TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA Y SUS DIFERENTES DEMOSTRACIONES

LAURA MARCELA SALAZAR CRUZ

TRABAJO DE GRADO
Presentado como requisito parcial
Para optar por el título de

MATEMÁTICO

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA DE MATEMÁTICAS
Bogotá, D.C.
Octubre de 2009

Nota de Advertencia

Artículo 23 de la Resolución N° 13 de Julio de 1946

"La Universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Solo velará por que no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y por que las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vea en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia".

Nota Aclaratoria

Artículo 23 de la Resolución N° 13 de Julio de 1946

"A pesar de que los teoremas presentados en esta monografía fueron abordados por la autora de la misma, su enunciado y demostración fueron encontrados en las referencias citadas en la bibliografía. Esto significa que ninguno de estos teoremas es propiedad intelectual de la autora de este trabajo de grado. Además, cualquier error conceptual o tipográfico de dichas demostraciones en este escrito es responsabilidad exclusiva de la autora de la monografía.".

Resumen

El presente trabajo presenta una recopilación de información variada sobre el Teorema Fundamental del Álgebra después de haberse investigado a través de escritos en revistas, libros y monografías sobre el tema; se pudieron observar algunas características del problema que me permitió poder clasificar las distintas demostraciones que encontré de este teorema por áreas de la matemática, ya que dependiendo de los recursos que fueron necesarios utilizar en sus demostraciones podríamos caracterizar el tipo de demostración. Es así como encontré demostraciones del Teorema Fundamental del Álgebra a partir de las siguientes áreas de la matemática:

1.Álgebra.
2.Variable Compleja.
3.Análisis Matemático.
4.Geometría.
5.Topología.

La matemática es como toda construcción humana, producto del trabajo social del hombre, de ahí la necesidad de ubicar historicamente sus resultados, es por eso que no solamente se presentaron los tipos de demostración del Teorema Fundamental del Álgebra, sino que también se presentaron algunas referencias históricas de los artífices de dichas pruebas porque se pretende que el lector de este trabajo no solo esté en condiciones de entender los procesos lógicos deductivos que encierran dichas demostraciones sino también pueda formarse una cultura sobre el tema.

El trabajo está dividido en 8 capítulos iniciando con una introducción histórica del problema, pasando a continuación a la presentación de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, y las soluciones de las mismas, de ahí surge la pre-

gunta de si todo número complejo es raíz de un polinomio con coeficientes racionales, lo cual me llevó a introducirme en la teoría de números trascendentales para probar que existen números que no son raíces de dicho tipo de ecuaciones.

Estaban dadas ya las condiciones para abordar el problema del Teorema Fundamental del Álgebra a partir de las diferentes áreas. Como hecho sorprendente encontré en los teoremas clásicos de la variable compleja mecanismos valiosos para poder demostrar dicho teorema; según mi punto de vista, estas demostraciones eran las más asequibles desde el punto de vista de su dificultad de elaboración.

En seguida pasé a estudiar este teorema a partir del álgebra y encontré que los caminos que me conducían a la solución de dicho problema eran mucho más elaborados, y entre los resultados que más me sorprendieron está el haber encontrado que el número -1 en un cuerpo es a la larga "el más importante" ya que su comportamiento en el cuerpo y en las extensiones finitas de dicho cuerpo nos permiten determinar si el cuerpo obtenido por la adjunción de la raíz cuadrada de -1 a dicho cuerpo es algebraicamente cerrado.

Después de esta interesante aventura me dediqué a estudiar el Teorema Fundamental del Álgebra a partir del análisis empleando el teorema de Rouché y a partir de la topología por medio del lema del punto fijo, observando con sorpresa y admiración cómo a partir de estos enfoques también se podía resolver un problema del álgebra.

Como es obvio, no podía dejar de abordar dicho teorema sin tener en cuenta el enfoque histórico a través de las pruebas de Gauss y de ahí que terminé con el esquema de las diferentes pruebas de Gauss.

Sin pretender afirmar que se ha oscultado todo lo que hay al respecto, creo que este trabajo puede servir a quien esté interesado en estudiar este tema como un instrumento útil que le allana el camino para el logro del objetivo que se propone.

Objetivos

Objetivo general

Hacer una investigación que permita recopilar, clasificar y organizar la mayor parte de la literatura existente relativa al Teorema Fundamental del Álgebra que pueda servir de ejemplo acerca de cómo puede ser tratado un mismo problema trascendental desde diferentes áreas de la matemática.

Objetivos específicos

- Mostrar cómo se pueden abordar problemas en matemáticas desde diferentes enfoques.
- Contribuir y enriquecer el bagaje cultural que se desprende de todo lo que se ha hecho alrededor del tema.
- Dar a través de este problema un ejemplo significativo de cómo la ciencia es una construcción social del hombre.
- Mostrar que lo importante de la matemática no es el obtener resultados sino los caminos que conducen a estos.

Índice general

Capítulo 1

Introducción Histórica del Problema

El éxito inicial de resolver ecuaciones de primero y segundo grado hace ya más de cuatro mil años, se vió detenido hasta el Renacimiento, cuando Tartaglia, del Ferro, Cardano y Ferrari contribuyeron a resolver las ecuaciones de tercero y cuarto grado.

A partir de ese momento, puede decirse que todos los matemáticos de los siglos XVII y XVIII trataron de resolver la ecuación de quinto grado, sin lograr ningún éxito. ¿Por qué los grados uno, dos, tres y cuatro habían cedido su secreto, y el quinto se resistía obstinadamente?.

A fines del siglo XVIII y comienzos del XIX en Noruega, Italia y Francia, Abel, Ruffini y Galois llegaron independientemente a una conclusión sorprendente: que las ecuaciones polinómicas de quinto grado en adelante eran, en general, insolubles por el método de extracción sucesiva de radicales.

A este resultado frustrante pero profundo, confluyeron varias corrientes conceptuales de la teoría de polinomios, de la teoría de números, de la teoría de la factorización, de la teoría de grupos y de la teoría de cuerpos de extensión, estas dos últimas desarrolladas prácticamente para atacar el problema de la solución de las ecuaciones de quinto grado en adelante.

El principal objetivo del álgebra clásica fue el de lograr la resolución de ecuaciones algebraicas.

Los babilonios 1700 años antes de nuestra era, introdujeron las ideas centrales que dieron origen a la conocida fórmula para la solución de la ecuación general de segundo grado. Muchos siglos de esfuerzos infructuosos tuvo que soportar la humanidad para poder llegar a la solución general de la ecuación de tercer grado. Después de haber ensayado diversos caminos, de haberse quemado muchas etapas, sólo hasta el siglo XVI el desarrollo de la matemática adquirió el estado de madurez necesaria que le permitió solucionar dicho problema. Los hechos históricos que conocemos alrededor de esta solución son los siguientes: Al morir en 1526 Escipión del Ferro, uno de sus discípulos cuyo nombre era Aníbal de la Nave encontró un cuaderno escrito por su maestro en donde aparecían soluciones fundamentalmente de tipo geométrico de algunas ecuaciones de tercer grado; los historiadores de la matemática consideran que posiblemente fueron resueltas por los árabes. En 1530 los matemáticos Zuanne de Coi y Antonio de Fiore, quienes probablemente conocían este documento, resolvieron retar al matemático italiano Nicolo Fontana más conocido como "Tartaglia", a que resolviera algunos problemas cuyos planteamientos conducían a la solución de ecuaciones de tercer grado, le envió dos problemas uno de los cuales era el siguiente:

Encontrar tres números que se diferencien en 2 y cuyo producto sea 1000. Si $x < y < z$ son los números tales que $z - y = 2$, $y - x = 2$, y $xyz = 1000$ entonces $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$.

Tartagila reemplazó x por $y - 2$ y la redujo a $y^3 = 4y + 1000$
Las reducciones de este tipo son fundamentales para la solución de las ecuaciones de tercer grado.

Sin resolver los problemas y únicamente enviándole la anterior sustitución contestó a Coi manifestandole que estaba en condiciones de solucionarlos. Indignado Antonio de Fiore por esta actitud calificó a Tartaglia de impostor, pero este respondió informándole que podría resolver en general ecuaciones de los tipos $x^3+px = q$, $x^3 = px+q$ y $x^3+q = px$ en donde p y q son positivos.

Con el fin de poner a prueba la veracidad de los planteamientos de Tartaglia, Fiore lo desafió a que resolviera treinta problemas relativos a ecuaciones particulares de tercer grado, mediante el depósito de una suma determinada de dinero ante un notario de la ciudad de Venecia, si Tartaglia no podía resolver en máximo cuarenta días perdía el dinero, en caso contrario lo ganaría.

Para sorpresa de Fiore, Tartaglia los resolvió en menos de dos horas; introduciendo posiblemente por primera vez el método que hoy conocemos para la solución para las ecuaciones de tercer grado.

Por otra parte el también matemático italiano Jerónimo Cardano, quien conoció de Aníbal de la Nave lo que había escrito del Ferro, acerca de la ecuación de tercer grado; logró persuadir a Tartaglia después de mucho insistir para que le enseñara dicha solución. A pesar de que Cardano se había comprometido bajo juramento a no hacer conocer estas fórmulas, faltó a su palabra y las publicó en 1545 en su obra **Ars Magna**, de ahí, que hayan injustamente pasado a la historia con el nombre de las *Fórmulas de Cardano.*

El método introducido por Tartaglia para la solución de la ecuación de tercer grado, inspiró al discípulo de Cardano: Luis Ferrari, en la consecución de una fórmula que permite solucionar la ecuación general de cuarto grado. Aquí nuevamente figura Zuanne del Coi como uno de los protagonistas más importantes de este suceso, ya que fue quien le propuso a Cardano un problema que involucraba la ecuación $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ para que lo solucionara; dicho problema no pudieron resolverlo Cardano y Tartaglia pero sí Ferrari mediante un artificio que conduce a una ecuación de tercer grado en cual se utiliza aún para la solución de la cuártica. Esta fórmula también fue publicada en el libro **Ars Magna** de Cardano.

Los criterios utilizados por Tartaglia y Ferrari para la solución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado, indujeron a los matemáticos a creer que el problema de resolver una ecuación de grado $n + 1$, se reducía a encontrar algunos elementos que les permitieran transformarlas en ecuaciones de grado menor o igual a n. Muchos pensaron que para resolver por ejemplo la ecuación de quinto grado deberían encontrar un ingenioso artificio y se dedicaron de lleno a esta labor durante los siguientes siglos. Se hicieron enormes esfuerzos, todos infructuosos, pero fueron precisamente estos fracasos los que permitieron poner las primeras piedras hacia el enfoque de este problema como ejemplo de una teoría general. Esta manera de abordar la matemática se empieza a vislumbrar en la obra de Francisco Vieta y se desarrolla dos siglos después gracias a los trabajos de Joseph Louis Lagrange, quien a partir del análisis de los métodos seguidos por Tartaglia y Cardano, encuentra algunas características que deben cumplir los polinomios para que puedan ser solubles por radicales, introduce además los denominados **resolventes de Lagrange** (en donde, en la ecuación cúbica general, ciertas combinaciones de sus raíces toman solo tres valores bajo las seis permutaciones de sus tres raíces. Este trabajo se considera el origen de los grupos de permutaciones), y demuestra con claridad que el conocimiento de estos valores implica el de las raíces del polinomio. Es por este motivo que Lagrange ha sido considerado como el precursor de los trabajos de Abel y Galois sobre la solubilidad de polinomios.

Basándose en el conocimiento de la teoría de ecuaciones creado por Lagrange, en 1799 Pablo Ruffini intenta probar la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de quinto grado. Aunque hizo una demostración incorrecta, estuvo cerca de la prueba porque los errores que cometió podían remediarse. Abel en forma independiente encontró una demostración que sirvió de inspiración a Galois. Es importante recordar que tanto Abel en 1821 como Galois en 1828 creyeron en forma absolutamente independiente que habían resuelto la ecuación general de quinto grado; este error fue fructífero ya que al darse cuenta que estaban equivocados empezaron a poner en duda que la ecuación general de quinto grado fuese soluble y en vez de preocuparse por encontrar alguna fórmula que permitiera resolverlas, se dedicaron a solucionar el problema de determinar si esta ecuación es o no soluble por radicales. Abel logró finalmente demostrar que no es soluble, y publicó este resultado inicialmente en 1826 en la primera edición de la revista de matemática pura y aplicada que Crelle editaba en Alemania, pero debido a que los gastos de impresión corrían por cuenta de él mismo, tuvo que suprimir algunas proposiciones intermedias con el fin de que el artículo no fuera demasiado extenso. La muerte lo sorprendió tres años después cuanto estaba metido de lleno en la caracterización de todas las ecuaciones que son solubles por radicales, tarea que viene a culminar en forma clara y precisa Galois, quien desarrolló los conceptos básicos sobre los cuales descansa la teoría de cuerpos; así como también, algunos aspectos importantes de la teoría de grupos para terminar demostrando que si el polinomio general de grado n es soluble por radicales, el grupo simétrico S_n, es un grupo soluble, pero como S_n no es soluble, $\forall n \geq 5$, entonces el polinomio general de grado $n \geq 5$ no es soluble.

El **Teorema Fundamental del Algebra** establece que cualquier polinomio no constante sobre los complejos debe tener por lo menos una raíz compleja. Este resultado básico, cuya primera prueba fue dada por Gauss, ha sido de trascendental importancia en distintas áreas de la matemática.

Un polinomio sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una función de la forma:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$$

donde $a_0, a_1, ..., a_n$ están en $\mathbb{K}$ y n es un número natural.
Una raíz de este polinomio es un elemento de un cuerpo extensión de $\mathbb{K}$ ó del mismo $\mathbb{K}$, que hace cero dicho polinomio.

Para todo polinomio no constante sobre un cuerpo, existe un cuerpo de extensión que contiene por lo menos una raíz de dicho polinomio. El problema central es el de determinar si es o no posible encontrar cuerpos que contengan las raíces de los polinomios no constantes sobre ellos.

Inicialmente, se abordó el tema a partir del caso particular de los complejos. Fancisco Vieta, fue quien por primera vez concibió la posibilidad de descomponer un polinomio en factores lineales; aunque intentar realizar alguna demostración total o parcial de este hecho estaba por encima de los alcances del álgebra de aquella época. El matemático holandés Albert Girard, por su parte, habiendo notado que algunos polinomios de grado n sobre $\mathbb{R}$ que tienen n raíces reales, y ciertos polinomios de segundo grado sobre $\mathbb{R}$ tienen dos raíces imaginarias presentó la conjetura de que toda ecuación de grado n sobre $\mathbb{R}$ tiene n raíces entre reales y complejos.

Euler suponía que estas raíces se pueden expresar de una de las siguientes formas:

$$\sqrt[n]{b_1} + \sqrt[n]{b_2} + ... + \sqrt[n]{b_{n-1}}$$

ó

$$a_1 + a_2 \sqrt[n]{p} + a_3 \sqrt[n]{p^2} + ...,$$

en donde los a_i, b_j y p son funciones racionales de los coeficientes del polinomio en cuestión. La forma como intentó solucionar la conjetura de Girard fue distinta a la sugerida por sus antecesores. La clave de su razonamiento consistía en intentar demostrar que un polinomio arbitrario y no constante con coeficientes reales, puede descomponerse como un producto de dos polinomios no constantes; este hecho le permitiría llegar a la prueba aplicando inducción sobre el grado de f. Euler fracasó en este proyecto, ya que pasó por alto muchos puntos fundamentales.

Veintitrés años después, en 1979, Lagrange logró resolver muchas, aunque no todas las dificultades que se le presentaron a Euler, quedando muy cerca de la solución definitiva. Pero fue finalmente el principe de las matemáticas, Carl Friedrich Gauss, a quien le correspondió en 1797 la gloria de haber probado que todo polinomio no constante sobre los complejos tiene sus raíces en los complejos para lo cual se basó en una idea surgida en un intento de demostración de Jean-le-Rond-D'Alembert y publicada en 1746. El método empleado por Gauss fue el siguiente:

Sea $f(z) = u(z) + iv(z)$ un polinomio no constante en $\mathbb{C}[z]$. El complejo ω es raíz de $f(z)$, si y sólo si, $u(\omega) = 0$ y $v(\omega) = 0$. Esto es, el polinomio $f(z)$ tiene raíces complejas, si y sólo si, las curvas representadas por las ecuaciones $u(z) = 0$ y $v(z) = 0$ se cortan. Mediante un estudio cualitativo de estas curvas, prueba que una de las dos contiene un arco que tiene a su vez puntos ubicados en ambas regiones en que queda dividido el plano por la otra curva. De esto se infiere que las dos curvas se cortan.

Como muchas otras demostraciones que obtuvo, Gauss no se contentó con dar una sola prueba de esta proposición, sino que publicó en 1815, 1816 y en 1849 otras tres mas. Este resultado se conoce con el nombre de **Teorema Fundamental del Álgebra.** En la actualidad existen muchas demostraciones del mismo, la mayoría completamente diferentes de las cuatro dadas por Gauss, muchas de ellas se basan en métodos del análisis y la variable compleja, pero las ideas básicas del tratamiento moderno de este teorema se remontan a Galois, Dedekind, Liouville y Kronecker, los cuales crearon las condiciones propicias para que finalmente, a principios del siglo XX, E. Steinitz demostrara que todo cuerpo $\mathbb{F}$ está contenido en otro $\mathbb{K}$, que satisface la condición de que todo polinomio no constante sobre $\mathbb{K}$ tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$.

Capítulo 2

Ecuación de Tercer Grado

2.1. Biografia de Tartaglia

Tartaglia Su verdadero nombre era Nicoló Fontana. Aunque se sabe que nació en Brescía no se conoce con exactitud cual fue el año. Los historiadores de la matemática creen que pudo haber sido en 1499. Su padre Michaletto Fontana murió cuando Nicoló tenía corta edad, dejando la familia compuesta por la madre, dos niños y una niña, en la más completa indigencia.

En 1511 las tropas comandadas por Gastón de Foix se tomaron Brescía. La población civil se refugió en la catedral pero esta fue allanada por los soldados uno de los cuales se arremetió contra el pequeño Nicoló abriéndole el cráneo, rompiéndole las mandíbulas y partiéndole la lengua. Las heridas recibidas lo tuvieron al borde de la muerte; logró sobrevivir gracias a los cuidados de la madre quien lo salvó "imitando a los perros que se curan lamiéndose las heridas" según escribiría él mismo años después. Como consecuencia de esto perdió el habla durante mucho tiempo recuperándola finalmente pero quedó tratamudo. De ahí el remoquete de Tartaglia que significa tartamudo.

Tartaglia fue autodidacta. Estudió las obras matemáticas más importantes que se conocían y se dedicó a la docencia. Entre 1521 y 1533 fue profesor en Verona, en 1934 lo fue en Venecia, en 1548 volvió a Brescía, ese mismo año se trasladó nuevamente a Venecia en donde murió el 13 de diciembre de 1557.

Debido a sus limitaciones económicas no pudo tener una educación esmerada que le permitiera aprender el latín el cual era considerado como el idioma culto de su época. Por tal razón escribió todos sus libros en italiano. Tartaglia fue uno de los científicos que más aportes hizo a la rama de la mecánica conocida con el nombre de balística (balística exterior). Sus obras más importantes en este campo fueron **Nova Scientia** (nueva ciencia) y **Quesiti et inventioni diverse** (cuestiones e invenciones diversas), ambas publicadas Venecia, la primera en 1537 y la segunda en 1546. Estas obras fueron de trascendental importancia ya que conservaron su vigencia inclusive hasta fines del siglo XXVIII.

Antes de ser publicadas se pensaba que un proyectil inicialmente se movía, según la dirección que le imprimía su proyector en línea recta y luego caía verticalmente. Tartaglia demostró que ese movimiento no era posible y que por el contrario todo proyectil desde la iniciación de su movimiento hasta la culminación del mismo era influido por la gravedad y por esta causa así como también por la resistencia del aire, perdía velocidad en la dirección inicial mientras que la velocidad de caída tendía a aumentar; por esta razón la trayectoría descrita no podía ser una curva poligonal integrada por dos segmentos de recta sino una curva en todas sus partes. En sus experimentos con armas encontró que a medida que era mayor la velocidad inicial, era menor la influencia de la gravitación; además probó que cuando la inclinación del arma era de 45° se obtenía el alcance máximo. También obtuvo resultados relacionados con la influencia de la carga, la longitud del caño, el peso y diámetro del proyectil y el calibre del arma es decir, el diámetro del orificio del caño.

En **Quesiti** trata de artilleria en general, fundición de armas, fabricación de pólvora, el uso y manejo de armas y la manufactura y empleo de bombas. Resulta paradójico que habiendo sido Tartaglia una de las desafortunadas víctimas de la guerra, haya hecho enormes contribuciones a su desarrollo. Jamás se conocieron los motivos por los cuales dedicó estas obras a Enrique VIII de Inglaterra. **Quesiti** ha sido de enorme importancia para los historiadores de la matemática renacentista ya que en ella da mucha información de los matemáticos con quienes tuvo que ver y muy especialmente de aquellos cuyos nombres están relacionados con la solución de la cúbica.

En 1543 publicó una traducción de los Elementos de Euclides con algunas modificaciones propias, con el fin de adaptarla al lenguaje de la época. La segunda edición aparece en 1565 y la tercera en 1585. Este trabajo fue fruto de un curso que dictó en Venecia.

También en 1543 publicó una traducción de las obras de Arquímedes, cuya segunda edición aparece en 1551, pero la obra más conocida de Tartaglia fue su **General trattato di numeri et misure** (Tratado general de números y medida), el cual consta de 6 libros el primero de los cuales se publicó en 1556 y los otros, tres años después de su muerte. El último de los libros no estaba terminado antes de morir, aún no se sabe quién fue el que recopiló y ordenó los fragmentos que dejó Tartaglia para así culminar este libro, la única referencia que se conoce aparece en la misma obre en donde señala que el libro sexto es debido a un “dotto matemático”.

En esta obra resuleve algunos problemas originales sobre las construcciones con regla y compás empleando un compás de abertura fija, resuelve algunos problemas de máximos y mínimos, como por ejemplo los del polinomio $x(a^2 - x^2)$ siendo esto una tarea dificil ya que en esa época no se conocía el cálculo diferencial. Es interesante observar que en los cálculos que realiza aproxima $\sqrt[3]{a^3 + b}$ por $a + \frac{b}{3a(a+1)}$ la cual ciertamente es buena aproximación para valores de b pequeños; el resultado más conocido que aparece en esta obra es el referente al cálculo de lo coeficientes de $(a + b)^n$ (n entero positivo) en función de los coeficientes de $(a + b)^{n-1}$; el método introducido por Tartaglia se denomina hoy en dia el “triángulo de Pascal”, debido a que Blaise Pascal fue quién lo dió a conocer en su libro **Traité du Triangle arithmétique** (París, 1665) aunque ya había sido deslumbrado por el matemático árabe del siglo XI Omar Alkhayyan y tres siglos después por el también matemático, chino Chu Shih Chieh.

Además de los temas de aritmética que estudia en su **General Trattato**, se encuentran informes de mucho valor histórico sobre las costumbres, el comercio y el estado de desarrollo de la Italia renacentista; allí se informa que el interés del dinero variaba del 5 al 12 % anual cuando existía una garantía sólida, mientras que en las transacciones usuales eran de por lo menos en 20 %. También presenta una escala movil, en donde se establece el valor del pan en función del precio de trigo y denuncia las maniobras de los terratenientes para controlar economicamente a sus colonos.

Nadie sabe si Tartaglia pretendía publicar la solución de la cúbica; el incumplimiento de la promesa hecha por Cardano fue un feliz acontecimiento ya que de esta forma se conoció la solución de uno de los problemas sobre el cual había trabajado la humanidad durante muchos siglos. Los historiadores más imparciales consideran que Cardano no tenía derecho a hacer esta promesa y que Tartaglia tampoco tenía derecho de exigirla. Las obras completas de Tartaglia fueron publicadas en Venecia en el año de 1606, con el título **Opera del famosissimo Nicoló Tartaglia**.

2.2. Biografia de Cardano

Jeronimo Cardano Nació en Pavia el 24 de septiembre de 1501. Hijo ilegítimo del abogado Facio Cardano (1444-1524) quien fue profesor de jurisprudencia y medicina en Milán. Inició sus estudios en su ciudad natal y los continuó en la Universidad de Padua en donde obtuvo el título de Licenciado en Medicina.

Empezó a ejercer esta profesión en Sacco en el año 1524, en esta época comenzó a interesarse por la matemáticas y se dedicó a estudiar por su cuenta esta ciencia. Después de viajar por Francia, Inglaterra y Escocia, regresó a Milán en 1534 para encargarse de una cátedra de matemáticas en La Universidad Palatina, la cual pierde porque es vencido en un concurso por Zuanne de Coi.

Gracias a la influencia del Cardenal Legado consigue un puesto en la Universidad de Bolonia como profesor de astronomía, aunque según lo anotan sus biógrafos lo que enseñó fue una mezcla de astrología y superstición llegando inclusive a escribir un horóscopo de Jesucristo el cual fue motivo para que lo encarcelaran el 14 de octubre de 1570 acusado de herejía. Después de pagar un año de cárcel salío en libertad bajo palabra con la prohibición de no volver a dictar clases en ninguno de los estados pontificios.

En 1571 se instala en Roma, abandona la matemática y se dedica de lleno a la astrología debido a que la medicina la había dejado en 1556, convirtiéndose en el astrólogo más renombrado de su época, a tal punto que habiendo pronosticado su muerte el 21 de septiembre de 1576 se vió obligado a suicidarse para no demeritar su credibilidad.

Su prestigio como médico fue muy grande; este se incrementó al haberle curado en 1552 un asma de origen alérgico al arzobispo de St. Andrews (Escocia), mediante la supresión de las almohadas de pluma. Cardano escribió las siguientes obras:

1. Practica Arithmeticae. Este libro fue publicado en Milán en 1539. Allí estudia los números enteros, las fracciones, las raíces cuadradas y cúbicas y proporciones de los números, cuestiones comerciales, cálculo de intereses, medida de las figuras planas, medida de los cuerpos, problemas aritméticos y geométricos y un capítulo que destina al estudio de lo que él denomina problemas extraordinarios. La obra no presenta ninguna novedad desde el punto de vista matemático. Está plagada de consideraciones astrológicas llegando inclusive a hacer planteamientos superticiosos como por ejemplo el que los números 20, 60 y 80; 18, 27 y 36; 63 y 81 son fatales para el hombre.

2. Libellus qui dicitur computus minor. Este libro es un apéndice de Practica Arithmeticae y está destinado a las matemáticas que se utilizaban para el comercio en el siglo XVI. Como hecho curioso, en el incluye las tablas de multiplicar hasta la del 20.

3. Ars Magna Arithmeticae, seu liber quadraginta capitulorum et quadraginta quaestionum. No se conoce hasta ahora la fecha de su publicación, pero los historiadores de la matemática aseguran que fue posterior a 1545 debido a las referencias que hace.
Esta obra está destinada a la interpretación del libro X de los Elementos de Euclides. Vale la pena recalcar que el libro X de los Elementos es llamado "la cruz de los matemáticos", por su dificultad y está destinado al estudio de irracionalidades, entendiendo por irracionales aquellas expresiones matemáticas que no tenían razón de ser en la época de Euclides. Es en esta obra de Cardano, en donde por primera vez se distingue entre $a+\sqrt{b}$ y $a-\sqrt{b}$, aunque los árabes ya lo conocían.

4. Artis Magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus. Conocida con el nombre de **Ars Magna**, es considerada como es tratado más importante de álgebra del renacimiento. En el enuncia la regla "menos por menos da mas" y además la justifica, persenta también las soluciones de la cúbica y la cuártica las cuales fueron obtenidas por Tartaglia y Ferrari respectivamente; pero a él hay que reconocerle que fue el primero que presentó tres raíces para los casos en los que las raíces de la ecuación de tercer grado sean todas reales y señaló que la suma de las raíces de $x^3 + \beta x = \alpha x^2 + \gamma$ es siempre igual a α.
En relación con la ecuación de cuarto grado, observó que podían tener hasta cuatro raíces. También admitió la posibilidad de que las ecuaciones tuvieran raíces con multiplicidad y se atrevió a hacer cálculos con expresiones que contenían raíces cuadradas de números negativos, todo esto a pesar de las dificultades en el lenguaje matemático de su época.
El Ars magna fue publicado en Nuremberg en 1545 y su segunda edición en 1570.

5. De Regula Aliza. El cual es un suplemento de los dos anteriores.

6. Sermo de Plus et minus. En este libro vuelve a analizar el signo del producto de dos números negativos y discute el tratamiento que posteriormente a su Ars Magna había dado Bombelli al caso en el cual la ecuación de tercer grado tiene tres raíces reales.

7. De Proportionibus numerorum, motum, ponderum, sonorum, a liarumque rerum mensuarandum. Este libro fue publicado en Milán antes de 1545, en el demuestra 233 proposiciones basadas en el libro V de los **Elementos** de Euclides el cual trata sobre la teoría de proporciones.

8. Exaereton mathematicorum. Este es el opúsculo destinado al estudio de algunos problemas de aritmética y geométria. Fue publicado en 1572.

9. De Subtilitate. Publicada en Nuremberg en 1550 y reimpresa en París en 1551. Este es el único libro de física escrito escrito por Cardano.

10. Sus libros de astronomía fueron publicados en Nuremberg todos ellos en 1547.

11. Una serie de problemas sobre geodesia, artillería y algunos escritos sobre principios y reglas musicales.

12. Liber de Ludo Alae (El libro sobre juegos de azar). Cardano escribió este libro en 1520 cuando era estudiante en la Universidad de Padua, pero fue publicado en latín solo hasta 1663, ochenta y siete años después de su muerte. Aunque la historia de la probabilidad empieza con la correspondencia entre Pascal y Fermat, este libro fue un texto de referencia de estos dos genios de la matemática ya que en el se formulan importantes ideas concernientes a la probabilidad a pesar de que es en esencia un libro de juegos de azar. En esta obra se encuentra implícita la ley de los grandes números, también calcula probabilidades de obtener algunos resultados en juegos de cartas y especialmente en el denominado poker medieval.

13. Una autobiografía la cual tituló **De vita propia y De libris propus;** ha sido de enorme importancia para el análisis de su personalidad.

Jerónimo Cardano fue uno de los matemáticos célebres más controvertidos que han existido. De él se afirma que era un egolatra a tal punto que quienes lo trataron sostienen que le daba al día de su nacimiento una importancia capital en la historia de la humanidad.

Fue un jugador empedernido y algunos historiadores han llegado a sostener que era un desequilibrado mental; basan esta afirmación en una serie de hechos de su vida que difieren del comportamiento de la mayoría de los seres humanos, como por ejemplo el haberle cortado una oreja a un hijo descarriado con el fin de disciplinarlo. Cardano murió en Roma a la edad de 74 años; sus obras completas fueron editadas en 1663 en la ciudad de Lyón y constan de diez volúmenes.

En general

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

Tomando

$$w = z - \frac{a_{n-1}}{n}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
f(w) &= \left(z - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^n + a_{n-1}\left(z - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(z - \frac{a_{n-1}}{n}\right) + a_0 \\
&= (z^n - a_{n-1}z^{n-1} + ...) + (a_{n-1}z^{n-1} + ...) + ... + a_0 \\
&= z^n - b_{n-2}z^{n-2} + ... + b_1 z + b_0
\end{aligned}$$

Como podemos observar, se eliminó el término z^{n-1} de la ecuación anterior. Este es un método que se utilizó en la antigüedad para reducir polinomios; y con este se resolvieron las ecuaciones de tercer y cuarto grado.

2.3. Ecuación de Tercer Grado

Sea

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^3 + az^2 + bz + c \\
g(z) &= f\left(z - \frac{a}{3}\right) \\
&= \left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c \\
&= z^3 - az^2 + \frac{a^2}{3}z - \frac{a^3}{27} + az^2 - \frac{2}{3}a^2 z + \frac{a^3}{9} + bz - \frac{ab}{3} + c \\
&= z^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)z + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) \\
&= z^3 + pz + q
\end{aligned}$$

Sea z_0 una raíz de $g(z)$

$$\begin{aligned}
h(z) &= z^2 - z_0 z - \frac{p}{3} \\
&= (z - \alpha)(z - \beta) \\
&= z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \alpha + \beta \\
\frac{-p}{3} &= \alpha\beta \\
g(z_0) &= 0 \\
g(\alpha + \beta) &= 0
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0 \\
\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0 \\
\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + p(\alpha + \beta)) + q = 0
\end{aligned}
$$

Donde $3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + p(\alpha + \beta) = 0$, luego

$$\alpha^3 + \beta^3 + q = 0$$

$$\alpha^3\beta^3 = \frac{-p^3}{27}$$

Sean $u = \alpha^3$ y $v = \beta^3$

$$
\begin{cases}
u + v + q = 0 \\
uv = \frac{-p^3}{27}
\end{cases}
$$

$$u^2 + uv + uq = 0$$

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$u = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

$$v = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

Sin perdida de generalidad, podemos suponer que

$$u = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Por otro lado, para resolver

$$z^3 - w = 0 \qquad w \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Se toma una raíz $\theta \neq 1$ del polinomio $z^3 - 1 = 0$.
Sea

$$\theta = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta^2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Luego, las raíces de $z^3 - w$ son

$$\sqrt[3]{w}, \theta\sqrt[3]{w}, \theta^2\sqrt[3]{w}$$

Por lo tanto, haciendo

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

y

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Tomamos

$$\alpha \in \left\{\lambda, \theta\lambda, \theta^2\lambda\right\}$$

$$\beta \in \left\{\tau, \theta\tau, \theta^2\tau\right\}$$

$$z_0 = \alpha + \beta$$

$$g(z_0) = 0$$

Reemplazando las 9 combinaciones posibles, unas que dan cero son:

$z_0 = \lambda + \tau$
$z_0 = \theta\lambda + \theta^2\tau$
$z_0 = \theta^2\lambda + \theta\tau$

las cuales corresponden a las raíces de g.

Para las raíces de f,

$z_0 = \lambda + \tau + \frac{a}{3}$
$z_0 = \theta\lambda + \theta^2\tau + \frac{a}{3}$
$z_0 = \theta^2\lambda + \theta\tau + \frac{a}{3}$

2.4. Aplicaciones de la ecuación de tercer grado

La solución de la ecuación

$$z^n - w = 0$$

con $w = \rho\cos(\theta) + i\sin(\theta)$, está dada por:

$$z_r = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2r\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2r\pi}{n}\right)\right)$$

$r = 0, 1, ..., n-1$.
Y es conocida como la **Fórmula de De Moivre.**

En particular, para $n = 3$, se tiene:

$$z_r = \rho^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2r\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2r\pi}{3}\right)\right)$$

$r = 0, 1, 2$.
Además, utilizando la ecuación de tercer grado, para:

$$f(z) = z^3 + c$$

Se tiene
$p = b - \frac{a^2}{3} = 0$
$q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27} = c$
$\alpha\beta = \frac{-p}{3} = 0$
$\alpha + \beta = z_0$
$u = \alpha^3$
$v = \beta^3$

$u = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \frac{-c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4}} = \frac{-c}{2} + \frac{c}{2} = 0$
$v = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \frac{-c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4}} = \frac{-c}{2} - \frac{c}{2} = -c$
$\alpha = 0$
$\beta = \sqrt[3]{-c}$

$$\alpha \in \left\{\lambda, \theta\lambda, \theta^2\lambda\right\}$$

$$\alpha \in \left\{0, \theta(0), \theta^2(0)\right\} = \{0\}$$

$$\beta \in \left\{\tau, \theta\tau, \theta^2\tau\right\}$$

$$\beta \in \left\{\sqrt[3]{-c}, \theta\tau, \theta^2\tau\right\}$$

Luego, las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} z_0 &= \lambda + \tau + \frac{a}{3} = \tau = \sqrt[3]{-c} \\ z_1 &= \theta\lambda + \theta^2\tau + \frac{a}{3} = \theta^2\tau = \theta^2\sqrt[3]{-c} \\ z_2 &= \theta^2\lambda + \theta\tau + \frac{a}{3} = \theta\tau = \theta\sqrt[3]{-c} \end{aligned}$$

Con $\theta = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.1. $z^3 - i$

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Las raíces de esta ecuación están dadas por:

$$z_r = \left(\cos\left(\frac{\pi/2 + 2r\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2r\pi}{3}\right)\right)$$

$r = 0, 1, 2.$

Luego, se tiene:

$$z_0 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right), \tag{2.1}$$

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right), \tag{2.2}$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right), \tag{2.3}$$

Por otro lado, con la ecuación de tercer grado, obtenemos las siguientes raíces:

$$\begin{aligned} z_0 &= \left(\sqrt[3]{-c}\right) \\ z_1 &= \theta^2\sqrt[3]{-c} \\ z_2 &= \theta\sqrt[3]{-c} \end{aligned}$$

Luego

$$z_0 = \sqrt[3]{i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \tag{2.4}$$

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, \tag{2.5}$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_2 = -i, \tag{2.6}$$

De (2.1) y (2.4), tenemos:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De (2.2) y (2.5), tenemos:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De (2.3) y (2.6), tenemos:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

□

Ejemplo 2.2. $z^3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Las raíces de esta ecuación están dadas por:

$$z_r = \left(\cos\left(\frac{\pi/6 + 2r\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/6 + 2r\pi}{3}\right)\right)$$

$r = 0, 1, 2.$
Luego, se tiene:

$$z_0 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right), \tag{2.7}$$
$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{18}\right)\right), \tag{2.8}$$
$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{25\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{25\pi}{18}\right)\right), \tag{2.9}$$

Por otro lado, con la ecuación de tercer grado, obtenemos las siguientes raíces:

$$z_0 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}, \tag{2.10}$$
$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}\right), \tag{2.11}$$
$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}\right), \tag{2.12}$$

De (2.7) y (2.10), tenemos:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}=\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)$$

De (2.9) y (2.11), tenemos:

$$\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}\right)=\left(\cos\left(\frac{25\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{25\pi}{18}\right)\right)$$

De (2.8) y (2.12), tenemos:

$$\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}}\right)=\left(\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{13\pi}{18}\right)\right)$$

□

Ejemplo 2.3. $z^3-(1-i)$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Las raíces de esta ecuación están dadas por:

$$z_r=2^{1/6}\left(\cos\left(\frac{-\pi/4+2r\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi/4+2r\pi}{3}\right)\right)$$

$r=0,1,2.$
Luego, se tiene:

$$z_0=2^{1/6}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right), \tag{2.13}$$

$$z_1=2^{1/6}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right), \tag{2.14}$$

$$z_2=2^{1/6}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right), \tag{2.15}$$

Por otro lado, con la ecuación de tercer grado, obtenemos las siguientes raíces:

$$z_0 = \sqrt[3]{1-i} = \frac{(\sqrt{3}+1)2^{2/3}}{4} - i\frac{(\sqrt{3}-1)2^{2/3}}{4}, \tag{2.16}$$

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2 \left(\frac{(\sqrt{3}+1)2^{2/3}}{4} - i\frac{(\sqrt{3}-1)2^{2/3}}{4}\right)$$

$$z_1 = \frac{-2^{2/3}}{2} - i\frac{2^{2/3}}{2}, \tag{2.17}$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \left(\frac{(\sqrt{3}+1)2^{2/3}}{4} - i\frac{(\sqrt{3}-1)2^{2/3}}{4}\right)$$

$$z_2 = \frac{-(\sqrt{3}-1)2^{2/3}}{4} + i\frac{(\sqrt{3}+1)2^{2/3}}{4}, \tag{2.18}$$

De (2.13) y (2.16), tenemos:

$$\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) = -\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$$

De (2.15) y (2.17), tenemos:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

De (2.14) y (2.18), tenemos:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$$

□

Ejemplo 2.4. $z^3 - (1+i)$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Las raíces de esta ecuación están dadas por:

$$z_r = 2^{1/6}\left(\cos\left(\frac{\pi/4+2r\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/4+2r\pi}{3}\right)\right)$$

$r = 0, 1, 2.$
Luego, se tiene:

$$z_0 = 2^{1/6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right), \tag{2.19}$$

$$z_1 = 2^{1/6}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right), \tag{2.20}$$

$$z_2 = 2^{1/6}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right), \tag{2.21}$$

Por otro lado, con la ecuación de tercer grado, obtenemos las siguientes raíces:

$$z_0 = \sqrt[3]{1+i} = \frac{(\sqrt{3}+1)2^{2/3}}{4} + i\frac{(\sqrt{3}-1)2^{2/3}}{4}, \tag{2.22}$$

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2\left(\frac{(\sqrt{3}+1)2^{2/3}}{4} + i\frac{(\sqrt{3}-1)2^{2/3}}{4}\right)$$

$$z_1 = \frac{-(\sqrt{3}-1)2^{2/3}}{4} - i\frac{(\sqrt{3}+1)2^{2/3}}{4}, \tag{2.23}$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(\frac{(\sqrt{3}+1)2^{2/3}}{4} + i\frac{(\sqrt{3}-1)2^{2/3}}{4}\right)$$

$$z_2 = \frac{-2^{2/3}}{2} + i\frac{2^{2/3}}{2}, \tag{2.24}$$

De (2.19) y (2.22), tenemos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$$

De (2.21) y (2.23), tenemos:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$$

De (2.20) y (2.24), tenemos:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

Capítulo 3

Ecuación de Cuarto Grado

3.1. Biografia de Ferrari

Lodovico Ferrari Nació en 2 de febrero de 1522 en Milán. Como su rival Tartaglia también era de extracción humilde. Quedó huérfano siendo aún muy joven y por esta razón se vió obligado a emplearse como sirviente al servicio de Cardano.

Al empezar a mostrar sus habilidades como matemático, su patrón lo convirtió en secretario y auxiliar científico, además lo autorizó para asistir a los cursos que él dictaba. La llegada de Ferrari al hogar de Cardano fue considerada por éste como una bendición. Desafortunadamente su temperamento ingobernable y su carácter disipado, impidieron que lograra adquirir una mayor formación matemática; pero gracias a las relaciones de Cardano, logró entrar a la corte y adquirir la protección de muchas de las figuras más influyentes de Milán, como el cardenal de Mantua y don Fernando Gonzaga, quien le tenía un gran afecto y le consiguió una cátedra en Milán cuando apenas tenía 22 años de edad.

Fue asesor de impuestos del gobernador de Milán y secretario del cardenal de Mantua. En este periodo amasó una gran fortuna y contrajó una grave enfermedad que se le complicó debido a su vida desordenada; finalmente logró vencerla, se marchó a Bolonia en donde estudió filosofía y se graduó el 14 de julio de 1565. Fue nombrado inmediatamente para ocupar una cátedra, pero no logró su cometido, debido a que el 5 de octubre del mismo año murió envenenado por su hermana quien pretendía heredar su apreciable fortuna.

Ferrari no escribió obras de matemáticas. Sus trabajos se encuentran dispersos en los libros **Ars Magna** de Cardano, y **L'Algebra** de Rafael Bombelli (1572) cuyo curioso título completo es **L'Algebra, divisa in tre libri, con la quale ciascunoda sé potrá venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica**. (El álgebra, dividida en tres libros, gracias a la cual cada uno por sí mismo podrá lograr un perfecto conocimiento de la teoría de la artimética). En **Ars Magna** Cardano reconoce que la solución de la ecuación de cuarto grado se debe a su discípulo Lodovico Ferrari pero con excepción de este hecho, no se sabe con certeza cuáles fueron los aportes originales de Ferrari ya que ni Bombelli ni Cardano los mencionan en forma explícita, lo cual no deja de ser sospechoso.

3.2. Ecuación de Cuarto Grado

Teorema 3.1. *El polinomio general de cuarto grado sobre $\mathbb{C}$ es soluble.*

Demostración. Sea $f(x) = x^4 + a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x + a_1$ el polinomio general de cuarto grado sobre $\mathbb{C}$. Al sustituir x por $x - \frac{a_4}{4}$, obtenemos el polinomio

$$g(x) = x^4 + px^2 + qx + r$$

en donde

$$\begin{aligned} p &= a_3 - \frac{3}{8}a_4^2 \\ q &= \frac{1}{8}a_4^3 + a_2 - \frac{1}{2}a_3a_4 \\ r &= a_1 + \frac{1}{16}a_3a_4^2 - \frac{1}{4}a_2a_4 - \frac{3}{256}a_4^4 \end{aligned}$$

$f(x)$ es soluble si y solo si, $g(x)$ es soluble. Por tal razón nos limitaremos a demostrar que $g(x)$ es soluble.

En efecto: Sea el polinomio

$$h(x) = 8x\left(x^2 + px - r + \frac{p^2}{4}\right) - q^2$$

No todas las raíces de $h(x)$ son nulas.

Sea z una raíz no nula de $h(x)$, entonces

$$z^2 + pz - r + \frac{p^2}{4} = \frac{q^2}{8z}$$

Luego

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + qx + r &= \left(x^2 + \frac{p}{2} + z\right)^2 + qx - 2zx^2 - \left(z^2 + pz - r + \frac{p^2}{4}\right) \\ &= \left(x^2 + \frac{p}{2} + z\right)^2 + qx - 2zx^2 - \frac{q^2}{8z} \\ &= \left(x^2 + \frac{p}{2} + z\right)^2 - 2z\left(x - \frac{q}{4z}\right)^2 \end{aligned}$$

Si θ es una raíz del polinomio $m(x) = x^2 - 2z$ entonces,

$$g(x) = \left(x^2 - \theta x + \frac{p}{2} + z + \theta\frac{q}{4z}\right)\left(x^2 + \theta x + \frac{p}{2} + z - \theta\frac{q}{4z}\right)$$

que es un polinomio soluble. $\square$

3.3. Aplicaciones de la ecuación de cuarto grado

Para encontrar las raíces de $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, se siguen los siguientes pasos:

- **Paso 1.** Calcule

$$\begin{aligned} p &= b - \frac{3}{8}a^2 \\ q &= \frac{1}{8}a^3 + c - \frac{1}{2}ab \\ r &= d + \frac{1}{16}ba^2 - \frac{1}{4}ca - \frac{3}{256}a^4 \end{aligned}$$

- **Paso 2.** Calcule

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{p^2}{12} - r \\ \beta &= -\frac{q^2}{8} - \frac{p^3}{108} + \frac{pr}{3} \end{aligned}$$

- **Paso 3.** Sean

$$\xi = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_{lj} = \xi^l \sqrt[3]{-\tfrac{\beta}{2} + \sqrt{\tfrac{\beta^2}{4} + \tfrac{\alpha^3}{27}}} + \xi^j \sqrt[3]{\tfrac{\beta}{2} - \sqrt{\tfrac{\beta^2}{4} + \tfrac{\alpha^3}{27}}} - \tfrac{p}{3}$$

de donde $0 \leq l, j \leq 3$ y $l + j = 3$

Llamando $Z = Z_{lj}$ para algunos l y j tales que $Z_{lj} \neq 0$.

Si $Z_{lj} = 0$ para $0 \leq l, j \leq 3$ y $l + j = 3$,es porque $f(x)$ tiene como única raíz al elemento $\frac{a}{4}$ el cual es de multiplicidad 4.

- **Paso 4.** Las raíces de $f(x)$ son:

$$r_1 = \frac{\sqrt{2z} + \sqrt{-2z - 2p - \frac{2q}{\sqrt{2z}}}}{2} - \frac{a}{4}, \tag{3.1}$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{2z} - \sqrt{-2z - 2p - \frac{2q}{\sqrt{2z}}}}{2} - \frac{a}{4}, \tag{3.2}$$

$$r_3 = \frac{-\sqrt{2z} + \sqrt{-2z - 2p - \frac{2q}{\sqrt{2z}}}}{2} - \frac{a}{4}, \tag{3.3}$$

$$r_4 = \frac{-\sqrt{2z} - \sqrt{-2z - 2p - \frac{2q}{\sqrt{2z}}}}{2} - \frac{a}{4}, \tag{3.4}$$

Ahora veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.1. *Encuentre las raíces del polinomio*
$f(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24.$

Solución. En este caso

$$a = -10,\ b = 35,\ c = -50 \text{ y } d = 24$$

Aplicando las fórmulas anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned}
p &= b - \frac{3}{8}a^2 = -\frac{5}{2} \\
q &= \frac{1}{8}a^3 + c - \frac{1}{2}ab = 0 \\
r &= d + \frac{1}{16}ba^2 - \frac{1}{4}ca - \frac{3}{256}a^4 = \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{p^2}{12} - r = -\frac{13}{12} \\
\beta &= -\frac{q^2}{8} - \frac{p^3}{108} + \frac{pr}{3} = -\frac{35}{108}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2}+\sqrt{\frac{\beta^2}{4}+\frac{\alpha^3}{27}}}=0{,}583333+0{,}144338i$$
$$\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2}-\sqrt{\frac{\beta^2}{4}+\frac{\alpha^3}{27}}}=0{,}583333+0{,}144338i$$

Por lo tanto, podemos escoger

$$Z=0{,}583333+0{,}144338i+0{,}583333-0{,}144338i-\frac{p}{3}=2$$

Luego, utilizando (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4) las raíces de $f(x)$ son:

$$\begin{aligned} r_1&=4\\ r_2&=3\\ r_3&=2\\ r_4&=1 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2. *Encuentre las raíces del polinomio*
$f(x)=x^4+8x^3+18x^2-25.$

Solución. En este caso

$$a=8,\ b=18,\ c=0 \text{ y } d=-25$$

Aplicando las fórmulas anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned} p&=b-\frac{3}{8}a^2=-6\\ q&=\frac{1}{8}a^3+c-\frac{1}{2}ab=-8\\ r&=d+\frac{1}{16}ba^2-\frac{1}{4}ca-\frac{3}{256}a^4=-1 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \alpha&=-\frac{p^2}{12}-r=-2\\ \beta&=-\frac{q^2}{8}-\frac{p^3}{108}+\frac{pr}{3}=-4 \end{aligned}$$

Entonces

$$\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2}+\sqrt{\frac{\beta^2}{4}+\frac{\alpha^3}{27}}}=\frac{\sqrt[2]{2}}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{3\sqrt{3}+5}$$
$$\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2}-\sqrt{\frac{\beta^2}{4}+\frac{\alpha^3}{27}}}=\frac{\sqrt[2]{2}}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{3\sqrt{3}-5}$$

Por lo tanto, podemos escoger

$$Z=\frac{\sqrt[2]{2}}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}+5}+\sqrt[3]{3\sqrt{3}-5}\right)-\frac{p}{3}=4$$

Luego, utilizando (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4) las raíces de $f(x)$ son:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{2}}-2\\ r_2 &= \sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{2}}-2\\ r_3 &= -\sqrt{2}+i\sqrt{1+\sqrt{2}}-2\\ r_4 &= -\sqrt{2}-i\sqrt{1+\sqrt{2}}-2 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.3. *Encuentre las raíces del polinomio*
$f(x)=16x^4+32x^3-72x^2-280x-23$.

Solución. El problema se reduce a calcular las raíces del polinomio

$$g(x)=x^4+2x^3-\frac{9}{2}x^2-\frac{35}{2}x-\frac{23}{16}$$

En este caso

$$a=2,\ b=-\tfrac{9}{2},\ c=-\tfrac{35}{2} \text{ y } d=-\tfrac{23}{16}$$

Aplicando las fórmulas anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned} p &= b-\frac{3}{8}a^2=-6\\ q &= \frac{1}{8}a^3+c-\frac{1}{2}ab=-12\\ r &= d+\frac{1}{16}ba^2-\frac{1}{4}ca-\frac{3}{256}a^4=6 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{p^2}{12} - r = -9\\ \beta &= -\frac{q^2}{8} - \frac{p^3}{108} + \frac{pr}{3} = -28\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} &= 3\\ \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} &= \frac{\sqrt[2]{2}}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{3\sqrt{3} - 5}\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escoger

$$Z = 3 + 1 - \frac{p}{3} = 6$$

Luego, utilizando (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4) las raíces de $g(x)$ son:

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{3} + \sqrt[4]{3} - \frac{1}{2}\\ r_2 &= \sqrt{3} - \sqrt[4]{3} - \frac{1}{2}\\ r_3 &= -\sqrt{3} + i\sqrt[4]{3} - \frac{1}{2}\\ r_4 &= -\sqrt{3} - i\sqrt[4]{3} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\square$

Utilizando la **Fórmula de De Moivre.**

$$z_r = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2r\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2r\pi}{n}\right)\right)$$

$r = 0, 1, ..., n - 1.$

Como solución de la ecuación

$$z^n - w = 0$$

con $w = \rho\cos(\theta) + i\sin(\theta)$, para $n = 4$, se tiene:

$$z_r = \rho^{1/4}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2r\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2r\pi}{4}\right)\right)$$

$r = 0, 1, 2, 3$.
Además, utilizando la ecuación de cuarto grado, para:

$$f(z) = z^4 + d$$

$$\begin{aligned} p &= 0 \\ q &= 0 \\ r &= d \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \alpha &= -r = -d \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} &= \frac{(-d)(1/6)\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^3}{27}}} &= -\frac{(-d)(1/6)\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escoger

$$\begin{aligned} Z &= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1\left(\frac{(-d)(1/6)\sqrt{3}}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1\left(-\frac{(-d)(1/6)\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= (-d)^{(1/2)}i \end{aligned}$$

Luego, utilizando (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4) las raíces de la ecuación son:

$$\begin{aligned} r_1 &= (-d)^{(1/4)} \\ r_2 &= (-d)^{(1/4)}i \\ r_3 &= -(-d)^{(1/4)}i \\ r_4 &= -(-d)^{(1/4)} \end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.4. $z^4 - i$

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Las raíces de esta ecuación están dadas por:

$$z_r = \left(\cos\left(\frac{\pi/2 + 2r\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2r\pi}{4}\right)\right)$$

$r = 0, 1, 2, 3.$
Luego, se tiene:

$$z_0 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right), \tag{3.5}$$

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right), \tag{3.6}$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right), \tag{3.7}$$

$$z_3 = \left(\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)\right), \tag{3.8}$$

Por otro lado, con la ecuación de cuarto grado, obtenemos las siguientes raíces:

$$z_0 = (i)^{(1/4)} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} + \frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2}i \tag{3.9}$$

$$z_1 = (i)^{(1/4)}i = \frac{-\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2} + \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}i \tag{3.10}$$

$$z_2 = -(i)^{(1/4)}i = \frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2} - \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}i \tag{3.11}$$

$$z_3 = -(i)^{(1/4)} = \frac{-\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} - \frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2}i \tag{3.12}$$

De (3.5) y (3.9), tenemos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2}$$

De (3.6) y (3.10), tenemos:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{-\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2}$$
$$\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

De (3.7) y (3.12), tenemos:

$$\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) = \frac{-\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$
$$\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2}$$

De (3.8) y (3.11), tenemos:

$$\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2}$$
$$\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

□

Ejemplo 3.5. $z^4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Las raíces de esta ecuación están dadas por:

$$z_r = \left(\cos\left(\frac{\pi/3 + 2r\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/3 + 2r\pi}{4}\right)\right)$$

$r = 0, 1, 2, 3.$

Luego, se tiene:

$$z_0 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right), \tag{3.13}$$

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right), \tag{3.14}$$

$$z_2 = \left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right), \tag{3.15}$$

$$z_3 = \left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right), \tag{3.16}$$

Por otro lado, con la ecuación de cuarto grado, obtenemos las siguientes raíces:

$$z_0 = \left(\frac{1}{2}i\right)^{(1/4)} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4} + \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}i \tag{3.17}$$

$$z_1 = \left(\frac{1}{2}i\right)^{(1/4)} i = -\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4} + \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}i \tag{3.18}$$

$$z_2 = -\left(\frac{1}{2}i\right)^{(1/4)} i = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4} - \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}i \tag{3.19}$$

$$z_3 = -\left(\frac{1}{2}i\right)^{(1/4)} = -\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4} - \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}i \tag{3.20}$$

De (3.13) y (3.17), tenemos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$$

De (3.14) y (3.18), tenemos:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$$

De (3.15) y (3.20), tenemos:

$$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$$

De (3.16) y (3.19), tenemos:

$$\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = -\frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}$$

□

Capítulo 4

Números Trascendentales

4.1. Biografia de Cantor

George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor Nace el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo hoy Leningrado (Rusia). Como sus padres eran de Dinamarca y en 1858 se trasladaron a Frankfurt (Alemania), varios países aún se disputan su nacionalidad, aunque él optó por la alemana. Su madre María Anna Böhm provenía de una familia de músicos notables entre los cuales se destaca Joseph Böhm quien fue director del conservatorio de Viena y fundador de una escuela para violinistas que preparó los más virtuosos violinistas de su tiempo. Su padre fue un próspero comerciante luterano, quien transmitió las convicciones religiosas a su hijo. Algunos de sus biógrafos consideran que tuvo agrias discusiones con su padre quien le impuso los estudios de ingeniería, los cuales abandonó más tarde para enrumbarse por los caminos de su propia vocación matemática. Estudió en las universidades de Zurich, Berlín y Göttingen. Obtuvo su doctorado en el año 1868 en la Universidad de Berlín con una tesis en Teoría de Números. Dos años después es aceptado como instructor en la Universidad de Halle, una institución respetable pero nunca del prestigio de las universidades de Berlín o Göttingen a las cuales nunca pudo ingresar. En 1872 realiza su primera contribución importante a la matemática, mediante la clasificación de los conjuntos $E \subseteq \mathbb{R}$ tales que si la serie trigonométrica $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{nix}$ converge hacia 0 salvo en los puntos de E entonces $c_n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Como consecuencia de estas investigaciones, Cantor empieza a interesarse por los problemas de equipotencia y en 1873 demuestra en forma indirecta que existen números trascendentes. En 1874 después de tres años de agotador trabajo logra encontrar una correspondencia biyectiva entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$. Este resultado lo sorprendió hasta tal punto que en una carta dirigida a Dedekind le decía: "Lo veo y no lo creo". Entre 1874 y 1884 se dedica de lleno a la teoría de conjuntos, que desarrolla en una serie de seis memorias publicadas en los **Mathematische Annalen**. Allí empieza a trabajar sobre conjuntos totalmente ordenados, desarrolla la teoría de números cardinales transfinitos basada en un tratamiento sistemático de los conjuntos formados por una infinidad de elementos concebidos como simultáneamente existentes, al menos en la mente (infinito actual). Estudia además las propiedades topológicas de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ y el problema de la medida. Cantor introduce los cardinales de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ los cuales denomina $\aleph_0$ y c respectivamente, y al demostrar que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ deduce que existen infinitos cardinales transfinitos. Prueba que $c = 2^{\aleph_0}$ y esto lo deduce a plantear la denominada hipótesis del contínuo, la cual afirma que no existe un cardinal entre $\aleph_0$ y c. Este problema no ha sido resuelto aún. En 1963 el profesor Paul J. Cohen de la Universidad de Stanford, basándose en resultados obtenidos por el profesor Kurt Gödel del Instituto para Estudios Avanzados, demostró que la hipótesis del contínuo es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos, de la misma forma en que el quinto postulado de Euclides sobre las rectas paralelas es independiente de los otros axiomas de la geometría.

Las teorías de Cantor produjeron una reacción negativa por parte de muchos de los más prestigiosos matemáticos encabezados por Kronecker y Schwarz, creándose una controversia que llegó hasta una animadversión entre Cantor y

Kronecker, quien afirmaba: "Los resultados de la moderna teoría de funciones y de la teoría de conjuntos no son de real significancia". La tensión constante producto de esta controversia, así como también los intentos infructuosos por demostrar la hipótesis del contínuo, minaron la capacidad de resistencia de Cantor y es así como en mayo de 1884 sufrió su primera crisis nerviosa que lo obligó a recluirse en una clínica psiquiátrica de Halle y por esto tiene que alejarse de las matemáticas durante tres años; él nunca logró recuperarse totalmente de este colapso, el cual lo acompañó los últimos 34 años de su vida.

Las últimas publicaciones de Cantor aparecen entre 1895 y 1897. En ellas desarrolla fundamentalmente la teoría de conjuntos totalmente ordenados, introduce el concepto de número ordinal y trabaja el cálculo con ordinales, quedando todavía una laguna por llenar en sus trabajos sobre números cardinales, debido a que no había podido establecer la relación de buena ordenación entre cardinales cualesquiera, pero en 1890 E. Schröder y F. Bernstein demostraron en forma independiente que si a y b son números cardinales tales que $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$, resultado que ya había sido obtenido por Dedekind en 1887 pero su prueba no estaba publicada.

En 1882 Cantor conjetura que todo conjunto puede ser dotado de una buena ordenación, problema que es resuelto por Ernest Zermelo. Al genio de Cantor también se deben conceptos tan importantes como los de punto de acumulación, conjunto cerrado, abierto, y perfecto. La consagración oficial de la teoría de conjuntos se manifiesta en el primer congreso internacional de matemáticas en Zurich (1897), en el que Hadamard y Hurwitz señalaron sus importantes aplicaciones del análisis, constituyéndose este hecho en una victoria no solo de Cantor, sino también de Hilbert quien se había convertido en el abanderado de la lucha por la reivindicación de las concepciones cantorianas en teoría de conjuntos.

Cantor se casó con Vally Guttman en 1874, tuvo seis hijos. Los últimos años de su vida fueron azarosos debido a su enfermedad mental. Por este motivo tiene que retirarse en 1905 de la Universidad de Halle. La agudización de este mal lo lleva a obsesionarse por probar la identidad de William Shakespeare y Francisco Bacon. Muere el 6 de enero de 1918 en la clínica psiquiátrica de Halle, en donde había sido internado.

4.2. Biografia de Hermite

Charles Hermite Nació el 24 de diciembre de 1822 en Deuze(Lorena). Ha sido considerado como uno de los matemáticos franceses más importantes del siglo XIX. Como estudiante tuvo serios tropiezos ya que descuidaba sus tareas diarias para dedicarse al estudio de los textos clásicos de la matemática. A los veinte años da a conocer en los **Nouv Ann de Mathem**, sus primeras investigaciones sobre la imposibilidad de resolver algebraicamente la ecuación de quinto grado, con una demostración mas sencilla que la presentada por Abel. Un año después, en una carta que escribe a Jacobi, presenta los resultados de sus investigaciones sobre funciones abelianas, a las que extiende algunos teoremas de las funciones elípticas descubiertas por Abel.

En agosto de 1844, Hermite comunica a Jacobi la transformación de las funciones elípticas y enuncia los principios de la teoría de las funciones Theta. En 1885 extiende a las funciones abelianas el problema de la transformación, resuelto mediante funciones elípticas por Abel y Jacobi, y lo plantea así: "Dado un polinomio, encontrar otro tal que formando las adecuadas combinaciones lineales de las ecuaciones diferenciales relativas al polinomio, las quince funciones abelianas correspondientes se expresen racionalmente por medio de lo quince primeros". Para hacer esto, Hermite se colocó en el punto de vista trascendente extendiendo a las funciones de dos variables el análisis que había indicado en 1843 y 1844 a Jacobi de las de una variable.

En el año 1870 es designado profesor de la Sorbona. Allí se convierte en el maestro de muchos de los matemáticos más importantes de la segunda mitad del siglo XIX, entre los cuales se destacan Picard, Borel y Poincaré. Su demostración de la trascendencia de e ha sido considerada como uno de los resultados más famosos. Le gustaba el análisis y la teoría de números, pero le desagradaba la geometría. En 1885 obtiene uno de los resultados más sorprendentes al demostrar que la ecuación general de quinto grado se puede resolver por medio de funciones elípticas. Muchos de los aportes obtenidos por él tuvieron más tarde aplicaciones en física matemática, como lo son las formas y matrices hermitianas que se utilizan en la formulación de la física cuántica y los polinomios y funciones de Hermite que son útiles para resolver la ecuación de ondas de Schrödinger.

Hermite manejaba con mayor naturalidad los conceptos más abstractos de la matemática. De él dijo Poincaré: “Si se habla del señor Hermite, nunca evoca una imagen concreta; sin embargo uno se da cuenta muy pronto, que las entidades mas abstractas son para él como criaturas vivas”. Charles Hermite murió en París en 14 de enero de 1901 a la edad de 78 años.

4.3. Demostración de la existencia de los Números Trascendentales

Primero se demostrará que los números algebraicos son numerables, luego, por medio del método de la diagonal de Cantor se mostrará que los números reales no son numerables, por lo tanto, existen números reales que no son algebraicos, estos números son llamados **Números trascendentales**.

Sabemos que los números enteros son numerables, luego

$\mathbb{Z} = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$

Vamos a demostrar por inducción matemática que los números algebraicos son numerables.

Sea $\mathcal{A}_k^{(1)} = \{a_k x + a_j | j = 1, 2, ..., n, ...\}$

$$\mathcal{A}_k^{(1)} \approx \mathbb{Z}$$

Es decir, $A_k^{(1)}$ es equipotente a $\mathbb{Z}$.
Luego $\mathcal{A}_k^{(1)}$ es numerable. Si

$$\mathbb{Z}_1[x] = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] | \partial f \leq 1\}$$

Entonces

$$\mathbb{Z}_1[x] = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k^{(1)}$$

Luego $\mathbb{Z}_1[x]$ es numerable.

$$\mathbb{Z}_1[x] = \{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...\}$$

$a_k \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{A}_k^{(2)} = \left\{a_k x^2 + f_j(x) | j = 1, 2, ..., n, ...\right\}$$

$$\mathcal{A}_k^{(2)} \approx \mathbb{Z}$$

Es decir, $A_k^{(2)}$ es equipotente a $\mathbb{Z}$.
Luego $\mathcal{A}_k^{(2)}$ es numerable. Si

$$\mathbb{Z}_2[x] = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] | \partial f \leq 2\}$$

Entonces

$$\mathbb{Z}_2[x] = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k^{(2)}$$

Es numerable.

Sea

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} | a \equiv b \mod n\}$$

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{a} | a = 0, 1, ..., n-1\}$$

Supongamos que $\mathbb{Z}_n$ es numerable.

$$\mathcal{A}_k^{(n)} = \left\{a_k x^{n+1} + f | f \in \mathbb{Z}_n[x]\right\}$$

$$\mathcal{A}_k^{(n)} \approx \mathbb{Z}_n[x]$$

Luego $\mathcal{A}_k^{(n)}$ es numerable.

$$\mathbb{Z}_{n+1}[x] = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k^{(n)}$$

Es numerable

$$\mathbb{Z}[x] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_n[x]$$

Luego $\mathbb{Z}[x]$ es numerable.

$$\mathbb{Z}[x] = \{g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x), ...\}$$

Sea

$$R_k = \{z \in \mathbb{C} | g_k(z) = 0\}$$

el conjunto de las raíces del polinomio $g_k(z) \in \mathbb{Z}[x]$ sobre los complejos.

$$\partial R_k < +\infty$$

y por lo tanto, R_k es numerable. Luego

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$$

Es numerable y se conoce con el nombre de *Números algebraicos*.

Ahora, vamos a demostrar que los números reales no son numerables.

Sea $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$, si un desarrollo decimal de x está dado por:

$$x = 0.b_1 b_2 ... b_m$$

donde $b_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ y $b_m \neq 0$.
Sea

$$y = \frac{b_1}{10} + ... + \frac{b_m - 1}{10^m} + \frac{9}{10^{m+1}} + \frac{9}{10^{m+2}} + ...$$

y

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{9}{10^{m+1}} + \frac{9}{10^{m+2}} + ... \\
&= \frac{9}{10^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\
&= \frac{9}{10^{m+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^m}
\end{aligned}$$

entonces $y = x$.

Por lo tanto, todo número entre 0 y 1 tiene un desarrollo decimal infinito.

Supongamos que los reales son numerables, luego

$$(0, 1) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ &. \\ &. \\ &. \\ x_n &= 0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned}$$

Sea

$$\alpha = 0.b_1 b_2 ... b_n ...$$

$$b_j = \begin{cases} 1, & \text{si } a_{jj} = 0 \\ 0, & \text{si } a_{jj} \neq 0 \end{cases}$$

$\alpha \in (0,1)$, pero $\alpha \neq x_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$

Luego $\mathbb{R}$ no es numerable.

Por lo tanto, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \notin \mathcal{A}$
$\square$

En 1882, el matemático alemán Ferdinand Lindemann, demostró que el número π es trascendental [18], pero en 1901 se descubrió un error que invalidó dicho razonamiento, el cual fue corregido por el propio Lindemann y publicado seis años después. Esta prueba sufrió modificaciones y simplificaciones por parte de Hilbert, Hurwitz y otros matemáticos.

Algunos números trascendentales son:

Números de Liouville

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n!}},\ a_n \in \{1, 2, .., 9\}$$
$$\frac{a_n}{10^{n!}} \leq \frac{9}{10^n}$$
$$\beta \leq 9.\frac{1}{9} = 1$$

Séptimo problema de Hilbert

Los números de la forma α^β

con $\alpha, \beta \in A$, $\beta \notin \mathbb{Q}$
son trascendentales?

Este problema es conocido con el nombre de *Séptimo problema de Hilbert* y fue demostrado por el matemático ruso Alexander Gelfond.

En particular, los números $2^{\sqrt{2}}$, $i^i = e^{-\pi/2}$ son trascendentales.

Para una demostración, ver [11].

4.4. e no es algebraico

Demostrar que un número es trascendental es un proceso analítico y exigente desde el punto de vista matemático, posiblemente la prueba más elemental de la trascendencia de un número real es la demostración dada por Hermite de la trascendencia del número e. Esta prueba presenta el esquema general que se ha seguido para hacer muchas demostraciones de trascendencia de un número que consiste en términos generales en suponer que son algebraicos, a continuación, se construye un procedimiento que al aplicarlo a una función polinomial particular nos conduce a una igualdad en donde una parte es un entero mayor o igual a 1 y la otra parte de la desigualdad es un número menor que 1 y de esta manera se llega a una contradicción. Veamos a continuación esta prueba.

Sea $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ con $\partial f = r > 0$. Si

$$F(x) = \sum_{k=0}^{r} f^{(k)}(x), \text{ y }, \; g(x) = e^{-x}F(x)$$

entonces

$$g'(x) = -e^{-x}F(x) + e^{-x}F'(x)$$
$$g'(x) = -e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{r} f^{(k+1)}(x) - f^{(k)}(x)\right)$$

Luego

$$g'(x) = -e^{-x}f(x)$$

Sea $k \in \mathbb{N}, k > 0$, entonces por el Teorema del valor medio tenemos que

$$g(k) - g(0) = kg'(\theta_k), \text{ para algún } 0 < \theta_k < k, \text{ entonces}$$

$$e^{-k}F(k) - F(0) = kg'(k\delta_k), \text{ siendo } \delta_k = \theta_k/k$$

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -ke^{-k\delta_k}f(k\delta_k)$$
$$F(k) - F(0)e^k = -ke^{k(1-\delta_k)}f(k\delta_k)$$

Supongamos que e es algebraico, luego existen enteros $c_0, c_1, ..., c_n$, $c_n \neq 0$ no todos nulos tales que

$$c_0 + c_1 e + ... + c_n e^n = 0$$
$$-c_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k e^k, \tag{4.1}$$

Como

$$c_kF(k) - F(0)c_ke^k = -kc_ke^{k(1-\delta_k)}f(k\delta_k)$$
$$\sum_{k=1}^{n} c_kF(k) - F(0)\sum_{k=1}^{n} c_ke^k = -\sum_{k=1}^{n} kc_ke^{k(1-\delta_k)}f(k\delta_k)$$

por lo visto en (4.1)

$$\sum_{k=1}^{n} c_kF(k) - F(0)(-c_0) = -\sum_{k=1}^{n} kc_ke^{k(1-\delta_k)}f(k\delta_k)$$

de donde

$$\sum_{k=0}^{n} c_k F(k) = -\sum_{k=1}^{n} k c_k e^{k(1-\delta_k)} f(k\delta_k)$$

Tomemos en particular el siguiente polinomio.
Sea p primo, $p > c_0$ y $p > n$

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(1-x)^p(2-x)^p...(n-x)^p$$

entonces $\partial f = np + p - 1 = r$

1. Sea $1 \leq k \leq n$, $J = 0, ..., p-1$, es claro que

$f(x) = h_k(x)(k-x)^p$ para algún polinomio $h_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$

$k - x | f^{(J)}(x)$, $\forall J = 0, ..., p-1$, luego

$f^{(J)}(k) = 0$, $\forall J = 0, ..., p-1$ y $\forall k = 1, ..., n$

2. $J = 0, ..., p-2$ y $k = 0$

$f(x) = l(x)x^{p-1}$ para algún polinomio $l(x) \in \mathbb{Q}[x]$

$x | f^{(J)}(x)$, $0 \leq J \leq p-2$, de donde

$f^{(J)}(0) = 0$, $\forall 0 \leq J \leq p-2$

Como

$$f(x) = \frac{g(x)}{(p-1)!}$$

siendo

$$g(x) = (n!)^p x^{p-1} + b_p x^p + ... + (-1)^{np} x^r$$

entonces $g^{(p-1)}(0) = (n!)^p (p-1)!$, luego

$f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$

3. Si $J \in \{p, p+1, ..., r\}$ y $k = 0, 1, ..., n$

Como
$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{l=0}^{r} d_l x^l$$
entonces
$$f^{(J)}(x) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{l=J}^{r} d_l x^{l-J}$$
esto es,
$$f^{(J)}(x) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{l=J}^{r} d_l l(l-1)...(l-J+1)x^{l-J}$$
Si llamamos
$$bl = \frac{l(l-1)...(l-J+1)(l-J)!d_l}{(p-1)!(l-J)!}$$
entonces
$$b_l = d_l \frac{l!}{(p-1)!(l-J)!} = d_l \frac{J!}{(p-1)!} \binom{l}{J}$$
Pero como $J \geq p$ entonces $b_l \in \mathbb{Z}$ y $p|b_l$, $\forall l = J, ..., r$

Por lo tanto, $p|f^{(J)}(k)$, $\forall J \in \{p, ..., r\}$ y $\forall k = 0, ..., n$

Luego si $1 \leq k \leq n$, entonces
$$F(k) = \sum_{J=p}^{r} f^{(J)}(k)$$
Lo cual nos permite afirmar que $p|F(k)$

Por otra parte como
$$F(0) = \sum_{J=p-1}^{r} f^{(J)}(0)$$
$$F(0) = f^{(p-1)}(0) + \sum_{J=p}^{r} f^{(J)}(0)$$
$$F(0) = (n!)^p + mp$$

para algún $m \in \mathbb{Z}$

$$c_0 F(0) = c_0(n!)^p + mpc_0$$

Si p dividiera a $F(0)$ entonces

$p|c_0(n!)^p$, luego $p|c_0$ o $p|(n!)^p$

Lo cual es imposible, de donde $p \nmid F(0)$ y como $p \nmid c_0$, entonces $p \nmid c_0 F(0)$

Como $F(k) \in \mathbb{Z}$ y $p|F(k)$, $\forall k = 1, ..., n$, entonces $p| \sum_{k=1}^{n} c_k F(k)$

De lo anterior de desprende que

$\sum_{k=0}^{n} c_k F(k) \in \mathbb{Z}$, y $p \nmid \sum_{k=0}^{n} c_k F(k)$, por lo tanto

$$\left| \sum_{k=0}^{n} c_k F(k) \right| \geq 1$$

de donde

$$1 \leq \left| \sum_{k=1}^{n} k c_k e^{k(1-\delta_k)} f(k\delta_k) \right|$$

pero

$$\left| \sum_{k=1}^{n} k c_k e^{k(1-\delta_k)} f(k\delta_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} k|c_k|e^k \frac{k^{p-1}}{(p-1)!} \prod_{k=1}^{n} |1 - k\delta_k|^p$$

$$|1 - k\delta_k|^p \leq (1+k)^p \leq (1+n)^p \leq (1+n)^{np}$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k|c_k|e^k \frac{k^{p-1}}{(p-1)!} \prod_{k=1}^{n} |1 - k\delta_k|^p &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} k|c_k e^k| \right) \frac{n^p((1+n)^n)^p}{n(p-1)!} \\ &\leq \frac{p}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} k|c_k|e^k \right) \frac{\alpha^p}{p!} \end{aligned}$$

siendo $\alpha = n(1+n)^n$

Pero como $\lim_{m \to \infty} \dfrac{\alpha^m}{m} = 0$

Siendo $\beta = \frac{p}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k|c_k|e^k\right)$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall m > N,\ \beta\frac{\alpha^m}{m!} < 1$

Como hay infinitos primos, tomamos un primo $p > N$

Lo cual es una contradicción.

$\square$

Capítulo 5

Demostraciones de Teorema Fundamental del Algebra a partir de la Variable Compleja

5.1. Demostración empleando el Teorema de la Integral de Cauchy

5.1.1. Biografia de Cauchy

Augustin-Louis Cauchy Nació en París el 32 de agosto de 1789. Este ilustre matemático es considerado como hijo de la revolución, porque nació pocas semanas después de la Caída de la Bastilla. "En su niñez creció en malas condiciones, con un cuerpo desnutrido". Cauchy pasó desde la Escuela Politécnica al servicio de Napoleón.

Después del derrumbe del orden napoleónico, este hombre volvió a Francia poniendo fin a un autoexilio al cual se había sometido por sus posiciones favorables a la monarquía y en contra de las corrientes republicanas. Fue Presidente de la Academia de Ciencias de París, y por sus manos pasaron muchos escritos de los más prestigiosos matemáticos de la primera mitad del Siglo XIX. Algunos de ellos, no fueron estudiados con el cuidado y rigor que merecían como los de Abel y Galois, pero posteriormente la comunidad matemática entendió la trascendencia de los mismos. A pesar de estos errores su inventiva y creatividad le depararon un sitio muy importante en el mundo de la matemática por haber sido el gestor y creador de revolucionarias formas y teorías matemáticas.

En 1821 publicó su obra **Análisis algebraico**. Dos años después, "**Resumen de Lecciones sobre el Cálculo Infinitesimal**", en 1826 "**Lecciones sobre la aplicación del Cálculo Infinitesimal**", y en 1829 "**Lecciones sobre el Cálculo Diferencial**". Estas obras representan un cambio fundamental en el tratamiento del cálculo infinitesimal; tanto los teoremas, como los métodos y las definiciones que allí aparecieron, fueron incorporados a la mayoría de las presentaciones del análisis en los siglos XIX y XX. Puede decirse que a Cauchy se le debe el estudio del cálculo a partir del límite, enfoque que se contrapone con la forma poco rigurosa y más de tipo algebraico como hacían el cálculo sus contemporáneos y antecesores.

Cauchy definió el concepto de continuidad, le dio rigor al tratamiento del cálculo y actuando en contravía con lo que se venía haciendo hasta el momento, eliminó el álgebra como base para la deducción de los principales resultados del cálculo. En la introducción de la obra "**Análisis Algebraico**" manifiesta:

"Para la naturaleza de mis métodos, he pensado darles todo el rigor demandado en la geometría (euclidiana), de modo que no sea necesario jamás recurrir a las razones extraídas de la generalidad del álgebra. Las razones de esta especie, aunque son admitidas de manera común, sobre todo en el paso de las series convergentes a las divergentes, y de las cantidades reales e imagina-

rias, solo pueden ser consideradas, me parece, como inducciones adecuadas para hacer en ocasiones plausible la verdad, pero tienen poco que ver con la exactitud tan celebrada de las ciencias matemáticas".

El cambio de punto de vista de Euler al punto de vista de Cauchy en el concepto de continuidad fue fundamental. En el primer caso la continuidad era una propiedad global, mientras que en el segundo es una propiedad local. Pero el concepto de continuidad demostró ser muy sutil y no fue completamente entendido ni siquiera por Cauchy y sus contemporáneos de la primera mitad del siglo XIX especialmente en procesos que utilizan el infinito. Por ejemplo:

Cauchy demostró que una suma infinita (una serie convergente) de funciones continuas es una función continua. Esto es incorrecto, ya que Niel Henrik Abel probó lo contrario.

El error en la demostración de Cauchy resultó del hecho de no haber distinguido entre la convergencia y la convergencia uniforme de una serie de funciones, problema que fue resuelto por Weierstrass en la segunda mitad del Siglo XIX.

Cauchy fue el primero en dar un tratamiento razonable al análisis basado en una definición del concepto de límite: "Cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo hasta acabar diferenciándose muy poco de el, haciéndose tan pequeña (la diferencia) como uno desee, este último (valor fijo) es llamado el límite de todos lo otros".

También, definió un infinitesimal o cantidad infinitamente pequeña, como una variable con cero como su límite: "Se dice que una cantidad variable es infinitamente pequeña cuando su valor decrece indefinidamente de tal forma que converge hacia el valor cero".

Las nuevas propuestas de Cauchy para darle rigor al cálculo, generaron sus propios problemas y tentaron a sus opositores, quienes consideraban que las principales fallas de este modo eran:

- Las definiciones verbales de los conceptos de límite y continuidad y el frecuente uso del lenguaje de infinitesimales.

- Su apelación intuitiva a la geometría para probar la existencia de varios límites.

Estas críticas a la obra de Cauchy aunque son verdaderas no invalidan el importante aporte del genial matemático francés al desarrollo del cálculo. Sus definiciones y métodos fueron adoptados por los principales teóricos de esta nueva disciplina.

En síntesis, la matemática moderna debe a Cauchy contribuciones significativas que marcan una separación de la matemática del siglo XVIII. Una de ellas consistió en introducir el rigor en el análisis matemático. En esta transformación fue uno de los grandes precursores, junto con Gauss y Abel.

Sin preguntarse si lo que él inventaba tenía o no aplicaciones para las otras ramas de las matemáticas, este matemático desarrolló sus conceptos como sistema abstracto. Sus predecesores, con excepción de Euler, hallaron su inspiración partiendo de las aplicaciones matemáticas. Esta afirmación tiene, como es natural, numerosas excepciones, especialmente en aritmética: pero antes de Cauchy pocos, buscaron descubrimientos provechosos en las simples operaciones del álgebra.

Cauchy penetró más profundamente, vio las operaciones y sus leyes combinatorias que palpitaban bajo las simetrías de las fórmulas algebraicas, las aisló, y llegó así a la teoría de los grupos. En la actualidad, esta teoría, es de fundamental importancia en muchos campos de la matemática pura y aplicada, desde la teoría de ecuaciones algebraicas, hasta la geometría de los cristales, para solo mencionar una de sus aplicaciones. Sus ulteriores desarrollos (en la parte analítica) se extienden hasta alcanzar la moderna teoría de ecuaciones diferenciales.

5.1.2. Teorema de la Integral de Cauchy

Definición 5.1. *Una **curva** del plano es la imagen de un intervalo real por una función continua del tipo* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Definición 5.2. *Una curva es **cerrada** si al recorrerla a partir de un punto, llegamos al mismo punto.*

Definición 5.3. *Una curva es **simple** si no se corta a sí misma.*

Definición 5.4. *Una curva es de **Jordan** si es simple y cerrada.*

Definición 5.5. *Sea* $f = u + iv$ *una función de variable compleja definida en un conjunto abierto* S *del plano complejo* $\mathbb{C}$. *Se dice que* f *es **analítica** en* S *si existe la derivada* f' *en cada punto de* S.

Definición 5.6. *Un conjunto* $S \subseteq \mathbb{C}$ *es **abierto** si* $\forall z \in S$, $\exists r > 0$ *tal que el entorno con centro en* z *y radio* r *está contenido en* S.

Definición 5.7. *Un conjunto* $S \subseteq \mathbb{C}$ *es **separable** si existen* A *y* B *no vacíos tales que:*

$$S = A \cup B,\ A \cap B = \emptyset,\ \overline{A} \cap B = \emptyset \text{ y } \overline{B} \cap A = \emptyset$$

Definición 5.8. *Un conjunto es **conexo** si no es separable.*

Definición 5.9. *Un conjunto* $D \subseteq \mathbb{C}$ *es un **dominio** si es abierto y conexo.*

Definición 5.10. *Un dominio es **simplemente conexo**, si su complemento también es conexo.*

Teorema 5.1. ***Teorema de la Integral de Cauchy***
Sea f *analítica en un dominio simplemente conexo* D, $\Gamma \subseteq D$ *una curva de Jordan, entonces*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

Para una demostración ver [3].

5.1.3. Demostración del Teorema Fundamental del Álgebra

El teorema fundamental del álgebra se va a demostrar utilizando el teorema de la integral de Cauchy por reducción al absurdo.

Supongamos que existe $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ tal que $f(w) \neq 0, \forall w \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$$

Se define

$$\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{m} \overline{a_n} z^n$$

Sea

$$g(z) = f(z)\overline{f}(z)$$

Supongamos que para algún $w \in \mathbb{C}$ se tenga $g(w) = 0$, entonces

$$f(w)\overline{f}(w) = 0$$

De donde $\overline{f}(w) = 0$, es decir,

$$\sum_{n=0}^{m} \overline{a_n} w^n = 0$$

Tomando el conjugado

$$\sum_{n=0}^{m} a_n (\overline{w})^n = 0$$

De donde $f(\overline{w}) = 0$, lo cual es una contradicción.

Luego $g(w) \neq 0, \forall w \in \mathbb{C}$

Si $w \in \mathbb{R}$, $g(w) \neq 0$

$$\overline{f}(w) = \overline{f(w)}$$

Luego,

$$g(w) = f(w)\overline{f(w)} = ||f(w)||^2 > 0$$

$\forall w \in \mathbb{R}$, $g(w) > 0$

$$\frac{1}{g(w)} > 0, \forall w \in \mathbb{R}$$

En particular si $w = 2\cos(\theta)$, entonces

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{g(2\cos(\theta))} d\theta > 0, \tag{5.1}$$

Por otra parte, si $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$

Luego $z + z^{-1} = 2\cos(\theta)$, además

$$g(z) = \textstyle\sum_{n=0}^{2m} b_n z^n, \text{ en donde } b_{2m} = ||a_n||^2 > 0$$

Si llamamos

$$h(z) = z^{2m} g\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Entonces

$$h(z) = z^{2m} \sum_{n=0}^{2m} b_n \left(z + \frac{1}{z}\right)^n$$

$$h(z) = \sum_{n=0}^{2m} b_n z^{2m-n} \left(z^2 + 1\right)^n$$

Como $h(0) = b_{2m} > 0$ y $h(z) \neq 0, \forall z \neq 0$
Entonces $h(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Si

$$l(z) = \frac{z^{2m-1}}{h(z)} = \frac{1}{zg(z + 1/z)}$$

Entonces es claro que $l(z)$ es entera, es decir, analítica en toda parte.
Por el Teorema de la Integral de Cauchy, se tiene que

$$\int\limits_{C_1^+(0)} l(z)dz = 0, \tag{5.2}$$

Pero

$$\int\limits_{C_1^+(0)} l(z)dz = \int\limits_{C_1^+(0)} \frac{1}{zg\left(z+\frac{1}{z}\right)}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{g(2\cos(\theta))}d\theta$$

Al observar (5.1) y (5.2) llegamos a una contradicción.
□

5.2. Demostración empleando la Fórmula Integral de Cauchy

5.2.1. Fórmula Integral de Cauchy

Teorema 5.2. ***Teorema de la curva de Jordan***
Toda curva de Jordan divide el plano en dos regiones disyuntas, siendo una acotada y la otra no acotada, y siendo Γ la frontera común entre estas dos regiones.

Para una demostración, ver [3]

Teorema 5.3. ***Fórmula Integral de Cauchy***
Sea f analítica en un dominio simplemente conexo D, $\Gamma \subseteq D$ una curva de Jordan y $a \in R$ en donde R es la región acotada determinada por Γ, entonces

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a)$$

Para una demostración ver [3]

5.2.2. Demostración del Teorema Fundamental del Álgebra

Supongamos que exista un polinomio

$$p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$$

con $a_n \neq 0$, y algún $n \geq 1$ tal que $p(w) \neq 0$, $\forall w \in \mathbb{C}$
Sea

$$f(z) = \frac{a_0}{p(z)}$$

f es entera.

Por la fórmula integral de Cauchy, tenemos que

$$\int\limits_{C_R^+(0)} \frac{f(z)dz}{z} = 2\pi i f(0) = 2\pi i$$

$\forall R > 0$

Como el $\lim_{z\to\infty} \frac{p(z)}{a_n z^n} = 1$, entonces

Para $\epsilon = 1/2$, existe $\delta > 0$ tal que si $||z|| > \delta$, entonces

$$\left|\left|\frac{p(z)}{a_n z^n} - 1\right|\right| < \frac{1}{2}$$

$$1 - \left|\left|\frac{p(z)}{a_n z^n}\right|\right| \leq \left|\left|\frac{p(z)}{a_n z^n} - 1\right|\right| < \frac{1}{2}$$

$\left|\left|\frac{p(z)}{a_n z^n}\right|\right| > \frac{1}{2}$ si $||z|| > \delta$, luego

$$||z|| > \delta, \frac{1}{||p(z)||} < \frac{2}{||a_n||||z||^n}$$

Sea $R > \delta$

$$2\pi = \left|\left|\int\limits_{C_R^+(0)} \frac{f(z)dz}{z}\right|\right|$$

$$2\pi = \left|\left|\int\limits_{C_R^+(0)} \frac{a_0 dz}{zp(z)}\right|\right|$$

$$2\pi \leq \frac{2||a_0||}{||a_n||R^{n+1}} 2\pi R$$

$$1 \leq \frac{2||a_0||}{||a_n||R^n}, \quad \forall R > \delta$$

Lo cual es una contradicción, porque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{R^n} = 0$$

□

5.3. Demostración empleando el Teorema de Liouville

5.3.1. Biografia de Liouville

Joseph Liouville Nace en el seno de una distinguida familia el 23 de marzo de 1809 en St. Omer Francia. Estudia en la Escuela Politécnica, en donde se le nombra profesor en 1833.

En 1836 funda el **Journal des Mathematiques Pures et Apliquées** que se convierte en el principal órgano de difusión de la actividad matemática del sigo XIX. Su producción matemática fue bastante extensa. En Variable Compleja demostró que toda función entera y acotada es constante. Creó la teoría de diferenciación fraccionaria al dar un significado razonable al símbolo $\frac{d^n y}{dx^n}$ para n racional positivo de la siguiente manera:

Sabemos que si f es analítica en un dominio D y $a \in D$ entonces

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

en donde C es una curva simple cerrada contenida en D y a pertenece al interior de C. Si recordamos que la función gamma definida como

$$\Gamma(P) = \int_0^{\infty} t^{P-1}e^{-t}dt \quad \forall P > 0$$

es tal que $\Gamma(n+1) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces,

$$f^{(n)}(a) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Liouville extendió esta fórmula tomando n en los racionales positivos. Este genial matemático fue el primero en resolver un problema de valores de frontera reduciéndolo a la solución de una ecuación integral, convirtiéndose así en el iniciador de este importante campo del análisis moderno. Uno de sus aportes más ingeniosos fue la demostración de que integrales elípticas de primera y segunda clase así como también integrales del tipo

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\sin ax}{1+x^2} dx$$

y otras más, no pueden expresarse en términos de un número finito de funciones elementales, es decir en términos de logaritmos, exponenciales, funciones trogonométricas, polinomios, funciones racionales o la composición de funciones de estos tipos. Este importante resultado lo obtuvo en 1835 al generalizar un teorema que había deducido en 1834 el cual afirma:

"Si f es una función algebraica en x y $\int f(x)dx$ no es elemental, entonces, $\int f(x)dx = A_1 \ln u_1(x) + A_2 \ln u_2(x) + ... + A_n \ln u_n(x) + k$ en donde $u_1, u_2, ..., u_n$ son funciones algebraicas en x y $A_1, A_2, ..., A_n$ son constantes".

En la revista **Mathematics Magazine**, Vol. 53, N° 4 aparece el artículo titulado "Integration in finite terms: The Liouville Theory" escrito por T. Kasper en donde se hace un recuento del trabajo de Liouville en este campo, así como también de las dificultades que encontró al clasificar tales funciones. En particular Liouville demostró que:

"si f y g son funciones racionales y si $\int e^{f(x)} g(x)dx$ es una función elemental, entonces, $\int e^{f(x)} g(x)dx = e^{f(x)} w(x) + k$ en donde $w(x)$ en una función racional".

En mecánica Hamiltoniana Liouville demostró que las integrales de volumen no varían con el tiempo en el espacio de fase. Conjuntamente con el matemático suizo Jacques Charles Francois Sturm (1803-1855) desarrolló la teoría de ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville, la cual ha ido adquiriendo una importancia cada vez mayor, tanto en el campo de las matemáticas puras como en el de la física matemática.

En teoría de números publicó cerca de 200 trabajos entre los cuales se destacaron la prueba de que e no es raíz de una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros, la cual lo condujo a la conjetura de la trascendencia de e. La condición que descubrió y que permitió construir los primeros números trascendentes abrió las puertas para la construcción de otros números trascendentes, el método seguido por Liouville inspiró en 1844 a Carlos Gustavo Jacobo Jacobi (1804-1851) para demostrar las trascendencia de los números de la forma

$$\frac{1}{n^{1!}} + \frac{1}{n^{2!}} + \frac{1}{n^{3!}} + \frac{1}{n^{4!}} + ... + \frac{1}{n^{m!}} + ... \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > 1$$

Liouville es recordado con gratitud, por haber sido quien publicó por primera vez los trabajos del genio creador de la teoría de grupos Evariste Galois, después de su prematura muerte.

A pesar de que Liouville fue el más grande difusor de la actividad matemática del siglo XIX, las generaciones posteriores no hemos correspondido debidamente con la difusión que merecen sus trabajos matemáticos como científico creativo. Aún no se han publicado sus obras compendiadas.

Liouville fue profesor de a Universidad de la Sorbona Y del Collége de Francia a partir de 1836. Murió a la edad de 73 años el 8 de septiembre de 1882.

5.3.2. Teorema de Liouville

Definición 5.11. *Una función f es una **función entera** si es derivable en todos los puntos del plano complejo $\mathbb{C}$.*

Definición 5.12. *Una función $f : S \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una **función acotada**, si existe un número positivo M tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in S$*

Teorema 5.4. ***Teorema de Liouville***
Toda función entera y acotada es constante.

Para una demostración ver [19]

5.3.3. Demostración del Teorema Fundamental del Álgebra

Supongamos que existe un polinomio $f(z)$ no constante que no tiene raíces en los complejos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n$$

$f(w) \neq 0, \forall w \in \mathbb{C}$.

Ya que en caso contrario se factoriza el coeficiente que acompaña a z^n.

Sea

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

g es entera. Tomemos

$$R = 2 \sum_{k=1}^{n} ||a_k|| + 1 > 1$$

Si $D = \overline{N}_R(0) = \{z \in \mathbb{C} | ||z|| \leq R\}$
$\exists M_1 > 0$, tal que $\forall z \in D$, $||g(z)|| \leq M_1$
Sea $z \in \mathbb{C} - D$ entonces
$||z|| > R$ Como

$$f(z) = z^n \left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + ... + \frac{a_n}{z^n}\right)$$
$$f(z) = z^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z^k}\right)$$

Entonces

$$||f(z)|| = ||z||^n \left|\left|1 - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z^k}\right)\right|\right|$$

$$||f(z)|| \geq R^n \left(1 - \left|\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z^k}\right|\right|\right)$$

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z^k}\right|\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{||a_k||}{||z||^n}$$

$||z||^k \geq R^k \geq R > 1$

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z^k}\right|\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{||a_k||}{R}$$

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z^k}\right|\right| \leq \frac{1}{R}\left(\sum_{k=1}^{n} ||a_k||\right)$$

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z^k}\right|\right| \leq \frac{1}{R}\left(\frac{R-1}{2}\right)$$

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z^k}\right|\right| \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2R}$$

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z^k}\right|\right| < \frac{1}{2}$$

$$||f(z)|| > R^n \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$||f(z)|| > \frac{R^n}{2}$$

$$||g(z)|| < \frac{2}{R^n}$$

Sea

$$M = \max\left\{\frac{2}{R^n}, M_1\right\}$$

$\forall z \in \mathbb{C}, ||g(z)|| < M$

Como g es entera y acotada entonces g es constante. Entonces f es constante, lo cual es una contradicción.
□

5.4. Otra demostración del TFA empleando la Variable Compleja

Teorema 5.5. *Sea* $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ *en* $\mathbb{C}[z]$. *Entonces existe* $r > 0$ *tal que si* $||z|| > r$, *entonces* $||f(z)|| \geq ||a_0||$.

Demostración. Supongamos que no, esto es:

$$\neg(\exists r > 0 | \forall z \in \mathbb{C} - \overline{N}_r(0), ||f(z)|| \geq ||a_0||)$$

Entonces

$$\forall r > 0, \exists z \in \mathbb{C} - \overline{N}_r(0), ||f(z)|| < ||a_0||, \tag{5.3}$$

En particular, si tomamos

$$r = 2\sum_{k=1}^{n} ||a_{n-k}|| + 1$$

Existe $z \in \mathbb{C} - \overline{N}_r(0), ||f(z)|| < ||a_0||$.
Sea z uno de los complejos que cumple esta condición, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right) \\ ||f(z)|| &= ||z||^n \left|\left|1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{z^k}\right|\right| \\ ||f(z)|| &\geq ||z||^n \left(1 - \left|\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{z^k}\right|\right|\right) \end{aligned}$$

Como

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{z^k}\right|\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{||a_{n-k}||}{||z||^k}$$

y

$$||z|| > r > 1$$

Entonces

$$||z||^k > r^k > r$$

Luego

$$\frac{1}{||z||^k} < \frac{1}{r}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n-k}}{z^k}\right\| &< \frac{1}{r}\left(\sum_{k=1}^{n}||a_{n-k}||\right)\\
\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n-k}}{z^k}\right\| &< \frac{1}{r}\frac{r-1}{2}\\
\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n-k}}{z^k}\right\| &< \frac{1}{2}-\frac{1}{2r}\\
\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{n-k}}{z^k}\right\| &< \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

De donde

$$||f(z)|| > \frac{||z||^n}{2}, \tag{5.4}$$

de (5.3) y (5.4), se tiene que

$$||z||^n < 2||a_0||$$

Como $r < ||z||$, entonces $r^n < ||z||^n$.
Es decir,

$$\begin{aligned}
r^n &< 2||a_0||\\
\left(2\sum_{k=1}^{n}||a_{n-k}||+1\right)^n &< 2||a_0||
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción porque $2||a_0||$, es uno de los sumandos.

$\square$

5.4.1. Demostración del Teorema Fundamental del Álgebra

Para demostrar el teorema fundamental del álgebra se va a utilizar el teorema anterior, tomamos

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n \text{ en } \mathbb{C}[z].$$

Primero se demostrará que $||P(z)||$ tiene un mínimo cuando z varía sobre todo el plano complejo; y luego, si $||P(z_0)||$ es el mínimo de $||P(z)||$, entonces se demostrará que $P(z_0) = 0$.

Por el teorema anterior podemos afirmar que existe $M > 0$, tal que

$$||P(z)|| \geq ||a_0||, ||z|| > M, \tag{5.5}$$

Ahora, la función continua $||P(z)||$ tiene un mínimo cuando z varía sobre el disco compacto $\{||z||,\ ||z|| \leq M\}$ (Ver [4]).

Sea z_0 tal que

$$||P(z_0)|| = min \left\{ ||P(z)|| \mid ||z|| \leq M \right\}, \tag{5.6}$$

En particular, $||P(z_0)|| \leq ||P(0)|| = ||a_0||$, pero, por (5.5),
$||P(z_0)|| \leq ||P(z)||, ||z|| > M$.
Comparando con (5.6),

$$||P(z_0)|| \leq ||P(z)||, \tag{5.7}$$

Para todo z complejo.
Como $P(z) = P((z - z_0) + z_0)$, podemos escribir $P(z)$ como una suma de potencias de $z - z_0$, luego existe un polinomio Q sobre los complejos, tal que

$$P(z) = Q(z - z_0), \tag{5.8}$$

Por (5.7) y (5.8),

$$||Q(0)|| \leq ||Q(z)||, \tag{5.9}$$

Para todo z complejo.

Ahora mostraremos que $Q(0) = 0$, lo cual demostrará el teorema, ya que por (5.8), $P(z_0) = Q(0)$.
Sea $j \neq 0$ el menor exponente para el cual z^j tiene un coeficiente diferente de cero en Q. Luego podemos escribir

$$Q(z) = c_0 + c_j z^j + ... + c_n z^n, c_j \neq 0$$

Factorizando z^{j+1} de los términos mayores de esta expresión, tenemos

$$Q(z) = c_0 + c_j z^j + z^{j+1} R(z), \tag{5.10}$$

Donde $c_j \neq 0$ y R es un polinomio complejo.
Si hacemos

$$-\frac{c_0}{c_j} = re^{i\theta},$$

Entonces la constante

$$z_1 = \frac{r^{1/j}}{e^{i\theta/j}},$$

Satisface

$$c_j z_1^j = -c_0, \tag{5.11}$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Entonces, por (5.10),

$$Q(\epsilon z_1) = c_0 + c_j \epsilon^j z_1^j + \epsilon^{j+1} z_1^{j+1} R(\epsilon z_1), \tag{5.12}$$

Como los polinomios están acotados sobre discos finitos, podemos encontrar un $N > 0$ tal que, para $0 < \epsilon < 1$,

$$||R(\epsilon z_1)|| \leq N$$

Luego, por (5.11) y (5.12), tenemos, para $0 < \epsilon < 1$,

$$\begin{aligned} ||Q(\epsilon z_1)|| &\leq ||c_0 + c_j \epsilon^j z_1^j|| + \epsilon^{j+1} ||z_1||^{j+1} ||R(\epsilon z_1)|| \\ &\leq ||c_0 + \epsilon^j (c_j z_1^j)|| + \epsilon^{j+1} (||z_1||^{j+1} N) \\ &\leq ||c_0 + \epsilon^j (-c_0)|| + \epsilon^{j+1} (||z_1||^{j+1} N), \\ &\leq (1 - \epsilon^j) ||c_0|| + \epsilon^{j+1} (||z_1||^{j+1} N) \\ &\leq ||c_0|| - \epsilon^j ||c_0|| + \epsilon^{j+1} (||z_1||^{j+1} N) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Si $||c_0|| \neq 0$, podemos encontrar ϵ muy pequeño tal que

$$\epsilon^{j+1}(||z_1||^{j+1}N) < \epsilon^j ||c_0||$$

En ese caso, por (5.13),

$$||Q(\epsilon z_1)|| \leq ||c_0|| - \epsilon^j ||c_0|| + \epsilon^{j+1}(||z_1||^{j+1}N) < ||c_0|| = ||Q(0)||,$$

contadiciendo (5.9).
Luego $||c_0|| = 0$, y por lo tanto, $Q(0) = c_0 = 0$.
□

Capítulo 6

Demostración del Teorema Fundamental del Álgebra a partir del Álgebra

6.1. Biografia de Galois

Evariste Galois Evariste Galois nació el 25 de octubre de 1811 en la ciudad de Bourg-la-Reine (Francia); Su madre Adélaide-Marie Dermante Galois, que descendía de una familia de reconocidos juristas era una mujer amable, pero de carácter fuerte que odiaba la tiranía. Su padre, Nicolás Gabriel Galois, un ardiente republicano de profundas convicciones ideológicas, amante de la democracia y enemigo del despotismo a tal punto que sus enemigos políticos lo condujeron al suicidio, había sido alcalde de Bourg-la-Reine durante diecisiete años, período en el cual transcurrieron los cien días de la restauración de Napoleón. De ellos heredó el profundo amor por la libertad.

Su infancia transcurrió en una de la épocas más convulsionadas de Francia. Napoleón había sido derrotado y al abdicar se reinstaura la monarquía borbónica, con Luis XVIII a la cabeza. La recuperación del poder por parte de los terra-
tenientes y la nobleza no tardó en hacerse sentir. Produciéndose modificaciones sustanciales, las cuales afectaron todas las esferas de la sociedad. La ciencia no fue ajena a este hecho, y es así como se procuro cambiar el rumbo de los principales centros de educación.

La famosa Escuela Politécnica, considerada como el primer centro de enseñanza matemática en el mundo, fue una de las primeras víctimas de esta intervención. Su organizador, el genio creador de la geometría descriptiva Gaspard Monge, fue expulsado de la Academia y Remplazado por Cauchy. Ni siquiera los colegios privados se pudieron salvar de este control. Uno de los más importantes era el Louis-le-Grand, que tenía como principal fin formar súbditos leales al rey, propósito que no cumplió cabalmente a juzgar por sus destacados egresados: Robespierre, Victor Hugo y Galois.

Evariste Galois aprobó el examen de admisión de Louis-le-Grand en 1823, gracias a la preparación previa que le había dado su madre. El ambiente despótico y autoritario que prevalecía en este colegio castraba toda posibilidad de libertad de pensamiento. Las directivas veían en muchos de estos niños "peligrosos" enemigos de la monarquía, y hacían que fueran cada vez más rígidos los mecanismo de control. En enero de 1824 los alumnos resolvieron sublevarse, pero dicha rebelión abortó antes de que se produjera, trayendo como consecuencia la expulsión de ciento quince estudiantes, todos ellos destacados jóvenes ganadores de certámenes que habían ubicado al Louis-le-Grand como el primer colegio privado de Francia; esta expulsión implicaba la imposibilidad de ser admitido en algún otro centro de educación.

Afortunadamente para el desarrollo de la matemática, Galois no fue sancionado.

El impacto que causó en este joven el internado fue tal que repercutió en su rendimiento académico; se mostraba distraído, retraído y desinteresado. Uno de esos profesores anotaba: *"Esta perdiendo el tiempo aquí, atormenta a sus maestros y constantemente recibe castigos"*. Por su parte, Galois escribía a su padre: *"parece ser mi destino el pasarme la vida en este presidio que tan bien conozco y que tanto detesto"*.

En 1828 se vio obligado a matricularse nuevamente en el segundo curso debido a que tuvo que volver a tomar la clase de retórica. Con el fin de poder sobrellevar la monotonía que le causaba la repetición de esta materia, resolvió por primera vez inscribirse en un curso de matemáticas, que figuraba como asignatura opcional del plan de estudios.

Allí conoció la obra **Eléments de géometrie**, escrita por Legendre, la cual lo introdujo al fascinante mundo de la matemática. Al fin este genio había encontrado una actividad que además de subyugarle, le permitía escapar al tedio y fastidio que le produjo el Louis-le-Grand. El estudio del libro **Resolution des equations numériques**, escrito por Lagrange, lo condujo a interesarse por el problema matemático. Al terminar el año escolar, Galois se ubicó en el segundo lugar del curso de matemáticas; no ocupó el primero porque su estilo era demasiado resumido para su maestro.

La forma de escribir se le convirtió en el principal factor que le impediría, a la postre, ser reconocido como uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos. Este estilo en vez de demeritarlo lo enaltece ya que demuestra cuán adelante estaba de sus evaluadores.

En el año de 1828 se produjeron varios acontecimientos que marcaron la orientación matemática de Galois. El primero de ellos consistió en haber empezado a obtener los criterios que permiten determinar si una ecuación algebraica es o no soluble por radicales. A estos resultados llegó después de encontrar un error en una supuesta demostración que había dado de la solubilidad de la ecuación de quinto grado; este hecho lo indujo a destacar definitivamente el camino.

El segundo fue el fracaso que tuvo consecuencia de haber sido rechazado como aspirante a la Escuela Politécnica. Por este motivo se vio obligado a inscribirse un año más en el Louis-le-Grand para hacer un curso especial de matemáticas, el cual fue muy importante tanto para su vocación como para su orientación.

En 1829 inicia su producción científica con un artículo que tituló: **Demostration d'un theoreme sur les fractions continues periodiques**, el cual fue publicado en los Annales de mathemátiques pures et appliqués publié por J.D Gergonné, Vol. XIX, No. 10, PP. 294-301. Este articulo paso desapercibido, como sucedió con todos los demás escritos de Galois que publicó en vida.

En este mismo año escribió la primera versión de una monografía donde presentaba los resultados que había obtenido sobre la solubilidad de ecuaciones algebraicas, la cual envió a la academia. Fourier se la remitió a Cauchy para que la evaluara, pero cuando Galois solicitó información sobre la misma, se le manifestó que Cauchy ni la tenía ni recordaba haberla recibido; en esta forma tan característica empezaba a actuar la ciencia oficial de la época contra el gran matemático.

Solo hasta este mismo año vino a enterarse de los aportes de Abel a la teoría de ecuaciones algebraicas, los cuales le permitieron culminar sus investigaciones alrededor del estudio de las condiciones de solubilidad de ecuaciones algebraicas.

Al terminar el curso de matemáticas Galois obtuvo el primer puesto. Pero solo ocupo el quinto lugar en la competición anual de la escuela, debido a que si bien el razonamiento del examen fue correcto y su respuesta acertada, el método seguido era, según sus evaluadores, demasiado conciso.

Tal como lo tenía planeado, Galois se volvió a presentar por segunda y ultima a la Escuela Politécnica. La versión que existe sobre este hecho es la siguiente:

Su evaluador el señor Dinet, solicitó que le dijera todo lo que sabía sobre la teoría de logaritmos. Galois se limitó a escribir en el tablero las siguientes sucesiones:

$$1,\ \ a,\ \ a^2,\ \ a^3,...$$

$$0,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,...$$

Y a continuación explico que se trataba de dos progresiones, una geométrica y la otra aritmética, y que los términos de la progresión aritmética son los logaritmos de los términos de la progresión geométrica, siendo a la base.

Mas adelante agregó que entre cada dos número de la progresión geométrica se pueden insertar $n-1$ números y lo mismo entre los correspondientes términos de la progresión aritmética, de tal manera que nuevamente los términos de la progresión geométrica sean los logaritmos de los términos de la progresión geométrica.

Su evaluador comenzó a perder la paciencia, ya que lo que estaba viendo se salía de su esquema tradicional y rutinario, y él no era capaz de concebir que pudiera existir otra forma distinta de enfocar este problema; por tal razón, le ordeno en tono agresivo que explicara esto en el tablero; Galois se limito a escribir:

$$1,\ \ a^{\frac{1}{n}},\ \ a^{\frac{2}{n}}, ..., a^{\frac{n-1}{n}}, ...$$

$$0,\ \ \frac{1}{n},\ \ \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, ...$$

El señor Dinet perdió finalmente el control, gritó y amenazó al joven, quien terminó lanzándole una almohadilla a la cara y retirándose definitivamente del examen. Resulta irónico que uno de los grandes matemáticos de todos los tiempos haya sido rechazado por una pregunta trivial, por un profesor que, cegado por su prepotencia, no fue capaz de captar la sutileza de la respuesta de su alumno. ¡Qué triste forma de figurar en la historia!

En la convulsionada Francia de la primera mitad del siglo XIX, los jóvenes maduraban muy pronto la vida política, ya que los trascendentales acontecimientos sociales que se iban produciendo inducían hacia una participación más activa. El perder de vista tan importante aspecto nos puede conducir al error de pensar que Galois era un desadaptado y no un genio científico que no fue ajeno al momento histórico que tuvo que vivir. Un terrible acontecimiento le demuestra abruptamente que él tenía que convertirse en "uno de los más vehementes republicanos", como lo afirmó años después Alexander Dumas (padre).

Víctima de la persecución de sus enemigos políticos, acaudillados por el nuevo cura párroco de Bourg-la-Reine, su padre, Nicolás Gabriel, se vio obligado a quitarse la vida en julio de 1829. El entierro se tornó en un acto protesta, que termino con disturbios, debido a que Galois señalo al sacerdote como el verdadero causante de la muerte de su padre.

Después de obtener el título como bachiller en ciencia y aprobar el examen de admisión, Evariste Galois ingreso en febrero de 1830 a la Escuela Preparatoria, la cual había sido creada en 1826 en reemplazo de Escuela Normal, fundada en los tiempos napoleónicos y suprimida en 1822.

La Escuela Preparatoria tenia como objetivo principal proveer de maestros y profesores a los colegios reales. Aunque su nivel de enseñanza era mejor que el de Louis-le-Grand y superiores los cursos que allí se ofrecían, su ambiente era similar al de este colegio.

Si bien es cierto que el concepto favorable que emitió su examinador de matemáticas fue definitivo para el ingreso a la Escuela Preparatoria, no deja de ser grotesca, por lo extremadamente desacertada, la opinión del profesor Péclet, quien en el informe sobre el rendimiento de Galois en el examen de física manifestó: *"A juzgar por su examen, parece de poca inteligencia u ocultó su inteligencia tan bien que me resultó imposible descubrirla. Si este alumno es lo que parece ser, dudo que alguna vez sea un buen profesor"*.

Ateniéndonos a tres monografías suyas que se dieron a conocer en 1830, es obvio que el grado de formación en matemáticas de Galois era muy superior al de sus profesores. Dichos trabajos se publicaron en el Bulletin de Férussac bajo los títulos: **Analyse d'une mémoire sur la resolution algebrique des equations**, Vol. XIII, abril, PP. 271-272; **Note sur la resolution des equations numeriques**, Vol. XIII, junio, PP. 413-414; **Sur la theorie des nombres**, Vol. XIII, junio, PP. 428-435. En ellos presenta algunos de los resultados que había encontrado, relativos a las condiciones de solubilidad de ecuaciones.

Su enorme capacidad producía entre sus compañeros celos o admiración. Uno de los que más lo admitió fue Auguste Chevalier, que era hermano de un famoso economista líder de la secta religiosa Saint-Simon; este descubrió pronto que estaba ante la presencia de un genio científico y se convirtió en el más fiel amigo de Galois.

Fue precisamente Chevalier quien lo indujo, en febrero de 1830, a presentar por segunda vez a la Academia la memoria sobre las condiciones de solubilidad de ecuaciones por medio de radicales; otra vez la ciencia oficial le volvería a tirar la puerta en la cara. La monografía había corrido con la misma suerte de la primera; esto es, nuevamente perdieron el manuscrito; en esta ocasión parece ser que Fourier la tuvo en sus manos, pero debido a su muerte nadie supo si la conservó o se la entregó a otra persona.

El gobierno de Carlos X fue desprestigiándose cada día más. En julio de 1830 disolvió la cámara y abolió la libertad de prensa. Estos hecho no fueron sino la culminación de una serie de medidas arbitrarias que condujeron hacia un proceso insurreccional, el cual culminó con la caída del rey. La burguesía se aprovechó del movimiento y logro coronar como nuevo rey de Francia al duque de Orleáns, Luis Felipe, cuyo padre era hijo natural de Luis XIV.

Mientras el pueblo combatía en las calles, el señor Guigniault, rector de la Escuela Preparatoria, resolvió encerrar a los alumnos con el fin de impedir que participaran en los disturbios. A pesar de sus insistencia, Galois nada pudo hacer; pero esto no fue ápice para que una vez triunfó la insurreccion, el señor Guigniault cambiara su actitud y adhiriera prontamente al gobierno de Luis Felipe, logrando que el nuevo monarca le reconociera el mismo nombre y categoría a la Escuela Preparatoria que el que tenía su predecesora, la Escuela Normal.

Cuando Galois pudo salir de este encierro, comprendió que su acción política no tendría ninguna repercusión aisladamente. Por esto resolvió vincularse a la **Sociedad de Amigos del Pueblo**, que era el único movimiento republicano activo. Allí conoció valiosos ejemplos de desprendimiento y entrega, aunque también tuvo que tartar con algunos oportunistas, y aun con amargado y espias.

Convencido de que era su deber denunciar las maniobras del rector, resolvió escribir un artículo en el periódico Gazette des Ecoles, donde narraba lo que realmente sucedió. La respuesta de Guigniault fue inmediata; solicitó al ministro de educación la expulsión de Galois por medio de una carta en la cual manifestaba entre otras cosas: *"No existe ya ningún sentimiento moral en este joven y quizá no lo haya tenido desde hace tiempo"*. En 1850, dieciocho años después de la muerte de Galois, y cuando ya empezaba a hacerse famoso como uno de los matemáticos más prominentes de Francia, Guigniault manifestó: *"El joven Galois demostraba genio en matemática.*

Nosotros, en la Escuela Normal siempre lo supimos…todo lo contrario de los necios examinadores de la Escuela Politécnica que lo aplazaron dos veces. ¿Puede imaginarse usted semejante estupidez?", además sostuvo que Galois dejó la escuela después del primer año. ¡Que poca memoria tenía el pobre señor Guigniault, no recordaba que él era quien había solicitado la expulsión de Galois!

Después de esta sanción, Galois se enlisto en la tercera batería de la Guardia Nacional de Artillería, la cual estaba integrada por un buen numero de republicanos; pero su permanencia allí fue muy corta, debido a que Luis Felipe la disolvió por la participación que tuvo en los disturbios del 21 de diciembre de 1830.

Deseoso por difundir sus teorías algebraicas, resolvió dictar un curso en enero de 1831. El anuncio por el cual se invitaba a asistir decía: *"El curso está compuesto de teorías, algunas de las cuales son nuevas y ninguna de ellas ha sido publicada o expuesta al público. Aquí mencionaremos solo una nueva teoría de las cantidades imaginarias, la teoría de las ecuaciones solubles por radicales, la teoría de los números y las funciones elípticas tratadas por el algebra pura".*

A la primera clase asistieron unos 40 alumnos, la semana siguiente asistieron diez y la tercera solo cuatro. Posiblemente esto se debió al hecho de que a menudo el genio no es consciente de las limitaciones cognoscitivas que tenemos los demás hombres. Finalmente el curso se suspendió por razones obvias.

Nuevamente su fiel amigo Chevalier, conocedor de la importancia de la memoria sobre las condiciones de solubilidad de ecuaciones por medio de radicales, insistió para que Galois la presentara por tercera vez a la Academia; el accedió ilusionado por la promesa que le había hecho Poisson, en el sentido que esta vez tendría especial cuidado para que no se perdiera. La monografía fue enviada el 16 de enero de 1831. Francois Arago, secretario de la Academia, nombró como evaluadores a Lacroix y Poisson.

Los acontecimientos de diciembre de 1830 trajeron como consecuencia la detención le diecinueve miembros de la disuelta Guardia Nacional de Artillería, Galois no estaba entre ellos. Después de un juicio, salieron absueltos; por tal motivo, el 9 de mayo de 1831, los republicanos organizaron un banquete en honor de estos diecinueve jóvenes. Durante este homenaje, Galois ofreció un brindis por Luis Felipe, portando en la mano izquierda una copa de vino y en la derecha un puñal que apuntaba hacia la superficie del vino, lo cual significaba una amenaza a la vida del rey. Al dia siguiente fue detenido y más tarde lo trasladaron a la cárcel Sainte-Pélagie. El 15 de junio se le sometió a un juicio en el que enfrentó con valor las acusaciones que se le hicieron y convirtió la silla de los acusados en una tribuna de denuncia por traición de la revolución de 1830. Finalmente el jurado dio su veredicto declarándolo inocente.

La libertad de Galois duró poco tiempo, ya que menos de un mes después fue puesto nuevamente preso. En esta ocasión se le acusaba del porte ilegal de armas y del uso del uniforme de artillero; después de tres meses de retención preventiva, fue condenado a seis meses más de prisión en Sainte-Pélagie.

Esta cárcel era considerada en su época "la cloaca más pestilente de París". Según lo demuestran los documentos históricos, Galois fue víctima de una especial persecución, ya que lo consideraban un "radical peligroso". Cuán lejos estaban de la realidad aquellos historiadores que consideraban el trato dado a los presos políticos en Sainte-Pélagie como humano y razonable.

Varios hechos corroboraban la anterior información. Cierta noche, desde una de las buhardillas se produjo un disparo hacia la celda en donde estaba recluido Galois. Uno de sus dos compañeros perdió el conocimiento. Al protestar por este atentado, todos tres fueron trasladados a las mazmorras. Fue tal la indignación que produjo entre los demás detenidos esta situación, que se sublevaron, logrando que al día siguiente los sacaran de las mazmorras. En una carta que envió a una amiga, el señor Raspail, quien era uno de los presos, manifestaba refiriéndose a las provocaciones que sufría Galois por parte de los guardias y espías: *"Le tienen inquina a nuestro pequeño científico...Lo embaucan como víboras. Lo atraen a toda clase de trampas inimaginables..."*; en otra carta manifestaba que todos los presos sabían que el disparo no fue accidental, sino premeditado, y que estos se indignaron al saber que Galois había sido conducido a las mazmorras.

Pero este genio tenia la formula que siempre le había servido para poder sobrevivir en un ambiente hostil, ella era: sumergirse en el fascinante mundo de las matemáticas.

Desafortunadamente, quienes representaban la ciencia oficial del momento continuaban su desleal lucha por desconocerlo, posición que debió dolerle mucho más que las maniobras de sus enemigos políticos.

Cerca de tres meses de haber entregado la monografía a la Academia, tuvo que enviarle una misiva al señor Arago solicitándole le preguntara a los evaluadores si nuevamente habían perdido el manuscrito o si se proponían dar un informe de él. Tres meses más tarde, el 4 de julio de 1831, se reunió la Academia y emitió su fallo, y solo hasta octubre el secretario notificó por escrito a Galois acerca del resultado. Este mecanismo dilatorio ha sido empleado prolíficamente por los prepotentes de la ciencia oficial, con el fin de restarle importancia a lo que hacen quienes no están bajo su manto protector, ya que de esta forma se fortalece su propio ego, debido a que se consideran los dueños absolutos de la ciencia y el saber.

El señor Arago devolvió a Galois el manuscrito de la monografía junto con una carta en la que le manifestaba que los evaluadores consideraron que *"su argumentación no es suficientemente clara ni está lo suficientemente desarrollada para permitirnos juzgar su rigor; ni siquiera nos es posible dar una idea de esta monografía"*; finalizaban diciendo: *"Por lo tanto, debemos esperar, antes de emitir una opinión definitiva, que el autor publique una versión más completa de la obra"*. De esta forma no solo enterraban las aspiraciones de Galois, sino, lo que es más grave aún, privaban a la humanidad del enriquecimiento de su acervo científico al rechazar este trabajo, que indudablemente partiría en dos la historia del algebra. Era obvio que si no entendían, estaban en la obligación moral de consultar y no simplemente optar por el camino más cómodo, ya que era la Academia de Ciencias de París la que estaba dando un juicio sobre un trabajo científico y no una institución de menor envergadura.

Esta respuesta presentaba el más duro golpe que había recibido Galois como matemático. Su tristeza y desilusión fueron inmensos, de ahí que decidiera dejar por escrito su protesta en el prefacio de una monografía, que incluiría el trabajo rechazado por la Academia, y una segunda memoria sobre teoría de las ecuaciones, que estaba casi terminada. Aún después de su muerte, y cuando ya había sido reconocido universalmente, los historiadores de las matemáticas procuraron ocultar este documento; en 1906, Jules Tannery publicó por primera vez un fragmento del mismo, no sin antes afirmar que *"Galois debió haber estado borracho o afiebrado cuando lo escribio"*, pero solo hasta 1947, René Taton dio a conocer la versión completa de dicho prólogo.

Todos estos golpes fueron minando paulatinamente su condición física, a tal punto que los dos últimos meses de condena los tuvo que cumplir en un hospital de la policía.

Su compañero de cuarto le presentó a una joven cuyo nombre era Eva Sorel, la cual, utilizando como pretexto una supuesta simpatía por la causa republicana, lo fue envolviendo paulatinamente. El 29 de abril de 1832 finalmente quedó libre; en ese momento París estaba pasando por una epidemia de cólera, la cual había cobrado muchas víctimas, siendo ese, el principal tema de interés general.

De acuerdo con las cartas que envió Galois, así como también a la información suministrada por algunos que lo conocieron, se sabe que su relación con Eva Sorel terminó abruptamente, al ser informado por ella misma que mantenía relaciones maritales con un republicano.

Cegado por la ira, Galois la ofendió de palabra, situación que resulto perfecta para que el amante de Eva, Pécheux d'Herbinville, y un primo de esta, Mauricie Lauvergnat, aprovechando la fogosidad e inexperiencia del joven genio en estos campos, lo condujeran hábilmente hacia un duelo de honor. En una carta que dirigió a dos amigos les decía: *"Quiero que sepa que me bato en contra de mi voluntad, después de haber agotado todos los medios de reconciliación"*.

El mismo "amigo" que le había presentado a Eva prontamente apareció ofreciéndose como testigo, y mostrando una especial diligencia, se apresuró a conseguir el otro testigo, el cual era completamente desconocido para Galois. El duelo fue concertado para el 30 de mayo de 1832.

Consciente del poco tiempo de vida que le quedaba, resolvió dedicar la noche del 29 de mayo a escribir algunas cartas en donde dejaba plasmados los últimos resultados a los que había llegado, así como también explicaba el motivo de su muerte y se despedía de los republicanos.

Nada se sabe sobre lo que ocurrió la mañana del 30 de mayo. Las noticias de prensa informaban que Galois fue encontrado herido, alrededor de medio día por un campesino, quien lo trasladó al hospital Chochin. Su hermano Alfred fue la única persona conocida con la cual pudo hablar Evariste Galois antes de su deceso ocurrido el Jueves 31 de mayo a las 10 am.

Sus exequias fueron muy concurridas; a ellas asistieron de dos mil a tres mil personas. El cadáver fue enterrado en una fosa común. Existen cierto factores que han hecho pensar a los historiadores de la matemática que el mencionado "duelo de honor" que segó la vida de Evariste Galois no fue sino una trampa que se le tendió por parte de la temida policía del rey.

Es un hecho indiscutible, que después de los acontecimientos del banquete del 9 de mayo de 1831, Galois fue objeto de una implacable persecución. Sus padecimientos en la cárcel son una prueba palpable de esto. Era de esperarse que después de haber manifestado simbólicamente el que el regicidio era posible, no le iban a permitir que al finalizar su condena, continuara libremente sus actividades en la Sociedad de Amigos del Pueblo. Durante la revolución de 1848 se encontraron en los archivos de la policía algunos documentos que comprometían a ciertos republicanos como espías del gobierno. En 1849 se empezó a poner en duda que una nota aparecida en **Nouvelles annales de mathématiques** la versión oficial que existía sobre su muerte, cuando se afirma que: *"Galois fue asesinado el 31 de mayo de 1832 en un así llamado duelo de honor..."*.

Por otra parte, el prefecto de policía sabia todo lo relativo a la muerte de Galois, y tenía preparada la policía para prevenir disturbios durante el sepelio. Decía, por ejemplo, que Galois lo mató un amigo; afirmación realmente extraña, porque no se conocieron testigos de este crimen.

La historia de Francia no ha sido ajena al uso de métodos similares al empleado con Galois para eliminar a quienes son contrarios al gobierno de turno; basta recordar al líder popular de la Revolución Francesa **Jean-Paul Marat** (1743-1793), quien fue asesinado por un espía de la policía (Carlota Corday).

Por último, Alfred Galois siempre sostuvo que su hermano había muerto a manos de la policía del rey; testimonio que no deja de ser importante ya que como lo dijimos anteriormente, él tuvo la oportunidad de hablar con

Evariste Galois después del trágico acontecimiento.

En 1832 Chevalier logró que se publicara en la **Revue Encyclopédique**, la carta que le escribió Galois la noche del duelo, pero solo fue hasta 1846 que Joseph Louis Liouville publicó en el **Journal de mathématiques pures et appliquées** (Vol. XI, PP. 381-444) los más importantes escritos matemáticos de Galois. Este hecho fue la culminación de catorce años de lucha por la reivindicación de Evariste Galois; tarea que emprendieron pacientemente Alfred y Auguste Chevalier.

A partir de este momento, Galois empieza a emerger como uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos, cuya fama va en aumento a través de los años. Su vida nos muestra que el científico no es ajeno a los conflictos sociales de su época, sino por el contrario, juega un papel muy importante en ellos. Cuán equivocado estuvo la noche antes del duelo, en la que escribió a dos de sus amigos: *"Les ruego que me recuerden, ya que el destino no me concedió una vida que volviera mi nombre digno de que lo recordara mi país"*.

6.2. Polinomios Simétricos

Sea D un dominio entero con unidad.
$D[z_1]$ el anillo de polinomios en la indeterminada z_1
$D_1 = D[z_1]$ es un dominio entero con unidad.
$D_1[z_2]$ el anillo de polinomios en la indeterminada z_2 sobre D_1
$D[z_1][z_2] = D[z_1, z_2] = D[z_2, z_1]$
$D_{k-1} = D[z_1, ..., z_{k-1}]$
$D_k = D[z_1, ..., z_{k-1}][z_k] = D[z_1, ..., z_k]$
Sea $\sigma \in S_n$ una permutación
$D_n = D[z_1, ..., z_n] = D[z_{\sigma(1)}, ..., z_{\sigma(n)}]$
$f \in D_n$

$$f = \sum_{i_1=0}^{\alpha_1} \sum_{i_2=0}^{\alpha_2} ... \sum_{i_n=0}^{\alpha_n} a_{i_1 i_2 ... i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} ... z_n^{i_n}$$

$$f = \sum_{i_1, i_2, ..., i_n = 0}^{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n} a_{\Omega_{j=1}^n i_j} z_1^{i_1} z_2^{i_2} ... z_n^{i_n}$$

$$f = \sum_{i_1, i_2, ..., i_n} a_{\Omega_{j=1}^n i_j} z_1^{i_1} ... z_n^{i_n}$$

Sean U y V dos dominios enteros con unidad y φ un isomorfismo de U sobre V.
Si $U[z_1]$ y $V[z_2]$ son anillos de polinomios, existe un único isomorfismo φ^* de $U[z_1]$ sobre $V[z_2]$ tal que $\varphi^*|_U = \varphi$ y $\varphi^*(z_1) = z_2$

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i z_1^i$$

$$\varphi^*(f) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i) z_2^i$$

En particular si $U = V$ y $\varphi = id$, la función identidad.
entonces existe un único isomorfismo φ_1 de $U[z_1]$ sobre $U[z_2]$ tal que
$\varphi_1|_U = \varphi$ y $\varphi_1(z_1) = z_2$

Si $\sigma \in S_n$, existe un único isomorfismo φ_1 de $U[z_1]$ sobre $U[z_{\sigma(1)}]$ tal que $\varphi_1|_U = id$ y $\varphi_1(z_1) = z_{\sigma(1)}$
Existe un único isomorfismo φ_2 de $U[z_1][z_2]$ sobre $U[z_{\sigma(1)}][z_{\sigma(2)}]$ tal que

$\varphi_2|_{U[z_1]} = \varphi_1$ y $\varphi_2(z_2) = z_{\sigma(2)}$
Sea φ_k un isomorfismo de $U[z_1, ..., z_k]$ sobre $U[z_{\sigma(1)}, ..., z_{\sigma(k)}]$ tal que $\varphi_k|_U = id$
y $\varphi_k(z_j) = z_{\sigma(j)}$, $\forall j = 1, ..., k$
Existe un único isomorfismo φ_{k+1} de $U[z_1, ..., z_k][z_{k+1}]$ sobre $U[z_{\sigma(1)}, ..., z_{\sigma(k)}][z_{\sigma(k+1)}]$
tal que $\varphi_{k+1}|_{U[z_1,...,z_k]} = \varphi_k$ y $\varphi_{k+1}(z_{k+1}) = z_{\sigma(k+1)}$
Por lo tanto, podemos afirmar que existe un único isomorfismo φ_n de $U[z_1, ..., z_n]$
sobre $U[z_{\sigma(1)}, ..., z_{\sigma(n)}]$ tal que $\varphi_n|_U = id$ y $\varphi_n(z_j) = z_{\sigma(j)}$, $\forall j = 1, ..., n$
Pero como $U[z_1, ..., z_n] = U[z_{\sigma(1)}, ..., z_{\sigma(n)}]$, entonces φ_n es un automorfismo.
Sea $\varphi_n = \sigma^*$
Definimos $S_n^* = \{\sigma^* \in Aut(U[z_1, ..., z_n]) | \sigma \in S_n\}$
Luego, $S_n \approx S_n^*$, es decir, S_n y S_n^* son isomorfos.
Sea $I_u(S_n^*) = \{f \in U[z_1, ..., z_n] | \sigma^*(f) = f, \forall \sigma \in S_n\}$
Los polinomios aquí se denominan **Polinomios simétricos**.

Ejemplo 6.1. $f = z_1^m + z_2^m + ... + z_n^m$, $m \in \mathbb{N}$
$\sigma^*(f) = f$, $\forall \sigma \in S_n$
$\alpha \in U$, $\alpha = \alpha + 0z_1 + ... + 0z_n$
$\sigma^*(\alpha) = \alpha$
$u \subseteq I_u(S_n^*)$
$I_u(S_n^*)$ es un dominio entero con unidad.
1. $f, g \in I_u(S_n^*)$
$\sigma^*(f - g) = \sigma^*(f) - \sigma^*(g)$
$\sigma^*(f - g) = f - g$, $\forall \sigma \in S_n$.
$f - g \in I_u(S_n^*)$
2. $\sigma^*(fg) = \sigma^*(f)\sigma^*(g)$
$\sigma^*(fg) = fg$, $\forall \sigma \in S_n$.
$fg \in I_u(S_n^*)$
Esta es la construcción del anillo de Polinomios Simétricos.

Sea $D_n = D[z_1, ..., z_n]$
Si $f \in D_n$, entonces $f(z_1, ..., z_n) = \sum a_{\Omega i_j} z_1^{i_1} ... z_n^{i_n}$
$\forall \sigma \in S_n$
Luego $f(z_{\sigma(1)}, ..., z_{\sigma(n)}) = f(z_1, ..., z_n)$ es un Polinomio Simétrico.
Sea

$$\begin{aligned} \sigma^* : & D_n \longrightarrow D_n \\ & f \longrightarrow \sigma^*(f) \end{aligned}$$

tal que $f = f(z_1, ..., z_n)$
entonces $\sigma^*(f) = f(z_{\sigma(1)}, ..., z_{\sigma(n)})$, σ^* es un homomorfismo.

Luego $I_{D_n}(S_n^*) = \{f \in D_n | \sigma^*(f) = f, \forall \sigma \in S_n\}$ es un anillo.
Por lo tanto, $D \subseteq I_{D_n}(S_n^*)$, σ^* restringido a D es la idéntica.
$D_n[x]$, Si

$$f(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - z_j) = x^n - P_1 x^{n-1} + ... + (-1)^n P_n$$

$\sigma \in S_n$, $\sigma^* \in S_n^*$
Sea $\bar{\sigma^*} : D_n[x] \longrightarrow D_n[x]$
Tal que $\bar{\sigma^*}(x) = x$
Luego $\bar{\sigma^*}(x)|_{D_n} = \sigma^*$, es el automorfismo inducido por σ^* en el anillo de polinomios $D_n[x]$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma^*}(f(x)) &= \bar{\sigma^*}\left(\prod_{j=1}^{n}(x - z_j)\right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \bar{\sigma^*}(x - z_j) \\
&= \prod_{j=1}^{n}(x - \bar{\sigma^*}(z_j)) \\
&= \prod_{j=1}^{n}(x - z_{\sigma(j)}) \\
&= \prod_{j=1}^{n}(x - z_j) = f(x)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma^*}(f(x)) &= \bar{\sigma^*}(x^n - P_1 x^{n-1} + ... + (-1)^n P_n) \\
&= x^n - \bar{\sigma^*}(P_1) x^{n-1} + ... + (-1)^n \bar{\sigma^*}(P_n) \\
&= x^n - P_1 x^{n-1} + ... + (-1)^n P_n
\end{aligned}$$

De donde, $\bar{\sigma^*}(P_j) = P_j$, $\forall j = 1, ..., n$
Luego $P_j \in I_{D_n}(S_n^*)$, $\forall j = 1, ..., n$, el anillo de polinomios simétricos sobre D_n
Por lo tanto,

$$D[P_1, ..., P_n] \subseteq I_{D_n}(S_n^*)$$

Teorema 6.1. $\forall j = 1, ..., n,$

$$P_j^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_j \leq n} z_{i_1} z_{i_2} ... z_{i_j}$$

□

Ejemplo 6.2.

$$P_1^{(n)} = z_1 + z_2 + ... + z_n$$
$$P_2^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} z_{i_1} z_{i_2}$$
$$P_n^{(n)} = z_1 z_2 ... z_n$$

Demostración. **1.** $n = 1$

$$f_1(x) = x - z_1$$
$$z_1 = P_1^{(1)}$$

2. Supongamos que

$$f_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - z_j)$$
$$f_n(x) = x^n - P_1^{(n)} x^{n-1} + ... + (-1)^n P_n^{(n)}$$

Veamoslo para $n + 1$

$$f_{n+1}(x) = \prod_{j=1}^{n+1} (x - z_j) = \prod_{j=1}^{n} (x - z_j)(x - z_{n+1})$$
$$f_{n+1}(x) = f_n(x)(x - z_{n+1})$$
$$f_{n+1}(x) = (x^n - P_1^{(n)} x^{n-1} + ... + (-1)^n P_n^{(n)})(x - z_{n+1})$$
$$f_{n+1}(x) = \left(x^n + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j P_j^{(n)} x^{n-j} \right) (x - z_{n+1})$$

Sea $l = j - 1$

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j P_j^{(n)} x^{n-(j-1)} - x^n z_{n+1} + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} P_j^{(n)} z_{n+1} x^{n-j}$$

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l+1} P_{l+1}^{(n)} x^{n-l} - x^n z_{n+1} + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+1} P_j^{(n)} z_{n+1} x^{n-j} + (-1)^{n+1} P_n^{(n)} z_{n+1}$$

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} - (P_1^{(n)} - z_{n+1})x^n + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+1}(P_{j+1}^{(n)} + z_{n+1}P_j^{(n)})x^{n-j} + (-1)^{n+1}P_{n+1}^{(n+1)}$$

$i = j + 1$

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} - P_1^{(n+1)} x^n + \sum_{i=2}^{n}(-1)^i (P_i^{(n)} + z_{n+1}P_{i-1}^{(n)}) x^{n+1-i} + (-1)^{n+1}P_{n+1}^{(n+1)}$$

$$P_j^{(n)} + z_{n+1}P_{j-1}^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_j \leq n} z_{i_1}\ldots z_{i_j} + \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_j \leq n} z_{i_1}\ldots z_{i_{j-1}} z_{n+1}$$

$$P_j^{(n)} + z_{n+1}P_{j-1}^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_j \leq n} z_{i_1}\ldots z_{i_j} = P_j^{(n)}$$

$\square$

Observación. Si $f(z_1, ..., z_n) = \sum a_{\Omega_{j=1}^n i_j} z_1^{i_1} ... z_n^{i_n}$
Definimos grado: $\partial f = \max\{\left|\left|\Omega_{j=1}^n\right|\right|_1 a_{\Omega_{j=1}^n i_j}$ *es un coeficiente de* f *no nulo*$\}$
$\square$

$$\left|\left|\Omega_{j=1}^n\right|\right|_1 i_j = \sum_{j=1}^{n} i_j$$

Si

$$\sum_{j=1}^{n} i_j = \sum_{j=1}^{n} l_j$$

$m_1 = z_1^{i_1} z_2^{i_2} ... z_n^{i_n}$ y $m_2 = z_1^{l_1} z_2^{l_2} ... z_n^{l_n}$
m_1 es superior a m_2 y se nota $m_1 > m_2$, si existe $1 \leq k \leq n$ tal que

$$i_j = l_j, \forall j < k$$

$$i_k > l_k$$

$f(z_1, ..., z_n)$ es homogeneo si $\forall \lambda \in F$, $f(\lambda z_1, ..., \lambda z_n) = \lambda^m f(z_1, ..., z_n)$

Ejemplo 6.3.

$$f(z_1,...,z_n)=\sum_{k=1}^{n} z_k^m$$

$$f(\lambda z_1,...,\lambda z_n)=\sum_{k=1}^{n}(\lambda z_k)^m=\lambda^m\sum_{k=1}^{n} z_k^m=\lambda^m f(z_1,...,z_n)$$

□

Ejemplo 6.4.

$$P_j^{(n)}=\sum_{1\leq i_1\leq ...\leq i_j\leq n} z_{i_1}z_{i_2}...z_{i_j}$$

$$\sum_{1\leq i_1\leq ...\leq i_j\leq n}(\lambda z_{i_1})(\lambda z_{i_2})...(\lambda z_{i_j})=\lambda^j P_j^{(n)}$$

□

Si $f(z_1,...,z_n)$ es homogeneo de grado m y $g(z_1,...,z_n)$ es homogeneo de grado s

$$f(z_1,...,z_n)g(z_1,...,z_n)$$

es homogeneo de grado $m+s$.
$P_j^{k_j}$ es homogeneo de grado jk_j
$P_1^{k_1}P_2^{k_2}...P_n^{k_n}$ es homogeneo de grado $\sum_{j=1}^{n} jk_j$ y además simétrico.

Ejercicio 6.1. *Encuentre el término superior de* $P_1^{k_1}P_2^{k_2}...P_n^{k_n}$
El término superior de $P_1^{k_1}$ *es* $z_1^{k_1}$
El término superior de $P_2^{k_2}$ *es* $z_1^{k_2}z_2^{k_2}$
El término superior de $P_3^{k_3}$ *es* $z_1^{k_3}z_2^{k_3}z_3^{k_3}$

El término superior de $P_1^{k_1}P_2^{k_2}...P_n^{k_n}$ *es* $z_1^{k_1+k_2+...+k_n}z_2^{k_2+...+k_n}...z_{n-1}^{k_{n-1}k_n}z_n^{k_n}$

Supongamos que $l_1>l_2>...>l_n$
$P_1^{l_1-l_2}P_2^{l_2-l_3}...P_{n-1}^{l_n-l_{n-1}}P_n^{l_n}$
El término superior es $z_1^{l_1}...z_n^{l_n}$
□

Si $f(z_1,...,z_n)=\sum a_{\Omega_{j=1}^n i_j}z_1^{i_1}...z_n^{i_n}$
$R=\text{máx}\{\left|\left|\Omega_{j=1}^n\right|\right|_1 i_j|a_{\Omega_{j=1}^n i_j}$ es un coeficiente de f no nulo$\}$
Si $0\leq t\leq R$

$\aleph_t = \{a_{\Omega_{j=1}^n i_j} | \left|\left|\Omega_{j=1}^n\right|\right|_1 = t$ y $a_{\Omega_{j=1}^n i_j}$ es un coeficiente de f no nulo$\}$

$$f_t = \sum a_{\Omega_{j=1}^n i_j} z_1^{i_1} ... z_n^{i_n}$$

$a_{\Omega_{j=1}^n i_j} \in \aleph_t$
f_t es homogeneo y de grado t.

$$f = \sum_{t=1}^{R} f_t$$

Todo polinomio se puede expresar como la suma de un número finito de polinomios homogeneos.
Por otro lado, si f es simétrico, entonces sus partes homogeneas también son simétricas.

Teorema 6.2. *Todo polinomio homogeneo y simétrico es un polinomio en los polinomios elementales simétricos.*

Demostración. Sea f un polinomio homogeneo y simétrico, Sea $az_1^{l_1} z_2^{l_2} ... z_n^{l_n}$ es término superior de f, entonces $l_1 > l_2 > l_3 > ... > l_n$ por ser simétrico y homogeneo.
$f_1 = f - aP_1^{l_1 - l_2} P_2^{l_2 - l_3} ... P_{n-1}^{l_n - l_{n-1}} P_n^{l_n}$
f_1 es un polinomio simétrico homogeneo cuyo término superior es inferior al término superior de f.
Existe $bP_1^{s_1} P_2^{s_2} ... P_n^{s_n}$ tal que
$f_2 = f_1 - bP_1^{s_1} P_2^{s_2} ... P_n^{s_n}$ es un polinomio simétrico homogeneo cuyo término superior es inferior al término superior de f_1.
$f_r = f_{r-1} - a_r P_1^{(r)} ... P_n^{(r)}$
Se puede continuar sucesivamente hasta llegar a que $f_r = 0$. □

Corolario 6.1. *Todo polinomio simétrico es un polinomio en los polinomios elementales simétricos.*

Demostración. Consecuencia inmediata del teorema anterior y el hecho de que en todo polinomio simétrico sus partes homogeneas son simétricas.

$$I_{D_n}(S_n^*) = D[P_1, P_2, ..., P_n]$$

□

6.3. Cuerpos Algebraicamente Cerrados

Definición 6.1. *Un cuerpo R es* ***algebraicamente cerrado****, si todo polinomio no constante sobre él tiene todas sus raíces en él.*

Definición 6.2. *Sea F un cuerpo y T un subconjunto no vacío de F. Diremos que T induce una ordenación sobre F, si:*

1. *Para todo $a \in F$ se tiene una y solo una de las siguientes tres propiedades:*

Que $a \in T$, que $-a \in T$, ó que $a = 0$.

2. *$\forall a, b \in T, a + b$ y ab están en T.*
□

Si $a \in T$ entonces a es un positivo de F.
$a \in T$, $a > 0$.
a y b en F, a es menor que b, y se nota, $a < b$ sii $b - a \in T$.
a es mayor que b, y se nota, $a > b$ sii $b < a$.
a es igual a b, y se nota, $a \leq b$ sii $a < b$ ó $a = b$.

El cuerpo F se denomina un **cuerpo ordenado**.

Lema 6.1. *Sea F un cuerpo e i una raíz del polinomio $m(x) = x^2 + 1$. $F(i)$ no es un cuerpo ordenado.*

Demostración. Si existiera $T \subseteq F(i)$ que indujera una ordenación sobre $F(i)$
$1 \in T$ o $-1 \in T$
$(1)(1) = 1 \in T$ y $(-1)(-1) = 1 \in T$
Luego $1 \in T$
$i \in T$ o $-i \in T$
Si $i \in T$, $i^2 = -1 \in T$, como $1 \in T$ entonces $0 = 1 + (-1) \in T$. Lo cual es una contradicción.
Si $-i \in T$, $(-i)^2 = -1 \in T$, entonces $0 \in T$. Lo cual es una contradicción.
□

Teorema 6.3. *Todo cuerpo ordenado es de característica cero.*

Demostración. Sea F un cuerpo ordenado. Existe un subconjunto no vacío T de F que induce una ordenación sobre F.

Si F fuera de característica finita, existiría $p > 0$ primo tal que $pa = 0$, $\forall a \in F$. Luego, en particular $p1 = 0$ $(1 \in F)$. Pero como $1 \in T$, entonces $p1 \in T$; por lo tanto $0 \in T$, lo cual contradice la parte 1. de la definición 6.2.

$\square$

Definición 6.3. *Un cuerpo F es **formalmente real**, si -1 no puede expresarse como una suma de cuadrados de F.*

Ejemplo 6.5. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{R}$ *son formalmente reales.*

$\square$

Ejercicio 6.2. *Si F es un cuerpo formalmente real y α es trascendental sobre F, entonces $F(\alpha)$ también es formalmente real.*

Demostración. Supongamos que $F(\alpha)$ no es formalmente real.
Existen $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ en $F(\alpha)$ tal que

$$-1 = \sum_{k=1}^{m} (\theta_k)^2$$

Para cada k, existe $f_k(x)$ en $F[x]$ tal que $\theta_k = f_k(\alpha)$

$$-1 = \sum_{k=1}^{m} (f_k(\alpha))^2 = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_s\alpha^l$$

$-1 = a_0$, $0 = a_1$,$0 = a_2$,...,$0 = a_s$

$$\sum_{k=1}^{n} (f_k(0))^2 = a_0$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} (f_k(0))^2 = -1$$

Lo cual es una contradicción.

$\square$

Definición 6.4. *Un cuerpo F es **cerrado real**, si es formalmente real, pero ninguna de sus extensiones propias lo es.*

Teorema 6.4. *Todo cuerpo cerrado real F es ordenado.*

Demostración. Sea F un cuerpo cerrado real, si $a \in F - \{0\}$
Veamos que a es un cuadrado o $-a$ es un cuadrado.
Supongamos que exista $a \in F$, $a \neq 0$, tal que a no sea un cuadrado de F.
Entonces el polinomio $m(x) = x^2 - a$ es irreducible sobre F
Existe λ una raíz de $m(x)$ en un cuerpo extensión de F.

$$[F(\lambda) : F] = \partial m = 2$$

Una base para $F(\lambda)$ sobre F es $\{1, \lambda\}$
En particular, -1 es una suma de cuadrados en $F(\lambda)$. Por lo tanto, existen $w_1, ..., w_m$ en $F(\lambda)$ tales que

$$-1 = \sum_{k=1}^{m} w_k^2$$

$w_k = a_k + \lambda b_k$ para algunos a_k y b_k en F.

$$-1 = \sum_{k=1}^{m} (a_k + \lambda b_k)^2$$
$$-1 = \sum_{k=1}^{m} a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{m} a_k b_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{m} b_k^2$$
$$-1 = \sum_{k=1}^{m} a_k^2 + a \sum_{k=1}^{m} b_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{m} a_k b_k$$

Luego

$$-1 = \sum_{k=1}^{m} a_k^2 + a \sum_{k=1}^{m} b_k^2 \tag{6.1}$$

Si a fuera una suma de cuadrados de F
-1 es una suma de cuadrados de F, lo cual es una contradicción.
Luego a no es una suma de cuadrados de F.
Hemos demostrado que (Si a no es un cuadrado de F entonces a no es una suma de cuadrados de F) lo cual es equivalente a decir que (Si a es una suma de cuadrados de F entonces a es un cuadrado de F)
Por (6.1) se tiene

$$1^2 + \sum_{k=1}^{m} a_k^2 + a \sum_{k=1}^{m} b_k^2 = 0$$

Sean

$$\gamma = 1^2 + \sum_{k=1}^{m} a_k^2$$
$$\mu = \sum_{k=1}^{m} b_k^2$$

Como γ es una suma de cuadrados de F, existe c en F tal que $\gamma = c^2$

$$1 + \sum_{k=1}^{m} a_k^2 = c^2$$

Como μ es una suma de cuadrados de F, existe d en F tal que $\mu = d^2$,
de donde

$$c^2 + ad^2 = 0$$
$$-a = \left(\frac{c}{d}\right)^2$$

entonces $-a$ es un cuadrado de F.
Hemos demostrado que (Si $-a$ no es el cuadrado de un elemento de F entonces a es el cuadrado de un elemento de F) lo cual es equivalente a decir que (Si a no es el cuadrado de un elemento de F entonces $-a$ es el cuadrado de un elemento de F).
Supongamos que $a = c^2$ para algún $c \in F$ y $-a = d^2$ para algún $d \in F$

$$\frac{a}{-a} = \frac{c^2}{d^2}$$

es decir,

$$-1 = \left(\frac{c}{d}\right)^2$$

Lo cual es una contradicción.

□

Teorema 6.5. *Todo cuerpo cerrado real es ordenado y además esta ordenación es única.*

Demostración. Sea F un cuerpo cerrado real, $a \in F - \{0\}$
a no es un cuadrado entonces a no es una suma de cuadrados.
Si b es una suma de cuadrados, entonces b es un cuadrado.

Por lo tanto, $-a$ es un cuadrado.
Supongamos que a y $-a$ son cuadrados de elementos de F.
Entonces existen u y v en F tales que $a = u^2$ y $-a = v^2$.
Luego

$$-1 = \left(\frac{u}{v}\right)^2$$

Lo cual es una contradicción.

$\square$

Sea $T = \{a \in F - \{0\} | \exists v \in F, a = v^2\}$
1. Si $a \in F$ y $a \neq 0$ entonces $a \in T$ ó $-a \in T$.
2. Si a y b están en T, entonces existen u y v en F tales que $a = u^2$ y $b = v^2$, $a + b = u^2 + v^2$, existe c en F tal que $c^2 = u^2 + v^2$, luego $a + b \in T$
en forma análoga se tiene que $ab = u^2v^2 = (uv)^2$, por lo tanto, $ab \in T$
de donde T induce una ordenación sobre F.

Supongamos que exista $S \subseteq F$, $S \neq T$ tal que S induzca una ordenación sobre F.
Sea $x \in T$, existe $u \in F$ tal que $x = u^2$, $u \neq 0$ porque $0 \notin T$
$u \in S$ o $-u \in S$
Si $u \in S$ entonces $u^2 \in S$, luego $x \in S$
Si $-u \in S$ entonces $(-u)^2 \in S$, luego $x \in S$
de donde $T \subseteq S$
Sea $x \in S$, si $x \notin T$ entonces $-x \in T$, como $T \subseteq S$ entonces $-x \in S$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, $x \in T$ luego $S \subseteq T$, entonces $S = T$.

Corolario 6.2. *En todo cuerpo cerrado real, los positivos son los cuadrados de los elementos no nulos.*

Teorema 6.6. *En todo cuerpo cerrado real F, todo polinomio de grado impar sobre F, tiene por lo menos una raíz en F.*

Demostración. **1.** Si $g(x)$ es un polinomio sobre F de grado uno, no hay nada que demostrar.

2. Supongamos que el teorema se cumple para todo polinomio de grado impar menor que $m = 2n + 1 > 1$.
Sea $f(x)$ un polinomio sobre F de grado m. Si $f(x)$ es reducible, por lo

menos uno de sus factores tiene grado impar menor que m; luego, aplicando la hipótesis de inducción tenemos que existe una raíz de este factor, y por lo tanto de $f(x)$ en F.
Si $f(x)$ es irreducible, sabemos que existen c raíz de $f(x)$ y $F(c)$ un cuerpo de ruptura de $f(x)$ sobre F. Pero como F es cerrado real, -1 puede expresarse como una suma de cuadrados de $F(c)$. De donde, existen polinomios $g_1(x), ..., g_s(x)$ en $F[x]$, con $\partial g_j \leq m-1$, $\forall j \in I_s = \{1, ..., s\}$, tales que

$$-1 = \sum_{j=1}^{s} (g_j(c))^2$$

Sea el polinomio $t(x) = \sum_{j=1}^{s} (g_j(x))^2 + 1$, sobre F, entonces $t(c) = 0$, luego $t(x)$ es un múltiplo del polinomio mínimo para c sobre F; es decir, existe $h(x) \in F[x]$ tal que

$$t(x) = f(x)h(x)$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{s} (g_j(x))^2 = f(x)h(x) - 1$$

Como la suma de la izquierda de la igualdad anterior es de grado par, entonces el grado de $f(x)h(x)$ es par. Pero el grado de $f(x)$ es impar, entonces el grado de $h(x)$ es impar y además menor que ∂f, ya que

$$\partial f + \partial h \leq \text{máx}\{2\partial g_j | j \in I_s\} \leq 2\partial f - 2$$

De esto se infiere que

$$\partial h \leq \partial f - 2$$

Por hipótesis de inducción, existe $\alpha \in F$ tal que $h(\alpha) = 0$

Reemplazando α, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{s} (g_j(\alpha))^2 = -1$$

Lo cual es una contradicción, ya que F es cerrado real.
De lo anterior se desprende que $f(x)$ no puede ser irreducible sobre F.

$\square$

Teorema 6.7. *Sean F un cuerpo y una raíz i del polinomio x^2+1 sobre F. Si cualquier polinomio $f(x)$ irreducible sobre F posee una raíz en $F(i)$, entonces $F(i)$ es algebraicamente cerrado.*

Demostración. Supongamos que no. Entonces existe un polinomio $h(x)$ sobre $F(i)$ que no tiene todas sus raíces en $F(i)$. Sea c una de ellas. Como c es algebraico sobre $F(i)$, tenemos que

$$[F(i,c):F(i)] < +\infty$$

Pero $[F(i):F] < +\infty$, entonces $[F(i,c):F] < +\infty$, luego $[F(c):F] < +\infty$.
Sea $m(x) \in F[x]$ el polinomio mínimo para c; al ser irreducible sobre F, tenemos por hipótesis que existe $d \in F[i]$ tal que $m(d) = 0$.
Como $F = F(d) = F(i)$ y $[F(i):F] \leq 2$, entonces $[F(d):F] \leq 2$ y por consiguiente el $\partial m \leq 2$; pero c y d son raíces de $m(x)$, con $c \neq d$, entonces $\partial m = 2$.

Al dividir $x-d$ y $m(x)$ en $F(i)[x]$, tenemos que existen $a \neq 0$ y e en $F(i)$, tales que

$$m(x) = (x-d)(ax-e)$$

Luego $c = \frac{e}{a} \in F(i)$, lo cual es una contradicción.

$\square$

Teorema 6.8. *Sean F un cuerpo ordenado y $F(i)$ el cuerpo obtenido por la adjunción a F de una raíz i del polinomio x^2+1. Si todo elemento positivo de F es el cuadrado de un elemento de F, entonces toda ecuación cuadrática sobre $F(i)$ es soluble.*

Demostración. $m(x) = x^2+1$ es irreducible sobre F, ya que en caso contrario existiría $\alpha \in F$, tal que $\alpha^2 = -1$ es obvio que $\alpha \neq 0$.

Si T es un subconjunto de F que induce una ordenación sobre F, entonces $\alpha^2 \in T$. Luego $-1 \in T$, pero como $1 \in T$, entonces $0 \in T$, lo cual es una contradicción. De donde, x^2+1 es irreducible sobre F y $\{1, i\}$ es una base de $F(i)$ sobre F.

Sea $a+bi \in F(i) - \{0\}$, entonces a^2+b^2 es un elemento positivo de F. Luego existe $c \in F - \{0\}$ tal que $c^2 = a^2+b^2$. Como F es un cuerpo ordenado, c ó $-c$ es positivo. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que c

es positivo; además, como $c^2 \geq a^2$ entonces $c \geq a$, ya que si $a > c > 0$, entonces $ac > c^2 > 0$ y $a^2 > ac > 0$. Luego $a^2 > c^2$, lo cual es una contradicción.

Similarmente se tiene que $c \geq -a$, luego $\frac{1}{2}(c+a)$ y $\frac{1}{2}(c-a)$ son mayores o iguales que cero; aplicando la hipótesis tenemos, que existen β y γ en F, raíces respectivamente de los polinomios $u(x) = x^2 - \frac{1}{2}(c+a)$ y $v(x) = x^2 - \frac{1}{2}(c-a)$.

Luego $\beta^2 - \gamma^2 = a$ y $(2\beta\gamma)^2 = b^2$. Si $2\beta\gamma \neq b$, entonces $2\beta\gamma = -b$; tomamos en este caso $-\gamma$ por γ. Hemos pues encontrado dos elementos β y γ en F, tales que

$$a = \beta^2 - \gamma^2 \text{ y } b = 2\beta\gamma$$

De donde

$$a + bi = \beta^2 - \gamma^2 + 2\beta\gamma i = (\beta + \gamma i)^2$$

Por lo tanto, todo elemento de $F(i)$ tiene una raíz cuadrada en $F(i)$; esto es, toda ecuación cuadrática en $F(i)$ es soluble. $\square$

Ejercicio 6.3. *Si $z = a + ib$, encontrar dos funciones f y g tales que $\sqrt{z} = f(a,b) + ig(a,b)$.*

Solución. Sea $\sqrt{z} = w$, luego $z = w^2$

$$\begin{aligned} w^2 - z &= 0 \\ w &= \alpha + i\beta \\ w^2 &= (\alpha - \beta)^2 + i(2\alpha\beta) \\ w^2 &= z = a + ib \\ \alpha^2 - \beta^2 &= a, \quad (6.2) \\ 2\alpha\beta &= b \quad (6.3) \\ 4\alpha^2\beta^2 &= b^2 \\ \beta^2 &= \frac{b^2}{4\alpha^2} \end{aligned}$$

Reemplazando en (6,2), tenemos

$$\alpha^2 - \frac{b^2}{4\alpha^2} = a$$

$$4\alpha^4 - 4\alpha^2 a - b^2 = 0$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 &= \frac{4a \pm \sqrt{(16a^2 + 16b^2)}}{8} \\
\alpha^2 &= \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2} \\
\alpha^2 &= \frac{a + ||w||}{2} \\
\beta^2 &= \frac{b^2}{4\alpha^2} = \left(\frac{b^2}{2(a + ||w||)} \right) \left(\frac{||w|| - a}{||w|| - a} \right) \\
\beta^2 &= \frac{b^2(||w|| - a)}{2(||w||^2 - a^2)} \\
\beta^2 &= \frac{b^2}{2} \frac{(||w|| - a)}{b^2} \\
\beta^2 &= \frac{||w|| - a}{2}.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 &= \pm \frac{a + ||w||}{2} \\
\beta^2 &= \pm \frac{||w|| - a}{2}
\end{aligned}
$$

Si $b > 0$, entonces $\alpha\beta > 0$ y

$$w = \pm \left(\sqrt{\frac{a + ||w||}{2}} + i \sqrt{\frac{||w|| - a}{2}} \right)$$

Si $b < 0$, entonces $\alpha\beta < 0$ y

$$w = \pm \left(\sqrt{\frac{a + ||w||}{2}} - i \sqrt{\frac{||w|| - a}{2}} \right)$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
f(a, b) &= \frac{a + \sqrt{(a^2 + b^2)}}{2} \\
g(a, b) &= \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)} - a}{2}
\end{aligned}
$$

$\square$

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0)$, notamos con $||z|| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $arg(z)$ el argumento de z y definimos $sig(b) = \frac{|b|}{b}$

Del ejercicio (6.3), tenemos que

$$\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{\frac{||z|| + a}{2}} + i.sig(b)\sqrt{\frac{||z|| - a}{2}}\right) \tag{6.4}$$

Por otro lado, la **Fórmula de De Moivre** nos dice que

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{||z||}\left(\cos\left(\frac{arg(z) + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{arg(z) + 2k\pi}{n}\right)\right) \tag{6.5}$$
$$k = 0, 1, ..., n - 1$$

Ejercicio 6.4. *Encontrar expresiones analíticas para el seno y el coseno de ángulos de la forma* $\theta = \frac{\pi}{2^n}$.

Solución. Tomamos un número complejo cualquiera cuya norma sea 1, por ejemplo, sea:

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

en donde, $||\xi|| = 1$ y $arg(\xi) = \frac{\pi}{4}$.

Por (6.4), tenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{\xi} &= \pm\left(\sqrt{\frac{||\xi|| + a}{2}} + i.sig(b)\sqrt{\frac{||\xi|| - a}{2}}\right) \\
&= \pm\left(\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}\right) \\
&= \pm\left(\sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}\right) \\
&= \pm\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando la fórmula de De Moivre,

$$\begin{aligned}\sqrt{\xi} =& \sqrt{||\xi||}\left(\cos\left(\frac{arg(\xi)+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{arg(\xi)+2k\pi}{2}\right)\right)\\ =& \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Tomando $k=0$ en la última ecuación, obtenemos

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \tag{6.6}$$

$$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \tag{6.7}$$

Las cuales son las expresiones analíticas para $\sin\frac{\pi}{8}$ y $\cos\frac{\pi}{8}$.

Tomamos ahora el número complejo con norma 1 y argumento $\frac{\pi}{8}$

$$\zeta=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}i$$

De manera análoga, encontramos su raíz cuadrada, utilizando (6.4) y (6.5). Por (6.4), tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{\zeta} &= \pm\left(\sqrt{\frac{||\zeta||+a}{2}}+i.sig(b)\sqrt{\frac{||\zeta||-a}{2}}\right)\\ &= \pm\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}}\right)\\ &= \pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\right)\end{aligned}$$

Por otro lado, por (6.5)

$$\begin{aligned}\sqrt{\zeta} =& \sqrt{||\zeta||}\left(\cos\left(\frac{arg(\zeta)+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{arg(\zeta)+2k\pi}{2}\right)\right)\\ =& \cos\left(\frac{\frac{\pi}{8}+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{8}+2k\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Tomando $k = 0$ en la última ecuación, obtenemos

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{8}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \tag{6.8}$$

$$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{8}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \tag{6.9}$$

Las cuales son las expresiones analíticas para $\sin\frac{\pi}{16}$ y $\cos\frac{\pi}{16}$.

Si observamos (6.6), (6.7), (6.8) y (6.9), encontramos un patrón que puede describirse de forma recurrente como:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{a_n}{2} \tag{6.10}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2-a_{n-1}}}{2} \tag{6.11}$$

Donde a_n está definida de manera recurrente por

$$a_2 = \sqrt{2}, \qquad a_n = \sqrt{2+a_{n-1}} \tag{6.12}$$

□

Ejercicio 6.5. *Encontrar expresiones analíticas para el seno y el coseno de ángulos de la forma* $\theta = \frac{\pi}{3\cdot 2^n}$.

Solución. Tomamos un número complejo cualquiera cuya norma sea 1, por ejemplo, sea:

$$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

en donde, $||\varphi|| = 1$ y $arg(\varphi) = \frac{\pi}{6}$.

Por (6.4), tenemos

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\varphi} &= \pm\left(\sqrt{\frac{||\varphi||+a}{2}} + i.sig(b)\sqrt{\frac{||\varphi||-a}{2}}\right)\\
&= \pm\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\right)\\
&= \pm\left(\sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}}\right)\\
&= \pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, utilizando la fórmula de De Moivre,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\varphi} =& \sqrt{||\varphi||}\left(\cos\left(\frac{arg(\varphi)+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{arg(\varphi)+2k\pi}{2}\right)\right)\\
&= \cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Tomando $k = 0$ en la última ecuación, obtenemos

$$
\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \tag{6.13}
$$

$$
\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \tag{6.14}
$$

Las cuales son las expresiones analíticas para $\sin\frac{\pi}{12}$ y $\cos\frac{\pi}{12}$.

Tomamos ahora el número complejo con norma 1 y argumento $\frac{\pi}{12}$

$$
\psi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i
$$

De manera análoga, encontramos su raíz cuadrada, utilizando (6.4) y (6.5).

Por (6.4), tenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{\psi} &= \pm\left(\sqrt{\frac{||\psi||+a}{2}} + i.sig(b)\sqrt{\frac{||\psi||-a}{2}}\right)\\
&= \pm\left(\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}}\right)\\
&= \pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Por otro lado, por (6.5)

$$\begin{aligned}
\sqrt{\psi} =& \sqrt{||\psi||}\left(\cos\left(\frac{arg(\psi)+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{arg(\psi)+2k\pi}{2}\right)\right)\\
=& \cos\left(\frac{\frac{\pi}{12}+2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{12}+2k\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Tomando $k=0$ en la última ecuación, obtenemos

$$\cos\left(\frac{\frac{\pi}{12}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \tag{6.15}$$

$$\sin\left(\frac{\frac{\pi}{12}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \tag{6.16}$$

Las cuales son las expresiones analíticas para $\sin\frac{\pi}{24}$ y $\cos\frac{\pi}{24}$.

Si observamos (6.13), (6.14), (6.15) y (6.16), encontramos un patrón que puede describirse de forma recurrente como:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\right) = \frac{a_n}{2} \tag{6.17}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\right) = \frac{\sqrt{2-a_{n-1}}}{2} \tag{6.18}$$

Donde a_n está definida de manera recurrente por

$$a_2 = \sqrt{3}, \qquad a_n = \sqrt{2+a_{n-1}} \tag{6.19}$$

$\square$

Teorema 6.9. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios sobre F. Si K es un cuerpo extensión de F y, $f(x)$ y $g(x)$ tiene un factor común no trivial sobre K, entonces $f(x)$ y $g(x)$ tiene un factor común no trivial sobre F.*

Demostración. Si $f(x)$ y $g(x)$ fueran primos relativos en $F[x]$, existirían polinomios $h(x)$ y $l(x)$ en $F[x]$ tales que $f(x)h(x) + l(x)g(x) = 1$
Pero esta ecuación también se tiene en $K[x]$
Luego $f(x)$ y $g(x)$ son primos relativos en $K[x]$, lo cual es una contradicción.

$\square$

Definición 6.5. *Si $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ sobre el cuerpo F, se define la* ***derivada*** *de $f(x)$ y se nota $f'(x)$ como*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

Observación. Si $f'(x) = 0$, entonces:
1. *Si la característica de F es cero, entonces $f(x)$ es una constante.*
2. *Si la característica de F es $p > 1$, entonces existe $g(x)$ que pertenece a $F[x]$ tal que $f(x) = g(x^p)$.*

Teorema 6.10. *Si F es un cuerpo de característica cero, todo polinomio irreducible sobre F tiene todas sus raíces simples*

Demostración. Supongamos que exista un polinomio $f(x)$ irreducible sobre F que tenga raíces múltiples. Sea α una de estas raíces.
Sobre el cuerpo de ruptura $F(\alpha)$ se tiene que $f(x) = (x-\alpha)^m g(x)$
de donde $g(x) \in F(\alpha)[x]$ y $m \geq 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x-\alpha)^{m-1}g(x) + (x-\alpha)^m g'(x) \\ &= (x-\alpha)^{m-1}(mg(x) + (x-\alpha)g'(x)) = (x-\alpha)^{m-1}t(x) \end{aligned}$$

entonces $f(x)$ y $f'(x)$ tienen un factor común no trivial en $F(\alpha)[x]$, luego tienen un factor común no trivial en $F[x]$, pero como $f(x)$ es irreducible, el único factor no trivial de $f(x)$ es el mismo, por lo tanto, $f(x)|f'(x)$
de donde $f'(x) = 0$, entonces $f(x) = a_0$, lo cual es una contradicción.

$\square$

Teorema 6.11. *Sean F un cuerpo ordenado y $F(i)$ el cuerpo obtenido por la adjunción a F de una raíz i del polinomio x^2+1. Si todo elemento positivo de F es el cuadrado de un elemento de F y todo polinomio de grado impar sobre F tiene al menos una raíz en F, entonces $F(i)$ es algebraicamente cerrado.*

Demostración. Si demostramos que todo polinomio irreducible sobre F tiene una raíz en $F(i)$, entonces $F(i)$ es algebraicamente cerrado.
Si demostramos que todo polinomio sobre F que tenga todas sus raíces simples posee una raíz en $F(i)$, entonces en particuar todo polinomio irreducible sobre F tiene por lo menos una raíz en $F(i)$ y por lo tanto $F(i)$ es algebraicamente cerrado.

Sea $H = \{m \in \mathbb{N} | \forall f(x) \in F[x]$ que tenga todas sus raíces simples y además $\partial f = 2^m r$, con r impar,se tiene que $f(x)$ posee una raíz en $F(i)\}$.

1. $0 \in H$, por hipótesis.

2. Sea $m \geq 1$. Supongamos que $\forall s < m$, $s \in H$.

Sea $f(x)$ un polinomio sobre F que tiene como raíces a $\alpha_1, ...\alpha_n$; todas ellas simples y cuyo grado es $n = 2^m r$, con r impar.

El conjunto

$$M = \{g_{jk}(x) = \alpha_j\alpha_k + x(\alpha_j + \alpha_k) | 1 \leq j < k \leq n\}$$

tiene exactamente $p = \binom{n}{2}$ elementos, ya que si $1 \leq j < k \leq n$, $1 \leq u < v \leq n$ y $\{\alpha_j, \alpha_k\} \neq \{\alpha_u, \alpha_v\}$, pero $g_{jk}(x) = g_{uv}(x)$, entonces

$$\alpha_j\alpha_k = \alpha_u\alpha_v \text{ y } \alpha_j + \alpha_k = \alpha_u + \alpha_v,$$

lo cual implica que los polinomios $l(x) = x^2 - (\alpha_j + \alpha_k)x + \alpha_j\alpha_k$ y $q(x) = x^2 - (\alpha_u + \alpha_v)x + \alpha_u\alpha_v$ son iguales, y por lo tanto las raíces de $l(x)$ son iguales a las de $q(x)$; esto es $\{\alpha_j, \alpha_k\} = \{\alpha_u, \alpha_v\}$, lo cual es una contradicción.

Por otra parte, el conjunto T de los $\theta \in F$ para los cuales existen por lo menos dos polinomios $g_{jk}(x)$ y $g_{uv}(x)$, tales que $g_{jk}(\theta) = g_{uv}(\theta)$, es finito.
Como F es un cuerpo ordenado, su característica es cero; por lo tanto tiene infinitos elementos. De donde, el conjunto $F - T$ es infinito.

Sean $c \in F - T$ y

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x - g_{jk}(c)) \\ &= x^p - b_1 x^{p-1} + ... + (-1)^p b_p \end{aligned}$$

Para cada $j \in I_p$ existe un polinomio simétrico $u_j(y_1, ..., y_p)$ del anillo de polinomios $F[y_1, ..., y_p]$, tal que

$$b_j = u_j(g_{12}(c), ..., g_{n-1n}(c))$$

Sea $\sigma \in S_n$. Existe un único automorfismo σ^* del anillo de polinomios $F[x_1, ..., x_n]$, tal que $\sigma^*|_F = id$ y $\sigma^*(x_j) = x_{\sigma(j)}$, $\forall j \in I_n$

Para cada pareja (j, k), con $1 \leq j < k \leq n$, construimos los polinomios

$$h_{jk}(x_1, ..., x_n) = x_j x_k + c(x_j + x_k)$$

entonces

$$\begin{aligned} \sigma^*(h_{jk}(x_1, ..., x_n)) &= x_{\sigma(j)} x_{\sigma(k)} + c(x_{\sigma(j)} + x_{\sigma(k)}) \\ &= \begin{cases} h_{(\sigma(j))(\sigma(k))}(x_1, ..., x_n), & si\ \sigma(j) < \sigma(k), \\ h_{(\sigma(k))(\sigma(j))}(x_1, ..., x_n), & si\ \sigma(k) < \sigma(j), \end{cases} \end{aligned}$$

por lo tanto, si

$$t_j(x_1, ..., x_n) = u_j(h_{12}(x_1, ..., x_n), ..., h_{n-1n}(x_1, ..., x_n)),$$

entonces

$$\begin{aligned} \sigma * (t_j(x_1, ..., x_n)) &= u_j(\sigma^*(h_{12}(x_1, ..., x_n)), ..., \sigma^*(h_{n-1n}(x_1, ..., x_n))) \\ &= u_j(h_{12}(x_1, ..., x_n), ..., h_{n-1n}(x_1, ..., x_n)) \\ &= t_j(x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

Luego $t_j(x_1, ..., x_n)$ es un polinomio simétrico de $F[x_1, ..., x_n]$. De donde, $t_j(x_1, ..., x_n)$ es un polinomio en los polinomios elementales simétricos en $x_1, ..., x_n$ sobre F, pero estos son los coeficientes $\gamma_1, ..., \gamma_n$ del polinomio

$$w(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - x_j) = z^n - \gamma_1 z^{n-1} + ... + (-1)^n \gamma_n$$

sobre $F[x_1, ..., x_n]$.
Como

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \zeta \prod_{j=1}^{n} (x - \alpha_j) \\
&= \zeta (x^n - d_1 x^{n-1} + ... + (-1)^n d_n),
\end{aligned}
$$

en donde tanto ζ como los d_j están en F, $\forall j \in I_n$; entonces

$$t_j(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in F[d_1, ..., d_n] = F$$

Tenemos que

$$t_j(\alpha_1, ..., \alpha_n) = b_j, \forall j \in I_n$$

Luego, $f_1(x) \in F[x]$.

Por otra parte, como $\partial f_1 = \frac{n(n-1)}{2} = 2^{m-1} r (2^m r - 1)$ y todas las raíces de $f_1(x)$ son simples, aplicamos la hipótesis de inducción, la cual nos permite afirmar que existe (j, k) con $1 \leq j < k \leq n$, tal que $g_{jk}(c) \in F[i]$. Esto es, hemos demostrado que $\forall c \in F - T$, existe (j, k), con $1 \leq j < k \leq n$, tal que $\alpha_j \alpha_k + c(\alpha_j + \alpha_k) \in F(i)$.

Como existen infinitos elementos en $F - T$ y solo un número finito de parejas (j, k), con $1 \leq j < k \leq n$, entonces existen c_1 y c_2 en $F - T$ con $c_1 \neq c_2$ y una pareja (j, k), con $1 \leq j < k \leq n$, tales que

$$\alpha_j \alpha_k + c_1(\alpha_j + \alpha_k) \in F(i)$$

$$\alpha_j \alpha_k + c_2(\alpha_j + \alpha_k) \in F(i)$$

Y restando ambas ecuaciones, obtenemos

$$(c_1 - c_2)(\alpha_j + \alpha_k) \in F(i),$$

pero como $c_1 - c_2 \in F - \{0\}$, entonces

$$\alpha_j + \alpha_k \in F(i);$$

también,

$$\alpha_j \alpha_k = (\alpha_j \alpha_k + c_1(\alpha_j + \alpha_k)) - c_1(\alpha_j + \alpha_k) \in F(i).$$

Luego
$$(\alpha_j - \alpha_k)^2 = (\alpha_j + \alpha_k)^2 - 4\alpha_j^2\alpha_k^2 \in F(i)$$
De donde, tenemos que
$$\alpha_j - \alpha_k \in F(i)$$
Luego
$$\alpha_j = \frac{1}{2}((\alpha_j + \alpha_k) + (\alpha_j - \alpha_k)) \in F(i)$$
$$\alpha_k = \frac{1}{2}((\alpha_j + \alpha_k) - (\alpha_j - \alpha_k)) \in F(i)$$
Por consiguiente, $f(x)$ tiene más de una raíz en $F(i)$.

$\square$

Teorema 6.12. *Si F es un cuerpo cerrado real, no es algebraicamente cerrado; pero el cuerpo $F(i)$ obtenido por la adjunción a F de una raíz i del polinomio $x^2 + 1$ sí lo es.*

Demostración. **1.** Si F fuera algebraicamente cerrado, existiría $c \in F$, tal que $c^2 + 1 = 0$.
Luego $c^2 = -1$, lo cual es una contradicción.

2. Como F es cerrado real, también es ordenado y además todo elemento positivo de F es el cuadrado de un elemento de F. Por otra parte, el Teorema 6.7 nos permite afirmar que todo polinomio de grado impar sobre F tiene por lo menos una raíz en F. Aplicando el Teorema 6.12, tenemos que $F(i)$ es algebraicamente cerrado.

$\square$

Teorema 6.13. *Si F es un cuerpo cerrado real, los únicos polinomios irreducibles de $F[x]$ son los lineales o los cuadráticos de la forma $ax^2 + bx + c$, con $b^2 - 4ac < 0$.*

Demostración. Sea $f(x)$ un polinomio irreducible sobre F. Como F es cerrado real, existe una raíz α de $f(x)$ en $F(i)$. Luego
$$\partial f = [F(\alpha) : F] \leq [F(i) : F] = 2.$$
De donde $\partial f = 1$ ó $\partial f = 2$.
Si $\partial f = 1$, entonces $f(x)$ es un polinomio lineal.

Si $\partial f = 2$, $f(x)$ es de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.
Si $b^2 - 4ac \geq 0$, existe $w \in F$ tal que $w^2 = b^2 - 4ac$. Luego

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b+w}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-w}{2a}\right),$$

lo cual no es posible, ya que $f(x)$ es irreducible sobre F.
Por lo tanto $b^2 - 4ac < 0$.

□

Teorema 6.14. *Si F es cerrado real y K es una extensión finita de F, entonces K es isomorfo a $F(i)$.*

Demostración. Sea $v \in K - F$. Existe $f(x) \in F[x]$ irreducible, tal que $f(v) = 0$. Como $F(i)$ es algebraicamente cerrado, existe $u \in F(i)$ tal que $f(u) = 0$. Por el teorema de isomorfismos de cuerpos de ruptura, tenemos que existe un único isomorfismo φ de $F(u)$ sobre $F(v)$, tal que $\varphi|_F = id$ y $\varphi(u) = v$. De esto se infiere que $[F(v) : F] = [F(u) : F]$. Pero

$$[F(v) : F] > 1 \text{ y } [F(u) : F] \leq [F(i) : F]{=}2,$$

entonces $[F(u) : F] = 2$, luego $F(u) = F(i)$; y por lo tanto $F(v) = F(i)$. Gracias a este hecho, fácilmente podemos probar que $F(v)$ es también algebraicamente cerrado.

Si $F(v) \neq K$, existe $w \in K - F(v)$, tal que $[F(v)(w) : F(v)]$ es finito y mayor que uno. Por lo tanto, el polinomio mínimo para w sobre $F(v)$ tiene grado mayor o igual a dos, lo cual es imposible, ya que $F(v)$ es algebraicamente cerrado.

□

Corolario 6.3. *Toda extensión propia y finita de los reales es isomorfa a los complejos.*

Aquí surge una conjetura, que si todo cuerpo cerrado real cumple con el axioma del extremo superior, lo cual llegaría a caracterizar el conjunto de los números reales de una forma más general.

Capítulo 7

Demostración del Teorema Fundamental del Álgebra a partir del Análisis Matemático

7.1. Demostración empleando el Teorema de Rouché

7.1.1. Biografia de Rouché

Eugène Rouché (Sommières, 1832-Lunel, 1910) Matemático Francés nacido en Sommières al sur de Francia, esta ciudad está situada entre Nimes y Montpellier. Después de estudiar matemáticas, Rouché enseñó en el Lycée Charlemagne y luego fue profesor en el Conservatoire des Arts et Métiers en París. También actuó como un examinador en el École Polytechnique. Rouché publicó muchos artículos matemáticos, algunos de los cuales aparecían en el Comptes Rendus y otros en el Journal de l'École Polytechnique. Por ejemplo, publicó **Mémoire sur la serie de Lagrange** en la segunda de estas revistas en 1862. También escribió muchos libros incluyendo **Traité de géométrie élémentaire** en 1874, **Éléments de Statique Graphique** en 1889, **Coupe des pierres : précédée des principes du trait de stéréotomie** en 1893, y **Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs** en los años 1900-02 el cual era un libro de cálculo escrito para ingenieros. Este trabajo de dos volumenes fue resultado de la colaboración con Lucien Lévy (nacido en 1853) quién fue el padre del conocido matemático Paul Lévy. Otro de sus famosos libros de geometría fue escrito junto con Ch De Comberousse, llamado **Traité de géométrie**. Este aparecía en dos volumenes siendo el primero sobre Géométrie plane y el segundo sobre Géométrie dans l'espace. Este libro fue primero publicado en 1883 pero tuvo muchas ediciones. La séptima edición de este libro fue publicada en Paris por Gauthier-Villars en 1900. Era un mayor tratado, en donde los volumenes tenían 548 y 664 paginas respectivamente. Las ediciones se siguieron prublicando después de la muerte de Rouché, con una nueva edición publicada en París por Gauthier-Villars en 1922. Laguerre murió en 1886 y Rouché se convirtió en uno de los editores que trabajó en la producción de sus trabajos recogidos, los otros dos eran Hermite y Poincaré. Aunque el día de hoy muy pocos saben quien fue Rouché, su nombre es conocido debido al teorema de Rouché, en cual publicó en el Journal de l'École Polytechnique 39 (1862). En 1875 Rouché publicó un artículo de dos páginas **Sur la discussion des equations du premier degré** en el volume 81 del Comptes Rendus de la Académie des Sciences. Este corto artículo contenía su resultado sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Este es el conocido criterio que dice que un sistema de ecuaciones lineales tiene una solución si y solo si el rango de la matriz del sistema homogeneo asociado es igual al rango de la matriz aumentada del sistema. Rouché luego publicó una versión más completa de este teorema en 1880 en el Journal de l'École polytechnique. De hecho, él no fue el primero en probar este resultado, ya que luego de que el artículo de Rouché apareció, Georges Fontené publicó una nota en el Nouvelles Annales de Mathématiques alegando prioridad. Cuando Frobenius discutio este resultado en sus artículos, por ejemplo en el **Zur Theorie der linearen Gleichungen** publicado en el Crelle's Journal en 1905, el dió credito de la prueba de este teorema tanto a Rouché como a Fontené. La ciudad en la que Rouché murió es cercana a su lugar de nacimiento, de hecho, está situada entre Sommières y la costa sur de Francia.

7.1.2. Teorema de Rouché

Teorema 7.1. *Teorema de Rouché*
Sea Γ una curva de Jordan, R la región acotada determinada por Γ y, f y g funciones analíticas en $\Gamma \cup R$, si $||g(z)|| \leq ||f(z)||, \forall z \in \Gamma$, entonces el número de ceros de $f+g$ en R es igual al número de ceros de f en R.

Para una demostración ver [15]

El teorema de Rouché dice que si se somete a una función f a una pequeña perturbación g, pequeña en el sentido de que sobre una curva γ su módulo sea inferior al de f, entonces la función modificada tiene el mismo número de ceros encerrados por γ que la función no perturbada.

7.1.3. Demostración del Teorema Fundamental del Álgebra

Sea

$$p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$$

en $\mathbb{C}[z]$ con $a_n \neq 0$ y $n \geq 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n z^n \\ g(z) &= a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1} \end{aligned}$$

Si $r > 1$ y $z \in C_r(0)$, entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{g(z)}{f(z)} \right\| &= \left\| \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1}}{a_n z^n} \right\| \\ &\leq \frac{\|a_0\| + \|a_1\| r + ... + \|a_{n-1}\| r^{n-1}}{\|a_n\| r^n} \end{aligned}$$

$r^{n-1} \geq r^k, \forall 0 \leq k \leq n-1$

$$\left\| \frac{g(z)}{f(z)} \right\| \leq \frac{\|a_0\| + \|a_1\| + ... + \|a_{n-1}\|}{r \|a_n\|}$$

Tomando r tan grande tal que

$$\frac{\|a_0\| + \|a_1\| + ... + \|a_{n-1}\|}{\|a_n\|} < r$$

entonces $\|g(z)\| < \|f(z)\|, \forall z \in C_r(0)$

Por el teorema de Rouché, el número de ceros de $p(z) = f(z) + g(z)$ en $N_r(0)$ es igual al número de ceros de $f(z)$ en $N_r(0)$ que es n ceros localizados en $z = 0$.

Entonces, $p(z)$ también tiene n ceros.
$\square$

Capítulo 8

Demostración del Teorema Fundamental del Álgebra a partir de la Topología

8.1. Demostración del Teorema Fundamental del Algebra utilizando el Teorema del Punto Fijo

8.1.1. Biografia de Brouwer

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), matemático holandés, fue profesor en la Universidad de Amsterdam y miembro más destacado de la Escuela de Amsterdam. Sus investigaciones en matemáticas se centraron principalmente el las siguientes ramas: el ánalisis tensorial y la geometría diferencial, en donde introdujo la noción de transporte paralelo de un vector para superficies de curvatura constante (1906); la topología de los conjuntos de puntos y, sobre todo, la topología combinatoria, en la que introdujo las innovaciones de las nociones de símplex y cómplex y estableció en 1911 un teorema fundamental sobre los puntos fijos. Como en el caso de Kronecker, la mayor parte de sus investigaciones en matemáticas, y en particular en topología, no reflejan sus concepciones filosóficas de las matemáticas, pero de ello no se debe concluir que su filosofía no sea seria.

Su tesis de 1904 marca el comienzo de la elaboración de su filosofía intuicionista, porque una parte trata precisamente de los fundamentos de las matemáticas en el estilo del intuicionismo. Después, en 1907, elaboró las bases de su filosofía en su tratado **Sobre los fundamentos de las matemáticas** y a partir de esa fecha y hasta 1926 dedicó a su filosofía varias memorias publicadas en diferentes revistas.

Como Kant y Poincaré, Brouwer sostenía que los teoremas matemáticos son verdades sintéticas a priori. En su discurso inaugural de 1912 en la Universidad de Amsterdam, Brouwer mantuvo que la aritmética e incluso todas las matemáticas debían provenir de la intuición del tiempo, incluida la geometría, pues la intuición fundamental era la aparición de las percepciones en una sucesión temporal. De esta intuición de la "bi-unicidad" desnuda obtenemos, según dice, en primer lugar la noción de una sucesión de números ordinales, y después la noción del continuo lineal, es decir de este "entredos" que no se puede agotar por la interposición de nuevas unidades y que, además, no puede nunca concebirse como una simple colección de unidades. Solo existe el conjunto numerable, y por consiguiente no hay cardinales salvo $\aleph_0$, el cardinal del conjunto cuyos miembros pueden ponerse en correspondencia biunívoca con la sucesión de los números naturales. En particular, no se puede dar un significado a una frase como "el conjunto de todos los números reales entre 0 y 1". Incluso para Brouwer, el conjunto de los números naturales es infinito potencial que puede crecer sin fin.

Cuando Brouwer habla de la intuición, se refiere solamente a una especie de aprehensión clara de la inteligencia de aquello que ella misma ha construido. Así, concebia el pensamiento matemático como un proceso de construcción que edifica su propio universo, independiente de los otros, como una especie de representación libre, sujeta solamente a lo que reposa sobre la intución matemática fundamental.

Brouwer y su escuela analizaron los principios lógicosy retuvieron aquellos que son admisibles con el fin de que la lógica habitual sea conforme a estos últimos y exprese adecuadamente las intuiciones exactas. Por ejemplo, Brouwer analizó la ley del tercero excluido y mostró que era aplicada demasiado libremente, lo que había tenido como consecuencia el excluir númerosas demostraciones de existencia y el aportar proposiciones no "decidibles". En particular, ¿es verdadero o falso que "la sucesión de las cifras 123456789 aparece en alguna parte en la representación decimal del número π?". Como no existe método conocido para decidirlo, no se puede, según Brouwer, aplicar la ley del tercero excluido y por tanto esta proposición puede ser verdadera o falsa. Por el contrario, en el caso de un libro que contiene errores tipográficos sí se puede utilizar esta ley, porque la conclusión se obtendrá en un número finito de etapas escrutando minuciosamente todas las páginas, una detrás de otra.

8.1.2. Teorema del punto fijo

Teorema 8.1. *Cualquier transformación continua del círculo $|z| \leq R$ en sí mismo tiene un punto fijo. Aquí R es un número real positivo arbitrario y z es una variable compleja.*

Para una demostración ver [3]

8.1.3. Demostración del Teorema Fundamental del Álgebra

Sea

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$$

cualquier polinomio complejo. Debemos probar que $f(z)$ tiene por lo menos una raíz. Para este fin, sea $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $R = 2 + |a_1| + ... + |a_n|$ y definimos una función no analítica $g(z)$ como

$$g(z) = \begin{cases} z - f(z)/(Re^{i(n-1)\theta r}) & |z| \leq 1 \\ z - f(z)/(Rz^{n-1}) & |z| \geq | \end{cases}$$

La función $g(z)$ es continua para todos los valores de z. Primero, cada una de las dos expresiones dadas para $g(z)$ es continua en todo el rango especificado, ya que ningún denominador se vuelve cero y, para $z = 0$, tenemos $r = 0$ por lo que $i(n-1)\theta r = 0$, sin importar el valor que tenga θ. Segundo, para $|z| = 1$, las dos expresiones son idénticas.

Para $|z| \leq R$, tenemos $|g(z)| \leq R$. Veamos.

- Para $z \leq 1$

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq |z| + \left|\frac{f(z)}{R}\right| \\ &\leq 1 + \frac{1 + |a_1| + ... + |a_n|}{R} \\ &\leq 1 + 1 \\ &\leq R \end{aligned}$$

- Para $1 \leq |z| \leq R$

$$
\begin{aligned}
|g(z)| &= \left| z - \frac{z}{R} - \frac{a_1 + ... + a_n z^{1-n}}{R} \right| \\
&\leq \left| (R-1)\frac{z}{R} \right| + \frac{|a_1| + ... + |a_n|}{R} \\
&\leq R - 1 + \frac{R-2}{R} \\
&\leq R
\end{aligned}
$$

Ahora consideremos la correspondencia $z \to g(z)$. Los últimos dos párrafos muestran que esta es una transformación continua que envía el círculo $|z| \leq R$ en sí mismo. Luego, por el teorema del punto fijo de Brouwer, existe almenos un valor z_0 tal que $g(z_0) = z_0$. Pero por la definición de $g(z)$, esto significa que $f(z_0) = 0$ y que $f(z)$ tiene por lo menos una raíz.
□

Capítulo 9

Pruebas de Gauss del TFA: Un esquema

9.1. Biografia de Gauss

Johann Friederich Carl Gauss Nació en la ciudad de Brunswick (Alemania Septentrional), el 30 de abril de 1777. Hijo único de Gerhard Diederich Gauss y Dorothea Beriz. Su padre se dedicaba a los trabajos pesados de jardinero, constructor de canales y albañil, provenía de una familia de pequeños granjeros, mientras que su madre era hija de un picapedrero que murió a los 30 años.

Dorothea era una mujer recta, de inteligencia innata y gran carácter, factor que fue definitivo para imponerse sobre su esposo en los aspectos relativos a la formación intelectual de su hijo. Gerhard era un hombre brusco, de lenguaje grosero y cuyo trato para con Johann Friederich fue muy fuerte; no contaba ni con los medios, ni con el interés para contribuir con el desarrollo del talento de su hijo. Si su opinión hubiera prevalecido, posiblemente este genio universal habría terminado de jardinero o albañil.

Gerhard y Dorothea se casaron en 1776 a la edad de 33 y 34 años respectivamente. El pequeño Johann empezó a demostrar su excepcional genialidad muy temprano. En alguna ocasión, antes de cumplir los tres años, su padre estaba realizando unas cuentas cuando sorprendéntemente fue interrumpido por su hijo quien le manifestó que estaban mal hechas y le dió la respuesta acertada. Para aprender a leer, sólo basto que le mostraran las letras y le indicaran su pronunciación, y sin que nadie le enseñara aritmética, intuyó el significado de los enteros $1, 2, ...$ al enumerar el alfabeto, por esta razón decía "supe contar antes que hablar".

La primera persona que se propuso contribuir a su desarrollo intelectual, fue su tio materno Friederich Beriz, hombre muy inteligente, que hizo cuanto pudo para lograr despertar su capacidad de razonamiento. Gauss siempre mantuvo una gran admiración por él y a la muerte de su tio, dijo que se "había perdido un genio innato".

En 1784 ingresó a la escuela elemental. Aunque era el alumno más destacado, no hubo ningún hecho de enorme magnitud en los tres primeros años. En 1785, Gauss empezó a recibir clases de aritmética; en cierta ocasión su profesor J.G. Büttner planteó el siguiente problema:

Hallar la suma de

$$81297 + 81495 + 81693 + ... + 100899$$

escrito en una forma moderna

$$\sum_{k=0}^{99} 81297 + k198$$

sorprendido observó que inmediatamente Johann le entregó la respuesta acertada (91099800). Este hecho asombró a Büttner que se dedicó a difundir la proeza e inclusive le regaló un libro especial de aritmética ya que Gauss parecía no encontar nada nuevo en su cartilla. El ayudante de Büttner Johann Martin Bartels (1769-1836), comprendió que Gauss era un genio y le dedicó una mayor atención; desde esa época se inicia una gran amistad entre ellos, la cual solo terminó con la muerte de Bartels.

Fue precisamente en esta época en la que Gauss encontró la primera demostración rigurosa del teorema del binomio para los casos en los cuales el exponente es negativo; esta demostración, es el inicio del enfoque moderno en el tratamiento del Análisis Matemático, ya que en ella introduce el rigor en el tratamiento de los procesos infinitos.

Carl Friederich entró a la secundaria en 1788 y allí adquirió un sólido conocimiento del griego y latín; éste último, pre-requisito indispensable para seguir una carrera académica. Bartels se las ingenió para lograr conseguir una entrevista con Carl Wilhelm Ferdinand, duque de Brunswick, la cual se realizó en 1791. El duque quedó profundamente impresionado con la capacidad del muchacho y resolvió financiar el resto de su educación; es así como en febrero de 1792 se matriculó en el **Collegium Carolinum** de Brunswick.

En conveniente reconocer que Gauss, nunca hubiera salido adelante sin la ayuda directa de gente interesada en promover su talento, entre ellos se destaca el canciller Von Zimmermann, un profesor de la academia y alto colaborador del duque. Pero esta influencia lo acompañó solo hasta 1806, año en el cual ocurrió la invasión Napoleónica. Afortunadamente, un año antes había sido nombrado director del Observatorio de Göttingen.

A la edad de 16 años empezó a intuir, la existencia de una geometría distinta a la euclidiana. Como alumno del **Carolinum** estudió las obras más importantes de sus predecesores, entre ellos el Álgebra de Euler, algunos trabajos de Análisis de Lagrange y en especial los **Principia** de Newton por quien siempre profesó una profunda admiración: en sus escritos lo calificaba de **Summus**. Estas lecturas lo condujeron sin lugar a dudas a las mismas conclusiones a las que llegó el genio noruego Niels Henrik Abel pocos años después, sobre la necesidad de llenar lagunas y completar lo que había sido hecho a medias; se centró principalmente en los trabajos sobre aritmética superior que era su tema favorito. Él no solo mejoró las pruebas sino que también añadió una capacidad inventiva que hasta ahora no ha podido ser superada.

El año 1795 fue uno de más positivos para Gauss. En el redescubrió la ley de reciprocidad cuadráticas y además dió la primera de la misma. Leonhard Euler lo había enunciado de forma incorrecta y Legendre logró hacerlo correctamente, pero la supuesta prueba que dió estaba equivocada. Vale la pena reconocer, que este fue uno de los resultados que más lo hicieron sentirse orgulloso, lo llamaba "La Joya de la Aritmética", el "Theorema auscum".

En octubre de 1795, Gauss ingresa a la universidad de Göttingen en donde permanece dedicado al estudio de la matemática hasta 1798; sus biógrafos coninciden en afirmar que estos tres años fueron los más prolíficos de su vida. El 30 de marzo de 1796 es una fecha importante en la vida de Gauss, ya que ese día culminó la construcción del polígono regular de 17 lados. Fue tal el impacto que le causó este resultado, que resolvió definitivamente abandonar la filosofía y dedicarse al estudio de la matemática y sus aplicaciones. Este día comenzó a escribir su famoso diario científico (Notizenjournal) y la primera anotación que allí aparece es este gran descubrimiento. Zimmermann publicó el resultado de Gauss en la revista: "**Intellegenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung**". El fruto de los estudios de Gauss en Göttingen, fue el tratado "**Disquisitiones Arithmeticae**", publicado en el verano de 1801 en Leipzig. Esta obra no solo es la más famosa de Gauss, sino que también es el libro de más trascendencia que se ha escrito en teoría de números. Este libro finaliza con varias tablas, las cuales fueron compiladas por Gauss para beneficio del lector. Esta magistral obra la dedicó a su gran benefactor el duque de Brunswick, en señal de gratitud por el valioso apoyo que le brindó.

En otoño de 1798, Gauss abandonó la universidad de Göttingen y retornó a Brunswick sin su diploma. Sin embargo por medio de una petición hecha por el duque, se le permitió presentar su tesis doctoral en la universidad de Helmstedt. El 16 de junio de 1799 antes de que la tesis fuera publicada obtuvo el título de "Doctor Philosophiae", el grado fue concedido "In Absentia" sin haber presentado el examen oral usual.

En esta época Gauss recibía una ayuda anual del duque, por la suma de 158 tálaros. La publicación de la tesis también fue financiada por el duque y apareció en 1799 bajo el título: "Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse" (Una nueva prueba de que toda función algebraica racional entera de una variable puede ser descompuesta en factores reales de primero o segundo grado).

No se sabe por qué le colocó ese título, ya que la prueba dada por él fue la primera y por tal razón no tiene sentido decir que se trata de una nueva prueba.

La tesis de Gauss es el famoso **Teorema Fundamental del Álgebra**. La demostración de este teorema, ha sido de gran importancia en el desarrollo de la matemática moderna, por los siguientes aspectos:

- Con el se inician las pruebas de existencia, que han sido base fundamental del avance de la matemática.
- Por primera vez se utilizan los números complejos y el plano complejo en las teorías matemáticas.
- Al demostrarse que todo polinomio no constante tiene por lo menos una raíz, y probar que Abel y Galois que no existe una fórmula por radicales que permita solucionar el polinomio general de grado n para todo $n \geq 5$, los matemáticos se vieron obligados a buscar otros caminos indirectos, como por ejemplo los métodos numéricos, que los condujeron a la consecusión de raíces de polinomios.

Como fue su costumbre con algunos resultados matemáticos, Gauss no se contentó con dar una sola prueba de este teorema, sino que en distintos periodos de su vida dió otras tres demostraciones del mismo. La segunda fue publicada en 1815 con el título "Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse"; es la más algebraica de todas, en ella utiliza las propiedades de las funciones simétricas e introduce los cuerpos de ruptura de un polinomio, demostrando que siempre están contenidos en los complejos.

La tercera prueba aparece en 1816 bajo el título "Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia". La cuarta y última demostración fue publicada en 1849, pero la obtuvo en 1847 a los 70 años de edad. Es similar a la primera aunque mucho más rigurosa.

Durante su permanencia en Göttingen, Gauss no solo de interesó por las matemáticas, sino que también incurcionó por los campos de la astronomía. Allí conoció al profesor C.F. Seyffer, quien lo indujo hacia el estudio de la teoría de la luna. Estudiando la literatura clásica aprendió acerca del principal problema de la astronomía matemática: el cálculo de las órbitas de los cuerpos celestes. El éxito de Gauss se debió a que resulta sumamente difícil predecir el movimiento de los planetas con un pequeño número de observaciones, porque esto nos conduce a la solución de un sistema cuadrado de ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes bastante complicados, lo cual nos obliga a aproximar sus soluciones. Las posibles órbitas que se pueden obtener son de los tipos: Elíptica, parabólica e hiperbólica.

El 9 de octubre de 1805, Gauss contrajo matrimonio con Johanna Osthoff, hija de un curtidor, para quien él había sido empleado el año anterior. Johanna era tres años menor que él. De algunos escritos de Gauss, se desprende que el matrimonio transcurrió dentro de una gran armonía. Como fruto de este matrimonio, nacieron tres hijos: Joseph, Minna y Louis.

Alexander Von Humboldt y otros amigos influyentes, consiguieron que Gauss fuera nombrado en 1807 director del Observatorio de Göttingen "con el privilegio y deber cuando sea necesario de explicar matemáticas a los estudiantes universitarios".

Su padre murió en 1806 a la edad de 62 años, mientras que la madre sobrevivió a su esposo 33 años, muriendo en Göttingen a la edad de 96 años.

En el otoño de 1809, Johanna murió a consecuencia del parto de su hijo Louis. Ella falleció un mes y un día después del nacimiento y unos pocos meses más tarde corrió la misma suerte el pequeño Louis.

Para Gauss la muerte de Johanna fue un terrible golpe. Con el fín de formar un nuevo hogar tan pronto como fuera posible, para poder así darle una madre a sus hijos, Gauss se casó con Minna Waldeck, hija de un acaudalado y prestigioso profesor de Jurisprudencia, el canciller Johann Peter Waldeck. Los sentimientos de Gauss para con su segunda esposa eran mas de obligación que de afecto.

La estabilidad emocional volvió nuevamente a Gauss. Pronto se vió adornado su nuevo hogar con tres niños: Eugen en 1811, Wilhelm en 1813 y Theresa en 1816.

Otro de los temas que investigó, está relacionado con el estudio de los residuos bicuadráticos. Los principales resultados que obtuvo al respecto se encuentran en los papeles titulados: "Theoria residuorum biquadtraticorum I y II", ambos fueron publicados en el **Journal** de la real sociedad de Göttingen, en ellos estudió las relaciones existentes entre las cogruencias,

$$x^4 \equiv P \mod q \quad y \quad x^4 \equiv q \mod P$$

P y q primos impares y relativos.

Pronto comprendió que los enteros racionales no son los números apropiados para estudiar las relaciones entre ambas congruencias. Por esta razón introdujo los hoy denominados enteros gaussianos; esto es, el conjunto

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

e hizo un detenido análisis de las propiedades aritméticas de $\mathbb{Z}[i]$. Este es el aporte más relevante de Gauss al desarrollo de la teoría de números algebraicos.

El 18 de febrero de 1811 Gauss envió una carta a su amigo Bessel en la que le informaba acerca de un descubrimiento que había hecho, el cual afirmaba:

"Si f es una función analítica en el interior y sobre la frontera de un contorno Γ entonces

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0''$$

Como no lo publicó, tuvieron que redescubrirlo primero Cauchy y luego Weierstrass. Este resultado es hoy conocido con el nombre de "Teorema de la integral de Cauchy", y es la piedra angular sobre la cual se sustenta la teoría de funciones de una variable compleja.

También, incursionó hacia 1820 Gauss en el campo de la geodesia (determinación de la forma y tamaño de la tierra), tanto de forma teórica como práctica. En 1821 se le encargó, por parte de los gobiernos de Hannover y Dinamarca, el estudio geodésico de Hannover. A tal fin Gauss ideó el heliótropo, instrumento que refleja la luz del sol en la dirección especificada, pudiendo alcanzar una distancia de 100 Km y haciendo posible la alineación de los instrumentos topográficos. Trabajando con los datos obtenidos en sus observaciones elaboró una teoría sobre superficies curvas, según la cual, las características de una superficie se pueden conocer midiendo la longitud de las curvas contenidas en ella. A partir de los problemas para determinar una porción de superficie terrestre surgieron problemas más profundos, relativos a todas las superficies curvas, terminándose por desarrollar el primer gran período de la geometría diferencial.

A partir de 1831 comenzó a trabajar con el físico Wilhelm Weber en la investigación teórica y experimental del magnetismo. Ambos inventaron un magnetómetro y organizaron en Europa una red de observaciones para medir las variaciones del campo magnético terrestre. Gauss pudo demostrar que el origen del campo estaba en el interior de la tierra. Gauss y Weber trabajaron así mismo con las posibilidades del telégrafo, el suyo, fue probablemente el primero que funcionó de manera práctica, adelantándose en siete años a la patente de Morse.

Después de su muerte se supo que Gauss había encontrado la doble periodicidad de las funciones elípticas. Gauss se encuentra entre los primeros en dudar de que la geometría euclídea fuese inherente a la naturaleza humana. El axioma de las paralelas, básico en la geometría euclídea, había sido objeto de estudio a lo largo de siglos, intentándose demostrar a partir de los restantes axiomas de Euclides sin resultado alguno. Algunas de sus anotaciones hacen ver que Gauss pensaba que podría existir una geometría en la que no se verificase el axioma de las paralelas. En 1820, Janos Bolyai, llegó a la conclusión de que la demostración del teorema de las paralelas era imposible y comenzó a utilizar una nueva geometría que no utilizara el axioma de Euclides. Tres años más tarde publicó sus resultados, estos fueron acogidos de manera muy fría por el propio Gauss, señalando que él ya había llegado a esas conclusiones muchos años antes.

En enero de 1854 se le diagnosticó que sufría de un ensanchamiento del corazón; hizo todo lo posible por cuidarse logrando una mejoría. El 16 de junio de 1854 asistió a la inauguración del ferrocarril entre entre Göttingen y Hannover, allí sufrió un accidente debido a que los caballos del coche en el que viajaba se desbocaron y como consecuencia de esto tuvo una fuerte conmoción. Aunque se recuperó de los golpes sufridos, en este día se inició su declive el cual finalmente lo condujo a la tumba.

Gauss luchó contra su enfermedad, pero esta lo derrotó definitivamente el 23 de febrero de 1855 en las horas de la mañana a la edad de 77 años. Al funeral asistieron los más destacados científicos de Göttingen, así como también altos funcionarios del gobierno. El único discurso que se publicó estuvo a cargo de su yerno H. Edwald, quien lo consideró como: “un único e incomparable genio”.

9.2. Exposición Histórica y matemática

El matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), comúnmente considerado como uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, y quien incluso fue llamado *princeps mathematicorum*, realizo numerosos y destacados aportes a diversos campos de las matemáticas, física y geodesia. Entre sus logros más importantes, uno al cual Gauss le brindo especial atención fue la prueba de lo que es, erroneamente conocido como el Teorema Fundamental del Álgebra, un resultado básico del análisis que dice:

Todo polinomio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ puede ser factorizado en factores lineales sobre los números complejos.

Gauss usó una formulación alterna que evadía la noción de números complejos, diciendo

Todo polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ puede ser factorizado en factores lineales y cuadráricos.

Esta formulación es equivalente a la primera, porque si $f \in \mathbb{C}[x]$, entonces $g = f\overline{f} \in \mathbb{R}[x]$ y una factorización de $g(x)$ llevaría a una factorización de $f(x)$, porque toda raíz de $f(x)$ es también una raíz de $g(x)$.
El primer intento para probar el Teorema Fundamental del Álgebra (TFA) es usualmente acreditado a d'Alembert [13], pero Carl Friedrich Gauss es a menudo considerado de haber ofrecido su primera prueba satisfactoria. Gauss regresó a la elusiva prueba de este teorema una y otra vez. Durante su vida, ofreció no menos de cuatro diferentes pruebas del teorema, cubriendo un tiempo de cincuenta años que abarca toda su vida adulta. Su primera prueba fue materializada en Octubre de 1797 y publicada en su trabajo doctoral [16] en 1799, a la edad de 22. Esta contiene una crítica a los anteriores intentos por probar el teorema dados por d'Alembert, Euler, Fontenex y otros. Gauss vió estos intentos como insatisfactorios, porque ellos presuponian que las raíces del polinomio pueden ser obtenidas como números complejos.
Como veremos, sin embargo, su prueba de 1799, usando nociones geométricas, tenía sus propias piezas faltantes que debían ser demostradas con rigor (que fueron completamente probadas en 1920), y Gauss tampoco estuvo satisfecho con esta. 1816 vió la publicación de Gauss [17] de dos pruebas más del TFA. La primera de estas era técnica y casi estrictamente algebraica; la segunda era una prueba más facil usando el análisis matemático. En 1849, solo unos pocos años antes de su muerte, Gauss ofreció una cuarta prueba que tenía similitud con la primera.

9.3. La primera prueba: Un esquema

Gauss empezó con un polinomio real

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + ... + Lx + M$$

tomando x como una indeterminada. Un factor lineal real puede ser escrito como $x \pm r$, con $r \geq 0$. Un factor cuadrático irreducible sobre los reales puede ser escrito como $x^2 - 2xr\cos\phi + r^2$, de nuevo con $r \geq 0$, las raíces de este son $r(\cos\phi \pm i\sin\phi)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - (r\cos\phi + ir\sin\phi))(x - (r\cos\phi - ir\sin\phi)) \\ &= (x - r\cos\phi)^2 + r^2\sin^2\phi \\ &= x^2 - 2r\cos\phi + r^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) \\ &= x^2 - 2r\cos\phi + r^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = r(\cos\phi \pm i\sin\phi)$ en el polinomio

$$\begin{aligned} X =& x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + ... + Lx + M \\ =& (r\cos\phi + ir\sin\phi)^m + A(r\cos\phi + ir\sin\phi)^{m-1} + ... + L(r\cos\phi + ir\sin\phi) + M \\ =& (r^m\cos(m\phi) + Ar^{m-1}\cos(m-1)\phi + ... + Lr\cos\phi + M) \\ &+ (r^m\sin m\phi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\phi + ... + Lr\sin\phi) \end{aligned}$$

y separandolo en partes real e imaginaria, se obtienen expresiones de la forma

$$\begin{aligned} U &= r^m\cos m\phi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\phi + ... + Lr\cos\phi + M \\ T &= r^m\sin m\phi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\phi + ... + Lr\sin\phi \end{aligned}$$

Gauss nota que si (r, ϕ) satisface $T = 0$ y $U = 0$ simultaneamente, entonces el polinomio X sería divisible por $x \pm r$ ó $x^2 - 2xr\cos\phi + r^2$. El probó esto directamente, notando que una prueba fue dada por Euler [14].
Gauss considera $T = 0$ y $U = 0$ como curvas algebraicas de orden m dadas en las coordenadas polares r y ϕ, dibujadas sobre un plano ortogonal con coordenadas $(r\cos\phi, r\sin\phi)$. Para ver que las curvas son algebraicas, solo debemos utilizar fórmulas trigonométricas estandar para expresar U y T como expresiones algebraicas en $r\cos\phi$ y $r\sin\phi$. Para probar el TFA, Gauss probó que existe un punto de intersección entre las dos curvas $T = 0$ y $U = 0$. Usando su lema anterior, tal intersección sería una raíz del polinomio

X, porque si $U(r, \phi) = \Re(X(x)) = 0$ y $T(r, \phi) = \Im(X(x)) = 0$ entonces $X(x) = 0$.
Para observar la intersección entre las dos curvas, Gauss ahora estudia sus intersecciones dentro de un círculo de radio R, y prueba

> Para un radio R suficientemente grande, existen exactamente $2m$ intersecciones del círculo con $T = 0$ y $2m$ intersecciones con $U = 0$, y todo punto de intersección del segundo tipo se encuentra entre dos del primer tipo.

Este resultado es probado con completo rigor, pero solo después de que la idea fundamental es presentada intuitivamente: Mientras R tiende a infinito, las curvas $T = 0$ y $U = 0$ se acercan a las curvas $\Re(x^m) = 0$ y $\Im(x^m) = 0$ las cuales son líneas rectas a través del origen. Más aún, las líneas donde $\Re(x^m) = 0$ se alternan con aquellas donde $\Im(x^m) = 0$. Temiendo que "los lectores puedan sentirse ofendidos por cantidades infinitamente largas", Gauss da una rigurosa prueba a este resultado, sin utilizar el concepto de límite. En el próximo paso, Gauss nota que "puede ser facilmente visto"que los $4m$ puntos de intersección en el círculo varían muy poco cuando R es ligeramente cambiado. En términos modernos, diriamos que son funciones continuas de R, pero el concepto de continuidad no estaba completamente desarrollado. Gauss ahora llega a la esencia de su prueba: mostrar que las dos curvas se intersectan dentro del círculo. Para esta conclusión él da una intuitiva prueba geométrica: el numera las intersecciones con el círculo secuencialmente, empezando con 0 para el eje x negativo del plano (el cual es siempre parte de la solución para $T = 0$) dando un número impar de intersecciones de $U = 0$ con el círculo, y un número par de intersecciones de $T = 0$. Él ahora dice que "Si una rama de una curva algebraica entra en un espacio limitado, necesariamente tiene que salir de nuevo". En un pie de página, él agrega:

> "Parece estar bien demostrado que una curva algebraica ni termina abruptamente (como sucede en la curva trascendental $y = 1/\log x$) ni se pierde después de un número infinito de devanados en un punto (como un espiral logarítmico). Por lo que se nadie ha dudado de esto nunca, pero si alguien lo requiere, lo tomo en mí para presentarlo, en otra ocasión, con una prueba indudable."(citado en [25])

Si esta observación es aceptada, entonces todo punto de intersección de numeración impar en el círculo está conectado con otro punto de intersección

de numeración impar a través de una rama de la curva $U = 0$, y similarmente para los puntos de numeración par y las ramas de la curva $T = 0$. Pero luego, sin importar que tan complicadas puedan ser estas conexiones, se puede mostrar que existe un punto de intersección, de la siguiente manera. Supongamos que no existe esta intersección. El punto 0 está conectado con el punto $2m$ a través del eje x, que es siempre una rama de $T = 0$. Luego 1 no puede estar conectado con algún punto impar n, $n < 2m$. De la misma manera, 2 está conectado con un par $n' < n$. Notamos que $n' - 2$ es par. Continuando de esta manera, terminamos con un punto de intersección h conectado con $h + 2$. Pero luego la rama entrante al círculo en $h + 1$ debe intersectar la rama conectando h y $h+2$, contrario a nuestra hipótesis. Luego, existe un punto de intersección para $\Re(X) = T = 0$ y $\Im(X) = U = 0$, concluyendo la prueba.
Esta idea de la prueba muestra que la primera prueba de Gauss del TFA está basada en hipótesis sobre las ramas de las curvas algebraicas, las cuales pueden parecer plausibles para la intuición geométrica, pero son dejadas sin ninguna prueba rigurosa de Gauss. Tomó hasta 1920 para Alexander Ostrowski [22] mostrar que todas las hipótesis hechas por Gauss pueden ser totalmente justificadas.
$\square$

Comparación entre las pruebas de Gauss y d'Alembert

D'Almebert fue el primero en intentar probar el TFA en 1746 [13]. Su prueba compartía algunas nociones con la prueba de Gauss de 1799. La clave de esta es una proposición conocida como el *lema de d'Alembert*: Si $p(z)$ es una función polinómica y $p(z_0) \neq 0$, entonces cualquier entorno de z_0 contiene un punto z_1 tal que $|p(z_1)| < |p(z_0)|$. Para probar este lema, d'Alembert uso el método de series de potencias fraccionadas expuesto por Newton en 1671 [20], pero fue hecho completa y rigurosamente por Puiseux en 1850. Argand ofreció una prueba elemental en 1806 [5]. Es claro que, en 1746 d'Alembert tenía una parte faltante en su prueba, así como Gauss en su primera prueba.

Sin embargo, si se acepta el lema de d'Alembert, junto con el teorema del valor extremo de Weierstrass [26], entonces la prueba del TFA es sencilla, en una manera parecida a la primera prueba de Gauss. Como para un $|z|$ grande, $|p(z)|$ está dominado por la principal expresión del polinomio, este crece afuera de un círculo suficientemente grande, con $|z| = R$. El objetivo es probar que dentro del círculo existe un z_0 con $|p(z_0)| = 0$. Pero por el teorema del valor extremo de Weierstrass, $|p(z)|$ tiene un mínimo M dentro del círculo. Si el mínimo se encuentra en el interior del círculo, entonces el lema de d'Alembert lleva a una contradicción. Si se encuentra en la frontera, entonces existe un punto a fuera del círculo con un valor menor de $|p(z)|$, lo cual también es una contradicción. Se puede ver que ambas pruebas limitan el interior de un círculo, donde buscan que $p(z)$ desaparezca.

9.4. La segunda prueba: Un esquema

En 1816 Gauss publicó la segunda prueba del TFA. Esta prueba era estrictamente algebraica y técnica en su naturaleza. Esta solo presupone que toda ecuación real de grado impar tiene una raíz y que toda ecuación cuadrática con coeficientes complejos tiene dos raíces complejas.

Gauss empieza con un polinomio real Y de grado m. Supone por un momento que Y puede ser factorizado en factores lineales

$$Y = (x - a)(x - b)(x - c)...$$

en algún cuerpo de extensión. Cada par de raíces, por ejemplo a y b, pueden ser combinadas en una combinación lineal

$$(a + b)t - ab$$

en una nueva indeterminada t. Enumerando todos las parejas posibles, se pueden formar $m' = \binom{m}{2}$ combinaciones lineales diferentes de esta forma. Se puede construir una ecuación auxiliar de grado m', en la cual sus raíces serían las combinaciones lineales $(a+b)t-ab$, con a y b recorriendo todas las raíces de Y, y t especializado para dejar diferentes funciones lineales de esta forma.

Tan pronto como una raíz de la ecuación auxiliar es conocida, $a + b$ y ab son conocidos, y a y b, dos raíces de la ecuación original, pueden ser convertidas en números complejos al extraer raíz cuadrada.

Ahora, m se puede escribir como $m = 2^\mu k$, con k impar, de tal forma que $m' = \binom{m}{2} = 2^{\mu-1}k'$. Repitiendo este proceso de construir una ecuación auxiliar, se puede llegar a una ecuación de grado impar. Los coeficientes de esa ecuación serían funciones simétricas de $a, b, ...$ con coeficientes reales, por lo que también serían números reales. Como el grado de este polinomio auxiliar real es impar, por lo menos tiene una raíz real. Pasando a través de la serie de polinomios auxiliares hasta el polinomio original, se puede obtener por lo menos una raíz compleja de la ecuación original, tal como se quería.

De esta forma, la prueba funciona si sabemos que el polinomio Y tiene m raíces en algún cuerpo de extensión de $\mathbb{R}$. Tal cuerpo de extensión puede ser formado con el método estándar de Kronecker de "adjunción simbólica", una técnica básica en cuerpos de extensión. Sin embargo, Gauss no toma este camino y construye sus polinomios auxiliares sin asumir la existencia de las raíces.
□

9.5. La tercera prueba: Un esquema

La tercera prueba de Gauss, publicada en 1816, es mucho más simple que la segunda. Iniciando con el mismo polinomio X, Gauss de nuevo sustituye $x = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ y separa en partes real e imaginaria, nombrándolas t y u respectivamente. Luego él introduce sus derivadas con respecto a ϕ

$$t' = mr^m \cos(m\phi) + (m-1)Ar^{m-1}\cos(m-1)\phi + ... + Lr\cos\phi$$
$$u' = mr^m \sin(m\phi) + (m-1)Ar^{m-1}\sin(m-1)\phi + ... + Lr\sin\phi$$

Observando que el término principal de $tt' + uu'$ es

$$mr^{2m}(\cos^2(m\theta) + \sin^2(m\theta)) = mr^{2m}$$

Gauss concluye que $tt' + uu'$ es positivo para un valor suficientemente grande de r, el cual llama R. Más tarde, introduce la segunda derivada con respecto a ϕ,

$$t'' = m^2r^m\cos(m\phi) + ... + Lr\cos\phi$$
$$u'' = m^2r^m\sin(m\phi) + ... + Lr\sin\phi$$

Como en la primera prueba, la meta es mostrar que existe un punto en el plano $(r\cos\phi, r\sin\phi)$ donde $t = 0$ y $u = 0$ simultaneamente, lo cual implicaría la existencia de una raíz compleja para el polinomio X. Supongamos que no existe tal punto, de tal forma que t^2+u^2 es siempre diferente de cero, y luego, la función

$$y = \frac{(t^2+u^2)(tt''+uu'')+(tu'-ut')^2-(tt'+uu')^2}{r(t^2+u^2)^2}$$

es finita en toda parte. Luego, Gauss considera la integral doble

$$\Omega = \int_0^{360^\circ}\int_0^R ydrd\phi$$

El orden de integración no tiene importancia. Por diferenciación, observamos que

$$\int yd\phi = \frac{tu'-ut'}{r(t^2+u^2)}$$

Pero la función en el lado derecho, tiene el mismo valor para $\phi = 0$ y para $\phi = 360^\circ$ (porque en esta hay solo senos y cosenos). Por lo que, al integrar de $\phi = 0$ a $\phi = 360^\circ$, llegamos a que $\Omega = 0$. Sin embargo, si integramos primero con respecto a r, obtenemos la integral indefinida

$$\int ydr = \frac{tt'+uu'}{t^2+u^2}$$

Y volviendo a las definiciones de t' y u', para $r = 0$ esta expresión es cero. Pero para $r = R$, es positiva, como fue argumentado anteriormente. Luego, al integrar de $r = 0$ a $r = R$, llegamos a que Ω es mayor que cero, contrario a lo visto anteriormente. Luego, la hipótesis que t y u nunca son cero simultaneamente nos lleva a una contradicción, y esto completa la prueba.

□

Conclusiones

Este trabajo puede servir de ejemplo sobre la forma como se investiga, organiza y sintetiza los temas en matemáticas que muchas veces reposan en las revistas y que por no estar sintetizados y organizados corren el peligro de pasar desapercibidos dentro de ese maremágnum de producción matemática. A través de él se allana el camino para que quienes estén interesados en ir más allá en relación con ese tema puedan partir de un punto que les permita ahorrar esfuerzos tratando de desplazarse por terrenos que ya han sido recorridos por otros. Es de anotar que lo que aquí se logró va más allá de la mayoría de los escritos sobre el tema que pudimos investigar.

Recomendaciones

La importancia del esquema teórico investigativo que se siguió puede servir de referencia a quienes estén interesados en adentrarse en otros tópicos teóricos de la matemática y sus aplicaciones. Dadas las ventajas comparativas que ofrece la época con el acceso inmediato a bases de datos y fuentes de información, se abren muchas oportunidades de seguir procesos similares con otros temas de la matemática que pueden servir de fuente de inspiración para futuros trabajos de grado.

Bibliografía

[1] American Mathematical Monthly, **74**, PP. 854-855, (1967).

[2] American Mathematical Monthly, **56**, PP. 465-466, (1949).

[3] Apóstol, Tom M., *Análisis Matemático*, Segunda edición.Editorial Reverté S.A., Barcelona, 1976. PP. 112 y 533-540.

[4] Apóstol, Tom M., *Calculus*, Volume I, Second edition. John Wiley and Sons. 1967. PP. 151.

[5] Argand, J.R., *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, París, 1806.

[6] Bell, E.T., *Historia de las Matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, Mexico-Buenos Aires, 1949.

[7] Bell, E.T., *Los Grandes Matemáticos. Desde Zenón a Poincaré*, Editorial Losada, S.A.,Buenos Aires, 1948.

[8] Cain, Harel, *Gauss's proofs of the Fundamental Theorem of Algebra.*

[9] Castro, Iván, *Anotaciones de Variable Compleja.*

[10] Castro, Iván, Caicedo, José Francisco, *Temas de Teoría de Cuerpos, Teoría de Anillos y Números Algebraicos*, Tomo 2, Segunda edición, Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Bogotá, 2008.

[11] Castro, Iván,*Temas de Teoría de Cuerpos, Teoría de Anillos y Números*

Algebraicos, Tomo 3, Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Bogotá.

[12] Collette, Jean-Paul, *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI de España Editores, 1993, pp. 572-575

[13] d'Alembert, J. Le R., *Recherches sur le calcul integral*, Hist. Acad. Sci. Berlin, 2:182-224, 1746.

[14] Euler, Leonhard, *Introductio in analysin infinitorum*, volumen I de Opera Omnia, 1748.

[15] Fine, Benjamin, Rosenberger, Gerhard *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer, 1997.

[16] Gauss, Carl Friedrich, *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, PhD thesis, Universität Helmstedt, 1799.

[17] Gauss, Carl Friedrich, *Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, Comm Recentiores (Gottingae), 3:107-142, 1816.

[18] Mathem. Annalen, **20**, PP. 213-225, (1882).

[19] Molero, María, Salvador, Adela, Menárguez, María Trinidad, y Garmendia, Luis, *Análisis matemático para Ingeniería*, Pearson Prentice Hall. pp. 97-133 y 163.

[20] Newton, Isaac, *Methodis serierum et fluxionum*, Volumen 12 de *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Cambridge 1967-1981.

[21] Oneil, Peter V., *Matematicas avanzadas para Ingeniería*, Cengage Learning Editores, 2008, pp. 404.

[22] Ostrowski, Alexander, *Über den ersten und vierten Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra*, en *Nachrichten der Gesellschaft der Wis-*

senschaften Göttingen 1920.

[23] Stillwell, John, *Mathematics and Its History*, Springer, New York, 1989.

[24] Struik, D.J., *A Source Book in Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge, 1989.

[25] Van der Waerden, B.L., *A History of Algebra*, Springer, Berlin, 1985.

[26] Weierstreass, Karl *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen*, 1874

[27] *http://www.biografica.info/index.php*

[28] *http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Historia.htm*

[29] *http://www.mathematik.de/ger/information/landkarte/gebiete.html*

[30] *http://www.nndb.com/people/440/000098146/*

[31] *http://www.tach.ula.ve/vermig/sintetico.doc.*

[32] *http://www.gap-system.org/ history/Biographies/Rouche.html*