

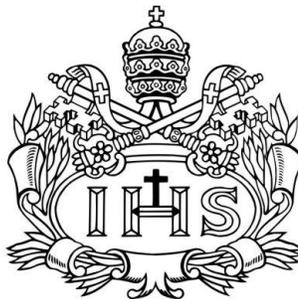
TRABAJO DE GRADO

DETERMINACIÓN DE UN MODELO DE INVERSIÓN PARA GENERAR
PORTAFOLIOS QUE MAXIMICEN LA RENTABILIDAD USANDO UN PROCESO
ESTOCÁSTICO DISCRETO

ANTONIO RIVADENEIRA MARTÍNEZ

DIRECTOR

FERNANDO RODRÍGUEZ PRIETO



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FACULTAD DE INGENIERÍA

BOGOTÁ

15 DE DICIEMBRE

2009

Contenido

1.	RESUMEN	6
2.	INTRODUCCIÓN.....	6
3.	GLOSARIO.....	7
4.	PROBLEMA	8
4.1.	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	8
4.2.	JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA	11
5.	OBJETIVOS.....	14
5.1.	Objetivo General.....	14
5.2.	Objetivos Específicos.....	14
6.	MARCO TEÓRICO	14
7.	RESTRICCIONES	26
7.1.	Financieros.....	26
7.2.	Matemáticos	27
8.	DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO DE INVERSIÓN.....	28
8.1.	Formulación estocástica	29
8.2.	Modelo basado en cadenas de Markov Discretas y Value-at-Risk	34
8.3.	Cuantificación del riesgo.....	35
8.4.	Planteamiento del modelo de optimización.....	38
8.5.	Alternativa de planteamiento para la mitigación del riesgo con función multiobjetivo..	40
9.	GENERACIÓN DE PORTAFOLIOS.....	42
9.1.	Portafolio de máxima rentabilidad	44
9.2.	Portafolio de rentabilidad máxima con límite de riesgo.....	44
10.	RIESGO Y RENTABILIDAD.....	46
10.1.	Riesgo único	47
10.2.	Perfil de riesgo	52
11.	COMPARACIÓN DE PORTAFOLIO DE INVERSIÓN.....	53
11.1.	Validación del modelo de inversión con valores futuros reales del mercado	53
12.	ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	56
12.1.	Portafolios de máxima rentabilidad.....	56
12.2.	Riesgo y Rentabilidad.....	58
12.3.	Validez del Modelo	59
13.	CONCLUSIONES.....	60

14.	RECOMENDACIONES	62
15.	BIBLIOGRAFÍA	63
16.	ANEXOS.....	66
16.1.	Matrices de transición	66
16.2.	Valores de rentabilidad y riesgo de portafolios óptimos	88
16.3.	Comportamiento del precio de las acciones	94

INDICE DE TABLAS

Tabla 1.	Precio de cierre, volatilidad y riesgo de cada acción	43
Tabla 2.	Portafolio de máxima rentabilidad sin restricción de riesgo.....	44
Tabla 3.	Portafolio con VaR del 30%.....	45
Tabla 4.	Portafolio con VaR del 25%.....	45
Tabla 5.	Portafolio con VaR del 20%.....	45
Tabla 6.	Portafolio con VaR del 15%.....	46
Tabla 7.	Portafolio con VaR del 10%.....	46
Tabla 8.	Portafolio con VaR del 5%.....	46
Tabla 9.	Resultado real del portafolio sin restricción de riesgo	54
Tabla 10.	Resultado real del portafolio con restricción de riesgo del 30%	54
Tabla 11.	Resultado real del portafolio con restricción de riesgo del 25%	54
Tabla 12.	Resultado real del portafolio con restricción de riesgo del 20%	55
Tabla 13.	Resultado real del portafolio con restricción de riesgo del 15%	55
Tabla 14.	Resultado real del portafolio con restricción de riesgo del 10%	55
Tabla 15.	Resultado real del portafolio con restricción de riesgo del 5%	56
Tabla 16.	Relación entre riesgo y rentabilidad	57

INDICE DE ECUACIONES

Ecuación 6- 1.....	18
Ecuación 6- 2.....	19
Ecuación 6- 3.....	20
Ecuación 6- 4.....	21
Ecuación 6- 5.....	21
Ecuación 6- 6.....	21
Ecuación 6- 7.....	22
Ecuación 6- 8.....	22
Ecuación 6- 9.....	22
Ecuación 6- 10	23
Ecuación 6- 11	23
Ecuación 6- 12	24
Ecuación 6- 13	25

Ecuación 8- 1	29
Ecuación 8- 2	30
Ecuación 8- 3	31
Ecuación 8- 4	31
Ecuación 8- 5	32
Ecuación 8- 6	32
Ecuación 8- 7	33
Ecuación 8- 8	34
Ecuación 8- 9	34
Ecuación 8- 10	35
Ecuación 8- 11	36
Ecuación 8- 12	36
Ecuación 8- 13	37

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Tasas de interés promedio semanal para CDT's y TES a 360 días en el transcurso del año 2009	9
Figura 2. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo sin restricción de riesgo	47
Figura 3. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo, con restricción de riesgo al 30%	48
Figura 4. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo, con restricción de riesgo al 25%	49
Figura 5. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo, con restricción de riesgo al 20%	50
Figura 6. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo, con restricción de riesgo al 15%	50
Figura 7. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo, con restricción de riesgo al 10%	51
Figura 8. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo, con restricción de riesgo al 5%	52

DETERMINACIÓN DE UN MODELO DE INVERSIÓN PARA GENERAR PORTAFOLIOS QUE MAXIMICEN LA RENTABILIDAD USANDO UN PROCESO ESTOCÁSTICO DISCRETO

1. RESUMEN

Este trabajo de grado, como su título lo indica, tiene como objetivo hacer el uso de las herramientas de predicción estocástica y optimización para el desarrollo de un modelo cuya meta es la de generar portafolios de máxima rentabilidad. El modelo, entrega portafolios compuestos por títulos de renta variable del mercado estadounidense, haciendo la inversión en pesos colombianos. Y hace uso de restricciones en el riesgo para obtener diferentes portafolios. También, contempla el efecto del tiempo en el riesgo y la rentabilidad y de la misma forma, la interacción entre el riesgo y la rentabilidad. Finalmente, las características y variables de los títulos son analizadas y estimadas a partir de su comportamiento histórico.

2. INTRODUCCIÓN

El deseo de desarrollar una herramienta para realizar inversiones financieras, de una manera segura, nace a partir de la crisis financiera mundial. Debido a la volatilidad de los mercados y al manejo indebido de los bienes transados, el

consumidor ha perdido confianza en el mercado accionario. Es por esto que se busca unir los diferentes conceptos que comprende la ingeniería industrial para el desarrollo de un modelo que ayude a mejorar la confianza y me manejo adecuado del mercado. Adelante se verá el desarrollo del modelo mencionado anteriormente.

3. GLOSARIO

Se presenta a continuación un glosario con los términos financieros más relevantes para asistir al lector en el desarrollo del trabajo:

- “**Acciones:** (títulos de capital), capital legal de una corporación dividido en acciones.”¹
- “**Instrumento financiero:** todo documento por escrito con valor monetario o que evidencie una transacción monetaria.”²
- “**Mercado:** lugar dónde se reúnen los compradores y vendedores, generalmente, las bolsa de valores.”³
- “**Portafolio:** (cartera de valores), posesión de títulos por un individuo o por una institución. La cartera de valores puede comprender bonos, acciones preferentes y ordinarias de diferentes clases de empresas.”⁴
- “**Precio:** valor monetario correspondiente a un instrumento financiero.”⁵
- “**Rentabilidad:** es la relación que existe entre el precio de adquisición de un título y su precio de venta”⁶.
- “**Riesgo:** incertidumbre asociada con el valor de fin de periodo de una inversión.”⁷

¹ GORDON J. Alexander, et al. Fundamentos de Inversiones: Teoría y Práctica. 3era ed. México. Pearson Educación. 2003. P. 322

² IBID., 708.

³ IBID., 520.

⁴ IBID., 276.

⁵ DEFINICIÓN HECHA POR EL AUTOR.

⁶ GORDON J., Op. Cit., p. 615.

⁷ IBID., 710.

- **“Título de renta variable:** (Acción de renta variable), título, generalmente acciones ordinarias cuyo dividendo o rendimiento depende de que la firma obtenga una ganancia.”⁸
- **“Volatilidad:** es la desviación estándar del precio histórico de un instrumento financiero y es utilizada para medir el riesgo del mismo.”⁹

4. PROBLEMA

4.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

“Aunque los mercados internacionales siguen volátiles y el nerviosismo es difícil de controlar, en algún momento llegará la calma y ahí ganarán los que tuvieron resistencia. Y no es que las oportunidades de inversión estén en el aire para tomarlas. Hay que saber buscarlas. Por ejemplo, en el caso colombiano, los precios de las acciones de muchas compañías están tan bajos, que quien se arriesgue hoy podría tener una gran rentabilidad a futuro. La razón: el valor en el mercado no refleja el buen desempeño de esas empresas.”¹⁰

Existen diferentes títulos financieros disponibles para cualquier tipo de inversionista, diversos tipos de portafolios de inversión, generalmente asociados a un nivel de riesgo en particular. Estos instrumentos en tiempos de crisis presentan comportamientos negativos o de crecimiento bajo. La desaceleración y crisis económica además conlleva al temor a las inversiones, esto principalmente a la falta de solvencia de las instituciones financieras afectadas, lo cual afecta la percepción y la

⁸ IBID., 399.

⁹ IBID., 814.

¹⁰ REVISTA SEMANA. Cómo invertir su dinero en 2009. Edición 1395. 25 Enero de 2009.

confianza en dichas entidades¹¹. De la misma manera, las tasas de interés van decreciendo en la medida que la economía del país siga estancada¹².

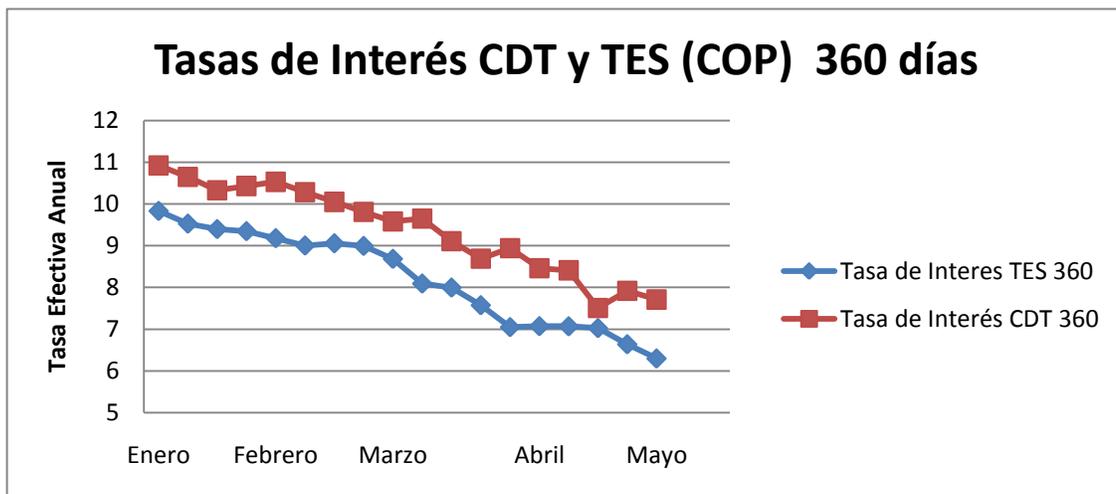


Figura 1. Tasas de interés promedio semanal para CDT's y TES a 360 días en el transcurso del año 2009

13

Las inversiones tradicionales que se llevan a cabo en el país se hacen en mercados renta fija como los son los Bonos y Certificados de Depósito a Termino Fijo (CDT's). En el año 2006, las operaciones financieras en dinero y depósitos abarcaban un total de \$136.215.653 de pesos, estos dos subsectores financieros abarcaban la mayoría de las inversiones de las operaciones de títulos en el país, dejando solamente 14% de las inversiones en títulos de corto plazo en moneda nacional y extranjera. Éste porcentaje representa inversiones por el monto de \$18.833.701 millones de pesos, un valor muy pequeño

¹¹ BLANCHARD, OLIVER (2009,1 de Enero). Lo que se debe hacer para salir de la crisis en el 2009. EL TIEMPO.

¹² REVISTA SEMANA. Cómo invertir su dinero en 2009. Edición 1395. 25 Enero de 2009.

¹³ Fuente: Banco de la República. Series Estadísticas. Disponible en:

http://www.banrep.gov.co/estad/dsbb/sfin_003.xls y <http://www.banrep.gov.co/opmonet/bases/tes.xls>

considerando el monto total de inversiones de tipo financiero en el país¹⁴.

Los mercados de renta variable son los que más sufren en épocas de crisis, debido en parte a su volatilidad y también a su sensibilidad a las especulaciones acerca del mercado. Sin embargo, este tipo de sensibilidades implican oportunidades de inversión. Como se mencionó anteriormente, el buen desempeño de las empresas no siempre está reflejado por el valor de los títulos o acciones que las representan.

“La principal explicación de este fenómeno es la crisis financiera, pues por cuenta del nerviosismo, los inversionistas han salido despavoridos a buscar refugio en activos más seguros que las acciones, sin detenerse a mirar los indicadores fundamentales de la empresa a la cual pertenece el título.”¹⁵

De esta manera, un inversionista cuenta con diferentes opciones de inversión, tanto en moneda extranjera como nacional. Además, el efecto de devaluación y revaluación del peso frente al dólar presenta la oportunidad de investigar el comportamiento estocástico del mercado de divisas. “Algunos expertos se enfocan en el contexto externo para asegurar que la divisa debe perder fuerza frente al peso colombiano.

¹⁴ Fuente: Banco de la República. Series Estadísticas. Disponible en: http://www.banrep.gov.co/estad/ctasfinancieras/SALDOS/41_06.xls

¹⁵ Fuente: Portafolio. Economía. Disponible en: <http://www.eltiempo.com/archivo/documento/MAM-3162646>

Otros aún no ven una salida a la crisis y, por lo mismo, prevén un fortalecimiento de la moneda estadounidense.”¹⁶.

En resumen, un inversionista cuenta con muchas alternativas de inversión, cada una con una diferente rentabilidad, y un riesgo diferente asociado a la volatilidad de su valor. Así, ponderando los argumentos anteriores cabe preguntar, ¿Cómo generar un portafolio de inversión para valores de renta variable que optimice su rentabilidad a la vez que mitigue su riesgo?

4.2. JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

“Nuestros esfuerzos deben empezar con una acción rápida para estimular el crecimiento. Estados Unidos ya promulgó la Ley de Recuperación y Reinversión -la iniciativa más contundente para lanzar la creación de empleos y sentar las bases del crecimiento en una generación-. Otros miembros del G20 también impulsaron un estímulo fiscal y estos esfuerzos deberían seguir siendo sólidos y sostenidos hasta que se restablezca la demanda. En la medida que avancemos, deberíamos adoptar un compromiso colectivo para alentar el comercio abierto y la inversión resistiéndonos al proteccionismo, que ahondaría esta crisis. (...). Aprendimos, de una vez y para siempre, que el éxito de la economía estadounidense está inextricablemente unido a la economía global. No hay una línea divisoria entre la acción que

¹⁶ NÚÑEZ, Tatiana. (2009, 30 de Abril). No hay consenso sobre el futuro del dólar. LA REPÚBLICA. Disponible en: http://www.larepublica.com.co//archivos/FINANZAS/2009-04-30/no-hay-consenso-sobre-el-futuro-del-dolar_72950.php

restablezca el crecimiento dentro de nuestras fronteras y la acción que lo sostenga hacia afuera. Si la gente de otros países no puede gastar, los mercados se atascan...”¹⁷

En época de crisis, es fundamental para la economía nacional e internacional la inversión financiera para la restitución de la confianza en los mercados financieros, y de esta manera, crear un sistema financiero estable y sostenible que sí refleje adecuadamente los sectores de la industria que representa. Igualmente, la utilización de los recursos financieros disponibles debe ser tan eficiente como sea posible, siendo éste un recurso escaso el cual se debe cuidar.

Así mismo, la apertura económica y la tecnología permiten acercarse a los vecinos de tal forma que se tiene capacidad de intervenir y operar en su economía de la misma manera que ellos intervienen en la economía nacional. En este orden de ideas, la inversión en mercados bursátiles contribuirá al proceso de saneamiento de la economía regional y mundial, al mismo tiempo que genera utilidad y beneficios para la compañía o individuo que se embarque en esta empresa.

Los mercados de renta variable pueden llegar a generar altas rentabilidades, Por ello, las herramientas a usar deben ser presentadas adecuadamente, como una predicción de acuerdo a su nivel de riesgo para poder presentarse como una alternativa real y digna de confianza para el inversionista o el cliente. Siguiendo esa línea de pensamiento,

¹⁷ Fuente: OBAMA, Barack. (2009, 28 de Marzo) Disponible en: <http://www.eltiempo.com/archivo/documento/CMS-4907770>

un cliente que no cuente con un sistema o un instrumento adecuado para tomar una decisión informada, simplemente utilizará su capital en otro tipo de mercado dónde si las tenga, como es el caso de Colombia.

Es por esto que un modelo de inversión que sea basado en un sistema analítico y con opciones claras de inversión, se convertirá en una salida a la desaceleración económica, mientras se determine el alcance y los riesgos que implica sumergirse en el sistema accionario. Esto reflejaría inmediatamente un aumento de confianza y así mismo un aumento en la inversión del capital.

Cabe resaltar que, a mayor rentabilidad entre los instrumentos financieros, mayor es el riesgo que se toma en la inversión, y por tanto, se debe considerar que cada portafolio que se obtenga en el desarrollo del proyecto va a tener una rentabilidad y riesgo específicos y medibles asociados.

En este contexto, un Ingeniero Industrial cumple con las condiciones necesarias para llevar a cabo la determinación de un modelo matemático que genere portafolios de inversión, porque cuenta con el conocimiento acerca del funcionamiento y la dinámica de las finanzas y la economía. Así mismo, cuenta con el conocimiento y herramientas adquiridas en la carrera, particularmente en el área de métodos cuantitativos, para lograr un modelo estocástico que se adapte a la realidad.

5. OBJETIVOS

5.1. Objetivo General

Determinar modelo de inversión para generar portafolios de inversión, basado en el comportamiento presentado por un conjunto de acciones de renta variable en el mercado estadounidense, que maximice la rentabilidad esperada sujeta a la mitigación del riesgo.

5.2. Objetivos Específicos

- Diseñar y construir un modelo matemático para el análisis del comportamiento de valores de acciones de renta variable.
- Desarrollar portafolios basado en los resultados del modelo matemático maximizando la rentabilidad.
- Medir el riesgo de las inversiones en los portafolios y establecer un análisis comparativo con la rentabilidad de cada caso.
- Verificar la rentabilidad del portafolio comparándolo con valores reales del mercado de acciones.

6. MARCO TEÓRICO

Para poder generar un modelo y subsecuentemente un portafolio de inversión con diferentes características de rentabilidad y riesgo, es necesario definir los conceptos básicos financieros relevantes y de esta manera tener claridad sobre el tema de estudio.

Como el tema a desarrollar trata de la inversión de dinero, el elemento más básico de inversión es el título. Es pertinente definirlo, para poder evitar confusiones más adelante.

“Título: (garantías, valores, acciones) garantías de las corporaciones usadas para obtener fondos para hacer frente a sus obligaciones y necesidades financieras.”¹⁸

Los títulos son los elementos básicos de las transacciones financieras y por tanto, es en este pilar en el que se fundamenta el desarrollo de la teoría financiera. Existen diferentes tipos de títulos, cada uno con sus propias reglas para determinar su rentabilidad y riesgo. Debido a que el modelo y el portafolio solamente van a utilizar un tipo de título, éste merece ser definido.

“Título de renta variable: (Acción de renta variable), título, generalmente acciones ordinarias cuyo dividendo o rendimiento depende de que la firma obtenga una ganancia.”¹⁹

Estos títulos comprenden instrumentos financieros como acciones y derivados. Estos últimos comprenden opciones, futuros e intercambios (swaps) ²⁰. Mientras que las acciones preferentes y ordinarias basan su precio directamente sobre el capital de la empresa o compañía, los derivados, como su nombre lo indica, se basan en el valor de otro activo (underlying).²¹

De la misma manera, existen títulos de renta fija donde la firma que emite este tipo de títulos garantiza una rentabilidad fija en un determinado plazo de tiempo, independiente de la rentabilidad obtenida por el emisor.

¹⁸ ROSENBERG, Jerry. Diccionario de inversiones. New Jersey. Wiley & Sons. 1995. P. 325

¹⁹ IBID., 399

²⁰ Nombre que recibe en inglés.

²¹ Nombre que recibe en inglés.

Ahora bien, una vez definido el pilar básico financiero, se debe seguir con los siguientes conceptos que conciernen al cumplimiento del objetivo general. Estos son: portafolio de inversiones y la mitigación del riesgo.

Para portafolio de inversiones:

***“Portafolio:** (cartera de valores), posesión de títulos por un individuo o por una institución. La cartera de valores puede comprender bonos, acciones preferentes y ordinarias de diferentes clases de empresas.”²²*

Con esta definición se infiere que el portafolio expresa un conjunto de títulos. De manera que el valor total de los títulos, la rentabilidad y el riesgo de cada uno de ellos se asocian para presentar un único valor, respectivamente. Más adelante se verá cómo se asocia el valor, la rentabilidad y el riesgo.

De la misma manera, conviene hablar del riesgo, este se define como:

***“Riesgo:** incertidumbre asociada con el valor de fin de periodo de una inversión”²³*

²² IBID., P. 276

²³ GORDON J., Op. Cit., p. 710.

Esto indica que el valor futuro o la rentabilidad de una inversión se presentan como una gama de resultados posibles, estos asociados con una probabilidad de ocurrencia. Esto constituye un entorno de riesgo, y además, las decisiones basadas en ese entorno se llaman decisiones bajo entorno de riesgo²⁴. También, existen diferentes tipos de riesgo, cada uno de estos asociados, no solamente a cada uno de los factores del instrumento, sino al entorno en el que se llevan a cabo las transacciones. Vale la pena resaltar los más importantes:

***“Riesgo Cambiario:** incertidumbre del rendimiento de un activo financiero extranjero debido a la incertidumbre con respecto a la tasa a la que la divisa puede cambiarse a la moneda local del inversionista.”²⁵*

Este tipo de riesgo es particularmente importante a la hora de determinar un portafolio de inversiones procedente de diferentes nacionalidades, también llamado riesgo de divisas. Éste se refiere al cambio de poder adquisitivo de una moneda puede fluctuar, no solamente con el desempeño del país, sino de acuerdo a las leyes de oferta y demanda, cómo es el caso del dólar en el país.

***“Riesgo único:** porción del riesgo total de un valor que no está relacionado con los movimientos de cartera de mercado y, por tanto, puede diversificarse.”²⁶*

²⁴ RODRIGUEZ, Fernando. Título: Construcción de una medida de riesgo para un portafolio en ambiente estocástico. Bogotá, 2005. Trabajo de Pregrado. Pontificia Universidad Javeriana. Facultad de ingeniería. Departamento de Procesos Productivos. P. 8

²⁵ GORDON J., Op. Cit., p. 710

²⁶ IBID., P. 710

Este tipo de riesgo es especial en el sentido que permite mitigar el riesgo del portafolio, diversificando las inversiones en títulos de mayor o menor medida de manera que el riesgo ponderado entre los títulos sea el deseado.

Debido a que el valor futuro de las acciones que se van a estudiar no está determinado, se habla de un ambiente estocástico y por lo tanto es importante entender las herramientas y conceptos que van a ayudar en la generación del modelo.

Para poder cumplir con los objetivos específicos y desarrollar el tema propuesto, es necesario definir qué es ambiente estocástico y de la misma manera haciendo referencia al concepto de riesgo definido anteriormente, es necesario definir también qué es probabilidad. A continuación se encuentran las definiciones de estos conceptos que serán las herramientas fundamentales para el desarrollo del proyecto.

Probabilidad: De acuerdo con Laplace, el concepto de probabilidad puede ser definido como la tasa que existe entre el número de ocurrencias posibles de un evento E llamado N_E y N , el número total de resultados posibles en un experimento aleatorio.

$$P[E] = \frac{N_E}{N}$$

Ecuación 6- 1

De la misma manera, existe una definición de probabilidad como la frecuencia de ocurrencia de un evento E luego de haber realizado “n” veces el experimento, de manera que:

$$P[E] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_E}{n}$$

Ecuación 6- 2

*Entonces, se obtiene que la probabilidad de ocurrencia de un evento es la razón entre el número de casos en que se ha cumplido el evento y el número de ensayos realizados.*²⁷

La probabilidad es una herramienta provechosa, pues determina finalmente, que tan posible será para un título tomar un valor u otro. Aunque este es el principio básico, cabe explicar qué es una variable aleatoria, ya que sobre esta se va a desarrollar el modelo, porque se van a tratar los títulos como variables aleatorias.

Variable Aleatoria: *Es una variable que asume valores aleatorios, definidos según un patrón de distribución, y se define como una función que asigna una probabilidad a cada suceso en el espacio de resultados posibles. Entonces, $P[X = x]$ es la probabilidad que X tome el valor x.*²⁸

²⁷ STARK, Henry y WOODS, John. Probability, Random processes: an Estimation theory for engineers. 2 ed. New Jersey. Prentice-Hall , 1994. P. 3-4

²⁸ RODRIGUEZ, F. Op. Cit., p. 10

Estos conceptos sobre variables aleatorias son de ayuda para desarrollar el trabajo, debido a que las utilidades generadas por los instrumentos financieros, el riesgo y el valor de cada uno, van a ser representados por una variable aleatoria, de tal forma que la probabilidad de cada uno de los estados posibles de cada elemento indica el camino para tomar decisiones más acertadas.

Ahora, como los valores de las acciones pueden tener cambios similares debido a efectos externos, así como también la influencia de un instrumento en otro, es conveniente obtener herramientas que permitan describir, la condicionalidad, la independencia y otros conceptos relacionados.

Probabilidad condicional: Se define como la probabilidad que suceda un evento A dada la ocurrencia de un evento B . Análogamente, la probabilidad que una variable aleatoria X tome un valor dado que la v.a. Y tome un valor y . Matemáticamente se define como el valor de la probabilidad de la ocurrencia conjunta de dos eventos, relativo a la probabilidad de ocurrencia de uno de los eventos de la intersección. Entonces, la probabilidad de A dado que ha ocurrido B se expresa así²⁹:

$$P[A | B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

Ecuación 6- 3

²⁹ ROSS M., Sheldon. Introduction to probability models. 7 ed. , Berkley. Harcourt Academic Press, 2000. P. 7

Independencia: La relación entre 2 o más eventos cuya probabilidad no es afectada debido a el conocimiento de la ocurrencia de otro evento. De manera matemática³⁰:

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$$

Ecuación 6- 4

Para tener un valor de rentabilidad en el futuro, es necesario hacer definir el concepto que haga referencia al valor que se espera que tenga una variable aleatoria, en este caso, el valor de una acción.

Valor esperado: es el promedio ponderado de los valores que puede tomar una variable aleatoria X , de acuerdo con cada una de las probabilidades asociadas a cada uno de los valores del rango de X ; así entonces, se tiene para el caso discreto:³¹

$$E[X] = \sum_{x: P(x) > 0} x \cdot P[X = x]$$

Ecuación 6- 5

Y para el caso continuo:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Ecuación 6- 6

Además cumple con las siguientes propiedades, las cuales son importantes para la determinación del portafolio:

³⁰ STARK, H., Op. Cit., p. 13

³¹ ROSS, S. Op. Cit., P. 37

$$E[a \cdot X + b] = a \cdot E[X] + b$$

Ecuación 6- 7

Donde a y b son constantes.

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

Ecuación 6- 8

Dónde X y Y son variables aleatorias.

Varianza: La varianza informa sobre la dispersión de los valores de una variable aleatoria respecto a su media³². Matemáticamente se define así:

$$VAR[X] = E[(X - E[X])^2]$$

Ecuación 6- 9

Este tipo de conceptos son muy importantes a la hora de medir rentabilidad. El valor esperado de una variable aleatoria, ya sea para medir la rentabilidad o el valor final de un activo financiero, indicará la tendencia central y que tan favorable es la oportunidad generada en ese tipo de activo. Por otra parte, la probabilidad condicional será un indicador del efecto posible que tienen eventos externos al mercado, tales como el comportamiento de índices generales, sobre el comportamiento de los instrumentos financieros. También, cabe hablar sobre la varianza. Éste indicador será de gran ayuda, para saber qué tan preciso es el dato del valor esperado del retorno de una inversión. Todo lo anterior es de vital importancia, ya que un inversionista busca siempre obtener el valor esperado de retorno más alto con el valor mínimo de desviación, para que pueda maximizar su utilidad.

³² IBID., P. 44

A continuación se presenta la definición del valor esperado condicional, que al igual que el valor esperado explicado anteriormente, se trata de la tendencia central de los valores que puede tomar una variable aleatoria, teniendo en cuenta que se conoce o se supone el resultado de otra variable aleatoria. Se verá a continuación la definición de valor esperado condicional.

Valor esperado condicional: *Es el valor esperado de una variable aleatoria, sujeta a un valor presentado por otra variable aleatoria (el cuál puede o no afectar el resultado de la primera). Matemáticamente se define de la siguiente manera:*

Para el caso discreto:

$$E[X | Y = y] = \sum_{x: P(x|y) > 0} x \cdot P[X = x | Y = y]$$

Ecuación 6- 10

Como propiedad importante de la esperanza condicional, también para el caso discreto, vale mencionar que:

$$E[X] = E[E[X | Y]] = \sum E[X | Y = y] \cdot P[Y = y]$$

Ecuación 6- 11

Para todos los valores y que la v.a. Y puede asumir.

“Proceso Estocástico: $\{X(t), t \in T\}$ *es una colección de variables aleatorias, esto es, que para $t \in T$, $X(t)$ es una variable aleatoria. Este*

*índice t generalmente es interpretado como tiempo, y como resultado, $X(t)$ se refiere al estado de un proceso en el momento t .*³³

También cabe resaltar que si T representa un conjunto contable, se habla de un proceso estocástico discreto, de lo contrario, se habla de un proceso estocástico continuo. Esto se cumple aún si T es un conjunto infinito o no.

Es importante mencionar que para el caso de este trabajo, el proceso discreto se va a tomar basado en el tiempo de cierre diario del valor de los instrumentos. De esta manera, el valor de cada título será la variable aleatoria a analizar.

También, se deben mencionar ciertas herramientas importantes que se deben utilizar en el desarrollo del trabajo.

“Cadena de Markov: Considérese un proceso estocástico $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ que tiene un número finito o contable de posibles valores. A menos que sea mencionado, ese conjunto de valores posibles del proceso van a ser denotados con un conjunto de valores enteros no negativos $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Si $X_n = i$, entonces se dice que el proceso está en el estado i en el tiempo n . Se asume que siempre que el proceso esté en el estado i , existe una probabilidad fija P_{ij} que el proceso se encontrará en el estado j en la siguiente transición. Esto se da si se asume que:

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0] = P_{ij}$$

Ecuación 6- 12

³³ IBID., P. 79

Para todos los estado i y j y todos los $n \geq 0$ ”³⁴

Por otra parte, es necesario realizar una medición del riesgo para los títulos de renta variable. Para la medición del riesgo asociado a cada título se va a utilizar el método de Value-at-Risk

“**Value at Risk:** Es una medida estadística del riesgo, que estima la máxima pérdida que se puede experimentar en un portafolio dado un nivel de confianza y un período de tiempo”³⁵

Y se describe de la siguiente manera:

$$VaR = P \cdot Z_{1-\alpha} \cdot Vol(\%) \cdot \sqrt{T}$$

Ecuación 6- 13

Dónde P corresponde al precio del portafolio; $Z_{1-\alpha}$, el valor estadístico correspondiente a una distribución normal con un nivel de confianza de α ; $Vol(\%)$, la volatilidad correspondiente a la variación del precio del título y T el tiempo de tenencia del título.

³⁴ ROSS, S. Op. Cit., P. 163

³⁵ Risk Management.

7. RESTRICCIONES

El principal objetivo de este capítulo, consiste en explicar las restricciones que se hacen sobre y en el sistema. Las restricciones limitan las variables que afectan el sistema, a la vez que lo simplifican. Si bien, este tipo de ejercicio de simplificación debería reducir la fortaleza de los resultados que se obtienen, permite a su vez que se pueda modelar el sistema representándolo con un menor número de variables y condiciones sobre las mismas.

Se resume en 2 áreas principales los ajustes hechos para realizar el modelo. Éstas se exponen a continuación:

7.1. Financieros

Las acciones corresponden a un título de renta variable. Esto indica que no solamente fluctúa el precio mismo del título, sino que entrega dividendos periódicos de magnitud variable dependiendo del rendimiento que tenga la organización en un periodo de tiempo. Sin embargo, para el desarrollo del modelo solamente se tiene en cuenta la variación de precio de cada una de las acciones y se considera que el periodo de tiempo por el cual se compra el título no es lo suficientemente largo para obtener dividendos.

Por otra parte, la reinversión del capital día a día no se contempla. El modelo se preocupa por la rentabilidad total generada desde el día inicial hasta el final. Es decir, el modelo no contempla el valor del dinero

en el tiempo. Además, el modelo determina el número de acciones de cada tipo que se va a comprar y determina a su vez un periodo de tenencia. Una vez que se haya cumplido ese tiempo, todas las acciones serán vendidas colectivamente.

Otras variables financieras como los precios máximos y mínimos del día, y el volumen diario transado no se tendrán en cuenta.

Finalmente, las operaciones en el mercado de acciones tienen costos debido a los impuestos, a las comisiones que se deben pagar al Estado y a los comisionistas de bolsa respectivamente. Éstas no se van a tener en cuenta dentro del modelo. De la misma forma, el efecto de la inflación sobre ambas monedas no es considerado significativo debido a que el periodo de tiempo de tenencia de los papeles no es lo suficientemente largo.

7.2. Matemáticos

Las principales restricciones de este tipo, tienen como objetivo disminuir la cantidad de información y opciones que se tiene a la hora de invertir en un mercado. Por esto, se ha restringido el número de acciones a escoger a 20 corporaciones diferentes, subdivididas en dos sectores. El tiempo máximo permitido de tenencia de los títulos es de 30 días hábiles.

Los datos históricos utilizados corresponden aproximadamente a los precios de compra y venta de los últimos 10 años y correspondientes a aproximadamente a 2600 días. Partiendo de la fecha del 6 de junio de 1999, para los títulos y el dólar.

El tipo de acciones seleccionadas fueron subdivididas en diferentes categorías con el objetivo de reducir la correlación existente en el precio de las acciones, y de la misma manera, se asume que el riesgo y la volatilidad que presenta cada título son independientes de otras acciones.

8. DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO DE INVERSIÓN

El diseño del modelo de inversión tiene 3 etapas diferentes: El planteamiento y manejo estocástico que se le da a los títulos de renta variable, la manera en se va a cuantificar el riesgo para cada acción y finalmente el desarrollo de un programa lineal que integre los resultados del planteamiento estocástico y el riesgo para optimizar la rentabilidad.

Se presenta a continuación el desarrollo de cada uno de los puntos mencionados anteriormente:

8.1. Formulación estocástica

Lo que pretende el modelo es poder dar un valor esperado del precio futuro de cada acción, de manera que se pueda escoger aquellas que presenten un mayor incremento de precio y así obtener la mejor rentabilidad posible.

Para determinar el comportamiento de la tasa de cambio, se va a utilizar el mismo tipo de metodología que se usa para las acciones de renta variable. Se considera que intervienen las mismas variables (Precio de cierre, Precio de Apertura, variación de precio).

Para el desarrollo de la cadena de Markov, es necesario determinar los estados de la misma y determinar las probabilidades de transición entre los estados.

Primero, se seleccionan acciones que tengan datos históricos de más de 10 años, lo cual dio 2637 precios de apertura y cierre de los activos. Para esto se utilizó el método para generar las clases de los histogramas, que determina que debe haber al menos una cantidad de clases proporcional a la raíz del número de datos:

$$K = \sqrt{N}^{36}$$

Ecuación 8-1

³⁶ ROMERO, Rafael, Et al. Métodos estadísticos en ingeniería. 2nda. Edición. Valencia. Editorial Universidad Politécnica de Valencia. P. 49.

Dónde K representa el número de categorías y N el número de datos que se tienen. Por ejemplo, para una muestra de 100 datos, se obtiene que se deben crear 10 clases para obtener un histograma adecuado. A partir de esto, en el caso de este modelo, se cuenta con 2637 datos, y con esto se obtienen 52 estados. Por otra parte, se debe establecer la longitud o tamaño de cada clase, de esta manera se puede contar el número de veces que el precio de una acción ha correspondido a una de las clases. La longitud de está determinado por el rango que hay entre el precio máximo y mínimo entre los precios de apertura y cierre para cada acción:

$$L = \frac{R}{K}^{37}$$

Ecuación 8- 2

Por ejemplo, el precio máximo y mínimo para la acción de Bancolombia corresponde a USD\$42,9 y USD\$1,05 respectivamente. El rango sería entonces la diferencia entre estos dos valores, correspondiente a USD\$41,54. A partir de esto, la longitud será USD\$0.7988, esto respresenta que cada clase tiene un tamaño de USD\$0.7988.

Una vez determinada la longitud de cada estado, se procede a determinar la probabilidad de paso entre cada uno de los estados de la cadena. Para poder hacer esto se contabilizan el número de veces que el precio de apertura de la acción se encuentra dentro de cada uno de los 52 rangos. Definido así:

³⁷ IBID., P.50

$$C_i = \{P_{a,n} : K_0 + (i-1) \cdot L \leq P_{a,n} \leq K_0 + i \cdot L\}^{38}$$

Ecuación 8-3

Esto representa el número de veces que se encuentra el precio de apertura dentro de cada uno de los 52 intervalos definidos, siguiendo el ejemplo de Bancolombia, la primera clase está definida comprendida en los precios USD\$1,05 hasta USD\$1,85. Y revisando los 2637 precios de apertura que se tienen, se contabiliza que hubo 285 veces en que el precio de la acción tuvo un valor dentro de ese rango.

Donde $P_{c,n}$ y $P_{a,n}$ corresponden a los precios de cierre y apertura en el día $\{n : n \in N\}$ respectivamente.

Seguido esto, se busca dentro de los precios de cierre para cada $\{P_{a,n} : C_i \subset P_{a,n}\}$ de la siguiente manera:

$$F_{i,j} = \{P_{a,n}, P_{c,n} : K_0 + (i-1) \cdot L \leq P_{a,n} \leq K_0 + i \cdot L \cap P_{c,n} : K_0 + (j-1) \cdot L \leq P_{c,n} \leq K_0 + j \cdot L\}^{39}$$

Ecuación 8-4

Esto indica que una vez que se ha encontrado un día en que el precio de apertura está dentro de un intervalo, se busca en qué intervalo cerró el precio de la acción. Para la acción de Bancolombia, de todos los días que la acción tuvo su precio de apertura en el primer intervalo (285 veces) el precio de cierre en el segundo

³⁸ Escrito por el autor.

³⁹ IBID.

intervalo fue de 11 veces, este conteo se realiza para cada una de los días de apertura.

Y de esta manera se obtiene la probabilidad de transición entre los estados i y j :

$$p_{i,j} = \frac{F_{i,j}}{C_i} \quad \forall i$$

$$\sum_j F_{i,j} = C_i \quad \forall i \quad 40$$

Ecuación 8- 5

Siguiendo con el ejemplo, la probabilidad de transición de la acción de bancolombia del primer estado al segundo corresponde a

$$p_{1,2} = \frac{11}{285} = 0,039.$$

A partir de cada una de las probabilidades mencionadas anteriormente se procede a construir la matriz M , que contiene todas las probabilidades de transición obtenidas en los pasos anteriores, de la siguiente manera:

$$M = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,51} & p_{1,52} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,51} & p_{2,52} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{51,1} & p_{51,2} & \cdots & p_{51,51} & p_{51,52} \\ p_{52,1} & p_{52,2} & \cdots & p_{52,51} & p_{52,52} \end{pmatrix}$$

Ecuación 8- 6

⁴⁰ IBID.

A partir de esto y con cada $P_{i,j}$ se construye la matriz estocástica M_s para cada uno de los 20 títulos diferentes.

Ahora, para cada una de estas matrices estocásticas, la manera para calcular la probabilidad de transición entre los estados luego de un número determinado de pasos, se lleva a cabo elevando a la potencia el número de pasos.

El valor esperado de cada acción depende tanto del estado donde se encuentre el título, como de la proyección en número de días sobre el cual se estima. Esto se realiza de la siguiente manera:

Como se menciona anteriormente, para obtener la probabilidad de transición luego de d días, es necesario elevar la matriz estocástica M a la d potencia. Para obtener la probabilidad que el sistema esté en un estado específico como resultado de encontrarse en un estado inicial, es necesario multiplicar la matriz resultante mencionada anteriormente por el vector de estado inicial:

$$\bar{q} = \bar{a} \times M^d \quad 41$$

Ecuación 8-7

Si, el estado inicial del sistema es el j -ésimo estado, \bar{a} representa el

$$\text{vector } a_b = \begin{cases} 1 & \text{para } b = j \\ 0 & \text{para } b \neq j \end{cases},$$

⁴¹ Ross, S. Op. Cit., P. 163

$$E[P_{c,n+d}] = \sum_{k=1}^{52} q_k \cdot L \cdot (k - j) \quad 42$$

Ecuación 8- 8

Este valor esperado que se obtiene, es resultado de la probabilidad obtenida luego del proceso estocástico y el número de días adelante sobre el cual se va a medir la rentabilidad.

La rentabilidad estimada se calcula de la siguiente manera:

$$r_d = \frac{E[P_{c,N+d}]}{P_{c,N}}$$

Ecuación 8- 9

8.2. Modelo basado en cadenas de Markov Discretas y Value-at-Risk

Se escoge un modelo basado en una cadena de Markov discreta porque se asume que la variación del precio de un título ocurre en un intervalo fijo de tiempo. Además se asume que el precio de cierre del día únicamente depende del precio de apertura inmediatamente anterior y no depende de los precios anteriores a la apertura. Así mismo, modelar la variación del precio en el transcurso de tiempo y tratar este como un modelo de Markov continuo hace la matemática del modelo intratable e igualmente para poder usar un modelo de esa manera, se requiere que las variables presenten un

⁴² Ecuación adaptada de la definición de valor esperado discreto $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} n \cdot P[X = n]$

comportamiento exponencial. Igualmente, un modelo que solamente comprenda una matemática débil, como un promedio móvil, no presentará resultados fuertes.

Por otra parte, existen diferentes maneras de medir el riesgo de una inversión, que abarcan otros tipos de riesgo, para el desarrollo del modelo, se asume que solamente se tiene el riesgo cambiario y el riesgo propio. Basándose en esto, el VaR es la medición que mejor se ajusta a las condiciones presentadas por los supuestos y restricciones.

8.3. Cuantificación del riesgo

De acuerdo con las restricciones del capítulo 6, la variable de intervención que se va a tener en cuenta para los títulos, va a ser su precio. Para determinar el riesgo, es necesario determinar la volatilidad de los precios, específicamente, la variación del precio de cada título entre la apertura y cierre del mercado, expresado de la siguiente manera:

$$\Delta P_n (\%) = \frac{(P_{c,n} - P_{a,n}) \cdot 100\%}{P_{a,n}}$$

Ecuación 8- 10

Por ejemplo, si el precio de apertura de una acción es de USD\$50 y su precio de cierre es de USD\$52, la variación porcentual será:

$$\Delta P(\%) = \frac{(52 - 50) \cdot 100\%}{50} = \frac{200\%}{50} = 4\%$$

De la misma manera, la volatilidad de una acción está definida como la desviación estándar de su variación porcentual, expresado de otro modo:

$$Vol_s(\%) = \sigma_{P,s}$$

Ecuación 8- 11

La herramienta que se usa para este modelo para la cuantificación del riesgo es el Value-at-Risk⁴³ (VaR), que presenta una forma sencilla y cuantificable del riesgo asociado a la tenencia de un título, en proporción a una probabilidad de confianza, un horizonte de tiempo, la volatilidad del instrumento y el precio de cara del título.

Para este caso en particular,

$$VaR_{s,d,m} = m \times Vol_s(\%) \times P_{c,n} \times Z_{1-\alpha} \times \sqrt{d}$$

Ecuación 8- 12

Donde $Z_{1-\alpha}$ corresponde al número de desviaciones que la variación de una distribución normal del precio no excederá con el $(1-\alpha)\%$ de confianza, en el periodo de 1 día. De la misma manera, el aumento del riesgo a través del tiempo es proporcional a la raíz del número de días. Y por último, el incremento del riesgo debido al número de acciones “m” que se obtienen.

A manera de ejemplo, un título cuyo precio corresponda a USD\$100, una volatilidad del 3.1%, del cual se piensan comprar 2 acciones

⁴³ Valor en Riesgo. Traducción del autor

durante el plazo de de 9 días, tendrá un VaR con un nivel de confianza del 95% correspondiente a:

$$VaR_{s,9,2} = 2 \cdot 100 \cdot 0,031 \cdot \sqrt{9} = 600 \cdot 0,031 = USD\$18.6$$

Quiere decir que se está arriesgando a perderUSD\$18.6 en el plazo de 9 días.

El VaR se calcula para cada una de las acciones y para la tasa de cambio. La manera que se integra el riesgo cambiario y el riesgo único es:

$$VaR_{Tot} = \sum_{s=1}^{20} VaR_{s,d,m} \times (P_{Dolar} + VaR_{Dolar})^{44}$$

Ecuación 8- 13

A manera de ejemplo, un portafolio que conste de 2 títulos cada uno con un riesgo USD\$15 y USD\$18 respectivamente, y por otra parte, el precio del dólar es de COP\$2100 y un riesgo de COP\$20, tendrá un riesgo total de:

$$VaR_{Tot} = (18 + 15) \times (2100 + 20) = 33 \times 2120 = COP\$69960$$

Éste es el riesgo total del portafolio, expresado en pesos en el que se incurre al invertir en el portafolio.

⁴⁴ Escrita por el Autor

8.4. Planteamiento del modelo de optimización

Para el desarrollo del modelo es necesario determinar los parámetros sobre los cuales se va a apoyar. Estos se desarrollan a continuación:

Variables:

t : Número de días que se va a retener el portafolio de acciones.

C_s : Cantidad de acciones del tipo s que se van a comprar.

Parámetros:

$r_{s,t}$: Rentabilidad esperada de la acción s en el transcurso de t días.

Y está determinada por
$$r_{s,t} = \frac{E[Pc_{s,N+t}]}{Pc_{s,N}}$$

$VaR_{s,t}$: Riesgo en pesos de la acción s acumulado en t días.

K : Capital disponible para la inversión en pesos.

w_s : Peso que tiene el volumen de las acciones de tipo s en el portafolio.

$Pc_{s,N}$: Último precio de cierre histórico para la acción s .

Pd_N : Último tasa histórica para el dólar.

R : Riesgo máximo permitido en términos del porcentaje de de la inversión inicial.

Programa Lineal:

$$\max \sum_{s=1}^{20} r_{s,t} \cdot w_s$$

(Busca la rentabilidad

máxima ponderada del
portafolio)

s.a. :

$$w_s = \frac{Pc_{s,N} \cdot Pd_N \cdot C_s}{K}$$

(Peso de acuerdo al volumen
de acciones tipo s
adquiridas)

$$\sum_{s=1}^{20} w_s \leq 1$$

(Evita portafolios cuyo costo
sea superior al capital
disponible)

$$1 \leq t \leq 30$$

(Restringe el número de días
del portafolio)

$$\frac{\sum_{s=1}^{20} VaR_{s,t} \times (Pd_N + VaR_{Dolar})}{K} \leq R$$

(Riesgo máximo permitido
para el portafolio)

$$t, C_s \geq 0$$

t, C_s son Variables Enteras

El modelo fue implementado en la hoja de cálculo de Microsoft Excel®. Sin embargo, debido a la magnitud del modelo, fue

necesario iterar el número de días manualmente para reducir los tiempos de simulación, de la misma manera que el número de acciones se flexibilizó y no obligó al modelo a usar números enteros.

8.5. Alternativa de planteamiento para la mitigación del riesgo con función multiobjetivo.

Para la implementación del modelo de multiobjetivo, es necesario maximizar el la rentabilidad mientras que se minimiza el riesgo, la manera de hacer esto es asignar un valor negativo a el riesgo total del portafolio y agregarlo a la función objetivo. De esta manera la rentabilidad total se verá castigada por el incremento del riesgo.

Variables:

t : Número de días que se va retener el portafolio de acciones.

C_s : Cantidad de acciones del tipo s que se van a comprar.

Parámetros:

$r_{s,t}$: Rentabilidad esperada de la acción s en el transcurso de t días.

$$r_{s,t} = \frac{E[PC_{s,N+t}]}{PC_{s,N}}$$

Y está determinada por

$VaR_{s,t}$: Riesgo en pesos de la acción s acumulado en t días.

K : Capital disponible para la inversión en pesos.

w_s : Peso que tiene el volumen de las acciones de tipo s en el portafolio.

$Pc_{s,N}$: Último precio de cierre histórico para la acción s.

Pd_N : Último tasa histórica para el dólar.

R : Riesgo máximo permitido en términos del porcentaje de de la inversión inicial.

Programa Lineal:

$$\max \sum_{s=1}^{20} r_{s,t} \cdot w_s - \frac{VaR_{total}}{K}$$
 (Busca la rentabilidad máxima ponderada del portafolio a la vez que minimiza el riesgo)

s.a. :

$$w_s = \frac{Pc_{s,N} \cdot Pd_N \cdot C_s}{K}$$
 (Peso de acuerdo al volumen de acciones tipo s adquiridas)

$$\sum_{s=1}^{20} w_s \leq 1$$
 (Evita portafolios cuyo costo sea superior al capital disponible)

$1 \leq t \leq 30$ (Restringe el número de días del portafolio)

$$\frac{\sum_{s=1}^{20} VaR_{s,t} \times (Pd_N + VaR_{Dolar})}{K} \leq R$$
 (Riesgo máximo permitido para el portafolio)

$$t, C_s \geq 0$$

t, C_s son Variables Enteras

9. GENERACIÓN DE PORTAFOLIOS

Una vez desarrollado el modelo, se buscó la información histórica necesaria de los títulos accionarios, mencionada anteriormente, de 20 empresas. Se obtuvieron datos de 10 empresas de la categoría Financiera y 10 empresas de la categoría Tecnológica.

A partir de estos datos históricos que comprenden precios de cierre y apertura, se obtienen, los respectivos precios de cierre, volatilidad y riesgo para cada grupo de acciones y la tasa de cambio del dólar correspondientes a la fecha del 6 de junio de 2009:

Título	Precio Inicial (\$USD)	Volatilidad	VaR(1 día, 95%)
STD	\$ 6.96	3.357%	\$ 1.54
C	\$ 2.97	2.981%	\$ 0.58
BAC	\$ 13.20	2.832%	\$ 2.46
CIB	\$ 30.50	3.148%	\$ 6.32
WFC	\$ 24.26	2.462%	\$ 3.93
MS	\$ 28.51	3.079%	\$ 5.78
DB	\$ 61.00	1.667%	\$ 6.69
JPM	\$ 34.11	2.607%	\$ 5.85
DFG	\$ 19.43	2.662%	\$ 3.40
CB	\$ 39.88	1.929%	\$ 5.06
AAPL	\$ 142.43	2.766%	\$ 25.92
HPQ	\$ 38.65	2.343%	\$ 5.96
CSCO	\$ 18.65	2.602%	\$ 3.19
INTC	\$ 16.55	2.413%	\$ 2.63
CTS	\$ 6.55	3.525%	\$ 1.52
AMD	\$ 3.87	3.764%	\$ 0.96
SNE	\$ 25.86	1.455%	\$ 2.48
JAVA	\$ 9.22	3.292%	\$ 2.00
MSFT	\$ 23.77	1.886%	\$ 2.95
DRIV	\$ 36.32	4.356%	\$ 10.41
Dólar (\$COP)	\$ 2,158.67	0.671%	\$ 95.32

Tabla 1. Precio de cierre, volatilidad y riesgo de cada acción

De los valores históricos se también se construyeron las matrices estocásticas de 52x52, que por motivos de espacio, se encuentran en los anexos. Para la generación de portafolios, el número máximo de días de compra es 30 y el capital inicial que corresponde a \$10.000.000 (COP). Estos son parámetros fijos que se mantienen en el modelo para obtener los portafolios. En las acciones cuya cantidad sea 0 en el portafolio, se omiten de los resultados presentados. El número de acciones como se mencionó anteriormente entregado por el modelo no son números enteros, de manera que fueron aproximadas al entero más cercano.

A partir de este momento se listan los resultados obtenidos por el modelo descrito anteriormente.

9.1. Portafolio de máxima rentabilidad

Se generaron portafolios para 7 escenarios diferentes de riesgo: sin límite de riesgo, VaR correspondiente al 5%, 10%, 15%, 20%, 25% y 30% del capital invertido, cada uno evaluado en el plazo de 1 a 30 días, para un total de 280 portafolios. El portafolio de máxima rentabilidad fue:

Tiempo	30 Días	Título	AMD
Capital	\$ 10,000,000.00	Precio	3.87
Precio Inicial Dolar	\$ 2,158.67	Cantidad	1197
Riesgo Dólar	\$ 130.52	Peso en Portafolio	100%
Rentabilidad	24.84%	Riesgo en Pesos	\$ 3,596,541
Riesgo	35.97%		

Tabla 2. Portafolio de máxima rentabilidad sin restricción de riesgo.

Que corresponde a la compra de 1197 acciones de la empresa Advanced Micro Devices Inc. A un precio inicial de \$3,87 USD, con un riesgo asociado de 35.97% del portafolio, se obtiene una rentabilidad correspondiente del 24,84% en 30 días.

9.2. Portafolio de rentabilidad máxima con límite de riesgo

Para el caso de la rentabilidad máxima con límite de riesgo, se obtuvieron 6 portafolios con diferentes rentabilidades. Como se mencionó anteriormente, los diferentes niveles de riesgo considerados presentaron valores diferentes de rentabilidad, número de días y por supuesto, riesgo. Los resultados se listan a continuación:

- VaR máximo de 30%

Tiempo	30 Días	Título	AMD	SNE
Capital	\$ 10,000,000.00	Precio	3.87	25.86
Precio Inicial Dolar	\$ 2,158.67	Cantidad	873	48
Riesgo Dólar	\$ 130.52	Peso	72.96%	27.04%
Rentabilidad	22.47%	Riesgo Pesos	\$ 2,623,977	\$ 376,023
Riesgo	30%			

Tabla 3. Portafolio con VaR del 30%

- VaR máximo de 25%

Tiempo	30 Días	Título	AMD	SNE
Capital	\$ 10,000,000.00	Precio	3.87	25.86
Precio Inicial Dolar	\$ 2,158.67	Cantidad	602	89
Riesgo Dólar	\$ 130.52	Peso	50.29%	49.71%
Rentabilidad	20.48%	Riesgo Pesos	\$ 1,808,808	\$ 691,192
Riesgo	25%			

Tabla 4. Portafolio con VaR del 25%

- VaR Máximo de 20%

Tiempo	29 Días	Título	AMD	SNE
Capital	\$ 10,000,000.00	Precio	3.87	25.86
Precio Inicial Dolar	\$ 2,158.67	Cantidad	350	127
Riesgo Dólar	\$ 128.33	Peso	29.27%	70.73%
Rentabilidad	18.06%	Riesgo Pesos	\$ 1,033,879	\$ 966,121
Riesgo	20%			

Tabla 5. Portafolio con VaR del 20%

- VaR Máximo de 15%

Tiempo	30 Días	Título	AMD	SNE
Capital	\$ 10,000,000.00	Precio	3.87	25.86
Precio Inicial Dolar	\$ 2,158.67	Cantidad	59	170
Riesgo Dólar	\$ 130.52	Peso	4.96%	95.04%
Rentabilidad	16.50%	Riesgo Pesos	\$ 178,470	\$ 1,321,530
Riesgo	15%			

Tabla 6. Portafolio con VaR del 15%

- VaR Máximo de 10%

Tiempo	16 Días	Título	SNE
Capital	\$ 10,000,000.00	Precio	25.86
Precio Inicial Dolar	\$ 2,158.67	Cantidad	179
Riesgo Dólar	\$ 95.32	Peso	99.98%
Rentabilidad	7.73%	Riesgo Pesos	\$ 999,642
Riesgo	10%		

Tabla 7. Portafolio con VaR del 10%

- VaR Máximo de 5%

Tiempo	2 Días	Título	WFC	SNE
Capital	\$ 10,000,000.00	Precio	24.26	25.86
Precio Inicial Dolar	\$ 2,158.67	Cantidad	125	61
Riesgo Dólar	\$ 33.70	Peso	65.67%	34.33%
Rentabilidad	2.72%	Riesgo Pesos	\$ 381,961	\$ 118,039
Riesgo	5%			

Tabla 8. Portafolio con VaR del 5%

10. RIESGO Y RENTABILIDAD

Como resultado de la optimización de la rentabilidad, se denota una relación directa entre el nivel de riesgo que está dispuesto a correr el comprador de los títulos y la rentabilidad que espera obtener. Para ver más claramente esta relación, se pueden comparar los valores de rentabilidad y

riesgo, y el perfil de riesgo que se obtiene con los portafolios obtenidos con el modelo.

10.1. Riesgo único

Debido a la volatilidad de las acciones, se incurre en un riesgo al comprarlas. La variabilidad cuantificada permite saber el riesgo y calcular un retorno sobre la inversión hecha. La relación que existe entre las dos se presenta de manera gráfica para los diferentes niveles de riesgo existentes. Cabe resaltar que los niveles de riesgo y rentabilidad varían además con el tiempo, motivo por el cual, portafolios que tienen el mismo nivel de riesgo, tienen diferentes duraciones y rentabilidades.

- Sin Límite de Riesgo

En este gráfico, sin una restricción para el riesgo, la rentabilidad incrementa a una tasa cercana del 60% del riesgo

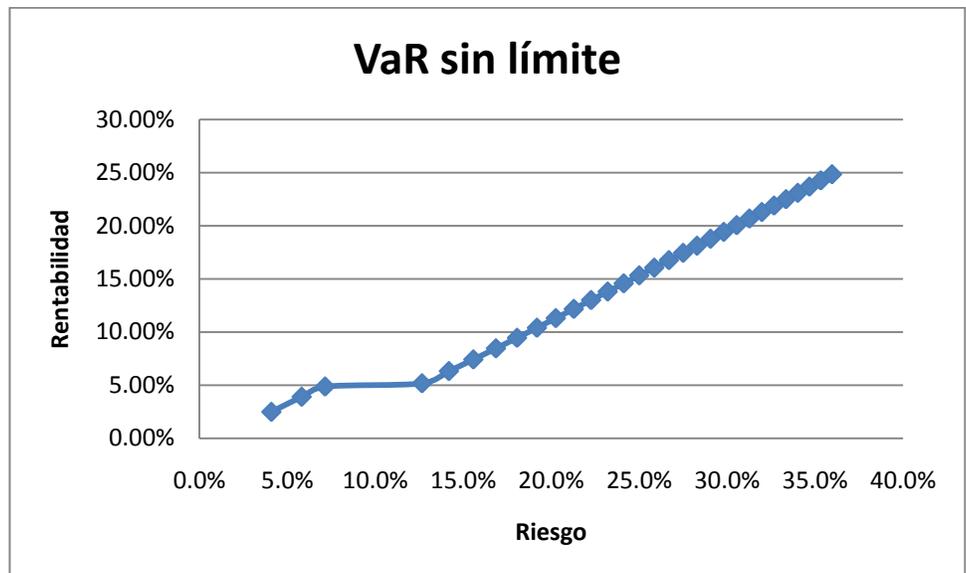


Figura 2. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo sin restricción de riesgo

Figura 9.1: Relación entre riesgo y rentabilidad para un portafolio sin límite de riesgo.

- VaR máximo de 30%

Con la limitación del riesgo hasta el 30%, se ve aprecia el mismo incremento lineal, hasta llegar a su tope de riesgo, punto a partir del cual la rentabilidad esperada incrementa solamente a el paso de los días.

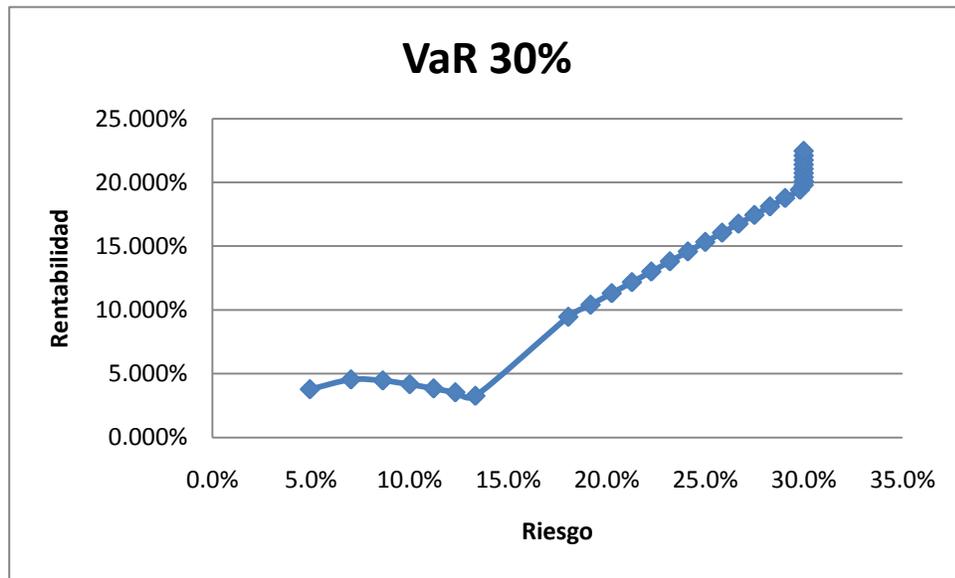


Figura 3. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo, con restricción de riesgo al 30%

- VaR máximo de 25%

Los efectos de mitigar el riesgo al 25% del capital son los mismos observados cuando se limita al 30%, única diferencia, es que

aumenta el número de días en los cuales el riesgo llega a su máximo.

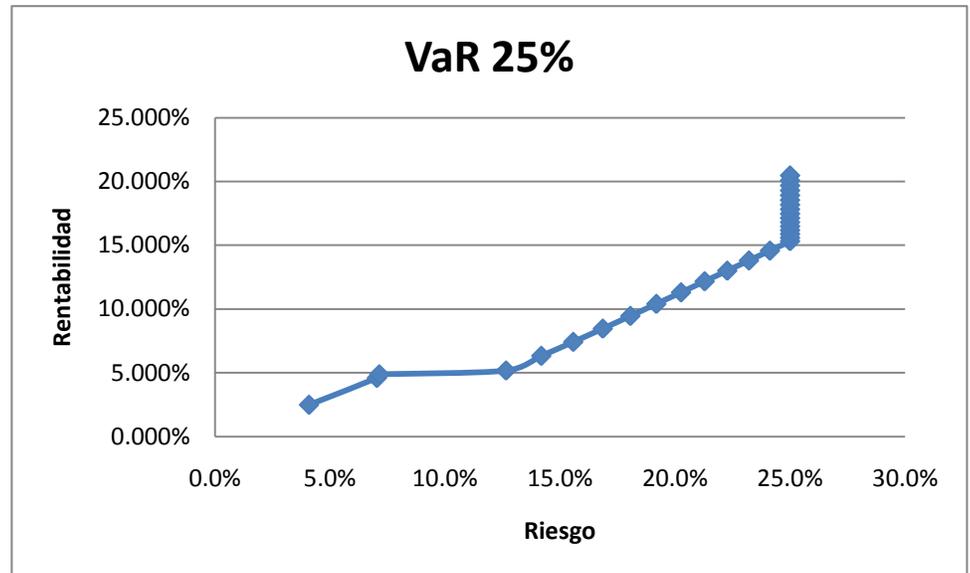


Figura 4. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo, con restricción de riesgo al 25%

- VaR Máximo de 20%

Igual que los casos anteriores, una tendencia lineal, hasta llegar al máximo de riesgo.

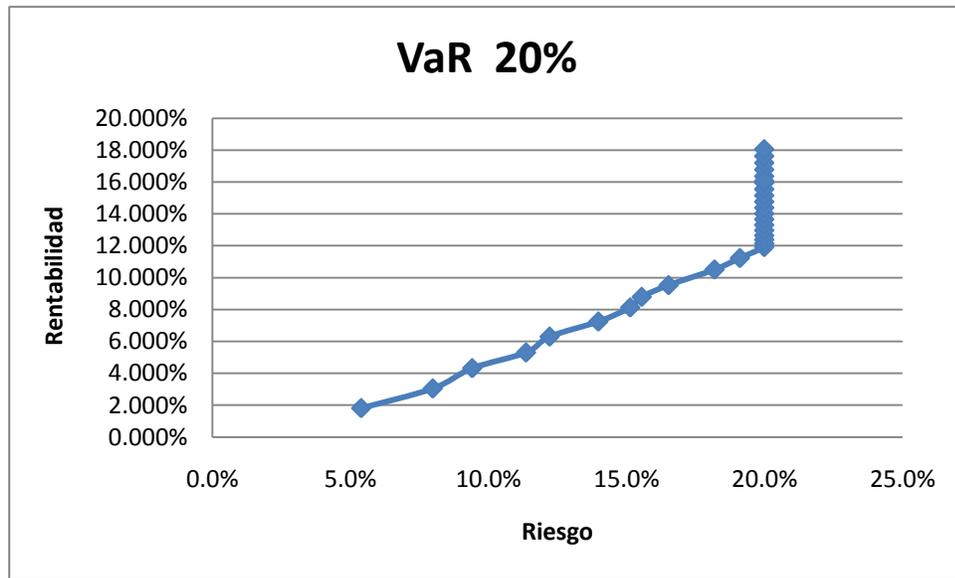


Figura 5. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo, con restricción de riesgo al 20%

- VaR Máximo de 15%

Igual que los casos anteriores, una tendencia lineal, hasta llegar al máximo de riesgo.

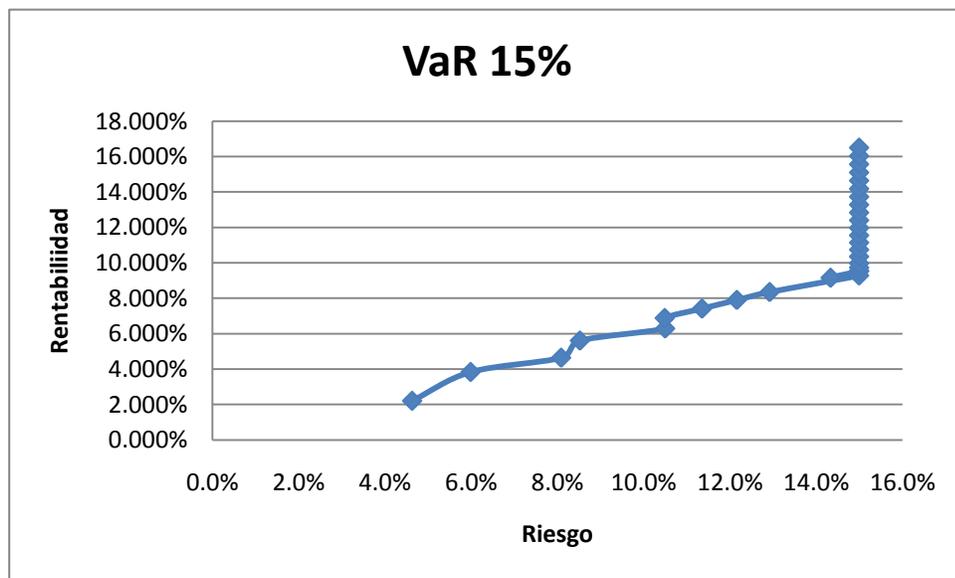


Figura 6. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo, con restricción de riesgo al 15%

- VaR Máximo de 10%

Para este caso, una vez que llega a la rentabilidad máxima, el modelo se ve obligado a usar acciones cuya rentabilidad no es positiva, con el objetivo de mantener bajo el nivel de riesgo.

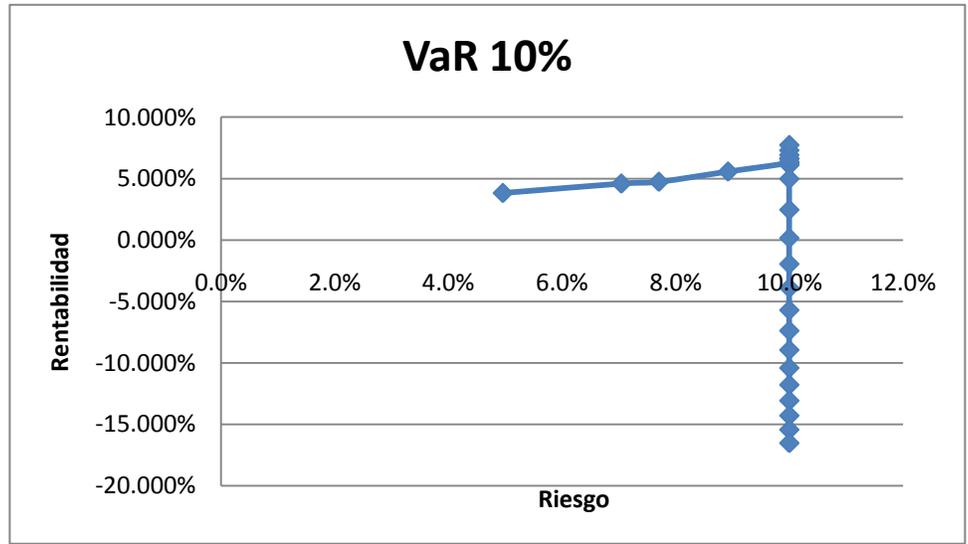


Figura 7. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo, con restricción de riesgo al 10%

- VaR Máximo de 5%

Al igual que el caso anterior, es necesario comprar títulos cuya rentabilidad es negativa para poder mantener el nivel de riesgo en el 5%.

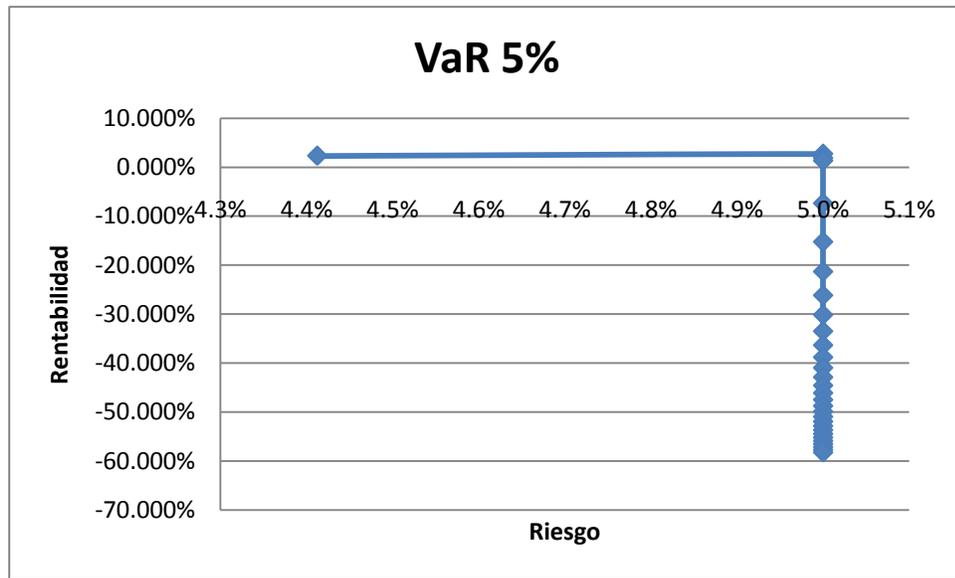


Figura 8. Comportamiento de la rentabilidad Vs. Riesgo, con restricción de riesgo al 5%

10.2. Perfil de riesgo

Observando los gráficos de rentabilidad en el punto anterior, particularmente el caso sin límite de riesgo, se encuentra que el poseedor del portafolio debe arriesgar un mayor porcentaje de su capital que la rentabilidad esperada del portafolio. En promedio, se espera recibir solamente el 60% del valor arriesgado en el portafolio.

Para otros portafolios, esta proporción de rentabilidad/riesgo, no es muy diferente. Para los casos de VaR máximo de 30%, 25%, 20% y 15%, se obtiene que la proporción promedio es de 59,81%, 63,7%, 65,23%, 71,2% respectivamente.

Para los casos, de 10% y 5%, donde se presenta rentabilidades máximas de magnitud negativa, los datos se omiten para el perfil de riesgo, dado que ningún inversionista busca perder plata directamente. Teniendo esto en cuenta, las proporciones promedio son 42,7% y 59,4% para los portafolios de 5% y 10%.

11.COMPARACIÓN DE PORTAFOLIO DE INVERSIÓN

Para comparar los valores adecuadamente del portafolio, fue necesario calcular las rentabilidades ajustadas a pesos de cada uno de los diferentes portafolios de rentabilidad máxima del modelo.

11.1. Validación del modelo de inversión con valores futuros reales del mercado

A continuación se tiene la tabla de rentabilidad para los portafolios evaluados con los valores reales del mercado.

En cada tabla se muestra la rentabilidad asociada a cada título. Seguido de esto, se tiene la rentabilidad ponderada, que se obtiene de la rentabilidad de cada título asociada a su peso en el portafolio. También se muestra la rentabilidad del dólar para cada el número de días del portafolio, y finalmente la rentabilidad real en pesos como resultado real del portafolio

La rentabilidad de cada caso se lista a continuación:

- Sin Límite de Riesgo

VaR sin Límite	Resultado real del portafolio	
	AMD	
Rentabilidad	-7.24%	
Rentabilidad Ponderada	-7.24%	
Rentabilidad del Dólar	-6.31%	
Rentabilidad Ajustada a Pesos	-13.08%	

Tabla 9. Resultado real del portafolio sin restricción de riesgo

Acá se tiene

- VaR máximo de 30%

VaR 30%	Resultado real del portafolio	
	AMD	SNE
Rentabilidad	-7.24%	10.40%
Rentabilidad Ponderada	-2.47%	
Rentabilidad del Dólar	-6.31%	
Rentabilidad Ajustada a Pesos	-8.62%	

Tabla 10. Resultado real del portafolio con restricción de riesgo del 30%

- VaR máximo de 25%

VaR 25%	Resultado real del portafolio	
	AMD	SNE
Rentabilidad	-7.24%	10.40%
Rentabilidad Ponderada	1.53%	
Rentabilidad del Dólar	-6.31%	
Rentabilidad Ajustada a Pesos	-4.87%	

Tabla 11. Resultado real del portafolio con restricción de riesgo del 25%

- VaR Máximo de 20%

VaR 20%	Resultado real del portafolio	
	AMD	SNE
Rentabilidad	-7.24%	9.44%
Rentabilidad Ponderada	4.56%	
Rentabilidad del Dólar	-7.49%	
Rentabilidad Ajustada a Pesos	-3.27%	

Tabla 12. Resultado real del portafolio con restricción de riesgo del 20%

- VaR Máximo de 15%

VaR 15%	Resultado real del portafolio	
	AMD	SNE
Rentabilidad	-7.24%	10.40%
Rentabilidad Ponderada	9.53%	
Rentabilidad del Dólar	-6.31%	
Rentabilidad Ajustada a Pesos	2.62%	

Tabla 13. Resultado real del portafolio con restricción de riesgo del 15%

- VaR Máximo de 10%

VaR 10%	Resultado real del portafolio	
	SNE	
Rentabilidad	-2.24%	
Rentabilidad Ponderada	-2.24%	
Rentabilidad del Dólar	-7.98%	
Rentabilidad Ajustada a Pesos	-10.05%	

Tabla 14. Resultado real del portafolio con restricción de riesgo del 10%

- VaR Máximo de 5%

VaR 5%	Resultado real del portafolio	
	WFC	SNE
Rentabilidad	-4.86%	-2.59%
Rentabilidad Ponderada	-4.08%	
Rentabilidad del Dólar	-2.18%	
Rentabilidad Ajustada a Pesos	-6.17%	

Tabla 15. Resultado real del portafolio con restricción de riesgo del 5%

Para todos los resultados anteriores, cabe notar que solamente el portafolio de VaR del 15% dio una rentabilidad positiva. Aunque otros portafolios hayan obtenido rentabilidades positivas, estas son afectadas por la tasa de cambio en los días respectivos. También, las pérdidas dejadas por los portafolios sin límite de riesgo hasta el 15% no sobrepasaron el porcentaje de capital máximo estimado. Solamente para los casos del 5% y 10%, el nivel de pérdidas sobrepasó el nivel estimado de riesgo para esos portafolios particulares.

12. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

12.1. Portafolios de máxima rentabilidad

En primer lugar, se discutirán los portafolios de rentabilidad máxima obtenidos por el modelo. La rentabilidad esperada de cada uno de los portafolios disminuye a medida que se reduce el riesgo máximo

permitido, o puesto de otra manera, a mayor libertad de riesgo mayor la rentabilidad esperada. Incluso, gráficamente se puede ver esta relación:

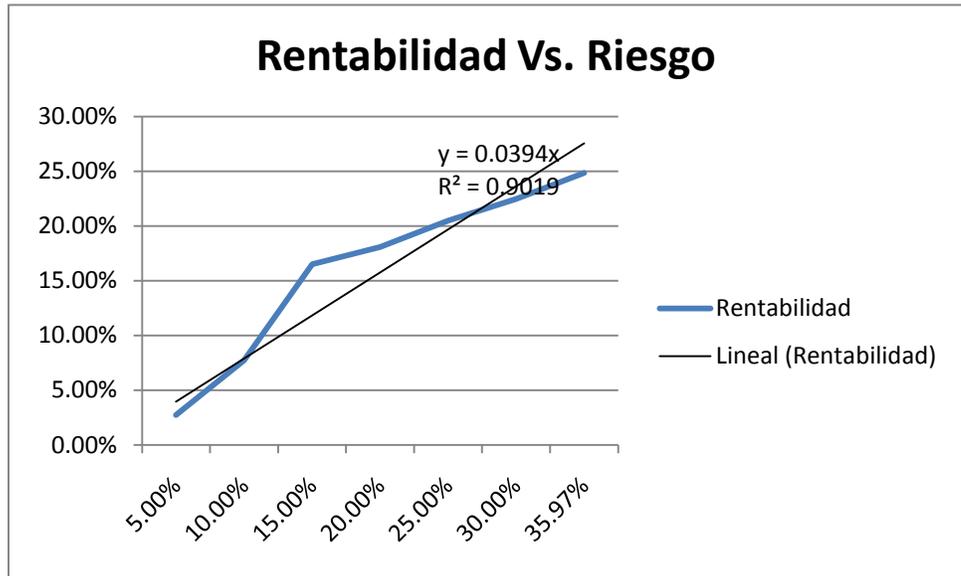


Tabla 16. Relación entre riesgo y rentabilidad

Como se infiere de las ecuaciones del modelo, se espera que el riesgo y la rentabilidad esperada aumenten con el número de días transcurridos, por eso se obtiene que las rentabilidades máximas en los últimos días del plazo de venta. La excepción la hacen los límites de 10% y 5% que tienen 16 y 2 días únicamente. Esto sucede porque el nivel de riesgo aumenta no solo con la volatilidad del título, sino en proporción a la raíz del tiempo transcurrido.

Por otra parte, los resultados que arroja el modelo son aproximaciones a la rentabilidad máxima esperada. Esto sucede porque el número de acciones de cada tipo que se deben comprar no

corresponden a números enteros, y por esto se entiende que el número de acciones que se puede comprar en el mercado es un número entero.

Cabe notar también, que dentro de los resultados del modelo, siempre se usa todo el capital. Es la proporción o peso que tiene cada acción y su rentabilidad específica la que determina la rentabilidad total del portafolio. No la cantidad de capital que se invierte.

12.2. Riesgo y Rentabilidad

La información que se obtuvieron de cada uno de los 280 portafolios óptimos permitió entender la relación y comportamiento de la rentabilidad y el riesgo en el transcurso de los días, así como la relación entre el riesgo y la rentabilidad.

Ya se estableció que existe un crecimiento proporcional al número de días que se demora en vender el portafolio. Para el caso de la relación entre el riesgo y la rentabilidad, existe principalmente una proporción lineal promedio del 60,57%, esto es, una tasa que por cada peso que se arriesga, se espera ganar 60.57 centavos. Bajo esta luz, se infiere que el perfil de riesgo para un inversionista debe ser favorable al riesgo si se quiere usar el modelo para obtener sus portafolios de inversión. También cabe mencionar que las opciones de inversión disponibles en el mercado para un inversionista abarcan desde ningún riesgo, como lo son los bonos emitidos por Estados y cuentas bancarias que otorgan rendimientos, hasta inversiones sin ningún tipo de garantía como es el mercado accionario.

Por otra parte, fue posible notar que no se puede mitigar el riesgo a niveles muy bajos a medida que avanzan los días. Para los portafolios de VaR del 10% y 5% con el número de títulos disponibles, los resultados óptimos de rentabilidad fueron negativos. Esto se debe que las acciones que cumplían las condiciones de riesgo tenían rentabilidades esperadas por debajo de cero.

12.3. Validez del Modelo

En el capítulo 10 se realizó la comparación de las rentabilidades de cada uno de los portafolios de rentabilidad máxima, en cada uno de los niveles de riesgo evaluados. Los resultados reales (si se hubiese invertido en esas acciones obtenidas por el modelo, usando los valores de los siguientes 30 días hábiles luego del 30 de junio de 2009) permitieron ver la precisión del modelo para escoger los títulos a comprar. Esto deja ver que el modelo es un modelo probabilístico cuya precisión es susceptible a variaciones atípicas, como hubo acciones que presentaron volatilidad por fuera de sus rangos normales, comparadas con las contempladas al inicio del desarrollo del modelo.

Por otra parte, el modelo si fue adecuado en determinar que el valor de dinero que se perdió en el portafolio estuvo dentro de los rangos de riesgo máximo del modelo. Con la excepción de las restricciones de bajo riesgo, que obtuvieron rentabilidades menores debido al riesgo cambiario, mas no al riesgo único.

13. CONCLUSIONES

- Para el desarrollo e implementación del modelo, fue de suma importancia contar con un mercado de valores cuya información histórica es de fácil acceso. Esto permitió escoger y determinar los estados del sistema para cada acción.
- El uso de valores históricos para obtener las frecuencias de paso entre estados, y determinar de los estados mismos, es importante y acertada. Sin embargo, la información de volatilidad de los títulos en comparación a los datos reales fue diferente, debido a altas volatilidades atípicas presentadas en ese periodo de tiempo.
- Determinar las variables que afectan los precios de los títulos, en gran medida simplifica el modelo. Las variables más importantes son la volatilidad, el precio, los dividendos y la correlación entre las variables de cada acción. Reducir el número de variables, tiene un efecto negativo en la fortaleza de los resultados y sobre todo en uno que trata de medir el mercado de acciones.
- La volatilidad de la tasa cambiaria, afecta en gran medida la rentabilidad de las inversiones en otras monedas y es por esto que el Banco de la República toma medidas cada vez que se presentan tendencias fuertes

de subida y bajada. También, es importante recalcar la importancia de tener en cuenta la tasa cambiaria de cualquier operación bancaria que se realice.

- El modelo de optimización, se basa en un programa lineal. Sin embargo la relación entre variables, como lo es el riesgo y el tiempo, y la rentabilidad esperada y el tiempo, no se manifiestan de manera lineal. Modelar el problema como un programa lineal y utilizar una herramienta lo suficientemente flexible para optimizar el sistema bajo esas condiciones de no-linealidad, fue la solución que permitió encontrar los portafolios óptimos que se usaron en el desarrollo del modelo.
- El tiempo utilizado por el computador aumenta proporcionalmente al número de parámetros que se usen y el número de restricciones. En este caso fue necesario encontrar portafolios óptimos iterando el parámetro de días manualmente. De lo contrario, el tiempo requerido para encontrar un portafolio óptimo bajo una restricción de riesgo aumentaba a 6 horas. Además, las restricciones del tipo de variable, en este caso entera, también aumentaban el tiempo de solución considerablemente.
- El modelo utiliza las acciones que mejor rentabilidad tengan para darles peso en el portafolio. Cuando se limita el riesgo que puede tener un portafolio, el modelo diversifica el riesgo utilizando títulos que no tengan rentabilidades tan altas, pero que si tienen un menor riesgo. Es por esto que los portafolios se concentraron en 3 acciones principalmente.
- El riesgo y la rentabilidad también están relacionadas proporcionalmente. Es fácil entender que la volatilidad le otorga al título la posibilidad de cambiar de estados más fácilmente, y en contraparte, le aumenta el riesgo que el precio de la acción baje. En este caso, esta

relación del 60% , es decir, que por cada peso que se arriesga, se espera ganar 60 centavos. Sin embargo, cabe notar que esta proporción no solamente la dicta el modelo, sino también las acciones disponibles para ser compradas.

- Limitar el riesgo es una práctica saludable para cualquier inversionista. El nivel de riesgo es lo que determina la confianza del consumidor en los mercados y lo que permite las personas inviertan su dinero en mercados y oportunidades de negocios. Para este modelo, la limitación del riesgo conlleva a la reducción de la utilidad, y, el modelo si presenta la mejor opción de inversión para las condiciones dadas y el número de acciones disponibles.
- Los portafolios obtenidos por el modelo son óptimos bajo las condiciones mencionadas. La precisión del los portafolios en el aspecto real no se presentó debido a la volatilidad no anticipada de los títulos que entregaban información al modelo. La precisión del modelo tuvo un error medio del 21,47%.
- De los portafolios generados con restricción de riesgo, ninguno reportó pérdidas en la rentabilidad por encima de la restricción de cada portafolio, esto nos indica que el modelo funciona en medida que no pierde un monto mayor al que el inversionista está dispuesto a perder.

14. RECOMENDACIONES

- Para estudios posteriores se recomienda documentarse adecuadamente acerca de otros trabajos y libros de finanzas. Existe una gran cantidad de libros dedicados a la cuantificación del riesgo, rentabilidad y volatilidad en ambientes estocásticos, que pueden dar una luz acerca de

problemas y soluciones que se pueden encontrar a la hora de desarrollar modelos.

- Si existe una necesidad o deseo de mejorar el modelo, se recomienda aumentar el número de acciones disponibles, reducir el error en la predicción de la volatilidad de los títulos y la tasa cambiaria. Además, se puede incluir otro tipo de variables como el arbitraje del mercado, el movimiento estocástico del precio durante la apertura y cierre del mercado. Por otra parte, se debe considerar el consumo de recursos y tiempo que implica estas recomendaciones.
- Finalmente, la recomendación de simular y comparar los modelos que se desarrollen en condiciones reales antes de aventurarse a hacer inversiones.

15. BIBLIOGRAFÍA

- Banco de la República. Series Estadísticas. Disponible en: http://www.banrep.gov.co/estad/dsbb/sfin_003.xls y <http://www.banrep.gov.co/opmonet/bases/tes.xls>
- Banco de la República. Series Estadísticas. Disponible en: http://www.banrep.gov.co/estad/ctasfinancieras/SALDOS/41_06.xls
- BEST, Philip. Implementing Value at Risk. 2da edición. Chichester, Inglaterra. Editorial John Wiley. 1999.
- BLANCHARD, OLIVER (2009,1 de Enero). Lo que se debe hacer para salir de la crisis en el 2009. EL TIEMPO.
- BODIE, Zvie.(1995, mayo-junio). On the risk of stocks in the long run. Financial Analysts Journal. Páginas 18-22. Vol. 51No. 3. Editorial CFA Institute.

- BOOKSTABBER, Daniel. Título: Using Markov Decision Processes to Solve a Portfolio Allocation problem. Providence, 2005. Trabajo de Pregrado. Universidad de Brown. Fuente:
<http://www.cs.brown.edu/research/pubs/theses/ugrad/2005/dbooksta.pdf>
- CHARNES, John. Financial modeling with crystal ball and Excel. 2da Edición. Hoboken New Jersey. Editorial Wiley. 2007.
- DIETEL, Harvey y DIETEL, Paul. C++: Cómo Programar. 6 ed., México. Pearson Educación. 2009.
- FOCARDI, Sergio y FABOZZI, Frank. The mathematics of financial modeling and investment management. 1era Edición. Hoboken, New Jersey. Editorial Wiley. 2004.
- GLASSERMAN, Paul. Montecarlo Methods in financial engineering. New York. Editorial Springer. 2003
- GORDON J. Alexander, et al. Fundamentos de Inversiones: Teoría y Práctica. 3era ed. México. Pearson Educación. 2003.
- JORION, Philippe. Financial Risk Manager Handbook. 4ta edición. 2007. Wiley
- LIEBERMAN, Gerald y HILLIER, Frederick. Introducción a la investigación de operaciones. 6 ed. México D.F., McGraw-Hill. 1997.
- MAMON, Rogerman y ELLIOTT, Robert. Hidden Markov models in finance. 1era Edición. New York. Editorial Springer. 2007.
- MILLS, Terrence C., Forecasting Financial Markets. Northampton. Edward Elgar Publishing. 2002.
- NÚÑEZ, Tatiana. (2009, 30 de Abril). No hay consenso sobre el futuro del dólar. LA REPÚBLICA. Disponible en:
http://www.larepublica.com.co/archivos/FINANZAS/2009-04-30/no-hay-consenso-sobre-el-futuro-del-dolar_72950.php
- OBAMA, Barack. (2009, 28 de Marzo) Disponible en:
<http://www.eltiempo.com/archivo/documento/CMS-4907770>

- Portafolio. Economía. Disponible en:
<http://www.eltiempo.com/archivo/documento/MAM-3162646>
- REVISTA SEMANA. Cómo invertir su dinero en 2009. Edición 1395. 25 Enero de 2009.
- RODRIGUEZ, Fernando. Título: Construcción de una medida de riesgo para un portafolio en ambiente estocástico. Bogotá, 2005. Trabajo de Pregrado. Pontificia Universidad Javeriana. Facultad de ingeniería. Departamento de Procesos Productivos.
- ROSENBERG, Jerry. Diccionario de inversiones. New Jersey. Wiley & Sons. 1995.
- ROSS M., Sheldon. Introduction to probability models. 7 ed. , Berkley. Harcourt Academic Press, 2000.
- RUIZ, José Armando. Título: Valoración de un tipo particular de opción financiera que contiene dos particulares procesos estocásticos. Bogotá, 2003. Trabajo de pregrado. Pontificia Universidad Javeriana. Facultad de ingeniería. Departamento de Procesos Productivos.
- STARK, Henry y WOODS, John. Probability, Random processes: an Estimation theory for engineers. 2 ed. New Jersey. Prentice-Hall , 1994.
- TAMAYO, Mario. El proceso de la investigación Científica. 4ta edición. Mexico. Editorial Limusa. 2004.
- ZENIOS, A. Stavros. Financial Optimization. 2006. Cambridge University Press
- WATSON, Joel. Strategy: an introduction to game theory. 2ed., Nueva York. Norton, 2008.

16. ANEXOS

16.1. Matrices de transición

Cada matriz de transición tiene en su esquina superior izquierda el nombre de la acción al cual pertenece y representa. Para el caso de este ejemplo, la matriz corresponde al los precios del dólar.

En las 2 primeras columnas se encuentran el rango de precios para el estado que se tiene enfrente. Esto quiere decir que si el precio de una acción o título se encuentra dentro de ese rango, el título se encuentra en el estado correspondiente, siguiendo con el ejemplo, si el precio del dólar se encuentra en el estado 1 quiere decir que su precio se encuentra entre \$1345.65 y \$1376.86 pesos.

Los valores en la tabla entre las columnas y filas numeradas del 1-52 corresponden a la probabilidad de transición del un estado al otro. Por ejemplo en la matriz correspondiente al dólar, la probabilidad de hacer una transición del estado 4 al 6 es de 0.3. Esto quiere decir que la probabilidad que el precio del dólar pase del rango de \$1439.29 - \$1470.51 al rango de \$1501.72 - \$1532.94 es de 0.3.

Se presenta a continuación las matrices de transición de las 20 diferentes acciones que se utilizaron para el desarrollo del modelo, se debe aclarar que el precio de todas las acciones está en dólares y únicamente la del dólar se encuentra en pesos colombianos:

16.2. Valores de rentabilidad y riesgo de portafolios óptimos

Días	Riesgo VaR 30%	Rentabilidad
1	5.0%	3.771%
2	7.0%	4.538%
3	8.7%	4.457%
4	10.0%	4.161%
5	11.2%	3.834%
6	12.3%	3.527%
7	13.3%	3.252%
8	18.1%	9.451%
9	19.2%	10.399%
10	20.3%	11.304%
11	21.3%	12.171%
12	22.3%	13.004%
13	23.2%	13.805%
14	24.1%	14.578%
15	25.0%	15.325%
16	25.9%	16.051%
17	26.7%	16.756%
18	27.5%	17.443%
19	28.3%	18.114%
20	29.1%	18.771%
21	29.8%	19.416%
22	30.0%	19.796%
23	30.0%	20.097%
24	30.0%	20.408%
25	30.0%	20.730%
26	30.0%	21.061%
27	30.0%	21.401%
28	30.0%	21.749%
29	30.0%	22.105%
30	30.0%	22.468%

1	4.1%	2.483%
2	7.0%	4.589%
3	7.1%	4.867%
4	12.7%	5.169%
5	14.2%	6.320%
6	15.6%	7.416%
7	16.9%	8.458%
8	18.1%	9.451%
9	19.2%	10.399%
10	20.3%	11.304%
11	21.3%	12.171%
12	22.3%	13.004%
13	23.2%	13.805%
14	24.1%	14.578%
15	25.0%	15.322%
16	25.0%	15.591%
17	25.0%	15.885%
18	25.0%	16.182%
19	25.0%	16.490%
20	25.0%	16.808%
21	25.0%	17.137%
22	25.0%	17.476%
23	25.0%	17.824%
24	25.0%	18.182%
25	25.0%	18.547%
26	25.0%	18.921%
27	25.0%	19.301%
28	25.0%	19.688%
29	25.0%	20.081%
30	25.0%	20.479%

Días	Riesgo VaR 20%	Rentabilidad
1	5.4%	1.817%
2	8.0%	3.050%
3	9.4%	4.323%
4	11.4%	5.306%
5	12.2%	6.305%
6	14.0%	7.249%
7	15.1%	8.132%
8	15.6%	8.794%
9	16.5%	9.529%
10	18.2%	10.511%
11	19.1%	11.229%
12	20.0%	11.917%
13	20.0%	12.139%
14	20.0%	12.384%
15	20.0%	12.647%
16	20.0%	12.974%
17	20.0%	13.312%
18	20.0%	13.661%
19	20.0%	14.020%
20	20.0%	14.389%
21	20.0%	14.768%
22	20.0%	15.156%
23	20.0%	15.552%
24	20.0%	15.955%
25	20.0%	16.364%
26	20.0%	16.780%
27	20.0%	17.201%
28	20.0%	17.627%
29	20.0%	18.057%
30	20.0%	16.065%

Días	Riesgo VaR 15%	Rentabilidad
1	4.6%	2.206%
2	6.0%	3.833%
3	8.1%	4.641%
4	8.5%	5.606%
5	10.5%	6.291%
6	10.5%	6.880%
7	11.4%	7.415%
8	12.2%	7.901%
9	12.9%	8.347%
10	15.0%	9.282%
11	14.3%	9.154%
12	15.0%	9.524%
13	15.0%	9.542%
14	15.0%	9.726%
15	15.0%	9.973%
16	15.0%	10.350%
17	15.0%	10.739%
18	15.0%	11.139%
19	15.0%	11.550%
20	15.0%	11.971%
21	15.0%	12.399%
22	15.0%	12.836%
23	15.0%	13.279%
24	15.0%	13.728%
25	15.0%	14.182%
26	15.0%	14.640%
27	15.0%	15.101%
28	15.0%	15.566%
29	15.0%	16.032%
30	15.0%	16.501%

Días	Riesgo Var 10%	Rentabilidad
1	5.0%	3.821%
2	7.0%	4.589%
3	7.7%	4.734%
4	8.9%	5.564%
5	10.0%	6.287%
6	10.0%	6.644%
7	10.0%	6.336%
8	10.0%	6.170%
9	10.0%	6.107%
10	10.0%	6.098%
11	10.0%	6.172%
12	10.0%	6.350%
13	10.0%	6.602%
14	10.0%	6.920%
15	10.0%	7.299%
16	10.0%	7.726%
17	10.0%	4.972%
18	10.0%	2.456%
19	10.0%	0.156%
20	10.0%	-1.958%
21	10.0%	-3.907%
22	10.0%	-5.713%
23	10.0%	-7.391%
24	10.0%	-8.955%
25	10.0%	-10.419%
26	10.0%	-11.791%
27	10.0%	-13.081%
28	10.0%	-14.297%
29	10.0%	-15.445%
30	10.0%	-16.532%

Días	Riesgo VaR 5%	Rentabilidad
1	4.4%	2.320%
2	5.0%	2.721%
3	5.0%	1.873%
4	5.0%	1.318%
5	5.0%	-7.383%
6	5.0%	-15.261%
7	5.0%	-21.333%
8	5.0%	-26.185%
9	5.0%	-30.170%
10	5.0%	-33.512%
11	5.0%	-36.364%
12	5.0%	-38.831%
13	5.0%	-40.991%
14	5.0%	-42.900%
15	5.0%	-44.602%
16	5.0%	-46.131%
17	5.0%	-47.514%
18	5.0%	-48.772%
19	5.0%	-49.922%
20	5.0%	-50.979%
21	5.0%	-51.954%
22	5.0%	-52.856%
23	5.0%	-53.695%
24	5.0%	-54.478%
25	5.0%	-55.209%
26	5.0%	-55.895%
27	5.0%	-56.541%
28	5.0%	-57.148%
29	5.0%	-57.723%
30	5.0%	-58.266%

Días	Riesgo sin Límite	Rentabilidad
1	4.1%	2.48%
2	5.8%	3.90%
3	7.1%	4.87%
4	12.7%	5.17%
5	14.2%	6.32%
6	15.6%	7.42%
7	16.9%	8.46%
8	18.1%	9.45%
9	19.2%	10.40%
10	20.3%	11.30%
11	21.3%	12.17%
12	22.3%	13.00%
13	23.2%	13.80%
14	24.1%	14.58%
15	25.0%	15.33%
16	25.9%	16.05%
17	26.7%	16.76%
18	27.5%	17.44%
19	28.3%	18.11%
20	29.1%	18.77%
21	29.8%	19.42%
22	30.5%	20.05%
23	31.3%	20.67%
24	32.0%	21.29%
25	32.7%	21.89%
26	33.4%	22.50%
27	34.0%	23.09%
28	34.7%	23.68%
29	35.3%	24.26%
30	36.0%	24.84%

16.3. Comportamiento del precio de las acciones

Para el sector financiero, listadas por nombre, ticker⁴⁵ de bolsa y una breve descripción, se trabajaron las siguientes empresas:

⁴⁵ Ticker: Nombre abreviado que se le da a las acciones de una compañía. Traducción del autor.

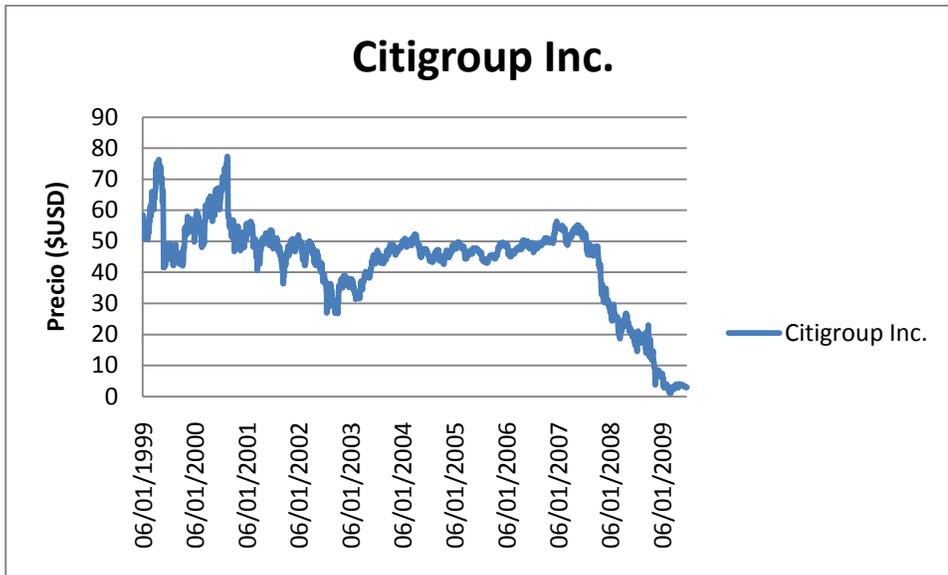
- Banco Sandander (STD)

Es un banco de origen español, que tiene sucursales en Europa, Norteamérica y Suramérica. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



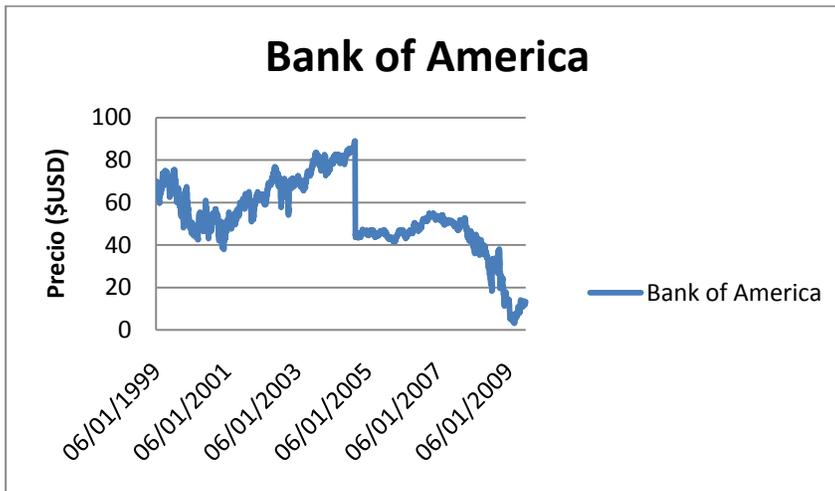
- CitiGroup Corp. (C)

Es una entidad financiera de origen estadounidense que presta diversos servicios financieros a corporaciones y personas. Tiene operación global. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



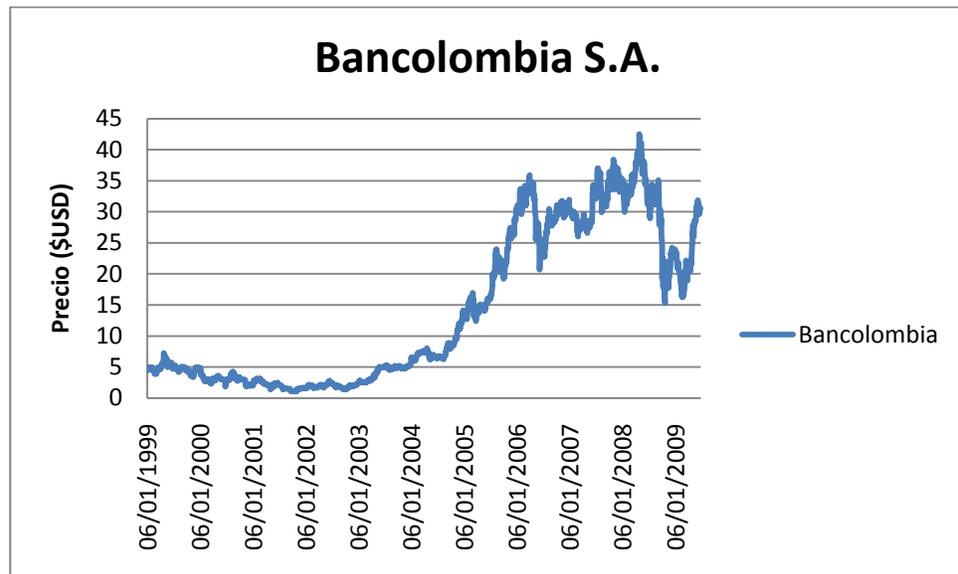
- Bank Of America Corp. (BAC)

Es un banco de origen estadounidense, con operaciones en mercados internacionales y domésticos. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



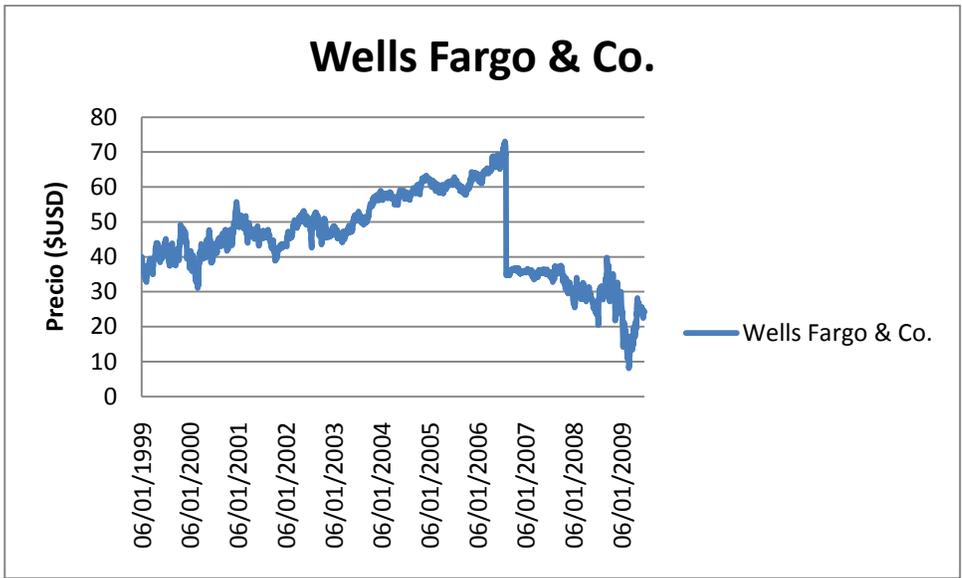
- Bancolombia S.A. (CIB)

Es un banco de origen colombiano, con operaciones en Suramérica, Centroamérica y Europa. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



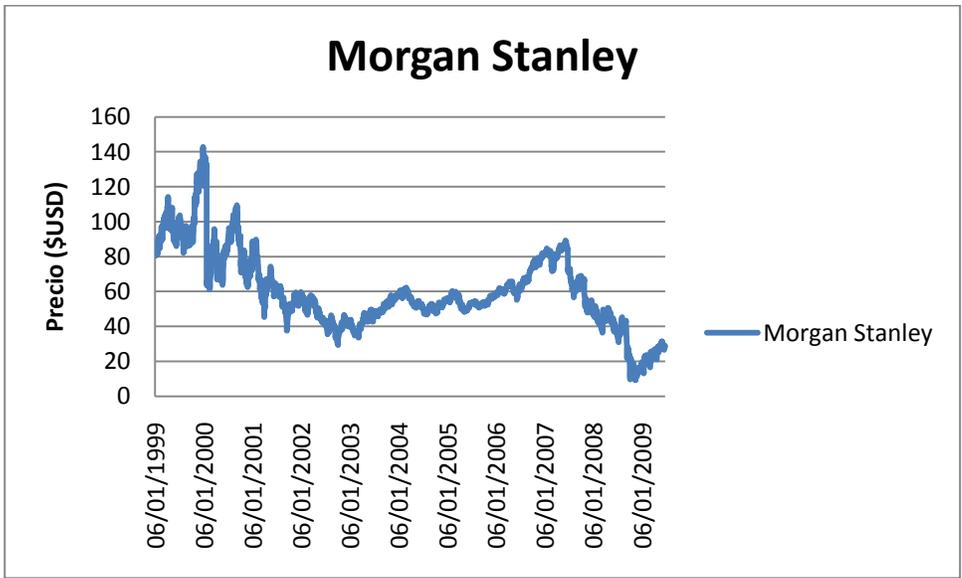
- Wells Fargo & Co. (WFC)

Es un banco estadounidense, mayormente dedicado a la banca personal, con operaciones locales. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



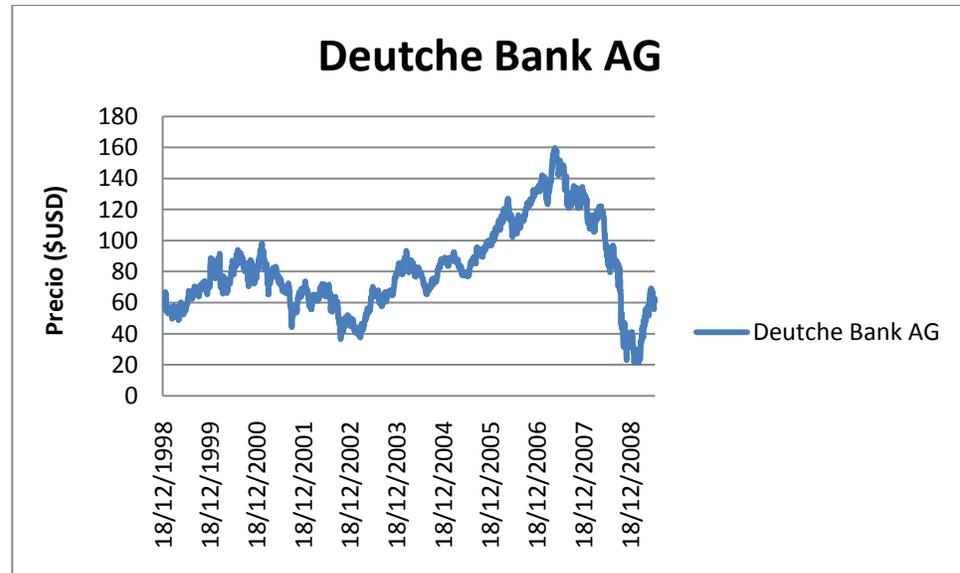
- Morgan Stanley (MS)

Es una empresa localizada en USA, de servicios financieros integrados, como el manejo financiero corporativo, así como la banca personal. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



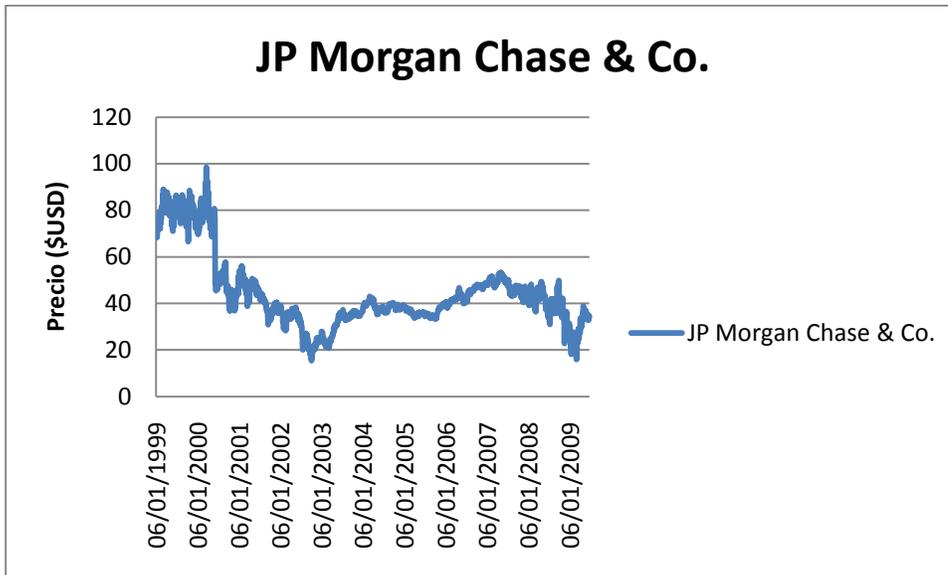
- Deutsche Bank AG (DB)

Es un banco de servicios financieros alemán, de operación global, para clientes corporativos o personales. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



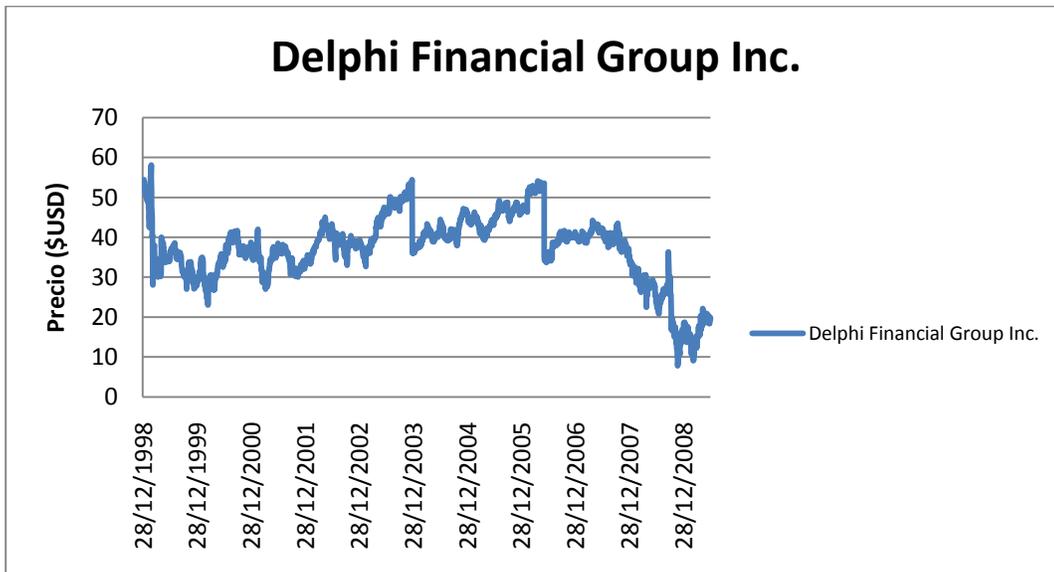
- JP Morgan Chase & Co. (JPM)

Es una entidad financiera de origen estadounidense dedicada a los servicios de inversión financiera y crédito. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



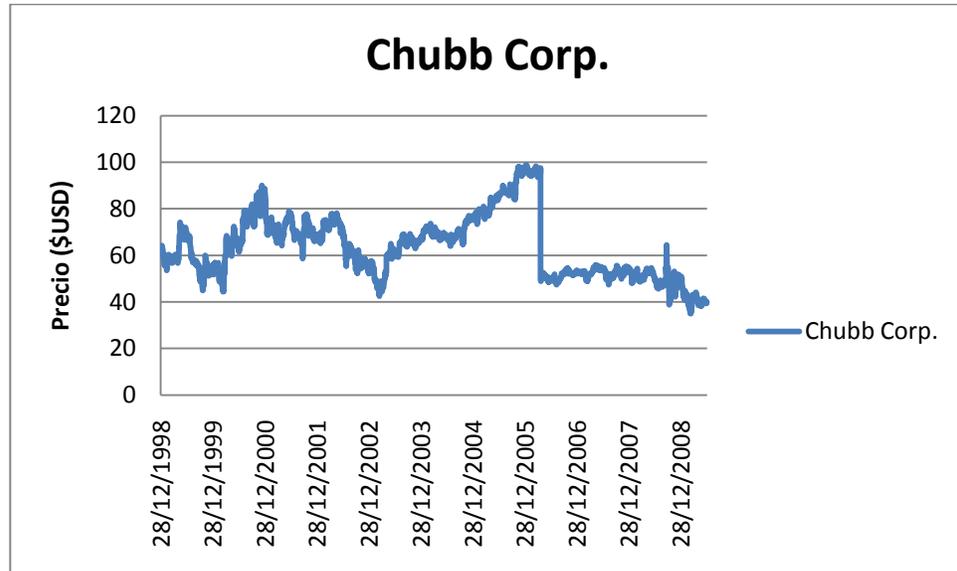
- Delphi Financial Group Inc.(DFG)

Es una aseguradora estadounidense que presta un portafolio de servicios de seguros con operación local. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



- Chubb Corporation (CB)

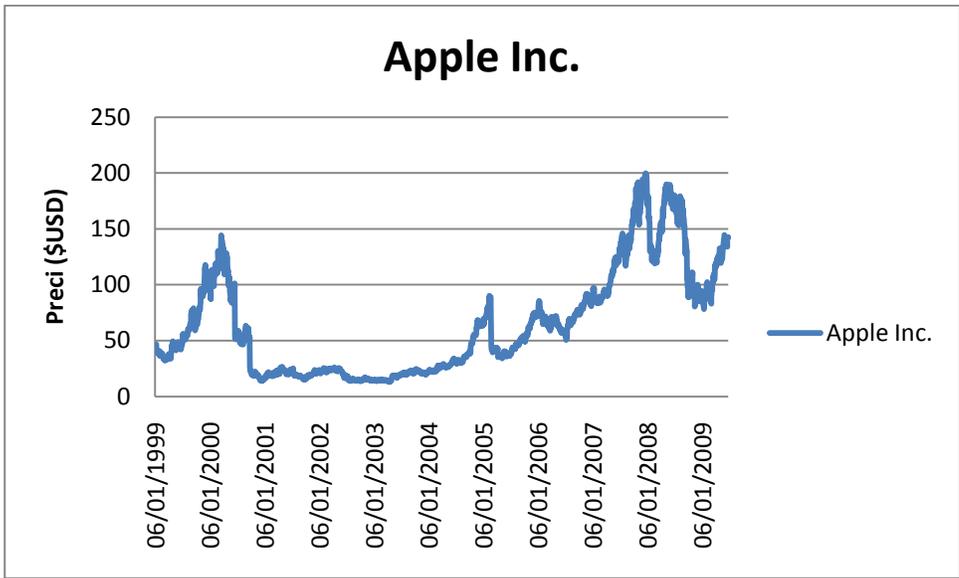
Es una aseguradora estadounidense que presta un portafolio de servicios de seguros con operación global. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



Para el sector tecnológico:

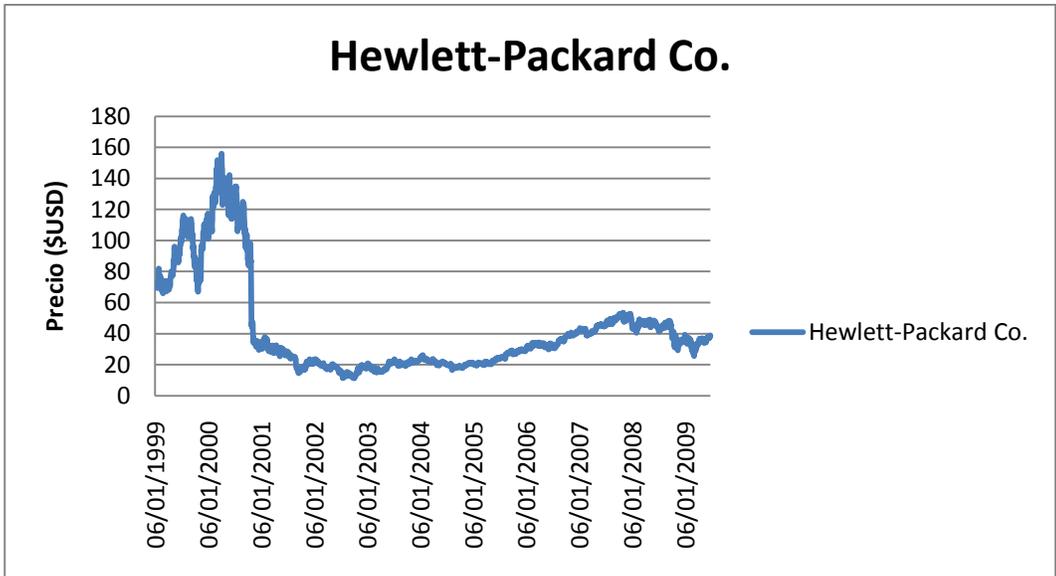
- Apple Inc. (AAPL)

Una compañía dedicada a la manufactura, diseño y desarrollo de computadores, y otros aparatos electrónicos, incluyendo su software. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



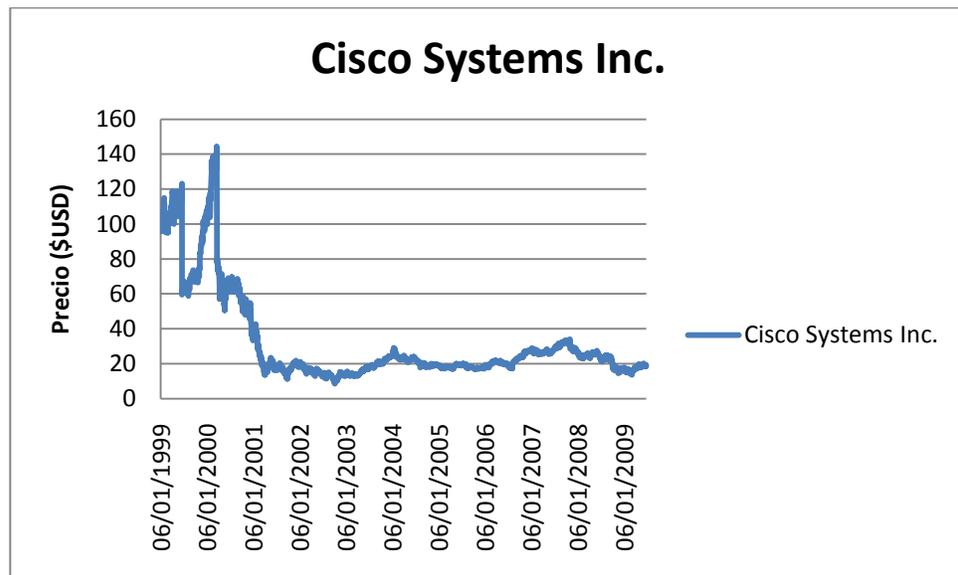
- Hewlett-Packard Co. (HPQ)

Una compañía dedicada a la manufactura, diseño y desarrollo de computadores, y otros aparatos electrónicos, incluyendo su software. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



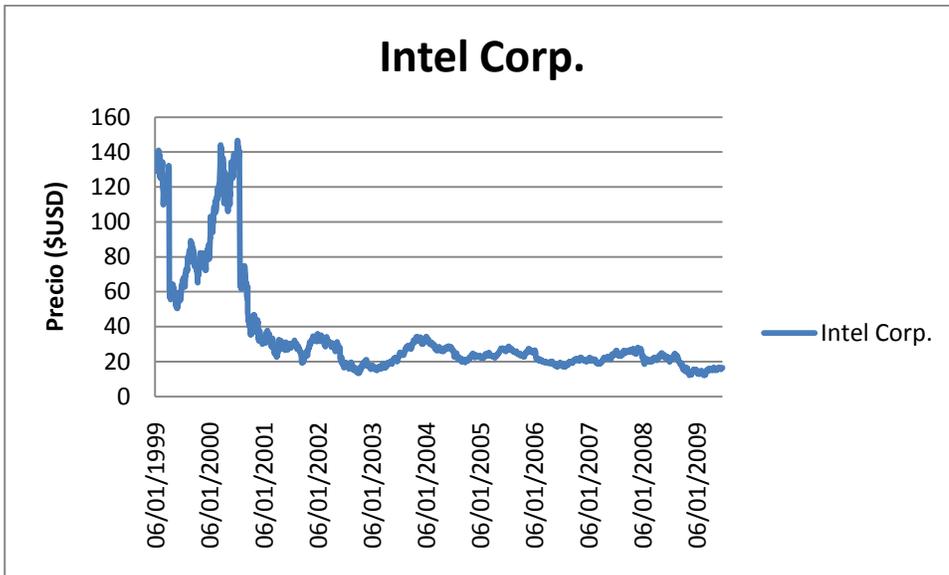
- Cisco Systems Inc (CSCO)

Compañía que desarrolla e implementa hardware, software y aplicaciones basadas en tecnologías de redes. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



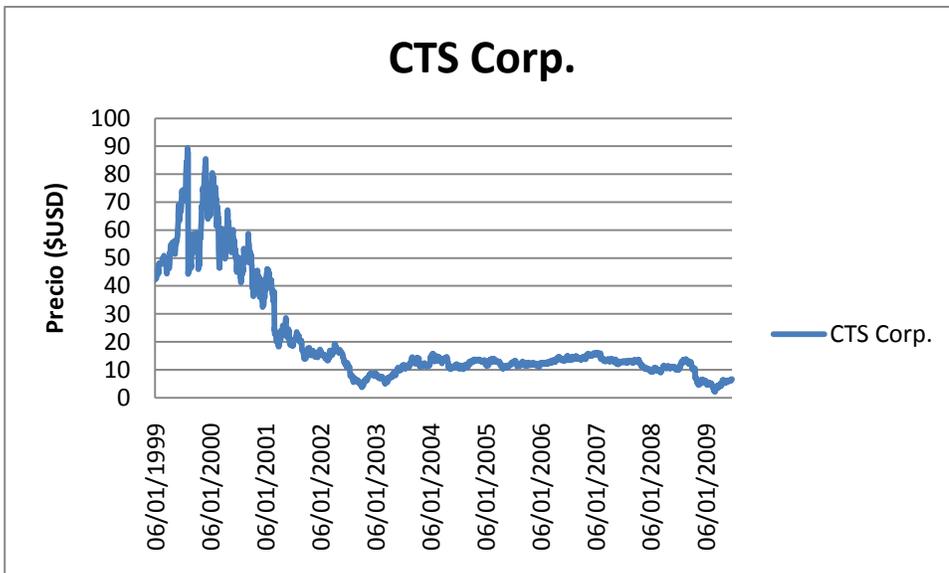
- Intel Corp (INTC)

Empresa dedicada al desarrollo y manufactura de circuitos integrados y procesadores. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



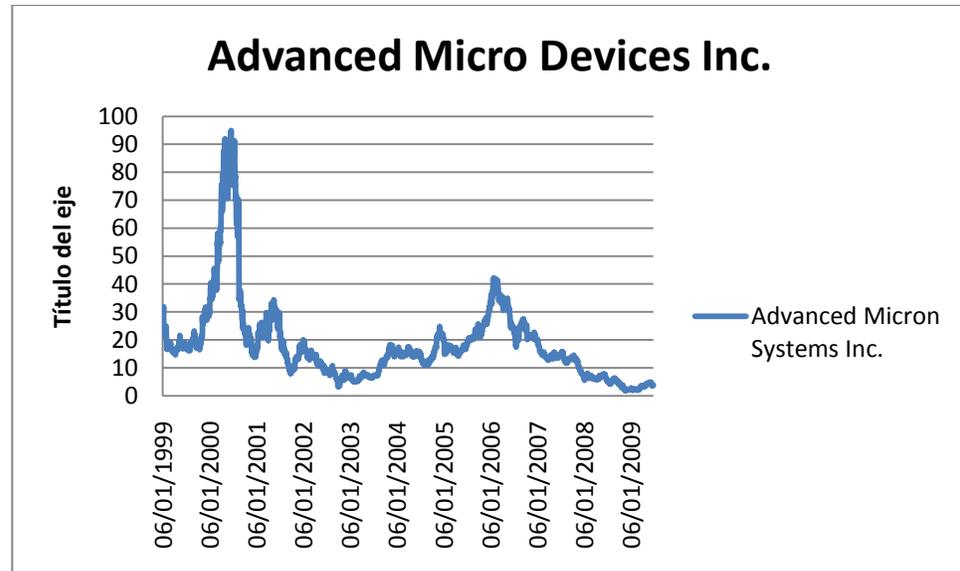
- CTS Corp. (CTS)

Es una empresa cuya actividad principal es el desarrollo de circuitos electrónicos y sensores. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



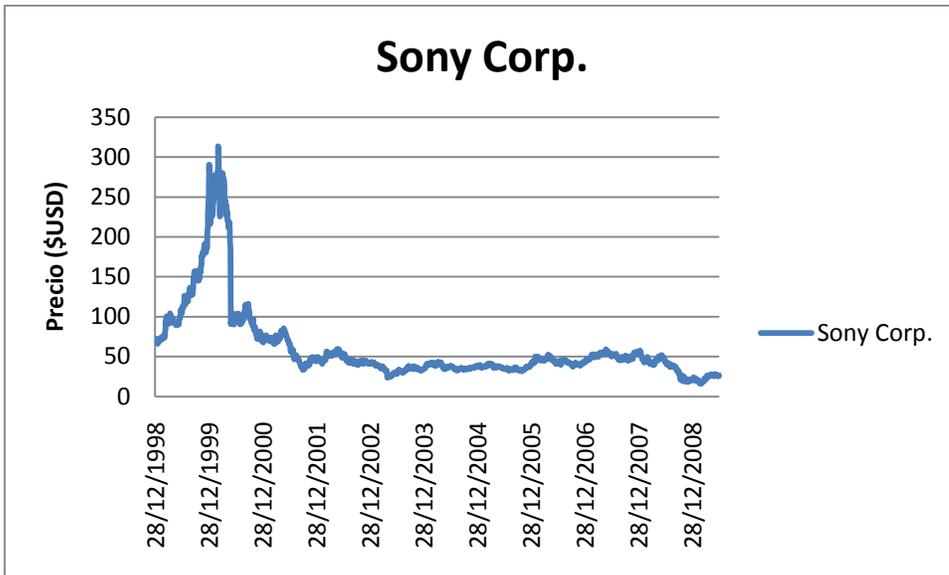
- Advanced Micro Devices (AMD)

Empresa dedicada al desarrollo y manufactura de circuitos integrados y procesadores. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



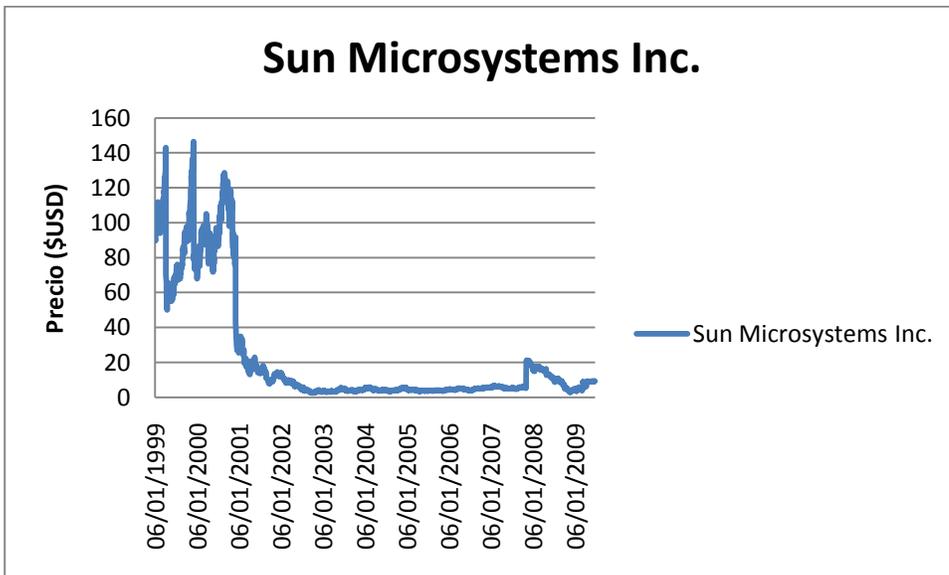
- Sony Corp.(SNE)

Corporación dedicada al desarrollo y manufactura de instrumentos electrónicos y grandes electrodomésticos. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



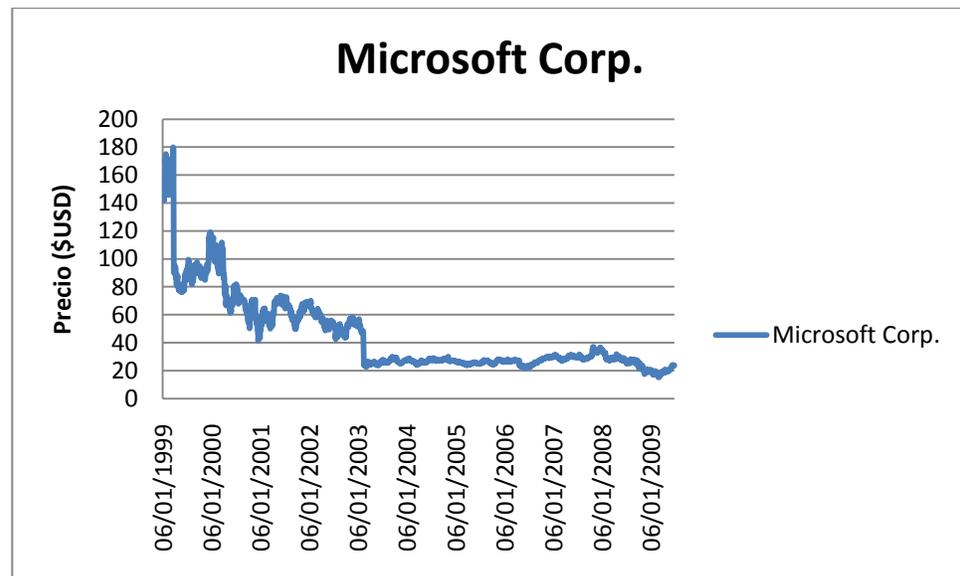
- Sun Microsystems (JAVA)

Es una empresa que desarrolla e implementa software en su plataforma de java. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



- Microsoft Corp. (MSFT)

Corporación dedicada al desarrollo de software y sus aplicaciones. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:



- Digital River Inc. (DRIV):

Empresa que se dedica a prestar servicios de e-commerce, plataformas y online hosting de tiendas electrónicas. Su comportamiento histórico de precio ha sido el siguiente:

