (*ὅλος*) es tomado como uno. Este hecho está presente en los artículos y adjetivos que siguen están en singular, lo que también se evidencia en que la

[385] Se habla del hecho que una ecuación matemática sea completa respecto a una teoría científica, en este caso a esta expresión le faltaría el operador aritmético de la suma, esto nos conduciría a modificar este axioma: el todo es más grande que la suma de sus partes. En su artículo: *The Whole is more than the Sums of its Parts or is it?* John Dobson (2003) plantea que las cuatro fuerzas fundamentales de la física: i. La fuerza nuclear fuerte entre neutrones, protones y quarks; ii. La fuerza electromágnetica; iii. La fuerza débil entre partículas elementales; iv. La fuerza de la gravedad, se verían afectadas por este problema del todo y la parte. En general, en este contexto, el todo es más que la suma de sus partes. Este problema se circunscribe dentro del problema clásico del movimiento de un sistema de muchos cuerpos, que es imposible de ser calculado (págs. 1-16).

parte (*μέρους*) es la forma sustantivada singular del neutro genitivo: la parte de ese todo, donde ambos sustantivos se relacionan declinándose de manera mutua. Esto conlleva la existencia de una pertenencia (∈) del todo con parte y de la parte con el todo: *ὅλος* ↔ *μέρος*, es el todo en relación a la parte. Como se anotó en la proposición (1.6), lo uno (*εἷς*) es doblado (*διπλόω*) por la mitad (*ἥμισυς*), esa mitad que es el dos (*δύο*), es una pareja (*δυάς*), que conserva las mismas (*ἴσος*) características y propiedades de la unidad previa fruto del proceso de igualación (*ἰσάζω*) que se da. Se evidencia que las partes del todo, que no se dice cuántas ni cuáles son, se darían en pares (*δυάς*) que reproducen la misma constitución del todo: en ese sentido, la parte vendría a ser el espejo del todo, aunque sea muy pequeña, el todo con todas sus cualidades estaría presente en tal parte sin importar lo pequeña que esta sea. La proposición 1.6 sugiere que el proceso de partir por la mitad o doblar (*διπλόω*) podría seguirse de manera interrumpible y no indica cuando esto va a parar. Aunque el todo (*ὅλος*) sea más grande (*μέγας*) que la parte (*μέρος*), la parte sería la fiel copia en todo sentido del todo, tal como está sugerido en las proposiciones anteriores. Con lo cual, no hemos resuelto el problema de los predicados o categorías diferentes que constituyen al todo: su aspecto cuantitativo y cualitativo. En este sentido, notamos que esta proposición efectúa una definición extensiva o por cantidad del todo (*ὅλος*) en relación a la parte (*μέρος*). La definición intensiva o por cualidad la habremos de reconstruir a partir del análisis en conjunto del texto.

1.9 *Y dos rectas se separan, no se rodean** (*καί δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν*).

La última proposición continua siendo una continuación de la formulación contenida en las anteriores aseveraciones, manifiesta: y (*καί*) dos (*δύο*) rectas (*εὐθεῖαι*) se separan (*χωρίον*) no (*οὐ*) nos rodearán (*περιέχουσιν*). La síntesis de esta última proposición se centra en la dualidad manifiesta en el dos (*δύο*) y en la pareja (*δυάς*), siendo el objeto sobre el cual recae esta acción la recta (*εὐθύς*). Este términoi se encuentra declinado como un sustantivo en la forma dativa o propia de un complemento indirecto, regido por un verbo transitivo que posee dos argumentos, uno interno y otro externo: en este caso, se tiene que el argumento interno o primer objeto es la misma recta (*εὐθύς*) o una línea (*γραμμή*), en este caso la línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*); y un segundo objeto que sería el hecho mismo de que son dos (*δύο*) líneas (*γραμμή*) rectas (*εὐθεῖαι*). También se puede contemplar que el segundo objeto podría ser el sitio o lugar (*χωρίον*), que es la otra aserción etimológica de este vocablo. Aquí se cuenta con el juego de dos verbos que inciden sobre estas dos rectas (*δύο εὐθεῖαι*: el primero es (*χωρέω*): hacer sitio, ceder, separarse y, el segundo, es (*περιέχω*): encerrar, contener, envolver, ocupar, abrazar. Lo característico es que el primer verbo (*χωρέω*) está afirmado y segundo está negado (*οὐ περιέχω*). Ahora bien, la proposición podría ser: $p \wedge \sim q$, en las cuales el sujeto sería el mismo, o sea dos líneas rectas (*δύο εὐθεῖαι*) con distintos predicados. Esto podría ser simbolizado dentro del cálculo de predicados como: $X_{\delta\varepsilon} \wedge \sim \Pi_{\delta\varepsilon}$, las dos rectas se separan o dividen. Tal separación (*χωρισμός*) no tiene la posibilidad de poder rodear (*περί*) a fin de contener, tener o mantener (*ἔχω*), aquel sitio (*χωρίον*) que no es nombrado aquí. Pero, si se remite al numeral anterior, en cuanto a la relación del todo (*ὅλος*) con la parte (*μέρος*), el lugar (*χωρίον*) habría de ser propiamente este. En consecuencia, al final la recta (*εὐθύς*) podría ser aquel objeto no nombrado, que es tratado a lo largo de todas estas nueve proposiciones. Aunque la interpretación para otros posibles candidatos, aún el más abstracto de todos, como lo es el elemento (*στοιχεῖον*), que también significa el primero en la línea, o el primero en una serie, como también principio o elemento; vocablo que proviene de *stoîkhos* (*στοῖχος*) que también significa: línea, fila, hilera; interpretación muy conveniente desde la perspectiva que ese elemento sería una línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*) y, en este caso concreto, serían dos líneas rectas (*δύο εὐθεῖαι γραμμή*). La conclusión de esta proposición vendría a ser: dos líneas rectas no rodean ni definen la relación del todo con la parte[386]. Se hace hincapié en la

---

[386] En su artículo: *Whole and Part in Mathematics*, John Bell (1998) presenta algunos ejemplos en relación con este tema. Sea un ejemplo propio de la geometría analítica, donde tenemos un punto arbitrario o un vector en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, que es tomado como una combinación lineal de la base de un vector $\{e_1, e_2,\ldots,e_n\}$. Aquí el todo está representado por $\mathbb{R}^n$, el cual está completamente determinado por una parte muy pequeña del mismo $\{e_1, e_2,\ldots,e_n\}$. Este ejemplo ha sido extendido al concepto de una base para espacios vectoriales y a la idea general de una estructura matemática que es generada por una parte. Una idea parecida a que el lenguaje escrito es generado por el alfabeto. Una parte de una totalidad matemática puede ser obtenida si ignoramos un aspecto de su estructura, por ejemplo: la propiedad aditiva del grupo de los enteros es una parte del anillo de los enteros. Un todo matemático puede ser determinado por una parte en el sentido, que cada miembro del todo es aproximable (en un sentido topológico) por los miembros de la parte. Un ejemplo clásico de esto, es el hecho que cada miembro del conjunto de los reales es el límite de una secuencia de números racionales. Los pitagóricos en el año 550 a.C. creyeron que el cuerpo de todas las razones de magnitud geométrica similar era idéntico con la parte, constituida por las razones (es decir, una relación

acción de separar, dividir, apartarse (*χωρίζω*), que lleva a que cada línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*) tenga que actuar por separado (*χωρίς*), no (*οὐ*) dándose la posibilidad de abrazarse o rodearse (*περιέχω*). La acción de la preposición *perí* (*περί*) involucra algo que rodea y que establece cercanía, aspecto que nos evoca al círculo, la esfera o el globo (*κύκλος*), y una alusión que vendría a complementar y enriquecer el problema de las paralelas.

4.2.2. Reflexión concluyente de las nueve proposiciones acerca del todo y la parte.

Ahora sed analiza en detalle y como una sola proposición axiomática a todo este conjunto de proposiciones que están contenidas en *Los Elementos* de Euclides en el libro 1: 3. La razón para hacerlo radica en la presencia de la conectiva binaria de la conjunción (*καί*) entre las proposiciones 2 a la 9. Se entiende, por consiguiente, que esto conduciría a simbolizarlas como una sola proposición Ƥ = $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5 \wedge p_6 \wedge p_7 \wedge p_8 \wedge p_9$. Se verán más de cerca de los predicados que están determinando cada uno de los términos de las citadas proposiciones, con la finalidad de desentrañar las formulaciones comunes dentro de una denominable subteoría del todo y la parte[387].

Cabe resaltar que la primera proposición: *Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí* (*τά τῷ αὐτῷ ἴσα καί ἀλλήλοις ἐστίν ἴσα*), se divide en dos: como si dicha proposición se subdividiera, donde la una establece la instancia común a todo lo que sigue: Ƥ = ṗ ($p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5 \wedge p_6 \wedge p_7 \wedge p_8 \wedge p_9$), tal aseveración común que permea a todas es *τά τῷ αὐτῷ ἴσα*: ‘aquello que es equivalente en lo mismo’. Aspecto recreado por la presencia de *αὐτός* + *ἴσος*, pronombre reflexivo + el adjetivo en la forma dativa (*τῷ*) como

---

binaria entre magnitudes) de los números enteros; de manera que, una medición se puede reducir siempre a un conteo. Ellos descubrieron la inconmensurabilidad del lado y la diagonal de un cuadrado o sea la irracionalidad de $\sqrt{2}$, lo que condujo a la primera gran crisis de las matemáticas (págs. 1-3).

[387] En su obra *The Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Morris Kline (1972) comenta como las definiciones están enmarcadas en términos de unos conceptos que no están definidos y, en consecuencia, no tienen un propósito lógico: su tarea es más para explicar de manera intuitiva la aplicación de los axiomas y los postulados a estos conceptos. En estas nociones comunes o axiomas realizadas por Euclides, éste adopta una distinción ya asumida por Aristóteles: las nociones comunes son verdades aplicables a todas las ciencias mientras que los postulados solamente se aplican a la geometría. Aristóteles manifestó que los postulados no necesitan ser conocidos para que sean verdaderos, pero que su verdad sería verificada en los resultados deducidos de ellos en concordancia con la realidad. Se menciona cómo Euclides presumiblemente aceptó los puntos de vista de Aristóteles en lo concerniente a la verdad de estos postulados; sin embargo, en la subsecuente historia de las matemáticas, tanto los postulados como las nociones comunes fueron aceptadas como verdades incuestionables, al menos hasta el advenimiento de la geometría no euclidiana (pág. 59).

complemento directo en este caso, y no indirecto como en la mayoría de los casos, dado que se está efectuando el acto de entregar algo. A su vez, el artículo (*τά*) está en el caso dual femenino (que nos recuerda, que la génesis de los principios del universo se instauran a partir de la díada, tema tratado por Pitágoras y recordado en el último axioma en relación a dos líneas rectas), en concordancia a que tan solo en la proposición novena se nos revela el sujeto evocado más no nombrado que transita a lo largo de todos estos nueve axiomas: lo recto como adjetivo femenino (*εὐθεῖαι*), es propiamente la línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*), se recuerda además, que la línea (*γραμμή*) es un sustantivo femenino. Con lo cual, la instancia común que predica sobre todas las nueve proposiciones, la línea recta es lo que es equivalente a lo mismo. En este caso, se tiene una acción reflexiva en el pronombre reflexivo (*αὐτός*) que recae sobre la equivalencia o similaridad *ísos* (*ἴσος*), y ello revela uno de los indiscernibles aritmético-geométricos, que es la noción de lo mismo (*ἴσος*), lo cual permite comprender la importancia de las distintas formas isomorfismo en las matemáticas, cuyo fundamento se encuentra aquí. De igual manera, esta noción de lo mismo será la que ayudará a fundamentar las relaciones de igualdad y de equivalencia, entre las expresiones matemáticas y en especial en las ecuaciones. De modo que lo que se va a predicar a lo largo de estos nueve axiomas, es que la línea recta es aquel elemento que es igual a sí mismo, y que se caracteriza por tener las siguientes nueve propiedades, que se van a aseverar bajo la diferenciación de nueve predicaciones, como sigue: Primera predicación que sigue a la ‘y’ en la primera proposición es: lo (en plural, *ἀλλήλοις*) que es (*ἐστίν*) en lo uno como en lo otro (*ἀλλήλοις*) en lo mismo (*ἴσος*), que lo simbolizaremos en el cálculo de predicados como ʾEἴ. Se tiene en la simbolización el verbo igualar (*ἰσάζω*) que actúa dos veces alrededor de lo mismo (*αὐτός*), resaltándose la función de (*ἀλλήλων*) que se asemeja al operador lógico binario de la bicondicionalidad (↔). El verbo ser y existir (*ἐστίν*, *εἰμί*) acompaña como mostrando el resultado final: ∧ (ʾIἴ ↔ ʾIἴ) → ʾEἴ, dos elementos que se comparan siendo los mismos terminan manifestando que existen como lo mismo.

Viene luego el segundo axioma: *Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales* (*καί ἐάν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τά ὅλα ἐστίν ἴσα*). Aquí se pueden identificar los siguientes predicados: en la primera expresión hay dos verbos, lo que es igualar (*ἰσόω*) y lo que es colocar al lado (*προστίθημι*). A su vez, los términos o los que cumplen la función de sujeto serían ‘lo igual’ (*ἴσος*) y los (*τά*, artículo neutro plural acusativo, interpretable como lo dual o los, a su vez, *τά* también equivale al pronombre en su forma adjetivada los cuales *τίς*) que en el todo (*ὅλος*) es (*ἐστίν*) lo mismo (*ἴσος*). Pero esta proposición tiene algo particular y es la conjunción condicional sí (*if*, *ἐάν*), que parece indicar que la conectiva que une a las dos expresiones separadas en este caso por una coma, es la conectiva de la implicación. Este axioma se simbolizaría: $\text{Ἰ}_{\text{ἴ}} \wedge \Pi_{\text{ἴ}} \rightarrow \text{Ἐ}_{\text{ὅἴ}}$ –lo que iguala lo mismo y lo que coloca al lado lo mismo, conlleva a que, lo mismo es el todo–. Al ser simbolizada la expresión se tiene presente la conectiva binaria de la ‘y’, nos lleva a: $\wedge (\text{Ἰ}_{\text{ἴ}} \wedge \Pi_{\text{ἴ}} \rightarrow \text{Ἐ}_{\text{ὅἴ}})$. La lectura de esta proposición sería: que lo mismo (*ἴσος*) es lo que iguala (*ἰσόω*) y sitúa a su alrededor (*προστίθημι*) a lo mismo (*ἴσος*) como lo que es (*ἐστίν*) el todo (*ὅλος*). Es decir, lo mismo (*ἴσος*) vendría a ser la cualidad y la propiedad que identifica al todo (*ὅλος*): el todo se caracteriza por integrar lo igual o lo mismo como un singular o elemento común a una pluralidad, ‘el todo es lo mismo’, $\text{Ὅ}_{\text{ἴ}}$.

El tercer axioma es: *Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales* (*καί ἐάν ἀπό ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τά καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα*). En esta proposición está la conjunción (*καί*) que indica que continúa la formulación anterior; además, de nuevo está el si condicional (*ἐάν*) que indica una implicación. Y se pueden identificar los siguientes predicados: igualar (*ἰσόω*) y separar (*ἀφαιρέω*) y, como término común a ambos, lo mismo (*ἴσος*). En la segunda clausura están los predicados dejar atrás (*καταλιμπάνω*), acentuados por la preposición *apó* (*ἀπό*: de, lejos de, aparte) y, como término, lo (*τά,* como un artículo en una forma plural: que vendría a significar lo mismo que se puede encontrar en una pluralidad) misma (*ἴσος*). Al simbolizar esta expresión, se tendría: $\text{Ἰ}_{\text{ἴ}} \wedge \text{Ἀ}_{\text{ἴ}} \rightarrow \text{K}_{\text{ἴ}}$. Al tener presente la conectiva de la conjunción que está al inicio, se tendría: $\wedge (\text{Ἰ}_{\text{ἴ}} \wedge \text{Ἀ}_{\text{ἴ}} \rightarrow \text{K}_{\text{ἴ}})$. Se puede expresar como: al igualar lo mismo y al quitar de lo mismo se tiene lo que dejamos atrás o lo que queda. A fin de igualar hemos de quitar lo que no es lo mismo, esto conlleva a que se tendrá un residuo que es propiamente lo común a todos carente de diferencias: se está expresando de alguna manera el elemento común de una factorización. Si se tiene en la cuenta que el predicado no mencionado aquí pero mencionado en el noveno axioma, que es la línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*), la interpretación sería: para igualar varias líneas rectas hemos de quitar lo que las hace desiguales, quedando al final todas iguales. En la traducción se sugiere una relación de proporcionalidad: *si de cosas iguales se quitan cosas iguales el resto es igual*, lo que es una interpretación también válida. Pero en este caso, habría que simbolizarla de otra manera: $\text{᾽I}_{\text{ἴ}} \propto \text{Ἀ}_{\text{ἴ}} \rightarrow \text{K}_{\text{ἴ}}$, simbolizable también como: $\text{᾽I}_{\text{ἴ}} / \text{Ἀ}_{\text{ἴ}} = \text{K}_{\text{ἴ}}$. La cual vendría a ser la proporcionalidad directa y si lo simbolizamos como: $\text{᾽I}_{\text{ἴ}} = \text{K}_{\text{ἴ}} / \text{Ἀ}_{\text{ἴ}}$, vendría a ser la proporcionalidad inversa (recordando que $\propto$ representa al símbolo de la proporcionalidad en matemáticas).

En el cuarto axioma se tiene: *Y si igualamos lo que es desigual, el todo se igualará** (*καί ἐάν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τά ὅλα ἐστίν ἄνισα*). Este axioma está conformado por dos proposiciones, la primera tiene por conectiva principal la ‘y’ (∧), de suerte que vamos a tener la siguiente forma lógica: ∧ (……), sin importar lo que esté adentro, están subordinadas las proposiciones internas a la reglamentación externa. Lo cual está en plena concordancia a que, los nueve axiomas de este numeral en realidad son uno solo. La presencia de la conjunción condicional (*ἐάν*) indica la existencia de una implicación, dado que se está introduciendo un antecedente que va cumplir las funciones de ser causa de un consecuente que será su efecto. En el antecedente hay en principio tres verbos: igualar *anisóo* (*ἀνισόω*), igualar (*ἀνισάζω*) y añadir, dejar *prostíthēmi* (*προστίθημι*), en especial, los dos primeros cumplen la tarea de un verbo atributivo: un verbo que modifica expresando el atributo de un sustantivo en la manera de un adjetivo atributivo, lo que nos lleva a que debamos tomarlo en ambos sentidos. El término principal, como se ha visto, no es mencionado sino hasta el final en el axioma noveno, en cuanto se trata de la línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*); no obstante, la forma adjetivada atributiva permite identificar dos términos más que son tomados en la cuenta en el sentido final de la traducción. El primero de estos términos hace alusión a un término en una forma plural adjetivada (*ἀνίσοις*) como lo que es desigual: los desiguales y el segundo término también considerado como un adjetivo en plural (*ἴσα*) hace alusión a lo igual: los iguales. Este hecho muestra que se están colocando en frente los desiguales y los iguales, aquello que es desigual (*ἀνίσος*) confrontándose y exponiéndose (*προστίθημι*) con lo que es igual (*ἴσος*). Ese proceso va a ser reductivo, dado que si se suma y se resta al mismo tiempo tan solo quedará una sola expresión. Lo anterior se puede simbolizar en el cálculo de predicados como: $\Pi_{\text{ἀ}} \wedge \Pi_{\text{ἰ}}$. La segunda expresión que es la consecuencia o implicación manifiesta, que los (*τά*) todos (*ὅλα* forma plural neutra acusativa de *ὅλος*) es (*ἐστίν*) un desigual (ἄ*νίσος*) que será igualado (*ἀνισάζω*). Los verbos que cumplen la acción predicativa son: ser y existir (*εἰμί*) en desigualdad (*ἀνισότης*) e igualar (*ἀνισάζω*), mientras los términos son las partes (*μέρος*) abordadas como la pluralidad de todos (*ὅλα*) que serán igualadas. Cuando se habla de distintas líneas rectas (*εὐθεῖαι γραμμή*), cada una puede ser tomada como un todo, lo cual concuerda en el uso plural de la forma adjetivada (*ὅλα*); sin embargo, las distintas líneas serán abordadas como partes (*μέρος*) de una misma línea tomada como la norma bajo las cuales todas se igualan. Simbolizando lo anterior se tendría la desigualdad que será igualada, $Ἀ_{ὅ} \rightarrow Ἰ_{ὅ}$. Lo que hace que toda la expresión quedaría simbolizada como: $\wedge [(Π_{ἀ} \wedge Π_{ἴ}) \rightarrow (Ἀ_{ὅ} \rightarrow Ἰ_{ὅ})]$. En esta proposición se presente un tema adicional, que es relación entre la igualdad (*ἰσοτης*) y la desigualdad (*ἀνισότης*), y como en una expresión formal tiene que alcanzar un estado de definición, debido a que ambos estados no pueden coexistir de manera permanente: es el uno o el otro, o sea el uso de la conectiva de la disyunción.

El quinto axioma es: *Y en los elementos existe aquel que en él mismo se dobla el uno en el otro** (*καί τά τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν*). A la falta de sujeto, ha sido introducido uno que tiene un valor general, como es el elemento (*στοιχεῖον*), muy en concordancia con el texto. Es sabido que el elemento no es otro que una línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*). Una vez más, después de la conectiva de la conjunción ‘y’ (*καί*), sigue una introducción interrogativa que indaga y busca llegar a una respuesta: los (*τά*), ¿cuáles? (*τά* es una forma también una forma plural del pronombre *τίς*), cualquiera o alguno (*τοῦ*, *τις*); luego se señala la condición que se ha de cumplir y que está asumida el adjetivo (*αὐτός*), especificado también como adverbio en ‘aquí mismo’ (*αὐτοῦ*). A su vez, se evoca lo que es lo mismo (*αὐτός*) y como pronombre reflexivo en ‘lo mismo’, que tiene esa propiedad de ser doble (*διπλάσιος*) en los que son lo mismo (*ἴσα*) en los unos y en los otros (*ἀλλήλοις*). La predicación se efectúa por medio del verbo ser y existir (*εἰμί*), que podría escribirse como ser doble (*ἐστίν διπλόος*), al unir este verbo con el adjetivo en su forma plural acusativa (*διπλάσια*). También se podría optar por escoger el verbo doblar (*διπλόω*) y el otro verbo vendría a ser igualar (*ἰσάζω*), que está sugerido en (*ἴσα*) y que evoca de igual manera la forma adjetivada plural neutra acusativa (*ἴσα*). Los términos vienen sugeridos por lo mismo (*αὐτός*) y el uno en el otro (*ἀλλήλων*), es decir por un término doble tal como lo sugiere la etimología de (*διπλόος*), conformada por: dos veces o doble (*δίς*) y (*-πλοος*) pliegue, algo que es y existe (*ἐστίν*) como un término doble, doble pliegue. Lo cual invita a simbolizarlos como dos subíndices: $\Delta_{\delta\delta'} \wedge \text{'I}_{\delta\delta'}$, que unida a la conectiva de la conjunción 'y' inicial, nos da como expresión formal final $\wedge (\Delta_{\delta\delta'} \wedge \text{'I}_{\delta\delta'})$. Dada la presencia de la relación reflexiva (aRa) manifestada en los vocablos (*αὐτός*) y (*ἀλλήλων*), se indica que los distintos términos (dado que estamos frente a adjetivos declinados en plural) están los unos relacionados con los otros: $\delta R\delta'$ en una serie de la forma $\delta_1 R\delta_2 R\delta_3 \ldots \delta_n$. La expresión final vendría a ser: $\wedge\ [(\Delta_{\delta 1} R\Delta_{\delta 2} R\Delta_{\delta 3} \ldots \Delta_{\delta n}) \wedge (\text{'I}_{\delta 1} R\text{'I}_{\delta 2} R\text{'I}_{\delta 3} \ldots R\text{'I}_{\delta n})]$. Se podría, igualmente, plantear una función f que relaciona cada elemento o línea doblada con la siguiente, $f\colon \Delta_{\delta 1} \rightarrow \text{'I}_{\delta 1}$, que leído sería 'doblo e igualo'. Este tópico se lo podría abordar más como una composición de funciones, dado que tomo un elemento o línea y la doblo sobre sí misma y luego repito esta operación con los elementos o líneas que siguen. En este caso, se dan dos funciones, la primera es doblar $f(\Delta)$ y la segunda es igualar $f(\text{'I})$, las cuales se las puede expresar como sigue: $f(\Delta)_1^{\,n}\colon \delta_1 \rightarrow \delta_2, \ldots$ y $f(\text{'I})_1^{\,n}\colon \delta_1 \rightarrow \delta_2 \ldots$ Asimismo, el doblar podría ser el recíproco del igualar, manifestado entre otras por el hecho en que los elementos o líneas son los mismos en ambas funciones: $f(\Delta) = f(\text{'I})^{-1}$, $f(\Delta)^{-1} = f(\text{'I})$, bajo la función compuesta $f(\text{'I}) \circ f(\Delta)$.

El sexto axioma manifiesta: *Y en los elementos existe aquel que en él mismo es la mitad el uno en el otro** (*καί τά τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν*). La estructura de esta proposición es muy parecida a la anterior, solo cambia un vocablo que es el adjetivo 'mitad' (*ἥμισυς*), declinado en plural neutro acusativo. Como es sabido, la forma acusativa presupone el complemento directo de un verbo transitivo, el cual toma los objetos o términos aludidos en cuestión para poder efectuar su acción verbal, en este caso identificada como la actividad predicativa o una función f particular, muy en concordancia con la actividad que 'es' está efectuando en estas proposiciones. Como las proposiciones (5 y 6) son parecidas, se tomará la misma estructura de la lógica predicativa: $\Delta_{\delta\delta'} \wedge \text{'I}_{\delta\delta'}$, tan solo se cambia el primer verbo que, en vez de doblar (*διπλόω*), simbolizado por la delta mayúscula Δ, se reemplaza por el verbo que represente al adjetivo 'medio, por mitad' (*ἥμισυς*), que será cortar en dos (*διχοτομέω*), el cual está formado por la unión de (*δίχα*) en dos partes (que es tanto un adverbio como una preposición: en el primer caso significa en dos partes, diferentemente y, en el segundo caso, es aparte, por separado) y el verbo (*τέμνω*), que es: cortar, dividir y asolar. A fin de repetir la misma delta Δ que tienen los verbos doblar (*διπλόω*) y cortar en dos (*διχοτομέω*), se escogerá la T de (*τέμνω*). Con lo cual, la simbolización final sería $T_{\delta\delta'} \wedge$ Ἰ$_{\delta\delta'}$, que cuando se agrega la conjunción inicial quedaría como: $\wedge$ ($T_{\delta\delta'} \wedge$ Ἰ$_{\delta\delta'}$). En este contexto, es posible entender que esta proposición se sigue como una consecuencia lógica derivada de la anterior.

El séptimo axioma dice: *Y de cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí* (*καί τά ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν*). Se observa, de entrada, la continuidad como una proposición derivada de las demás y unida a ellas por la 'y' (*καί*); asimismo, el artículo en plural (*τά*) señala esas cosas que propiamente, como se ha dicho, son las líneas rectas (*εὐθεῖαι γραμμή*). Los dos elementos están presentes en la mayoría de los axiomas mencionados, y sirven para recordarnos la vinculación mutua de todas las proposiciones entre sí. El señalamiento del objeto por medio del importante artículo definido (*the*, el, la, los) es un tema analizado por Russell[388] en su teoría de la denotación, en especial, en relación con lo que él denomina el concepto clase (*class-concept*). Este tema es introducido en el cálculo de clases y fue desarrollado por primera vez por Giuseppe Peano. Es tal su importancia que es introducido de manera conjunta con algunos indefinibles matemáticos como: la noción de función proposicional y la noción de 'tales que'. Cabe resaltar que es necesario distinguir entre la clase y el operador que establece la membresía de un miembro frente a una clase ($\in$), mientras el concepto-clase o predicado es el que permite definir una clase. En este contexto, la línea (*γραμμή*) es la clase y su condición de enderezar, poner derecho (*εὐθύνω*) es el concepto-clase. Sin embargo, es claro que se puede predicar de una línea (*γραμμή*) no solo su condición de ser recta (*εὐθύς*), sino también podría ser curva (*καμπτήρ*), siendo su concepto-clase: encorvar, doblar, plegar (*κάμπτω*). Todos estos significados, como se sugiere, están subordinados al concepto-clase de la rectitud (*εὐθύτης*),

[388] Russell en su obra *The Principles of Mathematics* menciona: "Los adjetivos se reconocen por su capacidad para denotar, los verbos se distinguen por una clase especial de conexión, excesivamente difícil de definir, con la verdad y la falsedad, en virtud de lo cual ellos distinguen entre una proposición aseverada y una no aseverada" (pág. 43). Prosigue: "La noción de 'the' ha sido simbólicamente enfatizada por Peano, con gran ventaja para su cálculo. El uso de la identidad y la teoría de la definición son dependientes de esta noción, la cual en concordancia tiene la más alta importancia filosófica" (pág. 62). El tema de la noción de concepto-clase es introducida en el capítulo de la lógica simbólica, los indefinibles en las matemáticas (pág. 19-20).

entendida como el ejercicio de lo que es bueno en todos los sentidos (*εὖ*): este último nivel conceptual permite una mayor movilidad en el planteamiento y la fundamentación de los diversos niveles de argumentación que se han de construir para desarrollar las definiciones y los conceptos.

Aquí se tienen como predicados o concepto-clases los verbos (*ἐφαρμόζω*): ajustar, aplicar, implementar; hacer igual, igualar (*ἰσάζω*); y, en el trasfondo, se halla la acción verbal que los hace a todos posibles, o sea el verbo ser y existir (*εἰμί*). El término siempre será la línea (*γραμμή*), en este caso recta (*εὐθύς*). Es posible identificar un movimiento reflexivo, de ida y venida, del uno en el otro, en dos direcciones, por medio del pronombre (*ἀλλήλων*): en el primer caso un adjetivo plural neutro acusativo (*ἄλληλα*), acompañado de la preposición 'sobre' (*ἐπί*); y en el segundo caso, se tiene un adjetivo plural masculino dativo (*ἀλλήλοις*). El caso neutro hace alusión a los elementos (*στοιχεῖον*) ya que es un sustantivo neutro que, además, significa: uno en la fila, en concordancia con que es un vocablo que proviene de fila (*στοῖχος*); uno en una serie, un componente, un principio, un elemento. Mientras que 'recto' (*εὐθύς*) es un adjetivo masculino, lo cual concuerda con la traducción: hemos de escoger (*ἐφαρμόζω*) los elementos (*στοιχεῖον*: principios, puntos, líneas) que están sobre (*ἐπί*) la superficie (*ἐπιφάνεια*), que van y vienen alrededor de lo que es igual (*ἴσος*) en ambas direcciones (*ἀλλήλων*). Una alusión a que la línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*) es aquella que permite un isomorfismo entre los puntos (*σημεῖον*) en cuanto se conserva su rectitud (*εὐθύτης*) que siempre endereza o se mantiene derecha (*εὐθύνω*). Se puede aseverar, finalmente, que las líneas rectas (*εὐθεῖαι γραμμή*) desplegadas sobre (*ἐπί*) esta superficie (*ἐπιφάνεια*) son iguales entre sí (*ἴσος*). La igualdad también se extiende a los puntos (*στοιχεῖον*) que constituyen toda línea (*γραμμή*), en especial si es recta (*εὐθύς*). Al simbolizar este axioma, se tendría: $᾿E_{\sigma} \leftrightarrow ᾿I_{\sigma}$, en el caso que el término sea un elemento, en cuyo significado también está contemplado que sea un punto, una línea, una superficie. En caso que sea una recta (*εὐθύς*), se la simbolizará como: $᾿E_{\varepsilon} \leftrightarrow ᾿I_{\varepsilon}$. Con lo cual, todo lo que se ajusta, acomoda y coincide (*ἐφαρμόζω*) solo puede hacerlo si se iguala (*ἰσάζω*). Al mismo tiempo, hay que agregar la conectiva inicial $\wedge$ ($᾿E_{\sigma} \leftrightarrow ᾿I_{\sigma}$). En este contexto, hemos propuesto que el pronombre (*ἀλλήλων*), que expresa una acción en dos direcciones, la una en la otra de manera recíproca, se lo asumirá como la conectiva binaria de la doble implicación ($\leftrightarrow$).

En el axioma octavo se dice: *Y el todo es mayor que la parte* (*καί τό ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστιν*). El todo (*τό ὅλον*) *es* aquel (*τοῦ*, *τις*) más grande (*μεῖζον*) que la parte (*μέρος*). Se tiene el verbo ser y existir (*εἰμί*): la existencia como todo (*ὅλος*) conlleva a que exista como parte (*μέρος*), E (*ὅλος*) → E (*μέρος*). El término, como se ha visto, podría ser elemento (*στοιχεῖον*) o línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*). A su turno, se selecciona la letra mayúscula de la ómicron con sus acentos o espíritus (Ὅ) como el predicado ser y existir como todo; y la letra mi mayúscula M, como el predicado ser y existir como parte. Lo que resulta en la siguiente simbolización: $Ὅ_\sigma \rightarrow M_\sigma$. Al agregarse la conjunción 'y', quedaría: $\wedge$ ($Ὅ_\sigma \rightarrow M_\sigma$). No obstante, lo interesante de este axioma es la introducción de la relación 'mayor que' tan importante en la construcción del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, es un adjetivo comparativo singular (*μεῖζον*) de grande (*μέγας*), o sea es (*ἐστίν*) 'más grande que'. Este hecho involucra la presencia de una pareja (*δυάς*) de predicados que están definidos por medio por medio de la relación de orden mayor o igual que ($\leq$). Con lo cual, la anterior expresión podría reescribirse como: $\wedge$ ($Ὅ_\sigma > M_\sigma$), el todo es mayor que la parte. Ya ha sido anotado que, en este contexto, se entiende que una línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*) es más grande que las porciones o las partes de una línea recta (*μέρους εὐθεῖαι γραμμή*), que en nuestro caso, equivalen a segmentos de recta. Este notorio hecho muestra que la definición de 'el todo' (*τό ὅλον*) con relación a 'la parte' (*τό μέρος*) se ha de construir de manera extensiva, que tan solo en este contexto es interpretable a nivel cuantitativo. Este hecho es liberador, en la medida en que permite plantear los principios (*στοιχεῖον*) constitutivos de una realidad modelada, así como el poder construir y plantear diversos esquemas para las categorías sobre las cuales se va a efectuar la predicación de una teoría. Recuérdese que la categoría (*κατηγορία*) se entiende como la parte principal de una predicación. El predicar acerca de una persona o cosa (*κατηγορέω*) también significa: acusar a alguien de manera pública, o hablar en contra de alguien ante los jueces; de igual manera, significar, declarar, aseverar, contar de manera completa y, también, afirmar. Este vocablo está conformado por *katá* (*κατά*): contra, hacia abajo, dentro, durante, a lo largo; y *agoreúō* (*ἀγορεύω*), que es hablar en asamblea, en la ágora (*ἀγορά*), aquel lugar que nos permite reunirnos (*ἀγείρω*). Es de resaltar que el verbo *ageíro* (*ἀγείρω*) también significa recolectar, juntar, reunir; es decir, aquella acción que motiva la definición de un conjunto en términos matemáticos. A su vez, el operador de la pertenencia ($\in$), que indica la membresía de un miembro frente a una clase; de esta manera, se puede observar cómo las matemáticas, de una u otra manera, son un reflejo abstracto y simbólico de la realidad en que vivimos.

El noveno axioma es: *Y dos rectas se separan, no se rodean** (*καί δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν*). Esta novena proposición viene a concluir todas las anteriores, introduce nuestro elemento (*στοιχεῖον*), sujeto o término sobre el cual versa todo y que no había sido nombrado antes: la línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*). Ya se analizó la simbolización, tomando los verbos (*χωρέω*): ceder, retirarse, separar y (*περιέχω*); encerrar, contener, abrazar, que han sido simbolizados bajo los términos ‘dos líneas rectas’, y remite a: Χ$_{δε}$ ∧ ~ Π$_{δε}$; ahora, si se le agrega la ‘y’ inicial queda: ∧ (Χ$_{δε}$ ∧ ~ Π$_{δε}$). En toda esta presentación se ha destacado el papel de la dualidad (*δυάς*), en especial, del dos (*δύο*), como aquel número bajo el cual se construye la realidad, emanado y gestado en el uno (*εἷς*). Hé aquí la interpretación simbólica de estas nueve proposiciones:

*1. $\vdash$. (Ἰ$_{ἴ}$ ↔ Ἰ$_{ἴ}$**)** → Ἐ$_{ἴ}$: dos cosas igualadas son equivalentes.

*2. $\vdash$. (Ἰ$_{ἴ}$ ∧ Π$_{ἴ}$ →Ἐ$_{ὄἴ}$): Lo que se iguala y lo que se agrega conlleva igualdad-identidad como totalidades.

*3. $\vdash$. (Ἰ$_{ἴ}$ ∧ Ἀ$_{ἴ}$ → Κ$_{ἴ}$): Lo igualado a sí mismo y lo quitado de sí mismo involucra que lo que queda es igual.

*4. $\vdash$. (Π$_{ἀ}$ ∧ Π$_{ἴ}$) → (Ἀ$_{ὄ}$→ Ἰ$_{ὄ}$): El igualar lo desigual y el añadir lo igual involucran igualar el todo de tal manera que se equilibra-balancea el todo.

*5. $\vdash$. (Δ$_{δδ'}$ ∧ Ἰ$_{δδ'}$): El doblar lo doble involucra igualarlos como dobles. (Δ$_{δδ'}$ → Ἰ$_{δδ'}$)

*6. $\vdash$. (Τ$_{δδ'}$ ∧ Ἰ$_{δδ'}$): El cortar por la mitad doble conlleva igualar la mitad doble (Τ$_{ἥδ'}$ → Ἰ$_{ἥδ'}$)

*7. $\vdash$. (Ἐ$_{σ}$ ↔ Ἰ$_{σ}$): El agregar igualando involucra que siempre se tendrá un igualar consigo.

*8. $\vdash. (\text{Ὅ}_{\sigma} \rightarrow \text{Μ}_{\sigma})$: El todo de lo mismo involucra la parte de lo mismo.

*9. $\vdash (\text{Χ}_{\delta\varepsilon} \wedge \sim \Pi_{\delta\varepsilon})$: Separar dos rectas involucra que no encierran o abrazan las dos rectas. $(\text{Χ}_{\delta\varepsilon} \rightarrow \sim \Pi_{\delta\varepsilon})$.

Se puede reunir todas las proposiciones simbolizadas en una sola. Se trata de nueve proposiciones que se han reunido en torno a una sola expresión simbólica en la lógica del cálculo de predicados. Se podría sacar del paréntesis general al término o sujeto sobre el cual versan todas, que es la noción de elemento (*στοιχεῖον*) o de línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*), que simbolizadas da: $\Sigma \vee \text{Ε}$. Alguna de estas dos letras debería estar como subíndice en todas las expresiones. Se representa la clase como Σ y el elemento como σ en un superíndice en las proposiciones, lo que llevaría a afirmar: $\vdash. \Sigma (\sigma) [((\text{Ἰ}_{\text{ἵ}}^{\sigma} \leftrightarrow \text{Ἰ}_{\text{ἵ}}^{\sigma}) \rightarrow \text{Ἐ}_{\text{ἵ}}^{\sigma}) \wedge (\text{Ἰ}_{\text{ἵ}}^{\sigma} \wedge \Pi_{\text{ἵ}}^{\sigma} \rightarrow \text{Ἐ}_{\text{ὅἵ}}^{\sigma}) \wedge (\text{Ἰ}_{\text{ἵ}}^{\sigma} \wedge \text{Ἀ}_{\text{ἵ}}^{\sigma} \rightarrow \text{Κ}_{\text{ἵ}}^{\sigma}) \wedge [(\Pi_{\text{ἀ}}^{\sigma} \wedge \Pi_{\text{ἵ}}^{\sigma}) \rightarrow (\text{Ἀ}_{\text{ὅ}}^{\sigma} \rightarrow \text{Ἰ}_{\text{ὅ}}^{\sigma})] \wedge (\Delta_{\delta\delta'}^{\sigma} \wedge \text{Ἰ}_{\delta\delta'}^{\sigma}) \wedge (\text{Τ}_{\delta\delta'}^{\sigma} \wedge \text{Ἰ}_{\delta\delta'}^{\sigma}) \wedge (\text{Ἐ}_{\sigma}^{\sigma} \leftrightarrow \text{Ἰ}_{\sigma}^{\sigma}) \wedge (\text{Ὅ}_{\sigma}^{\sigma} > \text{Μ}_{\sigma}^{\sigma}) \wedge (\text{Χ}_{\delta\varepsilon}^{\sigma} \wedge \sim \Pi_{\delta\varepsilon}^{\sigma})]$.

Se ha mencionado de manera reiterativa que las divisiones que efectuó Euclides en sus elementos fueron tomadas de Aristóteles; esto se ve reflejado en el libro 1 de *Los Elementos*. Se aprecia así cómo Aristóteles abordó este tema en su obra La Física (*Φυσική ἀκρόασις*), libro 1, y expone estos principios que servirán para todas las ciencias acerca de la naturaleza y sus metodologías. Es posible efectuar una lectura a profundidad de las influencias de Aristóteles en Euclides, y la influencia de Pitágoras en ambos, lo que es una invitación a una investigación de profundidad que comience en los Presocráticos y termine con Diofanto de Alejandría, cerca de mil años de reflexión sobre las matemáticas. Este tema está ilustrado de manera amplia[389], en medio de la existencia de los principios que rigen para toda la naturaleza[390], la necesidad de un primer principio que gobierne y sea

[389] En su Artículo: *Aristotle and Mathematics*, Henry Mendell (2008), comenta las similaridades y las diferencias del tratamiento de Aristóteles y que se ven reflejadas en el libro 1 de Euclides de *Los Elementos*. Euclides divide sus principios en definiciones (*horoi*), postulados (*aitemata*) y nociones comunes (koinai ennoiai). Aritóteles denomina también a su koina un axioma (*axiomata*).

[390] Aristóteles habla de comprender y conocer aquella cosa que va a servir de sujeto para cualquier investigación metodológica, donde se pueda situar los principios y las causas de sus elementos. Esas causas primeras que rigen para toda ciencia acerca de la naturaleza (§ 1. *Comme on ne parvient à comprendre et à savoir quelque chose dans tout sujet de recherches méthodiques où il y a des principes, des causes et des éléments, que du moment où on les connaît; car on ne pense jamais connaître une chose que quand on en connaît les causes premières, les principes premiers, et jusqu'à ses éléments; de même aussi pour la science de la nature, il est évident que l'on doit tout d'abord prendre soin de déterminer ce qui regarde les príncipes §*

norma para todos[391]. En ese sentido, se ha de comprender que la noción de punto (*σημεῖον*) sirve para fundamentar toda la geometría, sin embargo, como ya se ha comentado, conviene situar tal noción en un nivel ontológico expresada en un metalenguaje. Este hecho lleva a que se puedan construir variados modelos geométricos, cuya normatividad está en un nivel epistemológico de carácter más operativo.

4. 3. Los postulados de Euclides

A continuación, se aborda la interpretación de los postulados de Euclides, que van a servir para la fundamentación de la geometría como disciplina, tanto en un nivel formal como en uno especulativo. Sin embargo, este tema está abierto a discusión puesto que la noción de punto de Euclides deja un espacio todavía indeterminado, que vendrá a ser completado por las geometrías no euclidianas:

> *1.Una línea recta puede ser dibujada uniendo dos puntos cualesquiera* (*To draw a straight line from any point to any point. Ἠιτήσθω ἀπό παντός σημείου ἐπί πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμήν ἀγαγεῖν*).

En este primer postulado se tiene: se puede (*Ἠιτήσθω*) desde (*ἀπό*) todo (*παντός*) punto (*σημεῖον*) a (*ἐπί*) todo (*πᾶν*) punto (*σημεῖον*) una línea recta (*εὐθεῖαν γραμμήν*) trazar (*ἀγαγεῖν*). Esta proposición comienza con el verbo *aitéo* (*αἰτέω*), que es pedir, rogar, solicitar aquella súplica o petición (*αἴτησις*) de trazar, conducir, llevar, guiar y tomar (*ἄγω*) cualquier (*παντός*) punto (*σημεῖον*). En ese sentido, se contempla que puede ser todo (*πᾶς*) punto, pudiendo escoger libremente el que se quiera, por lo que este determinante indica la presencia de una cuantificación universal (∀), donde no importa el punto (*σημεῖον*) que se tome siempre se va a cumplir la condición que sigue. Este transporte, traslado, movimiento

---

1. Ἐπειδὴ τὸ εἰδέναι καὶ τὸ ἐπίστασθαι συμβαίνει περὶ πάσας τὰς μεθόδους, ὧν εἰσὶν ἀρχαὶ ἢ αἴτια ἢ στοιχεῖα, ἐκ τοῦ ταῦτα γνωρίζειν (τότε γὰρ οἰόμεθα γιγνώσκειν ἕκαστον, ὅταν τὰ αἴτια γνωρίσωμεν τὰ πρῶτα καὶ τὰς ἀρχὰς τὰς πρώτας καὶ μέχρι τῶν στοιχείων), δῆλον ὅτι καὶ τῆς περὶ φύσεως ἐπιστήμης πειρατέον διορίσασθαι πρῶτον τὰ περὶ τὰς ἀρχάς). Aristotle, *Premiers Analytiques*, traduction par Jules Barthélemy Saint-Hilaire, libro 1.1.

[391] Es indudable la necesidad de un primer principio único que riga sobre los otros principios. (§1. *Nécessairement il doit y avoir dans l'être ou un principe unique ou plusieurs príncipes. § 1. Ἀνάγκη δ' ἤτοι μίαν εἶναι τὴν ἀρχὴν ἢ πλείου*. Ob. cit.chapitre 2.1)

y dirección (*ἀγωγή*) se va a realizar de (*ἀπό*) un punto (*σημεῖον*) cualquiera (*παντός*) hasta (*ἐπί*) cualquier (*πᾶν*) otro punto (*σημεῖον*). Ya está implícito que se va a marcar, trazar (*σημαίνω*) una línea recta (*εὐθεῖαν γραμμή*), porque desde el primer punto (*σημεῖον*) está contemplada la acción de desprender una marca, un trazo, una señal que va a alcanzar el segundo punto (*σημεῖον*). Todo esto es posible si se guía (*ἄγω*) tal línea o marca (*γραμμή*): cuidando, verificando, enmendando y enderezándola (*εὐθύνω*) a fin de que sea recta (*εὐθύς*). Tan solo el primer punto es el que lleva la acción verbal (*σημείου*) en pretérito imperfeto de indicativo: se señaló, indicó, marcó, selló, declaró e interpretó (*σημείου*) un punto (*σημεῖον*), hasta que alcanza el segundo punto (*σημεῖον*) y la acción va a ser supervisada y conducida (*ἄγω*), todo ello declarado en un tiempo verbal de aoristo indicativo (*ἀγαγεῖν*), muy utilizado para contar historias y para resaltar un proceso que tiene lugar de una manera ininterrumpida y continua.

La función f está bien definida si involucra que no existe ninguna interrupción o brecha, que la haga discontinua y carente de imagen en dicho punto. Los griegos seleccionaron un tiempo verbal apropiado, el aoristo, para la conducción del trazado de la línea desde un punto a otro, si se tiene en cuenta que la línea (*γραμμή*) no debe de presentar fracturas en los puntos que la constituyen, dado que la haría tener brechas, y la función que la traza sería discontinua. El papel del operador vendría a ser asumido por el verbo *ágo* (*ἄγω*): f (*ἄγω*), o sea f (*ἄ*). Lo interesante es que el verbo *sēmaínō* (*σημαίνω*) indica una dirección; es decir, la noción de punto (*σημεῖον*) presupone el componente vectorial del mismo pues indica, señala o declara, involucra un señalamiento que posee una dirección. Se afirma que se está en presencia de dos funciones de distinta naturaleza, donde el trazado de una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) indica una composición de funciones: f'of, $f'(f(\sigma))$; y donde el verbo (*σημαίνω*) está simbolizado en razón de la función $f'(\sigma')$: f'of: $X \rightarrow Z$, y donde el codominio que está indicado por la Y es tan pequeño, dado que al ser continua la línea, la imagen de la función es mínina en casi todo su recorrido, casi inexistente en cuanto no hay brecha o ruptura en el espacio. Esta proposición comienza con el verbo (*αἰτέω*), que también indica una acusación, causa, motivo, un fundamento (*αἰτία*); un autor, motivador y responsable (*αἴτιος*) que cuida esta acción. Este hecho relaciona el comienzo (*Ἠιτήσθω, αἰτέω*) con el final (*ἀγαγεῖν, ἄγω*), que nos trae a la escena aquel transportador (*ἀγαωγεύς*) que lleva la carga (*ἀγαώγιον*). Tal conductor (*ἀγωγός*) no es más que la función f, que en este contexto sugiere una modificación a como se la ha entendido, ya que propiamente la función del verbo trazar (*σημαίνω*) es muy distinta a aquella en relación con verbo conducir (*ἄγω*); la primera está presente tan solo en cada momento donde existe un punto, transmite y conserva la dirección con el punto que sigue a lo largo de todo el intervalo; mientras la segunda, está presente de una manera extendida a lo largo de todo el intervalo. Pero, la función que supervisa en cuanto no sea discontinua, es la que la conduce (*ἄγω*), que es la que verifica que cumpla con la condición de continuidad.

Si se fuera a simbolizar este axioma dentro del cálculo de predicados, tenemos dos verbos que subyacen a la acción que se está dando: dibujar, trazar (*σημαίνω*) y conducir o guiar (*ἄγω*), los cuales los tomaremos como los predicados. Los términos están dados por el punto (*σημεῖον*) y la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), dado que el punto está tanto en el inicio como al final se ha de mencionar dos veces, mientras la línea recta va apareciendo. Igualmente, tenemos una cuantificación universal dada por la presencia del determinante (*πᾶς*), lo que remite a que: para todo punto, se traza una línea recta desde un punto al otro punto guiándola $(\forall\sigma,\gamma)\ (\Sigma_{\sigma\gamma} \rightarrow \text{Ἄ}_{\sigma\gamma})$. La presencia de la cuantificación universal es una invitación a reescribir este axioma dentro del cálculo proposicional, en especial, la mención de la noción de función proposicional: $(\forall\sigma, \gamma)\ \Sigma\ (\sigma, \gamma) \rightarrow \text{Ἄ}\ (\sigma, \gamma)$, donde Σ y Ἄ representan dos funciones proposicionales, en cuanto pueden trazar y conducir unas líneas (*γραμμή*), ya sea rectas o curvas u otras. En este caso, la propiedad o facultad que sean rectas determina una función f, como aquella transformación que de manera constante y reiterativa está verificando que se cumpla la propiedad de rectitud (*εὐθύτης*), lo que exige una constante y continua verificación en todo el trayecto, $f(\sigma/\text{ἄ})$: $\sigma_a \rightarrow \sigma_b$, partimos desde un punto en el dominio a un punto en el codominio. La acción involucra trazar (*σημαίνω*) y, de manera simultánea, conducir (*ἄγω*); se trata de una múltiple tarea que se da tan solo por el concurso de ambas. En este caso, tanto en el dominio como el codominio se necesita que la función sea continua, lo que involucra que se está verificando en cada momento de su recorrido para que no sea discontinua en el intervalo.

2. *Un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente en una línea recta* (*To produce a finite straight line continuously in a straight line. καί πεπερασμένην εὐθεῖαν κατά τό συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν*).

La proposición sigue manifestando una continuidad en los argumentos que caracterizan lo que es una línea recta (*εὐθεῖαν γραμμή*), y (*καί*) aquello que llega a un final cumpliéndose (*πεπερασμένην*) como recta (*εὐθεῖαν*) a lo largo (*κατά*) de lo (*τό*) ininterrumpido (*συνεχές*) sobre (*ἐπί*) lo recto (*εὐθείας*) que fluye (*ἐκβαλεῖν*). Aquí se afronta la problemática del final (*πέρας*), aquel que está más allá (*πέρα*), porque siempre uno se plantea cómo terminar, finalizar, concluir y atravesar (*περαίνω*) ya que es lo que está al otro lado (*πέραν*), como opuesto y enfrentado. Es el dilema mismo de la existencia de lo recto (*εὐθύς*), que se prolonga en frente de uno, siempre señalando una situación de oposición, como el lado opuesto (*πέρατος*). Se argumenta que se está frente a una posible definición de lo que es recto, en cuanto línea, en cuanto contexto: como lo que se nos sitúa al frente, tanto para detenernos tanto para enfrentarnos con el dilema propio de aquel paso que debe de ser transitado a fin de ser completado (*πέρασις*). La normativa que parece acompañar lo recto se contextualiza como algo situado al lado de allá (*περαῖος*), aquella región que está al frente, que hay que pasar, atravesar y cruzar (*περαιόω*). De una u otra manera, siempre surge la cuestión: de cómo remontar la misma imposibilidad, aquello que hay concluir pero enfrentados con nosotros mismos. Es como si lo que está siempre en frente se convierte en una meta imperiosa y, al mismo tiempo, la regla que fundamenta un proceder no negociable, dado que alrededor del mismo se cimenta la existencia. Esta reflexión está motivada por la presencia del vocablo *sinejés* (*συνεχές*): constante, ininterrumpido, en serie, continuo, del que procede (*συνεχή*): la continuidad, la unión, el encuentro; aquello que hay que tener unido, sostenido, mantenido, conservado, guardado, reunido (*συνέχω*). Siendo la preposición que conecta la condición misma de lo recto (*εὐθύς*) con lo continuo (*συνεχές*), *katá* (*κατά*): abajo, a través, hacia abajo; pendiente, inclinado; contra, sobre, en. Se plantea el problema de lo que sigue, lo que no está garantizado y que termina siendo mencionado: como lo que está abajo, sobre.

La línea (*γραμμή*) que cumple con la condición de rectificarse a sí misma (*εὐθύνω*), es la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), que requiere una superficie (*ἐπιφάνεια*) sobre la cual se asiente a fin de no quedar suspendida en el vacío (*κενός*). De igual manera, la noción de continuidad (*συνεχή*) es propia y afín a la línea recta (*εὐθεῖαν γραμμή*): aspecto reforzado por el hecho de nombrar dos veces lo recto (*εὐθύς*), la primera en su forma acusativa (*εὐθεῖαν*) y, en el segundo caso, en su forma genitiva (*εὐθείας*): se acusa el objeto directo (*εὐθεῖαν*) de un verbo transitivo en su forma aorista infinitiva (*ἐκβαλεῖν*), donde el caso genitivo (*εὐθείας*) indica una forma sustantivada que está siendo modificada por otro sustantivo, lo recto enfrentado a su propia condición de rectitud. El verbo que acompaña todo este drama semántico-sintáctico no es otro que (*ἐκβάλλω*), que es la unión de la preposición como (*ἐκ-*): fuera, de, desde (*ἐκ-*)., y el verbo (*βάλλω*): echar, tirar, lanzar, arrojar, caer, golpear y derribar lo recto (*εὐθύς*) que está sujeto al dilema de asegurar su continuidad (*συνέχεια*). Esta proposición manifiesta el juego entre dos verbos que inciden sobre lo recto (*εὐθύς*): (*περαιόω*) + (*εὐθεῖαν*) y (*ἐκβάλλω*) + (*εὐθείας*), los cuales buscan responder dos urgencias teóricas: cómo llevar a un final lo recto y cómo halar lo recto a fin de tenerlo unido (*συνέχω*), evitando de esta manera su descontinuidad y asegurando su continuidad (*συνεχή*) ininterrumpida (*συνεχῶς*). Con lo cual, el problema que subyace, es cómo extender o continuar (*συνέχω*) una línea recta (*εὐθεῖαν γραμμή*) hacia delante. El que sea llamado segmento de línea u otro vocablo, remite al problema de prolongar la línea recta y cómo tal hecho convoca al problema del continuo que subyace en esta misma fundamentación. Se recuerda que el definir al número alrededor de una línea recta no agota ni es el contexto conceptual que fundamenta al número como ente aritmético; es algo más dado por conveniencia frente a una modelación geométrica.

Un tema que está en el fondo proviene del prefijo que subyace a la preposición (*ἐκ-*) en relación al verbo (*βάλλω*) en *ekbállō* (*ἐκβάλλω*): se sugiere que es la noción de función, como aquella transformación que permite conectar y unir, y de esta manera resolver una situación paradojal planteada por la incertidumbre frente a lo que sigue y no está asegurado. Hay rememoranza de la noción de función trabajada en Frege[392], por cuanto planteó la pareja función-argumento en remplazo de la de predicado-sujeto. El operador debe de

[392] Tema tratado e introducido por Gottlob Frege en el prólogo de *Begriffschrift*, en el que se manifiesta que este remplazo va a ayudar a la formación de conceptos y a la demostración de la conexión con los significados de las palabras si, no, existe, todo, alguno. Se introduce del signo de $\vdash$, conformado por la noción de juicio o la línea recta y la de contenido del mismo como la línea horizontal (pag. 11).

garantizar la inconmensurabilidad de posibles argumentos, o de segmentos de línea que se deben ir agregando para garantizar la continuidad de una línea. Tal tema está considerado en un caso que se podría denominar microcósmico en las denominadas cortaduras de Dedekind donde, una vez se establecida la noción de más grande (*μεῖζον*, *μέγας*), que es una de las nociones fundamentales en la construcción del conjunto de los números reales, se sigue con la estrategia de una línea recta (*εὐθεῖαν γραμμή*) constituida por puntos (*σημεῖον*) bajo los cuales se busca representar los números racionales. Se plantea aquí el tema de la continuidad (*συνεχή*) de la línea, en especial, frente a la existencia de brechas que marcan una discontinuidad o incompletez. Esta problemática surge a partir de tomar en la cuenta los puntos límite de los segmentos de línea y agruparlos en dos clases, bajo la concepción de más grande (*μέγας*) como garante del concepto de diferencia[393].

A nivel de un cálculo de predicados, este axioma podría ser simbolizado como sigue; se tienen los verbos sobre los que se va a efectuar la labor predicativa o lo que según Frege asumen la tarea de ser función: conducir a un final, realizar, atravesar (*περαίνω*), sostener y mantener junto (*συνέχω*) y arrojar fuera, caer, derramar (*ἐκβάλλω*). A su vez, los términos que en el contexto de Frege equivalen a los argumentos, es tan solo la recta (*εὐθύς*), como línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). La preocupación y el motivo principal de esta proposición está en cómo hacer que lo recto (*εὐθύς*) pueda conducirse hacia delante, en especial, en aquellos interludios donde la recta parece no completarse a si misma. Por tal motivo, la preposición que se utiliza es *katá* (*κατά*), que es abajo, a través, sobre y enteramente. Tal hecho asegura mantener (*συνέχω*) juntos los segmentos de recta, las unidades fundamentales o puntos, que constituyen una línea sin que se pierda su continuidad (*συνέχεια*). Es decir, el motivo principal de esta proposición es evitar la discontinuidad en una línea recta, asegurar que siga siendo continua o sea sin interrupción (*συνεχῶς*). Tal tarea la asegura la acción de verbo *synécho* (*συνέχω*): que es la unión de la preposición *sín* (*σύν*) que es con, al lado de, con la ayuda de, bajo la dirección de; y el verbo ékhō (*ἔχω*) que es tener, poseer, mantener, tener los medios para llevar a cabo. De manera que la preposición *sín* (*σύν*) tiene por tarea mantener y conservar una secuencia

[393] Richard Dedekind introduce la noción de cortadura en su libro: *Theory of Numbers*, Capítulo 1, *Continuity and Irrational numbers*.

unida y el verbo *ékhō* (*ἔχω*) que procura los medios para que eso se pueda realizar y mantener de manera estable. A su vez, esto se tiene que dar sobre (*ἐπί*) una recta (*εὐθύς*) bajo la actividad del verbo *ekbállō* (*ἐκβάλλω*), echar fuera, derramar, desterrar. Este verbo, también está constituido por la preposición como prefijo (*ἐκ*-), la cual resalta aquella actividad de algo desde, fuera hacia un lugar partiendo de hacia; y el verbo *bállō* (*βάλλω*), que es echar, tirar, lanzar, arrojar. Todo esto enfatiza el gran esfuerzo en hacer que la línea recta siga manteniendo su curso de manera completa, sin interrupciones, contante, continua e ininterrumpida (*συνεχές*). También se puede plantear que la conectiva que sirve es la de la implicación, que puede ser simbolizada con las estas características: y (*καί*) [(*περαίνω*; *εὐθύς*) → (*συνέχω*; *εὐθύς*)] → (*ἐκβάλλω*; *εὐθύς*), lo que nos conduce a: $\wedge$ [($\Pi_\varepsilon \rightarrow \Sigma_\varepsilon$) $\rightarrow$ Ἐ$_\varepsilon$]. En esta simbolización, se resalta la tarea de mantener unida una línea (*γραμμή*) como recta (*εὐθύς*) a nivel continuo (*συνεχές*), sin interrupciones ni rupturas. El problema de la continuidad (*συνέχεια*) es planteado en este contexto, más en relación con la línea y lo que la constituye que son los puntos (*σημεῖον*). Esta estrategia teórico conceptual que se seguirá manteniendo hacia delante, en identificar la relación del punto a nivel de una relación de correspondencia 1 a 1 con un valor numérico. Esta posición fue asumida por Georg Cantor en la construcción de su teoría de los números transfinitos. En todo este contexto subyace la problemática de aquello que ha de ser completado (*πέρασις*) más allá (*πέρα*), para lo cual hay que pasar, atravesar y cruzar (*περαιόω*) lo insondable: lo ilimitado e infinito, el *ápeiros* (*ἄπειρος*). Se plantea así el problema de hacer que un punto (*σημεῖον*) o una línea (*γραμμή*) sea continua (*συνεχές*), en este caso, siempre y cuando se cumpla la condición de ser recta (*εὐθύς*), o de ser capaz de rectificarse y enderezarse (*εὐθύνω*) a sí misma. Una vez más, surge el problema de si el punto posee una dirección a nivel vectorial. Este tema fue tratado a nivel de las partículas elementales, dado que se podría asemejar el punto a una partícula que posee una dirección y una rotación. Esta está dada por el espín que es el momento angular que va unido a su rotación.

> 3. *Dado un segmento de línea recta, puede dibujarse un círculo con cualquier centro y distancia (To describe a circle with any centre and distance. καί παντί κέντρῳ καί διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.*)

En esta nueva proposición o axioma se tiene: y (*καί*) todo (*παντί*) centro de un círculo (*κέντρῳ*) y (*καί*) el intervalo (*διαστήματι*) circular (*κέντρῳ*) dibujado (*γράφεσθαι*). Estamos frente a una proposición que es una continuación de la anterior; esta vez comienza con una cuantificación universal en la cual afirma que todo (*πᾶς*) centro (*κέντρον*) de un círculo (*κύκλος*), y (*καί*) el intervalo (*διάστημα*) del círculo (*κύκλος*) dibujado (*γράφω*). Aunque podríamos pensar que está algo inconclusa, es como si el sujeto de la anterior, la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) faltara o se la estuviera calificando. La proposición conlleva unas declinaciones en dativo, que indican la presencia de un objeto indirecto y una acción verbal intransitiva, algo que se está dando (*δοτική πτῶσις*). En este caso, es posible dibujar (*γράφω*) una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) desde cualquier lugar de un círculo (*κύκλος*) hacia el centro del mismo (*κέντρον*). A su vez, la segunda proposición continúa manifestando: y (*καί*) se puede dibujar (*γράφω*) un intervalo (*διάστημα*) circular (*κύκλος*). Este axioma se puede prestar a otra interpretación que consiste en que se pueden dibujar (*γράφω*) otros círculos (*κύκλος*) en medio de estos espacios o intervalos (*διάστημα*); es decir, diversos círculos concéntricos con un mismo centro (*κέντρον*), y ello se formula como: se puede dibujar (*γράφω*) cualquier círculo (*πᾶς*) situado en el intervalo (*διάστημα*) entre el círculo (*κύκλος*) y su centro (*κέντρον*).

El tema de fondo de esta proposición es la introducción de la esfera (*κύκλος*) en relación con la línea (*γραμμή*), en este caso aquella que cumple con la condición de ser recta (*εὐθύς*) o sea una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). Su propósito es poder introducir la noción de un punto (*σημεῖον*) que sea equidistante o esté en el centro del círculo (*κύκλος*). Este hecho permite plantear la noción de unos intervalos (*διάστημα*) que están a lo largo de una línea (*γραμμή*) y que están en medio (*διά*), hecho que evoca al dos (*δύο*), y este intervalo se da dos veces (*δίς*). Su finalidad es servir como uno de los métodos más seguros para construir un patrón de medida igual en concordancia al diámetro del círculo y poderlo dividir en dos segmentos de recta exactamente iguales. Este hecho permite, adicionalmente, picar y aguijonear (*κεντέω*) la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) dibujando (*γράφω*) otros puntos (*σημεῖον*) que sirvan de parámetro de medida. En esta argumentación subyace la noción de envolvente (*κύκλωσις*), como aquel símbolo o dibujo (*γραφή*) que permite identificar al intervalo (*διάστημα*), en este caso, un intervalo de segmento de recta. De manera análoga, se puede replantear un nuevo ente geométrico como el círculo (*κύκλος*), y poderle asociar las nociones previas de línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) y la de punto (*σημεῖον*) bajo un nuevo nivel de argumentación teórica. Es importante señalar la introducción del movimiento que antes no estaba tan explícito, sea del verbo pinchar o aguijonear (*κεντέω*), sea del verbo hacer girar o dar vueltas o rodear (*κυκλόω*). También, tenemos el verbo acarrear, transportar, mover en círculos, girar, rodear (*κυκλέω*), y del adverbio (*κυκλόθεν*) que evoca un uso universal al significar en todas partes y en derredor.

Al simbolizar el actual axioma en el cálculo de predicados, se tendría que los predicados vendrían a ser la acción misma de aguijonear *kentéō* (*κεντέω*) propiamente una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), y dibujar o trazar *gráphō* (*γράφω*) un círculo (*κύκλος*). Es de entenderse, que una línea está constituida por puntos (*σημεῖον*), lo que indica que entre los variados significados de (*κέντρον*), está el de fungir como el punto o centro de un círculo. Si se menciona a dicho punto central *kéntron* (*κέντρον*) se está aludiendo a trazo o dibujo de un círculo (*κύκλος*). Este axioma resalta la presencia de una cuantificación universal que se halla en el vocablo denotativo todo (*πᾶς*), y la presencia de la noción espacial de intervalo *diástima* (*διάστημα*), el cual está conformado por dos vocablos, el primero, la preposición (*διά*) que involucra algo en medio, entre, a lo largo; y el sustantivo *stima* (*στημα*) que significa sistema. Con lo cual se está afirmando que es posible trazar o dibujar (*γράφω*) toda una pluralidad de diversos círculos (*κύκλος*) que están situados en medio del espacio de un intervalo (*διάστημα*). Esta es una manera de definir la noción de afinamiento de un intervalo, y una consecuencia que se desprende del anterior axioma es que habría incontables círculos o continuos (*συνεχές*) que tienen por centro (*κέντρον*) esa línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) y alrededor de la cual se dibujan o trazan (*γράφω*). La presencia de dos conjunciones, y (*καί*) indica que se tienen dos proposiciones: la primera tiene por predicado el verbo *kentéō* (*κεντέω*), y por términos el punto (*κέντρον*) de un círculo (*κύκλος*) que involucra una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). La segunda, tiene por verbo *gráphō* (*γράφω*), que además de significar dibujar, trazar, también significa rasguñar y cortar. Este hecho se complementa muy bien con la noción de intervalo (*διάστημα*), en especial, el significado de cortar algo es muy afín a algo que está en medio, ese sistema que está en medio y que siempre permite dibujar (*γράφω*) cuantos círculos (*κύκλος*) se quiera. La presencia del cuantificador universal, todo (*πᾶς*), es una sugerencia de que no hay limitación para trazar unos cuantos círculos, sino todos los que se quiera; es una manera adicional para afirmar la continuidad (*συνεχή*) de los puntos (*σημεῖον*) tomados como puntos que son el centro de unos círculos (*κέντρον*).

La simbolización de este axioma sería: y, ∧ (*καί*) todo (*πᾶς*, ∀), aguijonear K (*κεντέω*) una línea recta ε (*εὐθεῖα γραμμή*) nos da unos puntos (*σημεῖον*) que como centro κ (*κέντρον*) de un círculo κ' (*κύκλος*); y (*καί*), dibujar y cortar Γ (*γράφω*) unos intervalos δ (*διάστημα*), que pueden ser considerados unos segmentos de recta. No obstante, el verbo dibujar también está presente en la primera proposición atómica dado que completa su significado y lo hace entendible, de lo contrario, nos faltaría su propósito. Tenemos: $\wedge\ (\forall \varepsilon, \kappa, \delta, \kappa')\ (K_{\varepsilon\kappa} \wedge \Gamma_{\delta\kappa'})$.

> *4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí* (*That all right angles are equal to one another. καί πάσας τάς ὀρθάς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι*).

Esta proposición se mantiene unida a las anteriores por medio de la conectiva binaria de la conjunción (∧, *καί*), todos (*πάσας*) los (*τάς*) ángulos (*γωνίας*) rectos (*ὀρθάς*) son (*εἶναι*) iguales (*ἴσας*) los unos con los otros (*ἀλλήλαις*). Se destaca la introducción del ángulo recto (*ὀρθάς γωνίας*), vocablo conformado por el sustantivo femenino ángulo (*γωνία*) y el adjetivo femenino en plural recto (*ὀρθάς*): los ángulos derechos (*ὀρθός*) cumplen con la propiedad de ser iguales (*ἴσος*), esa facultad de igualar (*ἰσάζω*) en doble dirección (*ἀλλήλων*), el uno con el otro, esta vez en plural femenino dativo (*ἀλλήλαις*). No se explica por qué este hecho se encuentra más argumentado en el libro 1. 1 de *Los Elementos*, así como en muchos otros lugares de esta magna obra se repiten conceptos y nociones. No obstante, se puede pensar que se están introduciendo o nombrando las nociones fundamentales o primitivas de la geometría, como: el punto (*σημεῖον*), la línea (*γραμμή*) y el círculo (*κύκλος*). Existen unas nociones que utilizan varios conceptos, como es la del ángulo (*γωνία*) y la del centro del círculo (*κέντρον*). Asimismo, las propiedades de lo recto a nivel lineal (*εὐθύς*), lo recto a nivel del ángulo (*ὀρθός*), la igualdad o equivalencia (*ἴσος*), lo uno hacia lo otro en doble dirección (*ἀλλήλων*); y los respectivos verbos que pueden ser tomados como los predicados a nivel de un cálculo de predicados: mostrar (*σημαίνω*), dibujar (*γράφω*), rodear (*κυκλόω*), situar un ángulo (*γωνιάζω*), aguijonear (*κυκλόω*). De igual manera, la presencia de la cuantificación universal en todo (*πᾶς*), la conectiva de la 'y' (*καί*), en relación a un ente en general abstracto y universal como es el elemento (*στοῖχος*).

La simbolización en el cálculo de predicados de este axioma estaría dada por los verbos que asumen la función de predicados, a saber: ser y existir (*εἰμί*); asimismo, el verbo igualar (*ἰσάζω*). El hecho de escoger dos verbos viene sugerido por el uso del pronombre *allḗlōn* (*ἀλλήλων*), que significa recíproco, mutuo, el uno hacia el otro; indica, en cuestión, una acción emprendida en dos direcciones. Los términos serían: ángulo *gōnía* (*γωνία*) recto (*ὀρθός*), el término *ísos* (*ἴσος*) equivale al adjetivo igual, equivalente, similar y se emplea a fin de indicar que se está en presencia de varios términos iguales que han de ser repetidos en la proposición simbolizada: y (*καί*) todo (*πᾶς*), igualar Ἰ (*ἰσάζω*) y es, existe y sucede Σ (*εἰμί*). Los términos son: ángulo γ (*γωνία*), recto ὀ (*ὀρθός*). De igual manera, tenemos un cuantificador universal ∀ *pâs* (*πᾶς*), una implicación bicondicional ↔, y una conjunción ∧. Esto se podría simbolizar como: ∧ (∀γ, ὀ) (Ἰ$_{γὀ}$ ↔ Σ$_{γὀ}$ → γὀ$_1$ = γὀ$_2$ =…= γὀ$_n$). En este contexto, se toman dos términos: ángulo (*γωνία*) y recto (*ὀρθός*), a fin de indicar una doble predicación sobre un mismo término, debido a que primero seleccionamos algo que sea un ángulo y luego volvemos a tomar en cuenta aquel que cumple con la condición de ser recto. Se efectúa una doble operación de predicación, por tal motivo, se escogen dos términos en vez de uno a fin de darle mayor movilidad y rango a la proposición.

4. El famoso postulado de las paralelas: *Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos* (*That, if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely*[394]*, meet on that side on which are the angles less than*

394 Cabe destacar que este tipo de vocablo "indefinidamente", traducción de *ἄπειρον*, debería ser incluido en una teoría de la denotación a nivel lógico-matemático, dado que invita a impresiciones sobre las que no se puede decir ni aseverar nada. En la obra de Bertrand Russell (1903), *The Principles of Mathematics*, se resalta la importancia de ciertas palabras para denotar y de esta manera asegurar una buena relación lógica entre los términos y los conceptos. Russell manifiesta que esta teoría de la denotación está en el fondo de todas las

the two right angles. καί ἐάν εiς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς ἐντός, καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τάς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες).

El presente axioma reza: y (*καί*) sí (*ἐάν*) dejáramos dentro una (*εἰς*, *εἷς*) de dos (*δύο*) rectas (*εὐθεῖας*) derechas (*εὐθεῖα*) cayeran en (*ἐμπίπτουσα*) ellas (*τάς*) en el interior (*ἐντός*), y (*καί*) nos procuramos (*ποιῇ*) sobre (*ἐπί*) las (*τά*) mismas (*αὐτά*) partes (*μέρη*) dos (*δύο*) ángulos (*γωνίας*) rectos (*ὀρθῶν*) más pequeños (*ἐλάσσονας*), dejamos caer (*ἐκβαλλομένας*) las (*τάς*) dos (*δύο*) rectas (*εὐθεῖας*) precipitándose (*συμπίπτειν*) sobre (*ἐπί*) lo ilimitado (*ἄπειρον*), sobre (*ἐφ'*) estas (*ἃ*) partes (*μέρη*) que son (*εἰσίν*) estas (*αἱ*) las (*τῶν*) dos (*δύο*) rectas (*ὀρθῶν*) más pequeñas (*ἐλάσσονες*). Se puede apreciar cómo, si una (*εἷς*) recta (*εὐθύς*) cae sobre (*ἐμπίτνω*, o *ἐμπίπτω*) dos (*δύο*) líneas rectas (*εὐθεῖα γραμμή*) que están (*εἰμί*) en el interior o en la mitad (*τάς ἐντός*), hay una forma alusiva que recrea una imagen bien particular de una línea recta cortando dos líneas rectas, crea (*ποιέω*) dos (*δύο*) ángulos rectos (*ὀρθός*) iguales (*ὀρθός*). Estos son ortogonales entre sí; además, se cumple con la propiedad que han de ser más pequeños (*ἐλάσσονας*). Esa condición indica que cada ángulo (*γωνία*) recto (90) es menor al ángulo recto que tiene una recta (180). Un tema que surge en todo este panorama, es la noción de continuidad en la línea (*γραμμή*) previa condición de ser recta (*εὐθύς*). Da la impresión que el verbo *empítno* (*ἐμπίτνω*) que es caer, precipitarse, lanzar, suceder; asimismo los verbos *ekbállō* (*ἐκβάλλω*) que es arrojar, echar fuera, derramar, lanzar, dejar caer, expulsar; y *simpítno* (*συμπίτνω*) que es caer, caer sobre, precipitarse juntamente, chocar contra, caer en, encontrarse, reunirse, sobrevenir al mismo tiempo, suceder, derrumbarse, ponerse de acuerdo; son los verbos que califican a este importante y trascendental axioma, del cual surgieron las denominadas geometrías no euclidianas cuando se demostró que no se cumple cuando se toma una línea que no es recta sino curva. Igualmente, se puede identificar una actividad proposicional que va acompañada de una acción predicativa; son cuatro las proposiciones simbolizables en el cálculo de predicados que soportan la aseveración del presente axioma y su veracidad lógica, a saber:

---

teorías acerca de la substancia, de la lógica sujeto-predicado, y de la oposición entre las ideas y las cosas, asimismo en el pensamiento discursivo y la percepción inmediata (pág.53).

P_1: *καί ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς ἐντός,*

P_2: *καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ,*

P_3: *ἐκβαλλομένας τάς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν,*

P_4: *ἐφ' ἃ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.*

Simbolizables como: $\wedge [(P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_3) \rightarrow P_4]$, la presencia de la conectiva binaria al inicio de la proposición P_1 indica varias cosas, una de ellas es que este axioma está unido a los demás y que no puede ser leído ni interpretado desvinculado de los demás axiomas previos. La otra situación es que, tanto P_1 como P_2 constituyen una unidad interpretativa común y conforman uno solo apreciable como una proposición molecular unida por la conectiva binaria de la conjunción (∧). ¿Cuáles son los predicados que definen a los términos de esta proposición? O sea que la delimitan, especifican, clasifican y explican (*dēfīniō*). En la primera están los verbos *empítno* (*ἐμπίτνω*) que es caer, precipitarse y lanzar, suceder; y *ekbállō* (*ἐκβάλλω*) que es arrojar, echar fuera, lanzar, dejar caer y expulsar, los cuales son sinónimos, pero su diferencia radica en que el segundo verbo se forma a partir de la preposición *ek* (*ἐκ*) que es fuera, más allá, desde y el verbo *bállo* (*βάλλω*): arrojar, dejar caer, lanzar, golpear. De manera que la acción del segundo es más fuerte dado que involucra un impulso que la toma en su totalidad para lanzarla o impulsarla. Los términos de la primera son: una línea recta (*εἰς-εἶς εὐθείας εὐθεῖα*) y dos líneas rectas (*δύο εὐθείας εὐθεῖα*), las cuales están declinadas en genitivo, en donde un sustantivo modifica otro sustantivo bajo la relación de poseer ciertos atributos, aquellos propios de una línea (*γραμμή*) que es recta (*εὐθύς*), lo recto como recto (*εὐθείας εὐθεῖα*). Se nota en la proposición primera una línea recta que cae (*ἐμπίτνω*) en el interior (*ἐντός*) de dos líneas rectas. Se simbolizará los términos: una línea recta como εε, y dos líneas rectas como δε; a su vez, el si condicional (*ἐάν*) situado al inicio indica que se trata de una implicación, lo que hace que la P_1 está constituida a su vez por dos proposiciones atómicas conectadas por la conectiva de la implicación (→). Lo anterior conduce a que P_1 es $P_{1a} \rightarrow P_{1b}$, donde su predicación está realizada por el mismo verbo *empítno* (*ἐμπίτνω*), lo que remite a la siguiente expresión: $Ἐ_{εε} \rightarrow Ἐ_{εδ}$.

La segunda proposición P_2 está determinada por el verbo *ekbállō* (*ἐκβάλλω*) y acompañada por el verbo *poiéō* (*ποιέω*), los cuales asumen el papel de las funciones y sus términos que son sus argumentos son los ángulos (*γωνία*) que son rectos (*ὀρθός*) o sea (*γωνίας ὀρθῶν*) y a su vez son dos (*γωνίας δύο ὀρθῶν,*). Algo a resaltar es que son los mismos (*αὐτός*) ángulos en la igualdad de partes (*μέρος*); mismas partes (*αὐτά μέρη*) que en acusativo señalan la afección de un verbo transitivo sobre un objeto directo que comparte las características de la predicación. Esta proposición involucra, además, una acción que ya está sugerida por la preposición *epí* (*ἐπί*) y la acción del verbo *poiéo* (*ποιέω*) que es hacer. Lo que indica que la acción de hacer (*ποιέω*) antecede a la acción arrojar fuera (*ἐκβάλλω*), lo exige que los dos predicados se simbolicen por las letras mayúsculas Π y Ἐ. Dado a que la simbolización para *empítno* (*ἐμπίτνω*) se puede confundir con la de *ekbállō* (*ἐκβάλλω*), debido a misma letra Ἐ tomada como predicado, se ha escogido para esta última la letra Ẽ para diferenciar las dos acciones predicativas. De igual manera, los términos serán 'los mismos ángulos' (*μέρη γωνίας*) en relación al primer predicado Π de (*ποιέω*) y dos ángulos ortogonales (*δύο ὀρθῶν*) para el segundo predicado Ἐ de (*ἐκβάλλω*), la conectiva será la implicación material, lo que permite simbolizar todo el conjunto como: $\Pi_{\mu\gamma} \rightarrow \tilde{E}_{\delta ὀ}$. Se entiende en el contexto que los ángulos rectos (*γωνίας ὀρθῶν*) poseen 90 grados, que son más pequeños (*ἐλάσσονας*, en relación con *ἐλάσσων*, comparativo de *ἐλαχύς*) que una línea recta, que es la unión de dos rectos o sea 180 grados. Tal explicación se entiende que subyace a la simbolización y no debe ser tarea de una simbolización explicar lo que de entrada deben de comprender los que la utilicen. En la proposición primera P_1, queda asentado que estamos frente a dos líneas rectas sobre las que cae una; en la segunda, queda establecido que estas dos rectas están unidas por dos unos ángulos ortogonales, que vienen dados por otras dos rectas que están colocadas verticalmente o sea en ortogonalidad. Este hecho da a entender, que estamos frente a dos líneas que están situadas de manera paralela la una respecto a la otra. Lo que debe ser entendido o deducido de la simbolización aunque haya sido expresado de otra manera, se ha de comprender que equivale a lo mismo: dos líneas rectas tales que entre ellas se den dos ángulos ortogonales, quiere decir que son paralelas entre sí. En consecuencia, la proposición molecular planteada como $\wedge (P_1 \wedge P_2)$ se transforma en: $\wedge [(\text{Ἐ}_{\varepsilon\varepsilon} \rightarrow \text{Ἐ}_{\varepsilon\delta}) \rightarrow (\Pi_{\mu\gamma} \rightarrow \tilde{\text{Ε}}_{\delta\text{ὀ}})]$.

Se analiza ahora la tercera proposición P_3 constituida por los verbos *ekbállō* (*ἐκβάλλω*) que es arrojar fuera, y *simpítno* (*συμπίτνω*) que es caer sobre o precipitarse juntamente. Los términos del primer predicado son dos rectas (*δύο εὐθείας*) y los del segundo predicado es sobre lo que no tiene límite (*ἐπ᾽ ἄπειρον*). Da la impresión que el volver a repetir el verbo *ekbállō* (*ἐκβάλλω*) en este contexto de las dos rectas planteadas en la primera proposición P_1, es una indicación de la continuación de las líneas hacia delante, de extenderlas hacia delante hasta una posición carente de límite (*ἄπειρος*). Los predicados estarán dados por los verbos *ekbállō* (*ἐκβάλλω*) y *simpítno* (*συμπίτνω*): Ἐ y Σ, que expresado en palabras quieren decir: algo que es arrojado hacia delante para precipitarse en lo carente de límite. Los términos serán: dos rectas (*δύο εὐθείας*) y sobre lo carente de límite (*ἐπ᾽ ἄπειρον*). Dado que se está planteando una acción dinámica, tal hecho se representa de manera apropiada por la implicación, todo esto simbolizado a nivel del cálculo de predicados daría: $\text{Ἐ}_{\delta\varepsilon} \rightarrow \Sigma_{\text{ἐἄ}}$. Es conveniente entender, aunque sea algo evidente, que Euclides en este contexto aborda el tema de lo carente de límite o el infinito (*ἄπειρος*) desde dos líneas rectas paralelas entre sí y que se halan o prolongan hacia delante: no es el infinito filosófico sino el infinito en el sentido aritmético-geométrico lo que hace que la simbolización inicial de: $\wedge (P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_3)$ se transforme en $\wedge [(\text{Ἐ}_{\varepsilon\varepsilon} \rightarrow \text{Ἐ}_{\varepsilon\delta}) \rightarrow (\Pi_{\mu\gamma} \rightarrow \tilde{\text{Ε}}_{\delta\text{ὀ}})] \rightarrow (\text{Ἐ}_{\delta\varepsilon} \rightarrow \Sigma_{\text{ἐἄ}})$.

Ahora se analiza la cuarta proposición: *ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες*, que parece ser una repetición de la segunda: *καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ*; tienen en común *δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες* y *δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας*, los dos ángulos rectos ortogonales más pequeños que las dos rectas que se mueven paralelamente entre ellos. Lo significativo es una reconfirmación que en dicha prolongación hacia delante, hacia lo carente de todo límite o ilimitado o infinito (*ἄπειρος*), se sigue conservando la propiedad de la ortogonalidad: nunca se van a volver a encontrar las dos rectas de nuevo, su condición de paralelismo se mantendrá a perpetuidad o inmodificable hacia delante. Los predicados de esta cuarta proposición son: es (*εἰσίν*) del verbo ser y existir (*εἰμί*), simbolizado por Ẹ; y el verbo mantener derecho o enderezar (*ὀρθόω*), simbolizado por Ὀ. Los términos serán ‘sobre las mismas partes’ (*ἐφ’ ἃ μέρη*) y ‘dos ángulos ortogonales’ (*δύο ὀρθῶν*), en esta última omitimos son más pequeños (*ἐλάσσονες*), dado que es una consecuencia de su misma condición de ortogonalidad respecto a la medición frente a la misma línea recta. Simbolizándolas quedarían como: $\text{Ẹ}_{\mu} \rightarrow \text{Ὀ}_{\text{δὀ}}$. Lo que transforma nuestra expresión de: $\wedge [(P_1 \wedge P_2 \rightarrow P_3) \rightarrow P_4]$ a $\wedge [([(\text{Ἑ}_{\varepsilon\varepsilon} \rightarrow \text{Ἐ}_{\varepsilon\delta}) \rightarrow (\Pi_{\mu\gamma} \rightarrow \tilde{\text{E}}_{\text{δὀ}})] \rightarrow (\text{Ἐ}_{\delta\varepsilon} \rightarrow \Sigma_{\text{ἐἄ}})) \rightarrow (\text{Ẹ}_{\mu} \rightarrow \text{Ὀ}_{\text{δὀ}})]$. Se entiende en este contexto, que después de la conectiva principal de la conjunción (∧), que manifiesta que este quinto postulado hay que leerlo y entenderlo en unión a los anteriores, la conectiva de mayor jerarquía es la implicación que conecta a las tres primeras con la cuarta. Y, no es para menos, dado que allí se afirma que nunca dichas rectas paralelas se volverán a encontrar hacia delante, debido a que la ortogonalidad sobre las que se levantan siempre será la misma, aún en lo ilimitado (*ἄπειρος*) nunca se modificarán. Tal sentencia apodíctica fue la que motivó la enorme búsqueda por querer superar tal aseveración, dando lugar a las geometrías no euclidianas. Lo interesante de este axioma es que la noción de ortogonalidad (*ὀρθότης*) no se construye a partir de la noción de superficie (*ἐπιφάνεια*) o con base en la relación al ángulo recto (*ὀρθήν γωνίαν*) o los catetos rectos (*εὐθεῖα κάθετος*), sino que una línea recta continúa hacia delante asumiendo que es ortogonal. En los postulados anteriores se necesita un apoyo que soporte lo ortogonal (*ὀρθός*); en cambio, aquí, el apoyo está en la misma línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), la cual tiene la propiedad de conservar la ortogonalidad inicial establecida por los ángulos que mantienen a las dos líneas paralelas entre sí. Como si las líneas estuvieran suspendidas en una suerte de nada, muy contrario al pensamiento griego donde las figuras geométricas se levantan sobre la superficie (*ἐπιφάνεια*), tal como el éter (*αἰθήρ*) soporta los cuerpos de la realidad física. Se resalta cómo los verbos brillar, iluminar y quemar son significados comunes compartidos por los verbos *phaínō* (*φαίνω*) y *aíthō* (*αἴθω*), aunque el primero evoca el dar luz como un acto de dar vida o traer a la existencia algo.

Estamos frente a un condicional (*εἰ*) en el cual vamos a expresar una condición (*ἄν*), en que permitimos (*ἐάω*) encaminarnos (*εἶμι*) para hacer que suceda (*εἰμί*), que si una (*εἷς*) recta (*εὐθύς*) cayera (*ἐμπίπτω*) en el interior (*ἐντός*) de dos (*δύο*) rectas (*εὐθύς*) derechas (*εὐθεῖα*). Además, hay otra condición: y (*καί*) sobre (*ἐπί*) las (*τάς*) mismas (*αὐτός*) −en las (*τόν*) mismas cada una recibe de nuevo su misma (*αὖ*) parte (*μείρομαι*)− partes (*μέρος*) de ángulo (*γωνία*) producen (*ποιέω*) dos (*δύο*) ángulos rectos (*ὀρθός*) más pequeños (*ἐλάσσων*, comparativo de *ἐλαχύς*). Caen (*ἐκβάλλω*) −fuera de manera completa (*ἐκ-*) es arrojado para dejar caer (*βάλλω*)− las (*τάς*) dos (*δύο*) rectas (*εὐθύς*) sobre (*ἐπί*) aquello que no posee fin (*ἄπειρος*), sin frontera y, por consiguiente, inexperimentado, dado que no se puede realizar ningún juicio: aquello sin (*ἀ-*), la *alpha privativum*, juicio, experiencia, sin tentativa (*πεῖρα*) −. La acción frente a lo ilimitado (*ἄπειρος*) es precipitarse de manera conjunta, caer sobre, sobrevenir al mismo tiempo, derrumbarse (*συμπίτνω*). Sobre (*ἐπί*) estas (*ἅ*, femenino dual nominativo de *ὅς*) partes (*μέρος*) que son (*εἰμί*) y que además entran (*εἴσειμ*) aquellas (*αἱ*, las *ὁ*) dos (*δύο*) rectas (*ὀρθός*), propiamente las que tienen ángulos rectos y que son más pequeñas (*ἐλάσσονες*, *ἐλαχύς*). Como una condición imperante está volver rectos estos (*τίς*) ángulos (*γωνία*) rectos (*ὀρθός*), enderezándolos (*ὀρθόω*) en el sitio donde están situados los ángulos (*γωνιάζω*), condición necesaria para que las dos rectas sean paralelas de manera ilimitada y nunca se vuelvan a encontrar hacia delante bajo ningún motivo.

El famoso postulado quinto de Euclides acerca de las paralelas fue el motor para el desarrollo de las geometrías no euclidianas. La aparición de la geometría no euclidiana en el siglo XIX ayudó a estimular un gran desarrollo en todas las áreas de la matemática. En especial, se concebía que la geometría euclidiana había logrado construir la adecuada idea del espacio físico y las figuras que lo habitaban. Entre los que apoyaban tal posición estaban: Barrow, Newton, Leibniz, Locke, Hobbes, Hume y el mismo Kant[395]. Ya Gauss lo había notado aunque nunca lo hizo público a fin de no quedar expuesto frente a la inucitada fama que disfrutaba la geometría euclidiana. Este planteamiento fue dado a conocer de manera independiente por Janos Bolyai y Nikolai Lobatchevsky, éste último fue el primero en dar a conocer a la comunidad académica sus trabajos: en un artículo suyo titulado "*On Foundations of Geometry*" (1829-30) y "*New Foundations of Geometry with a Complete Theory of Parallels*" (1835-37), lo que condujo a la publicación de un libro en alemán cuyo

[395] Este tema está tratado en el capítulo 36 *Non-Euclidean Geometry* en *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* de Morris Kline (1972) en donde se comenta que Kant concebía el mundo físico en términos euclidianos, siendo esta geometría única y necesaria (pág. 862).

título era “*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*” (Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas) publicado en 1840[396].

4.4. La teoría numérica de Euclides según Los Elementos

En el capítulo VII de *Los Elementos*, Euclides introduce las nociones fundamentales sobre las cuales se va a construir su aritmética. Un tema harto complejo está en definir al mismo número (*ἀριθμός*), y se puede afirmar que todavía tal proyecto no ha sido realizado. Este hecho se refleja en la imposibilidad de poder axiomatizar los conjuntos numéricos desde los naturales a los reales. Se presupone que un número está representado en esas cifras que tienen una base numérica, que va desde la binaria a la sexagesimal. Nuestra base es la decimal, todavía en las axiomatizaciones propuestas del conjunto de los números naturales no se han puesto de acuerdo, si se ha de contar desde el cero o desde el uno[397]. Cabe resaltar que la noción de número que se tiene es extensiva y no intensiva; se aborda al número en cuanto magnitud mas no en cuanto cualidad o naturaleza. Este hecho hace que de alguna manera se crea saber qué son los números más, cuando nos detenemos a examinarlos, nuestra comprensión de los mismos es todavía limitada e incompleta. Es sabido que Euclides adoptó la perspectiva de Pitágoras[398], por cuanto comenzó hablando de los números a partir de la mónada o la unidad (*μονάς*), tal como él lo hizo. Sin embargo, la posición pitagórica habla del origen o principio (*ἀρχή*) de todo (*ἅπας*) que está en la

[396] Tanto Bolyai como Lobatchevsky llegaron a los mismos resultados de manera separada; fue Gauss el encargado de limar las asperezas entre ambos, a fin de que el descubrimiento fuera reconocido a ambos. No obstante, el mismo Gauss manifestó que estuvo durante 30 años trabajando sobre el tema, pero se reservó sus comentarios. Fue el padre de Bolyai, amigo cercano de Gauss y antiguo discípulo suyo en Göttingen, quien le dio a conocer los trabajos de su hijo (Ob.cit. págs. 877-879).

[397] Bertrand Russell (1903) en *The Principles of Mathematics* aborda la definición del número bajo la perspectiva de un número cardinal en la que el número es la clase de la clase de todas las clases que son similares a una clase dada. Luego aborda al número como el concepto-clase, como la propiedad compartida por un conjunto de clases similares, el cual es el encargado de efectuar la predicación. El tema de si se debe comenzar a contar desde 0 o 1 le es irrelevante, mas lo que le interesa es que dicha clase sea bien ordenada y que cumpla con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Asimismo, la dinámica del número se da en una relación muchos-uno, donde cada clase tiene su número y nada más (pág, 114-116).

[398] Diogenes Laercio aborda a Pitágoras en su libro VIII: *Life of Eminent Philosophers*: [25] *The principle of all things is the monad or unit ; arising from this monad the undefined dyad or two serves as material substratum to the monad, which is cause ; from the monad and the undefined dyad spring numbers. [25] ἀρχὴν μὲν ἁπάντων μονάδα: ἐκ δὲ τῆς μονάδος ἀόριστον δυάδα ὡς ἂν ὕλην τῇ μονάδι αἰτίῳ ὄντι ὑποστῆναι: ἐκ δὲ τῆς μονάδος καὶ τῆς ἀορίστου δυάδος τοὺς ἀριθμούς*. Traducción de R.D. Hicks (1925).

mónada (*μονάδα*). Tal posición es contraria a lo que hoy se afirma del número y, de alguna manera, al utilizar Euclides el mismo vocablo que utilizó Pitágoras, se ve afectado por lo que significa. En ese sentido, tal explicación se la podría denominar intensiva y, a la vez, extensiva, porque busca conciliar dos estrategias teóricas diferentes en una sola. Se puede afirmar que en Pitágoras existe una metafísica que se plantea desde la existencia del número, abordado como la mónada que todo lo contiene y de la cual se derivan todos los demás números. Euclides, no obstante, asume una posición que no puede ser calificada en estricto sentido de ser puramente aritmética, porque introduce el concepto que el número tiene la potestad de decir (*λέγω*) cada (*ἕκαστος*) cosa es una (*ἕν*): "*Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una*"[399]. Hoy día se afirma que el número no puede tener ningún vínculo con una teoría relacionada con los actos de habla en cuanto tenga un carácter perfomativo[400]. El concepto de número, en consecuencia, ha sido despojado de toda posibilidad de ser el centro de una actividad reflexiva de carácter filosófico especulativo.

4.4.1. La construcción del número a partir de la unidad

Un tema que merece toda la atención es lo que se entiende por número, algo en lo que coinciden tanto Pitágoras como Euclides, es abordar al número (*ἀριθμός*) como la unidad (*μονάς*) fundamental: el número involucra algo que ha logrado conciliar, donde las partes coinciden con el todo (*ὅλος*), lo que lo hace igual a la parte (*μέρος*): *ἀριθμός* = *ὅλος* ≡ *μέρος*. Esto puede ser simbolizado como sigue: $f(\dot{\alpha}) = \ddot{o} \rightarrow \mu$, $f^{-1}(\dot{\alpha}) = \mu \rightarrow \ddot{o}$. El número es aquella función sobreyectiva en la que todo el dominio (*ὅλος*) está bien definido y está en una relación uno-a-uno con el codominio (*μέρος*) que, a su vez, está bien definido. La indistinguibilidad del todo con la parte es una característica de la unidad (*μονάς*), en este caso numérica. Tal unidad (*μονάς*) fundamental nos permite aseverar que todo tipo de

---

[399] Ver en: Euclides, *Elementos*, traducción María Luisa Puertas, Editorial Gredos, Madrid, 1991, pág. 39.

[400] En su obra *How to do things with Words*, John Austin (1962), manifiesta el carácter perfomativo de algunas oraciones dado que invitan a una acción, donde la palabra tiene la función de servir de lazo para unirnos y ligarnos. El afirmar algo o decir (*λέγω*) involucra una promesa que bien puede ser verdadera o falsa. En ese sentido, la unidad (*μονάς*) establece una acción que evoca la acción viva del discurso, donde ordena (*λέγω*) la realidad a fin que sea sancionada con una ejecución concreta (págs. 6-10). Es de destacar que en este contexto, Euclides utiliza el verbo decir y ordenar (*λέγω*), que es la acción que moviliza la unidad (*μονάς*). También la posibilidad de la unidad de nombrar lo que existe común en cada (*ἕκαστος*) cosa.

predicación que se desee, se satisface para cada uno (*ἅπας*) de los términos o elementos. El número como unidad, nos asegura que todo término o elemento (*στοιχεῖον*) puede ser un predicado o albergar una predicación, para todo (*στοιχεῖον*) se tiene un predicado para ese término o *στοιχεῖον*, es decir: $\forall(\sigma)\ P_\sigma$. A su vez, esta predicación puede asumir una diferencia apoyada en la predicación subyacente que la unidad le brinda. Lo cual es similar a afirmar que estamos frente a una cuantificación universal donde la unidad (*μονάς*) que le subyace al elemento (*στοιχεῖον*) opera como variable real o libre. Luego, cuando vayamos a especificar o ligar tal variable libre y transfomarla en una variable aparente o ligada, se da en virtud de la predicación universal válida para todo elemento que permite que se pueda dar el reemplazo. En concordancia, $\forall(\sigma)\ P_\sigma$ ofrece la predicación universal de la unidad numérica, la cual puede ser reemplaza por cualquier tipo de predicado y término. Para todo x; si x es una unidad, x puede ser predicado. En nuestro caso, para todo (*ἅπας*) elemento (*στοιχεῖον*), si el elemento (*στοιχεῖον*) es (*ἐστιν*) unidad (*μονάς*), el elemento (*στοιχεῖον*) puede ser predicado (*κατηγορέω*): $\forall(\sigma)\ M_\sigma \rightarrow K_\sigma$. Este tipo de especificación universal le subyace a todo particular, sea el caso la proposición que dice 'todo humano duerme', puede ser simbolizada como: Para toda x, si x es humano, x duerme. $\forall(x)\ H_x \rightarrow D_h$. Se anotó que el predicado (*praedicatum*) o categoría (*κατηγορία*) de la unidad (*μονάς*) subyace a toda predicación que pueda darse en el lenguaje, este hecho es simbolizado en la expresión: $\forall(\sigma/x)\ M_\sigma/Hx \rightarrow K_\sigma/\ D_h$. De manera análoga, podemos ligar tal variable y dar a conocer el sujeto o término de la expresión: si José es humano, en consecuencia, José duerme, que se simbolizaría como: $H_j \rightarrow D_j$, en virtud de la especificación universal de la j por la x.

Pero, además, se tiene que dicha unidad (*μονάς*) está en el origen (*ἀρχή*) o es principio de todo. Tal situación introduce una complejidad adicional, la cual ya está de alguna manera contemplada en el vocablo del elemento (*στοιχεῖον*), quiere decir el primero en la fila (*στοῖχος*). Este hecho, evoca que está primero (*πρῶτος*) y evoca al uno (*εἶς*). En todos los casos, la unidad (*μονάς*) nos remite a que es lo uno o el uno (*εἶς*). Como *arkhḗ* (*ἀρχή*) está en el origen, es con lo que se comienza (*ἄρχω*) a fin de gobernar y reinar. Este hecho brinda una base o soporte sobre e cual se levanta y se construye todo, todo lo que existe necesita de dicha unidad (*μονάς*) para que pueda ser predicado (*κατηγορέω*); a su vez, dicha predicación involucra una contrastación o un enfrentamiento, contra (*κατά*) lo que se dice, habla o proclama (*ἀγορεύω*) en una asamblea (*ἀγορά*). Este hecho permite apreciar que los demás números guardan una relación de oposición a lo largo de toda una ejecución o recorrido como miembros de una fila (*στοῖχος*). Es decir, el predicado (*praedicatum/ κατηγορία*) numérico de la unidad (*μονάς*) tiene que realizar un recorrido hasta que se complete toda su predicación por lo menos, respecto a su base numérica, en nuestro caso, la decimal. En este sentido, estaríamos respetando una de las exigencias básicas de toda axiomatización: que sea completa, y que cada miembro sea independiente del otro y en consecuencia no derivable[401]. Esto indica que dicho sistema es completo y consistente como un sistema axiomático, en este caso de números, que pueden ser interpretados como oraciones. Aquí, Tarski ha reemplazado la noción primitiva de término o elemento por la de una oración, un logro importante que busca superar el obstáculo de la incompletez de todo sistema axiomático tan mentada por Kurt Gödel.

1. *Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una* (*An unit is that by virtue of which each of the things that exist is called one. μονάς ἐστιν, καθ' ἥν ἕκαστον τῶν ὄντων ἕν λέγεται*).

El tema del número comienza a ser abordado a través de la problemática de lo que es uno (*μόνος*), aquello que es solo, único, solitario, aislado, separado. Este aspecto fundacional de los números está mencionado en Pitágoras, y pone de manifiesto que la realidad y todo lo que existe comienza con la mónada (*μονάδα*), aserción moderna de *monás* (*μονάς*): aquello que es solitario y también representa como sustantivo a la unidad. Aquello que es indiviso, único y simple, el *monoeidḗs* (*μονοειδής*): unión de *mónos* (*μόνος*) con *-eidḗs* (*ειδής*), vocablo derivado de *eîdos* (*εἶδος*), aquello que es visto, forma, apariencia, imagen, vista. Evoca aquello que está solo (*μονάζω*), que está aislado y

[401] Este hecho está contemplado por Alfred Tarski (1953) en: *Logic, Semantics, Metamathematics*, en el capítulo X que trata sobre las condiciones metodológicas para la definibilidad de los conceptos, donde se es definible en la medida que sea independiente el concepto en toda teoría deductiva. Se resalta cómo se abordan estos conceptos como unas constantes extra-lógicas, sea X el conjunto de todas las oraciones, B cualquier conjunto de constantes $B \subset X$, se tiene (x): x = a.≡. ϕ (x; b', b'',…), donde la 'a' es una constante extra-lógica, y ϕ (x; b', b'',…) es cualquier función sentencial (*sentencial function*), y b', b'', otras constantes no extra-lógicas. La x es la única variable real, donde la definición del término 'a' por medio de los términos del conjunto B sobre la base del conjunto de oraciones X (*set X of sentences*) (págs. 296 a 299). En este sentido, la 'a' representa nuestra unidad (*μονάς*), que permite expresar y definir a los demás términos, es la única libre.

reducido a uno (*μόνοω*), que permanece en un sitio particular, que efectúa la acción de quedarse, permanecer, como estancia *monḗ* (*μονή*). Se podría decir que el origen de todo está en lo que es uno (*εἶς*) en cuanto unidad (*μονάς*), como lo que está primero (*πρῶτος*). Esto hace que sea un estado que se basta a sí mismo, es autoconsistente y capaz de soportar todo lo que se deriva del mismo. La unidad (*μονάς*) es lo que es (*ἐστιν*), en concordancia (*καθ'*) con los cuales (*ἥν*) cada una (*ἕκαστον*) de las cosas que existen (*ὄντων*), se dice y se ordenan (*λέγεται*) como una (*ἕν*).

Este primer axioma manifiesta que la unidad (*μονάς*) es lo que existe (*εἰμί*), es (*ἐστιν*). Al mismo tiempo, introduce una cuantificación universal donde, en concordancia (*καθα*) con lo cual (*ἥν*), cada (*ἕκαστος*) cosa que existe actualmente (*ὄντα*) es una (*ἕν*) y, además, se dice y se ordena (*λέγω*); la unidad (*μονάς*) es (*ἐστιν*) lo uno (*εἶς*) que ordena (*λέγω*) todo cuanto existe. Esta oración enuncia que la unidad es lo que es, y se construye bajo el caso acusativo que señala de manera directa un objeto sobre el cual recae la acción del verbo.

4.4.2. El número como una pluralidad indiferenciada que reclama ser diferenciada

En general, se puede afirmar que la unidad (*μονάς*) subyace a todo número, tal aseveración es clara. Sin embargo, se quiere resaltar que la pluralidad o multitud (*πλῆθος*) es diversa e involucra una diferenciación. Este hecho está resaltado por la pretensión de buscar conciliar una fundamentación extensiva o en base a la cantidad con una intensiva en base a la cualidad. Para ello se sostiene, en concordancia con lo sugerido por Tarski, que cada número vendría a ser una variable o constante extra-lógica que explica toda una serie de oraciones: los diez números establecerían de esta manera una completez predicativa a nivel aritmético. Y ello concuerda con los griegos que le habían asignado un valor númerico a cada letra de su alfabeto[402], y permite decir lo que sigue:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, ϛ, \zeta, \eta, \theta, \iota$. ≡ . $(\exists\ \iota', \iota'',\ldots)$. $\Psi\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}; \alpha', \alpha'',\ldots; \iota', \iota'',\ldots)$

[402] Este tópico es tratado por John O'Connor y Edmund Roberson (2006), en *History Topic: Greek Number Systems*, donde se comentan los valores de cada una de las letras que constituyen el alfabeto griego (pág. 4).

Allí se menifiestas que cada uno de los diez términos que constituyen la base numérica griega α, β, γ, δ, ε, ς, ζ, η, θ, ι, puede ser definible por medio de los términos del conjunto B sobre la base del conjunto X de oraciones[403].

Y, donde cada oración puede ser expresada como: Ψ (α; β', β'',…; γ', γ'',…). En este contexto, se puede expresar y explicar un concepto independiente por medio del número que representa a cada letra (α = 1, β = 2, γ = 3, δ = 4, ε = 5, ς = 6, ζ = 7, η = 8, θ = 9, ι =10). Lo que daría diez oraciones fundamentales mediante las cuales se puede situar cada letra griega como una constante extra-lógica capaz de definir la axiomatización completa y, en consecuencia, finita de un sistema teórico que busca explicar y definir una teoría con base en el valor numérico que asume cada una de las letras fundamentales que vendrían a constituirse como las categorías que fundamentan tal sistema numérico de base diez. Es de destacar cómo Tarski, al abordar la completitud de los conceptos, denomina a tal conjunto de oraciones categorial, si cada dos interpretaciones o realizaciones de este sistema son isomórficas. Se destaca que cada oración se asume como una interpretación, que se da si se tiene una relación R que mapee x_1' en x_1''. Con lo cual, la variable R es una relación entre dos términos o individuales, que pueden ser del mismo o diferente tipo lógico. A su vez, x_1' en x_1'' denota la clase de individuales[404]. Tarski acude a la simbología de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead (1910). Dentro de este contexto, cada letra del alfabeto griego que constituye la base decimal, se constituye en una categoría capaz de explicar y definir una teoría que utilice estos números. Lo interesante es que cada letra se vería concretada en un concepto completo, inderivable de los demás, y donde todos reunidos (los diez números o letras de la base decimal) constituirían una totalidad completa y consistente.

2. *Un número es una pluralidad compuesta de unidades* (*A number is a multitude composed of units. ἀριθμός δέ τό ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος*).

En esta proposición aparece una tentativa de definir la naturaleza del número, y dice: un número (*ἀριθμός*) asimismo (*δέ*) aquel (*τό*) hecho de (*ἐκ*) unidad (*μονάδων*) que sitúa de

---

403 Ver: Alfred Tarski (1953) en: *Logic, Semantics, Metamathematics*, Teorema 1 (pág. 301).

404 Ver en: Alfred Tarski (1953) en: *Logic, Semantics, Metamathematics*, el numeral 2 capítulo X: *The Problem of the Completeness of Concepts* (pág. 308-309).

manera conjunta (*συγκείμενον*) una multitud (*πλῆθος*). Se nota que el número (*ἀριθμός*) es aquella (*τό*) mónada o unidad (*μονάς*) y, además, señala de manera enfática que el número es una mónada o la mónada. Esto indica que existen matices de la misma relacionados con la propiedad que la caracteriza, entre otras, la de poder ser autosubsistente en cuando se basta a sí misma para estar sola (*μονάζω*), lo que es su propiedad universal. Pero en este caso, está la preposición (*ἐκ*) que indica una completitud o totalidad, además, que a nivel de una causalidad indica algo que puede ser reducido a uno, solo y sin compañía (*μόνος*). En general, se trata de poder reducir algo a la mínima expresión que indique una unidad (*μονάς*) irreductible, en la que sus constituyentes asumen una posición estable que se basta a sí misma a nivel existencial (*μόνοω*). Es propio del número tener una naturaleza más íntima que lo lleva a permanecer, está hecho para quedarse (*μονή*); lo que es permanente es lo numérico, es el número a nivel de su unidad (*μονάς*) indivisa, lo que es uno (*εἶς*). Este hecho, coloca a la mónada como lo que es uno y, en tal sentido, posee una propiedad que la aparta de todas las demás expresiones numéricas, las constituye pero mantiene una independencia frente a las mismas. Una vez más, se revela algo más, el número (*ἀριθμός*) es una unidad (*μονάς*) que tiene la propiedad de aglutinar, de unir y de ligar de manera conjunta (*σύγκειμαι*); el número (*ἀριθμός*) es aquello que está situado, que permite situar y fundamenta el reposo como permanencia, permite asentarse y establecer algo para que sea (*κεῖμαι*) y lo hace de manera conjunta, con, al lado y participando (*σύν*). Una vez más, el número (*ἀριθμός*) tiene esa posibilidad de ligar y pegar varias cosas (*πλῆθος*) a fin que puedan permanecer (*κεῖμαι*) y se puedan establecer en la realidad. Lo numérico es aquella propiedad de llegar a ser amigable a algo a fin de poder establecer algo firme y duradero, une y unifica a fin de poder situar algo en un lugar, en ese sentido define la estructura del lugar, le da estabilidad como permanencia al sitio o topos (*τόπος*). Pero, además, parte de la esencia del número (*ἀριθμός*) es la de llenar, llenar de manera completa y a lo largo de un período de tiempo (*πλήθω*), en ese sentido es dinámico, ya que permite que algo logre esa completez que le brinda estabilidad. Esta oración está construida en acusativo con un objeto directo que es la unidad (*μονάς*) y con la acción de un verbo transitivo (*πλήθω*), se acompaña también a nivel de referencia de su contraparte intransitiva *pímplēmi* (*πίμπλημι*), que también indica una acción de llegar a algo de manera completa y a satisfacción. Con lo cual, el número (*ἀριθμός*) es aquella unidad (*μονάς*) que se llena a partir de sí misma (*πλήθω*), capaz de reunir y ligar (*κεῖμαι*) de modo conjunto (*σύν*) aquello que va a ser permanente, en especial frente a una multitud (*πλῆθος*). Esto permite afirmar que el número (*ἀριθμός*) es una multitud (*πλῆθος*), una multitud que permanece junta (*σύγκειμαι*) como una sola (*μόνος*) unidad (*μονάς*). Esta es otra manera de poder apreciar lo uno (*εἷς*), como aquella predicación común frente a la diferencia y que de alguna manera la subyace, a condición que sea estable y permanente (*κεῖμαι*). En cuanto sitúa y define el lugar (*τόπος*), tal hecho nos lleva a afirmar el vínculo que existe entre el punto (*σημεῖον*) y el número (*ἀριθμός*). Lo numérico es lo que define y le aporta estabilidad al lugar como sitio permanente y estable.

4.4.3. Un número también está compuesto por partes, la mayoranza es la norma

En este contexto, hay algo que hace parte de la definición de número, no notado en la construcción de los números naturales[405] o enteros positivos. Se trata de plantear la mayoranza (<) como una propiedad implícita de los mismos enteros, donde el orden de magnitud debe de ser establecido desde el comienzo. Este hecho no está contemplado en los axiomas con los que se busca construir el número en el conjunto de los naturales. El hecho que, se dice: 1, 1, 1,…, 1 no contempla para nada la introducción del operador de la suma (+), a su vez no está contemplada la suma en la función: $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, se debería de escribir: $\sigma\ (+): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. A su vez, se nota que la base decimal no está dada ni planteada en los axiomas, aunque en los lemas adjuntos se contempla al operador de la suma: sin embargo, la completitud y decidibilidad de un sistema axiomático está dada por sus axiomas, agregarle lemas que no modifiquen ni agreguen nuevos axiomas, no es un procedimiento adecuado y legítimo. Independiente de lo que se diga, debería existir un

[405] Estimulado por los trabajos de Richard Dedekind (1888), Giuseppe Peano (1889) publica en latín "*The principles of arithmetic presented by a new method*" (*Arithmetices principia, nova methodo exposita*), que busca la axiomatización del conjunto de los números naturales. Este conjunto tiene las siguientes propiedades: i. $\mathbb{N}$ tiene un elemento distinguido el cual lo llamaremos 1; ii. Existe un conjunto mapa $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; iii. σ es una función uno-a-uno, es decir injectiva; iv. No existe un elemento $n \in \mathbb{N}$, tal que $\sigma(n) = 1$, de modo que σ no es una función sobrejectiva; v. El principio de inducción, si $\sigma(n) \in \mathbb{N}$ tal que si $1 \in S$, y si $n \in S$; luego $S = \mathbb{N}$. Mohan Kumar (2011), *The Construction of Number Systems: Peano´s Axioms and Natural Numbers* (pág.1).

axioma que contemple el retorno al cero[406], sea en un sistema binario, decimal, vigesimal o sexagesimal. De igual manera, se requiere un axioma que introduzca la noción de magnitud o mayoranza, en cuanto el número producido por la acción del operador de la suma entre varios números es mayor que los anteriores o menor frente a los que le siguen. En este contexto, se tiene aquí una nueva noción primitiva: la cifra, entendida como una expresión aritmética donde se tiene una serie de números agrupados que deben ser leídos e interpretados bajo lo que se podría denominar una hermenéutica del número. Sea el caso la cifra 476, la cual involucra la existencia de una lectura fundamentada en una construcción de una base numérica decimal: 4*7*6*, donde * indica un retorno al cero cada diez dígitos y el comienzo de una nueva serie numérica base decimal bajo un orden superior.

Hay que destacar la potestad del número (*ἀριθμός*) de medir y distribuir (*καταμετρέω*) con base en la dinámica de la pareja grande (*μέγας*) - pequeño (*ἐλαχύς*), la cual es una pareja ordenada (μ, *ἐ*) que permite construir todas las operaciones aritméticas y lógicas con base en criterio de una relación binaria. En este contexto, se habla de la parte (*μέρος*) frente al todo (*ὅλος*): cuando un número es menor que otro, se dice que hace parte del número más grande. Un comentario importante es (ver numeral 4) que no es potestad de la parte (*μέρος*) medir medir (*καταμετρέω*), sino más bien de la unidad (*μονάς*). Se aprecia la necesidad de buscar aquel patrón de medida que, de alguna manera, está implícito en que sea la unidad la que mida (*μετρέω*). Es intersante apreciar que el número mide hacia abajo o a lo largo de, hecho que viene indicado por la preposición (*κατά*) que antecede al verbo *metréo* (*μετρέω*). Lo que está en plena concordancia con la noción de elemento (*στοιχεῖον*), como aquel que está primero en una fila o serie (*στοῖχος*), donde el tutelaje está dado por la unidad (*μονάς*) que la fundamenta a todo nivel. La unidad es el número básico que se desplaza a lo largo de todo este recorrido, cerciorándose que esté presente en todos los numerandos, dado que es la instancia que los consolida y les permite seguir en contacto en el origen (*ἀρχή*): aquello que está primero (*πρῶτος*), el uno (*εἷς*).

---

[406] No existe un consenso general, si el 0 debe de pertenecer al conjunto de los números naturales ℕ. Tal hecho es apreciado en: *The Peano Axioms* por Roberto Pelayo (2014), donde el cero 0 es considerado un número natural (pág.2).

3. *Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor* (*A number is a part of a number, the less of the greater, when it measures the greater; μέρος ἐστίν ἀριθμός ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τόν μείζονα*).

En este axioma se puede apreciar: la parte (*μέρος*) es (*ἐστιν*) del número (*ἀριθμός*) un número (*ἀριθμοῦ*), la (*ὁ*) más pequeña (*ἐλάσσων*) de (*τοῦ*) de la grande (*μείζονος*), siempre y cuando (*ὅταν*) mida (*καταμετρῇ*) la (*τόν*) grande (*μείζονα*). La parte (*μέρος*), como aquella porción del todo (*ὅλος*), tiene la facultad de dispensar a cada quien su porción (*μείρομαι*). En especial, el número (*ἀριθμός*) se percibe que está constituido de unas partes que también son numéricas o son números (*ἀριθμός*). El número es un todo (*ὅλος*) constituido de partes (*μέρος*), tanto en lo más pequeño (*ἐλασσόω*) como en lo más grande (*μείζων*); todo (*πᾶς*) es número (*ἀριθμός*). Se nota cómo el número (*ἀριθμός*) mantiene y conserva su naturaleza y, por ende, sus propiedades tanto en lo pequeño (*ἐλαχύς*) como en lo grande (*μέγας*), siempre y cuando (*ὅταν*) cumpla con una condición: cuando (*ὅτε*) la condición (*ἄν*) de medir y distribuir (*καταμετρέω*) se satisfaga. La propiedad de medir (*καταμετρέω*) se hace evidente cuando puede desplazarse a medir lo más pequeño (*ἐλασσόω*) como lo más grande (*μείζων*). En el fondo, se tiene la posibilidad de dividir (*μερίζω*) el todo (*ὅλος*) en las partes (*μέρος*) que lo constituyen: tal parte, participación, porción (*μερίς*) posibilitan una división y una distribución (*μερισμός*) de las propiedades que caracterizan al número (*ἀριθμός*), entre ellas, la de contar y enumerar (*ἀριθμέω*) cualquier (*τις*) expresión numérica sea más pequeña (*ἐλασσόω*) o más grande (*μείζων*).

4. *Pero partes cuando no lo mide* (*but parts when it does not measure it. μέρη δέ, ὅταν μή καταμετρῇ).*

La anterior proposición continúa: las partes (*μέρη*) pero en cambio (*δέ*), siempre y cuando (*ὅταν*) no (*μή*) midan (*καταμετρῇ*). Este axioma parece establecer que no (*μή*) es potestad ni facultad de la partes (*μέρος*) ni de las partes (*μέρη*) medir (*καταμετρέω*) sino, como bien se anotó, es potestad del número (*ἀριθμός*) asumir tal tarea. Declinada como sustantivo en acusativo plural neutro (*μέρη*), indica muy claramente un señalamiento como objeto directo que precisa lo que es potestad tanto de la parte (*μέρος*) como del todo (*ὅλος*), no constituirse como número (*ἀριθμός*) sino más bien como componentes que deben de ser reducidos a la unidad (*μονάς*).

4.4.4. La noción de múltipo como la instancia que fundamenta la multiplicación

El concepto de múltiplo (*πληθύνω*) se funda en la noción de muchos (*πολλαπλάσιος*), capaz de relacionar lo más grande (*μείζων*) con lo más pequeño (*ἐλάσσονος*). Este hecho, no siempre notado, permite introducir el criterio de que entre dos números pueden existir otros muchos números[407]. Aunque un número racional pueda ser escrito como $\mathbb{Q} = \{a, b \;/\; a/b \in \mathbb{Z}\}$, como una división, noción que está implícita cuando queremos medir algo más grande en relación a algo más pequeño o viceversa, algo más pequeño en relación a algo más grande. Este hecho va anticipando la introducción de otro conjunto numérico llamado el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$[408], también simbolizable como $(\mathbb{R}; + \,;\, \cdot \,;\, <)$, donde se nota cómo la relación de mayoranza (<) es propia de este conjunto; tal como está sugerida por el vocablo mayor que (*μείζων*) presente a lo largo del texto.

5. *Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor* (*The greater number is a multiple of the less when it is measured by the less. πολλαπλάσιος δέ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπό τοῦ ἐλάσσονος*).

[407] En este contexto, se tiene al conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, el cual se construye a partir de los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$, expresable como $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$. Tal que $(a, b) \sim (c, d)$ si $ad = bc$, donde la suma se define como $[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(ad + bc, bd]$, siempre y cuando $b, d \neq 0$; y la multiplicación $[(a, b)] \otimes [(c, d)] = [(ac, bd)]$. Ver en Mohan Kumar (2011), *The Construction of Number Systems: Rational Numbers* (p. 16-17).

[408] El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se construye a partir del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ cuando se le agrega el supuesto que es un conjunto acotado inferiormente que no tiene minimal. Sea el caso en el ejemplo: $S = \{x \in \mathbb{Q} \;/\; x^2 > 2$, siendo x positivo$\}$, es un conjunto no vacío, acotado inferiormente y sin elemento minimal aún en $\mathbb{Q}$. La fundamentación del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ requiere de lo que se conoce como una serie de Cauchy: sea una secuencia de números racionales $\mathbb{Q}$, existe un mapa $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, tal que dado un número racional x_n, se tiene que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene la serie $\{x_n\}$. La cual cumple con la propiedad que para todo $0 < \varepsilon$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$, tenemos $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Ver en: Mohan Kumar (2011), *The Construction of Number Systems: Real Numbers* (págs. 17, 18).

En este axioma se introduce uno de los conceptos más importantes que ha caracterizado al número que es la noción de múltiplo (*πληθύνω*), de la que proviene la operación de la multiplicación. El texto dice: muchos (*πολλαπλάσιος*) en cambio (*δέ*) estos (*ὁ*) más grandes (*μείζων*) los (*τοῦ*) más pequeños (*ἐλάσσονος*), siempre y cuando (*ὅταν*) midan (*καταμετρῇται*) debajo (*ὑπό*) de estos (*τοῦ*) más pequeños (*ἐλάσσονος*). Tenemos como algo muchas veces mayor o más fuerte (*πολλαπλήσιος*) pero (*δέ*) en relación a cualquiera (*τις*) más grande (*μείζων*) frente a cualquiera (*τις*) más pequeño (*ἐλασσόω*), siempre que se cumpla (*ὅταν*) medir (*καταμετρέω*) a lo largo por medio (*ὑπό*) del (*τοῦ*) más pequeño (*ἐλασσόω*). Aquí se percibe que la multiplicación (*πληθύνω*) es definida como la propiedad de poder medir y distribuir (*καταμετρέω*) lo más grande (*μείζων*) a partir de lo más pequeño (*ἐλασσόω*). Inicialmente, el presente axioma introduce la noción de multiplicación, aquello que se incrementa, multiplica y se hace múltiple (*πληθύνω*) por medio del vocablo muchos (*πολλαπλάσιος*), el cual podría ser apreciado como un cuantificador universal (∀) para todo (*ὅλος*) en relación a las partes (*μέρος*) que van a ser sujetas de su cuantificación: todo (*πᾶς*); luego viene una proposición que introduce que la condición de lo más grande (*μείζων*) en relación con lo más pequeño (*ἐλασσόω*); luego viene la importante conjunción (*ὅταν*) que cumple las funciones de una doble implicación o bicondicional (↔). La segunda proposición está de alguna manera subordinada a la primera (lo cual está sugiriendo en la introducción de una noción de orden en primacía en relación a la conectiva binaria de la doble implicación) que manifiesta la condición a cumplir, que está siendo introducida por el verbo medir y distribuir (*καταμετρέω*). Se indica que lo más pequeño (*ἐλασσόω*) debe poder medir a lo más grande (*μείζων*), dado que tiene posibilidad de recorrerlo a lo largo, bajo y debajo (*ὑπό*) hasta llenarlo y colmarlo (*πλήθω*), que es una propiedad del número (*ἀριθμός*), ya mencionada en el axioma dos. No hay que olvidar que multiplicar, incrementar en múltiplos (*πληθύνω*) proviene también de este verbo (*πλήθω*), que indica llenar algo completamente a lo largo de un período de tiempo. También se relaciona con (*πλῆθος*) que significa: muchedumbre, multitud, masa, pueblo, asamblea popular, y lo que caracteriza al número: abundancia, cantidad y extensión. También significa un gran número de cosas, un gran número, la porción principal, algo de gran tamaño o magnitud, asimismo un multitud de cosas o de personas.

4.4.5. La noción de número se fundamenta y complementa con la noción de paridad

Se va notando cómo se construye e introduce en cada uno de los axiomas planteados el concepto de número, tal como los griegos lo concebían y que fue plasmado por Euclides en estos axiomas del libro VII de *Los Elementos*. Se aborda al número (*ἀριθμός*) como lo par (*ἄρτιος*), aquel que es divisible (*διχάζω*) en dos (*δύο*) partes (*μέρος*) iguales (*ἴσος*), de tal manera que reunidas constituyen un todo (*ὅλος*). Hay que destacar que el número par (*ἄρτιος ἀριθμός*) significa completo, pefecto, justo (*ἄρτιος*), vocablo que deriva de lo que es justo en este preciso momento (*ἄρτι*). Tal aspecto viene a considerar la existencia del movimiento o la temporalidad tan necesaria para completar el concepto de número, como algo dinámico y para nada estático. Lo que es par (*ἄρτιος*) tiene está relacionado con el verbo *araráskō* (*ἀραρίσκω*), que quiere decir: unir, encajar, arreglar y unir estrechamente, lo que está dado por la perfecta y adecuada presencia de la unidad (*μονάς*), en cada una de las partes (*μέρος*) que lo constituyen como número par (*ἄρτιος ἀριθμός*).

6. *Un número par es el que se divide en dos partes iguales* (*An even number is that which is divisible into two equal parts. ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος*).

En esta proposición se dice: el número (*ἀριθμός*) par (*ἄρτιος*) es (*ἐστιν*) aquel (*ὁ*) divisible (*διαιρούμενος*) en dos (*δίχα*). Así el vocablo para número par (*ἄρτιος*), evoca aquel número (*ἀριθμός*) completo, perfecto en su clase, que ha experimentado un crecimiento completo, justo, equilibrado en cuerpo y mente. Proviene del adverbio (*ἄρτι*) que evoca algo justo que está aconteciendo ahora mismo, en este mismo presente. Luego se tiene que ese número par (*ἄρτιος ἀριθμός*) es (*ἐστιν*), existe y sucede (*εἰμί*) en dos (*δίχα*); también significa aquello que está aparte, en duda, de manera diferente y opuesta, al igual que como preposición es: en dos partes, en dos, aparte, por separado, sin lejos de. Evoca aquel proceso por medio del cual algo es doble y se da de nuevo (*δίς*), y está vinculado al número cardinal dos (*δύο*) y al ordinal segundo (*δεύτερος*); de esta manera, se indica que está situado después del uno (*εἷς*), aquel que evoca la unidad (*μονάς*) y que tiene la potestad de estar solo (*μονάζω*). De manera análoga, nos remite a aquello que es doble (*δισσός*), que está dividido y que de alguna manera es ambiguo y dudoso; en esta forma, le subyace el verbo (*διχάζω*) que es dividir, separar, desunir, que es parte del proceso que se efectúa con el dos, la dualidad donde tiene existencia los contrarios. Este hecho viene reforzado por aquel que se divide en dos (*ὁ δίχα διαιρούμενος*), dado que se menciona de nuevo otro verbo (*διαιρέω*) que significa tomar aparte, escindirse en dos, dividirse, separar, apartar; relacionado con lo que está dividido, separado, desunido, divisible (*διαιρετός*) propio de toda división, distribución, diferencia y reparto (*διαίρεσις*).

4.4.6. La imparidad del número siempre acude a que le falta una unidad

El criterio del número impar (*περισσός ἀριθμός*) en Euclides recoge una definición moderna dada por aquel número entero n, que cumple con la condición $n = 2k + 1$. Una vez más la noción de la perfección evocada en la unidad (*μονάς*) acude a darle la apropiada definibilidad a este conjunto numérico. Algo que amerita ser tenido en cuenta, es que la realidad se origina a partir del dos (*δύο*) o la díada representada en los contrarios. Con lo cual, el no cumplir con el hecho de poder ser divisible por dos, plantea un dilema o paradoja existencial. Aspecto que nos lleva a la complejidad de este conjunto de números, que tanto nos cautiva y atrae: es un número que todavía no está completo y por lo tanto es imperfecto. Tiene que acudir al origen de lo primero (*πρῶτος*) fundamentado en la unidad (*μονάς*) del uno (*εἷς*) a fin de poderse completar o definir. En esa medida, un número impar tiene que acudir a la propiedad justa y perfectiva (*ἄρτι*) del número par a fin de lograr juntar sus constituyentes o partes, permitiendo que ellas puedan asirlo y arreglarlo (*ἀραρίσκω*)[409]. Recuérdese de paso, que un número par (*ἄρτιος ἀριθμός*) puede de ser medido (*μετρέω*) por el mismo, siendo en consecuencia una medida (*μέτρημα*) de sí mismo.

---

[409] El concepto de número impar nos conduce al número primo, aquel entero mayor que 1 que tan solo puede ser dividido por el mismo o por uno. Este hecho lleva al teorema fundamental de la aritmética que dice: cada entero positivo mayor que 1 puede ser escrito como el producto de dos números primos, donde los factores primos son escritos en un orden no decreciente. Lo anterior está relacionado con el algoritmo de la división, dados dos enteros a, d, con $d > 0$, existen unos enteros únicos p, r, con $0 \leq r < d$, tal que $a = qd + r$. Llamamos ‘a’ al dividendo, d al divisor, q al cociente y r al remanente. Ver en: Penelope Kirby (2011), *Mad 2104 Course Notes* (págs. 147 a 149).

7. *Un número impar es el que no se divide en dos partes iguales, o difiere de un número par en una unidad* (*An odd number is that which is not divisible into two equal parts, or that which differs by an unit from an even number. περισσός δέ ὁ μή διαιρούμενος δίχα ἤ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ*).

Este axioma expone la definición de número impar: un número impar (*περισσός*) en cambio (*δέ*) el (*ὁ*) no (*μή*) se divide (*διαιρούμενος*) en dos (*δίχα*) como (*ἤ*) la (*ὁ*) unidad (*μονάδι*) prevalece (*διαφέρων*) completa (*ἀρτίου*) como número (*ἀριθμοῦ*). Está el vocablo (*περισσός*) que significa algo que está más allá del número regular, algo que es extraordinario, magnífico, superior, desmesurado y excesivo; algo que de alguna manera ejemplifica la naturaleza del número impar, que también se escribe (*περιττός*, o *σκαληνός*). Viene, además, el vocablo (*περισσότης*) que es superioridad o exceso, y presenta un número (*ἀριθμός*) que desborda, sobra, sobreabunda (*περισσεύω*) por ser el mejor, esto conduce a (*περίσσευμα*) como la superabundancia y la plenitud. Se tiene, pues, un número que plantea toda suerte de situaciones paradojales, que es imposible hacerlo encajar en la unidad (*μονάς*), dado que la desborda (*περισσεύω*), planteando toda una suerte de preguntas que todavía no tienen una solución completa. El número impar (*περισσός ἀριθμός*) se caracteriz por no (*μή*) dividirse (*διαιρέω*) en dos (*δίχα*), hecho que es importante dado que de la unidad (*μονάς*) que le subyace el número uno (*εἷς*) como lo primero (*πρῶτος*): el dos (*δύο*) que es lo que le sigue como lo segundo (*δεύτερος*) debería poderse dividir (*διχάζω*) en dos partes dobles (*δίς*), hecho que no se da. Una de las propiedades de todo número impar es que trae (*φέρω*) entre sí (*διά*) a la unidad (*μονάς*), la transporta de diferentes maneras (*διαφέρω*), la contiene de manera completa (*ἄρτιος*). De igual manera, se puede decir que todo número par (*ἀρτίου ἀριθμοῦ*) le pertenece, dada la declinación en genitivo, donde un sustantivo modifica a otro sustantivo, o un sustantivo que es poseído por otro sustantivo, en este caso la impar (*περισσός*) establece la preeminencia sobre lo par. Se podría igualmente afirmar, que el número impar aventaja al par en una unidad; sin embargo, el uso de la unidad (*μονάς*) evoca a la mónada esencial a partir de la cual todo viene a la existencia. Por tal razón, hay que entender algo más, que simplemente agregarle una unidad a un número par, y que evoca la misma manifestación de lo que subyace emergiendo dentro y como parte de la diferencia.

4.4.7. La noción de una serie numérica par e impar

Los próximos axiomas abordan la noción de serie numérica bajo el concepto de (*ἀρτιάκις*) unido sea a lo par (*ἄρτιος*) o a lo impar (*περισσός*). De esta manera, bajo este criterio existen dos series numéricas fundamentales: la serie numérica de los números pares (*ἀρτιάκις ἄρτιος*) y la serie numérica de los números impares (*ἀρτιάκις δέ περισσός*). Es de resaltar el uso de la partícula (*δέ*) en el caso de los impares que significa: y, por otro lado, sin embargo. Debido a que la serie original es la de los números pares, la serie impar es definida a partir de la par[410]. Se destaca que este proceso se da bajo la combinación de dos preposiciones: De (*ὑπό*) a (*κατά*): *ὑπό* → *κατά* es decir desde y a lo largo (*ὑπό*) abajo, sobre, hacia (*κατά*), donde se podría apreciar que (*ὑπό*) equivale al dominio de la función, mientras que (*κατά*) representa el codominio de la función. En este caso, la función de medir f(*μετρέω*): *ἄρτιος ἀριθμός* → *ἄρτιος ἀριθμός*, de un número par a un número par; como también en el caso del número impar f(*μετρέω*): *περισσός ἀριθμός* → *περισσός ἀριθμός*, de un número impar a un número impar. Se resalta la profundidad del texto, y cómo de manera implícita, contiene más conceptos y nociones de los que a simple vista parecen sugerirse.

> *8. Un número parmente par es el medido por un número par según un número par* (*An even-times even number is that which is measured by an even number according to an even number. ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπό ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατά ἄρτιον ἀριθμόν*).

En este axioma se muestra: una paridad de veces (*ἀρτιάκις*) el número par (*ἄρτιος ἀριθμός*) es (*ἐστιν*) este (*ὁ*) a lo largo (*ὑπό*) del número par (*ἀρτίου ἀριθμοῦ*) medido

---

410 La noción de serie es una sucesión de números, en este caso de enteros, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ que puede ser simbolizada como $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. El concepto de serie nos conduce al problema del infinito (*ἄπειρος*) y al tema de la convergencia o divergencia de la serie. Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos tales que se tiene $a_n^{1/n} \to R$ en la medida que $n \to \infty$, se tienen las siguientes posibilidades: (a) Si $R < 1$, la serie converge, (b) Si $R > 1$, la serie diverge, (c) Si $R = 0$, es inconclusa. Ver Tom Apostol (1967) *Calculus* (pág. 384 y 400).

(*μετρούμενος*) a lo largo (*κατά*) del número par (*ἄρτιον ἀριθμόν*). La presente proposición el tema del número par, aquel que es perfecto y completo (*ἄρτιος*), es abordado en lo que se podría denominar una serie par, o sea, un número par tras otro. Inicialmente, se presenta un interesante manejo de las declinaciones: que va del nominativo (*ἄρτιος ἀριθμός*) al genitivo (*ἀρτίου ἀριθμοῦ*) para concluir en el dativo (*ἄρτιον ἀριθμόν*). El caso nominativo donde el sujeto recibe el predicado de manera directa logrando fusionarse con el mismo en una sola e indistinta entidad, para luego ser recibido por el caso genitivo donde se establece una modificación de tipo posesivo en que el argumento ha sido transformado por la función, y finalmente el caso dativo donde el argumento ha recibido el significado completo del predicado, señalando en este caso el objeto indirecto del verbo (*μετρέω*). Pareciera que se está en presencia de las tres etapas claras que se dan en la pareja predicado-sujeto o función-argumento, que definen la expresión f(x) = y. En el caso nominativo se tiene cómo (*ἄρτιος*) se nos presenta como la función y (*ἀριθμός*) como el argumento; luego viene el caso genitivo donde de alguna manera es el tránsito donde el argumento (*ἀριθμός*) está unificándose con la función (*ἄρτιος*). Y, finalmente, el caso dativo, donde tanto la función (*ἄρτιος*) como el argumento (*ἀριθμός*) se han unificado como una sola instancia, la ‘y’. Por lo tanto, esta proposición se ocupa de la continuidad del número par (*ἄρτιος ἀριθμός*), y de las características que tiene que asumir a nivel de su existencia (*εἰμί*) a fin que pueda definirse su medida (*μέτρημα*). Tal hecho está recreado por la interesante combinación de las tres declinaciones gramaticales: caso nominativo → caso genitivo → caso dativo. Se precisa que el caso nominativo al genitivo está mediado por la preposición (*ὑπό*) y el caso del genitivo al dativo por la preposición (*κατά*): desde abajo a lo largo y a lo largo hacia adentro, en un proceso que busca profundizar de manera confrontativa. El resultado es lograr establecer el arte de medir (*μετρητική*) del número par (*ἄρτιος ἀριθμός*), como uno de los parámetros fundamentales de medida (*μέτρον*) para prepararse a atar (*ἀρτάω*) la serie del número par (*ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός*). Como propósito fundamental subyace la problemática a satisfacer señalada por el verbo (*μετρέω*), que es: medir, contar y calcular algo por medio de la medida par. Aquella medida (*μέτρημα*) que es sinónimo de moderación y de guardar mesura (*μετριάζω*), como aquello que es la medida media común y corriente (*μέτριος*).

9. Y parmente impar es el medido por un número par según un número impar (An even-times odd number is that which is measured by an even number according to an odd number. ἀρτιάκις δέ περισσός ἐστιν ὁ ὑπό ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατά περισσόν ἀριθμόν).

En este axioma aparece una serie de números pares (*ἀρτιάκις*), es (*ἐστιν*), en consecuencia (*δέ*), el número impar (*περισσός*) aquel (*ὁ*) que desde abajo (*ὑπό*) mide (*μετρούμενος*) al número par (*ἀρτίου ἀριθμοῦ*) en concordancia (*κατά*) al número impar (*περισσόν ἀριθμόν*). La actual proposición introduce la noción de serie numérica, en este caso abordada como una serie de números pares (*ἀρτιάκις*), luego viene la partícula (*δέ*) cuya tarea es contrastar un argumento con otro asumiendo la tarea de la conectiva binaria de la conjunción, que une dos proposiciones sea atómica o molecular. En este caso, está conectando la serie numérica par (*ἀρτιάκις*) con (*δέ*) el número impar (*περισσόν ἀριθμόν*); aquel que en este contexto alude al número que posee un comportamiento más allá de lo ordinario y, en consecuencia, superior y extraordinario (*περισσός*). Luego viene una clausura introducida por el verbo (*ἐστιν, εἰμί*) con ayuda de la preposición (*ὑπό*), cuya tarea es mostrar que desde abajo y a lo largo (*ὑπό*), es (*ἐστιν*) el número par (*ἀρτίου ἀριθμοῦ*) el encargado de medir (*μετρέω*) a lo largo, hacia abajo, hacia (*κατά*) al número impar (*περισσόν ἀριθμόν*). Se asevera, así, que el número impar (*περισσόν ἀριθμόν*) declinado en acusativo, vendría a asumir la tarea de ser el objeto directo del número par (*ἄρτιος ἀριθμός*) bajo la acción transitiva del verbo ser y existir (*εἰμί*). En esta sencilla declaración está contenida una paradoja que ha marcado la existencia y el desarrollo de la aritmética y por ende de la matemática: la imposibilidad de medir (*μετρέω*) al número impar (*περισσός ἀριθμός*), como aquel número denominado magnifico y extraordinario (*περισσός*) que no tiene la posibilidad de recepcionar ninguna medida (*μέτρημα*) de él mismo, lo cual lo hace romper la moderación y la mesura (*μετριάζω*); y es una indicación clara de que no acepta ley (*νόμος*), dado que rompe toda costumbre acerca de la manera de comportarse del número (*ἀριθμός*). En concordancia, los números como serie (*ἀρτιάκις*) tan solo es posible de ser construida en los números pares (*ἄρτιος ἀριθμός*); a su vez, los números son la reunión de un número que acepta una norma (*νόμος*) que permite pronosticar su comportamiento o sea los números pares (*ἄρτιος ἀριθμός*) y aquel número que rompe con la ley o costumbre (*νόμος*), que no puede construir ni definir una serie por él mismo o sea el número impar (*περισσός ἀριθμός*). El importante acontecimiento que se establece aquí es la inexistencia de una serie numérica impar, que no esté apoyada en un número par sino en lo impar. Este hecho indica que no podemos clasificar al número uno (*εἷς*) ni como par ni impar; lo que lleva a que su estatuto existencial como número sea único, está solo (*μονάζω*): es la unidad (*μονάς*), lo que está primero (*πρῶτος*) indiviso. De ahí que la serie numérica comienza con el dos (*δύο*), lo que es doble (*δίς*) y, en consecuencia, con la posibilidad de separarse en dos (*δίχα*); es el dos (*δύο*) el que está y existe (*εἰμί*) como lo segundo (*δεύτερος*). Esto conlleva a que ni el uno (*εἷς*) ni el cero (asimilable en algo al punto, *σημεῖον*) no pueden ser clasificados como números, no son ni entes aritméticos ni geométricos, en cuanto no está sujetos a la generación o a la existencia como contrarios.

> 10. *Imparmente impar es el medido por número impar según un número impar* (*An odd-times odd number is that which is measured by an odd number according to an odd number*. *περισσάκις δέ περισσός ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπό περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατά περισσόν ἀριθμόν*).

Este axioma habla de una serie de números impares (*περισσάκις*) que es (*ἐστιν*), sin embargo (*δέ*), al número impar (*περισσός ἀριθμός*) la (*ὁ*) que desde abajo (*ὑπό*) mide (*μετρούμενος*) al número impar (*περισσοῦ ἀριθμοῦ*) en concordancia (*κατά*) al número impar (*περισσόν ἀριθμόν*). Esta proposición comienza formulando la noción de serie de los números impares (*περισσάκις*), aquella que es propia del número impar (*περισσός ἀριθμός*), la (*ὁ*) cual es (*ἐστιν*) la que desde abajo (*ὑπό*) mide (*μετρέω*) al número impar (*περισσοῦ ἀριθμοῦ*) a lo largo (*κατά*) por medio del número impar (*περισσόν ἀριθμόν*). Es interesante resaltar que la formulación inicial de lo que es la serie de los impares (*περισσάκις*) es introducida bajo el caso nominativo (*περισσός ἀριθμός*), para luego presentar un interesante juego entre dos proposiciones: de abajo (*ὑπό*) a lo largo (*κατά*), bajo la presencia del verbo (*μετρέω*), que es medir y calcular, como si se tuviera una función f(*μετρέω*), que mide al número impar por medio del impar. Este hecho está dado por la presencia inicial del número impar en genitivo (*περισσοῦ ἀριθμοῦ*) que indica un sustantivo siendo modificado por otro sustantivo. Media entre ambos casos la actividad emprendida por el verbo (*μετρέω*), que conecta al número impar en acusativo (*περισσόν ἀριθμόν*), de suerte que el objeto directo, en este caso es el mismo sujeto, en cuanto número impar, bajo la acción transitiva del verbo (*μετρέω*). Es de resaltar cómo la serie de números impares (*περισσάκις*) tan solo puede ser medida por medio del mismo número impar (*περισσός ἀριθμός*), un dilema que todavía no ha sido resuelto.

4.4.8. El número primo, como aquel que nos remite a la unidad primigenia

La pregunta que indaga por aquel número (*ἀριθμός*) que está primero (*πρῶτος*), el número primo (*πρῶτος ἀριθμός*) es aquel que es medido (*μετρέω*) por la unidad (*μονάς*). Este hecho, nos remonta a esa expresión numérica que de manera inmediata nos transporta al origen (*ἀρχή*), algo que es supremente útil y que plantea el problema de las jerarquías entre los mismos números, donde no todos son iguales en importancia entre sí. Se establece la exclusividad de esta operación bajo el vocablo (*μονή*) que indica una residencia, donde se permanece y en consecuencia es duradero, estable, firme y constante (*μόνιμος*), lo cual es una propiedad de la unidad (*μονάς*). Evoca una condición esencial, que es poder fundar el número (*ἀριθμός*) en la unidad (*μονάς*) primordial (*ἀρχή*), primera (*πρῶτος*), propiedad que cumplen los números primos[411].

> 11. *Un número primo es el medido por la sola unidad* (*A prime number is that which is measured by an unit alone. πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος*).

En este axioma se manifiesta, aunque con la influencia interpretativa de la fundamentación moderna de la aritmética, que el número primo o impar es el que comienza la serie numérica. Este hecho no es comúnmente aceptado por los griegos. Esta proposición afirma: el número (*ἀριθμός*) primero (*πρῶτος*) es (*ἐστιν*) aquel (*ὁ*) medido (*μετρούμενος*)

[411] Sea n, d dos enteros; decimos que d es un divisor de n si n= cd, para algún entero c. Un entero n se llama primo si n > 1, y los únicos posibles divisores de n son 1, n. Tenemos los primeros números primos como: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19… Ver Tom Apostol (1967), *Calculus* (pág. 36).

por la unidad (*μονάδι*) sola (*μονή*). No podemos en concordancia decir, que ese número primero es el primo, este hecho nos obliga a reconsiderar la construcción axiomática de los números enteros positivos. Estamos en presencia de lo que está antes a nivel espacio-temporal, aquello que por su preeminencia es superior (*πρότερος*), este hecho otorga un ventaja dado que puede adelantarse e ir más lejos (*προτέρω*) que todo lo demás. Por consiguiente, tal número (*πρῶτος ἀριθμός*) que tiene la potestad de estar adelante, preceder a todos y tener ventaja (*προτερέω*) es (*ἐστιν*) la unidad (*μονάς*): la que puede estar sola (*μονάζω*), la que puede asumir su existencia de manera autónoma sin depender de nada ni de nadie. Es aquel número (*ἀριθμός*) que está reducido a uno (*εἷς*), que permanece sin compañía y está solo (*μόνοω*). No se le puede asociar ninguna serie, ni par (*ἀρτιάκις*) ni impar (*περισσάκις*). A su vez, tan solo (*μονή*) es (*ἐστιν*) medible (*μετρέω*) por el mismo: la unidad (*μονάς*) permanente (*μονή*) se mide (*μετρέω*) por ella misma. Lo que es completo y no le falta nada (*μονάς*), además que es la única instancia que permanece de manera absoluta, que define el espacio-tiempo, lo antecede y lo fundamenta, tan solo por ella misma puede establecer cualquier procedimiento de medida, de cálculo y de conteo (*μετρέω*). La unidad (*μονάς*) es la medida (*μέτρημα*) de todas las cosas que existen.

> *12. Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común* (*Numbers prime to one another are those which are measured by an unit alone as a common measure. πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ*).

En este nuevo axioma se plantea la existencia de los números primos, en cuanto son números que evocan la unidad (*μονάς*), que se presenta de una manera diferenciada, en cuanto no aceptan división que no sea por ellos mismos. El tema de la unidad (*μονάς*) como el uno (*εἷς*) que subyace a todo tipo de operación, se asume como una propiedad del mismo. Se afirma: los números que están primero (*πρῶτοι ἀριθμοί*) en la dirección (*πρός*) recíproca (*ἀλλήλους*), es (*ἐστιν*) la unidad (*μονάδι*) solitaria (*μόνῃ*) por medio de la cual todo es medido (*μέτρῳ*) de manera común (*κοινῷ*), la que los (*οἱ*) mide (*μετρούμενοι*). La unidad (*μονάς*) pareciera que se presenta de manera constante, reapareciendo cada vez que se tiene un número primo, como si estos números primeros (*πρῶτοι ἀριθμοί*) evocaran una diferenciación de la indivisa unidad (*μονάς*), heredando de ella su propia condición de estar solos (*μόνος*), en cuanto no aceptan otra medida (*μέτρημα*) que no sea la de ellos mismos. De esta manera, el uno (*εἷς*) parece emerger en toda la serie numérica, alternándose entre la serie par (*ἀρτιάκις*) y la impar (*περισσάκις*). Es en esta última donde reaparece el uno (*εἷς*) como soportándola en medio de la diferencia de un número que es indivisible a no sea por él mismo, y que a su vez tan solo es medible (*μετρέω*) por él mismo. Se evoca una unidad general que parece trascender toda singularidad, capaz de aprehender lo inaprehensible como es el mismo número primo (*πρῶτοι ἀριθμοί*), que en este caso es equiparable al número impar (*περισσός ἀριθμός*). Surge entonces la pregunta: ¿Para qué nombrar lo primo de otra manera como lo primero? No sería más que para buscar consolidar la misma construcción axiomática de los números, como aquel diálogo dual entre la pareja par e impar, donde siempre tenemos a la unidad (*μονάς*) abriendo y soportando una presencia adelantada del uno (*εἷς*), que siempre está presente afirmando que es el causante de la diferencia y de la generación. Una vez más tenemos el pronombre (*ἀλλήλων*) que expresa dos direcciones y en consecuencia la presencia de una pareja, que en este caso está ordenada bajo la preeminencia de la unidad (*μονάς*) que como lo uno (*εἷς*) antecede a todos los números (*ἀριθμός*). Tal pronombre *allḗlōn* (*ἀλλήλων*), indica una acción de reciprocidad mutua, entre la unidad-uno (*μονάς-εἷς*) y estos diferenciados números primeros (*πρῶτοι ἀριθμοί*), que tan solo pueden ser medidos (*μετρέω*) por esa unidad (*μονάς*) que parece trascenderse a sí misma. Lo que está primero (*πρῶτος*) vuelve y reaparece no importa cuán lejos podamos situar estos números primos-primeros, que comparten todos esa unidad común bajo la cual todo es medido (*μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ*). Lo común (*κοινός*), lo que los hace comunes (*κοινόω*), la comunidad (*κοινωνία*) de los números primeros (*πρῶτοι ἀριθμοί*), es decir los números primos (*περισσός ἀριθμός*), aquellos que son llamados extraordinarios, magníficos, fuera de lo usual (*περισσός*). Una vez más se está considerando la naturaleza del número, como aquella conformada alrededor de la pareja dual par e impar.

4.4.9. La noción de número compuesto como fundamento para la multiplicación

Estamos frente al establecimiento de aquel número (*ἀριθμός*), que tiene la potestad de cuantificar de manera universal sobre los demás números: un número compuesto (*σύνθετος ἀριθμός*) es aquel número que es capaz de medir (*μετρέω*) a cualquier (*τις*) número (*ἀριθμός*). Esto se da como una consecuencia en que asume lo común (*κοινός*) que está en cada número; tópico que será la base para establecer los criterios de mínimo común denominador (m.c.m) y máximo común divisor (MCD)[412]; asimismo, es el criterio fundamental que subyace al proceso de factorización de toda expresión algebraica. En estos criterios se tiene la operación de la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*), que consiste en tomar un número (*ἀριθμός*) y aplicar muchas veces más (*πολλαπλάσια*) la unidad (*μονάς*) diversificada –o sea el mismo número que se desea multiplicar por sí mismo− que este número representa. En todo este proceso, se busca lograr reducir la expresión multiplicada (*πολλαπλασιάζω*) a una sola (*μονόω*), donde los criterios de muchas veces (*πολλάκις*) y lo común (*κοινός*), subyacen a todo este proceso operativo. Euclides califica este procedimiento como un nacer o venir a la existencia (*γίγνομαι*), el cual puede ser aplicado a cualquier (*τις*) número alrededor de sí mismo (*αὐτός*) de manera completa (*ἅπας*).

> *13. Número compuesto es el medido por algún número* (*A composite number is that which is measured by some number. σύνθετος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος*).

En este axioma se introduce una nueva noción de colocar junto, la de unir los compuestos (*σύνθετος*), para que queden completos. Este hecho es recreado en relación con el número (*ἀριθμός*), lo de tal combinación, arreglo, reunión y composición (*σύνθεσις*) expresa aquel pacto y alianza (*συνθήκη*) entre estos números (*ἀριθμός*), que ahora serán llamados números compuestos. Número compuesto (*σύνθετος ἀριθμός*) es (*ἐστιν*) el (*ὁ*)

[412] Tenemos el mínimo común múltiplo, el mcm (a, b) se da al descomponer un número por el entero positivo más pequeño que es divisible tanto por a como por b. Por ejemplo $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Puede ser expresado bajo la fórmula mcm (a, b) = a, b/mcd(a, b). El máximo común divisor (MCD) se da cuando se cumplen dos propiedades: MCD (a, b) es aquel divisor común d de a, b; asimismo d es divisible por cualquier otro divisor común de a, b: sea el caso entre los números 24 y 56, tenemos que 8 es el MCM, teniendo por divisores comunes: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 8. Ver: Frank Ayres (1965) en *Modern Algebra* (pags. 49, 59).

número (*ἀριθμῷ*) que mide (*μετρούμενος*) a cualquiera (*τινι*). Este hecho está resaltado por la posibilidad del número compuesto (*σύνθετος ἀριθμός*) de medir (*μετρέω*) a cualquiera (*τις*) o cualquier cosa. Indica también la presencia de una cuantificación universal (*τις*) de una acción que sale de ella misma hacia lo otro, hecho indicado por la declinación en dativo (*ἀριθμῷ*) del número, desplazándose fuera hacia un objeto indirecto que recibe esta acción.

> *14. Los números compuestos entre sí son los medidos por algún número como medida común* (*Numbers composite to one another are those which are measured by some number as a common measure. σύνθετοι δέ πρός ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ*).

En este nuevo axioma se continúa introduciendo las características de los números compuestos (*σύνθετος ἀριθμός*): el poner de manera conjunta o compuesta (*σύνθετοι*) y (*δέ*) en concordancia a la dirección (*ἀλλήλους*) de los números (*ἀριθμοί*) es (*ἐστιν*) aquel (*οἱ*) número (*ἀριθμῷ*) cualquiera (*τινι*) que mide (*μετρούμενοι*) lo común (*κοινῷ*) de la medida (*μέτρῳ*). Nótese que esta proposición comienza con el adjetivo en plural masculino nominativo (*ἀλλήλους*), para indicar una acción de juntar una pluralidad compuesta (*σύνθετος*): algo compuesto que va a quedar unido de manera completa, es una evocación a la ancestral problemática del todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*). Se está en presencia de un número (*ἀριθμός*) que tiene la propiedad de juntar, reunir; asimismo, de sumar y poner en orden (*συντίθημι*), verbo formado por la preposición junto, con (*σύν*) y el verbo colocar, situar, (*τίθημι*). En concordancia, el número compuesto (*σύνθετος ἀριθμός*), evoca aquel número (*ἀριθμός*) que tiene la potestad de efectuar una síntesis (*σύνθεσις*): aquel acuerdo que permite poner juntos, dentro de una composición que puede ser apreciada como una combinación, en nuestro caso, de números; asimismo, lo más interesante de tal hecho, es que dentro de la etimología de síntesis (*σύνθεσις*) está considerada nada menos que la operación aritmética de la adición, que es el fundamento de todas las operaciones aritméticas, lo cual indica que toda operación aritmética sin importar la que sea, debe de poder verse reducida a una suma, que desde esta perspectiva es una síntesis (*σύνθεσις*), la cual se fundamenta, además, en un acuerdo o tratado en relación con una colección o una reunión. De manera que la síntesis (*σύνθεσις*) contiene e involucra la noción de la operación aritmética de la suma (+), la operación de conjuntos conocida como la reunión ($\cup$), el concepto matemático de conjunto o colección { }. La noción de composición que se reserva para las funciones, la noción de acuerdo y tratado, que bien se la podría equiparar con la ley (*νόμος*), que en nuestro caso son los distintos axiomas (*ἀξίωμα*, aquello que es pensado como un principio evidente en sí mismo) sobre los cuales se fundamenta la composición, la suma y la reunión (*σύνθετος*). Ello remite a considerar que *sýnthetos* (*σύνθετος*), evoca aquella abstracción matemática, presentada como una síntesis (*σύνθεσις*) que busca establecer la definición de lo que es el número (*ἀριθμός*). Es decir, la sola introducción del vocablo (*σύνθετος*) asociada al número compuesto (*σύνθετος ἀριθμός*) establece la axiomatización del número como el gran ente matemático por excelencia.

El número compuesto (*σύνθετος ἀριθμός*) es aquel que tiene la potestad de reunir, sumar, acordar y componer (*σύνθεσις*) y, también (*δέ*) en relación al lugar, al tiempo y a la ocasión de lo que es predicado (*πρός*) del uno al otro (*ἀλλήλων*) de manera recíproca, lo que es (*έστιν*) propio de los números (*ἀριθμοί*). Es claro que en esta alocución se está tomando en cuenta que el uso en plural de número (*ἀριθμός*) hace referencia a los distintos números, los que hoy día son conocidos como: los conjuntos o compuestos (*σύνθετος*) números naturales, racionales, irracionales, reales, complejos e imaginarios, entre otros. Lo que se va a establecer es válido para los distintos números, son aquellas propiedades compuestas (*σύνθετος*) que comparten todos los números (*ἀριθμοί*), sin importar cuál sea su naturaleza. Este hecho viene reforzado por la presencia del pronombre indefinido (*τις*) declinado en dativo singular (*τινι*), que busca predicar aquello que es propio del número (*ἀριθμός*), que tomado como sustantivo señala aquello común a los distintos números (*ἀριθμοί*). Tal hecho viene a ser reforzado por 'cualquier número' (*τινι ἀριθμῷ*), ambos vocablos están declinados en dativo, que en nuestro caso señalan la presencia de un objeto indirecto en relación a un uso intransitivo verbal, que nos revela que la acción de medir (*μετρέω*) recae sobre lo común (*κοινός*) de lo que es medido (*μέτρον*): todos los números (*ἀριθμοί*) comparten una propiedad y característica común (*κοινός*), que es ser capaces de medir (*μετρέω*). Al mismo tiempo, se evoca la medida (*μέτρημα*) común (*κοινός*) que lleva a ser comunes (*κοινόω*) o iguales a fin de poder habitar en comunidad (*κοινωνία*): lo conocido como una colección o conjunto numérico. De manera adicional, se nota que la propiedad de medir (*μετρέω*), es aquella medida (*μέτρημα*) común (*κοινός*) que puede tomarse como una de las propiedades fundamentales del número (*ἀριθμός*). De ahí la sentencia: número que no mida no es un número, *ἀριθμός* ↔ *μετρέω*. Pero al mismo tiempo, evoca la íntima relación de la aritmética con la geometría, de cómo se ha definido al número en términos geométricos, más en concreto en relación a su posicionamiento en relación a una recta. Asimismo, tal número compuesto (*σύνθετος ἀριθμός*) nos recuerda la proporción áurea, como aquella razón común (*κοινός*) o general, que relaciona a todos los números entre sí. Además, interviene como aquel parámetro normativo que vigila y guía la síntesis (*σύνθεσις*): aquello que va junto (*σύν*) a una colocación, disposición, ordenación, proposición e implantación de una ley (*θέσις*).

> 15. *Se dice que un número multiplica a un número cuando el multiplicando se añade (a sí mismo) tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número* (*A number is said to multiply a number when that which is multiplied is added to itself as many times as there are units in the other, and thus some number is produced. ἀριθμός ἀριθμόν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν, ὅσαι εἰσίν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καί γένηταί τις*).

En este axioma se explicita la naturaleza de la multiplicación: en un número (*ἀριθμός*) lo sumable o contable o numerable (*ἀριθμόν*) como multiplicable (*πολλαπλασιάζειν*) se dice (*λέγεται*), siempre y cuando (*ὅταν*), cuanto (*ὅσαι*) es (*ἐστιν*) dentro (*ἐν*) de sí mismo (*αὐτῷ*) las unidades (*μονάδες*), cuantas veces (*τοσαυτάκις*) se añadan (*συντεθῇ*) aquellos (*ὁ*) que multiplicando (*πολλαπλασιαζόμενος*), y (*καί*) habiendo acaecido (*γένηταί*) en cualquiera (*τις*). Estamos frente al número (*ἀριθμός*), y vamos a adentrarnos a ampliar su naturaleza y propiedades que le son afines, aquellas con las que viene a la existencia (*γίγνομαι*), las que propiamente lo denominan: lo sumable, contable y numerable del número (*ἀριθμός ἀριθμόν*). La proposición de manera inmediata aborda el tema de muchas veces (*πολλάκις*), como multiplicar (*πολλαπλασιάζω*), en este caso, multiplicar la naturaleza o propiedades del número. Una vez más esta proposición inicial posee dos verbos: decir (*λέγω*) y multiplicar (*πολλαπλασιάζω*) dentro de una declinación en acusativo (*ἀριθμόν*), aquello señalable de manera directa acerca del número (*ἀριθμός*), en cuanto decible y ordenable o contable, significados contemplados en (*λέγω*) acerca del multiplicar (*πολλαπλασιάζω*). Se va a exponer en qué consiste la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*), tema que es introducido bajo la conjunción (*ὅταν*): que se compone del adverbio (*ὅτε*), que señala una fuerza condicional en relación a los eventos que van a tener lugar, y la partícula condicional que expresa potencialidad (*ἄν*). Lo que nos anticipa que se habrán de satisfacer algunas condiciones, estas son luego introducidas por el verbo (*εἰμί*) en torno al adjetivo relativo (*ὅσος*): cuán grande o cuanto, muy emparentado con el pronombre (*τόσος*), con el determinante (*πᾶς*) −que en el uso plural equivale a todo y a cada, y en el uso singular se refiera al todo– y al determinante (*ἅπας*) –que es la unión del alfa copulativa que indica unión conjunta o juntos *ἁ-* y *πᾶς* todo, para expresar todo o cualquier cosa que está junta como una totalidad−.

Solo que lo que está junto (*ὅταν*, *ὅσαι*) es (*ἐστιν*), aquello señalable por la preposición dentro (*ἐν*) de aquello que es lo mismo en cuanto ser (*αὐτός*): es decir, se ha de cumplir una propiedad que es interior (*ἐν*) y que involucra un proceso de interiorización introducida por el pronombre (*αὐτός*), que involucra un proceso reflexivo. Este vocablo proviene del adverbio (*αὖ*), que expresa algo que se da de nuevo y el artículo masculino singular acusativo de *ὁ* (*τόν*), el o aquello. Se trata de lo que acaece dentro de uno de nuevo, esa similitud reflexiva que lleva a que el número (*ἀριθμός*) se mire a sí mismo y se enfrente a su propia naturaleza. En la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*) se advierte que el número está más expuesto que en la suma (*πρόσθεσις*); de alguna manera, cualquier tipo de inconsistencia que tenga se ve de inmediato expuesta, llevándolo a fortalecer su propia naturaleza en cuanto a sus procesos de orden, conteo y numeración. Una vez más, esta proposición que contiene la clausura que revela la naturaleza del número en relación a la operación del multiplicar (*πολλαπλασιάζω*), gravita finalmente en la unidad (*μονάς*): la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*) lleva a incrementar muchas veces más (*πολλαπλάσια*) la unidad (*μονάς*), las expresiones múltiples (*τοσοῦτος*) que resulten deben de garantizar una unidad en cuanto puedan quedar reducidas a una (*μονόω*) y en consecuencia bastarse a sí mismas en cuanto son capaces de permanecer solas (*μονάζω*) de manera estable, constante y durable (*μόνιμος*). De modo que una de las aspiraciones de la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*) es lograr expresar una cifra completa, como una unidad (*μονάς*) completa y reunida (*ἅπας*). Luego tenemos una clausura que complementa a la anterior y esta introducida por el adverbio 'cuantas veces' (*τοσαυτάκις*). Aplicadas al verbo (*συντίθημι*) que es juntar, añadir, reunir, sumar, arreglar y poner en orden, donde se ha de conservar aquello que es multiplicado (*πολλαπλασιάζω*) de manera estable y unificada (*μονάς*). Luego, se concluye la proposición agregando una anotación final que es introducida por la conjunción y (*καί*) alrededor del importante verbo (*γίγνομαι*), aquel que gobierna todo proceso existencial de adquirir un nuevo estado de ser −nacer, venir, llegar, sobrevenir, acaecer y resultar– para cualquiera o cualquier cosa (*τις*). Se debe recordar que al utilizar el verbo (*συντίθημι*) estamos frente a un proceso de síntesis (*σύνθεσις*) que subyace a todo este proceso de incremento en muchas veces (*πολλαπλάσια*) de la unidad (*μονάς*), del uno (*εἷς*) diferenciado en lo múltiple (*τοσοῦτος*). En este caso, se está conservando su integridad gracias a un proceso de generalización, donde se da una cuantificación universal (*πᾶς*) alrededor de un proceso reflexivo (*αὐτός*) que permite incrementar algo al ser contactada su naturaleza más íntima y poder traer a la existencia (*γίγνομαι*) un nuevo número (*ἀριθμός*) aumentado o multiplicado, sin que el pierda su unidad (*μονάς*). Esto indica donde se reúnen todos los predicados decibles acerca del numérico, que han de ser preservados en cualquier tipo de operación en la cual se busca afectar y modificar la naturaleza íntima del número.

4.4.10. La multiplicación construye los números planos y los números sólidos

Notamos cómo se busca construir una relación que unifique la geometría con la aritmética; tal hecho lo vemos claro en estos axiomas, donde se establece una correspondencia entre la noción primitiva de número (*ἀριθμός*) con la de la línea (*γραμμή*). En esta forma, el número constituido como dos (*δύο*) establece una correspondencia uno-a-uno con cada uno de los lados (*πλευρά*): dos números (*δύο ἀριθμοί*) se relacionan mutua y recíprocamente (*ἀλλήλων*) con dos lados (*δύο πλευραί*). El lugar donde acontece esta venida a la existencia (*γίγνομαι*) no es otro que la superficie (*ἐπιφάνεια*), siendo uno de sus rasgos característicos el ser plana (*ἐπίπεδος*). En este lugar común (*κοινός*) se multiplican (*πολλαπλασιάζω*) los lados (*πλευραί*) por sí mismos (*αὐτός*) bajo la mediación del número (*ἀριθμός*). De lo anterior emerge el número plano (*ἀριθμός ἐπίπεδος*), se resalta que el número (*ἀριθμός*) dos (*δύο*)[413] no tiene la potestad de crear (*ποιέω*) una figura (*σχῆμα*) dotada de volumen como si lo puede hacer el número tres (*τρεῖς*). El contexto sigue siendo el mismo, los tres lados (*τρεῖς πλευραί*) se benefician de la acción del número (*ἀριθμός*), para que de manera recíproca y mutua (*ἀλλήλων*) pueda tener lugar el nacimiento (*γίγνομαι*) del número sólido (*στερεός ἀριθμός*). Tenemos un contraste entre lo plano (*ἐπίπεδος*) y lo sólido (*στερεός*), en este caso, la figura (*σχῆμα*) que se crea (*ποιέω*) tiene la potestad de albergar un volumen. Tal hecho se cumple para cualquier (*τις*) contexto y se entiende que los números no siempre son los mismos, este hecho vendrá a marcar la diferencia con el número cuadrado (*τετράγωνος ἀριθμός*) bajo el cual subyace el mismo (*ἴσος*) número (*ἀριθμός*).

> 16. *Cuando dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número), el resultado se llama (número) plano y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí* (And, when two numbers having multiplied one another make some number, the number so produced is called plane**,** and its sides are the numbers which have multiplied one another. *ὅταν δέ δύο ἀριθμοί πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται, πλευραί δέ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί*).

En este nuevo axioma aparece la introducción de una interesante nueva perspectiva acerca del número, a saber: siempre y cuando (*ὅταν*) asimismo (*δέ*) dos (*δύο*) números (*ἀριθμοί*) se hayan multiplicado (*πολλαπλασιάσαντες*) el uno por el otro (*ἀλλήλους*) los hace (*ποιῶσί*) alguno (*τίς*), el (*ὁ*) que se origina (*γενόμενος*) es llamado (*καλεῖται*) plano (*ἐπίπεδος*), el lado (*πλευραί*) también (*δέ*) ahí mismo (*αὐτοῦ*) el (*οἱ*) haya multiplicado

[413] Alberto Campos (2006), en *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática*, manifiesta que el concepto de número plano (*ἀριθμός ἐπίπεδος*) proviene de Pitágoras, donde es la figura del polígono bajo una progresión aritmética, cuyo primer término es el 1 y cuya razón es el número de lados del polígono, en este caso dos (*δύο*). De igual manera, se plantea la existencia de los números naturales, los números triangulares, los números tetraedrales o triangulares o sólidos (*στερεός ἀριθμός*) gobernados por el tres (*τρεῖς*). Esto nos conduce a que la razón puede ser lineal (*γραμμή*), plana (*ἐπίπεδος*) o espacial (*στερεός*). Ver: págs. 79 a 82.

(*πολλαπλασιάσαντες*) los números (*ἀριθμοί*) uno al otro (*ἀλλήλους*). Estamos frente al resultado de multiplicar (*πολλαπλασιάζω*) dos (*δύο*) números (*ἀριθμοί*), lo cual se lleva a cabo en dos direcciones o de manera recíproca (*ἀλλήλων*), lleva a crear (*ποιέω*) alguno (*τις*) nuevo o común (*κοινός*). Tal hecho es único, y evoca una de las propiedades más importantes de la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*), que consiste en reunir (*συντίθημι*) en un nuevo número (*ἀριθμός*) las propiedades comunes (*κοινός*) de ambos números (*ἀριθμοί*). Lo inmensamente interesante es evocar a la superficie (*ἐπιφάνεια*), concepto geométrico y vincularlo a la aritmética; este hecho se realiza al afirmar que llamará (*καλέω*) a tal nuevo número (*ἀριθμός*) creado (*ποιέω*), un número plano (*ἀριθμός ἐπίπεδος*). Luego, extiende las consecuencias de esta afirmación al contemplar que el número (*ἀριθμός*) tiene un lado (*πλευρά*), y ello como una consecuencia de vincular y ligar la fundamentación y la representación del número en la línea (*γραμμή*). Este hecho desencadena unas incalculables consecuencias, y ha rodeado el desarrollo y la evolución del concepto de número en los últimos dos mil años.

Ya se ha visto que la noción de lado (*πλευρά*) surge en relacióncon la superficie (*ἐπιφάνεια*), seguida de la noción de línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), de la noción del ángulo (*γωνία*) que está vinculada a la existencia de lo plano (*ἐπίπεδος*), la cual evoluciona hacia lo que es perpendicular (*κάθετος*), lo derecho (*ορθός*) para, finalmente, aparecer el lado (*πλευρά*) vinculado a una figura de tres lados (*τρίπλευρος*) en el libro 1: 19 (2, 4, 8, 10, 11) de *Los Elementos*. Es claro, apreciar que tal hecho solo se cumple si la línea (*γραμμή*) como plano (*ἐπίπεδος*) es recta (*ευθύς*). Sin embargo, la propuesta va un poco más lejos, al vincular el lado (*πλευρά*) a una figura, en este caso, geométrica. A su vez, contemplar que un ente geométrico, como es el lado (*πλευρά*), que hemos visto es el resultado de todo un proceso de derivación conceptual donde se ha operado distintos afinamientos a fin de precisar el surgimiento de la figura (*σχῆμα*) geométrica (L. 1: 14, en *Los Elementos*). Este ente tiene varias características, una de ellas es tener lados (*πλευρά*); asimismo, contemplar que un ente geométrico es receptivo frente a las operaciones aritméticas, es algo de suma importancia, dado que nos muestra la comunión y comunidad (*κοινωνία*) de la aritmética con la geometría. Toda figura (*σχῆμα*) está constituida por unos elementos (*στοιχεῖον*), siendo uno de ellos el lado (*πλευρά*) y, se puede presuponer que los otros elementos geométricos igualmente podrán recepcionar las operaciones aritméticas, y podrán ser representados a nivel numérico y, por ende, aritmético.

Un importante evento es que el lado (*πλευρά*) es susceptible de ser multiplicado (*πολλαπλασιάζω*) por sí mismo (*αὐτός*) bajo un número (*ἀριθμός*). Es algo fantástico que un ente geométrico logre crear un vínculo en doble sentido (*ἀλλήλων*) con un ente aritmético, dos entes que habitan universos distintos y que se puedan no solo comunicar sino también que el ente aritmético denominado número (*ἀριθμός*) sea capaz de asumir todo el peso de la decibilidad y decidibilidad del ente geométrico, en este caso, del lado (*πλευρά*) y que además se introduzca la propiedad reflexiva contenida bajo el pronombre (*αὐτός*). Es de destacar los importantes verbos que son llamados (*καλέω*) a tomar parte en esta escena: los verbos hacer (*ποιέω*) y nacer (*γίγνομαι*), para lograr que aparezca un nuevo número fruto de tal actividad existencial, donde las propiedades propias de cada ente (*ὄντος*) tanto geométrico como aritmético sean preservadas en la especial operación de la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*). En este caso, el multiplicar (*πολλαπλασιάζω*) ha sido definido como una operación que tiene que ver con lo que está dentro de uno mismo (*αὐτός*), a un proceso reflexivo donde la totalidad del ente (*ὄντος*) como unidad (*μονάς*), logra preservarse bajo un nuevo número que reúne (*συντίθημι*) las propiedades de ambos números (*ἀριθμοί*) conservándolas y las transmitiéndolas.

> 17. *Cuando tres números, al multiplicarse entre sí, hacen algún número, el resultado es un (número) sólido y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí.* (*And, when three numbers having multiplied one another make some number, the number so produced is solid, and its sides are the numbers which have multiplied one another. ὅταν δέ τρεῖς ἀριθμοί πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεός ἐστιν, πλευραί δέ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί*).

Este nuevo axioma amplía las propiedades de ese nuevo número surgido de multiplicar (*πολλαπλασιάζω*) dos números, aquí se extiende el criterio a tres (*τρεῖς*) números (*ἀριθμοί*) que van a ser afectados por la actividad dinámica (*ἀριθμέω*) propia del número (*ἀριθμός*). Tenemos lo siguiente: siempre y cuando (*ὅταν*) asimismo (*δέ*) tres (*τρεῖς*) números (*ἀριθμοί*) se hayan multiplicado (*πολλαπλασιάσαντες*) de manera recíproca (*ἀλλήλους*) creando (*ποιῶσί*) cualquiera (*τινα*), el (*ὁ*) nacido (*γενόμενος*) es (*ἐστιν*) sólido (*στερεός*), el lado (*πλευραί*) también (*δέ*) en él mismo y ahí mismo (*αὐτοῦ*) los (*οἱ*) haya multiplicado (*πολλαπλασιάσαντες*) mutuamente (*ἀλλήλους*) los números (*ἀριθμοί*). Estamos en presencia de una condición que se ha de cumplir (*ὅταν*) que, de igual manera (*δέ*), va dirigida hacia el número (*ἀριθμός*) cardinal tres (*τρεῖς*), la cual está relacionada con la operación de la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*). Hay que tener en la cuenta que vamos a multiplicar (*πολλαπλασιάζω*) tres (*τρεῖς*) números (*ἀριθμοί*) entre sí (*ἀλλήλων*), lo que nos llevará a crear (*ποιέω*) un nuevo número cualquiera (*τις*). Se señala la acción verbal que va del verbo multiplicar (*πολλαπλασιάζω*) al verbo crear (*ποιέω*): si multiplicamos (*πολλαπλασιάζω*) entonces creamos (*ποιέω*) cualquiera. Y, esto, simbolizado de manera breve sería: (*πολλαπλασιάζω* ↔ *ποιέω*) → *τις ἀριθμός*. La multiplicación es capaz de crear un número arbitrario o sea cualquier número. La posibilidad de crear cualquier (*τις*) número (*ἀριθμός*), nos lleva a que podamos reemplazarlo en una expresión propia del cálculo de predicados, ese número cualquiera como una variable libre: $(\forall x)\ ((\pi'_x \leftrightarrow \pi_x) \rightarrow \tau_x)$. Tal hecho es una condición para llegar a establecer leyes que gobiernen a todos los números y no se queden limitadas a un solo número, en este caso al tres (*τρεῖς*).

Este hecho fortalece la presunción de que la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*) tiene la potestad de crear, hacer y producir algo nuevo. Luego viene lo más revelador de este nuevo axioma: tal como la multiplicación de dos (*δύο*) números (*ἀριθμοί*) nos relaciona con lo plano o llano (*πεδίον*) propio de una superficie (*ἐπιφάνεια*), que ha sido construida a partir de la línea (*γραμμή*) y sobre lo que es plano (*ἐπίπεδος*), la multiplicación del tres (*τρεῖς*) en cambio, nos remite a las figuras (*σχῆμα*) sólidas (*στερεός*), lo que acarreará luego la necesidad de definir la noción del volumen y el problema de cómo calcularlo. El lado (*πλευρά*) multiplicado (*πολλαπλασιάζω*) recíprocamente (*ἀλλήλων*) en sí mismo (*αὐτός*) se plasmará en un número (*ἀριθμός*). Esta última proposición nos muestra el hecho que un lado (*πλευρά*), o sea un ente geométrico pueda ser representado a nivel aritmético a través de un número (*ἀριθμός*): estamos frente a la aritmétización de la geometría e, igualmente, frente a la geometrización de la aritmética. Hemos de ponder especial atención en el uso del verbo nacer (*γίγνομαι*), que resalta la aparición de los denominados números sólidos (*στερεός ἀριθμός*), los que tienen que ver con las figuras (*σχῆμα*) geométricas dotadas de un volumen.

4.4.11. El número cuadrado y cúbico se fundamenta en el isomorfismo del número

En estos dos numerales se aborda el caso cuando el número (*ἀριθμός*) es multiplicado (*πολλαπλασιάζω*) por sí mismo (*αὐτός*), cercano a lo que hoy día se conoce como la operación de la exponenciación a^n: cuando n = 2, nos da el número cuadrado[414] (*τετράγωνος ἀριθμός*); y cuando n = 3; nos da el número cúbico (*κύβος ἀριθμός*). Es de entenderse, que $2^2 = 4$, en concordancia con su nombre cuadrado o cuatro (*τετρά*); y $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, siendo 8 el cubo (*κύβος*) de dos. Este tipo de operación Euclides la circunscribe en el contexto de multiplicar (*πολλαπλασιάζω*) tantas veces lo mismo (*ἰσάκις* + *ἴσος*), siendo el criterio que rige, el que siempre se utilicen números iguales (*ἴσων ἀριθμῶν*) a fin de que podamos tener tal igualdad (*ἴσότης*) fundamentada en el mismo número o número isomórfico. El número cúbico se obtiene de multiplicar dos números y luego volver a aplicar el procedimiento una tercera vez, en este sentido, se está respetando una relación binaria entre los números y la noción de pareja ordenada.

> 18. *Un número cuadrado es el multiplicado por sí mismo o el comprendido por dos números iguales* (*A square number is equal multiplied by equal, or a number which is contained by two equal numbers. τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἤ ὁ ὑπό δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος*).

En este nuevo axioma se va a introducir, al igual que en los últimos dos axiomas, una nueva categoría de número, el denominado número cuadrado (*τετράγωνος ἀριθμός*): que es (*ἐστιν*) aquel (*ὁ*) elevado al cuadrado (*ἰσάκις ἴσος*) o (*ἤ*) el (*ὁ*) sobre (*ὑπό*) dos (*δύο*) números iguales (*ἴσων ἀριθμῶν*) abrazados o rodeados (*περιεχόμενος*). El número cuadrado

---

[414] Alberto Campos (2006), en *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática*, manifiesta que el concepto de número cuadrado (*τετράγωνος ἀριθμός*) proviene de Pitágoras, se caracteriza por ser obtenido mediante sumas parciales de números impares: 1 =1, 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9, 1 + 3 + 5 + 7 = 16, expresión que puede ser simbolizada como: $1+ 3 +\ldots+ (2n - 1) = n^2$ (pág. 79).

(*τετράγωνος ἀριθμός*) nos relaciona con lo que es lo mismo (*ἴσος*), lo equivalente y justo en muchos sentidos. Se plantea la definición de tal número, como aquel número igual (*ἴσων ἀριθμῶν*); este término al estar declinado en genitivo nos muestra que es una propiedad del cuadrado (*τετράγωνος*), del que tiene cuatro (*τετρά*) ángulos (*γωνία*). Es la operación aritmética de elevar un número al cuadrado (*τετράγωνος ἀριθμός*) involucra la presencia del número cuatro (*τετρά*), lo que es igual (*ἴσος*) como número (*ἴσων ἀριθμῶν*) se da bajo una serie par (*ἀρτιάκις*). Se comparan cuatro (*τετρά*) números que son iguales (*τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος*) y se los constituye como un único número. Luego se introduce la conjunción (*ἤ*) que permite comparar las dos clausuras y que complementa el significado de las mismas. La fuerza de esta segunda proposición recae sobre la preposición (*ὑπό*), que nos manifiesta que la propiedad de esta operación (en la cual no se menciona al verbo multiplicar, *πολλαπλασιάζω*) se da fruto de algo que proviene de abajo, debajo, evocando algo que está dentro y que acompaña la acción a emprender a lo largo de la misma durante un período de tiempo, y que en consecuencia involucra un movimiento (*ὑπό*). El cual está dirigido a dos (*δύο*) números iguales (*ἴσων ἀριθμῶν*) que han de cumplir la condición de la igualdad (*ἰσότης*) entre ambos, tal hecho está resaltado por el verbo (*περιέχω*): que es la unión de la preposición en derredor de y en razón del (*περί*); el verbo tener, mantener y sostener (*ἔχω*). Es importante la concepción involucrada en esta operación de abrazar y rodear a dos números iguales (*ἴσων ἀριθμῶν*) para que puedan lograr expandirse a cuatro (*τετρά*) instancias iguales, operación de la cual surgirá un nuevo número que es llamado el número cuadrado (*τετράγωνος ἀριθμός*). Adicionalmente hemos de tener en cuenta, que un cuadrado (*τετράγωνος*) posee cuatro ángulos internos iguales.

> 19. *Y un (número) cubo el multiplicado dos veces por sí mismo o el comprendido por tres números iguales* (*And a cube is equal multiplied by equal and again by equal, or a number which is contained by three equal numbers. κύβος δέ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις ἤ ὁ ὑπό τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος*).

En este nuevo axioma tenemos: el cubo (*κύβος*) en cambio (*δέ*) el (*ὁ*) elevado al cuadrado (*ἰσάκις ἴσος*) o el multiplicado por sí mismo y luego vuelto a multiplicar (*ἰσάκις*) o (*ἤ*) el (*ὁ*) comprendido (*περιεχόμενος*) sobre (*ὑπό*) tres (*τριῶν*) números iguales (*ἴσων ἀριθμῶν*). Estamos frente al tema tanto del cubo (*κύβος*), vocablo que alude al cubo como figura geométrica y al cubo como número cúbico. Axioma donde claramente se establece una relación entre la geometría y la aritmética, siendo el propósito poder relacionar cada ente y aspecto geométrico con uno aritmético, en busca de esa correspondencia entre ambas artes propias de la *techné* matemática. Una vez que tenemos al cubo (*κύβος*) lo vamos a dirigir, conducir y guiar (*κυβερνάω*) en dirección a un argumento que le agrega (*δέ*) algo a fin de complementarlo, este hecho recae sobre el número cuadrado (*ὁ ἰσάκις ἴσος*): aquello que es igual (*ἴσος*) otras tantas veces (*ἰσάκις*). A su vez, este número al cuadrado (*ὁ ἰσάκις ἴσος*) se vuelve a encontrar consigo mismo (*ἰσάκις*), en un proceso que lo lleva a estar tres (*τρεῖς*) veces presente bajo dos encuentros iguales (*ἴσος*) consigo mismo. Esta anterior proposición es independiente por sí misma y con sentido propio, es complementada por una nueva que le sigue, sea por medio de la disyunción ‘o’ (∨) o el comparativo ‘que’ que las conecta para afirmar: el (*ὁ*) comprendido (*περιέχω*) bajo, debajo, hacia y a lo largo (*ὑπό*) de tres números iguales (*τριῶν ἴσων ἀριθμῶν*). En el fondo se esconde una dinámica más elaborada, estamos frente a la función de la exponenciación: que es abordada bajo el vocablo (*ἰσάκις*), que es el mismo número de veces, tantas veces como, otras tantas veces; en unión con el adjetivo igual, equivalente (*ἴσος*). La idea subyacente es aquella que nos permite tanto elevar un número al cubo como también calcular el volumen de un cubo. La proposición anterior es equivante o se complementa o puede también interpretar como el proceso de rodear (*περί*) algo a fin de tenerlo, sostenerlo y poseerlo (*ἔχω*). Tal proceso de abrazar rodeando, envolviento, conteniendo y comprendiendo (*περιέχω*) se da alrededor de tres (*τρεῖς*) procesos de hacer iguales (*ἰσάζω*) el conteo (*ἀριθμέω*) de un número (*ἀριθμός*). También se aprecia como aquel procedimiento mediante el cual se iguala (*ἰσόω*) un número (*ἀριθμός*) tres (*τρεῖς*) veces iguales (*ἴσος*) en de un proceso donde todo el número se ve envuelto (*περιέχω*). Hemos de agregar que el cubo (*κύβος*) de igual manera nos refiere al dado y al azar, en un proceso que hay que conducirlo a fin de gobernarlo. Este vocablo alude al dado y al azar (*κυβερνάω*) a fin que su dirección (*κυβέρνησις*) nos permita vencer y conquistar (*τριάζω*) lo que es igual (*ἴσος*) cuando se ve sujeto a un proceso de reincidencia sobre sí mismo.

4.4.12. La noción de proporcionalidad numérica

Estamos frente al concepto de la proporción (*ἀνάλογος*), criterio bajo el cual se fundamenta la argumentación[415] de la construcción de una serie numérica (*ἰσάκις*). Esto nos lleva a abordar al número (*ἀριθμός*) como objeto reflexivo (*ἀναλογίζομαι*), que busca develar la proporción razonada (*ἀναλογισμός*) de la similitud y la semejanza. Es decir, la analogía en razón y proporción (*ἀναλογία*) que posibilita repetir tantas veces como se requiera el mismo número (*ἰσάκις ἴσος ἀριθμός*). Este criterio (*ἀνάλογος*) tiene como cometido abrazar y contener (*περιέχω*), aquello que se tiene y mantiene (*ἔχω*) como lo mismo y lo común (*ὁμός*). El problema de cómo hacer semejante a algo con otro algo (*ὁμοιόω*), se ve de manera explícita en la operación de la multiplicación (*πολλαπλασιάζω*): que es la que asume esta tarea en relación al número plano (*επίπεδος ἀριθμός*) y al el número sólido (*στερεός ἀριθμός*). La multiplicación (*πολλαπλασιάζω*) conserva las semejanzas (*ὁμοίωσοις*), cuando una parte (*μέρος*) es repetida muchas (*πολλαπλάσιος*) veces, preservando los parecidos comunes que conducen a igualar una expresión numérica con otra (*ὅμοιος*).

> 20. *Unos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto* (*Numbers are proportional when the first is the same multiple, or the same part, or the same parts, of the second that the third is of the fourth. ἀριθμοί ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καί ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἤ τό αὐτό μέρος ἤ τά αὐτά μέρη ὦσιν*).

En este axioma tenemos: los números (*ἀριθμοί*) son (*εἰσιν*) proporciones (*ἀνάλογόν*), siempre y cuando (*ὅταν*), el (*ὁ*) primero (*πρῶτος*), el (*τοῦ*) segundo (*δευτέρου*) y (*καί*) el (*ὁ*) tercero (*τρίτος*), el (*τοῦ*) cuarto (*τετάρτου*), otras tantas veces el mismo número de veces

[415] Peano denominó el vínculo que existe entre un número entero con otro entero la función de siguiente, Russell (1919), en cambio, propone la noción de R-hereditario que da frente a los términos que son R-ancestrales y R-posteridad, en ambos casos la prueba de su solidez descanza en el principio de inducción matemática que se le debe a Frege (1879). Lo útil de estos criterios es que están estructurados alrededor de la noción de orden, aspecto que comparten los llamados números naturales o números inductivos. Ver: Bertrand Russell (1919), en *Introduction to Mathematical Philosophy*, (págs.18-21).

(*ἰσάκις*) sean (*ᾖ*) muchos (*πολλαπλάσιος*) o (*ἤ*) la (*τό*) misma (*αὐτό*) parte (*μέρος*) o (*ἤ*) las (*τά*) otras (*αὐτά*) partes (*μέρη*) (*ὦσιν*) sean (*ὦσιν*). Este axioma comienza estableciendo una definición, los números (*ἀριθμοί*) son (*εἰσιν*) proporciones (*ἀνάλογος*). No obstante, podría también interpretarse como las proporciones que guardan los números entre sí: tal hecho está dado por la declinación en acusativo de proporciones (*ἀνάλογόν*), que señala un objeto directo que le es propio y necesario en relación a un verbo que está efectuando su acción transitiva de manera inmediata sobre y en él mismo. En este caso, estamos frente a los dos argumentos propios de este tiempo verbal transitivo: el sujeto mismo que es el número (*ἀριθμός*) y la proporción (*ἀνάλογος*), que vendría a constituirse como su indispensable objeto directo. Lo que involucra que los números (*ἀριθμοί*) requieren establecer proporciones, correspondencias y analogías (*ἀνάλογος*); este hecho nos está revelando parte de la naturaleza propia del número, que nos permite elaborar cálculos, reflexiones, razonamientos y proporciones (*ἀναλογισμός*), los cuales están presentes cuando se trata de contar, reflexionar, considerar y calcular (*ἀναλογίζομαι*) como una consecuencia directa de la proporción, la semejanza, la analogía y la concordancia (*ἀναλογία*). Luego, viene un vocablo que indica la presencia de una secuencia y de una serie numérica (*ἰσάκις*) y que está calificada en torno a la proporción (*ἀνάλογος*) y la analogía (*ἀναλογία*): tantas veces lo proporcionado o análogo (*ἰσάκις* + *ἀνάλογος*) a fin de diferenciarlo de otros casos. Como el que acabamos de ver en relación a la función exponencial, tantas veces lo mismo (*ἰσάκις* + *ἴσος*).

Tenemos una secuencia numérica constituida por cuatro números (*ἀριθμοί*), que están relacionados en parejas de a dos bajo un orden dado por la relación nominativo-genitivo: el primero del segundo, y (*καί*) el tercero del cuarto (*ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου*) ∧ (*ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου*). Una vez más, se nos está revelando que la noción de proporción (*ἀνάλογος*) requiere que consideremos una secuencia o serie u otras tantas veces (*ἰσάκις*) estructurada bajo la noción de una pareja ordenada definida como: (a_1, b_2), (a_3, b_4),…, (a_n, b_n). Es importante señalar la presencia de la conjunción siempre y cuando (*ὅταν*), que podría ser leída como la conectiva binaria de la bicondicionalidad, el si y solo si (↔). Esto obliga a que la proporcionalidad presente en (*ἀνάλογος*) se aborde como una relación constante entre magnitudes: $a_1/b_2 = a_3/b_4$, donde $a_1b_4 = b_2a_3$. El comportamiento de tales números proporcionados (*ἀριθμοί ἀνάλογος*) viene revelado y expuesto al final, siendo introducida esta última proposición por el verbo ser y existir (*εἰμί*) en su tercera persona singular del presente subjuntivo (*ᾗ*) y concluida por la tercera persona plural del presente subjuntivo (*ὦσιν*): algo que parte de un ente hacia muchos de la misma clase. Se comienza con el adjetivo en singular nominativo 'muchos' (*πολλαπλάσιος*) unido por la conjunción-disyunción o (*ἤ*), que también puede desempeñarse como la preposición 'que' cuando se están comparando dos predicados. Sigue lo que se está comparando que es la misma en acusativo (hemos de anotar, que está en neutro *τό αὐτό*), dado que la parte (*τό μέρος*) es un sustantivo neutro en griego. Sigue la otra clausura también antecedida por esta conjunción-disyunción (*ᾗ*) en relación a 'las mismas partes' (*τά αὐτά μέρη*). Es importante señalar la existencia del artículo dual en griego, en este caso en femenino (*τά*), a su vez la declinación en acusativo plural de 'mismas partes' (*αὐτά μέρη*). La declinación en acusativo señala la exigencia de la parte (*μέρος*) como el objeto directo necesario para recrear esta clase de relaciones de proporción (*ἀνάλογος*), donde 'muchos' (*πολλαπλάσιος*) guarda un estrecho vínculo con la operación de la multiplicación (*πολλαπλασιάζω*). Se concluye: sean (*ᾗ*) las muchas (*πολλαπλάσιος*; las partes, *μέρος*) o (*ἤ*) sea (*ὦσιν*) la misma parte (*τό αὐτό μέρος*) o (*ἤ*) a las mismas partes (*τά αὐτά μέρη*). Podemos apreciar la presencia del adjetivo en singular nominativo 'muchos' (*πολλαπλάσιος*) sugiere la multiplicación (πολλαπλασιάζω): que sea da entre la misma parte consigo misma y de las mismas partes entre ellas mismas, siempre y cuando asumamos que esta relación de comparación de la parte (*μέρος*) se da como una pareja ordenada o díadas de números ordinales ordenados.

> 21. *Números planos y sólidos semejantes son los que tienen los lados proporcionales* (*Similar plane and solid numbers are those which have their sides proportional. ὅμοιοι ἐπίπεδοι καί στερεοί ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τάς πλευράς*).

Este axioma busca establecer la proporcionalidad que existe entre números planos y sólidos: los números (*ἀριθμοί*) planos (*ἐπίπεδοι*) y (*καί*) sólidos (*στερεοί*) similares (*ὅμοιοι*) son (*εἰσιν*) los (*οἱ*) que tienen (*ἔχοντες*) los (*τάς*) lados (*πλευράς*) proporcionados (*ἀνάλογον*). Estamos frente a aquello que es similar o que se parece (*ὅμοιος*), es como si la acción de hacer semejante a algo con otro algo (*ὁμοιόω*) involucra un proceso de asimilar, comparar, adaptar en busca de hacerse igual que o parecido a (*ὁμοιόω*). Tal semejanza (*ὁμοίωσοις*) parece recaer sobre el lado (*πλευρά*, que en griego es un sustantivo femenino), siendo el lado (*πλευρά*) aquel ente (*ὤν*) que va a asumir la tarea de geometrizar al número (*ἀριθμός*). Tal hecho de tener, poseer y mantener (*ἔχω*) lo mismo y común (*ὁμός*) se da al igualar lo que es plano (*επίπεδος*) propio de la superficie (*ἐπιφάνεια*), con la propiedad de contar y enumerar (*ἀριθμέω*) propia del número (*ἀριθμός*). Sin embargo, hay algo en el fondo que merece la pena en ser tenido en cuenta, es la intervención de la operación de la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*) en el concepto del número plano (*επίπεδος ἀριθμός*) siempre y cuando (*ὅταν*) se cumpla la condición de multiplicar (*πολλαπλασιάζω*) dos (*δύο*) números (*ἀριθμοί*) entre sí (*ἀλλήλων*). A su vez, el número sólido (*στερεός ἀριθμός*) se da a condición que (*ὅταν*) se multipliquen (*πολλαπλασιάζω*) tres (*τρεῖς*) números (*ἀριθμοί*) entre sí (*ἀλλήλων*). Lo que hace que, tanto el número plano (*επίπεδος ἀριθμός*) como el número sólido (*στερεός ἀριθμός*), involucren y exijan la operación de la potenciación, que ha sido denominada: tantas veces el mismo número (*ἰσάκις ἴσος ἀριθμός*) sea al cuadrado (*τετράγωνος*) o al cubo (*κύβος*), en cuanto se de una reincidencia mutua del mismo (*ἴσος*) número (*ἀριθμός*) dos (*δύο*) o tres (*τρεῖς*) veces. Se reconoce que el verbo que posibilita tal encuentro es el que abraza, rodea, envuelve y contiene (*περιέχω*). El verbo multiplicar (*πολλαπλασιάζω*) no es mencionado aunque se supone que está presente actuando. De modo que un número plano (*επίπεδος ἀριθμός*) involucra una potencia al cuadrado (*τετράγωνος*) y un número sólido (*στερεός ἀριθμός*) involucra una potencia al cubo (*κύβος*). El parecerse (*ὁμοιάζω*) el lado (*πλευρά*) en relación con un número (*ἀριθμός*), es siempre y cuando (*ὅταν*) ese número es el mismo y está elevado a una potencia (*ἰσάκις ἴσος ἀριθμός πολλαπλασιάζω*). Esto nos lleva a apreciar que la noción de lado (*πλευρά*) está en relación con una figura con volumen, sea el cuadrado (*τετράγωνος*) o el cubo (*κύβος*); igualmente, lleva a hablar de manera similar (*ὅμοιος*), que el número llamado cuadrado y el llamado cubo pueden equiparse a ser números (*ἀριθμοί*) o figuras geométricas con volumen. En este logro tan importante hemos encontrado que una expresión aritmética ha logrado equiparse con una geométrica; es un sitio excepcional donde las dos grandes disciplinas han logrado construir expresiones comunes en variados sentidos posibles. Cabe destacar que el verbo que acompaña lo cubo (*κύβος*), a ese tres (*τρεῖς*) veces multiplicado por sí mismo, es (*στερεόω*), que significa hacer algo firme, fortificar y endurecer. Lo que nos podría invitar a considerar que existe una superioridad del cubo (*κύβος*) frente al cuadrado (*τετράγωνος*); dado que el primero sería una construcción más sólida, firme y robusta, tal como *steréōma* (*στερέωμα*) significa marco de referencia, fundación y firmamento.

4.4.13. La relación del todo con la parte se soluciona en los números perfectos

El concepto de número (*ἀριθμός*) parece resolverse en aquel número perfecto[416] (*τέλειος ἀριθμός*), aquel que ha logrado completarse y alcanzar su condición de acabado y realizado (*τέλειος*). Es el sueño y la añoranza de la fundamentación axiomática de los números que todavía no ha sido lograda. Para ello, habremos de haber resuelto (*τελευτέω*) la paradoja que gobierna al todo (*ὅλος*) frente a la parte (*μέρος*); no es más que volver a esa condición perfectiva de naturaleza infinita (*ἄπειρον*) propia de la mónada o unidad (*μονάς*) primigenia en el origen (*ἀρχή*) mismo de la existencia. Se sugiere que este proceso se da buscando la igualdad (*ἴσος*) entre las partes (*μέρος*), una vez se haya cumplido (*τέλλω*) ese encuentro del mismo número (*ἀριθμός*) consigo mismo (*αὐτός*), de los unos con los otros (*ἑαυτοῦ*).

> 22. *Número perfecto es el que es igual a sus propias partes* (*A perfect number is that which is equal to its own parts. τέλειος ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν*).

En este último axioma se resalta que: el número perfecto (*τέλειος ἀριθμός*) es (*εἰσιν*) el (*ὁ*) mismo (*ἴσος*), por consiguiente (*ὤν*), en las (*τοῖς*) mismas (*ἑαυτοῦ*) partes (*μέρεσιν*). Estamos frente a aquel número (*ἀριθμός*) que ha logrado llegar a su final, lo que lo hace ser perfecto, completo, entero, que ha logrado su pleno crecimiento y realización de manera

---

[416] Por número perfecto se entiende aquel entero positivo que tiene la propiedad de coincidir con la suma de todos sus divisores enteros positivos distintos a él mismo: 1 + 2 + 3 = 6 es el número perfecto más pequeño, le sigue 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28, asimismo, como 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496. Se dice que los números perfectos están muy relacionados con los números primos de Mesenne 2^{p-1}, Euclides estableció que si se cumple con la propiedad $n = 2^{m-1}(2^{m-1})$, n es un número perfecto, si 2^{m-1} es un número primo. Ver: *Michael Hazewinkel (2001), Perfect number*.

absoluta e infinita (*τέλειος*). Debe destacarse la concepción del número (*ἀριθμός*) como aquel ente (*ὥν*) que tiene un propósito a cumplir (*τέλλω*): el cual busca su completez a nivel de una realización perfectiva (*τέλος*) dado que ha logrado su unidad (*μονάς*). Esta es una consecuencia de haber resuelto (*τελευτέω*) el dilema fundamental de ser y existir (*εἰμί*), que consiste en el problema del todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*). En el trasfondo, tenemos el origen (*ἀρχή*), aquello que soporta desde abajo de (*ὑπο-*), el comienzo que permite venir a la existencia (*ἄρχω*) desde lo que está debajo de abajo (*ὑπάρχω*).

El ser completo, en el que las partes se han unificado, es un proceso que se origina en el ser mismo (*ἑαυτοῦ*). En estar situado en el (*τόν*) atrás de nuevo (*αὖ*), en ese encuentro con uno mismo (*αὐτοῦ*) dentro de una acción que se encamina hacia el ente (*ὥν*) de manera reflexiva (*ἑο, οὗ*). Notamos cómo lo que es igual (*ἴσος*) requiere que los números (*ἀριθμοί*), abordados como partes de un todo, hayan logrado unificarse e igualarse (*ἰσάζω*) entre sí (*ἑαυτοῦ*). El número (*ἀριθμός*) por excelencia es la mónada o la unidad (*μονάς*), esa actividad de unificar (*μονάζω*) las partes (*μέρος*) para que sean iguales (*ἴσος*) permite llegar a la plenitud perfectiva y completa (*τέλειος*). De nuevo, parece que hemos regresado al origen (*ἀρχή*) que, en nuestro caso, está en la noción de punto (*σημεῖον*): aquello que no tiene de ninguna manera parte (*σημεῖον ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*). Al final, la unidad (*μονάς*) vuelve al uno (*εἷς*), aquel número (*ἀριθμός*) perfecto y último (*τελευταῖος*), donde la actividad de contar, numerar, sumar (*ἀριθμέω*) ha cesado por completo. Estamos en el término de toda existencia, en la misma muerte donde se nos revela el propósito de la misma vida: su realización cumplida (*τελευτή*); finalmente (*το τελευταῖον*), hemos celebrado los misterios (*τελετή*).

5. HACIA UNA ONTOLOGÍA Y UNA EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS

El aporte más importante de la presente tesis, es la caracterización de lo que sería una ontología y una epistemología de las matemáticas. Tal tema se hace evidente en el paso del axioma que define al punto frente al axioma que define a la línea. Tal como lo expresó Arquímedes (*Ἀρχιμήδης*) de Siracusa: «*Denme un punto de apoyo y moveré el mundo*[417]» (*δῶς μοι πᾶ στῶ καί τὰν γᾶν κινάσω*). Tal hecho está representado en *Los Elementos de Euclides*, en el tránsito del punto a la línea: *un punto es aquello que no posee parte* (*σημεῖον ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*) a: *una línea es una longitud sin anchura* (*γραμμή δέ μῆκος ἀπλατές*. L.1.1; 1-2). Aunque existe una tenue diferenciación del primer axioma frente al segundo, y manifiesta al afirmar que se tiene longitud (*μῆκος*) pero no anchura (*ἀπλατής*), esto plantea un problema evidente en el segundo axioma que define la línea, debido a que todavía existe un nivel ontológico relacionado con las propiedades asociadas al ente (*ὤν*). El que no tenga dimensión en el plano físico, como lo es la carencia de anchura (*ἀπλατής*), es propio del plano del ente (*ēns*) en cuanto ser. Esto hace parte de su esencia (*essentia*), que no pueda ser predicada del mismo modo en relación con los atributos físicos. El ser no posee ni anchura ni largura, no tiene peso, no está constituido por materia alguna, no tiene dimensión, no está sujeto a las leyes del espacio y tiempo tradicionales. Tal aspecto se ve en el campo de la matemática, donde a nivel ontológico se da la imposibilidad de adjudicarle unas características predicativas a los entes matemáticos. Las matemáticas son dadas a querer apresar el objeto de su estudio, esto hace que todo término se vea sujeto a toda una serie de procedimientos algorítmicos, interpretables en ecuaciones y, por ende, solucionables en un resultado, el cual es sancionado en una respuesta algebraico-numérica: esta es la diferencia más importante entre el axioma 1 en relación al 2. El nivel ontológico

[417] Citado por Pappus de Alejandría en *Synagoge*, Libro VIII.

lo tenemos en lo que se afirma del punto, no susceptible propiamente a una definición que revele su completitud. Mientras el nivel epistemológico posibilita la aplicación de toda una diversidad de manejos semántico-sintácticos, en los cuales lo decible y decidible adquiere múltiples matices favoreciendo su interpretación en: fórmulas, ecuaciones, proposiciones y expresiones, apropiadas para el desarrollo de teorías altamente conectadas y jerarquizadas, donde un logro en alguna impacta de manera inmediata en las demás.

Lo largo (*μῆκος*) puede ser medido más lo no ancho (*ἀπλατής*), esto conlleva a que lo no ancho pertenece más a los dominios de lo ontológico que de lo epistemológico. El axioma 1 representa inequívocamente el nivel ontológico, esto se debe a que la predicación utilizada señala de modo indirecto lo que es lo uno: *outhén* (*οὐθέν*) es el caso de un adjetivo singular femenino en nominativo, hace referencia al pronombre *oudeís* (*οὐδείς*), que significa: nadie, ninguno, no, nada. Este viene constituido por (*οὐδέ*), que es la unión de la conjunción que significa ‘y no’ (que, a su su vez, se descompone en el adverbio *οὐ* que indica la negación ‘no’; y la partícula *δέ*, que significa y, pero. Lo que acentúa el carácter de esta negación) que, como adverbio, significa de ningún modo, e incluye al número cardinal uno (*εἶς*); a su vez (*δείς*), que significa nadie o nada, y es una variante posterior de (*οὐθείς*). En ese sentido, tenemos que lo uno (*εἶς*) está involucrado: lo que es lo uno, es el ente o el ser, es el fundamento sobre el que recae la predicación. Es la instancia desde la cual se afirma y predica la existencia, aquello que tiene que ver con lo que lo origina. Desde antaño, el ser o el ente fundamental no siempre se lo ha definido por la vía positiva sino por la vía negativa, por aquellas propiedades que no tiene. La vía positiva involucra un conocimiento del mismo, lo cual no es posible dado que no tenemos noticia del mismo por medio de ningún sentido físico. A su vez, la mente tampoco es capaz de apresarlo. Es más, aún las facultades del entendimiento y la sensibilidad[418] son fruto de la actividad que se

[418] El tema que nos ocupa permite establecer un rico diálogo con la *Crítica de la razón pura* de Immanuel Kant (1781), dicha obra estuvo muy influenciada por el papel predominante de las matemáticas y las ciencias en su época. Donde la sensibilidad es la capacidad de recibir representaciones al verse afectada por los objetos, que nos son suministrados por la intuición empírica. Mientras por medio del entendimiento podemos pensar dichos objetos, y de esta manera nos procuramos unos conceptos de los mismos (Losada, pág. 87-88). Tal distinción sigue manteniéndose en la matemática, no obstante las geometrías no euclidianas que fueron descubiertas entre el 1813 por Gauss y dadas a conocer de manera pública por Bolyai y Lobachevsky en 1830, nos obligaría a revisar y reinterpretar algunas posiciones de Kant derivadas del estudio de la geometría.

desprende del ser[419], más no están dirigidas hacia él mismo, dado que él está fuera de las mismas. Él causa y origina las afecciones, mas él mismo no está sujeto a la realidad que él crea o en la que se va a realizar su existencia limitada a una forma concreta. Esto hace que el punto, guardadas proporciones, haga parte de unas de las nociones primigenias propias del ser de las matemáticas, en concreto, de la geometría.

El punto (*σημεῖον*) no es el único constituyente matemático ontológico. En la definición de punto aparece el problema del todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*) −*un punto es aquello que no posee parte*−. Otro constituyente ontológico es el número (*ἀριθμός*), y la relación del todo y la parte es una de las estrategias cognoscitivas utilizadas para develar su naturaleza. En especial, tal problemática alude a la naturaleza del número como un término interpretable como cantidad o cardinalidad y ordenable bajo una ordinalidad. Sin embargo, como lo podemos notar de manera rápida, ello no agota la *predicabilidad* del número. Este hecho nos lleva a afirmar que el número (*ἀριθμός*) es todavía un ente matemático desconocido. Tal como está establecido en las categorías de Aristóteles, se predica de la cantidad (*ποσόν*) en relación a la cualidad (*ποιόν*)[420]. Se nota que todavía no ha sido abordado el problema de la cualidad o aspecto intensional en relación con la naturaleza del número; tan solo se tiene en cuenta su aspecto cuantitativo o extensional. Este tema es tocado en aquellas disciplinas conocidas como la numerología[421]. En el contexto aristotélico, el número podría representar la substancia (*οὐσία*) de las matemáticas. Aunque el Ser sea uno, la predicación fundamental del mismo se puede realizar por medio de las categorías aristotélicas u otras. Tenemos las distintas dimensiones de lo matemático: la aritmética, la geométrica, la algebraica, y otras. Sin embargo, el axioma del punto (*σημεῖον*) involucra al número (*ἀριθμός*): ¿Qué otro nivel está tácitamente presente en esta definición axiomática de punto distinta a la geométrica y a la aritmética, y todavía no notada? Vamos

---

[419] Entendemos el ser en el contexto kantiano, tal como está sugerido por el artículo de Martin Heidegger (1962): *Kant's Thesis about Being*, donde se afirma que el ser es: usamos el ser para nombrar aquello que decimos es, ha sido y está por llegar. Todo lo que nos alcanza y lo que nosotros alcanzamos atraviesa por ese es, expreso o tácito (pág. 7). En ese sentido, comprendemos que tanto el punto como el número, representan el ser de las matemáticas. Aquel ente que es, que siempre ha estado y estará posibilitando la disciplina como tal.

[420] En *Órganon* de Aristóteles se establecen las categorías sobre la que se puede predicar algo acerca de un sujeto en una oración o proposición

[421] La numerología está presente en la historia de la humanidad desde tiempos remotos, en la Grecia Clásica cada letra del alfabeto le correspondía un número. Esto hacía que las letras de cada palabra se pudieran sumar y arrogajaran un resultado que revelaba su dimensión oculta a nivel numérico.

a proponer que aquella dimensión aún no notada, aunque presente, es la algebraica. La entendemos como la algoritmia que hace posible unir o reunir algo: reunir las partes rotas[422]. En ese sentido, el álgebra vendría a ser aquel procedimiento que traza el camino para que las partes de un todo se puedan reunir. Es un camino doble: ya sea por medio de una ecuación, ya sea por medio de una proposición u oración[423]. El álgebra señala la presencia del lenguaje ordinario a nivel abstracto.

El álgebra representa una abstracción del lenguaje ordinario, es decir una separación (*abstractio*), un alejarse o retirarse (*abstrahō*) arrastrando algo afuera. La separación de lo que está unido en sus constituyentes primarios o básicos, es un proceso artificial donde se está violentando la naturaleza esencial del lenguaje: una descomposición donde se escinde lo que de entrada está unido de manera inseparable. En ese sentido, representa algo ajeno, extraño, poco concreto y dificultoso en su manipulación. Podremos plantear que es un proceso contrario al gramatical, que muestra el nivel evidente e inmediato del lenguaje. En el mismo se reconoce una tipología plenamente identificable y analizable a profundidad en los: sustantivos, verbos, adjetivos, adverbios, pronombres, artículos, preposiciones. En nuestro caso, el álgebra pareciera que separara lo que tienen y no tienen en común los nocionales gramaticales nombrados: el elemento común y los elementos no comunes en cada uno de ellos. Esto nos conduce a unos conceptos bien conocidos en aritmética, el denominador común aritmético y los términos que factoriza el álgebra. Pero aún tales expresiones no logran asir lo que estamos buscando, es algo que se nos revela en la naturaleza de los polinomios. Esto se expresa cuando se dice que una ecuación es de primer grado, segundo, tercer u otro grado. Surge, entonces, la pregunta: ¿Qué elementos constituyen a un polinomio? Algunos de estos elementos están señalados en el cálculo de predicados, y cuya distinción se le debe a Gottlob Frege (1879) cuando propuso en su *Begriffsschrift*[424]: asimilar la diferencia sujeto-predicado a la de argumento-función. De

---

[422] الجبر *al-ŷabr* 'reintegración, recomposición.

[423] Es importante destacar cómo Alfred Tarski (1956) define en: *Logic*, *Semantics*, *Metamatematics*, la teoría axiomática en relación con un conjunto de oraciones X, que contiene todas las expresiones posibles de ser derivadas. Este tema es también tocado en relación con su apreciación de la metamatemática, donde las oraciones son las constituyen el metalenguaje y no proposiciones.

[424] Hans Sluga (2007) en *New Makers of Modern Culture*, afirma que el *Begriffsschrift* (notación conceptual) en orden de importancia tan solo se lo puede comparar a los *Primeros Analíticos* de Aristóteles (pág. 521).

modo que en un polinomio podemos identificar una sumatoria o serie de términos cuya conectiva esencial nos lleva a la regla del *modus ponendo ponens*, tal como Alfred Tarski (1953)[425] lo expresa como el primer gran teorema de deducción:…..en él lo realmente destacable es el uso de la conectiva binaria de la conjunción (∧), como lo que conecta a los distintos términos entre sí. Tal como a nivel de una ecuación aritmético-algebraica es el operador de la suma (+).

Las proposiciones, abordadas como unidades completas, se unen por medio de las conectivas lógicas; mientras en el álgebra no ocurre esto, dado que se tienen porciones o pedazos de algo que se ha sido separando. Es como si una proposición 'p' fuera de alguna manera descompuesta en sus constituyentes primarios: tenemos unas partes separadas de un todo, que están constituidas por una letra que representa un término, asimilable a una variable[426] sea libre o ligada. Tenemos que este término algebraico tiene dos espacios fundamentales a ambos lados, uno para colocar al operador aritmético de la potenciación (o radicación) a la derecha de la expresión, mientras que a la izquierda está el operador de la multiplicación (o división). Lo que une a estos términos de un polinomio es el operador de la suma o una variante del mismo, dado que toda operación puede ser interpretada como una suma transformada. Se asume que toda esta expresión se resuelve a nivel numérico y que las tres instancias son reducibles a una sola, que puede ser escrita como una cifra. La elevación de la potencia otorga el grado de la ecuación: polinomio de primer grado, segundo, tercero,…, y cada uno tiene una solución específica. Este tema fue tratado desde la más remota antigüedad[427], desde los babilonios a los egipcios y a los griegos, pero la obra de más relevante fue la de Diofanto de Alejandría[428]. Esta fue mejorada por el matemático persa Al Juarismi, a quien se le debe su actual nombre de álgebra. El problema más importante de los polinomios está en el teorema de Nicolás de Fermat[429], que fue

[425] En su obra *Undecidable Theories*, Alfred Tarski (1953)

[426] Esta distinción es tratada por Bertrand Russell y Alfred North Whitehead (1910) en *Principia Mathematica*, donde la variable libre es llamada real y la variable ligada es denominada aparente (pág. 385).

[427] La historia del álgebra se remonta a más de tres mil años antes de nuestra era de Egipto y Mesopotamia, tal como lo muestra Morris Kline (1972), en *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (pág. 3 a 23).

[428] De la obra de Diofanto de Alejandría (201-285 d.C.) *Arithmetica* solo nos llegaron seis libros de los trece que constituían, fue traducida por el matemático árabe Qusta Ibn Luqa (820-912 d.C.), Encyclopaedia Britannica.

[429] La solución de uno de los problemas del milenio, el teorema de Fermat, fue realizada por Andrew Willes.

resuelto por Willes. Se supone que todos los sumandos de un polinomio se resumen en una expresión numérica, y en muchas ocasiones está acompañado con algunos términos que son irreducibles dado que representan constantes extralógicas[430] que son las que incorporan los modelos científicos susceptibles de una axiomatización formal. Notamos que en cada término constitutivo de un polinomio, es decir, la unión de tres constantes no lógicas: coeficiente numérico como antecedente, letra y coeficiente numérico como potencia que ocupa el lugar del consecuente, los coeficientes se asimilan a constantes con valores ya preestablecidos. Una proposición formal 'p' se asemeja a la expresión xA^x de un polinomio, donde las x están dadas como variables ligadas o aparentes, mientras la A representa una o varias variables o libres o reales (abc..) que puede asumir un polinomio, sea el caso: $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{k=1}^{n} a_kx^k$. Al igual que las proposiciones, podemos operar los polinomios entre sí, asimismo los podemos derivar, componer, factorizar, integrar. Se los puede definir sobre el conjunto de los naturales, los enteros, los racionales, los reales y los complejos. Existen polinomios trigonométricos, matriciales y como series de potencias. Tal hecho nos brinda una gran movilidad e introduce algunas variantes en relación a cada caso.

El polinomio es una de varias expresiones matemáticas que existen, esta puede ser compleja o simple en la forma básica xA^x; puede ser una mezcla, donde las variables libres y las ligadas coexisten, conjugándose dentro de una estructura en la que la decibilidad acerca de qué tipo de expresión no es tan discernible y en consecuencia clasificable. Tal conjugado de diversa naturaleza de operadores matemáticos se entremezcla en una arquitectura operativa compleja, no obstante, sigue unos criterios bien definidos en cuanto a su resolubilidad como expresión matemática. Un tema fundamental a nivel de la solución de una expresión compleja matemática es la relación que se debe de mantener con su aspecto probatorio, sea fundamentado en la teoría de conjuntos o en otro sistema como la teoría de categorías. En ese sentido, tenemos dos niveles de discurso matemático distinto: a un lado tenemos una expresión matemática simple o compleja, mientras al otro lado tenemos su sistema probatorio, sujeto a un análisis que sustenta la solución de la expresión

[430] En su obra *Semantics, Logic, Metamathematics*, Alfred Tarski (1953).

misma. En tal caso, también se contempla la expresión en términos de su semántica en relación con la prueba y su sintaxis a nivel de una teoría de modelos.

En consecuencia, proponemos que el nivel ontológico de las matemáticas versa en principio sobre tres entes fundamentales: el punto, el número y la dinámica que subyace al concepto de función. Este último ente, es aquel que está en toda formulación algebraica y lógica; es lo que Frege en *Begriffsshrift*[431] identifica con la pareja función-argumento en relación al predicado y al sujeto. Notamos cómo en el comienzo de la citada obra, se establece una nomenclatura que va a ser fundamental para el desarrollo de la lógica, y es el símbolo de juicio expresado como $\vdash\!\!-$: el cual es la combinación de la afirmación del juicio que es la línea vertical, y el contenido de la misma que es abordado como una totalidad y está representado en la línea horizontal. Tal símbolo se viene a constituir en el predicado común para todos los juicios. El tema de los juicios tiene que ver con la génesis de las mismas proposiciones, que son los instrumentos fundamentales de la lógica. Es de destacar cómo Frege evita abordar la sutil diferencia entre un juicio analítico y uno sintético[432], como también la diferencia entre juicios categóricos e hipotéticos. Para él tan solo tienen un sentido gramatical[433]. Donde proposiciones como: $\vdash \Phi(A)$, $\vdash \Psi(A, B)$ expresan la relación de las funciones Φ y Ψ frente a los argumentos (A) y (AB). Frege los utiliza para abreviar el proceso cognitivo que se da en el lenguaje. Algo que hemos de tener presente, es que los juicios se dan en el nivel epistemológico, susceptibles de ser definidos por axiomas simbolizados en proposiciones lógicas. En ellos se sanciona los criterios de verdad o falsedad u otro tipo de certeza lógica sujeta a un criterio de verificación, tanto a nivel del desarrollo de una teoría como de una situación observada en el mundo y que

---

[431] La gran obra de Gottlob Frege (1879), *Begriffsschift*, como él mismo lo anotó, se entiende como un lenguaje formula modelado a partir del de la aritmética para el pensamiento puro. Es una *lingua characterica*, un lenguaje escrito en símbolos especiales tal como lo entendió Leibniz (págs. 1-2; 12-14).

[432] Es de destacar la distinción que efectúa Kant (1781) en *Crítica de la razón pura* entre juicio analítico y sintético: es la relación del sujeto con el predicado, en el caso analítico el predicado B pertenece al sujeto A, está contenido en él: $B \in A$, o $B \subset A$. Mientras en el caso de los juicios sintéticos ocurre otra cosa, se puede añadir algo nuevo al concepto del sujeto un predicado que antes no existía: $B \notin A$, $B \not\subset A$ (pág. 50-51).

[433] Tema expuesto por Frege (1879) en *Begriffsschrift*, tales distinciones las omite debido que él afirma: "Pero, dado que no afecta el contenido conceptual del juicio, la forma apodíctica del juicio no tiene significado para nosotros" (pág 13). La diferencia que más le interesa, es la que se da entre un juicio universal y uno particular, que no es una distinción entre los juicios sino más bien entre sus contenidos: juicio con contenido universal y juicio con contenido particular. La negación en este contexto es algo que se le agrega al contenido para que pueda volverse un juicio.

puede ser interpretada en una fórmula. En el nivel ontológico no tenemos propiamente proposiciones ni axiomas, ni nada que involucre una constatación por medio de una expresión matemática. Esto se debe a que no se puede conocer ni dar cuenta de tales entes en el nivel de precisión que una ecuación lo permite: no pueden ser apresados de manera completa, se reconoce su existencia por las necesidades que requiere la fundamentación de toda teoría estándar, como aquella una base conceptual sobre la cual se construye. Los entes ontológicos matemáticos poseen las siguientes características:

i. Se los utiliza a todo momento, en especificaciones que han sido sancionadas por los modelos a los que sirven: sea el caso, muchos creen que un punto es situar una señal desde la cual se pueda construir una línea; otros creen que un punto es una esfera[434] en concordancia a las necesidades derivadas de la topología. Sin embargo, no se logra decir todo acerca del punto.

ii. Toda la teoría depende de ellos y es la instancia que la define por completo. Si vamos a la noción de punto (L 1.1.1) de Euclides en *Los Elementos*, notamos que es el axioma más importante de todos. Sin embargo, tal axioma dice: *un punto es lo que no tiene partes*. No permite inferir ni predicar ni aseverar nada. Es lo que podríamos denominar un meta-axioma necesario, imposible de ser definido en términos operativos lógico-inferenciales. No se puede afirmar que tales nocionales ontológicos sean conceptos ni términos, sino más bien el substrato indecible que afecta la completez y la decidibilidad de toda teoría.

iii. Es tan grande la importancia de este substrato indecible e indecidible, que cuando requerimos una teoría de mayor alcance, se hace necesario ampliar la decibilidad y decidibilidad del mismo. Tal es la razón por la cual es tan difícil fundamentar una teoría en una axiomatización: siempre habrá que partir de unos nocionales primitivos no susceptibles

[434] Podemos citar el texto de Alfred Tarski (1927) cuyo título es *Foundations of the Geometry of Solids*, en *Logic, Semantics, Metamathematics*. En tal obra, Tarski aborda el punto como la clase de todas las esferas que son concéntricas a una esfera dada. (pág. 27). No obstante, la noción de punto es anticipada en la definición de un individual X, que es llamado la parte propia de un individual Y; siempre y cuando X es una parte de Y y X no es idéntico con Y (pág.25). Ya se vio en la segunda introducción de *Principia Mathematica* de Russell & Whitehead (1927), donde se dice que un individual es cualquier cosa que puede ser el sujeto de una proposición atómica (pág. xix). La noción de individual equivale a encontrar aquel término lógico no susceptible de ser reducido, como lo es el punto.

de ser llevados a un nivel más básico, siempre tal substrato nos planteará toda suerte de situaciones paradojales.

La epistemología se ocupa, ejercita y establece sus procedimientos en las axiomátizaciones susceptibles de una verificación apreciable en una demostración, lo cual está garantizado por el plano ontológico. Tal hecho, se aprecia en la misma definición de línea, donde el punto es lo que la determina. A su vez, la línea acondiciona lo que es una superficie y todas las figuras que se pueden contruir a partir de la misma, tanto planas como sólidas. En caso que seamos capaces de modificar el nivel ontológico del punto, todo se modifica y se cambian los protocolos que determinan las etapas de una demostración. Notamos que la noción de membresía de un individual frente a una clase está dada por este elemento básico que, además de ser irreducible, es la materia prima que hace posible la construcción de todos los demás. Este hecho lo podemos resaltar debidamente:

iv. La fundamentación de la membresía del elemento primario que define la pertenencia de todos los demás elementos derivados o secundarios, son de carácter epistemológico en relación con el elemento ontológico que los hace posibles. Una línea (*γραμμή*) existe gracias a los puntos que la constituyen y, a su vez, una línea pertenece a la superficie por los puntos que la resuelven. La existencia del punto posibilita la existencia de la línea: $(\forall\ \sigma, \gamma)\ (E_\sigma \rightarrow E_\gamma)$. A su vez, la membresía del punto $\in_\sigma$ determina la membresía de cualquier elemento $\in_x$ frente a cualquier clase de geometría: $\vdash .\ \in_\sigma \rightarrow \in_x$. Estamos aquí aseverando que existe una membresía ontológica que determina la membresía epistemológica. El punto (*σημεῖον*) es el único elemento que posee la membresía ontológica, dado que todo ente geométrico de cualquier tipo de geometría está constituido por puntos. Es el punto el que asume la convalidación teórica de los demás entes geométricos de todas las demás geometrías, sean euclidianas o no euclidianas.

v. Este hecho remite a que la concepción de punto debe poder ayudar a modelar cualquier tipo de geometría. Lo que nos sugiere que los metapostulados ontológicos deben ser varios en relación con la decibilidad de su ente fundamental, que tan solo puede ser uno. En este sentido, se cumple la unicidad completa del plano ontológico, un único elemento primigenio que constituye a todas las geometrías.

Entre las distintas condiciones que deberían de estar contenidas en la meta-formulación del plano ontológico, el cual no requiere satisfacer una prueba epistemológica, dado que es el que la hace posible. La prueba ontológica está dada en la tenencia de dicho meta-elemento, y en habernos procurado su red o estructura de decibilidad. Las características del elemento ontológico son:

i. La igualdad del todo con la parte: *ὅλος* ≡ *μέρος*. Tal hecho es una consecuencia directa de la existencia de un único elemento fundante de lo geométrico a nivel ontológico: $\exists!\sigma$.
ii. De igual manera, tal hecho nos impide considerar que pueda existir un elemento que lo anteceda: es el primero en existir y nada puede predicarse antes del mismo. Este sencillo hecho, nos lleva a la noción de lo uno (*εἶς*) como lo primero (*πρῶτος*). Se comprende, que la noción del uno en este contexto no es aritmética sino geométrica, asemejándose a la unidad (*μονάς*).
iii. La noción de categoría (*κατηγορία*) se fundamenta en este nivel, como la predicación necesaria e indispensable para construir cualquier tipo de modelo o teoría.
iv. Esta noción nos trae el concepto de número (*ἀριθμός*) al poseer un recorrido, que atraviesa una serie de estaciones identificables con las distintas categorías que constituyen lo numérico. En ese sentido, podríamos acercarnos a Kant[435] al afirmar: el punto es una noción transcendental propia de la sensibilidad dado que construye el espacio, mientras el número es propio del entendimiento y es la instancia que define al tiempo.

---

[435] La posición de Immanuel Kant (1781) en *Critique of Pure Reason* (Cambridge 1998) en la cual aborda el espacio y tiempo como conceptos propios de la estética trascendental, es notable. Se resalta cómo el tiempo es una forma del sentido interno, mientras el espacio de la forma pura para todas las intuiciones exteriores (pág. 180). En este contexto, el punto representa al espacio y el número al tiempo. Lo que está en concordancia con las proposiciones sintéticas a priori, que son también las que vendrían a constituir el campo de formulación de las matemáticas. La preocupación de Kant por el quinto postulado de Euclides la notamos en el comentario: "*dos líneas rectas sin que exista espacio alguno que puedan contener*" (A-48, pág. 184), manifiesta el interés en la geometría de Euclides, reconocía aquello que no era del todo claro y explícito en él.

5. 1. Los nocionales aritméticos en una epistemología pitagórica

Vemos cómo Pitágoras, citado por Aristóteles[436], menciona que los pitagóricos fueron los primeros (*πρότερος*) en afirmar que en el origen (*ἀρχή*) mismo de la vida estaban los números (*ἀριθμοί φύσει*); además, se accede a los mismos a través de una dimensión sensible gobernada por lo que es bello (*τό κάλλος εος*). La condición misma de la existencia (*γίγνομαι*) proviene de los números (*ἀριθμός*), siendo los constituyentes mismos de los elementos alrededor de los cuales se organiza la realidad: representada por el fuego (*πῦρ*), la tierra (*πῦρ*), agua (*ὕδωρ*) y el aire (*ἀήρ*). De igual manera, el número nos permite aproximarnos a la justicia *(δικαιοσύνη*), nos acerca a lo que es lo semejante (*θεωρεῖν ὁμοιώματα*) como fundamento de toda teorización. Merece la pena resaltar cómo los números organizan el universo (*οὐρανός*); este hecho está dado en la diferencia que existe entre un tiempo previo al número (*kρόνος*) y un tiempo organizado fruto de la acción del número (*kρόνος*). En especial, el uno (*εἶς*) es la instancia desde la cual se fundamenta la noción del infinito (*ἄπειρον*). Es de destacar que en la palabra (*λόγος*) misma, en el decir (*λέγω*), está contemplada su acción ordenadora. Uno de los grandes aportes de Pitágoras son los diez principios duales constitutivos de todo ente.

Para Pitágoras, la concepción del origen (*ἀρχή*) de la naturaleza (*φύσις*) está dada en aquel soplo (*ψύχω*) primigenio fruto de la acción de los números (*ἀριθμός*). Es lo primero (*πρότερος*), en especial, el número uno (*εἶς*) es la mónada (*μονάδα*) y es única, esta fundamenta la existencia del universo (*οὐρανός*). Que las estrellas hacen parte de la divinidad, y en consecuencia la esfera (*σφαῖρα*) es una forma sagrada y perfecta, y el principio de la vida está en el calor (*θέρμη*). A su vez, la realidad comienza con la pareja (*δυάς*), representada en el dos (*δύο*) como lo segundo (*δεύτερος*), que da origen a los diez principios primigenios (*ἀρχάς δέκα*) duales. Estos vendrían a constituirse como aquellas categorías esenciales sobre las que se predica todo. Es importante destacar cómo el fundamento de la ontología, la epistemología y la metafísica está en el número. El uno (*εἶς*), como la unidad (*μονάς*) que subyace a todo cuanto existe y que es infinita (*ἄπειρος*). Este hecho nos lleva a considerar que el número uno contiene a todos los números. De alguna

[436] En la *Metafísica* de Aristóteles (985b 24 a 986b 2) se aborda la posición de los llamados pitagóricos.

manera, el cero es evocado en la anti-tierra (*ἀντίχθων*), el cual vendría a cumplir el equilibrio del cero en el modelo numérico. Podemos plantear que el uno (*εἷς*) y el cero-vacío (صِفْر) son en aspectos de una misma realidad, son lo mismo desde dos perspectivas distintas. Representan a ese origen (*ἀρχή*) común de todos los números (*ἀριθμοί*); en ese sentido, no son los números que estamos acostumbrados a ver, tratar y manipular. Están situados en otro nivel del lenguaje, en un metalenguaje. Por consiguiente, están sujetos a otro tipo de reglamentación semántico-sintáctica, una más cercana a lo indecible e indecidible mismo acerca de lo que existe. Estos evocan la naturaleza íntima de lo que es, de lo que siempre ha sido y será. Y, en consecuencia, lo inaprehensible e impensable por medio del lenguaje.

Algo que hay que considerar es cómo la ontología determina delimitando el campo de la epistemología, en cuanto le traza una normativa y le aporta el ente (*ὤν*) y el ser (*ēns*) que, constituidos como sujetos de toda reflexión, serán la materia sobre la cual versará su actividad y objetivos. Se aprecian dos niveles distintos de discurso, el ontológico y el epistemológico, en el caso que nos ocupa el número uno (*εἷς*) es propio de la dimensión ontológica y los diez números (*δέκα ἀριθμοί*) pertenecen al dominio de la epistemología. Esto nos obliga a construir un tipo de modelación diferente a nivel teórico, siendo una de sus caracterizaciones básicas que lo ontológico no está sujeto a un tipo de demostración que obedezca a unas leyes lógico-inferenciales amparadas en un cálculo de proposiciones, de predicados y de clases. La ontología matemática se puede constituir alrededor de unas sentencias o máximas, como aquellas que afirman y establecen que:

i. El número uno (*εἷς*) comprende a todos los números: aspecto cuantitativo.
ii. Que el cero (*zephirum*) es el mismo uno: aspecto cualitativo.
iii. El uno-cero representa el único universal singular que pertenece a una sola clase.
iv. El uno-cero es la base de toda cuantificación universal y existencial.

A lo anterior podemos, además, declarar: el número uno está en el origen (*ἀρχή*) de todo, es autosubsistente, no lo antecede el cero, es completo, único. No hay otro distinto al uno con quien compararse y, por tal motivo, es la unidad (*μονάς*) absoluta (*absolūtus*), perfecta y completamente realizada. El cero (*zephirum*) tan solo puede ser él mismo abordado desde otra perspectiva que complementa el significado del uno. Los diez números fundamentales tan solo representan o aluden a lo que es predicable de él en sentido legítimo, dado que el uno representa la justicia *(δικαιοσύνη*) y todo lo bueno que existe. A su vez, la existencia del dos (*δύο*), fundamento de toda pareja (*δυάς*), es lo que es lo segundo (*δεύτερος*) en relación a lo primero (*πρότερος*) que es el uno. El uno (*εἶς*) es el estado propio del cronos (*κρόνος*), aquella instancia que manda y gobierna (*κραίνω*). Al mismo tenor, la realidad se ordena por el número como lo establece Pitágoras, se tiene al *kairós* (*καιρός*) como el universo (*οὐρανός*) ordenado por los números. Estos vienen a la existencia como la pareja: número par (*ἄρτιος*) y número impar (*περισσός*). El número par proviene de (*ἄρτιος*), es algo completo, perfecto, maduro y que actúa en el instante mismo (*ἄρτι*). Mientras el número impar (*περισσός*) evoca lo extraordinario, lo prodigioso, lo irregular, lo que va más allá (*περί*).

La construcción de los números enteros en Pitágoras se da como sigue:

i. Un número supra transcendental que es el uno (*εἶς*), el cual es completo, perfecto, único, unicidente, englobante, permanente, infinito, absoluto, relativo, e inaprehensible. En términos kantianos, la naturaleza del uno se asemeja a una idea regulativa, alrededor de la cual se delinea un principio regulativo fundamentado a priori. Este es el garante universal del principio de la existencia, que se opone a los principios constructivos en los situamos a los demás números. Es el único universal singular y, en consecuencia, su formulación lógica nos conduciría a la conocida paradoja de Russell[437].

ii. A su vez, este número uno (*εἶς*) inaprehensible e infinito, es el mismo cero en cuanto ese uno puede ser valorado como el *unum* que es simultáneamente el *zephirum*. Ambos se caracterizan por ser completos; como ya lo anotamos, son aspectos de una misma realidad: la realidad inmanifestada (el cero) y la realidad manifestada (el uno), nos recuerda el paso de la potencia al acto en Aristóteles[438]: en el número, el cero es la potencia mientras

[437] La famosa paradoja de Russell establece que $R = \{x / x \notin x\}$ implica que $R \in R \leftrightarrow R \notin R$, donde R es el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de ellos mismos. Es un tema derivado de las contradicciones propias de la teoría de conjuntos, y la imposibilidad de poder simbolizar la realidad a nivel completo. Ver en *Russell´s Antinomy* en Wolfram Math World.

[438] Tenemos, en el libro IX de la *Metafísica* de Aristóteles, los vocablos para potencia (*δύναμις*) y para acto (*ἐνέργεια*): [1046a] [1] *for potentiality and actuality extend beyond the sphere of terms which only refer to*

el uno el acto. El cero y el uno representan el origen que fundamenta la existencia del número como ente formal abstracto, y representa el necesario retorno que toda serie numérica debe de tener. Esto conduce a aseverar que el número manifiesta su actividad existencial como una serie numérica que tiene como principio operativo una base, en este caso puede ser binaria, decimal, vigesimal, sexagesimal u otra. Hemos de anotar que la base numérica pitagórica es decimal. El cero (*zephirum*) representa el origen y el necesario e indispensable retorno de toda serie numérica fundamenta en una base. El uno (*unum*) representa la unidad fundamental que requiere tener toda expresión numérica, dado que toda serie numérica es autosubsistente si logra configurarse bajo una expansión de unidades enteras y completas. En ese sentido, no existe una serie numérica para los números racionales, ni para los irracionales, ni los reales ni los complejos. La única serie que se puede construir es la serie entera.

iii. La unidad numérica fundamento del número, el uno, se proyecta en una serie numérica sujeta a una base específica, en este caso decimal. Logra hacerlo por medio de un operador aritmético: la suma (+) es el operador universal aritmético por excelencia, cuya tarea inicial es garantizar la existencia de una serie numérica aritmética. En segundo lugar, este operador (+) debe de tener la potestad de permitir que cualquier expresión numérica no entera, y por ende no completa, pueda completarse o aspirar ser entera. Este hecho hace que si tenemos un número arbitrario no completo o entero ב (bet) al ser intervenido bajo un operador surgido y derivado de la suma (*), debe poder recuperar su unidad. Tal hecho puede ser simbolizado como: ב * ג = ד, donde dálet ד representa la completez de un número no entero e incompleto bet ב. Que luego que se ve operado por una transformación derivada de la suma (*) y representada en el número guímel ג que posibilita volver a adquirir la anhelada y requerida unidad a bet ב. En la completitud numérica fundamental (ב +* ג = ד) tanto bet ב como guímel ג representan estadios incompletos de la unidad fundamental numérica. Se tiene en cuenta que la aspiración de toda expresión numérica es ser completa,

---

motion. When we have discussed this sense of potentiality we will, in the course of our definitions of actuality, explain the others also (Aristotle´s *Metaphysics*, translated by Hugh Tredennick, Harvard University Press, London. William Heinemann Ltd. 1933, 1989). *[1046α] [1] ἐπὶ πλέον γάρ ἐστιν ἡ δύναμις καὶ ἡ ἐνέργεια τῶν μόνον λεγομένων κατὰ κίνησιν. ἀλλ’ εἰπόντες περὶ ταύτης, ἐν τοῖς περὶ τῆς ἐνεργείας διορισμοῖς δηλώσομεν καὶ περὶ τῶν ἄλλων* (Aristotle's *Metaphysics*, ed. W.D. Ross. Oxford: Clarendon Press. 1924).

es decir poder existir como un número completo. Guímel ג es respecto a bet ב aquello que le falta para ser completo, con lo cual dálet representa cualquier número entero distinto de uno, debido a que el uno (*εἷς*) es único.

iv. Toda serie numérica debe de comenzar con el uno, para lo cual existen dos posibilidades: que ese número uno (*εἷς*) sea el 1 o que (ב +* ג = 1˜), donde 1˜ es una expresión numérica que ha logrado conquistar su unidad. Este hecho, nos lleva a que existen dos números enteros completos: el único uno 1 entero que es el fundamento de toda serie numérica, y el número entero diferenciado 1˜. Los demás números de una base numérica, sea en nuestro caso la base decimal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, nos muestra la fenomenología del número entero uno 1. Hemos de recordar que el cero 0 representa el origen y el necesario retorno de cualquier tipo de expresión numérica. Por consiguiente, toda expresión numérica ה al ser transformada por el inverso del operador de la suma diferenciada (todo operador numérico siempre debe de poder ser reducido a una suma, en consecuencia, los operadores diferenciados son: la resta, la multiplicación, la división, el modulo aritmético, u otros tantos posibles de existir y de ser inventados, son operadores de la suma diferenciada). Lo que nos conduce a la siguiente expresión: +* ≡ +¯* ≡ +/*. Se sigue observando, que el inverso de la suma diferenciada +* puede ser cualquier operador aritmético, al igual que su inverso recíproco está dado por la multiplicación y por la división. El poder satisfacer estos requerimientos, va a exigir fortalecer la formulación que construye y define a la multiplicación y la división, dado que las va a hacer más complejas y a la vez más simples.

v. Hemos entendido que toda expresión numérica tiene un origen y requiere volver a contactar su origen: debe apoyarse en el cero y debe retornar al cero a fin de ser completa. Este tipo de completez es distinta a la completez de cualquier ente numérico o número diferenciado. Se tiene que cualquier número incompleto debe poder ser operado por el denominado ‘operador del cero’, que le permite que una vez operado por él pueda volverse cero. Tal operador es el inverso de la suma (+) que es la resta (−), no obstante, tal tipo de resta adquiere una gran complejidad en los números incompletos: es aquella expresión incompleta que restada a una expresión incompleta le permitiría ser cero. No es ella misma con el signo negativo, sino es aquella que le permite a una expresión numérica incompleta poder recorrer su base numérica para retornar al origen. Con lo cual, es un operador que le permite devolver o desandar su camino hasta el origen; y para eso, debe recorrer todas las estaciones previas de la base numérica que la fundamenta, y de la cual es una expresión diferenciada y compleja de la misma.

vi. Esto nos lleva a la existencia y a las razones de la base numérica, donde cada número diferenciado de la misma cumple un propósito fundamental. Este hecho nos conduce a la existencia de una fundamentación cualitativa o intensiva del número. Es la singularidad única de los distintos números enteros que constituyen cualquier base numérica entera. Un hecho que merece nuestra especial atención, es la singularidad del dos (*δύο*), ya notada por Pitágoras. Del dos se deriva la existencia del universo (*οὐρανός*), y cómo la unidad (*μονάς*) fundamental está representada en ese uno infinito (*ἄπειρος εἷς*). En este hecho se nos está revelando una verdad matemática esencial: que todo ente matemático sea de la naturaleza que sea viene a la existencia y se fundamenta alrededor de la noción de la pareja (*δυάς*) que, por ende, debe estar ordenada. Esto se da en concordancia con la misma definición de número, que es una expresión formal susceptible de ser abstraída o de ejercer cualquier tipo de abstracción y, por ende, requiere tener un orden. La noción de abstracción viene de *abstractus*, que es el participio perfecto pasivo de *abstrahō* conformado por la preposición *ab* (de, lejos de, fuera de; a, en, sobre; después, desde; por, de) que asume las funciones de un prefijo *ab*− y el verbo *trahō* tirar, halar, sacar, arrastrar. Lo cual nos revela ese proceso de descomponer la unidad, que es la base sobre la cual se construye y plantea la existencia de las categorías, y del mismo proceso de reunión que es la base sobre la cual se construye el álgebra. Esta se puede definir como el inverso de la abstracción que, en términos formales, podría ser simbolizada: $abstractio^{-\tilde{1}} \equiv al\text{-}jabr$. A su vez, podemos agregar que *al-jabr* viene de (ٱلْجَبْ) que quiere decir: reunir o restablecer las partes rotas, sencillamente expresada como separar $^{(-\tilde{1})} \equiv$ reunir.

vii. Tenemos que la realidad abordada como universo (*οὐρανός*) es dual o doble (*διπλόος*), aspecto evidenciado en la noción de pareja (*δυάς*) bajo la cual se aborda lo que está en segundo (*δεύτερος*) lugar en el orden de precedencia de la existencia. Todo esto está referido a lo que es lo uno (*εἷς*) como lo primero (*πρότερος*), y que mantiene aquella unidad (*μονάς*) tan indispensable frente al origen (*ἀρχή*) mismo. Tal hecho nos lleva a apreciar que todo ente que habita en el universo es dual (*διπλόος*). Sin embargo, la inmanencia que lo subyace está precedida por la propiedad de lo que es lo uno (*ἑνότης*). Esto acontece a nivel de la existencia del número (*ἀριθμός*) y se manifiesta en la unidad (*μονάς*) que se da entre el cero (*zephirum*) y el uno (*unum*). Asimismo, como en la dualidad (*διπλόος*) que se da entre el número concebido como par (*ἄρτιος*) e impar (*περισσός*). Pero tal dualidad puede asumir variadas formas, sea el caso aquella oposición (*ἀντιδιατίθεμαι*): vocablo que reúne la preposición enfrente como lo opuesto (*ἀντί*), y la preposición y adverbio: a través de, a lo largo de, separadamente en dos partes, entre (*διά*). Y el verbo poner, colocar, situar (*τίθημι*) de lo que viene planteado como una tesis (*θέσις*): aquel posicionamiento que involucra un arreglo en base a una posición afirmada. Es claro que lo opuesto se ha concebido entre dos (*δύο*) partes (*μέρος*); es decir, la división (*διαίρεσις*) entre (*διά*) lo que hay que tomar o agarrar (*αἱρέω*). La misma división se da en la dualidad (*διπλόος*) entre el numerador y el denominador, entre lo que representa la parte (*μέρος*) y el todo (*ὅλος*). Una de las oposiciones o dualidades numéricas más importantes está en la concepción del número entero positivo y el número entero negativo, en la cual se define la pareja (*δυάς*) fundamental alrededor de la cual se construyen los números enteros.

viii. Hemos de ver que la base decimal numérica se constituye alrededor de diez (*δέκα*) principios básicos. Lo que nos ha de ocupar inicialmente es la manera en que se distribuye o asigna a estos diez números con base en la dualidad que se da entre la unidad (*ἕν*) y la pluralidad (*πλῆθος*) pitagórica. La unidad (*ἕν*) que representa al todo (*ὅλος*) y la pluralidad (*πλῆθος*) que representa a la parte (*μέρος*). En este caso, esta pluralidad se ha de repartir o dividir entre diez números (*δέκα ἀριθμοί*): ¿Qué parte (*μέρος*) le ha de corresponder a cada uno de los diez números? Se ha de tener en la cuenta que toda la serie numérica se oriente como anclada a un origen (*ἀρχή*) que está en el cero (*zephirum*) y que, de alguna manera, debe de retornar a dicho origen. En el cero tenemos una completitud indiferenciada de todos los constituyentes del número, mientras en el uno (*unum*) tenemos un completitud diferenciada de todos los constituyentes del número. La dinámica fundamental del número (*ἀριθμός*) se concibe en el tránsito que hay entre el cero y el uno: del cero al uno y del uno al cero. Podríamos visualizar tal hecho como el juego de dos (*δύο*) movimientos (*κίνησις*) uno ascendente y otro descendente, que se cruzan en un punto medio balanceado que es el número 5. Dado que el cero es el que fundamenta a la existencia, o el cuantificador universal aritmético por excelencia, su salida impone una emanación primigenia indiferenciada que logra su máximo nivel de diferenciación en el número 5. Luego viene un proceso de asimilación y legitimación de tal diferenciación en el denominado retorno al cero. Como hemos visto, no hemos tocado al número uno (*εἷς*), el cual se concibe como el primer (*πρότερος*) estado diferenciado distinto al cero, completo en todo sentido y por consiguiente fundamento del número concebido como un número entero. El uno vendría a aparecer una vez se haya regresado o retornado al cero, para que legitime tal proceso de diferenciación y permita su existencia aparte como algo distinto, completo, pero no obstante deudor del cero que es su origen.

ix. Existen dos tipos de uno, el uno (*εἷς*) como completez diferenciada numérica y la pareja (*δυάς*) del uno, constituida por (−1, 1). De tal suerte que toda la serie numérica fundamental se concibe como la unión de tales parejas diferenciadas: (−1, 1), (−2, 2), (−3, 3), (−4, 4), (−5, 5), (−6, 6), (−7, 7), (−8, 8), (−9, 9), (−10, 10). Al ser diez números distintos los que constituyen la base decimal, han de existir diez predicados fundamentales que establecen la decibilidad del número concebido y aprehendido desde esta perspectiva. Los cuales a su vez están constituidos por una dualidad fundamental, representada en la noción de pareja (*δυάς*), la cual subyace a todo lo que es lo diferente. Entre lo que es lo positivo concebido como (*θετικός*), vocablo que proviene de tesis (*θέσις*) en unión a (*τικός*) que proviene del verbo situar (*τίθημι*), se representa tal posición que se asume de manera positiva. Y de su contrario o negación (*ἄρνησις*), fruto de aquello que hay que negar (*ἀρνέομαι*) dado que involucra un rechazo, donde se declina una posición que se rehúsa uno a aceptar.

5.2 La perspectiva nocional euclidiana en la aritmética

El presente temario lo vamos a abordar desde una perspectiva fundamentada en *Los Elementos* de Euclides (L. 1, 3), donde se establecen las condiciones que ayudan a definir la construcción de una ecuación, la cual se construye a partir de la comparación de dos expresiones formales colocadas la una en frente de la otra. En este contexto, se toma en cuenta la noción de pareja (*δυάς*), que vendría a constituirse como un nocional fundamental, el cual está sugerido mas no mencionado de modo directo. Cada ente está separado del otro pero, tanto sus definiciones como sus propiedades, se dan en virtud de la relación binaria que los subyace. Este hecho posibilita compararlas entre sí en el axioma que dice: *Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí* (*τά τῷ αὐτῷ ἴσα καί ἀλλήλοις ἐστίν ἴσα*). En esta oración se tiene tres elementos nocionales fundacionales, fundamentales para la construcción de las matemáticas, sean estos: el nocional de 'lo mismo consigo mismo', que está introducido por el pronombre reflexivo (*αὐτός*). En él se evoca: lo mismo, lo idéntico, lo puro y lo no mezclado; y la propiedad reflexiva de algo relacionado consigo mismo aRa. En este sentido, podemos relacionar una oración consigo misma, pero lo más interesante se da cuando asumimos: que lo mismo (*αὐτός*) puede existir (*εἰμί*) como un aglutinado de entes diferentes, que bajo ciertas condiciones pueden ser equivalentes entre sí. Es decir, tener una variedad de predicados diferentes que se pueden unir para constituir un mismo estado, siendo posible compararlos con otros a su vez distintos.

Lo fundamental en este contexto son los criterios que determinan tal semejanza. En este sentido, tenemos un segundo nocional fundacional: la noción de semejanza, igualdad, similitud, introducida por el adjetivo (*ἴσος*). En concordancia se establece, que siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones, algo puede ser igual o equivalente a otro ente distinto. El tercer nocional fundacional que encontramos en este axioma está dado por pronombre (*ἀλλήλων*), que indica una acción en dos direcciones, mutua y recíprocamente del uno con el otro. Este nocional es el que vendría a fundamentar el que una proposición material pueda tener dos sentidos, lo que vendría a ser equivalente a la conectiva binaria de la bicondicionalidad. En este contexto, lo que falta para que ello se dé, es el tema de la condición que se ha de cumplir, es decir: toda implicación involucra la existencia de unas condiciones sin las cuales 'lo uno no puede darse sin lo otro', este criterio subyace y está presente en el mencionado axioma. El otro nocional está dado por la conjunción 'y' (*καί*), aspecto que está revelado bajo la forma: (… *ἴσα καί* ... *ἴσα*) y (… *αὐτῷ ἴσα καί ἀλλήλοις* ... *ἴσα*), donde se aprecia su naturaleza como conectiva binaria al articular dos ideas o criterios a ambos lados. Hay que destacar en este axioma el doble juego (*αὐτός* + *ἴσος*) con (*ἀλλήλων*

+ *ἴσος*) mediado y posibilitado por la y (*καί*): aquello que 'es en sí mismo equivalente' con 'lo que es equivalente de modo mutuo en el otro'. La existencia de un ente presupone la existencia del otro ente, no puede darse un ente que es idéntico a si mismo y único, dado que nos conduciría a una situación paradojal: todo ente existe en género y especie, solo aquel ente que engloba a todos, es el único que no existe ni en género ni en especie. Es fundamental destacar, que para que entes distintos se puedan relacionar, se los ha de poder comparar bajo un criterio donde son lo mismo: la mismidad en la diferencia permite relacionar entes distintos, en este caso dos.

Se está, pues, introduciendo un elemento o instancia epistemológica que es nombrada como un nocional, vocablo que proviene del verbo latino *nōscō* o *gnōscō* y que tiene su origen en el verbo griego *γιγνώσκω*, que es conocer. Utilizaremos el genitivo de *γνῶσις* o sea *γνώσεως* para señalar el origen de nuestro nocional: ¿Qué es un nocional? Un nocional es un elemento que pertenece al lenguaje, aquel hablado y escrito por todos, y que engloba todos los demás usos que se quieran hacer del mismo. Tal elemento surge de una narrativa, se tiene presente en este contexto, que la forma narrativa es el universal que comprende y cobija todas las demás formas expresivo-comunicativas del lenguaje, que han sido identificadas como usos del lenguaje. Otra característica predominante de un nocional es su universalidad, entendida en ser aquel elemento que además de ser necesario, en cuanto sin el mismo no es posible estructurar el morfema predominante que construye una oración. Sin embargo, no es una propiedad de la oración pretender señalar o comunicar una veracidad universal. En este contexto, aún la noción de veracidad es algo que posee varios niveles: todo acto de habla debe de comunicar una verdad entendida como una certeza que permite a una serie de interlocutores entenderse y comunicarse entre sí. Se comprende que toda comunicación tiene un propósito, el cual está dado por el paso de la palabra a la acción transformadora de la misma. Esto se da dentro de un contexto lingüístico-literario y en un contexto donde acontece una acción práctica, en la cual se busca modificar el entorno existencial del individuo con el colectivo: un individuo vive y actúa como miembro de una colectividad o grupo social humano. Dentro de la aludida jerarquía veritativa que tiene todo acto de habla, y considerando que toda expresión comunicativa puede ser reducida a actos de habla, este hecho lo hace ser un universal. Existen aquellos actos de habla donde se está aseverando una verdad que por su naturaleza involucra la aglutinación en torno suyo de los demás elementos de una oración.

En nuestro caso se ha de cumplir una condición adicional: que tal acto de habla además de poder ser recreado como una oración, debe poder transformarse en una proposición. Con lo cual, no toda oración es susceptible de ser aprehendida como una proposición. La razón para ello radica en que una oración se diferencia de una proposición, en cuanto los elementos de una proposición aspiran a ser ordenados de manera jerárquica en torno a una estructura que preserva una universalidad de tipo aseverativo veritativo: al aseverar algo, todos los elementos de una oración transformada en una proposición se ordenan para calificar una tesis o una aseveración. Una oración proposicional involucra un proceso reflexivo complejo que va más allá del mero habla. Tal tipo de oraciones proposicionales se diferencian entre sí por la jerarquía aseverativa o universalidad expresada por ellas. En este contexto, un nocional es aquel elemento del lenguaje, o sea una palabra cualquiera, que es capaz de asumir las funciones de ser el facilitador para que se dé un proceso cognoscitivo, el cual en este caso está vinculado o es vinculante frente a una estructura. Tal estructura no es la sintáctico-semántica tradicional que está presente, sino es una estructura cognoscitiva que aspira cumplir dos condiciones fundamentales: decibilidad y decidibilidad, que lo dicho y lo aseverado pueden disfrutar de la mayor universalidad posible.

En este sentido, tenemos un proceso reflexivo capaz de subsumir unos nocionales menores en relación con un nocional mayor, donde los nocionales menores califican aportándole comprensión al mayor. La cual no es una comprensión cualquiera, es una comprensión proposicional, entendida como aquella que ha logrado un consenso en un proceso de abstracción y a la vez de algebraización: descomposición de las partes de una totalidad bien expresada y la posibilidad de recomponerlas por medio de la reunión de sus partes como una oración capaz de aspirar a constituirse como un axioma o un teorema. Tal nocional involucra la existencia de un proceso cognoscitivo concreto. La especificidad del mismo está en torno a una teoría, entendida en el contexto de los antiguos griegos, donde tenemos un espectador (*θεωρός*) capaz de ver (*ὁράω*) aquellas vistas (*θέα*) que le posibilitan mirar de cierta manera. Un mirar contemplativo que observa exaltado (*θεάομαι*) aquellas maravillas que lo dejan a uno asombrado (*θαῦμα*) y, a veces, sin palabra. Notamos en la existencia de los nocionales los esbozos de una proto-teoría, muchas veces trasmitida como un mito (*μῦθος*) en el cual se preserva la unidad explicativa como un todo con pleno sentido explicativo. La etimología de mito (*μῦθος*) tiene dos significados fundamentales: uno como cuento, narración, historia y, el otro, como una palabra, un discurso y una conversación. Destacamos sus usos como narrativa comunicada vía palabra viva, y la construcción recreada de una teoría que busca explicar de manera consistente algo significativo para una comunidad, que se reconoce como un pueblo con unas características culturales propias.

Nos damos cuenta de que esto se da como consecuencia de un tipo de explicación que surge de manera previa a verse transformado en una ontología y una epistemología, donde el nocional reviste una etapa previa, actual y posterior. Una de las grandes ventajas del mismo nocional radica en la libertad que posee; no es propiamente un concepto ya que este involucra un proceso cognoscitivo mucho más elaborado y complejo. Un nocional no es, tampoco, una definición aunque motive en muchos casos constituir definiciones en un sentido amplio, sin aquellas restricciones que le restaría movilidad explicativa. Es cualquier palabra o forma posible en términos semántico-sintácticos (una forma verbal, un sustantivo, un adjetivo, u otro) y que satisface las condiciones de membresía frente al lenguaje; y, en otros casos, invita a recrear la invención de otra palabra bajo un uso no estándar o común para todos los miembros de una comunidad.

5.3 El desarrollo de nuevos nocionales motiva el surgimiento de las epistemes

Podemos identificar, reconocer y proponer otros nocionales a partir del siguiente texto euclidiano: *Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales* (*καί ἐάν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τά ὅλα ἐστίν ἴσα*). Como lo acabamos de anotar, el vocablo (*ἐάν*) indica una clase de afirmación o un ‘si’ específico, aquel que impone algunas condiciones que se han de cumplir en una oración. Lo cual está en concordancia con el verbo con que se relaciona que es (*ἐάω*), sufrir o permitir. Tal como lo anotamos, un nocional se puede presentar en variadas formas, sea el caso como adjetivo. Pero en todos los casos nos remite a la forma verbal o a la acción que lo identifica como tal, y esto nos conduce al verbo. En el caso del nocional de *similitud y semejanza* (*ἴσος*), nos remite a los verbos igualar (*ἰσοω*) y hacer igual o balancear (*ἰσάζω*). El otro nocional, que involucra un proceso cognoscitivo bien complejo es el de totalidad o todo (*ὅλος*), lo cual nos lleva a entender algo completo uniabarcante. Este nocional no siempre está a la disposición de todos los pueblos, dado que es un nocional que hala al discurso a etapas de mayor complejidad no accesibles a todos, sino tan solo a aquellos que se han constituido como una cultura civilizante. Una colectividad que además de tener su propia cultura se ha constituido como civilización, es decir capaz de civilizar a otros pueblos y otras culturas, de transformarlas y conquistarlas.

Tenemos la tercera persona del presente indicativo (*ἐστίν*) del verbo ser y existir (*εἰμί*), que está implícito en la condición que se ha de cumplir para que algo pueda ser aseverado (├.), y que involucra que se asume la existencia de aquello que estamos afirmando que existe. El nocional de la existencia proviene del vocablo latino (*existentia*) y del verbo (*existō*), que como lo anotamos, han prevalecido muchos vocablos latinos en la formalización de la lógica y de las matemáticas. Por consiguiente, el nocional de la existencia a nivel lógico formal antecede a la misma noción de proposición, la cual lo presupone a fin que pueda darse como constructo epistemológico. No todos los pueblos han logrado efectuar unos procesos reflexivos que conduzcan a una simbolización modelada del lenguaje que hablan: la lógica como disciplina y saber es una caracterización y un invento griego. Que aunque haya comenzado con las reflexiones de Aristóteles contenidas en su *Organon* bajo la forma del silogismo y del uso de los cuantificadores, involucra un tipo de reflexión única en su género: 'una reflexión dentro de la reflexión misma', que produce dos clases de universos bien caracterizados y distintos entre sí. Uno donde surge temas como el estudio de las disciplinas filosóficas, la lingüística como modelación formal del lenguaje; y otro donde surge la lógica. En este sentido, la matemática que inventaron y desarrollaron los antiguos griegos dotada de unas nociones primitivas, unos axiomas, unos teoremas con sus respectivas demostraciones, solo pudo darse gracias a la lógica que las subyacía. Aunque no haya sido reconocida y formalizada como lo hacemos hoy día, ya estaba presente en dicho pensamiento. Precisamente, el término 'nocional' alude a un tratamiento lógico de facto (*defactum*, derivado de *defactus* que es el participio presente pasivo de *defīō* o *dēficio* que involucra salir o abandonar), es decir: existe una forma lógica de argumentar con todas sus características, que todavía no se ha constituido como una disciplina reflexiva independiente pero que está actuando de hecho.

En cuanto al verbo poner o colocar (*προστίθημι*) está conformado por la preposición al lado de, cerca de (*πρός*); y el verbo (*τίθημι*) colocar, situar. Este nos remite a la especificidad de un tipo de acción única en su género, dado que la lengua griega antigua introdujo la unión de una preposición junto a un verbo. Este aspecto le brinda y aporta una gran movilidad a la reflexión, en especial a nivel de la necesidad de axiomatizar una disciplina como la aritmética y la geometría, que requieren un tipo de palabras más precisas y este giro tan solo lo logró efectuar los griegos. Una axiomatización formal exige una estructura lingüística más elaborada y de un rico campo retórico, aspectos que tan solo los tenemos en tal lengua, como la instancia fundacional de este tipo de uso literario.

En el tercer axioma de este grupo: *Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales* (*καί ἐάν ἀπό ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τά καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα*). Cabe destacar de manera significativa la presencia de dos verbos: tomar o asegurar fuera (*ἀφαιρέω*) conformado por la preposición apartar (*ἀπο-*) y el verbo tomar y asegurar (*αἱρέω*); y el verbo dejar en pos de sí, abandonar o dejar a un lado (*καταλιμπάνω*), que está constituido por la preposición atrás, bajo, abajo (*κατά*) y el verbo dejar, liberar, partir, faltar (*λείπω*). Cabe destacar el uso preciso de estos verbos para expresar de manera efectiva este axioma, donde el 'quitar algo igual' recae sobre el verbo quitar, separar (*ἀφαιρέω*) y a su vez el 'restar algo igual' recae sobre el verbo abandonar, dejar a un lado o libre (*καταλιμπάνω* o *καταλείπω*). Para tomar algo (*αἱρέω*), se utiliza en este contexto la preposición que indica una acción de alejarse argumentada (*ἀπό*); a su vez lo que se deja (*λείπω*) está acompañado por la preposición abajo (*κατά*), como para indicar que queda determinado por la primera instancia. La precisión de la lengua griega es de enorme valor, solo a través de ella nació y se consolido el pensamiento reflexivo formal y especulativo, que dio origen a la axiomatización de las ciencias y al nacimiento de la filosofía como discurso crítico retórico.

Proseguimos con nuestra apreciación en el axioma: *Y si igualamos lo que es desigual, el todo se igualará** (*καί ἐάν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τά ὅλα ἐστίν ἄνισα*). Nuestra atención se centra en la riqueza de vocablos que hay para expresar un misma acción, sea el caso de igualar contamos con cuatro vocablos: *ἰσόω*, *ἰσάζω*, *ἀνισόω, ἀνισάζω*; los dos primeros se utilizan en la primera proposición y los dos últimos en la segunda parte. Estamos frente al problema de la igualdad (*ἰσοτης*) y la desigualdad (*ἀνισότης*), donde lo desigual (*ἄνίσος*) se introduce al inicio como buscando y reclamando esa completes como totalidad (*ὅλος*) perfectiva (*ὁλοτελής*). De ahí, que la abundancia de verbos está para completar algo, no existe un verbo destinado a la acción de descompletar algo. Es de resaltar el juego que se da entre las dos proposiciones, donde lo que se quiere expresar se construye de manera mutua en una estructura dual, la cual lleva a que cada una como partes se delimite de manera conjunta, ampliando y precisando el sentido y los significados involucrados. Tenemos luego el axioma que manifiesta: *Y en los elementos existe aquel que en él mismo se dobla el uno en el otro** (*καί τά τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν*). El tema central de esta proposición está en el juego que se da entre lo que es doble (*διπλάσιος*) como un nuevo nocional, que se da alrededor de lo que es lo mismo (*αὐτός*) y que involucra una acción en doble sentido, de un lado hacia el otro (*ἀλλήλων*). Tenemos cómo el doblar (*διπλόω*) algo que es lo mismo (*αὐτός*), nos lleva a lo que es doble (*διπλόος*, *διπλοῦς*). Este vocablo también significa algo mutuo y recíproco al igual que (*ἀλλήλων*), en medio se da la posibilidad de construir un dos (*δύο*) que se asemeja al primero.

Se ve cómo al comienzo después de la conjunción 'y' (*καί*) y del si, condicional (*ἐάν*) aparece el pronombre indefinido (*τις*), que involucra la presencia de una cuantificación universal en el sentido de cualquier(a) cosa; asimismo en su forma interrogativa *τίς* que indaga acerca de: ¿cuál, cómo, para qué, cuando, por qué?, que pregunta cómo se hace posible doblar algo y los caminos que hay que utilizar para ello. Diremos que el nocional de lo doble (*διπλόος*, *διπλοῦς*) entendido como doblar (*διπλόω*), nos acerca a lo que es lo mismo (*αὐτός*). En el axioma que sigue: *Y en los elementos existe aquel que en él mismo es la mitad del uno en el otro** (*καί τά τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν*). Tenemos otro importante nocional que es la mitad (*ἡμίση*) de lo mismo (*ἴσος*), y el problema de cómo partir o dividir algo por la mitad (*τά ἡμίσεα*). Es importante señalar, que tal problema se da en torno a lo que es igual (*ἴσος*) y no a lo que es desigual (*ἄνίσος*), dado que este último no es garante de una similitud entre ambas mitades.

5.4. La riqueza de nuevos nocionales va creando un método epistemológico

Prosigue el texto de Euclides: *Y de cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí* (*καί τά ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν*). En este nuevo axioma tenemos un importante nocional que está en la problemática que gobierna las condiciones de cómo ajustar (*ἐφαρμόζω*) algo, lo que se da de manera recíproca alrededor de lo que es lo mismo (*ἴσος*) e involucra un curioso juego de la reciprocidad con la misma reciprocidad: (*ἀλλήλων*) con (*ἀλλήλων*) mismo, el primero como plural acusativo (*ἄλληλα*) y el segundo como plural dativo (*ἀλλήλοις*). Se tiene una sincronización en la forma de declinar una misma acción para replicar o copiar la manera en que se efectúa un procedimiento de coincidencia a fin que dos (*δύο*) realidades mismas (*ἴσος*) se acerquen a poder coincidir (*ἐφαρμόζω*). Este tema conduce al nocional de pareja (*δυάς*), y al orden en la misma secuencia entre lo que está primero (*πρῶτος*) y lo que está en segundo (*δεύτερος*) lugar. Tenemos el axioma (L1, 3, 8), que dice: *Y el todo es mayor que la parte* (*The whole is greater than the part. καί τό ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστιν*). Una vez más, nos encontramos con una de las parejas (*δυάς*) fundacionales más importantes de la historia de la filosofía y la matemática, una que parece que ha ayudado a definir el curso mismo del desarrollo de la teoría formal. Es tan significativa, que ha sido el eje alrededor de la cual han surgido muchas paradojas, dado que de alguna manera encierra cierta impredicatividad. En especial, hemos de afirmar, que el todo (*ὅλος*) es inaprehensible, dado que comprende y contiene a todos, no es posible observarlo fuera de él mismo. A su vez, la parte (*μέρος*) es inaprehensible de otra manera, en cuanto es realmente difícil determinar las partes que son los constituyentes primarios del todo. No hay asunto más complejo que definir los aspectos cuantitativos y cualitativos de las partes. Tal problemática ha sido trasladada y abordada en el modelo de un segmento de línea, donde se afirma que un segmento completo de línea es mayor que una fracción o parte del mismo. Sin embargo, esto no resuelve el problema de esta importante proposición, que una vez trasladada al campo de la filosofía, conduce a toda una serie de preguntas que las podemos encontrar en las famosas antinomias de la razón pura de Kant[439].

En cuanto a los nocionales hemos de proponer que, en muchos casos, se presentan en parejas (*δυάς*), o como la pareja (*ὅλος*, *μέρος*), que encierra una complejidad muy grande; por una parte, el tipo lógico para el todo (*ὅλος*) está a un nivel tan alto, que nos conduciría en términos de Tarski a una teoría indecible y, además, esencialmente indecible; y, en consecuencia, no axiomatizable, debido a que involucraría un sistema axiomático infinito. A su vez, el problema de la parte (*μέρος*) es igualmente complejo, dado que es casi imposible definir las partes esenciales que constituyen al todo. Lo que queda es reducirse a la modelación de teorías concretas donde la predicación del todo quede circunscrita y delimitada en un contexto bien definido. De esta manera restringimos la posibilidad que se presenten situaciones paradojales y totalidades ilegítimas, en consecuencia, se evita los denominados círculos viciosos, donde los diversos procesos de inferencia formal quedan invalidados. Sin embargo, tal pareja (*ὅλος*, *μέρος*) nos conduce a dos tipos de universos distintos, aunque podemos abordar el problema desde la óptica de la unicidad del todo, la existencia de un único todo que engloba a todo está muy asociada a la cuantificación universal y existencial, que permite diversos niveles de orden. Nos centraremos en la existencia de variadas totalidades, siendo en este contexto la singularidad y especificidad de esa totalidad particular, la que vendría a determinar la textura y condiciones de las partes de esa totalidad concreta. Si simbolizamos tal situación bajo la pareja (*ὅ*, *μ*), diremos que el

[439] El tema de la totalidad y la completitud fue de interés para Immanuel Kant (1781), quien en *Critique of Pure Reason*, asume un problema que es muy cercano a las matemáticas, en lo concerniente a la construcción de los conjuntos numéricos y su axiomatización. Kant aborda en tema en las antinomias de la razón pura, donde la totalidad es abordada a nivel temporal en relación a unas series numéricas, aquellas que se desplazan al infinito: sea m, n y o tres series, donde la serie n representa un síntesis regresiva respeto a las condiciones frente a m, a su vez o es la consecuencia respecto a n en una síntesis progresiva. El tema central que se plantea es la famosa condición de fronteras, donde se define la noción del límite de una función. Se aborda luego el tema del espacio respecto a la materia, la substancia y la causalidad. Esto nos conduce a la completez absoluta de la composición, la división, el surgimiento y la dependencia en la existencia frente a la absoluta totalidad de las series (págs. 461 a 464). Se resalta que la axiomatización de los números naturales presenta los mismos problemas estudiados por Alfred Tarski dentro de lo que se conoce como un método general de prueba en la indecidibilidad de una teoría. Todo esto va encaminado a probar la consistencia y la completitud de un sistema axiomático, que en el caso de los números naturales no se logra aún frente a sus subteorías o extensiones de las mismas. En A. Tarski (1953), *Undecidable Theories* (p. 3 a 15).

orden de (*ὅ*) está situado en lo que se conoce en un conjunto numérico como la cota superior; a su vez, las partes (μ) se aproximan al lindero conocido como la cota inferior.

Ya hemos visto una característica bien específica de esta importante pareja (*ὅ*, μ): que el primer elemento de tal pareja (*ὅ*) es singular y gravita alrededor del uno (*εἷς*), mientras el segundo elemento de tal pareja (μ) es plural, y su sustentabilidad gravita alrededor de la noción del dos (*δύο*) entendida en un sentido amplio del término. A su vez, la parte es plural, siendo su mínima cuantificación dada bajo el gobierno del dos (*δύο*), en un contexto distinto al aludido antes. Podríamos descomponer la pareja (*ὅ*, μ) en otras parejas igualmente significativas, sea el caso la del uno y la del dos (*εἷς*, *δύο*) o sea (ε, δ). En la cual, el primer término (ε), involucra un orden alrededor de una instancia fundacional, una suerte de *arché* (*ἀρχή*), en cuanto establece un comienzo para los eventos y hechos que tengan lugar. Es único y englobante a nivel de la cuantificación que se establece, la cual ordena y jerarquiza lo está después de ella, lo que le sigue, aportándole estabilidad a lo que se fundamente a partir de la misma. En cuanto al segundo término (δ), tenemos que se puede desplazar a lo largo de todo el intervalo, desde la misma vecindad de la cota superior, en caso que exista, a las proximidades o a la misma cota inferior, en caso que exista. El primer término (ε) está confinado a un solo lugar desde el cual se amarra la cuantificación que gobierna lo aseverable y lo operable en cuanto transformable; es decir, la existencia misma de toda la proposición y al rango en el que puedan desarrollarse las distintas operaciones que afecten a los términos en cuestión.

Podríamos afirmar que el término que evoca a lo uno (ε), está fijo y de alguna manera se comporta como una variable libre y ligada al mismo tiempo. Debido a que puede asumir distintas y aún casi incontables simbolizaciones es libre, pero dado que es única y bien reconocible, está ligada. A su vez, el segundo término de tal pareja (δ), puede adoptar múltiples valores, diversas formas: dado que lo segundo puede estar situado en el estricto segundo lugar o en el último lugar, su valor pueda darse a lo largo de todo el intervalo, desde la inmediatez a la cota superior a la cota inferior. No tenemos una unicidad en lo que dicho valor pueda representar, con lo cual sus propiedades pueden variar en alto grado: mientras la asignación cuantitativa-cualitativa del primer término (ε) es única, la asignación cuantitativa-cualitativa del segundo término (δ) es múltiple y aún puede ser incontable, o sea infinita. Se nos presenta una vez más otra situación paradojal, que trasladada al contexto pitagórico en cuanto el uno (*εἷς*) es infinito, aquí el dos (*δύο*) disfruta de unas incontables posibilidades y, por consiguiente infinitas, que tiene para ser nombrado como lo que es lo segundo (*δεύτερος*). Esto lo hace ser un término muy relativo en relación a lo primero (*πρῶτος*), que posee otro orden más cercano a lo absoluto. Lo anterior permite otro tipo de lectura, uno tal que el primer término (*ε*) es un solo término que precede a todos y establece el orden para todos; mientras el segundo término (*δ*) pueden ser muchos términos, dado que su posición siempre será relativa y movible en relación a la primera posición que es fija y de alguna manera estable o permanente. De alguna manera, se nos derivan otras tres parejas de la pareja (*ε*, *δ*): la pareja infinito absoluto e infinito relativo, la pareja cuantificador universal y cuantificador existencial, y la pareja lo primero y lo segundo (*πρῶτος*, *δεύτερος*).

En cuanto a los nocionales, además del nocional del todo (*ὅλος*) y el nocional de la parte (*μέρος*), tenemos el nocional que es fruto de comparar la anterior situación: el nocional de más grande (*μέγας*); tal problema de comparar algo con otra cosa, requiere mínimo de dos instancias o sea de una pareja (*δυάς*). Este tópico emerge en torno al problema de cómo lograr la unicidad del todo con la parte, tema que surge en torno a igualar (*ἰσάζω*) el todo (*ὅλος*) con la parte (*μέρος*), y que también podría ser expresado: ¿Cómo expresar la parte (*μέρος*) en términos del todo (*ὅλος*)? Es un problema referido también en otro contexto muy distinto, a cómo expresar y fundamentar el ente o criatura en términos de su creador. De alguna manera, pareciera que tal uno (*εἷς*) se doblara (*διπλόω*) a sí mismo a fin de generar al dos (*δύο*), donde ese dos es la mitad (*ἥμισυς*) del primero. En tal proceso, se estarían conservando las propiedades y características del primero (*πρῶτος*) en relación a todo lo que le sigue, en especial, frente a lo segundo (*δεύτερος*). Luego tenemos el último axioma de este grupo (L1, 3, 9): *Y dos rectas se separan, no se rodean** (*καί δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν*). Realzamos de nuevo el nocional de la conjunción (*καί*), la ‘y’ y de nuevo el tema del nocional de la pareja (*δυάς*), en este caso, centrada en una doble acción verbal alrededor de la pareja de verbos: (*χωρέω*) que es hacer sitio, ceder, separar; y (*περιέχω*) abrazar y rodear. Este último está constituido por la preposición (*περί*): en derredor, por encima de todo, acerca de, a lo largo de; y el importante verbo (*ἔχω*):

contener, tener, mantener. Nos topamos con el dilema entre lo que es una separación (*χωρισμός*) y lo que es una reunión a la manera de un esbozo, un contorno o una silueta (*περιήγησις*), de un circuito, un cerco, un giro o una revolución (*περιήλυσις*), o del cerco (*περικύκλωσις*).

Aquella acción que busca separar (*χωρέω*) y aquella que busca integrar rodeando (*περιέχω*). El tema es introducido por un nocional que está circunscrito en un problema más elaborado a nivel epistemológico y ontológico, se trata de la famosa línea recta (*εὐθεῖαι γραμμή*). Este ente geométrico esencial, que está constituido de otro nocional epistemológico fundamental que es el de la línea (*γραμμή*) y la propiedad de lo recto (*εὐθύς*), que se puede aplicar a variados entes geométricos, sea una línea recta o un ángulo recto. Tales nocionales están situados en otro nivel de discurso frente a los anteriores, debido a que involucran un proceso cognoscitivo más complejo unido al planteamiento de una teoría. Este hecho es más apremiante cuando se está hablando de dos líneas rectas (*δύο εὐθεῖαι γραμμή*), y las situaciones que ellas pueden plantear, como la que acabamos de mencionar: la posibilidad que dos líneas rectas se encuentren o se separen. En ambos casos, se da tan solo una de las situaciones, no se pueden dar las dos al mismo tiempo. En este contexto, tenemos otro importante nocional que involucra la negación de algo: no (*οὐ*), en la que los contenidos se encuentran comprimidos para aseverar algo que bajo ninguna circunstancia posible se ha de dar. Este axioma no se ve traducido del griego en los textos tradicionales, es otra manera más simple y donde faltan todavía un buena parte de los argumentos para presentar el famoso axioma de las paralelas.

5.5. Los postulados de Euclides establecen una jerarquía ontológico-epistemológica

En este nuevo numeral abordaremos los famosos postulados euclidianos que han fundamentado su geometría a lo largo de los siglos. El primer postulado manifiesta lo siguiente: *Una línea recta puede ser dibujada uniendo dos puntos cualesquiera* (*Ἠιτήσθω ἀπό παντός σημείου ἐπί πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμήν ἀγαγεῖν*). Existe una solicitud de pedir (*αἰτέω*) algo, ese algo recae sobre una cuantificación universal (*πᾶς*), en la cual todos los entes que están cobijados, se ven afectados. Nuestro personaje sobre el cual recae esta cuantificación universal (∀), no es otro más que el punto (*σημεῖον*), el ente por excelencia que está en la base de cualquier tipo de predicación que se haga tanto en la geometría como en la aritmética, y por ende en toda las disciplinas de las matemáticas actuales. Nuestro singular personaje no es un nocional común y corriente, es lo que podríamos calificar de un nocional harto complejo, el cual todavía hoy día no ha sido adecuadamente definido, ni completamente entendido. Es lo que podríamos definir utilizando la terminología de Kant, un noumeno[440], un ente que no necesita de la experiencia sensible fenoménica para constituirse como tal, representa aquella instancia donde todas las facultades cognoscitivas tanto del entendimiento como de la sensibilidad pura se agotan. Pareciera que el punto está en el umbral de lo incognoscible, como '*la cosa en sí misma*' (*Das Ding an sich*), se trata de un concepto propio de la lógica, la analítica y la deducción trascendentales. Se puede argumentar que el punto (*σημεῖον*) es aquel ente universal único que subyace a toda formulación matemática. Al ser tan inaprehensible, nos acercamos a él sin lograr definirlo por completo, y menos aún, llegarlo a conceptualizar. La aparición de este nocional nouménico tan solo ha sido posible en aquella cultura capaz de englobar y contener a un gran número de culturas civilizadas antiguas, a nuestro entender solo ha existido una en toda la historia de la raza humana, y es la cultura y la civilización de la Grecia clásica.

La presencia de este nocional nouménico al comienzo de la formulación de los famosos postulados de Euclides, ya nos introduce en otro terreno del pensamiento, uno que posee un orden superior caracterizado por lo que se conoce como trascendental. Además de estar en la base de todo conocimiento, es paradójicamente incognoscible: lo que sirve para fundamentar el conocimiento no es posible conocerlo. De entrada, tal ente, el punto (*σημεῖον*), nos conduce a una formulación que se sitúa propiamente en los terrenos del metalenguaje y, en consecuencia, tan solo susceptible de ser aprehendido bajo un tipo de modelación de naturaleza regulativa: dado que ningún modelo concreto sujeto al gobierno de una epistemología y, por ende, de unos protocolos demostrativos concretos, puede

[440] Kant define al noumenon como aquel objeto que existe en él mismo sin necesidad de la intuición frente a la cual nuestra sensibilidad está limitada (*Kant Immanuel (1781), Critique of Pure Reason,* translated and edited by Paul Guyer and Allen Wood, Cambridge University Press, Cambridge (1998). Pág. 382, A-289).

satisfacer la decibilidad y la decidibilidad completa del mismo. A fin de evitar tales rigores propios de aquellos niveles teóricos sujetos a la normatividad de unos axiomas, teoremas, sistemas de deducción y procedimientos de verificación y convalidación de sus postulados, tenemos los niveles metateóricos que, como en el presente, aún estarían por encima de la normativa trazada por la teoría matemática de categorías, aquella propuesta por Saunders MacLane[441] y Samuel Eilenberg. En ese sentido, la noción de punto (*σημεῖον*) está situada en los prolíferos terrenos de la imaginación, este tópico nos conduce a la estética trascendental, terreno que nos brinda unas mayores libertades para comprender y estudiar este singular ente, que hemos reconocido como un nocional nouménico.

Continúa Euclides, en relación al punto (*σημεῖον*) como la base de toda (*πᾶς*) una aseverabilidad proposicional axiomática válida y decidible, desde y como resultado de (*ἀπό*) cualquier (*παντός*) punto (*σημεῖον*). Luego la formulación busca ser más accesible, siempre y cuando la situemos en el orden del lenguaje en que quiere ser expresada y entendida: desde (*ἀπό*) todo (*παντός*) punto (*σημεῖον*) podemos trazar (*ἄγω*) sobre (*ἐπί*) una línea (*γραμμή*) recta (*εὐθύς*) a cualquier (*πᾶν*) otro punto (*σημεῖον*). Es de destacar la naturaleza universal de este axioma, en el que se afirma que es potestad de todo (*πᾶς*) punto (*σημεῖον*) poderse unir con otro punto cualquiera: no importa la circunstancia en que esté situado este otro punto cualquiera, es posible trazar (*ἄγω*) una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), una que comunique ambos puntos. Es interesante el juego de las dos preposiciones: desde (*ἀπό*) a sobre (*ἐπί*), *ἀπό* → *ἐπί*; en la segunda preposición se sugiere que el punto se mueve sobre una superficie o cerca de la misma. La línea (*γραμμή*) viene a ser el ente que construye a la superficie (*ἐπιφάνεια*), en especial, aquella línea que tenga la posibilidad de ser recta (*εὐθεῖα γραμμή*): es decir, que tenga la potestad de enderezarse (*εὐθύνω*) a sí misma, para lo cual pareciera que el punto (*σημεῖον*) debe de ayudar en tal tarea. En este nivel de discurso el punto también posee su propio movimiento indicado por su verbo (*σημαίνω*): que señala, indica, e interpreta el camino que debe de tomar la línea.

No obstante, la propia línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) tiene un verificante en sí misma, que le permite identificar lo recto (*εὐθύς*) a fin de conducirse (*ἀγωγή*), en una suerte de

[441] Se aprecia en el la obra de Saunders Mac Lane (1971), *Categories for the Working Mathematician*, un intento de desprenderse de los conceptos indefinibles de la matemática. La presente obra de enorme valor favorece un tratamiento práctico de los temas sin entrar a definir aquello que parece salirse de la disciplina.

transporte que involucra un movimiento que tiene una dirección, que por ende educa y establece un método. En este contexto, se entiende que el procedimiento metodológico que hace todo esto posible, está indicado por la posibilidad de constituirse los distintos puntos en reunión o asamblea (*ἀγών*): toda acción de acarrear, conducir, guiar y traer (*ἄγω*) involucra la concurrencia de una pluralidad de entes, este caso de puntos (*σημεῖον*) en torno de algo que los reúne y convoca (*ἀγών*), que en nuestro caso se trata de una línea (*γραμμή*). Pero no cualquier línea, sino una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*), aquella que tiene la capacidad de establecer una normativa sobre sí misma a fin de vigilar y rectificar su propia estructura, enderezándola (*εὐθύνω*) cuando las circunstancias así lo ameriten. Aquí notamos la presencia de un método acompañado de una variedad de submétodos, o un método que posee varios capítulos o niveles de jerarquía para ordenar sus proposiciones y axiomas. El enderezar (*εὐθύνω*) una línea (*γραμμή*) para que sea recta (*εὐθύς*), involucra una serie de variados criterios. Es más, esta formulación vendría a ser válida en los casos donde la línea ya no pueda ser representada a nivel de una figura o trazo, de una marca o un signo (*σῆμα*) de características fenomenológicas. Incorpora la formulación la noción de una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) capaz de enderezarse (*εὐθύνω*) en aquellos terrenos trascendentales propios de lo que es recto (*εὐθύς*), con base en una cualidad superior que no es aprehensible por medio de los sentidos, sino más cercana a lo que es lo bueno (*εὖ*) en un sentido capaz de cobijar planteamientos y formulaciones más elaborados de las maneras en que se puede construir o recrear una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). Estos campos son propios tanto de la lógica trascendental como de la estética trascendental, es aquel terreno donde convergen el entendimiento y la sensibilidad trascendentales dentro de un contexto kantiano. El contexto de lo que es bueno (*εὖ*), que subyace a lo recto (*εὐθύς*) y, en especial, en lo concerniente a una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). Lo que nos permite estar abiertos a otras maneras de construir una línea recta, en las llamadas geometrías no euclidianas y las que todavía están por ser desarrolladas.

Cabe destacar en este contexto los nocionales de: punto (*σημεῖον*) y línea (*γραμμή*), al primero lo hemos calificado de un nocional nouménico dada su elevada jerarquía, y su indecidibilidad e indecibilidad. En el primer caso la dificultad de asignarle un valor de verdad, asimismo la imposibilidad que mediante un algoritmo, logremos aprehenderlo por completo dentro de una modelación teórica. En el segundo caso, el hecho se sitúa dentro de los linderos decibles del lenguaje, supera por completo cualquier tipo de proceso donde queramos asignarle unos significados que logren aprehenderlo. Sea como acto de habla, sea como elemento del discurso, supera las estructuras lingüísticas de cualquier lenguaje que se hable en el mundo actual. La noción de punto (*σημεῖον*) la hemos calificado como una noción pura del pensamiento trascendental, muy emparentada con la noción del uno (*εἷς*): aquel número nouménico único también inaprehensible como el punto (*σημεῖον*), además de que posee la propiedad de ser infinito (*ἄπειρον*), y que está situado fuera de la realidad o del universo (*οὐρανός*) en el contexto pitagórico. La diferencia entre el uno (*εἷς*) y el punto (*σημεῖον*) es aquella en la que en el primero se da una equivalencia estricta en la cual el todo es igual a la(s) parte(s): *ὅλος* ≡ *μέρος*; mientras en el segundo, el punto es lo que de ninguna manera es uno (*οὐδείς: οὐδέ, οὐ*, no + *δείς*, y no aún + *εἷς*, uno).

Luego, tenemos el nocional de la línea (*γραμμή*); este nocional también podría ser denominado nouménico pero a un nivel más básico, dado que aún no se establece que sus extremos sean dos (*δύο*): *Los extremos de una línea son puntos* (*γραμμῆς δέ πέρατα σημεῖα*; *Los Elementos*, L 1, 1, 3). Tal hecho, es una invitación a las geometrías no euclidianas a construir una línea que esté definida en más de dos extremos, y donde lo esencial de la misma no es que sea recta (*εὐθύς*), sino puede ser también curva (*καμπύλος*). Tal aspecto está legitimado por la existencia de la pareja (*δυάς*) a nivel de todo lo que existe en el universo según Pitágoras, donde la pareja de lo recto es lo curvo. Notamos, una vez más, cómo el nocional de la línea es bastante amplio y resulta interesante destacar en estos nocionales, como el de punto (*σημεῖον*) y el de línea (*γραμμή*), el cambio que experimentan cuando tenemos en la cuenta sus verbos: mostrar, señalar, indicar, significar (*σημαίνω*), relacionado con lo que tiene una marca, una señal, un signo (*σῆμα*) que subyace al nocional de punto (*σημεῖον*); mientras el verbo para la línea (*γραμμή*) es (*γράφω*): arañar, rayar, grabar, pintar, escribir. Este hecho es significativo, dado que nos remite a otros usos del lenguaje y a otros actos de habla, donde muchas veces la solución a ciertos problemas formales trascendentales estaría en otros niveles más fundamentales e inmediatos, en la comunicación que está presente en el diario vivir.

5.5.1 El establecimiento de una metodología epistemológica geométrica

Traemos ahora el segundo postulado de Euclides que nos dice: *Un segmento de línea recta se puede extender indefinidamente en una línea recta* (*καί πεπερασμένην εὐθεῖαν κατά τό συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν*). En este axioma podemos identificar el nocional: *synechís* (*συνεχής*) ininterrumpido, continuo, constante; cuyo verbo (*συνέχω*) significa tener unido, retener, mantener. Este importante nocional sería aquel que condujo a la teoría matemática del continuo planteada por Cantor, que en el caso aludido afirma que siempre lo que constituye a una línea (*γραμμή*) son los puntos (*σημεῖον*): siempre encontraremos un punto intermedio dentro de un segmento de línea definido por dos puntos extremos, independiente de lo pequeño que queramos encontrarla, siempre estará unida por puntos. Con lo cual, la discontinuidad en una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) es imposible. Para lograr tal proeza, se sugieren los verbos: (*περαίνω*) que es terminar, finalizar, atravesar, que además establece que siempre podremos definir una línea. Además, siempre es posible ir un poco más allá (*πέρα*), el final (*πέρας*) podrá ser extendido (*ἐκβάλλω*) y tendremos la seguridad que hallaremos algo situado en la región que está enfrente (*περαῖος*); sea dentro de un segmento de línea hacia dentro o hacia fuera, tendremos la posibilidad de tirar o arrojar (*βάλλω*) hacia fuera, de y desde (*ἐκ*) un segmento de línea.

La noción de lo denso, tal como la plantea en topología y en Cantor en su teoría de los números transfinitos, se fundamenta en que el punto (*σημεῖον*) tiene la propiedad de (*συνέχω*) unir, sostener, mantener y conservar la continuidad de un punto con otros puntos; siempre entre dos puntos tendremos otros puntos, tantos como incontables e infinitos podamos encontrar. La preposición (*κατά*), nos indica ese proceso de ir a lo más pequeño, a lo que está abajo y que se mantiene a lo largo de manera completa, (*συνεχές*) constante y continúa. Tenemos otro importante verbo que está sugerido en la actual formulación, y es (*πείρω*) que es la posibilidad de atravesar y recorrer lo que sea por medio de una línea (*γραμμή*), recta (*εὐθύς*), en el sentido amplio del término. En este contexto, lo recto puede asumir otras texturas, como lo curvo (*καμπύλος*), que sería la pareja que lo acompaña: los contrarios siempre existen como conceptos vinculantes en una realidad fundamentada por la noción de la dualidad de la pareja.

En el tercer postulado de Euclides de *Los Elementos*: *Dado un segmento de línea recta, puede dibujarse un círculo con cualquier centro y distancia* (*καί παντί κέντρῳ καί διαστήματι κύκλον γράφεσθαι*), se da un salto conceptual al introducir la noción de círculo (*κύκλος*) que tanto ha influenciado a las matemáticas a lo largo de los siglos. Le subyace esa tendencia que se da en las matemáticas de trazar alrededor de un punto (*σημεῖον*) tantos círculos (*κύκλος*) continuos (*συνεχές*) como queramos, teniendo un centro (*κέντρον*) común: lo que nos lleva a aseverar la continuidad (*συνεχή*) alrededor de un punto (*σημεῖον*) concéntrico (*κέντρον*). Tenemos en este contexto los nocionales de círculo (*κύκλος*) y el nocional que introduce la diferencia de lo que hay antes del centro y lo que hay dentro del centro, se utiliza el verbo atravesar en el sentido de aguijonear (*κεντέω*) propio del centro de un círculo (*κέντρον*). Tal nocional de círculo nos lleva a la noción de la circunferencia (*circumference* propia del verbo *curcumferō*, que es llevar algo alrededor) que en griego es (*περιφέρεια*): existe una pareja (*δυάς*) fundamental que es la constituida por el centro (*κέντρον*) y la periferia (*περιφέρεια*) o circunferencia. Tal envolvente (*κύκλωσις*) del centro nos conduce tanto a la circunferencia (*περιφέρεια*) como al círculo (*κύκλος*): pudiéndose decir, que un círculo (*κύκλος*) es denso o continuo (*συνεχές*) a nivel de las circunferencias (*περιφέρεια*) que pueden trazar y tener, además que son incontables.

También está el nocional de intervalo (*διάστημα*), en el cual se contempla que siempre podremos comparar una instancia con otra, a su vez, la existencia de un espacio entre dos puntos. Todo esto va acompañado del nocional para todo (*πᾶς*) en un uso distinto al utilizado en el todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*); asimismo, del nocional de pareja (*δυάς*), lo que nos invita a afirmar dos importantes nocionales: el uno (*εἷς*) tomado como número o principio primordial, y el dos (*δύο*). Este tema de manera indirecta nos remite al nocional de número (*ἀριθμός*), este nocional es supremamente complejo dada la enorme amplitud que posee para poder otorgar significado a algo, donde su verbo (*ἀριθμέω*) es contar y enumerar. Sin embargo, al relacionarlo con el logos (*λόγος*): discurso, palabra, narración, pensamiento, cuenta, cómputo; y de su verbo (*λέγω*) que posee dos grandes significados: uno que es decir, contar una historia, narrar; y el segundo que es: contar, enumerar, arreglar, ordenar. Nos damos cuenta, que el número (*ἀριθμός*) tiene la posibilidad de contar en un sentido amplio del término, donde el contar no solo se refiere a algo que enumera y suma, sino también a contar historias. Tal hecho es muy significativo en las culturas antiguas mesoamericanas, que como la maya, la cual contaba historias utilizando los números. El nocional de número (*ἀριθμός*) involucra todo un proceso cognoscitivo más elaborado, y va acompañado de una cosmovisión del hombre, del mundo que lo rodea y donde vive.

El cuarto axioma fundamental de Euclides manifiesta: *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí* (*καί πάσας τάς ὀρθάς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι*). En este axioma se introduce un nuevo nocional, uno propiamente geométrico, que es el de ángulo (*γωνία*), y que en griego es un sustantivo femenino. Este nocional, que nos remite a *notio*, aquella noción o idea de la que estamos enterados y familiarizados fruto de un examen e investigación previa, es uno de los recursos utilizados por los geómetras griegos para relacionar dos líneas: siempre y cuando tenemos en cuenta la estructura de las díadas, que pueden ser rectas o curvas. El ángulo recto (*ὀρθάς γωνίας*) tiene esa única propiedad que permite establecer toda una serie de propiedades debido a que todos (*πάσας*) cumplen la condición de ser rectos (*ὀρθάς*). Es importante anotar la diferencia entre la condición de ser recta (*εὐθύς*) de una línea (*εὐθεῖα γραμμή*) y la condición de ser recto un ángulo (*ὀρθάς γωνίας*), donde lo recto (*ὀρθός*) en el ángulo (*γωνία*) involucra el encuentro de dos (*δύο*) líneas (*γραμμή*), que se sitúan en una nueva modalidad de rectitud. Esta característica se califica como perpendicularidad (*perpendiculum*): vocablo latino que significa la línea de una plomada, y que proviene del verbo *perpendō*, que es examinar y pesar algo con exactitud y cuidado. Los griegos utilizaron el vocablo de cateto (*κάθετος*) para indicar tal posición vertical u ortogonal (*ὀρθός*), en los que podemos apreciar dos líneas colocadas verticalmente de manera mutua la una en relación a la otra (*ἀλλήλων*).

El nacimiento del famoso ángulo recto (*ὀρθάς γωνίας*), es uno de los eventos más importantes y afortunados para la geometría, dado que permitió la construcción de las funciones trigonométricas: del seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Tal nocional de cateto (*κάθετος*), va unido al surgimiento de los primeros entes geométricos como tales, las primeras figuras rectilíneas (*σχήματα εὐθύγραμμά*), como el triángulo o el rectángulo. El nocional de figura (*σχῆμα*) involucra un salto enorme en la historia de la humanidad, en especial las figuras que se utilizan para la construcción de teorías, ayudan a recrear modelando la realidad inaprehensible que nos rodea y de la que somos parte (heredando ese misterio que somos en primera persona nosotros mismos). A su vez, la noción de cateto (*κάθετος*), como la de lado (*πλευράς*), involucran la parte (*μέρος*) de un todo (*ὅλος*) recreado por las distintas facultades cognoscitivas: en este caso, esta totalidad sí es aprehensible y modelable. Hay que tener en la cuenta que la figura (*σχήμα*) surge a partir del número (*ἀριθμός*) tres (*τριάς*), del número dos (*δύο*) tenemos la línea (*γραμμή*) y del número uno (*εἷς*) el punto (*σημεῖον*). Resaltando esa reciprocidad (*ἀλλήλων*) que busca construir y elaborar la aritmética con la geometría. A su vez, la presencia del ángulo (*γωνία*) como un nuevo nocional introduce el nacimiento de un nuevo verbo (*γωνιάζω*): relacionado con la labor de medir, y establecer un ángulo de referencia en relación al ángulo arquetípico, como es el ángulo recto (*ὀρθάς γωνίας*).

5.5.2. El salto epistemológico que involucra el quinto postulado de Euclides

Finalmente, tenemos el más famoso de todos los postulados de Euclides que es el quinto, el de las paralelas: *Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos* (*καί ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς ἐντός, καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τάς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες*). Este postulado representa un salto en relación a los anteriores, en el cual presumiblemente estábamos frente a una teoría de alguna manera completa y consistente, y ahora estamos frente a unos nocionales que tan solo es posible aprehenderlos bajo un proceso epistemológico más elaborado. Esta sentencia o máxima nocional compleja busca resumir toda una serie de logros, de axiomas y teoremas, bajo un nuevo axioma de orden superior. Se requiere un gran desarrollo conceptual para tratar de plantear una formulación tan elaborada, que fue el '*rompecocos*' de una gran parte de matemáticos a lo largo de más de dos mil años. En vez de identificar unos nuevos nocionales, lo que tenemos son unas relaciones más complejas entre ellos fruto de la combinación de unos nocionales conocidos, que nos lleva a este axioma tan importante: involucra una teoría geométrica que se ha pensado a sí misma hasta sus más profundos niveles y consecuencias. Además, plantea ¿qué variante de modelación aritmética le correspondería y la habría de acompañar? Esta viene sugerida nada menos que por el vocablo *ápeiros* (*ἄπειρος*), que es nuestra noción de infinito: es un nocional propio de aritmética, como ciencia, arte y técnica del número.

Este postulado es una invitación a precisar el desarrollo de una teoría del conocimiento geométrico-aritmética frente a la pregunta: ¿Cómo se hace matemática? Analicemos las situaciones que se presentan en este axioma:

i. La presentación de un problema concreto: *Si una línea recta corta a otras dos,* (*καί ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς ἐντός,*)
ii. Las condiciones que se tienen que satisfacer: *de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos,* (*καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ,*)
iii. La situación 'in situ' o en sitio que se presenta: *las otras dos rectas se cortan,* (*ἐκβαλλομένας τάς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν,*)
iv. El resultado que se obtiene como consecuencia del evento recreado: *al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.* (*ἐφ' ἃ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες*).

En una primera aproximación, notamos el planteamiento de un método epistemológico propio de las ciencias matemáticas, el cual presenta unas singularidades que lo hacen más sencillo a desarrollar en una teoría del conocimiento, que ayude a responder a la pregunta fundamental: ¿Cómo conoce el ser humano? La solución a la misma, es una condición esencial que la antecede: la matemática en un sentido amplio del término, se edifica sobre unos supuestos cognoscitivos previos más generales dotados de unas caracterizaciones propias. No nos ocuparemos de responder la pregunta inicial: ¿Cómo conocemos? Sino más bien, ¿Cómo se conoce a nivel matemático? La respuesta a esta pregunta, es una invitación para adentrarnos en el conocer matemático, donde existen unas condiciones iniciales que son necesarias e indispensables para que se dé. Para ello, nos situaremos en el contexto de Pitágoras, para quien la aritmética y la geometría, asimismo como la astronomía, la música y otras disciplinas estaban medíadas por la filosofía y la matemática. La primera estaba caracterizada por una forma de vivir y la segunda se entendía como el dominio del aprendizaje y la enseñanza. La filosofía como un estilo de vida circunscrita en unas costumbres muy sanas, austeras y equilibradas en todos los aspectos que constituyen la cotidianeidad de un ser humano, las cuales se ordenan alrededor de unos principios místico-religiosos, que se practican en una colectividad fraternal esotérica gobernada por la observancia de una ética concordante con sus propias creencias: ¿Qué podemos inferir de lo dicho acerca de la filosofía para que nos sirva en el desarrollo de nuestra teoría del conocer matemático? Tenemos una actitud reflexiva alrededor de una jerarquía de normas, unas más relevantes que otras, que se constituyen como el llamado manual a seguir para ser un filósofo, y de esta manera, poder vivir filosóficamente.

5.5.2.1. La matemática como arte y técnica involucra un estilo de vida caracterizado

En cuanto al problema de la matemática como ciencia, disciplina, arte y técnica que logra la excelencia maximizando las maneras en que se aprende y se enseña algo en general, en especial en lo tocante: a la aritmética, la geometría, la música, la astronomía, y otras. Tal tema nos conduce a poder responder la pregunta: ¿Cómo aprender lo mejor posible y cómo enseñar lo mejor posible? Tenemos indudablemente la equivalencia que se da entre: aprender ≡ enseñar, quien aprende mejor tiene la posibilidad real de enseñar mejor; quien no sabe enseñar bien, no sabe aprender bien. Tal máxima, aunque sencilla en su inmediata comprensión, no obstante, nos muestra un problema concreto de gran alcance: la mayoría de los profesores de matemáticas no saben enseñar bien, lo cual equivale a que no supieron aprender bien. Tal hecho es una verdad, si se le mira más a fondo bajo la otra equivalencia que le antecede a esta: vivir filosófico ≡ saber matematizar, filósofo ≡ matemático.

Es de entenderse cómo los pitagóricos dedicaron tanto tiempo para que los acusmáticos se dedicaran a aprender a oír, y los matemáticos se dedicaran a enseñar a condición de saber escuchar bien. El que vive como filósofo aprende y ejercita toda suerte de virtudes que intervienen de manera directa en el aprendizaje y la enseñanza, es decir en las matemáticas: siendo la aritmética, la geometría, la música entre otras, donde más recursos y destrezas hay que mostrar tanto el maestro como el discípulo. Las matemáticas gobiernan los procesos de aprendizaje y enseñanza dentro de un contexto de maximización. Responder la pregunta general: ¿Cómo se aprende y se enseña mejor? Es algo que está fuera de la meta de nuestro trabajo, diremos que la aritmética, la geometría, y la música para los pitagóricos representaron las disciplinas más apropiadas para ejercitarse como discípulos y maestros. Aquellas que convocaban las mejores condiciones de: concentración, memoria, atención, creatividad, deducción, intuición, en otras. A su vez, estaba la exigencia de tratarlas como arte y técnica, que deben de ser entregadas con generosidad de la mano, de manera directa y personalizada en el contexto maestro-discípulo.

5.5.2.2. Las matemáticas como la ciencia que aborda la solución de problemas

En la presentación de un problema concreto, las matemáticas siempre se orientan en poderlo resolver, identificando su origen que al ser variado puede ser un asunto del diario vivir que requiera de la agudeza e ingenio del matemático; puede ser una urgencia que provenga de otros campos, como los de las ciencias aplicadas, puede ser el mero hecho del gozo y la diversión en resolver algo como un juego o espacio lúdico. En este caso, notamos que la actual formulación recoge las anteriores al comenzar con la conectiva binaria de la conjunción (*καί*) que une este argumento a los anteriores, luego viene la conjunción condicional (*ἐάν*) que expresa unas condiciones que se han de satisfacer, tal partícula es propia para la introducción de la conectiva binaria de la implicación material. Lo que nos indica, que podría ser dividida en dos proposiciones sujetas a dos condiciones, donde la primera presenta el problema y la segunda lo resuelve o responde. Y si (*καί ἐάν*) una recta en dos rectas (*εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα*) cayera (participio singular presente femenino *ἐμπίπτουσα* del verbo *ἐμπίτνω*) en ellas (*τάς*) en su interior, dentro, o en la mitad (*ἐντός*). Notamos que la anterior formulación podría ser reorganizada como: si una recta cae en el interior de dos rectas ($\text{Ἐ}_{\varepsilon\varepsilon} \rightarrow \text{Ἐ}_{\varepsilon\delta}$). En esta expresión podemos resaltar una situación al azar, la cual es escogida debido a que motiva la inventiva, desarrolla la intuición y de alguna manera, se resuelve un problema que es entretenido y placentero. En lo posible, el tema planteado debe aspirar tener un impacto mayor, cierto grado de universalidad, y su presentación debe atraer y predisponer de la mejor manera a quienes lo vayan a resolver.

5.5.2.3. La matemática, una ciencia que se impone unas condiciones a cumplir

Luego viene la presentación de las condiciones que se han de satisfacer: Y (*καί*) sobre (*ἐπί*) las (*τά*) mismas (*αὐτά*) partes (*μέρη*) dos (*δύο*) ángulos (*γωνίας*) rectos (*ὀρθῶν*) más pequeños (*ἐλάσσονας*) se producen (*ποιῇ* presente subjuntivo del verbo *ποιέω*). Hemos de resaltar que en la traducción: *de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos,* se hace una interpretación geométrica más precisa pero que corta de alguna manera, lo que debe entender e intuir el intérprete de esta proposición. La formulación original es más sencilla que la que se tradujo. Luego, tenemos la situación '*in situ*' que tiene, que se da como una consecuencia directa de las condiciones iniciales y que establece la singularidad del problema a resolver: son lanzadas (*ἐκβαλλομένας*, participio singular presente del verbo *ἐκβάλλω*) las (*τάς*) dos (*δύο*) rectas (*εὐθείας*) en (*ἐπ'*) el infinito (*ἄπειρον*) cayendo (*συμπίπτειν*, presente infinitivo de *συμπίτνω*). Notamos que esta formulación introduce toda una complejidad, de una parte une nociones aritméticas como lo es una (*εἰς*) en dos (*δύο*), y luego presenta el ente o nocional geométrico que ha de satisfacer esta proposición: *una en dos las líneas rectas* (*εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα*) en medio de dos acciones verbales: la una lanza (*ἐκβάλλω*) y la otra cae (*συμπίτνω*), se lanza para caer, y ¿Dónde? Nada menos que en el infinito (*ἄπειρον*), aquel lugar incuantificable, incontable, inaprehensible. Esta situación produce toda suerte de preguntas y conjeturas, de cómo tal hecho es posible y sí es verdad que sucede, en fin estimula la investigación y la imaginación creativa a niveles insospechados.

Luego tenemos la cuarta formulación contenida en este axioma en la que se establece el resultado obtenido, se determina las consecuencias que se obtienen como consecuencia de la recreación del mismo: *al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos* (*ἐφ' ἃ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες*). En consecuencia (*ἐφ'*, *ἐπί*), a las (*ἅ*, *ὅς*) partes (*μέρη*) son (*εἰσίν*, tercera persona del presente indicativo de *εἰμί*) las (*αἱ*, tercera persona del artículo femenino plural nominativo de *ὁ*) que (*τῶν*, artículo genitivo plural de *ὁ*) dos (*δύο*) rectos (*ὀρθῶν*, adjetivo genitivo plural masculino) más pequeños (*ἐλάσσονες*, adjetivo plural comparativo de *ἐλάσσων*). Vemos en la conclusión, cómo las partes (*μέρος*) existen (*εἰμί*) como dos (*δύο*) ángulos (*γωνία*) rectos (*ὀρθός*) más pequeños (*ἐλάσσων*). Tal es el resultado de la acción de caer o precipitarse (*συμπίτνω*) en el infinito (*ἄπειρον*), que el ángulo (*γωνία*) conformado es menor (*ἐλάσσων*) que dos (*δύο*) rectos (*ὀρθός*). Tal hecho, lleva a que las rectas al prolongadas indefinidamente (*ἄπειρον συμπίπτειν*) tendrán que encontrarse en algún lugar hacia delante e intersectarse. Hay que resaltar que este axioma es independiente de los demás cuatro, que Euclides lo incluyó consciente de no tener una prueba del mismo como un posible estímulo para las generaciones de geómetras y matemáticos que le siguieron siglos más adelante.

5.5.2.4. Algunas formulaciones matemáticas permiten dar un salto cognoscitivo

El matemático John Playfair[442] estableció una nueva formulación del quinto axioma de Euclides, la cual se utiliza hoy día y que dice: *En un plano, dada una línea y un punto que no está en el plano, al menos se puede trazar una línea paralela a dicha línea a lo largo del punto* "*In a plane, given a line and a point not on it, at most one line parallel to the given line can be drawn through the point*". Una de las razones principales que lleva a que este quinto postulado no se siga como una consecuencia lógica de la cadena inferencial de los cuatro anteriores, se debe en parte a que se introducen unos hechos hipotéticos que adquieren su máxima contradicción cuando se introduce el comentario: se precipita hacia lo que carece de frontera y por completo inexperimentado (*ἄπειρον συμπίπτειν*). En especial, el adjetivo *ἄπειρος* tiene dos significados: el primero proviene de *ἀ*- (sin, no) + *πεῖρα* (peîra, juicio, intento); que nos sugiere algo que no puede ser experimentado y de lo cual no hay noticia. Y, el segundo significado proviene de *ἀ*- (a-, no, sin) + *πεῖραρ*, *πέρας* (final, límite), para darnos algo carente de límite, infinito, sin final y circular.

Con lo cual no existe ninguna regla del cálculo proposicional que sirva para establecer una conexión inferencial con algo de lo cual no hay experiencia y no es susceptible de transformarse en una proposición cuantificable. Aún este axioma es más complejo, y no es posible asociarle el principio de inducción aritmética que se utiliza para complementar la construcción de los números naturales y/o enteros. Ni los operadores de la

[442] En su obra *Elements or Geometry containing the first six books of Euclid*, John Playfair (1813) introduce su famosa reinterpretación del axioma de las paralelas de Euclides: trazar una línea recta a través de un punto dado paralelo a una línea recta dada (Prop XXXI: to draw a straight line through a given point parallel to a given straight line, pág. 29).

lógica modal sirven para precisar este axioma, al no existir un camino dentro de la lógica clásica tradicional que resuelva este problema, se hizo necesario delinear nuevos modelos de geometría donde las nociones primitivas y los axiomas fueran otros: otro tipo de líneas, en vez de una fundamentación alrededor de la noción de línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) nos vamos hacia la línea curva (*καμπύλη γραμμή*), como una nueva noción para la construcción de otros axiomas, esto dio origen a las geometrías hiperbólica y la elíptica entre otras.

5. 6. Los nocionales como epistemes dentro de una teoría aritmético-matemática

El conocer en las matemáticas está caracterizado por la mediación de unos entes creados por la imaginación, cuyo propósito central es servir de mediadores o facilitadores frente a lo que el mismo conocer ese ve enfrentado a abordar en relación a la realidad silenciosa e inaprehensible que nos rodea. La invención del lenguaje como vehículo por medio del cual accedemos a conocer, develar, revelar, imaginar y suponer como el mundo es. El lenguaje hablado es el primer instrumento que nos permitió conocer y crear una variedad de modelos de distinta textura a fin de poder situarnos en el mundo y en tratar de interaccionar con el mismo y en buscar encontrar respuestas a tantas preguntas que surgen. No nos ocuparemos en abordar todo lo que se supone que se necesita para conocer, diremos que la filosofía y la matemática necesitan como insumo fundacional el lenguaje corriente, aquel hablado por todos los miembros de una comunidad. Las urgencias prácticas del diario vivir, como las establecidas por la necesidad de vivir en colectividad, el trato con los otros y la búsqueda de procesos de integración más elaborados, condujo a la creación de la aritmética y la geometría, muy unidas a la invención del calendario, a las actividades comerciales y a la necesidad de medir y contar. Todo esto a fin de hacer exitosos los procesos de la creación de comunidades y las actividades administrativas que las hacen posibles. La invención del número puede estar referida a la necesidad de que uno sea reconocido en primera persona, como un antecedente del pronombre personal yo, como aquel individual singular único con derechos y necesidades propias. En fin, emprender toda la arqueología para rastrear los proto-orígenes de la aritmética, geometría, astronomía es harto complejo, y nos aleja de nuestro tema. Los nocionales euclidianos que podemos apreciar en *Los Elementos* son herederos de una compleja y rica tradición que los precede, son aquellos referentes que podemos situar, nombrar y reconocer en sus textos. Veamos algunos de ellos en el texto del libro VII de Euclides de *Los Elementos*:

El presente exto comienza con el siguiente axioma: *Una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una* (*μονάς ἐστιν, καθ’ ἥν ἕκαστον τῶν ὄντων ἕν λέγεται*). Tenemos que el nocional de lo está solo como la unidad (*μονάς*), es el fundamento del número uno (*εἷς*): determina el ente (*ὤν*) de todos los entes (*ὄντα*), es el fundamento de lo que se dice y enumera (*λέγω*), y por consiguiente del logos (*λόγος*). El nocional de la unidad (*μονάς*), como la monada (*μονάδα*) primigenia, lo que es uno (*εἷς*) y además que establece la condición de lo que está en todo (*ὅλος*), siendo la parte (*μέρος*) constitutiva de todos los entes (*ὄντα*), y en consecuencia, de cada (*ἕκαστος*) ente (*ὤν*). Se caracteriza por su capacidad de estar sola (*μονάζω*), y de quedar sin compañía (*μόνοω*), lo cual involucra un razonamiento que es muy profundo. Identificar un nocional básico aquí, es algo presumido hacerlo, es conveniente que tales nocionales reciban otro nombre, no se les puede nombrar como categorías: lo que involucraría todo un proceso complejo de abstracción, en el cual se identifican las partes fundamentales que pueden ser sujeto de una predicación obligada del lenguaje. Propondremos denominarlas epistemes (*ἐπιστήμη*), vocablo que proviene de lo que está sobre (*ἐπί*) para sostener (*ἵστημι*) un saber, aprendido y capaz de ejercerse a sí mismo de manera práctica (*ἐπίσταμαι*). De manera, que es más apropiado en algunos contextos denominar episteme a nuestro ente cognoscitivo en vez de nocional: debido a que ya estamos partiendo de una situación de comprensión y entendimiento complejo, y no de algo meramente sencillo y evidente por sí mismo. Además, las epistemes involucran haber sobremontado algunos obstáculos propios del conocer, en busca de un detenimiento a fin que la mente pueda reflexionar (*ἐπίστασις*): en base a lo que soporta y sobre (*ἐπί*) lo cual se establece una posición que permite dar estabilidad y firmeza a una posición fundacional (*στάσις*). Dado que está al frente a fin de poder gobernarlo (*ἐπιστατέω*), evita que entren en desacuerdo (*στασιάζω*) las distintas nociones fundamentales que constituyen nuestro cuerpo de conocimiento matemático.

5.6.1. Análisis exegético filosófico-matemático de las epistemes fundacionales pitagórico-euclidianos

Nuestra atención se centra sobre aquellas epistemes (*ἐπιστήμη*) fundacionales en los que se asienta el pensamiento pitagórico y euclidiano. Como bien se podrá argumentar, las epistemes (*ἐπιστήμη*) presuponen un proceso cognoscitivo elaborado, cuya caracterización involucra identificar algunos nocionales nouménicos asimismo como algunos nocionales universales que subyacen en la fundamentación de las matemáticas. En ese sentido, estamos asumiendo que tal empresa solo fue posible por el concurso conjunto entre la filosofía y la matemática, como era entendida en sus orígenes: una forma de vida que nos abre a la contemplación de los entes fundamentales que subyacen a todo tipo de proceso de aprendizaje y por ende de enseñanza. El problema de cómo aprender y enseñar de la mejor manera, está en la raíz de la elaboración de toda epistemología. Así como la actitud contemplativa de lo inaprehensible por medio de la palabra está en la base de toda ontología. Estas epistemes se erigen y construyen para identificar los campos de lo decibe y lo indecible, de lo decidible y lo indecidible: en los mismos umbrales que hacen posible la elaboración del lenguaje, en el cual el número tiene la potestad de comprimir a niveles insospechados la misma dinámica del lenguaje. Los números se constituyen de esta manera, en el campo de mayor abstracción y síntesis de la palabra misma.

Surge entonces la pregunta que indaga acerca ¿Cómo se construyen estas epistemes aritmético-geométricos en relación al texto de *Los Elementos* de Euclides?

i. Se identifican unos procesos de abstracción (descomposición de las partes constituyentes de un todo-unidad), y a la vez la reconstitución de tales partes a través de un proceso de reunión (algebraización, que en nuestro caso se da en la misma elaboración de una proposición, un axioma o un teorema: que no es más que una expresión algebraica del lenguaje cotidiano).

ii. Se busca llegar a aquellas nociones o instancias fundamentales por ser primigenias a todo proceso, ya sea existencial o ya sea cognoscitivo, a nivel de una disciplina formal como lo es la matemática. En ese sentido, se busca llegar a la base o fundamento mismo a partir del cual se levanta la construcción de toda esa ciencia, saber científico o saber matematizable.

iii. Se pretende establecer la génesis de las demás nociones que se desprenden de tales nocionales fundamentales nouménicos, que transformados en epistemes buscan constituir el cuerpo de un discurso o teoría formal, sea aritmética o geométrica. En este proceso aparecen todos los demás nocionales, algunos con un orden muy preciso por anteceder a la gran mayoría, otros con un tipo de derivabilidad secundaria, debido a un posible múltiple origen a partir de otros varios nocionales que le anteceden.

iv. Luego aparecen en la superficie algunos que ya no propiamente son epistemes, más se les puede calificar como nocionales o derivados de importancia limitada, debido a que ejercitan su dominio en campos más restringidos de un saber: ya sea respecto a un solo teorema, o en ciertos aspectos propios de una disciplina.

La episteme (*ἐπιστήμη*) presupone la existencia de un conocimiento avanzado, por tal motivo su traducción significa: ciencia, saber, conocimiento, noción, destreza, pericia. Lo que nos indica que estamos frente a algo sobre lo cual (*ἐπί*) se coloca (*ἵστημι*) un tipo de saber, que involucra un aprendizaje que ha llegado a entender y conocer algo de manera práctica (*ἐπίσταμαι*). Propondremos, por consiguiente, que en la episteme (*ἐπιστήμη*) se tiene una equivalencia fundamental: conocimiento ≡ ciencia, un tipo o clase de saber que es científico. No todo conocimiento tiene la posibilidad de verse expresado en algoritmos teórico-prácticos, como lo han de ser los epistemes: sea el caso de unos axiomas, que luego pasan a hacer parte de unos teoremas con sus respectivas demostraciones, y a su vez son capaces de intervenir para definir el área de una casa, o de un terreno o en ayudar a realizar una transacción comercial. Notamos que la episteme hace parte de aquel conocimiento que mantiene una comunicación práctica con la realidad natural a fin de crear caminos concretos que nos permitan interactuar de manera eficiente con la misma, asimismo en acceder a lo más elevado a nivel contemplativo susceptible de ser aprehendido por unas palabras. Tenemos a este nivel la noción del uno (*εἶς*) como lo infinito (*ἄπειρον*), tal criterio manifestado en la unidad (*μονάς*) situada en el comienzo (*ἀρχή*) de la existencia, es el criterio que subyace al número (*ἀριθμός*). Es de una profundidad enorme fruto de uno de los más altos actos contemplativos, y a la vez es una de las herramientas más efectivas que nos ha permitido apropiarnos y modificar el mundo que nos rodea, que son los números.

El nivel epistemológico involucra una etapa superior a nivel del desarrollo cognoscitivo de una colectividad humana, involucra la existencia de un cultura en la cual se han logrado gestar las etapas previas, más relacionadas con: la supervivencia básica, con la expansión y colectivización de un territorio amplio, que permita la gestación de un lenguaje hablado y escrito, con el desarrollo posterior de una civilización entendida como una colectividad de pueblos independientes unidos bajo fuertes lazos de una común herencia cultural y por tanto lingüística. La mayor fuerza para tal desarrollo tan solo la observamos en las denominadas *polis* griegas o helenas, existe además un elemento único que tuvo lugar en tal cultura civilizadora: la génesis de una literatura poética mítico-heroica que servía de modelo cultural, que era imitada y seguida. A su vez, ha sido el único pueblo, los helenos, donde surgió la filosofía y los filósofos o sofistas u otros nombres, en tal proliferación e importancia, que nunca jamás en toda la historia de la humanidad, se ha repetido tan singular acontecimiento. En tal singularidad cultural surgió la filosofía, la matemática, las ciencias, las artes, etc., dotadas de una fundamentación rigurosa que hasta hoy día se aplica. Es posible, que sin tal base, las ciencias en su actual desarrollo no hubieran dado.

El nivel epistemológico-cognoscitivo heredado de Pitágoras involucra el desarrollo de:

i. Unos nocionales trascendentales nouménicos: noción del uno (*εἷς*) como áperion (*ἄπειρον*).
ii. El desarrollo de un plano metafísico a partir del cual derivar unos principios fundantes, sean diez para todas las ramas del saber: (*ἀρχάς δέκα λέγουσιν*)
iii. El número (*ἀριθμός*) como aquella entidad preexistente en el universo bajo la cual todo está organizado, y la aritmética como la disciplina que la estudia.
iv. La recreación de unas formas geométricas en las que se puede apreciar la naturaleza divina, lo que hace a la geometría una ciencia sagrada.

v. El cultivo de una forma de vida denominada filosófica, el identificar al que sabe aprender y enseñar con destreza ejemplar como el matemático.

vi. La edificación de las ciencias prácticas a partir de la concepción de un mundo gobernado por los elementos y las relaciones derivadas de ellos.

vii. La concepción de la trascendentalidad del alma y la reencarnación como modelo para evolucionar hacia la perfección.

viii. Un universo regido por leyes y principios a los que están sujetos aún los dioses del Olimpo y todo lo que existe en el universo.

ix. La recopilación, mejora e implementación bajo una teorización modelada, que apropia los conocimientos recibidos de civilizaciones previas a la propia.

x. Las bases para una aritmética, una geometría que logra teorizar acerca del famoso teorema pitagórico, y demás logros.

El nivel epistemológico-cognoscitivo heredado de Euclides involucra el desarrollo de:

i. La definición de unas nociones primitivas a partir de unos axiomas fundamentales.

ii. La derivación de una serie de nocionales a partir de los anteriores siguiendo un tipo de análisis deductivo inferencial concatenado.

iii. La definición de una serie de teoremas y postulados formales a partir de los cuales construir la aritmética y la geometría.

iv. La necesidad que todo teorema fundante de una disciplina pura se vea obligado a suministrar una demostración de naturaleza formal.

v. La recreación geométrica de las matemáticas en general, la creación de unas fórmulas para derivar algunos entes geométricos fundamentales.

5.7. Análisis de los demás axiomas relacionados con la construcción de los números

El axioma dos dice: *Un número es una pluralidad compuesta de unidades* (*ἀριθμός δέ τό ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος*). En este axioma, se nota el tratamiento que se ha dado desde entonces al número, en especial a los enteros, donde la misma unidad (*μονάς*) es tomada como el elemento referencial: sin embargo, una cosa es decir que la unidad (*μονάς*) subyace a toda expresión numérica, lo que en principio nos da cierta libertad para construir las otras partes (*μέρος*), que constituyen lo numérico de cada número. Pero asumir que la unidad (*μονάς*) es una instancia completa e indecible que abarca toda la decibilidad de un número que no sea el uno (*εἶς*), nos restringe la posibilidad de imaginar y recrear los demás números: dado que llevaría a que no se podría decir ni aseverar nada de los mismos. Aún la expresión (*μονάδων συγκείμενον*), nos puede llevar a pensar que la unidad (*μονάς*), es efectivamente la instancia que pega o liga (*σύγκειμαι*) a todos los demás números, debido a que no tienen la indiscernible unidad del uno (*εἶς*): lo que no sea el fundamento de todo cuanto existe, se las tiene que ingeniar para adquirir un estatus existencial que no tiene y que lo recibe de otra instancia; que aunque sea el gran universal que todo lo subyace, no es estrictamente todo lo demás.

Esa potestad de la unidad (*μονάς*), de la mónada (*μονάδα*) de: atar, situar y establecer (*κεῖμαι*) lo múltiple (*πλήθω*) de manera conjunta (*σύν*) es potestad tan solo del uno (*εἶς*). Con lo cual, debería de existir a nivel numérico, aquello que sin ser uno participe del mismo, como efectivamente lo hace. Se introduce otra categoría propia de la naturaleza múltiple (*πλήθω*) del número (*ἀριθμός*), en reconocimiento que todo número que no sea el uno, es incompleto y por consiguiente diferenciado. El actual imaginario que se utiliza hoy día en lo tocante a la construcción axiomática de los números enteros, que repite la unidad (*μονάς*), y no toma en cuenta que todo lo que no es uno (1) es distinto. El que la base numérica sea decimal o vigesimal o sexagesimal, no es por capricho ni por que sí. Obedece a algo más profundo, que todavía no ha sido adecuadamente apresado en la formulación del número y que siempre es recordado por los conjuntos numéricos que no son los enteros. Hemos de tener presente que la presencia del uno (*εἶς*) en todos los números, es esa capacidad de unir de manera conjunta las partes (*μέρος*) en un solo todo (*ὅλος*) numérico diferenciado: único como expresión numérica, pero distinto del uno.

Veamos el tercer axioma: *Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor* (*μέρος ἐστίν ἀριθμός ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τόν μείζονα*). En este contexto se reconoce a la parte (*μέρος*) es (*ἐστίν*) número (*ἀριθμός*), en cuanto hereda la propiedad de poder contar o enumerar (*ἀριθμέω*). De nuevo, se busca definir la naturaleza del número exclusivamente desde lo extensivo, en cuanto pueda medir (*καταμετρέω*) algo: en especial medir (*μετρέω*) algo que está abajo (*κατά*), sea el caso sobre (*ἐπί*) la línea (*γραμμή*). Pero, ¿Por qué el número debe quedar tan solo limitado a una representación sobre una línea? No es demasiado precio a pagar por tal geometrización lineal del número. En este contexto, de medir algo sobre algo reducible a una línea, se tiene lo que es mayor que (*μείζων*) y lo que es menor que (*ἐλασσόω*). Esta estrategia es la que ha prevalecido hasta hoy día en la construcción de los números reales ($\mathbb{R}$; + ; · ; <). El cuarto axioma afirma: *Pero partes cuando no lo mide* (*μέρη δέ, ὅταν μή καταμετρῇ). En este contexto, se considera que es potestad de la parte (*μέρος*) medir (*καταμετρέω*), aun cuando (*ὅταν*) parezca que no (*μή*) se puede. Veamos el quinto axioma: *Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor* (*πολλαπλάσιος δέ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπό τοῦ ἐλάσσονος*). En este numeral, se considera que todo número es una multitud (*πλήθω*), en que se es múltiplo (*πολλαπλάσιος*) de otro número, tal aspecto es la base sobre la cual se fundamenta la multiplicación (*πληθύνω*). Lo que permite medir y distribuir (*καταμετρέω*) tanto hacia lo que es más grande (*μείζων*) o hacia lo más pequeño (*ἐλασσόω*), y cómo en lo que es más grande está representado el que es menor.

El sexto axioma dice: *Un número par es el que se divide en dos partes iguales* (*ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος*). Tenemos al número par (*ἄρτιος ἀριθμός*), aquel que se puede dividir (*διχάζω*) en dos (*δύο*) partes dobles (*δισσός*). El séptimo axioma dice: *Un número impar es el que no se divide en dos partes iguales, o difiere de un número par en una unidad* (*περισσός δέ ὁ μή διαιρούμενος δίχα ἤ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ*). El número impar (*περισσός ἀριθμός*), es el que no (*μή*) se divide (*διαιρέω*) en dos (*δίχα*), o como preposición que es capaz de separar (*δίχα*). Se establece que una de las diferencias del número par (*ἄρτιος ἀριθμός*) frente al número impar (*περισσός ἀριθμός*) es que este último lo desborda (*περισσεύω*) en una unidad (*μονάς*).

El axioma ocho establece: *Un número parmente par es el medido por un número par según un número par* (*ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπό ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατά ἄρτιον ἀριθμόν*). Lo interesante de esta nueva formulación es la introducción del vocablo (*ἀρτιάκις*), que es tomado como una paridad de veces; una manera de expresar la existencia de una 'serie de números pares' (*ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός*). En la que se establece la propiedad fundamental de todo número par, que es la de poder medir (*μετρέω*) a otro número par. De esta manera se constituye la medida (*μέτρημα*) de todos los que son números pares (*ἄρτιος ἀριθμός*). El axioma nueve dice: *Y parmente impar es el medido por un número par según un número impar* (*ἀρτιάκις δέ περισσός ἐστιν ὁ ὑπό ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατά περισσόν ἀριθμόν*). Se establece la posibilidad que un número par (*ἄρτιος ἀριθμός*) como serie (*ἀρτιάκις*) pueda medir (*μετρέω*) a un número impar (*περισσός ἀριθμός*), este hecho introduce un problema fundamental: que no toda serie par (*ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός*) puede medir (*μετρέω*) de manera completa al número impar (*περισσός ἀριθμός*), tema que queda abierto a debate. El axioma diez manifiesta: *Imparmente impar es el medido por número impar según un número impar* (*περισσάκις δέ περισσός ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπό περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατά περισσόν ἀριθμόν*). En este axioma se introduce la noción de una serie de números impares (*περισσάκις δέ περισσός ἀριθμός*), como la que tiene la potestad de medir (*μετρέω*) al número impar (*περισσός ἀριθμός*) por medio de él mismo o por otro número impar.

El axioma once es de estratégica importancia y dice: *Un número primo es el medido por la sola unidad* (*πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος*). Lo importante de esta postulación es que presenta a aquel número que es primero (*πρῶτος ἀριθμός ἐστιν*) que los otros números, tal hecho se corresponde con lo que se hace llamar número primo. La característica de tales números es que acarean y transportan la unidad (*μονάς*), aquella instancia que es la base de toda medida (*μέτρημα*) capaz de medir (*μετρέω*) cualquier número (*ἀριθμός*). El axioma doce expresa: *Números primos entre sí son los medidos por la sola unidad como medida común* (*πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ*). Tenemos aquellos números están primero (*πρῶτος ἀριθμός*) y que tienen la potestad de asumir una actitud recíproca que contemple moverse en dos direcciones, del uno hacia el otro (*ἀλλήλων*) acarreando la unidad (*μονάς*). Les permite aseverar lo que es común (*κοινός*), aquello transformado en un operador que posibilita hacer común (*κοινόω*) o establecer una igualdad que permita comparar todos los números entre sí, sean pares e impares, y establecer la comunidad (*κοινωνία*) entre los distintos conjuntos numéricos a fin de poderlos medir (*μετρέω*) de manera común (*κοινός*).

El axioma trece asevera: *Número compuesto es el medido por algún número* (*σύνθετος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος*). En este axioma se está introduciendo una nueva categoría numérica, aquella signada por denominarse (*σύνθετος ἀριθμός*), aquel número (*ἀριθμός*) que tiene la potestad de agrupar, de reunir, de juntar; y que le han denominado 'número compuesto', es aquel que puede medir (*μετρέω*) a cualquier (*τις*) número. Sea porque, es el que puede realizar combinaciones, arreglos, composiciones (*σύνθεσις*), donde se mantiene el tratado, pacto y la alianza (*συνθήκη*) establecida: la cual establece esa señal convenida como signo y cifra (*σύνθημα*) que permite las operaciones conocidas. El axioma catorce establece que: *Los números compuestos entre sí son los medidos por algún número como medida común* (*σύνθετοι δέ πρός ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ*). Los números compuestos (*σύνθετος ἀριθμός*) son (*εἰσιν*) los (*οἱ*) números (*ἀριθμοί*) que van (*πρός*) entre sí los unos con los otros (*ἀλλήλων*) hacia aquel número (*ἀριθμῷ*) que es la medida (*μέτρῳ*) común (*κοινῷ*) de cualquiera (*τινι*).

Los números compuestos (*σύνθετος ἀριθμός*) son (*εἰσιν*) los (*οἱ*) que pueden agruparse (*συντίθημι*) entre sí (*ἀλλήλων*) y dirigirse (*πρός*) hacia aquel número (*ἀριθμῷ*) que es su medida (*μέτρῳ*) común (*κοινῷ*). Este hecho es significativo, dado que existe un número (*ἀριθμός*) que es medida (*μέτρημα*) común (*κοινός*) de muchos números (*ἀριθμοί*). Los números que tienen esa posibilidad de agruparse (*συντίθημι*) en torno a tal número son los números compuestos (*σύνθετος ἀριθμός*). Se nota la existencia de una densidad en las relaciones que gobiernan a los números compuestos: una suerte de biyectividad (*ἀλλήλων*) común, que los lleva a reunirse (*συντίθημι*) en torno a una clase bien definida, la clase de los números compuestos; y, cómo es posible encontrar un número (*ἀριθμός*) que es la medida (*μέτρημα*) común (*κοινός*) de todos: aquel que mide (*μετρέω*) lo que es común (*κοινός*) a todos o a cualquiera (*τις*). Encontrar tal medida (*μέτρημα*), es un logro significativo para cualquier conjunto de números debido a que lleva a caracterizarlos y a definir el tipo de clase o de conjunto que define su membrecía. Lo que permite reunirlos, efectuar las operaciones pertinentes entre ellos y establecer sus composiciones (*σύνθεσις*).

El axioma quince manifiesta: *Se dice que un número multiplica a un número cuando el multiplicando se añade (a sí mismo) tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número* (*ἀριθμός ἀριθμόν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν, ὅσαι εἰσίν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καί γένηταί τις*). El número que multiplica (*ἀριθμός ἀριθμόν πολλαπλασιάζειν*) es (*ἐστιν*) aquel que siempre y cuando (*ὅταν*) cuantas veces que sea necesario (*ὅσος*), es un (*ἐν*) número (*ἀριθμός*) que en un proceso reflexivo en torno a sí mismo (*αὐτός*) puede convocar su propia unidad (*μονάς*) cuantas veces (*πολλάκις*) se requiera. La posibilidad de la unidad (*μονάς*) de reproducirse a sí misma de manera reiterativa, es lo que caracteriza a la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*). Lo cual es posible, siempre y cuando se tenga la posibilidad de reunir en torno suyo (*συντίθημι*) aquello que ha sido multiplicado (*πολλαπλασιάζω*), conduciendo a cualquier (*τις*) número (*ἀριθμός*) a un nuevo estado existencial (*γίγνομαι*).

La unidad (*μονάς*) es preservada en la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*), que es un proceso de la misma (*αὐτός*) unidad (*μονάς*) en torno a sí misma. Esa posibilidad de reducirse de nuevo cuantas veces sea necesario (*πολλάκις*) a una (*μονόω*) sin perder su unidad (*μονάς*), es algo que merece la pena destacar y reafirma la naturaleza de la unidad (*μονάς*) de reunir y situar en torno suyo (*συντίθημι*) las propiedades del número (*ἀριθμός*) que es multiplicado (*πολλαπλασιάζω*). Notamos que el uno (*ἐν*) se sigue manifestando como una unidad (*μονάς*), como un todo (*πᾶς*) en que sus partes siguen estando unidas en torno a una misma expresión numérica. Algo que es muy significativo del actual axioma, es que manifiesta que tan solo la operación de la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*) es posible en aquellos números (*ἀριθμοί*) que son capaces de reunir (*συντίθημι*) en torno suyo (*αὐτός*) su unidad (*μονάς*), que tales números sean capaces de estar solos y autoconsistentes (*μονόω*) en aquello que los constituye: esto hace que tan solo los enteros cumplen tal propiedad, con lo cual los demás conjuntos numéricos (racionales, irracionales, reales y complejos) no pueden aspirar a convocar de manera unificada (*μονάς*) y soberana sus partes; y por consiguiente, no (*μή*) son susceptibles de ser multiplicados (*πολλαπλασιάζω*) entre sí. Cabe resaltar que, por otra parte, una expresión numérica que no mantenga ni conserve su unidad a nivel entero o completo, no podría multiplicarse dado que el residuo no sería exacto ni es reducible a una unidad (*μονάς*) como uno (*ἐν*).

El axioma dieciseis nos manifiesta: *Cuando dos números, al multiplicarse entre sí, hacen algún (número), el resultado se llama (número) plano y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí* (*ὅταν δέ δύο ἀριθμοί πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται, πλευραί δέ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί*). Tenemos en este axioma ese inmenso deseo y necesidad de relacionar entre sí a la aritmética con la geometría, de la búsqueda en crear (*ποιέω*) categorías comunes a ambas disciplinas en arte y técnica, este hecho nos lleva a los denominados números planos (*πλευραί ἀριθμοί*): aquellos que se han definido una superficie (*ἐπιφάνεια*) que, en general, se le asocia que es plana o gobernada por el número dos (*δύο*), en cuanto posee ancho y largo. Hemos de recordar que el insigne ente de la superficie plana, es la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). Esta noción alrededor de la cual se definió lo plano (*ἐπίπεδος*), donde buscaremos aplicarle la operación aritmética de la multiplicación (*πολλαπλασιασμός*). Tenemos a la pareja (*δυάς*) como aquella relación básica que se da entre dos (*δύο*), es la relación básica y por tal motivo, la multiplicación entre dos números (*δύο ἀριθμοί πολλαπλασιάσαντες*) es la que se va a denominar un número plano (*ἐπίπεδος ἀριθμός*). Se introduce la explicación geométrica de tal hecho al afirmar que son los lados (*πλευρά*) reunidos (*συντίθημι*) en torno a estos dos números los que se han multiplicado (*πολλαπλασιάζω*) entre sí (*ἀλλήλων*).

El axioma diecisiete dice: *Cuando tres números, al multiplicarse entre sí, hacen algún número, el resultado es un (número) sólido y sus lados son los números que se han multiplicado entre sí.* (*ὅταν δέ τρεῖς ἀριθμοί πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεός ἐστιν, πλευραί δέ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί*). Tenemos cómo relacionar una figura geométrica a nivel aritmético, al hecho recae sobre lo que tiene ancho, largo y alto, aspecto que está expresado a través de tres números multiplicados entre sí (*τρεῖς ἀριθμοί πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους*). Cuando esto sucede tiene lugar el nacimiento y la venida a la existencia (*γίγνομαι*) del número sólido (*στερεός ἀριθμός*), se destaca que esto se da siempre y cuando (*ὅταν*) se cree (*ποιέω*): que venga a la existencia (*γίγνομαι*) un ente que antes no existía. Existe una similaridad con el anterior axioma al afirmar, que los lados (*πλευραί*) son los que se han multiplicado (*πολλαπλασιάζω*) numéricamente entre sí (*ἀλλήλων*), en un proceso donde que cada número (*ἀριθμός*) vuelve y se multiplica a sí mismo (*αὐτός*) tres (*τρεῖς*) veces.

El axioma dieciocho afirma: *Un número cuadrado es el multiplicado por sí mismo o el comprendido por dos números iguales* (*τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἤ ὁ ὑπό δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος*). Tenemos la introducción del número cuadrado (*τετράγωνος ἀριθμός*), aquel que va representar una figura (*σχῆμα*) cuadrada (*τετράγωνος*), lo llamativo es recurrir de nuevo a la noción de pareja (*δυάς*) entre dos (*δύο*) números: tal hecho nos va a definir la noción de un número igual (*ἰσάκις ἴσος ἀριθμός*) elevado al cuadrado, o sea el dos (*δύο*) por el dos (*δύο*) nos da el cuatro (*τετρά*). Se habla en estos casos de una multiplicación (*πολλαπλασιασμός*) que tiene la propiedad de envolver (*περιέχω*): (*πολλαπλασιάζω περιέχω*) que vendría a ser aquella operación que nos evoca a la exponenciación. La cual tan solo se puede dar entre un número que es igual a sí mismo (*ἴσος ἀριθμός*), hecho reforzado por el vocablo tantas veces (*ἰσάκις*) lo mismo (*ἴσος*), este hecho es una invitación a elevar un número por encima de cuatro veces. Lo importante es que el número sea igual (*ἰσαῖος*): (*ἰσαῖος ἀριθμός*) un número igual a sí mismo es el que se puede elevar a una potencia y no otro.

El axioma diecinueve establece: *Y un (número) cubo el multiplicado dos veces por sí mismo o el comprendido por tres números iguales* (*κύβος δέ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις ἤ ὁ ὑπό τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος*). El número cubo (*κύβος ἀριθμός*) es el que se multiplica (*πολλαπλασιάζω*) tres (*τρεῖς*) veces, la manera de hacerlo es multiplicar lo mismo (*ἴσος*) el mismo número de veces (*ἰσάκις*), teniendo en cuenta que estamos frente a un multiplicar envolvente (*πολλαπλασιάζω περιέχω*) que exige que se dé entre un número (*ἀριθμός*) igual (*ἴσος*) a sí mismo (*αὐτός*) las veces que sea necesario, en este caso tres veces. Es interesante, que el verbo asociado al cubo (*κύβος*) es guiar y conducir (*κυβερνάω*), hecho presente dado que un jugador se escribe (*κυβευτής*); para ganar ha de saber conducir su cubo (*κύβος*) en concordancia con el arte del juego de dados (*κυβεία*), asimismo de la buena conducción de una nave por medio del timón (*κυβέρνησις*).

El axioma veinte afirma: *Unos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto* (*ἀριθμοί ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καί ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἤ τό αὐτό μέρος ἤ τά αὐτά μέρη ὦσιν*). En este numeral se introduce la noción de número proporcional (*ἀνάλογος ἀριθμός*), aquellos que siempre y cuando (*ὅταν*) cumplan con la condición de un orden: donde el primero (*πρῶτος*), el segundo (*δεύτερος*), el tercero (*τρίτος*), el cuarto (*τέταρτος*) se multiplican (*πολλαπλασιάζω*) las veces que se quiera (*ἰσάκις*) a sí mismos (*αὐτός*), esto es posible dado que cada número (*ἀριθμός*) es parte (*μέρος*) de los demás. Se tiene en cuenta, que serían (*ὦσιν*) muchas (*πολλαπλάσιος*) las partes (*μέρος*), que se pueden dar. En tal proporcionalidad, se resalta que el uno puede ser parte del segundo, éste a su vez puede ser parte del tercero, y éste del cuarto.

El axioma veintiuno dice: *Números planos y sólidos semejantes son los que tienen los lados proporcionales* (*ὅμοιοι ἐπίπεδοι καί στερεοί ἀριθμοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τάς πλευράς*). En este axioma se busca establecer una relación entre los números planos (*ἐπίπεδοι ἀριθμοί*) con los números sólidos (*στερεοί ἀριθμοί*) a través de la semejanza o similitud (*ὅμοιος*), que se da cuando algo se hace semejante (*ὁμοιόω*) a fin de poderse comparar. Este hecho se da en concordancia (*ἀνάλογος*) a hacer (*ἔχω*) los lados (*πλευράς*) proporcionales (*ὅμοιος*) entre sí (*ἀλλήλων*). Una vez más el peso de tal acción de hacer (*ἔχω*) proporcionado (*ὁμοιόω*) recae sobre un nocional geométrico como es el lado (*πλευρά*). Finalmente, el último axioma de este séptimo libro de *Los Elementos* es: *Número perfecto es el que es igual a sus propias partes* (*τέλειος ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν*). La existencia del número perfecto (*τέλειος ἀριθμός*) es aquel que ha cumplido (*τέλλω*) con su perfección y realización (*τέλος*): lo cual se da cuando las mismas partes (*μέρος*) en ellas mismas (*ἑαυτοῦ*) son (*ὤν*) iguales (*ἴσος*). Tal proeza parece mostrar que el número (*ἀριθμός*) tiene un destino (*τέλος*): que es perfeccionarse a sí mismo, es hacer que cada parte (*μέρος*) sea igual (*ἴσος*) a las demás. Este es el término o fin (*τελευτή*) último y supremo (*τελευταῖος*) de sus misterios (*τελετή*), todo esto en concordancia en que la ciencia de los números requiere de una iniciación y busca realizarse (*τελέω*) y cumplir con su perfección última (*τέλος*).

5. 8. El tema de las epistemes euclidianas nos lleva a ampliar nuestra cosmovisión

La necesidad de establecer una relación paralela de mutua correspondencia entre la geometría y la aritmética, en un tema que podría denominarse como: la geometrización de la aritmética y/o la aritmetización de la geometría. La representación del número se realiza bajo la mediación de una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*). De igual manera, la solución del problema del todo y la parte, se hace también respecto a la misma línea recta, vemos que no estamos en posesión de un terreno de consolidación de lo aritmético sin que medie para ello la geometría. Tal herencia ha persistido hoy día, tan notoria como las famosas cortaduras de Dedekind con las que se busca probar la inconmensurabilidad del conjunto de los números reales, y en la que se busca recrear la sostenibilidad de la teoría aritmética por medio de recursos geométricos. Surge entonces la pregunta: ¿Qué es el número, y cómo fundamentar su existencia sin recurrir a ningún tipo de ayuda geométrica? El número en griego se dice (*ἀριθμός*), vocablo que significa: número, suma, cantidad, longitud; duración; multitud; numeración; inventario, recuento. Vocablo relacionado con el verbo (*ἀριθμέω*): contar, enumerar; pagar. Asimismo, con el sustantivo (*ἀριθμησις*) que es la acción de contar, una cuenta. Podemos establecer en una primera aproximación, que el número tiene que ver con la acción de contar e involucra una enumeración, su propósito es efectuar una suma, que es una de las formas más simples de cálculo. El resultado es una cantidad que expresa un inventario de todo tipo de entes, que van desde personas a objetos de toda naturaleza. En un sentido aún más profundo involucra una duración de tiempo, hecho presente en los calendarios que han acompañado a la humanidad desde sus mismos inicios como colectividad organizada.

El número (*ἀριθμός*) va unido desde su génesis a la actividad del operador universal de la aritmética que es la suma, todas las demás operaciones son derivaciones de la misma. Su propósito es contar y enumerar, en ambas se da la noción de un orden. Su meta es calcular las relaciones que se dan entre distintos objetos y la manera en que estos cambian con los días, las estaciones y los años. Hemos de resaltar que para contar algo no se requiere representar tal cuenta en una línea, es una acción que acontece en primer lugar en el mismo sitio, con la variación tan solo de la cifra que reúne la completez del cálculo o de las sumas. Esto nos lleva a establecer que el número (*ἀριθμός*) es aquel ente que recurre a la suma para calcular una cuenta, para ello recurre a diversas estrategias, una de ellas es enumerar, otra es establecer una cantidad o cifra, otra es para mostrar la variación de la suma total en pequeñas variaciones como sumas parciales. Sea que simbolicemos al número como ἀ y su operador o suma como *, de aquí podemos sacar una relación de equivalencia fundamental: solo existe un número si tenemos una suma, entendiendo por esta última cualquier variación de tal operador universal que es reducible a una suma, ἀ ↔ *, o también lo podemos simbolizar como * (ἀ).

El número expresa una multitud de cosas, eventos, objetos, personas, etc.; tal hecho, nos lleva a que en muchos casos sea necesario diferenciarlos entre sí. Por otra parte, hemos anotado que la unidad (*μονάς*), lo uno (*εἷς*), son nociones demasiado difíciles y no son comprendidas de inmediato. Esto nos lleva a ver, que siempre el ser humano se ha percatado desde el comienzo de los tiempos, que todo en el mundo en torno suyo existe en pareja (*δυάς*): hombre y mujer, macho y hembra, además que todos siendo aún diferentes existimos en especies y subespecies. Esto es apreciable en el número par (*ἄρτιος ἀριθμός*) y en el número impar (*περισσός ἀριθμός*).

El número existe como una pluralidad o multitud de símbolos (*σῆμα*): unos pares, otros impares, unos masculinos y otros femeninos. Tenemos varios símbolos (*σῆμα*) para números pares e impares, o sea no existe un solo número par ni un solo número impar. Pero todavía no se denomina tal hecho un número (*ἀριθμός*), ni propiamente tenemos todavía una aritmética: ¿Qué nos falta? En todo proceso aritmético, tenemos un comienzo y un final. El comienzo puede ser una variedad de objetos que buscan ser aritmetizados o sea sumados bajo diversos métodos o cálculos a fin de aportarnos una variedad diferenciada de totales o un gran total. Es decir, un procedimiento numérico no es completo si no es capaz de establecer una serie de cálculos o sumas entre diversos objetos a fin de aportarnos unos totales de los mismos. Este hecho conduce a apreciar al número de diversas maneras, uno como cifra que simboliza la enumeración de un número de objetos y, otra, al número como la cifra que representa el final y la completitud de esos objetos sumados. Una enumeración que no sea capaz de reunirse (*συντίθημι*) en torno a una cifra completa no sirve para nada.

Tenemos variados procesos, unos más antiguos que otros, indudablemente que surge la pregunta frente a una necesidad inmediata de tipo práctico: ¿Cómo sumar de la mejor manera, cómo enumerar de la mejor manera aún una multitud grande de objetos distintos? Hay que dar distintos nombres a los números pares-impares o machos-hembras, en especial a los más fundamentales que nos permitan expresar con pocos símbolos multitudes enormes de objetos o personas; y no un símbolo para cada uno, lo cual haría la tarea imposible y además va en contravía de la misma noción de número.

Denominaremos base numérica a aquel grupo de números fundamentales, pares e impares, por medio de los cuales vamos a expresar la numeración y la cantidad de objetos o hechos a contabilizar. En tiempos posteriores, se efectuó toda una reflexión filosófico-metafísica acerca de tal base; en caso que la base sea de diez números, podríamos comenzar afirmando que la mitad (*ἥμισυς*) es par (*ἄρτιος*) y la otra mitad impar (*περισσός*), de manera que ambas mitades reunidas son completas. Notamos al llegar al final de la base que se nos presenta un problema serio: hemos de procurarnos una normativa o leyes que gobiernen la manera en que vamos a ir anotando tanto el orden como la cantidad de lo que está siendo sumado. De modo que, una vez hemos contado diez unidades, hemos de volver a comenzar de nuevo, y de nuevo cuando volvemos a llegar al final de ese nuevo computo, hemos de volver a comenzar hasta que lleguemos al final de aquello que va a ser sumado y en consecuencia calculado, y poderlo expresar en un resultado final. La suma es la única operación que es tolerante de recibir nuevos huéspedes y abrirles espacio, es tan democrática que admite a todos los que llegan y no deja a nadie por fuera.

Al llegar al final relativo de la base numérica, hemos de volver a comenzar de nuevo, digamos bajo una altura u orden nuevo o más superior, en cuanto representa mayor cantidad de objetos y un orden mayor de los mismos. La llegada al final y el retorno al comienzo está signada y simbolizada por un número especial, o por un proceso numérico-aritmético específico, y este recae en el famoso cero o en un espacio que se dejaba vacío o en el cambio de lugar de los sumandos. Tal hecho, tiene unas consecuencias profundas, incalculables a nivel ontológico y epistemológico. Ese estado a donde debe de retornar para luego salir de toda una base o serie numérica es un estado que permite amarrar y unificar, que le brinda solidez y definición al número entendido como una pluralidad organizada de entes estructurados inicialmente bajo dos criterios básicos: orden y cantidad. Aunque pueden existir diversos órdenes que dependen de la manera en que definamos lo numérico o sea lo contable, lo que nos lleva a establecer que pueden existir más órdenes que cantidades a contar. En el criterio del orden está contemplado sumar objetos distintos, y hacerlo no es fácil según sea lo que queramos esperar: sumar huevos, harina, azúcar; a su vez operado bajo el calor, nos da un ente completo que es una torta. Pero sumar entes que no nos lleven a un resultado adecuado no es de ninguna utilidad. En resumidas cuentas, la noción de orden o número ordinal es más compleja de construir que la de número cardinal, es más aún el número cardinal se ve más utilizado cuando tiene que atender los requerimientos de tipos de órdenes más elaborados. Este hecho fue estudiado por Cantor[443] en su teoría de los números transfinitos.

Se puede decir que la llegada al final y el consecuente retorno al origen y salida del mismo deben de aportarle al número una mayor solidez y completes. Detrás de esta formulación podríamos agregar, que tal llegada y salida debe de ser completa o sea expresable en unidades (*μονάς*), como un todo (*ὅλος*) completo y definible por unas partes (*μέρος*) claras y específicas: capaces de ser señaladas, enumeradas, contadas, ordenadas, etc., tal hecho, tan solo acontece en los números enteros. Los demás conjuntos numéricos podrían requerir de un tipo de operador o de suma distinta a la de los números enteros o completos, definirla y encontrarla no es tarea fácil, dado que de existir, nos debería proporcionar una completez a los mismos conjuntos. Ya que no es propio del número expresarse como incompleto, imposible de contactar su lugar de origen y retorno. No obstante, ese problema surge en relación a la geometrización de la noción de número, solucionarlo por medio de recursos aritméticos conduciría a otras estrategias que reclaman más ingenio y trabajo.

[443] Cantor introduce el ordinal de tipo η como el agregado R de todos los números racionales que son mayores que 0 y menores que 1 en su orden natural de precedencia. Luego se muestra como las series ordinales pueden ser mayores que las cardinales. En Cantor Georg (1895), *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, pág. 122 y en pág. 133 donde se introduce el ordinal de tipo θ para el continuo lineal X.

5.9. Hacia la elaboración de una ontología matemática

Un tópico que reviste un interés en especial es la fundamentación de las matemáticas, la cual toma su base de sustentación en la ontología: vocablo que apareció en latín como *ontologia*, fue utilizado inicialmente por el filósofo y pedagogo suizo Jacob Lorhard[444] (*Jacobus Lorhardus*) en su obra *Ogdoas Scholastica,* publicada en 1606. Proviene de unir en el griego, el presente participio de *εἰμί* (ser, existir) que es *ὤν* (el ente) con logos *λόγος* (lo que es dicho y lo que es pensado). Se trata por consiguiente del estudio de los entes matemáticos. Algo que debemos de tener claro, es que la matemática posee distintas texturas, la que es más conocida por todos es la demostrativa: aquella que busca demostrar distintos ejercicios y problemas prácticos partir de unos axiomas y teoremas susceptibles de albergar una demostración formal. Para lo cual, sigue un procedimiento inferencial lógico que recurre a incorporar en una demostración las distintas propiedades teóricas expuestas en los modelos, en muchos casos sigue ciertos pasos por medio de algunos algoritmos y en muchos otros casos recurre al ingenio del matemático. Dentro de esta gran área podemos identificar otra más que se ha dado a conocer de manera universal: consiste en facilitar las herramientas necesarias para que todas las ciencias puedan formular sus hipótesis y desarrollar sus temarios. En este sentido, estamos hablando de las matemáticas como el lenguaje universal que utilizan todas las ciencias para estructurar sus postulados y teorías. Un caso muy notorio son los cálculos, el álgebra lineal, las ecuaciones diferenciales, entre otras; asimismo el cálculo de predicados de la lógica a fin de poder escribir sus fórmulas de manera consistente.

Sin embargo, no es tan conocido aún dentro de la comunidad matemática los textos originales de los grandes matemáticos, donde gran parte de los mismos están escritos en términos que podríamos denominar especulativos dado que no son de inmediata y fácil conversión a nivel de unos procedimientos demostrativos concretos. Tal hecho, ha llevado a

[444] La palabra ontología fue usada por primera vez en el libro de Jacob Lorhard (1606) *Ogdoas Scholastica*, tal como es comentado en el artículo: *Jacob´s Lorhard´s Ontology: a 17th Century Hypertext on the Reality and Temporality of the World of the Intelligibles*, de Øhrstrøm Peter, Schärfe Henrik, Uckelman Sara (2008). Esta obra permite entender el movimiento protestante en Europa a comienzos del siglo XVII, y refleja la relación que existía entre la investigación científica y las creencias religiosas de la época (pág. 1-3).

que gran parte de la riqueza matemática circunscrita en lo que se podría denominar teorías puras, es en gran medida desconocida para la inmensa mayoría de los matemáticos. Algo que sería impensable y raro para un filósofo, que simpre acude a los textos originales de los grandes pensadores. Esto hace que, guardadas proporciones, no existen traducciones de muchas de las obras de los grandes matemáticos, debido a que el número de lectores que tendrían no daría ni para costear la traducción ni la impresión. Esto nos lleva a afirmar que existe otra habilidad o destreza matemática, que es muy poco conocida aún dentro de la misma comunidad de los matemáticos, que la podríamos definir como la capacidad de pensar especulativamente los entes abstractos y trascendentales que habitan en la matemática. En general, estas obras no poseen ejercicios de tipo práctico y, en muchos casos, no han logrado desarrollar los procedimientos algebraicos completos para poderlas traducir en ecuaciones que pueden ser calculadas y expresadas en cifras concretas.

Una vez comprendidos estos dos pasos, existe un tercer paso, y consiste en la herencia que nos dejó Aristóteles en relación a su Órganon, vocablo que proviene de *όργανον*, y que fue introducido por el filósofo griego del siglo I a.C. Andrónico de Rodas[445], quien recopiló la obra aristotélica; a su vez, en la edad media se le dio el nombre de lógica a varios de estos tratados. A mediados del siglo XIX y hasta comienzos de los años 30 del siglo XX, y luego en los años 50 y 60 a través del grupo Bourbaki, la matemática buscó fundamentarse como ciencia y disciplina. Esta tarea fue abordada en sus comienzos desde la lógica matemática, que logró separarse de la lógica aristotélica en dicha época: es de nuestro entender más no el de la comunidad matemática, que gran parte del trabajo de Aristóteles en estos campos no ha sido todavía superado ni adecuadamente entendido. En el siglo diecinueve aparecen cuatro escuelas: la formalista, la intuicionista, la logicista y la predicativista[446]. Sus grandes protagonistas fueron Hilbert, Brouwer y Russell, también tuvieron que ver en todo este proyecto de buscar axiomatizar la matemática a partir de la aritmética, insignes matemáticos como Frege, Cantor, Peano, Dedekind, Bernays, von

[445] Al filósofo peripatético Andrónico de Rodas se le debe la recopilación de la obra de Aristóteles. Gran parte del retorno al filósofo griego se debe a la fama que disfrutaba el estudio de sus categorías. Se menciona que existieron cinco traductores importantes e intérpretes importantes de la obra aristotélica: el mismo Andrónico, Boecio de Sidón, Atenodoro de Tarsia, Aristón de Alejandría y Eudoro de Alejandría. Todos vivieron en el siglo I d.C. Ver: Andrea Falcon (2013) en *Commentators on Aristotle*, pág. 2-3.
[446] Este tema es amenamente tratado por Leon Horsten (2007), en *Philosophy of Mathematics*, págs. 3 a 28.

Neumann. No obstante, a comienzos de 1931, en el congreso mundial de matemáticas celebrado en la ciudad prusiana de Köningsberg, lugar del nacimiento tanto de Kant como de Hilbert, Gödel presentó su primer gran teorema acerca de la incompletez de la axiomatización de cualquier teoría matemática: no puede existir una teoría sea completa y al mismo tiempo sea consistente, es lo uno u lo otro, pero no ambos. Esto tuvo profundas repercusiones en la búsqueda de la fundamentación de las matemáticas bajo el método axiomático. Años más tarde, en los años el grupo Bourbaki que comenzó en 1934 y que todavía está activo, pseudónimo de unos veinte grandes matemáticos franceses tampoco logró su cometido. Hoy día existen esfuerzos aislados de algunos filósofos amantes de las matemáticas de revivir algunos de estos proyectos, no obstante su impacto no ha sido definitivo por la complejidad del tema.

Se comprende que emprender un proyecto que busque explicitar una ontología matemática no es de fácil curso. Dada la tentativa de Russell y Whitehead abordada en *Principia Mathematica* de reducir la matemática a la lógica, proyecto que no logró su cometido, hoy día es comúnmente aceptado que tal punto de vista no es procedente. Motivo por el cual, quien quiera entrar al corazón ardiente de la matemática tiene que conocerla muy bien en sus capítulos principales, aspecto que no tienen en su gran mayoría los filósofos que buscan seguir reviviendo el proyecto logicista, siendo incapaces de presentar una propuesta coherente y consistente a nivel sus constituyentes fundacionales. Un problema adicional que reviste la matemática, explicado y tratado con lujo de detalles está en la excelente obra de Fernando Zalamea (2009): *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*, donde aborda la constante complejidad que ha caracterizado a las matemáticas que han tenido curso desde 1950 a nuestros días. Esta magnífica obra tiene una gran riqueza temaria, citemos un aparte pequeño de los tantos que merecen ser abordados con detenimiento:

> “La creatividad matemática avanzada solo puede ser entendida por medio de perspectivas que reflejen la fenomenología misma de tránsitos matemáticos no trivializados: entretejimientos en red, gradaciones no dualistas, contaminaciones sobre un continuo, enlaces recursivos modales, dialécticas de sedimentaciones y residuos, ósmosis parciales entre imágenes metafóricas y objetos técnicos, pegamientos globales a lo largo de acotaciones

> coherentes locales, procesos de entreveramiento fáctico y funcional (*Fundierung*), mediaciones sistemáticas entre polaridades. En el ámbito de las matemáticas elementales, estas manifestaciones tienden a desaparecer, debido a la complejidad reducida de los entes en cuestión. Por otro lado, desde las perspectivas de la filosofía analítica, e independientemente del ámbito observado, ya sea elemental o avanzado, estas manifestaciones también son dejadas de lado, pues se consideran usualmente "mal definidas" o imposibles de definir. Tal vez estas dos tendencias – unidas con la predominancia, en filosofía de las matemáticas, del estudio de lo elemental bajo perspectivas analíticas – permitan explicar el poco cuidado que se ha venido otorgando hasta el momento a la problemática de la creatividad matemática" (Ob. cit. Pág. 194).

En dicha obra, Zalamea aborda la complejización creciente que experimentan las matemáticas avanzadas, proceso que está también caracterizado como él bien lo anota de: una creciente relativización, transitoriedad, multidimensionalidad, la importancia de lo limítrofe y lo asintótico, para citar algunas de sus características más relevantes. Esto nos lleva a que se hace necesario que la filosofía se ocupe bien de volver a mirarse a sí misma, donde uno de esos espejos fundamentales está en las matemáticas. Por tal motivo, es indispensable el establecimiento de una ontología matemática consistente con la naturaleza de las matemáticas, desde las elementales a las avanzadas. Se resalta la importancia de regresar a los orígenes fundacionales de las matemáticas, que está en los textos de los grandes filósofos y matemáticos griegos que han llegado a nuestros días. Dado que en ellos está ese contacto primigenio con la génesis misma de las palabras y los conceptos que han incidido de manera definitiva en la evolución tanto de la filosofía como de las matemáticas a lo largo de toda la historia. Se resalta, una vez más, que uno de los inventos de los griegos ha sido la axiomatización como método deductivo fundamentado en un concatenamiento lógico inferencial de conceptos y nociones, asimismo, el aportar demostraciones consistentes con los teoremas planteados y suministrar una representación geométrico-aritmética de los mismos. Tal aspecto no lo encontramos en los egipcios, ni en los mesopotámicos, ni en los indios, ni en otras culturas antiguas.

5.10. La elaboración de una ontología matemática a partir de Pitágoras y Euclides

Podemos apreciar en Pitágoras el establecimiento de una metafísica a partir del uno (*εἷς*), que es abordado como la mónada (*μονάδα*) primigenia, está caracterizada por ser infinita (*ἄπειρος*). En ese sentido, el uno (*εἷς*) es la causa de la existencia misma (*εἰμί*), es lo primero (*πρότερος*) y está situado en un tiempo desorganizado (*κρόνος*). El universo (*οὐρανός*) comienza a ser (*εἶναι*) con la aparición del número (*ἀριθμός*), que está situado en el origen (*ἀρχή*) mismo de la vida como naturaleza (*φύσις*), es dual y se construye a partir de la pareja (*δυάς*) número par (*ἄρτιος ἀριθμός*) y número impar (*περισσός ἀριθμός*). En el origen mismo podemos identificar diez principios primordiales (*ἀρχάς δέκα*), que podrían ser los inspiradores y antecesores de las categorías aristotélicas. A partir de la existencia del número se organiza el tiempo (*καιρός*), como lo segundo (*δεύτερος*) derivado de la unidad (*μονάς*). El ente (*ὤν*) aparece como la divinidad y es una, tal como está mencionada en el primer renglón de los Versos Áureos atribuidos a Pitágoras: *Ἀθανάτους μέν πρῶτα θεούς, νόμωι ὡς διάκεινται*, donde los se mencionan a los dioses (*θεούς*) inmortales (*ἀθάνατος*) que establecen la ley (*νόμος*). Sin embargo, ellos también están sujetos a las leyes de los números que los anteceden y gobiernan, asimismo las leyes que provienen de los elementos alrededor de los cuales se organiza el universo como: el fuego (*πῦρ*), la tierra (*πῦρ*), agua (*ὕδωρ*) y el aire (*ἀήρ*).

Se considera que el origen del ser humano está dado por los dioses; a su vez, la presencia del daimón (*δαίμων*) establece la presencia de la divinidad dentro del hombre, siendo la que fundamenta el ser (*ὤν*), (*ēns*) del ser humano. En ese sentido, la ontología se deriva de un planteamiento metafísico originado en la unidad (*μονάς*), que subyace y fundamenta a la existencia misma. Con lo cual, en Pitágoras podríamos tener una ontología fundamentada en la unidad (*μονάς*). Lo primero (*πρότερος*) es el uno (*εἷς*), lo segundo (*δεύτερος*) es el dos (*δύο*) entendido como parejas (*δυάς*). Pitágoras consideró que son diez los cuerpos esféricos que se mueven por el cielo, siendo nueve los visibles y el décimo como la Antitierra (*ἀντίχθων*). Además del trabajo realizado, hay que rastrear e identificar los protoorígenes de los nocionales y de las epistemes matemáticas en los textos de Heráclito de Éfeso, Parménides de Elea, Zenón de Elea, entre otros tantos.

En Euclides tenemos la enorme ventaja de disponer de una obra completa, *Los Elementos*, escrita en griego y por tal motivo su valor es incalculable para nosotros: dado que es el único texto donde nos encontramos con axiomas y definiciones completas del tema que nos ocupa, que es propiamente la materia prima fundamental para poder llevar a buen término nuestra investigación. Es precisamente en el libro 1.1.1 donde nos encontramos con el axioma que define al punto: *un punto es aquello que no posee parte* (*σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*). Cuando tratamos este axioma en el capítulo III, fuimos reconociendo su importancia estratégica, como la instancia primigenia desde la cual se inaugura una ontología matemática en el sentido legítimo del término. La epistemología matemática reviste unas características únicas que la diferencia de la ontología matemática, en especial que está última posee las siguientes especificidades:

i. La ontología matemática versa sobre la existencia de los entes matemáticos (*ὤν μάθημα*), entendemos por ente matemático aquellos entes (*ὤν*) que facilitan los procesos de aprendizaje, la *máthēsis* (*μάθησις*) que permite la adquisición del conocimiento. En este sentido, estamos proponiendo contrario a lo que muchos dan por hecho, que el propósito central del ente matemático, como bien lo descubrió Pitágoras, es la mejor instancia para aprender, entender y conocer (*μανθάνω*) la realidad en términos nocionales vinculados a una práctica habidosa (*τέχνη*). Para ejercitar la educación, en especial el aprendizaje en general, que mejor instancia que la propia matemática; aquel lugar propio del discípulo (*μαθητής*).

ii. Los entes propios de la ontología matemática tienen dos funciones: la primera es la de ayudarnos en el aprendizaje (*μάθημα*) de cualquier tema, dado que es el mejor método para aprender (*μανθάνω*). En ese sentido, las matemáticas están en la base de todo tipo de enseñanza, aún de las que se dicen no tienen nada que ver con las matemáticas. Es el mejor camino para: ejercitar la concentración, despertar la imaginación, desarrollar la creatividad, adquirir disciplina de estudio, crear un método para resolver un problema, discriminar las etapas para encontrar la solución a un requerimiento práctico, fomentar una técnica que requiere ser ejercitada y mejorada, adoptar una actitud sensible y por ende artística frente a un aprendizaje que une lo teórico con lo práctico. La segunda función que tiene la ontología matemática tiene que ver con el mismo conocimiento, el desarrollo y la creación de los entes (*ὤν*) matemáticos. Ya en este punto nos encontramos con un tema central que tuvo lugar durante en la segunda mitad del siglo XIX y comienzos del XX, que fue uno de los criterios que no aceptaron las cuatro grandes escuelas: la intuicionista, la formalista, la logicista y la predicativista, no fueron simpatizantes de la preexistencia platónica de las matemáticas. Contrario a lo que otros matemáticos habían consentido, entre ellos Kurt Gödel, quien era simpatizante de Platón[447] y de la idea que las matemáticas ya existían en el universo, siendo una de las tareas fundamentales del ser humano descubrirlas. La tarea de la ontología matemática radica en estudiar aquellos entes (*ὤν*) que subyacen como instancias universales a toda actividad epistemológica, haciéndola posible al dinamizar y ampliar los campos operativos propios y los de las ciencias puras y aplicadas.

iii. La ontología matemática realiza un inventario de los entes matemáticos, tarea que no es fácil, una de las razones para ello, es que no siempre se los ha identificado. Por tal motivo, hemos de partir hacia atrás como lo hemos con esta tesis: es a partir del devenir mismo de la disciplina, dado que está profusamente desarrollada, nos toca tomar las distintas teorías y sus procedimientos y emprender un camino hacia la génesis de las mismas. Luego tendremos que identificar y diferenciar entre otros los niveles ontológicos y epistemológicos, una vez se dé esto, habrá que señalar lo entes ontológicos que son los causantes de la dinamización de esas teorías. En algunos casos habrá que nombrarlos, en otros habrá que especificar su uso concreto a través de un proceso de simbolización (*σημαίνω*), que nos ayude a interpretar y a mostrarlos. Tal hecho nos llevará a la creación de unos símbolos, marcas o signos (*σῆμα*) característicos, a fin de identificarlos y manipularlos dentro de los procesos de abstracción matemática, dotada de un lenguaje propio reglamentado con normas en concordancia a los requerimientos teórico-prácticos.

Algo que es propio de la ontología matemática y que la diferencia frente a la epistemología matemática, es la ausencia de todo procedimiento demostrativo, debido a que la ontología matemática no está obligada a demostrar nada ni crear procedimientos

---

[447] Este tema puede ser visto con detenimiento en: *On Gödel´s Philosophy of Mathematics* por Harald Ravitch (1998), donde se analiza la defensa de Gödel por las matemáticas clásicas, su adhesión al intuicionismo y al platonismo. Se habla de su realismo en el cual concibe a la matemática como un sistema de objetos reales.

algorítmicos que son más potestad de la epistemología matemática. Esto hace que los procesos de simbolización de la una respecto a la otra sean muy diferentes. Este hecho reviste una importancia capital y es un tema que aún no ha sido resuelto hoy día, se lo pasa por alto sin abordarlo: en una misma expresión matemática pueden coexistir diversos niveles simbólicos, el ontológico y el epistemológico. ¿Qué los diferencia? La ontología no está afectada por las constantes tanto lógicas como no lógicas; como lo son las conectivas binarias, los cuantificadores o los símbolos de relación, de operación y las constantes individuales.

Mientras el nivel epistemológico sí está afectado y determinado por estos niveles propios de la lógica matemática. Tal como en una expresión matemática nos encontramos con una diversidad amplia de símbolos para todos los operadores, también en una fórmula que utilice procedimientos propios del cálculo de predicados nos topamos con otros operadores propios de la aritmética, el cálculo, el álgebra, entre algunos de los tantos que podríamos mencionar. Sea el caso en una proposición primitiva que encontramos en *Principia Mathematica* *1·5. ├: p ∨ (q ∨ r) . ⊃ . q ∨ (p ∨ r) Pp, no tenemos los operadores aritméticos como la +, −, ×, /, que son propios de una ecuación algebraica y no de una lógica. Pero si podemos tener una expresión de la física, como la de la conservación de la energía: $E_t = E_k + E_p$, donde k es lo cinético, p lo potencial y t el total; lo interesante de aquí, es el operador aritmético de la suma + junto a los subíndices t, k, p propios del cálculo de predicados. Esto nos sirve para ilustrar, cómo en una expresión formal podemos tener elementos que proceden de áreas distintas, aunque todos hagan parte de un único universo: el universo de las matemáticas. Lo que sí no nos encontramos es con un símbolo que nos referencie de manera clara y directa el nivel ontológico dentro de una expresión formal epistemológica.

Algo que amerita tener en la cuenta, es cómo en este axioma que busca definir el punto (*σημεῖον*), lo hace recurriendo a un camino propio de una demostración indirecta o (*Reductio ad absurdum*): el punto (*σημεῖον*) es (*ἐστιν*) lo (*οὗ*) que de ninguna manera (*οὐδείς*) tiene partes (*μέρος*); *σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν*. Es lo que no está dentro: *οὐδέ*: *οὐ+ δέ εἰς*, lo que no es uno *οὐδέ+ εἷς*. Notamos que se está afirmando su existencia por medio de la aseveración del verbo ser y existir (*εἰμί*) en tercera persona del indicativo (*ἐστιν, ἐστί*), lo que en lógica proposicional equivale a ├.σ; sin embargo, no es posible definir este ente (*ὤν*) por la vía directa o positiva. Cabe recordar que es potestad de la demostración directa o condicional, que todos los argumentos que llevan a demostrar una proposición estén presentes. Lo cual involucra conocer de cerca esta episteme. Parece que esta es una posible característica de los entes (*ὤν*) que habitan la ontología matemática, no es posible definirlos por la vía positiva sino por la vía negativa.

A su vez, tenemos lo que subyace a este ente ontológico matemático, el punto (*σημεῖον*), el problema del todo (*ὅλος*) y la parte (*μέρος*), dado que la parte tiene sentido en relación a un todo. Podríamos afirmar que los entes matemáticos (*ὤν μάθημα*) serían las partes (*μέρος*) de una totalidad (*ὅλος*) inaprehensible: evocan lo uno (*εἶς*), lo que no puede ser dividido ni partido, aunque conserve su unidad (*μονάς*). Aquí la noción de lo uno (*εἶς*) es abordada desde la decibilidad que es la envolvente que unifica todo lo que existe. En ese sentido, existen variadas maneras tanto para denotar como para connotar un término o concepto, debido a que tenemos variados usos para referirnos a algo sin que se pierda su noción central. Siempre será un tema de arduo debate, ¿cómo el todo (*ὅλος*) efectúa la repartición de las partes (*μοῖρα*) que lo constituyen? En especial, el poderlas nombrar e identificar como predicados del mismo a nivel de decibilidad a fin que posibiliten las categorías. Tenemos que la ontología posee varios niveles, esto nos lo muestra el ente (*ὤν*) más importante de toda la aritmética (*ἀριθμητική*), es el número (*ἀριθμός*). Este importante nocional posee múltiples caras, donde cada una invita a un tratamiento distinto, tanto a nivel ontológico como epistemológico. No es tarea fácil responder la pregunta: ¿Qué es el número?

5.11. La identificación de las epistemes matemáticas en su recorrido axiomático

Hace parte de las conclusiones fruto del presente trabajo, que los textos clásicos deben de ser estudiados en su idioma original. Las traducciones en muchos casos son desafortunadas y en otros casos no nos brindan todo el horizonte de pertenencia frente al tema que nos ocupa. Se comienza con enormes ambiciones, que luego se tienen que canalizar a algo más modesto, aunque lograr alcanzar esta moderada meta requiera aún de mucho esfuerzo. Un tema fundamental para las matemáticas ha sido su axiomatización, tal proyecto todavía está muy lejos de haber sido completado y de alguna manera es un tema que presenta grandes inconsistencias. La razón para ello radica en que lo que entendemos por matemática es muy diferente de lo que por ella entendían los antiguos. A esto se le suma que los propósitos que la motivaban en esa distante época son también igualmente diferentes a los de hoy día. En esos tiempos, la matemática disfrutaba de una cercanía con la filosofía, con ese reflexionar crítico más propenso a irle aportando los insumos de manera gradual para la construcción de su propio cuerpo cognoscitivo. Esto se traduce en la ausencia de una apropiada ontología matemática y, por ende, en una adecuada epistemología matemática, para citar algunas de las tantas disciplinas que están prácticamente ausentes en las matemáticas de hoy día. Es difícil de pensar fuera de la escuela pitagórica la búsqueda de tales proyectos, tal vez fue la manera en que vivieron y abordaron su estudio, no se repitió más hacia delante. Bien puede suceder que se requiere de una adecuada masa crítica de matemáticos orientados por un buen filósofo: solo en Pitágoras se tiene la filosofía como una forma de vida y la matemática como el arte del aprendizaje y de la enseñanza, asistidos por: la geometría, la aritmética, la astronomía, la música, entre otros. La pregunta que indaga, ¿dónde comenzó la axiomatización de la matemática? tiene por respuesta a Pitágoras. Tal es lo que se puede deducir de los logros de los pitagóricos, aunque no dispongamos de un texto original que nos haya llegado a nuestros días.

La pregunta más oportuna sería alrededor de lo que rodea a la misma axiomatización como el procedimiento escogido por las matemáticas para fundamentarse como saber. Este tema es bien amplio y abarca el llamado método científico. Podemos aseverar que tanto el método científico como la axiomatización comienzan con las llamadas nociones primitivas, o los inderivables dado que se presupone que son la base sobre la cual se construye toda ciencia. Es básico procurarnos una teoría completa, demarcarla y definirla en su temario. Es necesario el reconocimiento de las palabras en griego antiguo para que sean tomadas como los términos de referencia en la construcción de una teoría matemática. Dado que Kurt Gödel demostró a comienzos de los años treinta del siglo XX, que no es posible tener una teoría completa y consistente al mismo tiempo: es completa y no consistente, o es consistente pero incompleta. Ambas condiciones no se cumplen. Notamos cómo, años después, Alfred Tarski propone un abordaje un poco diferente, desde un metalenguaje donde podamos definir una teoría en base a un conjunto de oraciones. En este contexto, la episteme es una variable extra-lógica capaz de dar cuenta de una parte de la argumentación total de una teoría. Sin embargo, Tarski no abordó el tema de la completitud de estas nociones extra-lógicas: lo que supone identificarlas con nombre propio, establecer cuáles y cuántas son, lo cual tampoco realizó.

Estas epistemes poseen las siguientes propiedades:

i. Son palabras plenamente identificables en griego antiguo.
ii. A nivel de un axioma funcionan como los términos que le dan solidez al mismo.
iii. Tienen una jerarquía que las hace estar ordenadas en relación a una teoría.
iv. Surgen dentro de un proceso deductivo-intuitivo que las hace posible.
v. Poseen distintos grados de interpretación, decidibilidad y decibilidad.
vi. El tránsito de las epistemes crea en su camino la ontología y la epistemología.
vii. Su función es demarcar los territorios constitutivos de una teoría.
viii. Su definibilidad varía: desde indefinible a definible.
ix. Unas pocas son inderivables, muchas más son derivables.
x. Existe una tendencia a constituirse como categorías formales.

5.12. El tema de la epistemología visto a través de la génesis de sus epistemes

Tal como podemos apreciar, que la ontología matemática tiene varios niveles; siendo el más alto, aquel que versa sobre lo inaprehensible e innombrable, sea el número uno (*εἶς*) como infinito (*ἄπειρος*), como aquella unidad (*μονάς*) fundamental o monada (*μονάδα*).

- Del punto (*σημεῖον*) a la línea (*γραμμή*): de lo uno (*εἷς*) sin (*οὐδέ*) parte (*μέρος*) a lo largo (*μῆκος*) sin anchura (*απλάτος*). El ente (*ὤν*) que fundamenta el espacio construye una proyección de él mismo dando lugar a la epistemología: susceptible de ser medida y cuantificada en una expresión o ecuación matemática. La estrategia está constituida por una pareja ordenada, donde el primer término está afirmado y el segundo término está negado.

Tenemos que el surgimiento de la epistemología matemática planteada y modelada a partir de *Los Elementos* de Euclides comienza a anunciarse a partir del segundo axioma del libro 1.1: *una línea es una longitud sin anchura* (*A line is breadthless length*; *γραμμή δέ μῆκος ἀπλατές*). Hemos de precisar que se trata de un nivel epistemológico y esto es debido a que, el ente (*ὤν*), en este caso una línea (*γραμμή*), es posible: imaginarla, modelarla, recrearla, trazarla, dibujarla, medirla, etc. No obstante, todos estos protocolos están dados para aquel ente (*ὤν*) que ha logrado pasar del estado ontológico al estado epistemológico caracterizado por ser una entidad: término proveniente del latín medioeval (*entitās;* de *ēns*, ser y el sufijo *-itās*, que se utiliza para formar sustantivos que indican un estado de ser). La noción de entidad ha evolucionado, es lo que en lógica se conoce como la noción primitiva de individual. Esta proviene del latín medieval (*indīviduālis*) que se formó a partir del sustantivo y adjetivo *individuum* como aquella cosa indivisible: no dividida, indivisible, no separada (*individuus*), que es la unión de la preposición *in* (que en el caso acusativo significa en contra) y el adjetivo *dividuus*, que significa divisible o separable.

La diferencia que queremos establecer en este nivel epistemológico respecto al nivel ontológico, es que el individual y/o la entidad puede ser sujeto a una definición. Tal posibilidad no se da en el nivel ontológico, donde las definiciones no existen. Se entiende por definición aquella proposición que permite la aplicación de unos protocolos concretos, aquellos que conllevan modelarla dentro de una teoría capaz de ser recreada a nivel lógico como proposiciones y a nivel algebraico como ecuaciones. Siendo la instancia básica más irreductible de una definición o de la propia epistemología la noción de individual o de entidad. Sin embargo, en este axioma se plantea algo que acarrea una contradicción al afirmar que una línea (*γραμμή*) es un largo (*μῆκος*) sin anchura (*α* + *πλατύς*). Una vez más, notamos cómo Euclides sigue introduciendo nociones que involucran una contradicción (al igual que el punto, que es lo que no tiene parte), obedeciendo a una estrategia de demostración indirecta. Por tal motivo, este axioma representa un paso previo a aquel que puede ser recreado, dibujado y formulado. Aunque encierra una inconsistencia debido a que no puede existir algo que no tenga ancho, el uso de la misma no ha presentado problema debido a que no se ha profundizado más allá de lo práctico. También podríamos sentirnos invitados a considerar que tal formulación es una representación recreativa que no aspira a constituirse como un individual, un mero dibujo que anuncia a aparición de un individual. El evitar abordar ciertos tópicos teóricos en la fundamentación nos puede llevar al problema de la circularidad de las definiciones fundamentales, lo que nos conduce a todo tipo de paradojas, no muy aconsejables en este momento en que queremos fundamentar una epistemología matemática.

❖ El problema de la frontera de la serie de puntos que conforman una línea, invita a que el final o extremo (*πέρας*) se constituya en la instancia que define a la misma línea (*γραμμή*): se asume la dualidad de los extremos está constituida por puntos (*πέρατα σημεῖα*). De esta manera, el punto (*σημεῖον*) viene a constituirse como el límite mismo (*πέρας*): el lugar de salida y de llegada del límite de una función: $\lim_{n \to c} f(n)$ = L, donde n y c son puntos.

El tercer axioma dice: *los extremos de una línea son puntos* (*the extremities of a line are points*. *γραμμῆς δέ πέρατα σημεῖα*). De igual manera, tenemos algo concreto, que los extremos sean puntos (no existe una definición de punto, debido a que es un ente ontológico) y, a su vez, es el extremo (*πέρας*) representa también el final o el fin o la finalidad, que puede ser recorrido o atravesado (*πείρω*). No se dice cuántos extremos son, se puede argumentar que se entiende que son dos, pero en una geometría hiperbólica que es una geometría no-euclidiana se tiene: que existen muchas líneas que atraviesan un punto y que no se intersectan, mientras que en la geometría elíptica cualquier línea que atraviese un punto se intersecta. En la geometría hiperbólica no se tiene una línea con unos puntos finales que la definan como tal, dado que es una geometría esférica en la que dos líneas se intersectan en más de un punto. Con lo cual tenemos también cierta ambigüedad en este axioma, que nos sugiere el planteamiento de una epistemología transitoria. En donde el descenso de un nivel ontológico a uno epistemológico involucra una etapa intermedia, donde los entes aritmético-geométricos disfrutan de ciertas libertades en la manera en que se los puede abordar. Esto permite que podamos recrearlos dentro de un metalenguaje no sujeto a definiciones completamente precisas, aunque ganen decibilidad pierden cierta capacidad de recreación a fin que puedan satisfacer variados modelos epistemológicos.

- La introducción de la categoría de lo recto (*εὐθύς*) permite fundamentar el isomorfismo que existe entre los puntos que constituyen una línea. La episteme de una línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) involucra el ejercicio de una función que verifica que se está preservando la dirección recta, esta función que endereza f (*εὐθύνω*) o $f(\varepsilon)$ es la que posibilita a que los puntos de una línea se constituyan como partes (*μοῖρα*) de la misma. En este contexto se establece lo que está situado (*κεῖμαι*).

El cuarto axioma nos dice: *Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella* (*a straight line is a line which lies evenly with the points on itself*. *εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται*). Este axioma es la base para que afirmemos la continuidad de los números reales sobre una recta, también notamos una imprecisión debido a que no nos dice, cuántos puntos existen en una línea. Lo que es lo más importante en esta formulación, es afirmar que los puntos son isomórficos, iguales y por ende indiferenciables entre sí.

- La introducción de la importante episteme de la superficie (*ἐπιφάνεια*) permite que se logre la unidad (*μονάς*) en la misma pareja ordenada, que está constituida por lo largo (*μῆκος*) y lo ancho (*πλάτος*), esta vez tal ente es capaz de sostenerse y mantenerse (*ἔχω*).

El quinto axioma dice: *Una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura* (*ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὅ μῆκος καί πλάτος μόνον ἔχει*). En este axioma nos volvemos a encontrar con las nociones de lo largo (*μῆκος*) y lo ancho (*πλάτος*) tratadas en el segundo axioma que define la línea. Se destaca, que ambos nociones están afirmadas, lo que es una invitación a plantear un método directo de demostración: este método también conocido como demostración condicional involucra el amplio uso de las conectivas binarias, en especial la de la implicación (⊃, →) propias del cálculo proposicional. Con este paso ya estamos en las postrimerías de la lógica matemática y por ende de la epistemología como ciencia, entendida como aquella disciplina que permite la aplicación de procedimientos universales de constatación y verificación, además posibilita la falsabilidad de la misma como teoría. Y sobre todo, la posibilidad de sustentar cada paso a nivel lógico y correlacionarlo con un paso matemático, que puede llegar a un resultado concreto en una teoría decidible e interpretable dentro de un modelo teórico concreto. Hemos de notar que tal definición es muy apropiada para la elaboración de la topología.

- La argumentación prosigue asumiendo está vez a la línea (*γραμμή*) como el extremo (*πέρας*) de la superficie (*ἐπιφάνεια*). Tal hecho permite estabilizar el lugar (*τόπος*) y los procesos de autoreferencia (*αὐτός*) del mismo que preservan la forma (*μορφή*) de este ente fundamental geométrico-matemático.

El sexto axioma dice: *Los extremos de una superficie son líneas* (*ἐπιφανείας δέ πέρατα γραμμαί*); la importancia de este axioma es, que nos va a permitir definir los entes geométricos, dado que introduce la noción de acotar un espacio y establecer que es por medio de líneas que lo vamos a rodear y contener. Este hecho será decisivo para que podamos definir al triángulo, el rectángulo y los demás polígonos como figuras planas de más de tres o cuatro lados.

- La introducción de la episteme de superficie plana (*ἐπίπεδος ἐπιφάνειά*) permite asegurar la igualdad (*ἴσος*) de las líneas rectas (*εὐθεῖα γραμμή*) que están situadas (*κεῖμαι*) en este lugar (*τόπος*).

El séptimo axioma nos dice: *Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella* (*ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται*). La importancia de este axioma es que aborda la superficie (*ἐπιφάνειά*) como un isomorfismo entre las líneas rectas (*εὐθεῖα γραμμή*), estas sirven de soporte para definir la equivalencia entre ellas mismas como líneas (*γραμμή*). Este axioma sirve para consolidar la noción de topos, que va a ser decisiva para poder fundamentar la teoría de conjuntos.

- Estamos frente a la introducción de la episteme del ángulo (*γωνία*), de cómo situarlo (*γωνιάζω*) sobre esta llanura (*πεδίας*) o superficie (*ἐπιφάνεια*) plana (*ἐπίπεδος*). El ángulo permite establecer una reciprocidad (*ἀλλήλων*) entre unas líneas rectas (*εὐθεῖα γραμμή*), que yacen sobre (*ἐπιπεδάω*) ésta superficie atándolas (*ἅπτω*). Queda así asegurada la pareja ordenada de lo que serán los catetos de cada ángulo.

El octavo axioma manifiesta lo siguiente: *Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta* (*ἐπίπεδος δέ γωνία ἐστίν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καί μή ἐπ' εὐθείας κειμένων πρός ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις*). A partir de este axioma se comienza a construir la geometría en base a la noción de ángulo (*γωνία*), la noción fundamental que permite unir y relacionar dos o más líneas rectas o curvas entre sí, atándolas (*ἅπτω*) y ligándolas (*πεδάω*): este hecho consolida la noción de una superficie (*ἐπιφάνεια*), en este caso plana (*πέδον*).

- En este axioma se introduce la episteme de la figura (*σχῆμ*α), referida a aquella figura recta (*εὐθύγραμμος*). Tenemos cómo el ángulo (*γωνία*) se constituye gracias a que existe un punto (*σημεῖον*), aquella marca y signo (*σῆμα*) que permite unir y ligar (*πεδάω*) las líneas rectas (*εὐθεῖα γραμμή*) que lo constituyen.

El axioma nueve manifiesta: *Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo* (*ὅταν δέ αἱ περιέχουσαι τήν γωνίαν γραμμαί εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία*). Este axioma es una mera definición; lo que se puede destacar es el uso del verbo (*περιέχω*): lo que rodea (*περί*) en cuanto lo contiene (*ἔχω*). Tal verbo está dado para que las dos (*δύο*) líneas (*γραμμή*) rectas (*εὐθύς*) contengan un ángulo (*γωνία*), de manera que la noción de ángulo (*γραμμή*) tan solo se da bajo el criterio de la noción de pareja. En este caso, el orden de primacía proviene de la línea que está situada sobre lo llano (*ἐπίπεδος*). Resaltamos cómo en la trigonometría la pareja es ordenada en relación a un ángulo recto lineal (*γωνίαν γραμμαί εὐθεῖαι*): sea el caso, la tangente es la razón del cateto opuesto sobre el cateto adyacente (el que es llano, *ἐπίπεδος*), y cómo la cotangente es el lado adyacente sobre el opuesto que se levanta recto (*εὐθύγραμμος*).

- ❖ Tenemos la episteme de lo que yace perpendicular (*κάθετος*), la cual emerge bajo la conjugación de lo recto (*εὐθύς*) y lo derecho (*ὀρθός*). Siempre y cuando se cumpla con la condición que sean dos (*ἑκάτερος*) líneas (*γραμμή*) que se están rectificando (*ὀρθόω*): este hecho viene asegurado por el juego de dos vocablos que evocan la conectiva binaria condicional (*ὅταν*) y la bicondicional (*ἀλλήλων*), bajo la cual se realiza aquella igualdad (*ἴσος*) del ángulo (*γωνία*) que los soporta (*ἐφίστημι*).

El axioma diez dice: *Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está* (*ὅταν δέ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τάς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστί, καί ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἥν ἐφέστηκεν*). En este axioma se expresan las condiciones (*ὅτε*) que se han de cumplir a fin que lo recto (*εὐθύς*) pueda ser establecido (*ἵστημι*), como lo recto sobre lo recto (*εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν*). Se resalta la igualdad (*ἴσος*) que se crea (*ποιέω*) entre las dos líneas (*γραμμή*) para que se dé este ángulo recto, a condición que tengamos una nueva noción que es la de ortogonalidad (*orthogonalis*) o perpendicularidad, la cual está representada en el cateto (*κάθετος*) que está situado sobre (*ἐφίστημι*) lo que es recto (*εὐθεῖα*) a nivel de la superficie.

- ❖ La introducción de lo más grande (*μέγας*) en relación a lo que es derecho (*ὀρθός*) permite variar el nombre del ángulo (*γωνία*), en este caso un ángulo obtuso (*ἀμβλεῖα γωνία*). Lo que es verdadero (*ὀρθότης*) se ve de esta manera cuestionado al romperse la norma de lo que es igual (*ἴσος*).

Luego tenemos el axioma once: *un ángulo obtuso es el mayor que un recto* (*ἀμβλεῖα γωνία ἐστίν ἡ μείζων ὀρθῆς*). Lo interesante de este axioma, es la definición del ángulo obtuso (*ἀμβλεῖα γωνία*) a partir de la noción de grande (*μέγας*). Tenemos la forma comparativa de más grande (*μεγάλη*) que lo recto (*ὄρθιος*) como verdadero (*ὀρθότης*) y que nos conducirá a definirlo como noventa grados.

- Se puede decir que la nueva episteme es la que permite comparar, entre lo que es más grande (*μέγας*) con lo que es más pequeño (*ἐλαχύς*). Se presenta el ángulo agudo (*ὀξεῖα γωνία*) como el que es más pequeño que un recto (*ὀρθός*).

El axioma doce dice: *un ángulo agudo es el menor que un recto* (*A ὀξεῖα δέ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς*). El ángulo agudo (*ὀξεῖα γωνία*) es el que es pequeño (*ἐλαχύς*), en su forma comparativa más pequeño (*ἐλάσσων*) que un recto (*ὀρθῆς*). Es de destacar que lo grande (*μέγας*) como lo pequeño (*ἐλαχύς*), nos lleva a sus formas comparativas: más grande que (*μεγάλη*) y más pequeño que (*ἐλάσσων*), que serán la base para definir la relación básica que define a los números reales.

- Una de las epistemes más importantes es el que acarrea la noción de límite o frontera (*ὅρος*), aquello que está en frente (*περαῖος*) y en contra (*πέραν*), que debe ser penetrada y atravesada (*πείρω*). Es aquello que nos divide (*ὁρίζω*), aquel extremo (*πέρας*) que está más allá para cualquiera (*τις*).

El axioma trece introduce una de las nociones más importantes de la matemática, como es la noción de límite y/o frontera (*ὅρος*): *un límite es aquello que es extremo de algo* (*ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας*). Una vez más, tenemos la noción del pronombre (*τις*) que significa cualquiera, y en ese sentido involucra una cuantificación universal: límite es cualquier frontera que es el extremo final (*πέρας*). Lo que de alguna manera se simboliza hoy día como: $\lim_{n \to p} f(n) = L$; donde el comienzo está dado por n y está asumida por (*ὅρος*), que es lo que divide y separa (*ὁρίζω*) la posición inicial de la posición final p por (*πέρας*). La función f está dada por el verbo ser y existir (*εἰμί*), que evoca la actividad de atravesar (*πείρω*) aquello que está opuesto y en contra (*πέραν*): n respecto a p. A su vez, L representa aquel estado donde n = p, donde estaríamos en el límite mismo como frontera final única.

- Estamos frente a la evolución de la episteme del signo (*σῆμα*) que da origen al punto (*σημεῖον*) y cómo éste evoluciona a la figura (*σχῆμα*), siendo su propiedad más importante la de abrazar (*περιέχω*) a fin de contenerse a sí misma como frontera o límite (*ὅρος*).

El axioma catorce establece que: *una figura es lo contenido por uno o varios límites* (*σχῆμά ἐστι τό ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον*). En tal postulado se establece el criterio que va definir a la topología y asimismo a la noción de vecindad, la figura (*σχῆμα*) como cualquier (*τις*) signo (*σῆμα*), que se fundamenta en el punto (*σημεῖον*) abordada como el signo (*σῆμα*) mínimo que puede existir. Es importante resaltar cómo se está prefigurando la noción de frontera (*ὅρος*), como la vecindad que envuelve y rodea (*περιέχω*) al límite final (*πέρας*).

- El círculo (*κύκλος*) se nos presenta como aquella episteme que es sinónimo de perfección, se construye sobre la superficie (*ἐπιφάνεια*) plana (*πεδίον*). Su propiedad es la de contenerse a sí misma bajo una circunferencia o periferia (*περιφέρεια*), que señala (*σημειόω*) aquel punto (*σημεῖον*) central que permite la igualdad (*ἴσος*) entre las líneas que la cruzan.

El axioma quince manifiesta: *un círculo es una figura plana comprendida por una línea tal que todas las rectas caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí* (*κύκλος ἐστί σχῆμα ἐπίπεδον ὑπό μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρός ἣν ἀφ' ἑνός σημείου τῶν ἐντός τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρός τήν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*). En este axioma se introduce la definición de circunferencia (*περιφέρεια*), como aquel círculo (*κύκλος*) que es una figura (*σχῆμα*) plana (*ἐπίπεδος*) que puede ser rodeada (*περιέχω*) por líneas (*γραμμή*). Siendo su propiedad fundamental, que dichas líneas rectas (*εὐθεῖα γραμμή*) caigan hacia un punto (*σημεῖον*) situado (*κεῖμαι*) adentro (*ἐντός*). Su propiedad es conducir en esa dirección (*προσπίτνω*) alrededor del cua la se precipitan (*πίτνω*) las líneas (*γραμμή*), haciendo que se mantenga esa condición de igualdad (*ἴσος*) entre la periferia (*περιφέρεια*) y el punto (*σημεῖον*) que está en el centro.

- La evolución de la episteme en la episteme misma, este hecho se presenta cuando el punto (*σημεῖον*) libre en su génesis de cualquier tipo de asignación, pasa a ser aquel punto (*κέντρον*) contenido dentro de una figura (*κύκλος*), propiamente en su mismo centro. El círculo (*κύκλος*) es sinónimo de la equivalencia en todos los sentidos posibles, posee una frontera que está dada por su envolvente conocida como la periferia (*περιφέρεια*). Hoy día nombrada como la circunferencia, de la cual emerge el número y la constante matemática más importante de todas que es pi π. Aquí se nos presenta la tarea de cómo atravesar (*κεντέω*) o cruzar una frontera (*ὅρος*) que es inaprehensible.

El axioma dieciséis establece que ese punto central tendrá un nombre que evoca su propia naturaleza: *El punto se llama el centro del círculo* (*κέντρον δέ τοῦ κύκλου τό σημεῖον καλεῖται*). El punto (*σημεῖον*) que va a ser el centro tanto de la circunferencia (*περιφέρεια*) como del círculo (*κύκλος*) se denominara (*κέντρον*), el cual evoca esa actividad de tener que ser cruzado, atravesado o pinchado (*κεντέω*), propio de un ente que tiene e involucra un cambio epistemológico.

- La evolución de la episteme de la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) en aquella línea que habita en el círculo (*κύκλος*), y tiene la propiedad de cortarlo o dividirlo (*μερίζω*) en dos (*δύο*) partes iguales (*ἴσος*), se trata del diámetro (*διάμετρος*). La condición que debe de cumplir es la de atravesar su centro (*κέντρον*), y viene a constituirse como el patrón de medida (*μέτρον*) generalizado para toda figura geométrica.

El axioma diecisiete dice: *Un diámetro del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitado en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales* (*διάμετρος δέ τοῦ κύκλου ἐστίν εὐθεῖά τις διά τοῦ κέντρου ἠγμένη καί περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τά μέρη ὑπό τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καί δίχα τέμνει τόν κύκλον*). Tenemos la presentación de un nuevo elemento que será fundamental para la construcción de la geometría, y es la noción de diámetro (*διάμετρος*), como la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) que está situada entre la periferia (*περιφέρεια*) atravesando el centro (*κέντρον*), y se constituye como una medida (*μέτρον*) que está entre (*διά*) estos dos linderos. La cual posee la propiedad de dividir (*μερίζω*) en dos (*δύο*) partes (*μέρος*) iguales (*ἴσος*) a la circunferencia (*περιφέρεια*), este hecho se va a dar siempre y nos permitirá poder medir (*μετρέω*) algo con precisión. Es uno de los orígenes del patrón de medida o metro (*μέτρον*).

- ❖ La introducción del semicírculo (*ἡμικύκλιος*), permite establecer una figura (*σχῆμα*) que es la mitad (*ἡμι*) de la otra, se tiene como frontera común el diámetro (*διάμετρος*) que las recorre como su medida común.

El axioma dieciocho define lo que es un semicírculo (*ἡμικύκλιος*) como: *un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo* (*ἡμικύκλιον δέ ἐστι τό περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καί τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δέ τοῦ ἡμικυκλίου τό αὐτό, ὃ καί τοῦ κύκλου ἐστίν*). Se nota que la noción de figura (*σχῆμα*) que rodea (*περιέχω*) por la mitad (*ἡμι*) y que tiene como frontera común al diámetro (*διάμετρος*). La cual también permite medirlas (*διαμετρέω*) en dos mitades (*ἡμικύκλιος*), sin importar que tan separadas (*ἀπολαμβάνω*) estén, dado que se relacionan a la una con la otra (*αὐτός*) a través del centro que comparten de manera conjunta (*ὅ καί τοῦ κύκλου ἐστίν*).

- ❖ Estamos frente a la evolución de la episteme que a partir de una clase universal superior, que es la de las figuras rectilíneas (*εὐθύγραμμος*), se va a crear toda una variedad de figuras rectilíneas universales. Estas se van a construir a partir de la relación de doble dirección que existe entre el número (*ἀριθμός*) y el lado (*πλευρά*). Tenemos las figuras rectilíneas (*εὐθύγραμμος*), aquellas figuras (*σχῆμα*) constituidas por dos (*δύο*), tres (*τρεῖς*), cuatro (*τετράς*) y más (*πολύς*) lados (*πλευρά*). Siendo la línea recta (*εὐθεῖα γραμμή*) la envolvente que las abraza y rodea (*περιέχω*).

El axioma diecinueve establece el tipo de figuras (*σχῆμα*) básicas que se van a construir a partir de la noción de la línea (*γραμμή*), es decir las figuras rectilíneas (*εὐθύγραμμος*): *Figuras rectilíneas son las comprendidas por rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro, multiláteras las comprendidas por más de cuatro* (*σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τά ὑπό εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μέν τά ὑπό τριῶν, τετράπλευρα δέ τά ὑπό τεσσάρων, πολύπλευρα δέ τά ὑπό πλειόνων ἤ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα*). Estamos con las definiciones de algunas figuras que se construyen a partir de líneas rectas (*εὐθεῖα γραμμή*), que abrazan y rodean (*περιέχω*) una figura (*σχῆμα*) a partir de dos (*δύο*), tres (*τρεῖς*), cuatro (*τετράς*) y más (*πολύς*) lados (*πλευρά*). Se resalta el papel desempeñado por la preposición (*ὑπό*) como aquello que sostiene (*ἔχω*) desde abajo.

- ❖ Estamos frente a la episteme que define la relación mínima que debe de existir entre un número (*ἀριθμός*) y un lado (*πλευρά*) para que tenga una figura El triángulo (*τρίγωνόν*), se nos presenta como aquella figura (*σχῆμα*) autocontenida dentro de una frontera (*ὅρος*) cerrada. El triángulo (*τρίγωνόν*) está constituido por tres (*τρεῖς*) lados (*πλευρά*) que varían entre sí, da lugar a una variedad de propiedades según sean sus lados iguales (*ἰσόπλευρος*) o desiguales (*σκαληνόν*).

El axioma veinte establece las diferencias que podemos encontrar en una figura que tiene tres lados y que viene a ser definida como un triángulo (*τρίγωνόν*). Este hecho permitirá identificar cada una con precisión a fin de estudiar sus propiedades: *Entre las figuras triláteras, el triángulo equilátero es la que tiene los tres lados iguales, triángulo isósceles la que tiene dos lados iguales, y el triángulo escaleno la que tiene los tres lados desiguales* (*τῶν δέ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μέν τρίγωνόν ἐστι τό τάς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελές δέ τό τάς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνόν δέ τό τάς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς*). Tenemos el triángulo equilátero (*ἰσόπλευρος*) como aquel que tiene los tres (*τρεῖς*) lados (*πλευρά*) iguales (*ἴσος*), el triángulo isósceles (*ἰσοσκελής*) es el que tiene dos lados iguales y el triángulo escaleno (*σκαληνόν τρίγωνον*) es el que tiene los tres lados desiguales (*ἄνισον*). Se aprecia la contrastación entre lo que es igual (*ἴσος*) o sea la igualdad y la desigualdad (*ἀνισότης*).

- Estudiar las propiedades de cada una de las figuras emblemáticas de la geometría es uno de los cometidos básicos que se asumen cuando se identifican las epistemes básicas que permiten nombrar una figura concreta. Tenemos al triángulo (*τρίγωνόν*) en relación a sus elementos contitutivos fundamentales, como es el ángulo (*γωνία*) y los lados (*πλευρά*). Una vez realizado esto, se prosigue a establecer los axiomas leyes que se han de cumplir en relación a cada figura (*σχῆμα*). Siendo el rectángulo (*ὀρθογώνιον*) el que fundamenta toda la trigonometría. Notamos como de una episteme se derivan otras tantas más bajo una diversidad de específicaciones.

El axioma veintiuno establece los diferentes tipos de ángulos que se pueden dar en relación a cada uno de los triángulos tratados: *Entre las figuras triláteras, triángulo rectángulo es la que tiene un ángulo recto, obtusángulo la que tiene un ángulo obtuso, acutángulo la que tiene los tres lados agudos* (*ἔτι δέ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μέν τρίγωνόν ἐστι τό ἔχον ὀρθήν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δέ τό ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δέ τό τάς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας*). En este axioma se están definiendo algunas figuras (*σχῆμα*) dotadas de una especificación bien definida, se trata del triángulo (*τρίγωνον*), emblemática entidad geométrica de suma importancia. Se acude a un tipo de especificidad que tan solo acude a algunas de las características más inmediatas sobre las cualesse pueda ir construyendo una teoría de mayor profundidad. Algunos nocionales transformados en epistemes son citados, como lo son el de la línea (*γραμμά*), el lado (*πλευράς*) y el ángulo (*γωνία*), tales epistemes están organizadas alrededor de una dinámica aritmética que gravita alrededor del cardinal tres (*τρεῖς*). No se especifica la ordinalidad que gobierna a los nocionales epistemológicos. Tan solo se debe de cumplir una propiedad específica, la propiedad de lo recto (*εὐθύς*) en relación a la línea (*γραμμά*), y la propiedad de lo recto (*ὀρθός*) en relación al ángulo (*γωνία*). Notamos cómo existen dos vocablos diferentes para nombrar esta propiedad en relación al nocional que van a calificar. Estamos frene a las figuras triláteras (*τρίπλευρος*), en las cuales primero abordamos el notable triángulo (*τρίγωνον*) rectángulo (*ὀρθογώνιον*), aquel que va a permitir el desarrollo de toda la trigonometría y las funciones trigonométricas a nivel del cálculo. Lo que lo caracteriza es ser el dueño del famoso ángulo recto, parámetro normativo alrededor del cual se va a definir una enorme teoría, guardadas proporciones tiene tanto impacto como el punto vernal a nivel de la astronomía de posición. Se establece que tales triángulos poseen tres ángulos (*τρίγωνος*), propiedad que también comparte el obtusángulo (*ἀμβλυγώνιος*), aquel triángulo (*τρίγωνον*) que tiene un ángulo obtuso (*ἀμβλεῖαν γωνίαν*). Tenemos una noción nueva que es la de lo obtuso (*ἀμβλύς*), aquel ángulo que es más grande que un ángulo recto (*ὀρθογώνιον*), o sea de más de noventa grados. Finalmente, se menciona el triángulo (*τρίγωνον*) acutángulo (*ὀξυγώνιον*), aquel que posee tres ángulos agudos (*ὀξύςῖαν γωνίαν*). La noción de lo agudo (*ὀξύς*) tiene que ver con aquello que tiene una punta y es filoso.

- El desarrollo de la epistemología de las matemáticas se da cuando a partir de ciertas instancias universales, nociones y epistemes, se van contruyendo toda una variedad de figuras donde se da una variación de los constituyentes primarios de las mismas. Esto va acarrear distintas propiedades especificables al final en fórmulas y procedimientos propios. Estamos frente al estudio y la especificidad de las figuras (*σχῆμα*) que tienen cuatro lados (*τετράπλευρος*) y cuatro ángulos (*τετράγωνος*). Lo que permitirá ir construyendo y definiendo las propiedades geométricas de manera gradual y específica.

Tenemos el axioma veintidós que nos dice: *De entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que es equilátera pero no rectangular, romboide la que tiene los ángulos y los lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y trapecios las demás figuras cuadriláteras* (*τῶν δέ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν,* ὅ *ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καί ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ,* ὅ *ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ,* ὅ *ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδές δέ τό τάς ἀπεναντίον πλευράς τε καί γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον,* ὅ *οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον: τά δέ παρά ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω*). En este importante axioma se está estableciendo un orden entre los entes (*ὤν*) geométricos, noción que se medíada a través de la figura (*σχῆμα*), en especial aquellas constituidas alrededor de unos elementos (*στοιχεῖον*) fundamentales básicos: sean los nocionales de línea (*γραμμά*), ángulo (*γωνία*) y lado (*πλευρά*).

Hemos de mencionar, de paso que todos estos nocionales se fundamentan absolutamente a partir de la noción de punto (*σημεῖόν*), siguiendo un desarrollo concatenado donde cada noción y/o concepto se amarra al anterior y al que sigue dentro de un proceso argumentativo lógico. En este orden de ideas, ya hemos tenido los nocionales que están primero (*πρότερος*), como el punto (*σημεῖόν*), y los que está en segundo (*δεύτερος*) lugar como la línea (*γραμμά*), y los que están en tercer (*τρίτος*) lugar como las figuras (*σχῆμα*), siendo la más emblemática y fundamental de todas el triángulo (*τρίγωνον*). Este axioma introduce un refinamiento ulterior a la noción de figura (*σχῆμα*), en especial aquellas que están en cuarto (*τέταρτος*) orden: es decir, figuras constituidas a nivel interno por otras figuras, este hecho no se puede dar en el orden anterior, el tercero (*τρίτος*) sino tan solo a partir del cuarto (*τέταρτος*).

Las figuras constituidas por otras figuras son abordadas inicialmente a nivel plano, este hecho que se ve evidenciado cuando se menciona que poseen cuatro lados (*τετράπλευρος*) y cuatro ángulos (*τετράγωνος*). Luego se introduce aquel triángulo (*τρίγωνον*) que posee los tres (*τρεῖς*) ángulos (*γωνία*) iguales, el triángulo equilátero (*ἰσόπλευρος*). Estamos aquí siguiendo una estrategia que buscar establecer las similitudes e igualdades (*ἴσος*) entre las distintas partes (*μέρος*) que constituyen la totalidad (*ὅλος*) de una figura (*σχῆμα*), en este caso plana. Se están estableciendo las relaciones fundamentales entre las nociones primigenias de la geometría: la relación entre el lado (*πλευρά*) con el ángulo (*γωνία*), y cómo se corresponde el uno con el otro en una formulación, entre lo recto (*εὐθύς*) propio de una línea (*γραμμά*) y lo recto (*ὀρθός*) propio de un ángulo. De manera análoga, también se busca presentar junto a las figuras aquellas que poseen similitudes (*ἴσος*) entre sus elementos constitutivos fundamentales y las que no tienen esas propiedades: estamos frente a las figuras con lados desiguales (*ἑτερομήκης*), diferente al rectángulo (*ὀρθογώνιον*) que posee sus ángulos iguales y sus lados iguales (*ἴσος τετράπλευρος*). De estas figuras cuadriláteras surgirán otras como el trapecio (*τραπέζια*) también dotado de cuatro lados.

Tenemos la introducción de una figura (*σχῆμα*) que está constituida por dos (*δύο*) triángulos (*τρίγωνον*), sea el caso el rombo (*ῥόμβος*), puede darse variantes como cuando este triángulo es el equilátero (*ἰσόπλευρος*) con lados iguales. La manera de poder situar en el rombo lo recto como ángulo (*ὀρθογώνιον*) se deberá de dar al interior del mismo: este procedimiento de exteriorización de las propiedades geométricas se deberá de reflejar en la interiorización de las mismas, este aspecto permitirá que surgan nuevas figuras. El romboide (*ῥομβοειδής*) nos llevará a plantear la desigualdad cmo la oposición (*ἀπεναντίον*) entre sus elementos constituyentes básicos: los lados (*πλευράς*) opuestos (*ἀπεναντίον*) frente a los ángulos (*γωνίας*) son iguales (*ἴσος*). Notamos la gran maestría de poder derivar todos estos desarrollos a partir de lo más básico, aquella señal o signo (*σῆμα*) básico que se puede desarrollar a partir del punto (*σημεῖόν*) como lo primero para determinar todo un universo, en este caso geométrico.

- Tenemos cómo en el desarrollo de una epistemología de las matemáticas, se presentan situaciones límite cuando se busca efecturar una formulación que rompe el estrato epistemológico propio de una teoría. Esto produce una revolución a nivel epistemológico, parecida a aquella que se dio al considerar que la Tierra ya no era el centro ni del Universo ni del Sistema Solar. La introducción de una situación geométrica que se sale de la normativa tradicional que estudia las figuras (*σχῆμα*), nos lleva a aquel pseudo-ente que está comprendido entre las paralelas (*παράλληλος*), entre dos (*ἑκάτερος*) líneas (*γραμμή*) que se desplazan hacia lo que no posee frontera o lo infinito (*ἄπειρος*): este problema modificará la geometría a nivel esencial trayendo las geometrías no euclidianas.

Finalmente, tenemos el axioma veintitrés: *Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongado indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos* (*παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καί ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τά μέρη ἐπί μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις*). Tenemos la noción de paralela (*παράλληλος*), cuyo significado es estar al lado el uno del otro, lado a lado; evoca un movimiento alternativo (*παράλλαξις*) que se presenta como una sucesión y cambios (*παραλλαγή*). El vocablo de la paralela (*παράλληλος*) está conformado por la preposición y adverbio (*παρά*): al lado; junto a, entre, hacia y el verbo (*ἀλλάσσω*) que es: cambiar de sitio, mudarse, alterar y pasar de largo. Es una situación donde se presenta una transformación del espacio, el cual se ve trastocado y desviado de sus rutas habituales fruto de un cambio y tráfico (*ἀλλαγή*). Es destacable la presencia de lo recto (*εὐθύς*) como condición imperante en todo este devenir, que acontece en el suelo plano (*ἐπίπεδος*) en una suerte de compactación de la superficie (*ἐπιφάνεια*), que parece lanzarnos y empujarnos (*ἐκβάλλω*) en una dirección carente de límite (*ἄπειρος*). Es de esta manera, como lo incierto se presenta frente a cada una de las dos (*ἑκάτερος*) líneas (*γραμμή*), que caen (*συμπίτνω*) en esos linderos donde se pierde el control de todo en ese ir y venir (*εἶμι*) propio de la existencia (*εἰμί*) misma de lo que va (*ἔρχομαι*) hacia lo infinito (*ἄπειρον*).

Hemos de resaltar cómo en las epistemes se alterna el sujeto con el predicado, que Frege la identificó como la distinción fundamental entre el argumento con la función[448]:

i. El punto (*σημεῖον*) como el argumento y la función es lo que no tiene parte alguna: *f* (*ἐστιν οὗ μέρος*) (*σημεῖον*).
ii. La línea (*γραμμή*) como el argumento y la función es lo que tiene largo más no ancho: *f*(*ἐστιν μῆκος δέ απλάτος*) (*γραμμή*).
iii. Los extremos de la línea es el argumento y son puntos la función: *f*(*σημεῖα*) (*γραμμῆς δέ πέρατα*). Aquí la función reside en el verbo mostrar, indicar (*σημαίνω*).
iv. La superficie (*ἐπιφάνεια*) como el argumento, y lo que es largo y ancho como la función: *f*(*ἐστιν μῆκος καί πλάτος*) (*ἐπιφάνεια*).
v. Los extremos de una superficie es el argumento y son líneas es la función: *f*(*ἐστιν γραμμαί*)(*ἐπιφανείας δέ πέρατα*).

Se resalta aquí cómo cada axioma puede ser descompuesto en términos de una función y su argumento, tal hecho va a facilitar su conversión futura tanto en una proposición formal del cálculo de predicados, como en una fórmula o una ecuación a nivel del álgebra. El orden argumentativo se sigue con impecabilidad, donde cada nuevo término

[448] Tema tratado por Gottlob Frege (1879), en *Begriffsschrift*, donde además manifiesta: que es fácil de ver al contenido como una función de un argumento que conduce a la formación de conceptos (pág. 7).

se presenta como una episteme que viene a ser definida por la acción que descansa en la predicación de la función misma. De esta manera, el término permanece como una variable que viene a ser especificada en la predicación, que permite ligar el argumento por medio de la actividad de la función. En ese concatenamiento de las epistemes, se valora el aspecto deductivo propio de la disciplina, en relación con los términos que preceden y los que siguen. Algo que ayuda en la axiomatización al especificar de manera ímplita las constantes lógicas que están presentes (*καί, δέ, ἀλλήλων, ὅταν*) y las no lógicas constituidas por todos estos términos entre los que están las epistemes. Tal manera de estructurar las proposiciones que definen a los axiomas va a facilitar poder edificar una teoría, e irla ampliando y complejizando bajo la incorporación de nuevos términos: los cuales hemos denominado epistemes, en razón a que se constituyen en conceptos capaces de soportar la decibilidad y completitud de una teoría.

Las epistemes asumen la definibilidad y su mutua independencia como conceptos, constituyéndose como constantes extralógicas de la teoría en cuestión. Tal como Alfred Tarski[449] los introduce bajo dos grupos que luego integrará en uno solo, este hecho permitirá definir una teoría como un conjunto de oraciones X, o sea los axiomas tal como lo tenemos aquí. Se nota en este contexto como podemos escoger cualquier constante extra-lógica: sea un punto, una línea, una superficie, etc., y poder expresarla dentro de una proposición en la que los demás términos están referidos a ella. Se define un término o episteme por medio de los demás términos, estos se han organizado alrededor de un conjunto B que es subconjunto de X, $B \subset X$. Este hecho permitirá construir todas las proposiciones o axiomas que queramos preservando las reglas de inferencia lógica.

Todavía queda un trabajo muy largo por delante, dado que la estrategia que busca fundamentar las teorías matemáticas a partir del método axiomático presenta todavía

[449] Es de resaltar cómo Tarski (1934), en su artículo *Some Methodological Investigations on the Definability of Concepts*, identifica dos grupos de conceptos en la construcción de las teorías deductivas, al igual que las relaciones internas entre ellos: en el primer grupo tenemos conceptos como axioma, oración derivada, teorema, regla de inferencia, prueba. En el segundo grupo tenemos conceptos como concepto primitivo o indefinido, concepto definible, regla de definición, definición. Existe un paralelismo entre ambos grupos, aunque las investigaciones en la metodología de las ciencias deductivas se han orientado más hacia el primer grupo, en el segundo grupo tenemos aquello que nos fuerza a ir más adelante dado que nos plantea interesantes problemas. Tarski buscará resumir este tópico al abordar dos problemas esenciales: el problema de la definibilidad y la mutua independencia de los conceptos, asimismo, como el problema de la completez de los conceptos de una teoría deductiva arbitraria (págs. 296 a 300).

grandes retos. Basta citar uno, el concepto de punto (*σημεῖον*) no ha logrado ser definido y no se lo ha podido aprehender de manera adecuada después de dos mil años. Este reto quedará para ser librado en el campo de las matemáticas con ayuda de la filosofía, entendida como aquel pensamiento crítico reflexivo que trasciende la inmediatez a fin de ahondar en lo desconocido hacia la búsqueda esencial de lo veritativo de la existencia.

BIBLIOGRAFÍA

Fuentes primarias

Aristóteles. *Metafísica*. Valentín García Yebra, Edición Trilingüe (1970). Madrid, España: Editorial Gredos.

Aristotle. *Aristotle's Metaphysics* (*τά μετά τά φυσικά*), ed. W.D. Ross (1924). Oxford, England: Clarendon Press.

Aristotle. *Metaphysics*, translated by Hugh Tredennick (1933, 1989). Cambridge, MA, United States of America: William Heinemann Ltd.

Euclid. *Euclidis Elementa*, translated by J. L. Heiberg (1883-1888), Leipzig, Germany: Teubner.

Euclid. *The Euclid´s Elements of Geometry*, translation by J.L. Heiberg, Austin, Texas, United States of America: edited by The University of Texas at Austin.

Euclid. *The Thirteen Books of Euclid´s Elements of Geometry*, translation by Sir Thomas Little Heath (1908), Cambridge, Massachusetts, United States of America: Dover.

Euclides. *Elementos*. Traducción María Luisa Puertas Castaños (1991), Madrid, España: Gredos.

Iamblichus. *The Life of Pythagoras or Pythagoric Life*, translated by Thomas Taylor, J. M. Watkins (1818), London, England: J. M. Watkins.

Laercio Diógenes. *Vida, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres*, traducción de José Ortíz y Sanz (1887), Madrid, España: Luis Navarro.

Laërtius Diogenes. *Lives of Eminent Philosophers, Thales*, translated by R.D. Hicks (1925), Cambridge, Massachusetts, United States of America: Harvard University Press.

Liddell Henry George, Scott Robert (1940). *A Greek-English Lexicon*, Oxford, England: Clarendon Press.

Pythagoras. *The Golden Verses*, Greek test, Bibliotheca Augustana, Ausburg, Germanay: Ausburg University.

Pythagoras. *The Golden Verses of Pythagoras and other Pythagorean Fragments*. Florence Firth (1904), Santa Cruz, California, United States of America: Evinity Publishing Inc.

Tournier Perron Leon (1944). *Los versos dorados de Pitágoras*, Valparaíso, Chile: Orden Masónica Oriental de Rito Antiguo y Primitivo de Memphis.

Fuentes secundarias

Adámek Jiří, Herrlich Horst, Strecker George E. (1990, 2004). *Abstract and Concrete Categories,* New York, United States of America: John Wiley & Sons Inc.

Ademollo Francesco (2011). *The Cratylus, a Commentary*, Cambridge, Massachusetts, United States of America: Cambridge University Press.

Anton Howard, Rorres Chris (2010). *Elementary Linear Algebra*, Hoboken, New Jersey, United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

Apollodorus. *Epitome*. English Translation by Sir James George Frazer (1921). Cambridge, MA, United States of America: Harvard University Press.

Apostol Tom (1967). *Calculus*, New York, NY, United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

Aristote. *Physique*. Trad. J. Barthélemy Saint-Hilaire (1862), Paris, France: Libraire Philosophique de Ladrange.

Aristotle. *On the Heavens*. Trad. William Keith Chambers Guthrie (1939). Cambridge, Massachusetts, United States of America: Harvard University Press.

Aristotle. *Physics* (*Φυσική ἀκρόασις*). Aquinas Thomas, *Commentary on Aristotle's Physics*, trans. Richard J. Blackwell, Richard J. Spath, W. Edmund Thirlkel, Pierre H. Conway (1999), Notre Dame, Indiana, United States of America: Dumb Ox Books.

Aristotle. *Premiers Analytiques*. Traduction par Jules Barthélemy Saint-Hilaire (1862). Paris, France: Ladrande.

Aristotle. *Prior Analytics*. Translated by A. J. Jenkinson (1853). Oxford, England: Oxford University Press.

Aristotle. *Poetics*. Translated by W.H. Fyfe (1932). Cambridge, MA, United States of America: Harvard University Press.

Aristoxenus of Tarentum. *Discussion*. Trans. Carl Huffmann (2012). New Brunswick, NJ, United States of America: Rutgets University Studies in Classical Humanities.

Austin John (1962). *How to do things with Words.* Oxford, England: Clarendon Press.

Ayres Frank (1965). *Modern Algebra.* New York, NY, United States of America: McGraw-Hill Company.

Ayres Frank, Mendelson Elliot (1999). *Calculus*. New York, NY, United States of America: McGraw-Hill.

Azzouni Jody (2004). "Proof and Ontology in Euclidean Mathematics". *New Trends in the History and Philosophy of Mathematics*. Odense, Denmark: University Press of Southern Denmark.

Barr Michael, Wells Charles (1985). *Toposes, Triples and Theories*. New York, NY, United States of America: Springer Verlag.

Bell John (2012). *Types, Sets and Categories in Sets and Extensions in the 20th Century*. Amsterdam, The Netherlands: North Holland Publishing Co.

Birkhoff Garrett (1958). *Von Neumann and Lattice Theory*. Providence, RI, United States of America: American Mathematical Society.

Boole George (1854). *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. Cork, Ireland: Queen´s College.

Borel Armand (1998). *Twenty Five Years with Nicolas Bourbaki 1949-1973*. Providence, RI, United States of America: American Mathematical Society.

Borwein Jonathan, Bailey David (2010), *Pi: The Next Generation*. Basel, Switzerland: Springer International Publishing AG Switzerland.

Boyce William E., Di Prima Richard C. (2001). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York, NY, United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

Boyer Carl Benjamin (1949). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York, NY, United States of America: Dover Publications Inc.

Boyer Carl Benjamin (1968). *A History of Mathematics*. New York, NY, United States of America: John Wiley & Sons Inc.

Brewer E. Cobham (1896), *Dictionary or Phrase and Fable*, United Kingdom: Chambers Harrap Publishers.

Bunge Mario (1974). *Treatise on Basic Philosophy, Semantics II: Interpretation and Truth*. Boston, MA, United States of America: D. Reidel Publishing Co.

Burago Dmitri, Burago Yuri, Ivanov Sergei (2001). *A Course in Metric Geometry*. Providence, RI, United States of America: American Mathematical Society.

Burkett Walter (1972). *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Cambridge, Massachusetts, United States of America: Harvard University Press.

Busjatskaya I, Monatyrsky M. (2013). *Immortality of Platonic Solids*. Cambridge, England: The Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences.

Cajori Florian (1909). *A History of Mathematics*. London, England: The MacMillan Company.

Campos Alberto (2006). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática: Lógica y geometría griegas*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Cannon James W, Floyd William J, Kenyon Richard, Parry Walter R (1997), *Flavors of Geometry, Hyperbolic Geometry*. Cambrigde, MA, United States of America: Cambridge University Press.

Cantor Georg (1879). *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*. Göttingen, Germany: Mathematische Annalen.

Cantor Georg (1895). *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Chicago, Illinois, United States of America: The Open Court Publishing Company.

Carlson J, Jaffe A, Wiles A, Editors (2006). *The Millennium Prize Problems*. Cambridge, Massachusetts, United States of America: Clay Mathematics Institute and American Mathematical Society.

Cicero. *Cicero´s Tusculan Disputations*. Translated by Andrew P. Peabody (1886). Boston, MA, United States of America: Little and Co.

Coxeber Harald Scott, Greitzer Samuel L. (1967). *Geometry Revisited*. Washington, D.C. United States of America: The Mathematical Association of America.

Coxeber Harold, McDonald Scott (1969). *Introduction to Geometry*. New York, NY, United States of America: John Wiley & Sons Inc.

*Dedekind Richard (1853). Essays on the Theory of Numbers, Continuity and Irrational Numbers.*Chicago, IL, United States of America: The Open Court Publishing Co.

Derrida Jacques (2007). *Pasiones Institucionales II*, México, D.F. México: Universidad Autónoma de México.

Evans James (1998), *The History and Practice of Ancient Astronomy*, United Kingdon: Oxford University Press.

Fairbanks Arthur (1898). Editor and Translator, *Pythagoras and the Pythagoreans.* London, England: K. Paul, Trench and Trubner.

Firth M. Florence (1904). *The Golden Verses of Pythagoras*. Krotona, CA, United States of America: Theosophical Publishing House.

Fraleigh John B. (2003). *A First Course in Abstract Algebra* . Boston, MA, United States of America: Addison Wesley Pearson Education Inc.

Frege Gottlob (1879). *From Frege to Gödel*, Ed. Jean van Heijenoort (1967). Cambridge, Massachusetts, United States of America: Harvard University Press.

Frege Gottlob (1884). *The Foundations of Arithmetic*. New York, NY, United States of America: Pearson and Longman Inc.

Gerla Giangiacomo (1995). *Pointless Geometries*, Handbook of Incidence Geometry. Paris, France: Francis Buekenhout.

Gödel Kurt (1930-1). *Some Metamathematical Results on Completeness and* Consistency. Harvad, MA, United States of America: Harvard College.

Goodman A. W. (1969). *Analytic Geometry and the Calculus*. London, England: The MacMillan Company.

Gowers Timothy (2008). *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton, NJ, United States of America: Princeton University Press.

Griffiths Alan (2005). *Seven Sages.* Oxford, England: Oxford University Press.

Guthie Kenneth Sylvan, Editor (1987). *The Complete Pythagoras*. Newburyort, MA, New York. United States of America: The Pythagorean Sourcebook and Library.

Hahn Liang-shin (1994). *Complex Numbers and Geometry*. Washington, D.C. United States of America: The Mathematical Association of America.

Harju Tero (2011). *Lecture Notes in Graph Theory*. Turku, Finland: University of Turku.

Hazewinkel, Michael (2001). *Perfect number*. Berlin, Germany: The European Mathematical Society.

Hermann Arnold (2004). *The Illustrated to Think like God*. Las Vegas, Nevada, United States of America: Parmenides Publishing.

Hermann Grassmann (1844). *Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer zweig der Mathematik.* Leipzig, Germany: Verlag von Otto Wigand.

Hesiod. *The Poems and Fragments*. A. W. Mair (1908). Oxford, England: Clarendon Press.

Hesiod. *Theogony*. Translation by Hugh G. Evelyn-White (1904). Cambridge, MA, United States of America: Harvard University Press.

Hesiod. *The Homeric Hymns and Homerica, Works and Days*. Translation by Hugh G. Evelyn-White (1914). Cambridge, MA, United States of America: Harvard University Press.

Hilbert David (1894). *The Foundations of Geometry*. La Salle, IL, United States of America: The Open Court Publishing Company.

Homer. *The Iliad*. Translation by A.T. Murray (1924). Cambridge, MA, United States of America: Harvard University Press.

Homer. *The Odyssey*. Translation by A.T. Murray (1919). Cambridge, MA, United States of America: Harvard University Press.

Hugh Chisholm (1911). *Stobaeus, Joannes.* Cambridge, MA, United States of America: Cambridge University Press.

Husserl Edmund (1900-01). *The Shorter Logical Investigations, Investigation III, On the Theory of Wholes and Parts*, Translated by John Findlay (1970). New York, NY, United States of America: Routledge Co.

Johnson Monte Ransome (2006), *Aristotle on Teleology*. Oxford, England: Oxford University Press.

Johnson Monte Ransome (2011). *Democritus, en Classical and Medieval Literature Criticism*. San Diego, CA, United States of America: University of California.

Joost-Gaugier Christiane (2006). *Measuring Haven, Pythagoras and His Influence on Thought and Art in Antiquity and Middle Ages*. Ithaca, NY, United States of America: Cornell University Press.

Kahn, Charles H. (2001). *Pythagoras and the Pythagorean*: *a Brief History*. Indianapolis, IN, United States of America: Hackett Publishing Company Inc.

Kant Immanuel (1781). *Crítica de la razón pura*, traducción Mario Caimi (2007). Buenos Aires, Argentina: Losada.

Kant Immanuel (1781). *Critique of Pure Reason*, translated Paul Guyer and Allen Wood (1998). Cambridge, MA, United States of America: Cambridge University Press.

Kaplansky Irving (1972). *Set Theory and Metric Spaces*. Boston, MA, United States of America: Allyn and Bacon Inc.

Keisler, H. Jerome (2008). *Quantifiers in limits*. Amsterdam, Netherlands: Andrzej Mostowski and foundational studies, IOS Press.

Kirby Penelope (2011). *Mad 2104 Discrete Mathematics I*. Tallanhassee, FL, United States of America: Florida State University.

Kline Morris (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York, NY, United States of America: Oxford University Press.

Koellner Peter (2011). *The Continuum Hypothesis, Exploring Frontiers of Independence*. Harvard, MA, United States of America: Harvard University Press.

Koestler Arthur (1959). *The Sleepwalkers – A History of Man´s Changing Vision of the Universe*. London, England: Arkana Penguin Books.

Kupferman Raz (2006). *Topological Vector Spaces*. Jerusalem, Israel: Einstein Institute of Mathematics.

Landau, L.D, Lifshitz, E.M. (2002). *The Classical Theory of Fields*. New York, NY, United States of America: Pergamon Press.

Leibniz Gottfried (1714). *The Monadology*. Translated by Robert Latta (1898). Oxford, England: Clarendon Press.

Leibniz Gottfried (1721). *Monadología*. Edición trilingüe, Clásicos del Basilisco (1981). Oviedo, España: Pentalfa Ediciones.

Lewis Charlton, Short Charles (1879). *A Latin Dictionary*. Oxford, England: Clarendon Press.

Lian Tony (2011). *Fundamentals of Zermelo-Fraenkel Set Theory*. Chicago, IL, United States of America: University of Chicago.

Link Godehard (2004) Editor. *One hundred years of Russell´s Paradox*. Berlin, NY, United States of America: Walter de Gruyter.

Lipschutz Seymour (1964). *Set Theory and Related Topics*. New York, NY, United States of America: Mc Graw-Hill.

Lipschutz Seymour (1991). *Linear Algebra*. New York, NY, United States of America: Mc Graw-Hill.

Longworth Guy (2006). *Definitions*: *Uses and Varieties*. Oxford, England: K. Brown.

Luchte James (2009). *Pythagoras and the Doctrine of Transmigration: Wandering Souls*. New York, NY, United States of America: Continuum International Publishing Group.

Mac Lane Saunders (1969). *Categories for the Working Mathematician*. Berlin, Germany: Springer Verlag.

Marsden Jerrold E, Hoffman Michael J. (1999). *Basic Complex Analysis*: New York, NY, United States of America: W. H. Freeman.

Mendeleev Dmitri (1901). *The Principles of Chemistry*. New York, NY, United States of America: P.F. Collier and Son.

Mitsuko Wate Mizuno (2010). *The Work of Dénes Kőnig in the Domain of Mathematical Recreations*. Paris, France: Université Paris-Diderot.

Mitzuko Wate Mizuno (2011). *The work of Dénes Kőnig*. Paris, France: Université Paris-Diderot.

Moyer Robert E, Ayers Frank (2009). *Trigonometry*. New York, NY, United States of America: McGraw-Hill.

O'Connor John. J, Roberson Edmund. F (2006). History Topic: Greek Number Systems. St Andrews, Scotland: St Andrew University.

Orphic Himns. *The Mystical Initiations of Hymns of Orpheus*. Translated by Thomas Taylor (1792). Philadelphia, PE, United States of America : University of Pennsylvania Press.

Pabón S. De Urbina José M. (1967). *Diccionario manual griego clásico-español*. Madrid, España: Voz.

Pausanias. *Description of Greece*. Translated by W. H. Jones (1926). London, England: William Heinemann Publishing.

Pausanias. *Description of Greece*. Translation by W.H.S. Jones, D. Litt, Ormerod, H.A. (1918). Cambridge, MA, United States of America: Harvard University Press.

Plato. *Platonis Opera*. Ed. John Burnet (1903). Oxford, England: Oxford University Press.

Plato. *Cratylus*. Trad. David Sedley (2003). Cambridge, MA, United States of America: Cambridge University Press.

Plato. *Phaedo*. David Gallop (1975). Oxford, England: Clarendon Press.

Plato. *The Phaedon of Plato*. Translated by Richard. A. Archer-Hind (1894). London, England: MacMillan and Co.

Plato. *Protagoras*. Translated by W.R.M. Lamb (1924). Cambridge, MA, United States of America: Harvard University Press.

Plato. *Timaeus*. Translated by W.R.M. Lamb (1925). Cambridge, MA, United States of America: Harvard University Press.

Platón. *Gorgias, Menéxeno, Eutidemo, Menón, Crátilo*. Trad. J. Calonge, E. Acosta, F. Olivieri, J. Clavo (1983). Madrid, España: Editorial Gredos.

Platón. *La República*. Edición bilingüe, José Manuel Pabón y Manuel Fernández-Galiano (1949). Madrid, España: Centro de Estudios Políticos y Constitucionales.

Playfair John (1813). *Elements or Geometry containing the first six books of Euclid*. London, England: W.E. Dean, Printer & Publisher.

Plutarch. *Moralia, Isis and Osiris*. Translated by Frank Cole Babbitt (1936). Cambridge, MA, United States of America: Harvard University Press.

Popper Karl (1963). *Conjectures and Refutations*. London, England: Routledge & Kegan Paul.

Preus Anthony (2015). *Historical Dictionary of Ancient Greek Philosophy*. London, England: Rowman & Littlefield.

Ravitch Harold (1968). *On Gödel´s Philosophy of Mathematics*. Los Angeles, CA, United States of America: Jamie York Press.

Rich Barnett, Thomas Christopher (2009). *Geometry*. New York, NY, United States of America: McGraw-Hill.

Riedweg Christoph (2002). *Pythagoras, His Life, Teaching and Influence*. Ithaca, NY, United States of America: Cornell University Press.

Rojas Osorio Carlos (2001). *Invitación a la filosofía de la ciencia*. Humacao, Puerto Rico: Universidad de Puerto Rico.

Rosen Frederic (1831). *The Algebra of Mohammed Ben Musa*. London, England: The Oriental Translation Fund.

Rouse Ball Walter William (1908). *A Short Account of the History of Mathematics*. New York, NY, United States of America: Dover Publications Inc.

Rowlands Peter (2007). *Zero to Infinity, The Foundations of Physics*. London, England: World Scientific Publishing Co.

Rudin Walter (1964). *Principles of Mathematical Analysis*. New York, NY, United States of America: McGraw-Hill.

Russell Bertrand (1897). *An Essay on the Foundations of Geometry,* Cambridge University Press, C.J. Clay and Sons, London.

Russell Bertrand (1903). *The Principles of Mathematics*. London, England: George Allen & Unwin Ltd.

Russell Bertrand (1912). *The Problems of Philosophy*. London, England: Henry Holt and Company.

Russell Bertrand (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. London, England: George Allen & Unwin Ltd.

Russell Bertrand (1945). *The History of Western Philosophy*. New York, NY, United States of America: Simon and Schuster.

Russell Bertrand, Whitehead Alfred North (1910). *Principia Mathematica*. Oxford, England: Oxford Univesity Press.

Sandywell Barry (1996). *The Construction of Philosophical Discourse, C.600- 450 B.C. Logological Investigations*. London, England: Routledge.

Sauvé Léo, editor (2007). *Inequalities proposed in Crux Mathematicorum*. Cambridge, MA, United States of America: Cambridge University Mathematical Society.

Silverman Joseph (2011). *A Friendly Introduction to Number Theory*. Boston, MA, United States of America: Pearson Education Inc.

Sipiora Phillip, Baumlin James (2002). *Rhetoric and Kairos: Essays in History, Theory and Praxis*. Albany, NY, United States of America: State University of New York Press.

Slaught H. E., Lennes N. J. (1919). *Solid Geometry with Problems and Applications*. Boston, MA, United States of America: Allyn and Bacon.

Sluga Hans (2007). *New Makers of Modern Culture*. London, England: Routledge.

Smith William (1870). *Dictionary of Greek and Roman Biography and Mythology*. Boston, MA, United States of America: Little and Brown Company.

Smith William (1884). *Classical Dictionary of Greek and Roman Biography, Mythology and Geography*. New York, NY, United States of America: Harper & Brothers Publishers.

Stanley Thomas (2010). *Pythagoras, his Life and Teaching*. Lake Worth, FL, United States of America: Ibis Press.

Stobaeus Ioannis. *Iōannou Stobaiou Anthologion – Ioannis Stobæi Florilegium*. Ed. Thomas Gaisford (1823). Oxford, England: Bibliopolio Kuehniano.

Suppes P, Hill S (1969). *Introducción a la lógica matemática*. Barcelona, España: Editorial Reverté S. A.

Tarski Alfred (1953). *Undecidable Theories*. New York, NY, United States of America: Dover Publications Inc.

Tarski Alfred (1956). *Logic, Semantics, Metamathematics*. Oxford, England: Oxford University Press.

The Homeric Hyms. Translated by Andrew Lang (1899). London, England: George Allen Co.

Van Oosten Jaap (2002). *Basic Category Theory*. Utrecht, The Netherlands: Department of Mathematics, Utrecht University.

Van Wesep Robert A (2015). *Foundations of Mathematics*. Baltimore, MD, United States of America: Mathetal Books.

Viro O, Ivanov A, Netsvetaev N, Kharlamov V, (2008). *Elementary Topology*. Washington, D.C., United States of America: American Mathematical Society.

Von Neumann John (1925). *An Axiomatization of Set Theory, From Frege to Gödel*. Cambridge, MA, United States of America: Harvard University Press.

Weil, André (1992). *The apprenticeship of a mathematician*. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag.

Weyl Hermann (1913). *The Concept of a Riemann Surface*. London, England: Addison-Wesley Publishing Company.

Whitehead Alfred North (1929). *Process and Reality an Essay in Cosmology*. New York, NY, United States of America: MacMillan Publishing Co.

Wiener Norbert (1914). *A simplification in the logic of relations.*Cambridge, MA, United States of America: Harvard University Press.

Zalamea Fernando (2009), *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Artículos

Abraham Ralph H. (2006). The New Sacred Math. *World Futures*, 62 (6-16).

Afonasin, Eugene. 1998. Pythagorean Symbolism and the Philosophy Paideia in the Stromateis of Clement of Alexandria. *The Paideia Archive*, 43, 11-23.

Allen Donald (2001). Babylonian Mathematics. *Lectures on History of Mathematics*, Math 629, 12-23.

Allen Donald (2002). Egiptian Mathematics. *Lectures on History of Mathematics*, Math 629, 33-42.

Atiyah Michael (2016). The Non Existent Complex 6 Sphere. *ArXiv*, 1610.09366v2.

Barr Michael (1991). The Point of Empty Set. *Cahiers Topologie Géométrie Différentielle*, 32(4), 257-276.

Beaudry Pierre (2004). Pythagorean Spherics: The Missing Link between Egipt and Greece. *21st Century Science & Technology*, Summer 2004, 1-40.

Bell John (1998). Whole and Part in Mathematics. *Axiomathes*, 14, 21-35.

Besprosvany B. (2002). Gauge and Space-Time Symmetry Unification. *ArXiv* 0203114 v1.

Burali-Forti Cesare (1896). The Grassmann method in projective geometry. *Rivista di Matematica*, 2, 38-41.

Calter, Paul (1998). Pythagoras & Music of the Spheres. *Geometry in Art & Architecture*, November, 1-15.

Constable Robert (2003). Encoding Mathematics in First Order Logic. *Applied Logic*, Spring, 19-486.

Corcoran John (2003). Aristotle´s Prior Analytics and Boole´s Laws of Thought. *History and Philosophy of Logic*, 24, 261-288.

Dobson John (2003). The Whole is more than the Sums of its Parts or is it? *Academic Research*, 4, 35-51.

Duke Dennis (2005). Erastothenes too big Earth & too tiny Universe. *The International Journal of Scientific History*, vol. 14, March, 3-12.

Elstrodt Jürgen (2007). The Life and Work of Gustav Lejeune Dirichlet. *Clay Mathematical Proceedings*, vol. 7, September, 18-26.

Falcon Andrea (2013). Commentators on Aristotle. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 3, 1-65.

Fearnley-Sander Desmond (1979). Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra. *American Mathematical Monthly*, 86, 809–17.

Feferman Solomon (2011). Is the Continuum Hypothesis a Definite Mathematical Problem? *Harvard Mathematics Department Archive*, 9, 18, 11, 1-30.

Gaifman Haim (2012). On Ontology and Realism in Mathematics. *Review of Symbolic Logic*, 12, 105-122.

Gippe Jake (2014-1). The Volume of n-Balls. *Rose Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, Vol. 15, University of Missouri, Missouri.

Grabiner, Judith V. (1983). Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus. *The American Mathematical Monthly*, 90, March, 185-194.

Grégory Berhuy (2010). An Introduction to Galois Cohomology and Its Applications. *London Mathematical Society Lecture Note Series*. 377, 11-24.

Grimm, R. E. (1973). The Autobiography of Leonardo Pisano. *Fibonacci Quarterly*, Vol. 11, 99-104.

Harkin Anthony A, Harkin Joseph B (2004-4). Geometry of Generalized Complex Numbers. *Mathematics Magazine*, Vol. 77, n. 2, April, 118-129.

Heidegger Martin (1973). Kant´s Thesis about Being. *The Southwestern Journal of Philosophy*, vol. 4, 7-33.

Horst Leon (2012). The Philosophy of Mathematics. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2, 1-55.

Huggett, Nick (2010). Zeno's Paradoxes. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 4, 1-57.

Idang Gabriel Ein (2013). Thales, Anaximander and Anaximenes as Pathfinders of Modern Science. *International Journal of Philosophy*, Vol 1, n. 4, 57-65.

Johnson Monte Ransome (2011). Democritus. *Classical and Medieval Literature Criticism*, Vol. 136, 257-343.

Katz Karin Usadi, Katz Mikhail (2012). A Burgessian Critique of Nominalistic Tendencies in Contemporary Mathematics and its Historiography A Burgessian Critique of Nominalistic Tendencies in Contemporary Mathematics and its Historiography. *ArXiv*, 1104.0375v4.

Kumar Mohan (2011). Construction of Number Systems: Peano´s Axioms and Natural Numbers. *The Math* Forum, 6, 15-23.

Lawvere Francis William (1973). Metric Spaces, Generalized Logic and Closed Categories. *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano XLIII*, n. 1, 135-166.

Lenhart Isaac (2011). Kairotopos: A Reflection on Greek Space/Time Concepts as Design Implications in Minecraft. *DiGra*, 11, 45-113.

Lycann William (2010). What, exactly is a Paradox? *Oxford Analysis Journal*,Vol 70, 4, 615-622.

MacLane Saunders, Eilenberg Samuel (1945-1). General Theory of Natural Equivalences. *American Journal of Mathematics*, Vol 58, 231-294.

Mamolo Ami, Zazkis Rina (2008-9). Paradoxes a Window to Infinity. *Research in Mathematical Education*, Vol. 10, n. 2, 167-182.

Mendell Henry (2008). Aristotle and Mathematics. *The Stanford Encyclopedia of Mathematics*, 1, 1-78.

Moore Kenneth R (2016). Pythagoras and (Were) Wolf. *Athens Journal of History*, Vol. 2, No. 4, 227-237.

Øhrstrøm Peter, Schärfe Henrik, Uckelman Sara (2008). Jacob´s Lorhard´s Ontology: a 17th Century Hypertext on the Reality and Temporality of the World of the Intelligibles. *Conceptual Structure: Visualization and Reasoning*, Vol 5113,74-87.

Pelayo Roberto (2014). The Peano Axioms. *Mathox*, 9, 23-34.

Peterson Jesee D (2014). Cocycles. *ArXiv*, 0708.4327v2.

Raman-Sundström Maya (2014). A Pedagogical History of Compactness. *ArXiv*, 1006. 4131v2.

Russell Bertrand (1908). Mathematical Logic as based on the Theory of Types. *American Journal of Mathematics*, Vol.30, N.3, 222-262.

Samuel Verdan (2007). Systèmes numéraux en Grèce ancienne. *CultureMATH*, 1-15.
Schleicher Dierk (2007). Hausdorff Dimension, Its Properties and Its Surprises. *American Mathematical Monthly*, Vol 114, 509-528.

Sinapova Lydia (2005). Quantifiers in Predicate Calculus. *Discrete Mathematics*, CmSc 180, 23-34.

Smith John E (1969). Time, Times, and the Right Time; Chronos and Kairos. *The Monist*, Vol. 53,1, 1-13.

Tait, William. W (2001). Beyond the Axioms: the Question of Objectivity in Mathematics. *Philosophia Mathematica*, vol.9, 21-36.

Theodossiou E, Mantarakis P, Dimitrijevic M, Manimanis V, Danezis E (2010). From the Infinity (Aperion) of Anaximander in Ancient Greece to the Theory of Infinite Universes in Modern Cosmology. *Astronomical and Astrophysical Transactions*, Vol 27, 1, 162-176.

Theodossiou Efstratios**,** Dacanalis Aris**,** Dimitrijevic Milan and Mantarakis Petros (2008). The heliocentric system from the Orphic Hymns and the Pythagoreans to Emperor Julian. *Bulgaria Astronomical Journal*, vol.11, 110-223.

Vogel Thomas (2012). Heine-Borel Theorem. *Mathematical Sciences Publishers*, 410, 92-102.

Wallis Steven (2010). Toward a Science of Metatheory. *Integral Review*, Vol 6. No. 3,74-109.

Wallis Steven E. (2010-7). Emerging Perspectives of Metatheory and Theory. *Integral Review*, Vol. 6, No 3, 1-4.

Weber, H. (1893). Leopold Kronecke. *Mathematische Annalen*, 43, 1-25.

Wilson Jim (2013). Numbers Raised to the Power of Zero. *Math Situation*, 10, 23-27.

Witherall Arthur (2011). The Zero Ontology, David Pearce on Why Anything Exists. *BLTC Research*, 4, 12-17.

Wudka José (1998). The Pythagoreans. *Physic Notes 7*, 32, 1-5.

Yuh-Dauh Lyuu (2012). Maximal and Minimal Elements of Posets. *Discrete Mathematical Lecture Notes*, 419, 335-380.